Tese de Doutorado

Álgebras de Hopf em Teorias Quânticas Deformadas

Paulo Guilherme Santos Couto de Castro

Orientador: Francesco Toppan

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Coordenação de Física Teórica

Rio de Janeiro
Agosto de 2010

Τοῖς ζητοῦσί τι πρᾶγμα ἢ εὕρεσιν ἐπακολουθεῖν εἰκὸς ἢ ἄρνησιν εὑρέσεως καὶ ἀκαταληψίας ὁμολογίαν ἢ ἐπιμονὴν ζητήσεως.

Sexto Empírico

Para Isabel

Sumário

Agradecimentos

Ao meu *Doktorvater* Francesco Toppan, pelo muito que me ensinou, por sua disponibilidade, generosidade e paciência.

Aos Professores Biswajit Chakraborty e Zhanna Kuznetsova, pela prazerosa e produtiva colaboração científica.

Ao Professor Mario Novello, pela acolhida em meus primeiros tempos no CBPF.

Aos meus colegas, em especial Ricardo Kullock, Rodrigo Maier e Thiago Guerreiro, pela amizade e agradáveis convívio e intercâmbio de ideias.

À minha família e aos meus amigos, fontes inesgotáveis de estímulo e apoio.

Aos funcionários do CBPF, pela presteza em ajudar sempre.

O autor contou com bolsa do CNPq.

Resumo

Neste trabalho faremos uso da teoria de Drinfel'd de deformação de álgebras de Hopf para estudar teorias quânticas deformadas.

Demonstramos que, identificando-se corretamente o papel da extensão central da álgebra de Heisenberg, é possível construir sua álgebra universal envelopante e deformá-la por meio do Drinfel'd twist, obtendo-se uma teoria não comutativa. No formalismo de segunda quantização, mostramos que a estrutura de álgebra de Hopf da álgebra de Heisenberg (não deformada e deformada) pode ser obtida a partir da álgebra de Hopf dos campos e osciladores de Schrödinger, desde que eles sejam considerados como geradores da superálgebra $osp(1|2)$.

Estudamos a deformação da álgebra de Heisenberg fermiônica e apresentamos uma identificação com a álgebra da mecânica quântica supersimétrica unidimensional $\mathcal{N}$-estendida, possível para $\mathcal{N}$ par. Apresentamos ainda uma segunda construção para a deformação da mecânica quântica supersimétrica unidimensional $\mathcal{N}$-estendida, por meio da representação de superespaço, em que os geradores de supersimetria são realizados em termos de operadores da superálgebra universal envelopante de um oscilador bosônico e múltiplos osciladores fermiônicos. Para as duas construções, recuperamos, num contexto mais geral, resultados de cliffordização conhecidos na literatura.

Abstract

In this work we apply the Drinfel'd twist of Hopf algebras to the study of deformed quantum theories.

We prove that, by carefully considering the role of the central extension, it is indeed possible to construct the universal enveloping algebra of the Heisenberg algebra and deform it by means of a Drinfel'd twist, which yields a noncommutative theory. Furthermore, we show that in the second-quantisation formalism the Hopf-algebra structure of the Heisenberg algebra (both undeformed and deformed) can be obtained from the Hopf algebra of the Schrödinger fields and oscillators, as long as they are taken to be odd generators of the $osp(1|2)$ superalgebra.

We study the deformation of the fermