Tese de

Doutorado

Soluções de campos em duas e três dimensões na presença de derivadas superiores

Alexandre Cherman

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF

Rio de Janeiro, 14 de junho de 2012

Agradecimentos

Aos meus pais, Jack e Isabel, por sempre terem investido em minha educação e, sobretudo, por terem construído um ambiente familiar que sempre privilegiou o pensamento.

Ao meu irmão, André, por ter contribuído consideravelmente em minha educação científica.

Aos mestres passados, sobretudo àqueles que, de um jeito ou de outro, ajudaram-me a encontrar o meu caminho. Vincenzo Bongiovanni, Aníbal Ramalho, Regina Arcuri, Teresa Stucchi, Gilson Vieira, Sérgio Menge, Jorge Vieira, Luiz Alberto de Oliveira, Francisco Caruso, Mário Novello e Ívano Soares.

Ao meu ex-orientador, Jair Koiller, por anos e anos de convivência e muitas lições, para a ciência e para a vida.

Aos meus colegas do CBPF, especialmente ao "coronel" Leonardo por tantas discussões valiosas.

Ao Sebastião e ao Ivan, importantes e indispensáveis catalisadores na etapa final que levou à defesa desta Tese.

Aos meus colegas da Marinha, pela torcida. Em especial ao comandante André, aos coordenadores Chaves e Lucena (ambos *in memoriam*) e aos professores Brito, Quintana, Valgas Lobo, Swamy, Jesse e Mesquita.

Aos meus colegas do Planetário, por todo o incentivo que sempre deram aos meus estudos. Em especial ao Fernado Vieira, ao Domingos Bulgarelli, ao Luis Guilherme Haun, ao Nuno Caminada e à Ângela Almeida.

A todos os meus alunos, no Planetário e na Marinha, que me mostram sempre que mais importante do que ensinar é aprender.

Ao meu grande amigo Bruno, ex-aluno e atual colega, por todas as vezes que ele teve que trabalhar dobrado para que eu tivesse tempo livre para me dedicar à tese.

E, finalmente, agradecimentos mais do que especiais às três pessoas sem as quais este trabalho simplesmente não teria acontecido.

Ao meu colega Leandro L. S. Guedes, que se desviou de suas próprias pesquisas para me ajudar na parte numérica desta tese.

Ao meu orientador José Helayel, que, com seu sorriso amplo, sua paciência infinita e seus métodos não-lineares, conseguiu me colocar nos trilhos. O sucesso deste trabalho se deve em muito à sua perseverança e à sua confiança em mim.

À doutora Angélica Cherman, minha esposa e companheira de jornada, maior incentivadora, reservatório de energia que nunca me deixa parar. Nada disso faria sentido sem ela ao meu lado.

Resumo

Usualmente, Lagrangeanos são construídos a partir dos campos e de suas derivadas primeiras. O princípio de ação mínima, aplicado sobre tais funções, resulta em uma equação diferencial de segunda ordem. Se admitirmos um Lagrangeano dependente de derivadas superiores do campo, isto implicará em uma equação diferencial de ordem maior do que dois para a sua propagação. Na primeira metade do século XX, as teorias com derivadas superiores passaram a ser utilizadas para resolver problemas a respeito dos "efeitos de alta freqüência", apesar do surgimento do que ficou conhecido como "modos não-físicos de propagação". O presente trabalho começa com um breve apanhado histórico desse problema, e segue pelo cálculo analítico de soluções de equações de campo com derivadas superiores. O método é primeiramente descrito para o caso usual ($\Box\Phi = 0$) em duas dimesões e depois estendido para os casos $\Box^2\Phi = 0$ e $\Box^3\Phi = 0$. Uma solução analítica para o caso não-homogêneo $\Box^2\Phi = J$ também foi calculada. Tais soluções foram testadas numericamente com o intuito de contornarmos os modos não-físicos de propagação. Há, ainda, no presente trabalho, uma extensão para os casos fermiônicos e também para o caso tridimensional.

Abstract

Usually, Lagrangeans are constructed from fields and their first derivatives. The principle of least action, applied to such functions gives us a differential equation of second order. If we start with a Lagrangean with higher derivatives of the field, the resulting differential equation will have a higher order as well. In the first half of the 20th century, theories with higher derivatives began to be used to solve “high frequency effects”, despite the “non-physical propagation modes” that arised. The present work begins with a brief history of this problem, followed by the analytical solutions of ($\Box\Phi = 0$), $\Box^2\Phi = 0$ and $\Box^3\Phi = 0$ in two dimensions. The solution for the non-homogeneous case $\Box^2\Phi = J$ was aldo computed. These solutions were tested numerically, hoping we could eliminate the non-physical propagation modes. This work also has an extension of such methods to the fermionic cases and also for the tridimensional case.

Sumário

Introdução

Quando Lagrange [1] introduziu seu formalismo na Física, sua primeira aplicação foi em mecânica de fluidos. Ou seja, a função Lagrangeana nasceu com o intuito de tratar problemas contínuos. Seu uso se estendeu para o movimento dos corpos e o primeiro contato que o estudante de Física tem com o formalismo Lagrangeano é sua aplicação em problemas que envolvem sistemas discretos com número finito de graus de liberdade. Com a criação do conceito de "linhas de força" por Faraday [2] (o que hoje chamamos de campo), logo se viu que o formalismo Lagrangeano poderia ser usado na derivação das equações de campo (essa relação foi demonstrada por Maxwell, [3]; a reação de Faraday ao receber um comunicado de Maxwell, segundo Bassalo [4], foi : "A princípio, me assustei quando vi essa formulação [formalismo Lagrangeano] aplicada ao assunto [linhas de força]; porém, depois, vi que o assunto resistiu muito bem à mesma.").

Há uma diferença entre o caso contínuo e o caso discreto, porém. Em Mecânica Clássica podemos descrever um sistema de partículas a partir de um Lagrangeano que depende somente das coordenadas e de suas derivadas (as velocidades). Segundo Landau e Lifschitz [5], isso acontece porque "... em última análise... em mecânica a velocidade de propagação das interações é infinita".

Isso não pode ser extendido à teoria de campos: "devido à velocidade finita da propagação, o campo deve ser considerado como um sistema independente, com seus próprios 'graus de liberdade' ". Esses graus de liberdade são infinitos: o campo e suas derivadas em todos os pontos do espaço em um certo instante de tempo.

(Na verdade, isso nos mostra que o Lagrangeano de um certo ponto é um funcional — uma integral espacial de uma função $\mathcal{L}$, a densidade Lagrangeana. Por ser a função geradora do Lagrangeano L, que por sua vez gerará as equações de campo, a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}$ é a função que, de fato, merece ser investigada. Ela é chamada, corriqueiramente, de Lagrangeano pelos estudiosos da teoria de campos. Isso não será diferente neste trabalho.)

Pois bem, usualmente tais Lagrangeanos são construídos a partir dos campos e de suas derivadas primeiras. O princípio de ação mínima, aplicado sobre tal função, resulta em uma equação diferencial de segunda ordem. O caso mais imediato que se pode usar como exemplo é o Lagrangeano de um campo escalar neutro e sem massa no vácuo, $\Phi(x)$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi(x) \partial^\mu \Phi(x).$$

Mas nada nos impede de admitirmos que o Lagrangeano dependa de derivadas superiores do campo, implicando em uma equação diferencial de ordem maior do que dois para a sua propagação. Tal função será chamada, neste trabalho, de Lagrangeano de ordem superior.

Segundo De León e Rodrigues [6], p. x, "não há muito acordo na literatura acerca do interesse desse tipo de problema". Os autores cogitam que essa linha de investigação tenha começado com Ostrogradsky, em 1848 [7] (infelizmente, esta referência se provou inacessível até o presente momento, mas Whittaker [8], p. 265, corrobora De León e Rodrigues).

Com o surgimento da Mecânica Quântica, e a subseqüente quantização dos campos, os Lagrangeanos de ordem superior deixaram de ser uma mera curiosidade matemática. Segundo Podolsky [9]:

> Se supusermos que as equações da eletrodinâmica são deriváveis a partir de um Lagrangeano, L, e quisermos preservar o caráter linear das equações de campo (o princípio de superposição) afim de tornarmos a quantização fácil, então, a não ser que estejamos preparados para introduzir novos campos, a única maneira de generalizar a teoria de Maxwell-Lorentz parece ser permitir que o Lagrangeano do campo contenha termos envolvendo as derivadas dos campos E e H.
>
> Obtemos, então, como equações de campo, equações diferenciais parciais de ordem superior à usual segunda. Longe de ser um problema, isso parece ser o que era necessário. Pois os vários métodos propostos de truncar efeitos de altas freqüências parecem indicar claramente que as derivadas superiores, que se tornam importantes para as altas freqüências, não são tratadas de forma apropriada pelas equações usuais de segunda ordem.

Neste seu primeiro artigo, Podolsky atacou o caso clássico. Em 1944, com Kikuchi

[10], ele tratou do caso quântico. Em 1948, com Schwed [11], fez uma revisão geral do que chamou de "eletrodinâmica generalizada".

(De León e Rodrigues chamam, ainda, a atenção para o trabalho de F. Bopp [12], referência esta que se provou inacessível até o presente momento.)

No final da década de 40 do século passado, portanto, graças aos trabalhos de Podolsky, as teorias com derivadas superiores tornaram-se excelentes candidatas a resolver problemas a respeito dos "efeitos de alta freqüência". Estes efeitos podem ser brevemente explicados como divergências geradas no cálculo de quantidades físicas mensuráveis (como seções de choque, decaimentos, massas, constantes de acoplamento) devido ao comportamento extremamente singular dos campos quânticos em distâncias muito pequenas. Tais efeitos são comumente chamados de "catástrofe do ultravioleta".

O nome usual dado a um artifício que resolva o problema do ultravioleta é "regularização". Havia, então, nesses primeiros anos da teoria de campos quântico-relativística (*circa* 1950), a esperança de que equações de campo de ordem superior pudessem regularizar a teoria (por exemplo, [13] e [14]).

Pouco tempo depois, porém, Pais e Uhlenbeck [15] demonstraram que em tais teorias, a função energia não possui limite inferior. Ainda que as energias negativas sugerissem soluções não-físicas, eles não descartaram por completo tais tentativas: "Mostrou-se difícil, se possível, reconciliar deste modo [através de equações de ordem superior] as exigências de convergência, a propriedade de definido-positivo... e um comportamento estritamente causal. Progresso talvez seja conseguido se deixarmos de lado a condição de localizabilidade ilimitada de um evento espaço-temporal qualquer".

Heisenberg [16], posteriormente, demonstrou que as energias negativas poderiam ser eliminadas, mas isso resultaria em estados de probabilidade negativa, algo que ficou conhecido como "estados-fantasma". Dois anos depois, Froissart [17] reforçou as idéias de Heisenberg. (Os estados-fantasma foram muito recentemente abordados por Smilga [18], que discute a questão dividindo-os em estados "benignos" e "malignos".)

As teorias com derivadas superiores lentamente retornaram à Física ao longo da década seguinte, tendo seu formalismo (re)construído por Borneas [19], a partir do princípio de ação mínima, tanto para sistemas mecânicos quanto para a teoria de campos. Borneas se concentrou em construir, *a priori*, Lagrangeanos que contivessem termos com derivadas de segunda ordem.

Chiang e Dürr [20] demonstraram a invariância conforme de teorias com derivadas de ordem superior. "Teorias de campo com derivadas superiores que sejam conformalmente invariantes... podem dar origem a interações que *cresçam* com a distância." Os autores sugeriram que estas teorias poderiam estar relacionadas ao problema do confinamento dos quarks. "Mais importante, do nosso ponto de vista, no entanto, é o fato de que teorias com derivadas de ordem superior admitem interações que, se comparadas aos casos convencionais, crescem de forma menos intensa, ou até diminuem a medida que as distâncias diminuem, *i.e.*, que tem um comportamento ultravioleta menos singular." Ou seja, um quarto de século depois, as teorias com derivadas superiores voltavam à carga para tentar contornar a catástrofe do ultravioleta.

Os estados-fantasma foram discutidos por Gavriedlies, Kuo e Lee [21], que demonstraram que teorias com simetria de calibre apresentavam exatamente os mesmos estados-fantasma que teorias sem simetria de calibre. Os autores foram motivados pelo surgimento de derivadas superiores em teorias de gravitação (ou seja, termos quadráticos do tensor de Riemann).

Um grande passo para a reabilitação das teorias com derivadas superiores foi dado por Narnhofer e Thirring [22] ao conseguirem contornar os estados-fantasma, especificamente para o problema do dipolo. Suas idéias foram ampliadas por Englert, Karkowski e Rayski [23]. Um sub-produto importante de [22] é a introdução do estudo de teorias em regimes dimensionais menores do que 4 (3+1). "Em particular, a equação $\Box^2\Phi = 0$ em quatro dimensões se parece, por questões dimensionais, com $\Box\Phi = 0$ em duas dimensões".

A partir do final da década de 70 do século passado, cenários envolvendo derivadas de ordem superior começaram a surgir em diferentes ramos da Física.

Em gravitação, por exemplo, os já citados termos quadráticos do tensor de Riemann no Lagrangeano impulsionaram os trabalhos de Gavriedlies, Kuo e Lee [24], Havas [25], Stelle [26] e Jankiewicz [27]. Tais termos quadráticos tornam a teoria gravitacional renormalizável (Stelle, [28]) e assintoticamente livre (Fradkin e Tseytlin, [29]) e, segundo Bukhbinder e Lyakhovich [30], "tais propriedades sugerem que uma teoria de gravitação com derivadas superiores é uma base melhor do que a relatividade geral para descrever a gravidade em nível quântico". Há, porém, o problema recorrente dos estados-fantasma, que Salam e Strathdee [31], entre outros, sugerem solucionar através de correções radiativas.

Em gravidade em duas dimensões temos, mais recentemente, os trabalhos de Solodukhin [32], Mignemi e Schmidt [33], Naftulin e Odintsov [34] e Hindawi *et al* [35].

Em uma série de três artigos, Kawasaki *et al* estudaram os efeitos das derivadas superiores em uma teoria canônica de gravitação quântica ([36], [37] e [38]). A supergravidade aparece relacionada às derivadas superiores, por exemplo, em Namazie [39] e Krasnikov *et al* [40]. E, sob o ponto de vista da teoria de cordas, teorias de supergravidade podem ser vistas como o limite de baixas energias de uma teoria de supercordas [41].

Ferrara [42] afirmou que "a ação efetiva das supercordas dará origem a termos de ordem superior nas curvaturas". Isso foi inicialmente cogitado por Scherk e Schwarz [41] e mostrado por, entre outros, Witten e Gross [43]. Zwiebach [44] sugeriu termos quadráticos adicionais para forçar a ausência de estados-fantasma, resultando na chamada combinação EGB (Euler-Gauss-Bonnet): $R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2$.

Há, porém, certa ambigüidade nesse tratamento. Deser [45] demonstrou, através do teorema de redefinição de 't Hooft e Veltmann [46], que não há contribuição desses termos quadráticos à amplitude, o que realmente elimina os estados-fantasma.

Deser e Redlich [47] defenderam, então, que o propagador efetivo de grávitons seria sempre livre de estados-fantasma. Ou seja, a partir de uma teoria sem estados-fantasma (cordas), mostrou-se que a ação efetiva (Einstein acrescido da contribuição EGB) previa a ausência desses tais estados. Esse resultado é consistente porém pouco inspirador, visto que a contribuição EGB não pode ser derivada diretamente da teoria das cordas.

Ferrara [42] chamou ainda a atenção para o fato que "em teorias lineares na curvatura de Riemann (supergravidade de Einstein), a supersimetria pode ser implementada de modo razoavelmente simples... De fato, todas as teorias de supergravidade de Einstein com dimensões superiores, e são conhecidas até $D = 11$, já foram construídas e suas propriedades, como quebra de simetria e compactação, estão sob controle".

Ainda Ferrara, "as coisas mudam drasticamente de figura quando termos de curvatura superior ou, mais genericamente, termos com derivadas superiores são acrescentados ao Lagrangeano efetivo". Cecotti *et al* [48] mostraram que isso acontece porque os campos bosônicos não mais obedecem equações algébricas de transformação, mas sim equações diferenciais.

(Lagrangeanos efetivos são estudados no contexto das derivadas superiores uma vez que os problemas usuais de tais teorias — *e.g.* energia sem limite inferior — desaparecem. Isso acontece quando as equações de movimento são usadas para eliminar tais derivadas superiores; a aplicação do formalismo Hamiltoniano — equações de movimento — para eliminar as derivadas superiores nada mais é do que o método de Ostrogradsky. Lagrangeanos efetivos foram estudados, por exemplo, por Krasnikov *et al* [40] e Grosse-Knetter [49].)

Mais recentemente, Ovrut *et al* ([50], [51], [52] e [53]) estudaram as teorias gravitacionais de ordem superior no cenário das supercordas. Sob o ponto de vista das branas, termos com derivadas superiores foram considerados por Nojiri e Odintsov [54], Neupane [55], Mukohyama [56] e Parry *et al* [57].

Também a cosmologia estuda as conseqüências das derivadas superiores, como por exemplo, Hawking e Luttrell [58], Kofman *et al* [59], Boccaletti [60], Mazzitelli [61], Kazakov e Pronin [62], Davis [63] e Kao [64]. Soluções baseadas em campos dilatônicos foram estudadas por Shapiro *et al* ([65] e [66]). Holdom ([67] e [68]), Nojiri [69] e Berredo-Peixoto e Shapiro [70] também contribuíram para o estudo da gravitação com termos de ordem superior. Nojiri *et al* [71] estudaram soluções relativas aos buracos negros.

Um modelo gravitacional de Chern-Simmons foi construído com o apoio de derivadas superiores em Pinheiro *et al* ([72], [73]). A estabilidade da hierarquia de Planck sob um cenário de Randall-Sundrum é demonstrada graças a, entre outras coisas, a presença de derivadas superiores [74].

Derivadas superiores foram também estudadas por Barcelos-Neto; com Natividade [75] foi abordado o formalismo Hamiltoniano da integral de caminho e com Vasquez [76] a quantização simplética. Modelos espinoriais com derivadas superiores foram construídos por Fujii [77], [78]. Mitov *et al* [79] consideraram um modelo de campo espinorial com derivadas superiores com auto-interação de Fermi. Outras áreas onde esporadicamente apareceram teorias com derivadas superiores são o estudo do modelo σ [80], [81] e [82], o estudo do modelo de Skyrme para hadrons [83] e o cálculo da função-β na Eletrodinâmica Quântica supersimétrica (Soloshenko e Stepanyantz, [84] e [85]).

Soluções fermiônicas foram particularmente estudadas por Belvedere *et al* ([86], [87] e [88]) e Villaseñor [89]. Soluções através de um método perturbativo foram apresentadas por Cheng *et al* [90].

Nosso maior interesse, porém, se dá nas análises de teorias com derivadas superiores *per se*, ou seja, nas investigações acerca da realidade física envolvendo (ou não) tais teorias.

Musicki [91] estudou as transformações canônicas tanto de campos clássicos quanto de campos covariantes na presença de derivadas superiores. Ronald Farias [92] mostrou as condições necessárias e suficientes para a existência de um Lagrangeano, em teoria de campos, com derivadas superiores.

Pagani, Tecchiolli e Zerbini [93] concentraram-se em outro aspecto do problema: a estabilidade de tais Lagrangeanos. Afirmaram que "isso não é uma tarefa trivial, visto que tais sistemas possuem energia de sinal indefinido e o bem conhecido teorema de Lagrange-Dirichlet não pode ser usado." A indefinição no sinal da energia é usualmente relacionada à instabilidade de um determinado sistema, mas os autores mostram que isso não precisa ser necessariamente verdade. Limitando-se a um sistema com um número finito de graus de liberdade, eles chamaram a atenção para a concordância com os resultados obtidos por Narnhofer e Thirring [22] para um campo quântico.

Lagrangeanos singulares (também chamados de Lagrangeanos degenerados) com derivadas superiores foram estudados por Nesterenko [94] e por Saito *et al* [95]. O primeiro constrói um formalismo Hamiltoniano para sistemas com Lagrangeanos singulares de segunda ordem. O segundo retoma a transformação de Ostrogradsky e o formalismo de Dirac. Chervyakov e Nesterenko [96] apresentaram um bom exemplo mecânico (vibrações transversas em uma barra) para estudar as derivadas superiores. O uso de "calibrações" (*gauging*) para tratar as derivadas superiores aparece, por exemplo, em Bartoli e Julve [97] e Hamamoto [98].

O formalismo canônico, em particular as integrais de caminho, foram estudadas por Nakamura e Hamamoto [99]. As simetrias de tais sistemas foram estudadas por Borneas e Damian [100] e novamente por Damian [101]. A regularização foi revisitada por Bakeyev e Slavnov [102] e novamente por Bakeyev [103].

Nesse contexto, o presente trabalho se propõe a estudar soluções para o problema geral da propagação de campos que sejam representados por Lagrangeanos com derivadas superiores. O objetivo primeiro é obter soluções analíticas para tais equações e, a partir delas, estudar a evolução temporal dos campos. No Capítulo 1, revisitaremos o resultado obtido em [104], com algumas modificações na notação, ou seja, as soluções gerais do d'Alembertiano e do d'Alembertiano ao quadrado, com ou sem a presença de fontes externas. No Capítulo 2, avançaremos o trabalho iniciado em [104] obtendo uma solução geral para a função de D'Alembert ao cubo, em duas dimensões (1+1), na ausência de fontes externas. Os Capítulos 1 e 2 são a base de [105]. O Capítulo 3 é dedicado aos cálculos exatos de tais soluções, com o auxílio do programa MAPLE. No Capítulo 4, trataremos das soluções fermiônicas, reapresentando resultados de [104] e [106]. Este Capítulo dá suporte a [107]. Finalmente, no Capítulo 5, trataremos do caso semelhante em três dimensões (2+1). O Capítulo 6 é dedicado às Reflexões Finais e às Perspectivas Futuras.

Deixamos claro que nosso objetivo nessa Tese foi, sobretudo, desenvolver os métodos e gerar o procedimento geral para a obtenção das soluções clássicas de equações de campo com derivadas superiores. Não nos preocupamos em aplicar os nossos resultados a uma diversidade de situações físicas. Esta estapa será objeto de atividades futuras geradas a partir do presente trabalho.

Capítulo 1

A Equação de D'Alembert

Partindo de um lagrangiano do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi(x)\partial^\mu \Phi(x)$$

obtém-se, para a função $\Phi(x)$, a seguinte relação:

$$\Box \Phi = 0.$$

Mas, em princípio, não haveria porque limitarmos nossa função inicial às primeiras derivadas do potencial somente, e poderíamos, então, escrever um lagrangiano que dependesse de derivadas segundas:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu \Phi(x)\partial^\mu \partial^\nu \Phi(x)$$

resultando, agora, em

$$\Box^2 \Phi = 0.$$

Neste capítulo, vamos calcular as soluções analíticas gerais para ambos os casos citados acima, em um regime bidimensional.

1.1 D'Alembertiano (1+1) sem fonte

A equação que nos propormos a resolver é

$$\Box\Phi = 0$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

Onde v é a velocidade da onda representada pela função Φ. Transformando as variáveis x e t em $\xi = x - vt$ (*right-movers*) e $\eta = x + vt$ (*left-movers*), e tomando a velocidade como unitária, a equação de D'Alembert pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

A solução proposta é a superposição de duas funções independentes, uma com dependência em ξ e a outra em η:

$$\tilde{\Phi}(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

As condições iniciais são

$$\Phi(x; 0) = F(x), \qquad \frac{\partial\Phi(x; 0)}{\partial t} = G(x),$$

$$F(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow f(x) = F(x) - g(x). \tag{1.1}$$

Derivando, temos:

$$f'(x) = F'(x) - g'(x), \tag{1.2}$$

e

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big[f(\xi) + g(\eta)\Big]_{t=0} = \left[\frac{\partial f(\xi)}{\partial t} + \frac{\partial g(\eta)}{\partial t}\right]_{t=0} = \\ &= \left[\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial g(\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right]_{t=0} = -f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$g'(x) = G(x) + f'(x). \tag{1.3}$$

Com as equações (1.2) e (1.3), podemos eliminar f', ficando com

$$g'(x) = \frac{1}{2}F'(x) + \frac{1}{2}G(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}\int_a^x dyG(y). \tag{1.4}$$

Substituindo (1.4) em (1.1), obtemos a seguinte expressão para f:

$$f(x) = F(x) - \left[\frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}\int_a^x dyG(y)\right] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2}\int_a^x dyG(y).$$

Estendendo as soluções para um t qualquer, ficamos com:

$$f(\xi) = \frac{1}{2}F(\xi) - \frac{1}{2}\int_a^\xi dyG(y),$$

$$g(\eta) = \frac{1}{2}F(\eta) + \frac{1}{2}\int_a^\eta dyG(y),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(\xi;\eta) &= f(\xi) + g(\eta) = \frac{1}{2}F(\xi) - \frac{1}{2}\int_a^\xi dyG(y) + \frac{1}{2}F(\eta) + \frac{1}{2}\int_a^\eta dyG(y), \\
\tilde{\Phi}(\xi;\eta) &= \frac{1}{2}F(\xi) + \frac{1}{2}F(\eta) + \frac{1}{2}\int_\xi^\eta dyG(y),
\end{aligned}$$

o que, voltando para as variáveis x e t, nos dá

$$\Phi(x;t) = \frac{1}{2}F(x-t) + \frac{1}{2}F(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} dyG(y). \tag{1.5}$$

Essa é a solução para a equação de D'Alembert homogênea em duas dimensões (1+1).

1.2 D'Alembertiano (1+1) com fonte

A equação a ser agora resolvida se altera para:

$$\Box\Phi = J(t;x),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = J(t,x).$$

Fazendo a mudança usual de variáveis ($\xi = x - t; \eta = x + t$), ficamos com

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \xi \partial \eta} = \tilde{J}(\xi, \eta).$$

A solução dessa equação geral pode ser escrita como a superposição da solução para a equação homogênea (obtida na seção anterior) e de uma solução particular para a fonte em questão:

$$\Phi(t;x) = \Phi_h(t;x) + \Phi_J(t;x), \tag{1.6}$$

com as seguintes condições iniciais ($t = 0$):

$$\Phi(0;x) = F(x),$$

$$\dot{\Phi}(0;x) = G(x).$$

Uma boa solução particular para a equação (reescrita nas novas variáveis) é:

$$\tilde{\Phi}_J(\xi;\eta) = \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\eta} d\beta \tilde{J}(\alpha;\beta). \tag{1.7}$$

A fim de aproveitarmos os resultados da seção anterior, vamos reescrever a equação (1.6), isolando a parte homogênea.

$$\begin{aligned}
\Phi_h(t;x) &= \Phi(t;x) - \Phi_J(t;x) \\
\Phi_h(t;x) &= \Phi(t;x) - \int_0^{x-t} d\alpha \int_0^{x+t} d\beta \tilde{J}(\alpha;\beta) \\
\Phi_h(0;x) &= \Phi(0;x) - \int_0^{x} d\alpha \int_0^{x} d\beta \tilde{J}(\alpha;\beta) \\
\Phi_h(0;x) &= F(x) - \int_0^{x} d\alpha \int_0^{x} d\beta \tilde{J}(\alpha;\beta) \\
\Phi_h(0;x) &= \mathcal{F}(x).
\end{aligned}$$

E, derivando no tempo:

$$\dot{\Phi}_h(0;x) = \dot{\Phi}(0;x) - \left.\frac{\partial \Phi_J(t;x)}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Para avaliarmos o segundo termo do lado direito da igualdade, convém retomarmos a nossa mudança de variáveis:

$$\Phi_J(t;x) = \tilde{\Phi}_J(\xi;\eta),$$

$$\dot{\tilde{\Phi}}_J = \frac{\partial \tilde{\Phi}_J}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_J}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}_J}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_J}{\partial \eta}.$$

E

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_J}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[-\int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\eta} d\beta \tilde{J}(\alpha;\beta)\right],$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_J}{\partial \xi} = -\int_0^{\eta} d\beta \tilde{J}(\xi;\beta).$$

Analogamente,

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_J}{\partial \eta} = -\int_0^{\xi} d\alpha \tilde{J}(\alpha;\eta).$$

E, portanto,

$$\dot{\Phi}_h(0;x) = G(x) - \int_0^{x} d\beta \tilde{J}(x;\beta) + \int_0^{x} d\alpha \tilde{J}(\alpha;x) = \mathcal{G}(x).$$

Como vimos na seção anterior, a solução para a equação homogênea já foi resolvida. Basta reescrevermos aquela solução, com as condições iniciais modificadas, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Ou seja:

$$\Box \Phi_h(x;t) = 0,$$

$$\Phi_h(0;t) = \mathcal{F}(x), \qquad \dot{\Phi}_h(0;t) = \mathcal{G}(x),$$

$$\Phi_h(x;t) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(x-t) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} dy \mathcal{G}(y).$$

E, portanto, a solução final para a equação de D'Alembert em duas dimensões (1+1) com uma fonte externa é:

$$\Phi(x;t) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(x-t) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} dy\mathcal{G}(y) + \int_{0}^{x-t} d\alpha \int_{0}^{x+t} d\beta \tilde{J}(\alpha;\beta). \tag{1.8}$$

1.3 D'Alembertiano ao quadrado (1+1) sem fonte

A mudança de variáveis usual nos leva à seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^4 \tilde{\Phi}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = 0.$$

A solução mais geral é da forma:

$$\tilde{\Phi}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) + \xi h(\eta) + \eta r(\xi),$$

e as condições de contorno são:

$$F(x) = \Phi(x;0), \qquad G(x) = \frac{d}{dt}\Phi(x;0), \qquad H(x) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi(x;0), \qquad R(x) = \frac{d^3}{dt^3}\Phi(x;0).$$

As derivadas temporais de $\tilde{\Phi}$, a partir de sua forma mais geral, são:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} - h(\eta) + \xi\frac{\partial h}{\partial \eta} + r(\xi) - \eta\frac{\partial r}{\partial \xi} \\
\frac{d^2\tilde{\Phi}}{dt^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial h}{\partial \eta} + \xi\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial r}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \\
\frac{d^3\tilde{\Phi}}{dt^3} &= -\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3} - 3\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \xi\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} + 3\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} - \eta\frac{\partial^3 r}{\partial \xi^3}.
\end{aligned}$$

Lembrando das condições iniciais:

$$F(x) = f(x) + g(x) + xh(x) + xr(x) \tag{1.9}$$

$$G(x) = -f'(x) + g'(x) + xh'(x) - xr'(x) - h(x) + r(x) \tag{1.10}$$

$$H(x) = f''(x) + g''(x) + xh''(x) + xr''(x) - 2h'(x) - 2r'(x) \tag{1.11}$$

$$R(x) = -f'''(x) + g'''(x) + xh'''(x) - xr'''(x) - 3h''(x) + 3r''(x). \tag{1.12}$$

Seguem-se, agora, alguns longos passos algébricos, que serão aqui descritos de forma sucinta.

Primeiramente, partiremos da equação (1.9), isolando a função f e derivando sucessivas vezes:

$$\begin{aligned}
f(x) &= F(x) - g(x) - xh(x) - xr(x) \\
f'(x) &= F'(x) - g'(x) - h(x) - xh'(x) - r(x) - xr'(x) \\
f''(x) &= F''(x) - g''(x) - 2h'(x) - xh''(x) - 2r'(x) - xr''(x) \\
f'''(x) &= F'''(x) - g'''(x) - 3h''(x) - xh'''(x) - 3r''(x) - xr'''(x).
\end{aligned}$$

Feito isso, vamos substituir f' na equação (1.10), obtendo:

$$F'(x) + G(x) = 2g'(x) + 2xh'(x) + 2r(x). \tag{1.13}$$

Substituindo f'' na equação (1.11) e f''' em (1.12), ficamos com:

$$F''(x) - H(x) = 4h'(x) + 4r'(x) \tag{1.14}$$

$$F'''(x) + R(x) = 2g'''(x) + 2xh'''(x) + 6r''(x). \tag{1.15}$$

Isolando r em (1.13) e diferenciando, ficamos com:

$$r(x) = \frac{F'(x) + G(x)}{2} - g'(x) - xh'(x)$$

$$r'(x) = \frac{1}{2}F''(x) + \frac{1}{2}G'(x) - g''(x) - h'(x) - xh''(x)$$

$$r''(x) = \frac{1}{2}F'''(x) + \frac{1}{2}G''(x) - g'''(x) - 2h''(x) - xh'''(x).$$

Substituindo as derivadas de r nas equações (1.14) e (1.15), ficamos com:

$$F''(x) + 2G'(x) + H(x) = 4g''(x) + 4xh''(x) \tag{1.16}$$

$$2F'''(x) + 3G''(x) - R(x) = 4g'''(x) + 4xh'''(x) + 12h''(x). \tag{1.17}$$

Isolaremos g'' em (1.16), derivando em seguida:

$$g''(x) = \frac{1}{4}F''(x) + \frac{1}{2}G'(x) + \frac{1}{4}H(x) - xh''(x) \tag{1.18}$$

$$g'''(x) = \frac{1}{4}F'''(x) + \frac{1}{2}G''(x) + \frac{1}{4}H'(x) - h''(x) - xh'''(x). \tag{1.19}$$

Substituindo (1.19) em (1.17), obtemos:

$$h''(x) = \frac{1}{8}F'''(x) + \frac{1}{8}G''(x) - \frac{1}{8}H'(x) - \frac{1}{8}R(x),$$

o que implica em:

$$h'(x) = \frac{1}{8}F''(x) + \frac{1}{8}G'(x) - \frac{1}{8}H(x) - \frac{1}{8}\int_a^x dyR(y) + C_1$$

$$h(x) = \frac{1}{8}F'(x) + \frac{1}{8}G(x) - \frac{1}{8}\int_a^x dyH(y) - \frac{1}{8}\int_a^x dy\int_a^y dzR(z) + C_1x + C_2.$$

Uma vez conhecendo a forma geral da função h, podemos voltar à função g, a partir de (1.18):

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{1}{4}F''(x) - \frac{1}{8}xF'''(x) + \frac{1}{2}G'(x) - \frac{1}{8}xG''(x) + \frac{1}{4}H(x) + \frac{1}{8}xH'(x) + \frac{1}{8}xR(x) \\ g'(x) &= \frac{3}{8}F'(x) - \frac{1}{8}xF''(x) + \frac{5}{8}G(x) - \frac{1}{8}xG'(x) + \frac{1}{8}xH(x) + \frac{1}{8}\int_a^x dyH(y) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{8}\int_a^x dyyR(y) + C_3 \\
g(x) \quad = \quad & \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{8}xF'(x) - \frac{1}{8}G(x) + \frac{3}{4}\int_a^x dyG(y) + \frac{1}{8}\int_a^x dy \int_a^x dzH(z) + \frac{1}{8}\int_a^x dyyH(y) + \\
& +\frac{1}{8}\int_a^x dy \int_a^x dzzR(z) + C_3 x + C_4.
\end{aligned}
$$

Lembrando que

$$
r(x) = \frac{1}{2}F'(x) + \frac{1}{2}G(x) - g'(x) - xh'(x),
$$

é só substitir g' e h' para obtermos r:

$$
r(x) = \frac{1}{8}F'(x) - \frac{1}{8}G(x) - \frac{1}{8}\int_a^x dyH(y) + \frac{1}{8}x\int_a^x dyR(y) - \frac{1}{8}\int_a^x dyyR(y) - C_1 x - C_3.
$$

E, por fim, devemos substituir g, h e r na equação para f:

$$
\begin{aligned}
f(x) \quad = \quad & F(x) - g(x) - xh(x) - xr(x) \\
f(x) \quad = \quad & \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{8}F'(x) + \frac{1}{8}xG(x) - \frac{3}{4}\int_a^x dyG(y) - \frac{1}{8}\int_a^x dyyH(y) + \frac{1}{4}x\int_a^x dyH(y) - \\
& +\frac{1}{8}\int_a^x dy \int_a^y dzH(z) - \frac{1}{8}x^2\int_a^x dyR(y) + \frac{1}{8}x\int_a^x dyyR(y) + \frac{1}{8}x\int_a^x dy\int_a^y dzR(z) - \\
& +\frac{1}{8}\int_a^x dy\int_a^y dzzR(z) - C_2 x - C_4.
\end{aligned}
$$

Estamos prontos, agora, para escrever a expressão geral para a função $\tilde{\Phi}$:

$$
\tilde{\Phi}(\xi;\eta) = f(\xi) + g(\eta) + \xi h(\eta) + \eta r(\xi),
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(\xi;\eta) \quad = \quad & \frac{1}{2}F(\xi) + \frac{1}{2}F(\eta) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)F'(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)F'(\eta) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)G(\xi) + \\
& +\frac{1}{8}(\xi-\eta)G(\eta) + \frac{3}{4}\int_\xi^\eta dyG(y) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\int_\xi^\eta dyH(y) + \frac{1}{8}\eta\int_a^\xi dy\int_a^y dzR(z) + \\
& -\frac{1}{8}\xi\int_a^\eta dy\int_a^y dzR(z) + \frac{1}{8}\int_\xi^\eta dy\int_a^y dzzR(z).
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

A equação (1.20) apresenta uma aparente dependência em a, um parâmetro de integração. Esta dependência é só aparente, como será mostrado a seguir.

Seja K a função de ξ, η e a composta pelos três últimos termos da equação (1.20):

$$8K(\xi,\eta,a) = \eta\int_a^\xi dy\int_a^y dzR(z) - \xi\int_a^\eta dy\int_a^y dzR(z) + \int_\xi^\eta dy\int_a^y dzzR(z).$$

Vamos criar duas novas funções:

$$\Omega(z) = \int R(z)dz \;\; ; \qquad \Gamma(z) = \int \Omega(z)dz\;.$$

Portanto, integrando o terceiro termo de K por partes, ficamos com:

$$\begin{aligned}
8K(\xi,\eta,a) &= \eta\int_a^\xi dy\Big[\Omega(y)-\Omega(a)\Big] - \xi\int_a^\eta dy\Big[\Omega(y)-\Omega(a)\Big] + \\
&\quad + \int_\xi^\eta dy\Big[y\Omega(y) - a\Omega(a) - \Gamma(y) + \Gamma(a)\Big] \\
8K(\xi,\eta,a) &= \eta\Gamma(\xi) - \eta\Gamma(a) - \eta\xi\Omega(a) + \eta a\Omega(a) - \xi\Gamma(\eta) + \xi\Gamma(a) + \eta\xi\Omega(a) - \xi a\Omega(a) + \\
&\quad + \eta\Gamma(\eta) - \xi\Gamma(\xi) - \int_\xi^\eta \Gamma(y)dy - a\eta\Omega(a) + \eta a\Omega(a) - \int_\xi^\eta \Gamma(y)dy + \eta\Gamma(a) - \xi\Gamma(a) \\
8K(\xi,\eta) &= (\eta-\xi)\Big[\Gamma(\eta)+\Gamma(\xi)\Big] - 2\int_\xi^\eta \Gamma(y)dy.
\end{aligned}$$

A função K é, portanto, independente de a. Um método mais direto de verificar tal afirmação é derivar a equação (1.20) em relação a a. O resultado é zero, o que comprova que não há dependência alguma (tal derivação pode ser feita com o auxílio do MAPLE).

Assim:

$$\begin{aligned}
\Phi(t;x) &= \tilde{\Phi}(\xi;\eta) = \frac{1}{2}F(\xi) + \frac{1}{2}F(\eta) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)F'(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)F'(\eta) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)G(\xi) + \\
&\quad + \frac{1}{8}(\xi-\eta)G(\eta) + \frac{3}{4}\int_\xi^\eta dyG(y) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\int_\xi^\eta dyH(y) + \frac{1}{8}(\eta-\xi)\Big[\Gamma(\eta)+\Gamma(\xi)\Big] + \\
&\quad - \frac{1}{4}\int_\xi^\eta \Gamma(y)dy. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

É conveniente notar a presença de derivadas primeiras de F em nossa solução geral (1.21). Se optarmos por uma condição inicial constante, porém localizada, tais derivadas darão origem a funções δ na solução. Se optarmos por uma condição inicial na forma de um pulso (a própria função Delta de Dirac), as derivadas darão origem a operadores funcionais e perderemos o caráter físico de nossa solução.

Essa discussão será retomada no Capítulo 3.

Finalizando esta seção, damos abaixo a contribuição para a densidade de energia do sistema proveniente do termo de derivada superior introduzido.

Acoplando-se o sistema a um campo gravitacional de fundo, $g_{\mu\nu}$, e linearizando-o ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, sendo κ a constante de gravitação), chegamos à expressão do tensor momento-energia,

$$\theta_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\bigg|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}},$$

o que nos fornece

$$\theta_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial^\alpha\Phi\partial_\nu\partial_\alpha\Phi - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\Phi\partial_\alpha\partial_\beta\Phi,$$

de onde, então, se lê

$$\mathcal{H} = \theta_{00} = \partial_0\partial^\alpha\Phi\partial_0\partial_\alpha\Phi - \frac{1}{4}\partial^\alpha\partial^\beta\Phi\partial_\alpha\partial_\beta\Phi.$$

Explicitando as derivadas, onde o ponto simboliza uma derivação no tempo e a linha uma derivação no espaço, temos:

$$\mathcal{H} = \frac{3}{4}(\ddot{\Phi})^2 - \frac{1}{2}(\dot{\Phi}')^2 - \frac{1}{4}(\Phi'')^2.$$

De onde podemos ver que a energia será positiva somente se respeitarmos a seguinte condição:

$$3(\ddot{\Phi})^2 > 2(\dot{\Phi}')^2 + (\Phi'')^2.$$

1.4 D'Alembertiano ao quadrado (1+1) com fonte

A possibilidade do surgimento de soluções não-físicas, como visto ao fim da seção anterior, nos leva a considerar a abordagem proposta por Narnhofer e Thirring [22]: fontes externas que eliminem os modos não-físicos da solução geral.

Assim, partiremos da equação:

$$\Box^2 \Phi = J(x;t)$$

o que nos dá, com a mudança usual de variáveis,

$$\frac{\partial^4 \tilde{\Phi}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} = \tilde{J}(\xi, \eta).$$

A solução particular da parte inomogênea é:

$$\tilde{\Phi}_J(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta \int_0^{\eta} d\gamma \int_0^{\gamma} d\delta \tilde{J}(\beta, \delta).$$

A solução geral será:

$$\tilde{\Phi}(\xi, \eta) = \tilde{\Phi}_h(\xi, \eta) + \tilde{\Phi}_J(\xi, \eta)$$

$$\Phi(t, x) = \Phi_h(t, x) + \Phi_J(t, x),$$

com as condições de contorno usuais:

$$F(x) = \Phi(x;0) \qquad G(x) = \frac{d}{dt}\Phi(x;0) \qquad H(x) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi(x;0) \qquad R(x) = \frac{d^3}{dt^3}\Phi(x;0).$$

Para resolver essa equação, usaremos a mesma abordagem da Seção 1.2, com o intuito de aproveitarmos o resultado obtido na Seção 1.3.

$$\begin{aligned}
\Phi_h(0,x) &= \Phi(0;x) - \Phi_J(0,x) \\
\Phi_h(0,x) &= F(x) - \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta \int_0^{\eta} d\gamma \int_0^{\gamma} d\delta \tilde{J}(\beta,\delta) \\
\Phi_h(0,x) &= \mathcal{F}(x).
\end{aligned}$$

Assim, temos uma nova condição inicial, $\mathcal{F}$ no lugar de F.

Analogamente, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi_h(0,x) &= G(x) + \int_0^{\xi} d\beta \int_0^{\eta} d\gamma \int_0^{\gamma} d\delta \tilde{J}(\beta,\delta) - \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta \int_0^{\eta} d\delta \tilde{J}(\beta,\delta) \\
\frac{d}{dt}\Phi_h(0,x) &= \mathcal{G}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\Phi_h(0,x) &= H(x) - \int_0^{\eta} d\gamma \int_0^{\gamma} d\delta \tilde{J}(\xi,\delta) + 2\int_0^{\xi} d\beta \int_0^{\eta} d\delta \tilde{J}(\beta,\delta) - \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta \tilde{J}(\beta,\eta) \\
\frac{d^2}{dt^2}\Phi_h(0,x) &= \mathcal{H}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dt^3}\Phi_h(0,x) &= R(x) - \int_0^{\eta} d\gamma \int_0^{\gamma} d\delta \frac{\partial}{\partial \xi}\tilde{J}(\xi,\delta) - 3\int_0^{\eta} d\delta \tilde{J}(\xi,\delta) + \\
&\quad +3\int_0^{\xi} d\beta \tilde{J}(\beta,\eta) - \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta \frac{\partial}{\partial \eta}\tilde{J}(\beta,\eta) \\
\frac{d^3}{dt^3}\Phi_h(0,x) &= \mathcal{R}(x).
\end{aligned}$$

O resultado final é, portanto:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(\xi;\eta) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}(\xi) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(\eta) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\mathcal{F}'(\xi) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\mathcal{F}'(\eta) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\mathcal{G}(\xi) + \\
&\quad + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\mathcal{G}(\eta) + \frac{3}{4}\int_{\xi}^{\eta} dy \mathcal{G}(y) - \frac{1}{8}(\xi-\eta)\int_{\xi}^{\eta} dy \mathcal{H}(y) + \frac{1}{8}\eta \int_a^{\xi} dy \int_a^{y} dz \mathcal{R}(z) + \\
&\quad - \frac{1}{8}\xi \int_a^{\eta} dy \int_a^{y} dz \mathcal{R}(z) + \frac{1}{8}\int_{\xi}^{\eta} dy \int_a^{y} dz z \mathcal{R}(z) + \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta \int_0^{\eta} d\gamma \int_0^{\gamma} d\delta \tilde{J}(\beta,\delta),
\end{aligned} \tag{1.22}$$

onde as funções $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{R}$ são dadas por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(x) &= F(x) - \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta \int_0^{\eta} d\gamma \int_0^{\gamma} d\delta \tilde{J}(\beta, \delta) \\
\mathcal{G}(x) &= G(x) + \int_0^{\xi} d\beta \int_0^{\eta} d\gamma \int_0^{\gamma} d\delta \tilde{J}(\beta, \delta) - \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta \int_0^{\eta} d\delta \tilde{J}(\beta, \delta) \\
\mathcal{H}(x) &= H(x) - \int_0^{\eta} d\gamma \int_0^{\gamma} d\delta \tilde{J}(\xi, \delta) + 2 \int_0^{\xi} d\beta \int_0^{\eta} d\delta \tilde{J}(\beta, \delta) - \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta \tilde{J}(\beta, \eta) \\
\mathcal{R}(x) &= R(x) - \int_0^{\eta} d\gamma \int_0^{\gamma} d\delta \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{J}(\xi, \delta) - 3 \int_0^{\eta} d\delta \tilde{J}(\xi, \delta) + \\
&\quad +3 \int_0^{\xi} d\beta \tilde{J}(\beta, \eta) - \int_0^{\xi} d\alpha \int_0^{\alpha} d\beta \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{J}(\beta, \eta).
\end{aligned}
$$

Novamente, a dependência em a é apenas aparente e isso pode ser facilmente demonstrado através de uma derivação direta em relação a a.

Capítulo 2

A Equação de D'Alembert em terceira ordem

Vamos partir agora de um Lagrangeano do tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\Phi(x)\partial^\mu\partial^\nu\partial^\alpha\Phi(x)$$

resultando em

$$\Box^3\Phi = 0.$$

Neste capítulo, vamos calcular as soluções analíticas gerais para este caso, em um regime bidimensional.

A mudança de variáveis usual nos leva à seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^6\tilde{\Phi}}{\partial\xi^3\partial\eta^3} = 0.$$

É esta equação diferencial que queremos resolver.

2.1 Construindo a solução geral

A solução mais geral é da forma:

$$\tilde{\Phi}(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) + \xi h(\eta) + \eta r(\xi) + \xi^2 s(\eta) + \eta^2 u(\xi),$$

e as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} F(x) &= \Phi(x;0) & G(x) &= \frac{d}{dt}\Phi(x;0) \\ H(x) &= \frac{d^2}{dt^2}\Phi(x;0) & R(x) &= \frac{d^3}{dt^3}\Phi(x;0) \\ S(x) &= \frac{d^4}{dt^4}\Phi(x;0) & U(x) &= \frac{d^5}{dt^5}\Phi(x;0). \end{aligned}$$

As derivadas temporais de $\tilde{\Phi}$, a partir de sua forma mais geral, são:

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} - h(\eta) + r(\xi) + \xi\left[\frac{\partial h}{\partial \eta} - 2s(\eta)\right] + \eta\left[-\frac{\partial r}{\partial \xi} + 2u(\xi)\right] + \xi^2\frac{\partial s}{\partial \eta} - \eta^2\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{\Phi}}{dt^2} = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial h}{\partial \eta} - 2\frac{\partial r}{\partial \xi} + 2s(\eta) + 2u(\xi) + \xi\left[\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - 4\frac{\partial s}{\partial \eta}\right] + \eta\left[\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} - 4\frac{\partial u}{\partial \xi}\right] + \\ & + \xi^2\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \eta^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\tilde{\Phi}}{dt^3} = {} & -\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial \eta^3} - 3\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + 3\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial s}{\partial \eta} - 6\frac{\partial u}{\partial \xi} + \xi\left[\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} - 6\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}\right] + \eta\left[-\frac{\partial^3 r}{\partial \xi^3} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right] + \\ & + \xi^2\frac{\partial^3 s}{\partial \eta^3} - \eta^2\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4\tilde{\Phi}}{dt^4} = {} & \frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 g}{\partial \eta^4} - 4\frac{\partial^3 h}{\partial \eta^3} - 4\frac{\partial^3 r}{\partial \xi^3} + 12\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \xi\left[\frac{\partial^4 h}{\partial \eta^4} - 8\frac{\partial^3 s}{\partial \eta^3}\right] + \\ & + \eta\left[\frac{\partial^4 r}{\partial \xi^4} - 8\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}\right] + \xi^2\frac{\partial^4 s}{\partial \eta^4} + \eta^2\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^5\tilde{\Phi}}{dt^5} &= -\frac{\partial^5 f}{\partial \xi^5} + \frac{\partial^5 g}{\partial \eta^5} - 5\frac{\partial^4 h}{\partial \eta^4} + 5\frac{\partial^4 r}{\partial \xi^4} + 20\frac{\partial^3 s}{\partial \eta^3} - 20\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + \xi\left[\frac{\partial^5 h}{\partial \eta^5} - 10\frac{\partial^4 s}{\partial \eta^4}\right] + \\
&\quad + \eta\left[-\frac{\partial^5 r}{\partial \xi^5} + 10\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4}\right] + \xi^2\frac{\partial^5 s}{\partial \eta^5} - \eta^2\frac{\partial^5 u}{\partial \xi^5}.
\end{aligned}$$

As condições iniciais nos levam ao seguinte sistema de equações:

$$F(x) = f(x) + g(x) + x[h(x) + r(x)] + x^2[s(x) + u(x)] \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
G(x) &= -f'(x) + g'(x) - h(x) + r(x) + x[h'(x) - r'(x) - 2s(x) + 2u(x)] + \\
&\quad + x^2[s'(x) - u'(x)]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
H(x) &= f''(x) + g''(x) - 2h'(x) - 2r'(x) + 2s(x) + 2u(x) + \\
&\quad + x[h''(x) + r''(x) - 4s'(x) - 4u'(x)] + x^2[s''(x) + u''(x)]
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
R(x) &= -f'''(x) + g'''(x) - 3h''(x) + 3r''(x) + 6s'(x) - 6u'(x) + \\
&\quad + x[h'''(x) - r'''(x) - 6s''(x) + 6u''(x)] + x^2[s'''(x) - u'''(x)]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
S(x) &= f''''(x) + g''''(x) - 4h'''(x) - 4r'''(x) + 12s''(x) + 12u''(x) + \\
&\quad + x[h''''(x) + r''''(x) - 8s'''(x) - 8u'''(x)] + x^2[s''''(x) + u''''(x)]
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
U(x) &= -f'''''(x) + g'''''(x) - 5h''''(x) + 5r''''(x) + 20s'''(x) - 20u'''(x) + \\
&\quad + x[h'''''(x) - r'''''(x) - 10s''''(x) + 10u''''(x)] + x^2[s'''''(x) - u'''''(x)].
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Seguem-se, novamente, alguns longos passos algébricos; mais uma vez tais procedimentos serão descritos de forma sucinta.

2.2 Obtendo a solução geral — parte I

Primeiramente, partiremos da equação (2.1), isolando a função f e derivando sucessivas vezes:

$$\begin{aligned}
f(x) &= F(x) - g(x) - x[h(x) + r(x)] - x^2[s(x) + u(x)] \\
f'(x) &= F'(x) - g'(x) - h(x) - r(x) - x[h'(x) + r'(x) + 2s(x) + 2u(x)] - x^2[s'(s) + u'(x)] \\
f''(x) &= F''(x) - g''(x) - 2h'(x) - 2r'(x) - 2s(x) - 2u(x) + \\
&\quad -x[h''(x) + r''(x) + 4s'(x) + 4u'(x)] - x^2[s''(s) + u''(x)] \\
f'''(x) &= F'''(x) - g'''(x) - 3h''(x) - 3r''(x) - 6s'(x) - 6u'(x) + \\
&\quad -x[h'''(x) + r'''(x) + 6s''(x) + 6u''(x)] - x^2[s'''(s) + u'''(x)] \\
f''''(x) &= F''''(x) - g''''(x) - 4h'''(x) - 4r'''(x) - 12s''(x) - 12u''(x) + \\
&\quad -x[h''''(x) + r''''(x) + 8s'''(x) + 8u'''(x)] - x^2[s''''(s) + u''''(x)] \\
f'''''(x) &= F'''''(x) - g'''''(x) - 5h''''(x) - 5r''''(x) - 20s'''(x) - 20u'''(x) + \\
&\quad -x[h'''''(x) + r'''''(x) + 10s''''(x) + 10u''''(x)] - x^2[s'''''(s) + u'''''(x)].
\end{aligned}$$

Feito isso, vamos substituir f' na equação (2.2), obtendo:

$$F'(x) + G(x) = 2\Big\{g'(x) + r(x) + x[h'(x) + 2u(x)] + x^2 s'(x)\Big\}. \tag{2.7}$$

Substituindo respectivamente f'' na equação (2.3), f''' em (2.4), f'''' em (2.5) e f''''' em (2.6), ficamos com:

$$F''(x) - H(x) = 4\Big\{h'(x) + r'(x) + 2x[s'(x) + u'(x)]\Big\} \tag{2.8}$$

$$F'''(x) + R(x) = 2\Big\{g'''(x) + 3r''(x) + 6s'(x) + x[h'''(x) + 6u''(x)] + x^2 s'''(x)\Big\} \tag{2.9}$$

$$F''''(x) - S(x) = 8\Big\{h'''(x) + r'''(x) + 2x[s'''(x) + u'''(x)]\Big\} \tag{2.10}$$

$$F'''''(x)+U(x) = 2\Big\{g'''''(x)+5r''''(x)+20s'''(x)+x[h'''''(x)+10u''''(x)]+x^2s'''''(x)\Big\}. \tag{2.11}$$

Devemos agora isolar r em (2.7), diferenciar quatro vezes e substituir os resultados nas equações (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11). Com isso, obteremos:

$$F''(x) + 2G'(x) + H(x) = 4\Big[g''(x) + 2u(x) + xh''(x) + x^2s''(s)\Big] \tag{2.12}$$

$$2F'''(x)+3G''(x)-R(x) = 4\Big\{g'''(x)+3h''(x)+6u'(x)+x[h'''(x)+6s''(x)]+x^2s'''(x)\Big\} \tag{2.13}$$

$$3F''''(x)+4G'''(x)+S(x) = 8\Big\{g''''(x)+2h'''(x)+6u''(x)+6s''(x)+x[h''''(x)+4s'''(x)]+x^2s''''(x)\Big\} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} 4F'''''(x) + 5G''''(x) - U(x) \quad &= \quad 8\Big\{g'''''(x) + 5h''''(x) + 10u'''(x) + 10s'''(x) + \\ &+x[h'''''(x) + 10s''''(x)] + x^2s'''''(x)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Seguindo o roteiro usual, devemos isolar u em (2.12), diferenciar três vezes e substituir os resultados nas equações (2.13), (2.14) e (2.15). Com isso, obteremos:

$$F'''(x) + 3G''(x) + 3H'(x) + R(x) = 8[g'''(x) + xh'''(x) + x^2s'''(x)] \tag{2.16}$$

$$3F''''(x)+8G'''(x)+6H''(x)-S(x) = 16\Big\{g''''(x)+2h'''(x)+x[h''''(x)+4s'''(x)]+x^2s''''(x)\Big\} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} 6F'''''(x) + 15G''''(x) + 10H'''(x) + U(x) \quad &= \quad 16\Big\{2g'''''(x) + 5h''''(x) + 10s'''(x) + \\ &+2x[h'''''(x) + 5s''''(x)] + 2x^2s'''''(x)\Big\} \end{aligned} \tag{2.18}$$

O próximo passo é isolar g''' em (2.16), derivar duas vezes e substituir nas equações (2.17) e (2.18).

$$F''''(x) + 2G'''(x) - 2R'(x) - S(x) = 16\Big[h'''(x) + 2xs'''(x)\Big] \tag{2.19}$$

$$2F'''''(x) + 3G''''(x) - 2H'''(x) - 4R''(x) + U(x) = 16\Big[h''''(x) + 6s'''(x) + 2xs''''(x)\Big]. \tag{2.20}$$

Por fim, vamos isolar h''' em (2.19), diferenciar e substituir o resultado em (2.20). Com isso, obtemos uma fórmula para s''' que depende somente das condições iniciais:

$$s'''(x) = \frac{1}{64}\Big[F'''''(x) + G''''(x) - 2H'''(x) - 2R''(x) + S'(x) + U(x)\Big]. \tag{2.21}$$

Integrando três vezes este resultado, obtemos uma expressão para s:

$$\begin{aligned} s(x) \; = \; & \frac{1}{64}\Bigg[F''(x) + G'(x) - 2H(x) - 2\int_a^x dyR(y) + \int_a^x dy \int_a^y dzS(z) + \\ & + \int_a^x dy \int_a^y dz \int_a^z dwU(w) + C_1x^2 + C_2x + C_3\Bigg], \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes de integração.

Conhecendo s e suas derivadas, obtemos expressões para h e g:

$$\begin{aligned} h(x) \; = \; & \frac{1}{32}\Bigg[3F'(x) - \int_a^x dy \int_a^y dzzF''''(z) + 5G(x) - \int_a^x dy \int_a^y dzzG'''(z) + \\ & +2\int_a^x dy \int_a^y dzzH''(z) - 2\int_a^x dyH(y) - 6\int_a^x dy \int_a^y dzR(z) + \\ & +2\int_a^x dy \int_a^y dzzR'(z) - \int_a^x dy \int_a^y dz \int_a^z dwS(w) - \int_a^x dy \int_a^y dzzS(z) + \\ & - \int_a^x dy \int_a^y dz \int_a^z dwwU(w) + \frac{D_1}{2}x^2 + D_2x + D_3\Bigg], \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$g(x) \; = \; \frac{1}{64}\Bigg[14F(x) - 6\int_a^x dy \int_a^y dzzF'''(z) + \int_a^x dy \int_a^y dzz^2F''''(z) + 34\int_a^x dyG(y) +$$

$$-10\int_a^x dy\int_a^y dzzG''(z)+\int_a^x dy\int_a^y dzz^2G'''(z)+20\int_a^x dy\int_a^y dzH(z)+$$
$$+4\int_a^x dy\int_a^y dzzH'(z)-2\int_a^x dy\int_a^y dzz^2H''(z)-4\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dwR(w)+$$
$$+12\int_a^x dy\int_a^y dzzR(z)-2\int_a^x dy\int_a^y dzz^2R'(z)+2\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dwwS(w)+$$
$$+\int_a^x dy\int_a^y dzz^2R'(z)+\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dww^2U(w)+\frac{E_1}{2}x^2+E_2x+E_3\Bigg].\qquad(2.24)$$

2.3 Construindo a solução geral — parte II

De posse de g (equação 2.24), h (equação 2.23) e s (equação 2.22), obtemos u, r e f de forma direta, porém muito trabalhosa:

$$\begin{aligned}u(x) &= \frac{1}{128}\Bigg[2F''(x)-2G'(x)-4H(x)+4\int_a^x dyR(y)-2\int_a^x dyyS(y)+2x\int_a^x dyS(y)+\\ &-\int_a^x dyy^2U(y)+2x\int_a^x dyyU(y)-x^2\int_a^x dyU(y)-E_1-2D_1x-C_1x^2\Bigg],\end{aligned}\qquad(2.25)$$

$$\begin{aligned}r(x) &= \frac{1}{64}\Bigg[18F'(x)-8xF''(x)-x^2F'''(x)+6\int_a^x dyyF'''(y)-\int_a^x dyy^2F''''(y)+\\ &+2x\int_a^x dyyF''''(y)-2G(x)-8xG'(x)-x^2G''(x)+10\int_a^x dyyG''(y)-\int_a^x dyy^2G'''(y)+\\ &+2x\int_a^x dyyG'''(y)+8xH(x)+2x^2H'(x)-20\int_a^x dyH(y)-4\int_a^x dyyH'(y)+\\ &+2\int_a^x dyy^2H''(y)-4x\int_a^x dyyH''(y)+2x^2R(x)+8x\int_a^x dyR(y)+4\int_a^x dy\int_a^y dzR(z)+\\ &-12\int_a^x dyyR(y)+2\int_a^x dyy^2R'(y)-4x\int_a^x dyyR'(y)-3x^2\int_a^x dyS(y)+\\ &+4x\int_a^x dyyS(y)-\int_a^x dyy^2S(y)-2\int_a^x dy\int_a^y dzzS(z)+2x\int_a^x dy\int_a^y dzS(z)+\\ &+x^3\int_a^x dyU(y)-2x^2\int_a^x dyyU(y)+x\int_a^x dyy^2U(y)-x^2\int_a^x dy\int_a^y dzU(z)+\\ &+2x\int_a^x dy\int_a^y dzzU(z)-\int_a^x dy\int_a^y dzz^2U(z)-E_2-2D_2x-C_2x^2\Bigg],\end{aligned}\qquad(2.26)$$

$$
\begin{aligned}
f(x) \;=\; & \frac{1}{128}\Bigg[64F(x)-20F'(x)+2x^2F''(x)-120\int_a^x dyG(y)+28xG(x)-2x^2G'(x)+ \\
& -24\int_a^x dy\int_a^y dzH(z)-24\int_a^x dyyH(y)-4x^2H(x)+24x\int_a^x dyH(y)+ \\
& +8\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dwR(w)-32\int_a^x dy\int_a^y dzzR(z)+4\int_a^x dyy^2R(y)+ \\
& -2\int_a^x dy\int_a^y dzz^2R(z)+32x^2\int_a^x dyR(y)+32x\int_a^x dy\int_a^y dzR(z)+32x\int_a^x dyyR(y)+ \\
& -4\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dwwS(w)+4x\int_a^x dy\int_a^y dzzS(z)+2x\int_a^x dyy^2S(y)+ \\
& -2x^3\int_a^x dyS(y)-2\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dww^2U(w)+4x\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dwwU(w)+ \\
& +2x\int_a^x dy\int_a^y dzz^2U(z)-4x^2\int_a^x dy\int_a^y dzzU(z)+2x^3\int_a^x dy\int_a^y dzU(z)+ \\
& -x^4\int_a^x dyU(y)-4x^2\int_a^x dy\int_a^y dz\int_a^z dwU(w)-C_1x^4-C_2x^3-(D_4+D_5)x+ \\
& -(E_4+E_5)\Bigg]. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

Finalmente, estendendo as soluções para $t \neq 0$ e juntando as soluções descritas nas equações (2.22) a (2.27) na forma $\tilde{\Phi}(\xi,\eta) = f(\xi)+g(\eta)+\xi h(\eta)+\eta r(\xi)+\xi^2 s(\eta)+\eta^2 u(\xi)$, ficamos com:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(\xi,\eta) \;=\; & -\frac{1}{128}\Bigg\{-100F(\xi)-28F(\eta)+48\xi F'(\xi)-36\eta F'(\xi)-12\xi F'(\eta)+ \\
& -12\xi^2F''(\xi)-2\eta^2F''(\xi)+16\xi\eta F''(\xi)-2\xi^2F''(\eta)+2\xi^2(\eta-\xi)F'''(\xi)+ \\
& +16\xi G(\xi)+4\eta G(\xi)-20\xi G(\eta)+16\xi(\eta-\xi)G'(\xi)+2\eta^2G(\xi)-2\xi^2G'(\eta)+ \\
& +2\xi^2(\eta-\xi)G''(\xi)+8\xi^2H(\xi)-16\xi\eta H(\xi)+4\eta^2H(\xi)+4\xi^2H(\eta)-4\xi^2(\eta-\xi)H'(\xi)+ \\
& -4\xi^2(\eta-\xi)R(\xi)-12(\eta-\xi)\int_a^\xi zF'''(z)dz-4\xi(\eta-\xi)\int_a^\xi zF''''(z)dz+ \\
& +2(\eta-\xi)\int_a^\xi z^2F'''''(z)dz-68\int_\xi^\eta G(y)dy-20(\eta-\xi)\int_a^\xi zG''(z)dz+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-4\xi(\eta-\xi)\int_a^\xi zG'''(z)dz-2(\eta-\xi)\int_a^\xi z^2G'''(z)dz+8\xi\int_\xi^\eta H(y)dy+\\
&+40(\eta-\xi)\int_a^\xi H(z)dz+8(\eta-\xi)\int_a^\xi zH'(z)dz+8\xi(\eta-\xi)\int_a^\xi zH''(z)dz+\\
&-4(\eta-\xi)\int_a^\xi z^2H''(z)dz+4\xi^2\int_a^\eta R(y)dy-4\eta^2\int_a^\xi R(y)dy+\\
&-16\xi(\eta-\xi)\int_a^\xi R(y)dy+24(\eta-\xi)\int_a^\xi zR(z)dz+8\xi(\eta-\xi)\int_a^\xi zR'(z)dz+\\
&-4(\eta-\xi)\int_a^\xi z^2R'(z)dz+2\xi(3\xi\eta-2\xi^2-\eta^2)\int_a^\xi S(z)dz+\\
&+2(3\xi^2-4\xi\eta+\eta^2)\int_a^\xi zS(z)dz+2(\eta-\xi)\int_a^\xi z^2S(z)dz+\xi^2(\eta-\xi)^2\int_a^\xi U(z)dz+\\
&-2\xi(\eta-\xi)^2\int_a^\xi zU(z)dz+(\eta-\xi)^2\int_a^\xi z^2U(z)dz+12\int_\xi^\eta\int_a^y zF'''(z)dzdy+\\
&-2\int_\xi^\eta\int_a^y z^2F''''(z)dzdy+4\xi\int_\xi^\eta\int_a^y zF''''(z)dzdy+20\int_\xi^\eta\int_a^y zG''(z)dzdy+\\
&-2\int_\xi^\eta\int_a^y z^2G'''(z)dzdy+4\xi\int_\xi^\eta\int_a^y zG'''(z)dzdy-40\int_\xi^\eta\int_a^y H(z)dzdy+\\
&-8\int_\xi^\eta\int_a^y zH'(z)dzdy+4\int_\xi^\eta\int_a^y z^2H''(z)dzdy-8\xi\int_\xi^\eta\int_a^y zH'(z)dzdy+\\
&+24\xi\int_\xi^\eta\int_a^y R(z)dzdy-24\int_\xi^\eta\int_a^y zR(z)dzdy-8(\eta-\xi)\int_a^\xi\int_a^y R(z)dzdy+\\
&-8\xi\int_\xi^\eta\int_a^y zR'(z)dzdy+4\int_\xi^\eta\int_a^y z^2R'(z)dzdy+-4\xi(\eta-\xi)\int_a^\xi\int_a^y S(z)dzdy+\\
&-2\xi^2\int_\xi^\eta\int_a^y S(z)dzdy+4\xi\int_\xi^\eta\int_a^y zS(z)dzdy+4(\eta-\xi)\int_a^\xi\int_a^y zS(z)dzdy+\\
&-2\int_\xi^\eta\int_a^y z^2S(z)dzdy+2\xi^2(\eta-\xi)\int_a^\xi\int_a^y U(z)dzdy-4\xi(\eta-\xi)\int_a^\xi\int_a^y zU(z)dzdy+\\
&+2(\eta-\xi)\int_a^\xi\int_a^y z^2U(z)dzdy+8\int_\xi^\eta\int_a^y\int_a^z R(w)dwdzdy+\\
&+4\xi\int_\xi^\eta\int_a^y\int_a^z S(w)dwdzdy-4\int_\xi^\eta\int_a^y\int_a^z wS(w)dwdzdy+\\
&-2\int_\xi^\eta\int_a^y\int_a^z w^2U(w)dwdzdy+4\xi\int_\xi^\eta\int_a^y\int_a^z wU(w)dwdzdy+\\
&-2\xi^2\int_\xi^\eta\int_a^y\int_a^z U(w)dwdzdy\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

A aparente arbitrariedade na escolha de a não introduz, na realidade, qualquer ambigüidade. Como na capítulo anterior, tal dependência em a é apenas aparente e isso pode ser facilmente demonstrado através de uma derivação direta em relação a a.

É interessante notar a presença de derivadas de F (primeira, segunda e terceira) e derivadas de G (primeira e segunda) na solução geral acima. Esse fato dará origem a soluções não-físicas dependendo das condições iniciais arbitradas.

Essa discussão será aprofundada no próximo capíitulo.

Antes, porém, analogamente à seção 1.3, damos abaixo a contribuição para a densidade de energia do sistema proveniente do termo de derivada superior introduzido.

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{3}{2}\partial_\mu\partial^\alpha\partial^\beta\Phi\partial_\nu\partial_\alpha\partial_\beta\Phi - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\Phi\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\Phi,$$

de onde, então, se lê

$$\mathcal{H} = \theta_{00} = \frac{3}{2}\partial_0\partial^\alpha\partial^\beta\Phi\partial_0\partial_\alpha\partial_\beta\Phi - \frac{1}{4}\partial^\alpha\partial^\beta\partial^\gamma\Phi\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\Phi.$$

Como feito ao final da seção 1.3, vamos explicitar as derivadas, obtendo:

$$\mathcal{H} = \frac{5}{4}(\dddot{\Phi})^2 - \frac{9}{4}(\ddot{\Phi}')^2 + \frac{3}{4}(\dot{\Phi}'')^2 + \frac{1}{4}(\Phi''')^2.$$

Logo, a energia será positiva sempre que a condição

$$5(\dddot{\Phi})^2 + 3(\dot{\Phi}'')^2 + (\Phi''')^2 > 9(\ddot{\Phi}')^2$$

for respeitada.

Reunindo-se os possíveis termos em uma única ação,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + \frac{\xi}{2}\partial_\mu\partial_\nu\Phi\partial^\mu\partial^\nu\Phi + \frac{\zeta}{2}\partial_\mu\partial_\nu\partial_\kappa\Phi\partial^\mu\partial^\nu\partial^\kappa\Phi,$$

chega-se à expressão completa para a densidade de energia do modelo com derivadas superiores:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\dot{\Phi})^2 + \frac{1}{2}(\Phi')^2 + \xi\left[\frac{3}{4}(\ddot{\Phi})^2 - \frac{1}{2}(\dot{\Phi}')^2 - \frac{1}{4}(\Phi'')^2\right] + \zeta\left[\frac{5}{4}(\dddot{\Phi})^2 - \frac{9}{4}(\ddot{\Phi}')^2 + \frac{3}{4}(\dot{\Phi}'')^2 + \frac{1}{4}(\Phi''')^2\right].$$

Capítulo 3

Análise quantitativa de alguns casos particulares

Neste capítulo, usaremos as soluções obtidas nos dois capítulos anteriores para, com o auxílio do MAPLE, discutirmos o comportamento dos nossos campos evoluindo no tempo.

Para efeitos de comparação, as únicas condições iniciais não-nulas serão as funções F e G, visto que são as únicas que aparecem em todas as soluções. As demais funções (H, R, U e S) serão consideradas nulas.

Deste modo, a solução do D'Alembertiano simples, equação (1.5), permanece inalterada:

$$\Phi(x;t) = \frac{1}{2}F(x-t) + \frac{1}{2}F(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} dyG(y), \tag{3.1}$$

a solução do D'Alembertiano ao quadrado, equação (1.20), torna-se:

$$\Phi_Q(x;t) \;=\; \frac{1}{2}F(x-t) + \frac{1}{2}F(x+t) - \frac{1}{4}tF'(x-t) + \frac{1}{4}tF'(x+t) + \frac{1}{4}tG(x-t) +$$

$$+\frac{1}{4}tG(x+t)+\frac{3}{4}\int_{x-t}^{x+t}dyG(y) \tag{3.2}$$

e a solução do D'Alembertiano ao cubo, equação (2.28), é escrita como:

$$\begin{aligned}
\Phi_C(x;t) \quad = \quad & -\frac{1}{128}\Big\{-100F(x-t)-28F(x+t)+48(x-t)F'(x-t)-36(x+t)F'(x-t)+ \\
& -12(x-t)F'(x+t)-12(x-t)^2F''(x-t)-2(x+t)^2F''(x-t)+ \\
& 16(x-t)(x+t)F''(x-t)-2(x-t)^2F''(x+t)+4(x-t)^2tF'''(x-t)+ \\
& +16(x-t)G(x-t)+4(x+t)G(x-t)-20(x-t)G(x+t)+32(x-t)tG'(x-t)+ \\
& +2(x+t)^2G(x-t)-2(x-t)^2G'(x+t)+4(x-t)^2tG''(x-t)+ \\
& -24t\int_a^{x-t}zF'''(z)dz-8(x-t)t\int_a^{x-t}zF''''(z)dz+4t\int_a^{x-t}z^2F''''(z)dz+ \\
& -68\int_{x-t}^{x+t}G(y)dy-40t\int_a^{x-t}zG''(z)dz-8(x-t)t\int_a^{x-t}zG'''(z)dz+ \\
& -4t\int_a^{x-t}z^2G'''(z)dz+12\int_{x-t}^{x+t}\int_a^{y}zF'''(z)dzdy-2\int_{x-t}^{x+t}\int_a^{y}z^2F''''(z)dzdy+ \\
& +4(x-t)\int_{x-t}^{x+t}\int_a^{y}zF''''(z)dzdy+20\int_{x-t}^{x+t}\int_a^{y}zG''(z)dzdy+ \\
& -2\int_{x-t}^{x+t}\int_a^{y}z^2G'''(z)dzdy+4(x-t)\int_{x-t}^{x+t}\int_a^{y}zG'''(z)dzdy\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

A seguir, discutiremos algumas condições iniciais particulares.

3.1 Soluções descontínuas do caso homogêneo

3.2 Soluções contínuas do caso homogêneo

3.3 Análise do caso não-homogêneo

Capítulo 4

Derivadas Superiores na Propagação de Férmions

Neste capítulo, abordaremos casos "semi-inteiros" do D'Alembertiano.

O primeiro desses casos nada mais é do que a própria equação de Dirac:

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(x;t) = 0.$$

O segundo é um acoplamento do operador D'Alembertiano ao operador de Dirac, resultando em uma equação com derivadas superiores:

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Box\Psi(x;t) = 0.$$

Veremos ainda o caso:

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Box^{2}\Psi(x;t) = 0.$$

Os cálculos e as considerações presentes neste capítulo derivam de [106].

4.1 A equação de Dirac

Como primeiro caso, tomaremos uma partícula sem massa em duas dimensões, descrita pela usual equação de Dirac ($\hbar = c = 1$):

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(x;t) = 0.$$

onde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$\Psi(x,t)$ é um espinor e pode ser escrito da seguinte forma:

$$\Psi(x,t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x,t) \\ \Psi_2(x,t) \end{pmatrix}.$$

ou, ainda, aplicando nossa mudança de variáveis usual:

$$\tilde{\Psi}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\xi,\eta) \\ \tilde{\Psi}_2(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

A equação de Dirac, reescrita em nossas variáveis *left-movers* e *right-movers* fica:

$$-2\begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{\Psi}_2(\xi,\eta)}{\partial\xi} \\ \frac{\partial\tilde{\Psi}_1(\xi,\eta)}{\partial\eta} \end{pmatrix} = 0.$$

As condições iniciais serão tomadas como:

$$\Psi(x,0) = \begin{pmatrix} A(x) \\ B(x) \end{pmatrix}.$$

A solução é imediata e trivial:

$$\tilde{\Psi}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} A(\xi) \\ B(\eta) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Psi(x,t) = \begin{pmatrix} A(x-t) \\ B(x+t) \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Há, em [106], uma discussão subseqüente a respeito da relação entre as componentes de quiralidade e dos modos de propagação do férmion.

Os projetores

$$P_L \equiv \frac{1+\gamma_3}{2}, \qquad P_R \equiv \frac{1-\gamma_3}{2},$$

onde $\gamma_3 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_z$ é o operador de quiralidade, indicam que Ψ_1 corresponde à quiralidade *left* e Ψ_2 à quiralidade *right*. Este conceito meramente algébrico é relacionado, em [106], aos modos de propagação (*right-movers*, $\xi = x - t$, e *left-movers*, $\eta = x + t$).

Da solução (4.1), vemos que o férmion com quiralidade *left* propaga-se sempre para direita, enquanto que o férmion com quiralidade *right* propaga-se sempre para a esquerda. Estas afirmações são invariantes sob transformações de Lorentz e são muito usadas em estudos ligados às teorias de cordas.

4.2 O operador $i\gamma^\mu\partial_\mu\Box$

O operador em questão é uma conjugação direta de um operador D'Alembertiano com um operador de Dirac. Usando a mesma forma espinorial para Ψ e a mesma transformação de variáveis da seção anterior, a equação resultante será:

$$-4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\xi,\eta) \\ \tilde{\Psi}_2(\xi,\eta) \end{pmatrix} = 0.$$

que nos dá duas equações diferenciais não-acopladas:

$$\frac{\partial^3\tilde{\Psi}_1(\xi,\eta)}{\partial\eta^2\partial\xi} = 0$$

$$\frac{\partial^3\tilde{\Psi}_2(\xi,\eta)}{\partial\xi^2\partial\eta} = 0,$$

cujas soluções mais gerais são, respecitivamente:

$$\tilde{\Psi}_1(\xi,\eta) = f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi)$$

$$\tilde{\Psi}_2(\xi,\eta) = f_2(\xi) + g_2(\eta) + \xi h_2(\eta).$$

As condições iniciais serão tomadas como:

$$\Psi(x,0) = \begin{pmatrix} F(x) \\ \\ G(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Psi(x,0)}{\partial t} = \begin{pmatrix} H(x) \\ \\ J(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,0)}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} R(x) \\ \\ S(x) \end{pmatrix}.$$

Isso resulta em seis equações:

$$\begin{aligned}
F(x) &= f_1(x) + g_1(x) + x h_1(x) \\
G(x) &= f_2(x) + g_2(x) + x h_2(x) \\
H(x) &= -f_1'(x) + g_1'(x) + h_1(x) - x h_1'(x) \\
J(x) &= -f_2'(x) + g_2'(x) - h_2(x) + x h_2'(x) \\
R(x) &= f_1''(x) + g_1''(x) - 2h_1'(x) + x h_1''(x) \\
S(x) &= f_2''(x) + g_2''(x) - 2h_2'(x) + x h_2''(x).
\end{aligned}$$

As soluções gerais encontradas em [106] são:

$$\tilde{\Psi}_1(\xi,\eta) = \frac{3}{4}F(\xi) + \frac{1}{4}F(\eta) - \frac{1}{4}(\xi-\eta)F'(\xi) + \frac{1}{2}\int_\xi^\eta H(y)dy + \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_\xi^y R(z)dz,$$

$$\tilde{\Psi}_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}G(\xi) + \frac{3}{4}G(\eta) + \frac{1}{4}(\xi-\eta)G'(\eta) + \frac{1}{2}\int_\xi^\eta J(y)dy - \frac{1}{4}\int_\xi^\eta dy \int_\eta^y S(z)dz.$$

A esses resultados seguem considerações de Murga a respeito da relação entre as soluções $\tilde{\Psi}_1(\xi,\eta)$ e $\tilde{\Psi}_2(\xi,\eta)$, reconhecendo uma "espécie de 'dualidade' ". Esta questão é apresentada em detalhes em [106].

4.3 O operador $i\gamma^\mu\partial_\mu\Box^2$

Temos agora um D'Alembertiano ao quadrado conjugado com um operador de Dirac. Novamente, usaremos a forma espinorial para Ψ e a transformação de variáveis usual da seção 4.1, resultando em:

$$16\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial\eta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_1(\xi,\eta) \\ \tilde{\Psi}_2(\xi,\eta) \end{pmatrix} = 0,$$

que nos dá o seguinte par de equações diferenciais não-acopladas:

$$\frac{\partial^5\tilde{\Psi}_1(\xi,\eta)}{\partial\eta^3\partial\xi^2} = 0$$

$$\frac{\partial^5\tilde{\Psi}_2(\xi,\eta)}{\partial\xi^3\partial\eta^2} = 0,$$

cujas soluções mais gerais são, respecitivamente:

$$\tilde{\Psi}_1(\xi,\eta) = f_1(\xi) + g_1(\eta) + \eta h_1(\xi) + \xi k_1(\eta) + \eta^2 l_1(\xi)$$

$$\tilde{\Psi}_2(\xi,\eta) = f_2(\xi) + g_2(\eta) + \eta h_2(\xi) + \xi k_2(\eta) + \xi^2 l_2(\eta).$$

As condições iniciais serão tomadas como:

$$\Psi(x,0) = \begin{pmatrix} A(x) \\ B(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Psi(x,0)}{\partial t} = \begin{pmatrix} C(x) \\ \\ D(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,0)}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} F(x) \\ \\ G(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^3 \Psi(x,0)}{\partial t^3} = \begin{pmatrix} H(x) \\ \\ J(x) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^4 \Psi(x,0)}{\partial t^4} = \begin{pmatrix} R(x) \\ \\ S(x) \end{pmatrix}.$$

Isso resulta em um conjunto de dez equações:

$$\begin{aligned}
A(x) &= f_1(x) + g_1(x) + xh_1(x) + xk_1(x) + x^2 l_1(x) \\
B(x) &= f_2(x) + g_2(x) + xh_2(x) + xk_2(x) + x^2 l_2(x) \\
C(x) &= -f_1'(x) + g_1'(x) + h_1(x) + 2xl_1(x) - k_1(x) - xh_1'(x) - x^2 l_1'(x) + xk_1'(x) \\
D(x) &= -f_2'(x) + g_2'(x) + h_2(x) - 2xl_2(x) - k_2(x) - xh_2'(x) + x^2 l_2'(x) + xk_2'(x) \\
F(x) &= f_1''(x) + g_1''(x) + xh_1''(x) + x^2 l_1''(x) + xk_1''(x) - 2h_1'(x) - 4xl_1'(x) - 2k_1' + 2l_1(x) \\
G(x) &= f_2''(x) + g_2''(x) + xh_2''(x) + x^2 l_2''(x) + xk_2''(x) - 2h_2'(x) - 4xl_2'(x) - 2k_2'(x) + 2l_2(x) \\
H(x) &= -f_1'''(x) + g_1'''(x) - xh_1'''(x) - x^2 l_1''' + xk_1'''(x) + 3h_1''(x) - 3k_1''(x) + 6xl_1''(x) - 6l_1'(x) \\
J(x) &= -f_2'''(x) + g_2'''(x) - xh_2'''(x) + x^2 l_2''' + xk_2'''(x) + 3h_2''(x) - 3k_2''(x) - 6xl_2''(x) + 6l_2'(x) \\
R(x) &= f_1''''(x) + g_1''''(x) + xh_1''''(x) + xk_1'''' + x^2 l_1''''(x) - 4h_1'''(x) - 4k_1'''(x) - 8xl_1'''(x) + 12l_1''(x) \\
S(x) &= f_2''''(x) + g_2''''(x) + xh_2''''(x) + xk_2'''' + x^2 l_2''''(x) - 4h_2'''(x) - 4k_2'''(x) - 8xl_2'''(x) + 12l_2''(x).
\end{aligned}$$

Estas equações estão claramente agrupadas em dois blocos distintos (relacionando funções de índice 1 e funções de índice 2), que devem ser abordados separadamente. Feito isso, as soluções gerais obtidas em [106] são:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_1(\xi,\eta) \;=\;& \frac{11}{16}A(\xi) + \frac{5}{16}A(\eta) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\Big[C(\xi)+C(\eta)\Big] - \frac{1}{16}(\xi-\eta)^2F(\xi) + \\
& -\frac{1}{16}(\xi-\eta)\Big[4A'(\xi)-A'(\eta)\Big] + \frac{1}{32}(\xi-\eta)^2A''(\xi) + \frac{3}{4}\int_\xi^\eta dyC(y) + \\
& \frac{3}{8}\int_\xi^\eta dy\int_\xi^y dzF(z) - \frac{1}{8}\xi\int_\xi^\eta dy\int_\xi^y dzH(z) + \frac{1}{8}\int_\xi^\eta dy\int_\xi^y dzzH(z) + \\
& -\frac{1}{16}\xi\int_\xi^\eta dy\int_\xi^y dz\int_\xi^z duR(u) + \frac{1}{16}\int_\xi^\eta dy\int_\xi^y dz\int_\xi^z duuR(u)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_2(\xi,\eta) \;=\;& \frac{5}{16}B(\xi) + \frac{11}{16}B(\eta) + \frac{1}{8}(\xi-\eta)\Big[D(\xi)+D(\eta)\Big] - \frac{1}{16}(\xi-\eta)^2G(\eta) + \\
& -\frac{1}{16}(\xi-\eta)\Big[B'(\xi)-4B'(\eta)\Big] + \frac{1}{32}(\xi-\eta)^2B''(\eta) + \frac{3}{4}\int_\xi^\eta dyD(y) + \\
& -\frac{3}{8}\int_\xi^\eta dy\int_\eta^y dzG(z) - \frac{1}{8}\eta\int_\xi^\eta dy\int_\eta^y dzJ(z) + \frac{1}{8}\int_\xi^\eta dy\int_\eta^y dzzJ(z) + \\
& +\frac{1}{16}\eta\int_\xi^\eta dy\int_\eta^y dz\int_\eta^z duS(u) - \frac{1}{16}\int_\xi^\eta dy\int_\eta^y dz\int_\eta^z duuS(u).
\end{aligned}
$$

E assim ficamos com as soluções gerais para os casos “semi-inteiros” do D’Alembertiano.

Capítulo 5

D'Alembertiano em (2+1) dimensões

Até agora nos concentramos no caso bidimensional. Fizemos isso usando as coordenadas no cone de luz e obtivemos a solução geral da equação de D'Alembert. Esse método não funciona em três dimensões (2+1).

Para o caso tridimensional, vamos usar uma outra abordagem, aplicada à equação de D'Alembert em primeira ordem (D'Alembertiano) e em segunda ordem (D'Alembertiano ao quadrado).

5.1 D'Alembertiano em primeira ordem, sem massa

Começaremos logo com o caso mais geral, ou seja, com a função d'alembertiana não-homogênea:

$$\Box\Phi = J$$

$$\Phi = \Box^{-1}J.$$

Isso nos leva a escrever Φ como a integral de uma função de Green:

$$\Phi(t;\vec{x}) = \int d^3y G(x-y)J(y).$$

Sabemos, da definição da função de Green, que

$$\Box G(x-y) = \delta^3(x-y).$$

Escrevendo a transformada de Fourier da função de Green e, em seguida, aplicando o operador D'Alembertiano em ambos os lados da equação, ficamos com:

$$\begin{aligned} G(x-y) &= \int \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3}\tilde{G}(\kappa)e^{-i\kappa\cdot(x-y)} \\ \delta^3(x-y) &= \Box\left[\int \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3}\tilde{G}(\kappa)e^{-i\kappa\cdot(x-y)}\right]. \end{aligned}$$

Para que o lado direito da equação acima seja a transformada de Fourier da função δ, teremos obrigatoriamente:

$$\tilde{G}(\kappa) = -\frac{1}{\kappa^2}.$$

Logo:

$$G(x-y) = \int \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3}\left(-\frac{1}{\kappa^2}\right)e^{-i\kappa\cdot(x-y)}.$$

Esta integral é uma integral tripla e pode ser discriminada da seguinte forma:

$$G(x-y) = \int\int\int \frac{d\kappa^0 d\vec{\kappa}}{(2\pi)^3}\left[-\frac{1}{(\kappa^0)^2 - \vec{\kappa}^2}\right]e^{-i\kappa^0(x^0-y^0)+i\vec{\kappa}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}.$$

Vamos realizar primeiramente a integral em κ^0. Reconhecemos nela a existência de dois pólos: $\kappa^0 = \pm|\vec{\kappa}|$. E aqui convém fazermos uma consideração de ordem física: y^0 é o tempo relacionado à fonte J. Logo, é natural considerarmos o caso dito retardado, ou seja, $x^0 > y^0 \Rightarrow x^0 - y^0 > 0$.

Reescreveremos $(\kappa^0)^2 - \vec{\kappa}^2$ como $(\kappa^0)^2 - \vec{\kappa}^2 + i\epsilon\kappa^0$ (posteriormente fazendo ϵ tender a zero). Esta manobra retira os pólos do eixo real κ^0. Assim, lembrando que $(\kappa^0)^2 - \vec{\kappa}^2 = \kappa^2$, ficamos com:

$$G_{ret}(x-y) = \int\int\int \frac{d\kappa^0 d\vec{\kappa}}{(2\pi)^3}\left(-\frac{1}{\kappa^2 + i\epsilon\kappa^0}\right)e^{-i\kappa^0(x^0-y^0)+i\vec{\kappa}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}.$$

A integral acima deve ser calculada com base na teoria dos resíduos (ver, por exemplo, [108] ou [109]), resultando em:

$$G_{ret}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int d^2\vec{\kappa}(-2\pi i)\left[-\frac{1}{2|\vec{\kappa}|}e^{i|\vec{\kappa}|(x^0-y^0)}e^{i\vec{\kappa}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + \frac{1}{2|\vec{\kappa}|}e^{-i|\vec{\kappa}|(x^0-y^0)}e^{i\vec{\kappa}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right].$$

Lembrando que $d^2\vec{\kappa} = |\vec{\kappa}|d|\vec{\kappa}|d\theta$ e $\vec{\kappa}\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = |\vec{\kappa}||\vec{x}-\vec{y}|cos\theta$, ficamos com:

$$G_{ret}(x-y) = \Theta(x^0-y^0)\frac{2\pi i}{2(2\pi)^3}\int_0^\infty d|\vec{\kappa}|\left(e^{i|\vec{\kappa}|(x^0-y^0)} - e^{-i|\vec{\kappa}|(x^0-y^0)}\right) \quad \cdot \quad \int_0^{2\pi} d\theta e^{i|\vec{\kappa}||\vec{x}-\vec{y}|cos\theta},$$

onde Θ é a conhecida função de Heaviside (ou função degrau). Gradshteyn e Ryzhik [110], p. 482, nos permitem afirmar que:

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i|\vec{\kappa}||\vec{x}-\vec{y}|cos\theta} = 2\pi J_0(|\vec{\kappa}||\vec{x}-\vec{y}|),$$

onde J_0 é a função de Bessel de ordem zero.

Enfim, ficamos com:

$$G_{ret}(x-y) = \Theta(x^0-y^0)\frac{-1}{2\pi}\int_0^\infty d|\vec{\kappa}|sen[|\vec{\kappa}|(x^0-y^0)]J_0(|\vec{\kappa}||\vec{x}-\vec{y}|).$$

Novamente de [110], p. 731, chegamos à seguinte resposta para nossa integral:

$$G_{ret}(x-y) = \Theta(x^0-y^0)\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{(x^0-y^0)^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2}}.$$

Diferentemente do caso em (1+3) dimensões, onde as soluções existem apenas na fronteira do cone de luz, aqui vemos claramente que toda a região interna ao cone abriga soluções.

5.2 D'Alembertiano em primeira ordem, com massa

Partindo agora da equação

$$(\Box + m^2)\Phi = J,$$

e retraçando os passos da seção anterior, chegamos à seguinte integral:

$$\begin{aligned}
G(x-y) &= \int \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3}\left(-\frac{1}{\kappa^2 - m^2}\right)e^{-i\kappa\cdot(x-y)} \\
G(x-y) &= \int\int\int \frac{d\kappa^0 d\vec{\kappa}}{(2\pi)^3}\left[-\frac{1}{(\kappa^0)^2 - \vec{\kappa}^2 - m^2}\right]e^{-i\kappa^0(x^0-y^0)+i\vec{\kappa}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}.
\end{aligned}$$

Os pólos, agora, serão $\kappa^0 = \pm\sqrt{|\vec{\kappa}| + m^2} = \pm\omega$ e, portanto, novamente integrando em κ^0 por resíduos, ficamos com:

$$\begin{aligned}
G(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int d^2\vec{\kappa}(-2\pi i)\left[-\frac{1}{2\omega}e^{i\omega(x^0-y^0)}e^{i\vec{\kappa}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + \frac{1}{2\omega}e^{-i\omega(x^0-y^0)}e^{i\vec{\kappa}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right] \\
G(x-y) &= \frac{2\pi i}{2(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{|\vec{\kappa}|d|\vec{\kappa}|}{\omega}\left(e^{i\omega(x^0-y^0)} - e^{-i\omega(x^0-y^0)}\right) \quad \cdot \quad \int_0^{2\pi} d\theta e^{i|\vec{\kappa}||\vec{x}-\vec{y}|cos\theta}.
\end{aligned}$$

A integral em θ já foi feita na seção anterior; ficamos, então, com:

$$G(x-y) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{|\vec{\kappa}|d|\vec{\kappa}|sen\left[\sqrt{|\vec{\kappa}|^2 + m^2}(x^0-y^0)\right]}{\sqrt{|\vec{\kappa}|^2 + m^2}}J_0(|\vec{\kappa}||\vec{x}-\vec{y}|).$$

Em [110], p. 761, temos a solução desta integral:

$$G(x-y) = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi m}{2}}\frac{1}{\Big[(x^0-y^0)^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2\Big]^{\frac{1}{4}}}J_{-\frac{1}{2}}\Big[m\sqrt{(x^0-y^0)^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2}\Big].$$

Sendo essa a resposta para o caso massivo, devemos ser capazes de obter o caso particular $m = 0$ a partir desse resultado mais geral. De fato isso acontece, embora não seja uma operação trivial. Para isso, é conveniente abrirmos a função de Bessel

$$J_{-\frac{1}{2}}(Z) = \sqrt{\frac{2}{Z}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k Z^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{1}{2})}$$

$$\begin{aligned} J_{-\frac{1}{2}}\Big[m\sqrt{(x^0-y^0)^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2}\Big] &= \frac{\sqrt{2}}{\Big\{m^2\Big[(x^0-y^0)^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2\Big]\Big\}^{\frac{1}{4}}}\times \\ &\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Big[m\sqrt{(x^0-y^0)^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2}\Big]^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

Explicitando o somatório, ficamos com:

$$J_{-\frac{1}{2}}\Big[m\sqrt{(x^0-y^0)^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2}\Big] = \frac{\sqrt{2}}{\Big\{m^2\Big[(x^0-y^0)^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2\Big]\Big\}^{\frac{1}{4}}}\Big[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}+m^2(\ldots)\Big].$$

Agora podemos substituir a função de Bessel em nosso resultado, lembrando que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$:

$$G(x-y) = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi m}{2}}\frac{1}{\Big[(x^0-y^0)^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2\Big]^{\frac{1}{4}}}\frac{\sqrt{2}}{\Big\{m^2\Big[(x^0-y^0)^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2\Big]\Big\}^{\frac{1}{4}}}\Big[\frac{1}{\sqrt{\pi}}+m^2(\ldots)\Big]$$

e fazer $m = 0$, obtendo exatamente o resultado anterior, para o caso não-massivo:

$$G(x-y) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{(x^0-y^0)^2-|\vec{x}-\vec{y}|^2}}.$$

5.3 D'Alembertiano em segunda ordem

Uma vez que demonstramos, nas seções anteriores, que basta calcular o caso massivo e tomar a massa como zero ao final da solução para obter o caso não-massivo, começaremos logo com o caso geral:

$$(\Box + \mu^2)^2 \Phi = J$$

e, refazendo os passos das seções anteriores, chegamos à seguinte integral tripla:

$$\begin{aligned} G(x-y) &= \int\int\int \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3}\left[-\frac{1}{(\kappa^2-\mu^2)^2}e^{-i\kappa\cdot(x-y)}\right] \\ G(x-y) &= \int\int\int \frac{d\kappa^0 d\vec{\kappa}}{(2\pi)^3}\left\{-\frac{1}{\left[(\kappa^0)^2-\vec{\kappa}^2-\mu^2\right]^2}e^{-i\kappa^0(x^0-y^0)+i\vec{\kappa}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right\}. \end{aligned}$$

Temos agora dois pólos duplos, $\kappa = \pm\omega = \pm\sqrt{\vec{\kappa}^2 + \mu^2}$. Novamente precisamos recorrer à integração por resíduos. A integral em κ^0 será $-2\pi i \sum Res$.

Para $\kappa = \omega$ temos:

$$Res_1 = -\frac{e^{-i\omega(x^0-y^0)}}{8\omega^3}[2i(x^0-y^0)+1],$$

e para $\kappa = -\omega$ temos:

$$Res_2 = -\frac{e^{i\omega(x^0-y^0)}}{8\omega^3}[2i(x^0-y^0)-1],$$

resultando, portanto, em:

$$I_{\kappa^0} = -2\pi i \sum Res = 2\pi i\left\{\frac{e^{-i\omega(x^0-y^0)}}{8\omega^3}[2i(x^0-y^0)+1] + \frac{e^{i\omega(x^0-y^0)}}{8\omega^3}[2i(x^0-y^0)-1]\right\}.$$

Após algumas manipulações algébricas, ficamos com:

$$I_{\kappa^0} = \frac{2\pi i(2i)}{8\omega^3}\left\{2\omega(x^0-y^0)cos[\omega(x^0-y^0)] - sen[\omega(x^0-y^0)]\right\}.$$

Logo,

$$G(x-y) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\pi i(2i)}{8}\int\int d\vec{\kappa}\frac{e^{i\vec{\kappa}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{\omega^3}\Big\{2\omega(x^0-y^0)cos[\omega(x^0-y^0)] - sen[\omega(x^0-y^0)]\Big\}.$$

E, novamente, podemos dividir essa integral em sua parte radial ($|\vec{\kappa}|$) e sua parte angular (θ):

$$G(x-y) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2\pi i(2i)}{8}\int\frac{|\vec{\kappa}|d|\vec{\kappa}|}{\omega^3}\Big\{2\omega(x^0-y^0)cos[\omega(x^0-y^0)] - sen[\omega(x^0-y^0)]\Big\}\times\int d\theta e^{i|\vec{\kappa}||(\vec{x}-\vec{y})|cos\theta}.$$

E a integral em θ é nossa velha conhecida, resultando em $2\pi J_0(|\vec{\kappa}||(\vec{x}-\vec{y})|)$.

Finalmente, simplificando o fator de multiplicação e substituindo ω por $\sqrt{|\vec{\kappa}|^2+\mu^2}$, ficamos com:

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{|\vec{\kappa}|d|\vec{\kappa}|}{(|\vec{\kappa}|^2+\mu^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{2\sqrt{|\vec{\kappa}|^2+\mu^2}(x^0-y^0)cos[\sqrt{|\vec{\kappa}|^2+\mu^2}(x^0-y^0)] - sen[\sqrt{|\vec{\kappa}|^2+\mu^2}(x^0-y^0)]\right\}\times$$
$$\times J_0(|\vec{\kappa}||(\vec{x}-\vec{y})|)$$

Nossa resposta será:

$$G(x-y) = \frac{1}{4\pi}\Big[2I_1 - I_2\Big]$$

onde (fazendo $|\vec{\kappa}| = \kappa$, $x^0 - y^0 = \alpha$ e $|\vec{x}-\vec{y}| = \beta$)

$$I_1 = \int\frac{\kappa d\kappa}{\kappa^2+\mu^2}\alpha cos\Big(\alpha\sqrt{\kappa^2+\mu^2}\Big)J_0(\beta\kappa)$$
$$I_2 = \int\frac{\kappa d\kappa}{(\kappa^2+\mu^2)^{\frac{3}{2}}}sen\Big(\alpha\sqrt{\kappa^2+\mu^2}\Big)J_0(\beta\kappa)$$

Na verdade, só precisamos nos preocupar com a segunda integral, uma vez que

$$I_1 = \alpha\frac{dI_2}{d\alpha}.$$

Prudnikov *et al* [111], p. 203, nos apresentam o resultado:

$$I_2 = \alpha K_0(\beta\mu)$$

onde

$$K_0(x) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(x)$$

é a função de MacDonald e $H_0^{(1)}$ é a função de Hankel definida como $H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x)$, sendo J_0 a conhecida função de Bessel e Y_0 a função de Neumann.

A partir de I_2, obtemos $I_1 = I_2$. E, portanto,

$$G(x-y) = \frac{1}{4\pi}\alpha K_0(\beta\mu) = \frac{1}{4\pi}(x^0 - y^0) K_0\Big(|\vec{x} - \vec{y}|\mu\Big).$$

Como no caso anterior do operador $(\Box + m^2)$, pretendemos obter o caso de massa nula a partir do limite $\mu \to 0$. Segundo [110] (págs. 961 e 963, respectivamente), os limites assintóticos da função de McDonald são:

$$K_0(z) \overset{z\to 0}{\longrightarrow} -ln\left(\frac{z}{2}\right)$$

e

$$K_0(z) \overset{z\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}.$$

Assim, para massas muito pequenas ($\mu \to 0$), teremos

$$G(x-y) = \frac{1}{4\pi}(x^0 - y^0) K_0\Big(|\vec{x} - \vec{y}|\mu\Big) \cong -\frac{1}{4\pi}(x^0 - y^0) ln\left(\frac{|\vec{x} - \vec{y}|\mu}{2}\right),$$

o que, obviamente, nos dá uma indeterminação no caso $\mu = 0$.

Capítulo 6

Reflexões Finais e Perspectivas Futuras

Vimos na Introdução que o estudo de Lagrangeanos que contenham derivadas de segunda ordem ou maior foi introduzido na teoria de campos em uma tentativa matemática de contornar certos problemas comumente descritos como “catástrofe do ultravioleta”. Como as proverbiais “nuvens de Kelvin” (guardadas as devidas proporções, é claro), essa idéia trouxe muitos outros problemas e abriu caminho para novas indagações e outras tantas soluções.

A abordagem direta aos Lagrangeanos nos deixa com uma equação de D’Alembert e Lagrangeanos de ordem superior nos trazem D’Alembertianos também de ordem superior. Ao longo deste trabalho nos concentramos nas soluções analíticas de dois casos específicos em duas dimensões (1+1): $\Box^2$ e $\Box^3$. No primeiro caso, resolvemos analiticamente também o caso não-homogêneo (com fontes externas). Tratamos também do acoplamento da equação de D'Alembert com a equação de Dirac (casos fermiônicos). Fizemos ainda o D'Alembertiano ao quadrado em três dimensões (2+1).

Como era de se esperar, a matemática nos trouxe algumas surpresas e outros tantos problemas que merecem ser enumerados. Minhas reflexões finais são primordialmente centradas nos resultados obtidos no capítulo 3.

Em primeiro lugar, convém ressaltar certas indefinições matemáticas que aparecem ligadas às condições iniciais tão somente pela ordem da equação tratada. Soluções com condições descontínuas sofrem na transposição da equação usual para uma equação de ordem superior. Como vimos na seção 3.1, descontinuidades trazem problemas pois suas derivadas (a função delta de Dirac) não podem ser derivadas (na verdade, podemos até definir uma derivada para a delta de Dirac, mas esta será um operador).

Tendo isso em mente, optamos por soluções iniciais contínuas e nos concentramos no caso clássico de uma distribuição gaussiana. Vimos que para todas as ordens (1, 2 e 3) o comportamento era semelhante: dois pulsos se propagando em sentidos opostos, simétricos à origem. Mas as equações de ordem superior apresentaram um comportamento não-físico: a intensidade dos pulsos cresce com o tempo, divergindo no infinito.

Uma solução interessante para isso, sugerida já por Thirring e Narnhofer [22], é tentar compensar o comportamento espúrio da solução através de uma fonte externa. A idéia não poderia ser mais direta e pode ser descrita como "combater fogo com fogo". Temos uma solução que se comporta mal para tempos crescentes; pensamos em introduzir uma outra (na forma de uma fonte externa) cujo mau comportamento compensasse o anterior e retornasse o caráter físico da solução. Esta era a nossa idéia.

Com as soluções analíticas calculadas no capítulo 1 e a ajuda do MAPLE, uma grande variedade de fontes foi testada (mas somente uma foi reproduzida na seção 3.3). Até o presente momento, não conseguimos encontrar uma fonte que produza o resultado que queremos. Um belo exercício matemático será justamente isso: divisar um método que, a partir da solução analítica, forneça uma função (ou uma família de funções) que nos permita eliminar o comportamento espúrio das soluções com derivadas superiores.

Seria interessante, a este ponto, abrir uma discussão que não contemplamos ao longo deste trabalho e que a literatura relativa às derivadas superiores também não focaliza: a auto-interação. Qual o papel que a auto-interação pode desempenhar como reguladora das fortes singularidades que as derivadas superiores introduzem na prpagação dos pulsos livres?

A auto-interação é equivalente à presença de uma fonte externa na equação de campo, por exemplo, o caso da auto-interação escalar quártica:

$$\Box^2\Phi = \frac{\lambda}{3}\Phi^3.$$

Assim, vemos que tudo o que foi dito nesta Conclusão e também no Capítulo 3, a respeito das fontes externas pode ser imediatamente extendido para os casos onde há auto-interação.

Certamente a solução exata de um sistema com auto-interação, devido à sua natural não-linearidade, é tarefa altamente não-trivial; entretanto, seria estimulante buscar métodos numéricos que nos permitissem integrar a equação de campo com derivadas superiores a partir das condições iniciais e identificar situações onde a fonte externa — agora substituída pela auto-interação — automaticamente "cure" os efeitos singulares das altas derivadas.

Com fonte externa ou com auto-interação, a questão que se coloca é a seguinte: como isolar o comportamento induzido pela parte não-homogênea frente ao comportamento "patológico" advindo das soluções homogêneas?

Independente disso, nas variadas fontes externas que usamos na tentativa de achar alguma que se prestasse aos nossos interesses, um comportamento se mostrou comum: assimetria em relação à origem. Isso é de fato notável, se considerarmos a quantidade e variedade de funções testadas. Convém ressaltar que tal assimetria vem dos termos da fonte e mesmo fontes concentradas no tempo (uma função qualquer de x multiplicada por uma delta de Dirac em t) apresentaram tal assimetria (isso é de fato notável, pois tal fonte concentrada no tempo poderia ser entendida como uma nova condição inicial, o que de fato acontece no caso do D'Alembertiano simples). Este é um importante detalhe matemático que ainda precisa ser estudado.

O futuro se abre em muitas possibilidades, não estando concentrado somente nas soluções numéricas.

Um próximo passo natural é a extensão das soluções em duas dimensões ao caso massivo, resolvendo-se equações do tipo $(\Box + m^2)^N$. Um outro passo natural será relacionar as soluções bosônicas e as fermiônicas, através da Supersimetria.

Em outra frente, o caso em três dimensões, um campo ainda aberto é a extensão e a discussão completa das soluções apresentadas no capítulo 5. E, no campo matemático, além da sistematização na busca de fontes úteis, há uma outra questão em aberto: como tratar derivadas superiores de distribuições?

Como vemos, há muitas questões em aberto. Ao meu ver, isso só reforça a contemporaneidade do problema abordado. Lagrangeanos com derivadas superiores e suas soluções ainda serão muito estudados no futuro.

Referências

[1] Lagrange, J. *Ouvres de Lagrange, Vol. 2*. Gauthier-Villars, Paris, 1868.

[2] Faraday, M. *Experimental researches in electricity, Vol. III*. Dover press, Nova York, 1965.

[3] Maxwell, J. C. *The scientific papers of James Clerk Maxwell*. Dover press, Nova York, 1965.

[4] Bassalo, J.M. F. *Nascimentos da Física (3500a.C. – 1900 A.D.*. Editora Universitária, Belém, 1996.

[5] Landau, L. D. e Lifschitz, E. M. *The classical theory of fields*. Pergamon press, Oxford, 1971.

[6] De León, M. e Rodrigues, P. R. *Generalized classical mechanics and field theory*. North-Holland, Nova York, 1985.

[7] Ostrogradsky, M. *Mémoire de l'Académie des Sciences de St. Petersburg* **6** (1850) 385.

[8] Whittaker, E. T. *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies.* Cambridge University press, Cambridge, 1952.

[9] Podolski, B. *Physical Review* **62** (1942) 68.

[10] Podolski, B. e Kikuchi, C. *Physical Review* **65** (1944) 228.

[11] Podolski, B. e Schwed, P. *Review of Modern Physics* **20** (1948) 40.

[12] Bopp, F. *Annalen der Physik* **38** (1940) 345.

[13] Thirring, W. *Physical Review* **77** (1950) 570.

[14] Bhabha, H. J. *Physical Review* **77** (1950) 665.

[15] Pais, A e Uhlenbeck, G. E. *Physical Review* **79** (1950) 145.

[16] Heisenberg, W. *Nuclear Physics* **4** (1957) 532.

[17] Froissart, M. *Supplemento al Nuovo Cimento* **XIV** (1959) 197.

[18] Smilga, A. V. *Nuclear Physics* **B706** (2005) 598.

[19] Borneas, M. *Physical Review* **186** (1969) 1299.

[20] Chiang, C. C. e Dürr, H. P. *Nuovo Cimento* **28A** (1975) 89.

[21] Gravielides, A; Kuo, T. K. e Lee, S. Y. *Physical Review D* **13** (1976) 2912.

[22] Narnhofer, H. e Thirring, W. *Physics Letters* **76B** (1978) 428.

[23] Englert, B. -G.; Karkowski, J. e Rayski Jr., J. M. *Physics Letters* **83B** (1979) 399.

[24] Gravielides, A; Kuo, T. K. e Lee, S. Y. *Physical Review D* **12** (1975) 1829.

[25] Havas, P. *General Relativity and Gravitation* **8** (1977) 631.

[26] Stelle, K. S. *General Relativity and Gravitation* **9** (1978) 353.

[27] Jankiewicz, C. *Acta Physica Polonica* **B12** (1981) 859.

[28] Stelle, K. S. *Physical Review D* **16** (1977) 953.

[29] Fradkin, E. S. e Tseytlin, A. A. *Nuclear Physics* **B201** (1982) 469.

[30] Bukhbinder, I. L. e Lyakhovich, S. L. *Theoretical and Mathematical Physics* **72** (1987) 824.

[31] Salam, A. e Strathdee, J. *Physical Review D* **18** (1978) 4480.

[32] Solodukhin, S. N. *Physical Review D* **51** (1995) 591.

[33] Mignemi, S. e Schmidt, H.-J. *Classical and Quantum Gravity* **12** (1995) 849.

[34] Naftulin, S. e Odintsov, S. D. *Modern Physics Letters* **A10** (1995) 2071.

[35] Hindawi, A; Ovrut, B. A. e Waldram, D. *Nuclear Physics* **B471** (1996) 409.

[36] Kawasaki, S.; Kimura, T. e Kitago, K. *Progress of Theoretical Physics* **66** (1981) 2085.

[37] Kawasaki, S. e Kimura, T. *Progress of Theoretical Physics* **68** (1982) 1749.

[38] Kawasaki, S. e Kimura, T. *Progress of Theoretical Physics* **69** (1983) 1015.

[39] Namazie, M. A. *Journal of Physics A* **13** (1980) 713.

[40] Krasnikov, N. V.; Kyiatkin, A. B. e Poppitz, E. R. *Physics Letters B* **222** (1989) 66.

[41] Scherk, J. e Schwarz, J. H. *Nuclear Physics* **B81** (1974) 118.

[42] Ferrara, S. *Proceedings of Nobel Symposium* **67** (1986) 132.

[43] Witten, E. e Gross, D. *Nuclear Physics* **B277** (1986) 1.

[44] Zwiebach, B. *Physics Leters* **156B** (1985) 315.

[45] Deser, S. *Proceedings of Nobel Symposium* **67** (1986) 138.

[46] 't Hooft, G. e Veltman, M. *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **20** (1974) 69.

[47] Deser, S. e Redlich, A. N. *Physics Letters* **176B** (1986) 350.

[48] Cecotti, S.; Ferrara, S.; irardello, L. e Porrati, M. *Physics Letters* **B164** (1985) 46.

[49] Grosse-Knetter, C. *Physical Review D* **49** (1994) 6709.

[50] Ovrut, B. A. *Talk presented at STRING'95* University of Southern California, EUA (1995) hep-th/9506028.

[51] Hindawi, A; Ovrut, B. A. e Waldram, D. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **123** (1996) 397.

[52] Hindawi, A; Ovrut, B. A. e Waldram, D. *Nuclear Physics* **B476** (1996) 175.

[53] Forger, K.; Ovrut, B. A.; Theisen, S. J. e Waldram, D. *Physics Letters* **B388** (1996) 1539.

[54] Nojiri, S. e Odintsov, S. D. *JHEP* **0007** (2000) 49.

[55] Neupane, I. P. *JHEP* **0009** (2000) 40.

[56] Mukohyama, S. *Physical Review D* **65** (2002) 084036.

[57] Parry, M.; Pichler, S. e Deeg, D., hep-ph/0502048, 2005.

[58] Hawking, S. W. e Luttrell, J. C. *Nuclear Physics* **B247** (1984) 250.

[59] Kofman, L. A.; Mukhanov, V. F. e Pogosyan, D. Yu. *Soviet Physics JETP* **66** (1987) 433.

[60] Boccaletti, D. *Nuovo Cimento* **105** (1990) 929.

[61] Mazzitelli, F. D. *Physical Review D* **45** (1992) 2814.

[62] Kazakov, K. A. e Pronin, P. I. *Theoretical and Mathematical Physics* **121** (1999) 1585.

[63] Davis, S. *General Relativity and Gravitation* **32** (2000) 541.

[64] Kao, W. F. *Physical Review D* **62** (2000) 087301.

[65] Barros, J. A. e Shapiro, I. L. *Physics Letters* **B412** (1997) 242.

[66] Maroto, A. L. e Shapiro, I. L. *Physics Letters* **B414** (1997) 34.

[67] Holdom, B. hep-th/0111056, 2001.

[68] Holdom, B. *Physical Review D* **66** (2002) 084010.

[69] Nojiri, S. *Gravitation and Cosmology* **9** (2003) 71.

[70] Berredo-Peixoto, G. e Shapiro, I. L. *Physical Review D* **71**(2005) 064005.

[71] Nojiri, S.; Odintsov, S. D. e Ogushi, S. *Physical Review D* **65** (2002) 023521.

[72] Pinheiro, C. *Alguns Aspectos Qunticos da Gravitao*. Tese de doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro, 1995.

[73] Pinheiro, C.; Pires, G. O. e Sasaki, S. *General Relativity and Gravitation* **29** (1997) 409.

[74] Lewandowski, A. e Sundrum, R. *Physical Review D* **65** (2002) 044003.

[75] Barcelos-Neto, J. e Natividade, C. P. *Zeitschrift für Physik C* **51** (1991) 313.

[76] Barcelos-Neto, J. e Vasquez, E. *Zeitschrift für Physik C* **61** (1994) 695.

[77] Fujii, K. *Letters in Mathematical Physics* **15** (1988) 137.

[78] Fujii, K. *Letters in Mathematical Physics* **17** (1989) 197.

[79] Mitov, A. D.; Stoilov, M. N. e Stoyanov, D. Ts. *International Journal of Modern Physics* **14** (1999) 1651.

[80] Fujii, K. *Communications in Mathematical Physics* **101** (1985) 207.

[81] Bukhbinder, I. L. e Ketov, S. V. *Theoretical and Mathematical Physics* **77** (1988) 1032.

[82] Deriglazov, A. A. e Ketov, S. V. *Theoretical and Mathematical Physics* **77** (1988) 1160.

[83] Marleau, L. *Physical Review D* **43** (1991) 885.

[84] Soloshenko, A. A. e Stepanyantz, K. V. *Theoretical and Mathematical Physics* **131** (2002) 558.

[85] Soloshenko, A. A. e Stepanyantz, K. V. *Theoretical and Mathematical Physics* **140** (2004) 437.

[86] Belvedere, L. V.; Amaral, R. L. P. G. e Lemos, N. A. *Z. Phys.* **C66** (1995) 613.

[87] Carvalhaes, C. G.; Belvedere, L. V.; Amaral, R. L. P. G. e Lemos, N. A. hep-th/9702048 (1997).

[88] Belvedere, L. V.; Amaral, R. L. P. G.; Carvalhaes, C. G. e Lemos, N. A. *International Journal of Modern Physics* **A15** (2000) 2237.

[89] Villaseñor, E. J. S. *Journal of Physics* **A35** (2002) 6169.

[90] Cheng, T.-C.; Ho, P.-M. e Yeh, M.-C. *Physical Review D* **66** (2002) 085015.

[91] Musicki, D. *Journal of Physics A* **11** (1978) 39.

[92] Ronald Farias, J. *Hadronic Journal* **8** (1985) 227.

[93] Pagani, E.; Tecchiolli, G. e Zerbini, S. *Letters in Mathematical Physics* **14** (1987) 311.

[94] Nesterenko, V. V. *Journal of Physics A* **22** (1989) 1673.

[95] Saito, Y.; Sugano, R.; Ohta, T. e Kimura, T. *Journal of Mathematical Physics* **30** (1989) 1122.

[96] Chervyakov, A. M. e Nesterenko, V. V. *Physical Review D* **48** (1993) 5811.

[97] Bartoli, A. e Julve, J. *Nuclear Physics* **B425** (1994) 277.

[98] Hamamoto, S. *Progress on Theoretical Physics* **94** (1995) 105.

[99] Nakamura, T. e Hamamoto, S. *Progress of Theoretical Physics* **95** (1996) 469.

[100] Borneas, M. e Damian, I. *International Journal of Theoretical Physics* **38** (1999) 2241.

[101] Damian, I. *International Journal of Theoretical Physics* **39** (2000) 2141.

[102] Bakeyev, T. D. e Slavnov, A. A. *Modern Physics Letters* **A11** (1996) 1539.

[103] Bakeyev, T. D. *Theoretical and Mathematical Physics* **122** (2000) 355.

[104] Simões, R. S. *Soluções de D'Alembert estendidas para equações de onda com derivadas de ordem superior*. Tese de mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.

[105] Cherman, A.; Ferreira Filho, L. G.; Santos Guedes, L. L. e Helayël-Neto, J. A. *Revista Mexicana de Física* (2012) A ser publicado.

[106] Murga, J. L. C. *Aspectos peculiares da quiralidade e da propagação de férmions em teorias com derivadas superiores*. Tese de mestrado, CBPF, Rio de Janeiro, 2005.

[107] Weberszpil, J.; Godinho, C. F. L.; Cherman, A. e Helayël-Neto, J. A. *arXiv:1206.2513v1* (2012)

[108] Churcill, R. V. *Variáveis complexas e suas aplicações.* McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1975.

[109] Butkov, E. *Física Matemática.* Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1988.

[110] Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M. *Table of integrals, series and products.* Academic Press, Nova York, 1965.

[111] Prudnikov, A. P.; Brychkov, Yu. A. e Marichev, O. I. *Integrals and series, Vol. 2: special functions.* Gordon and Breach (1986) Londres.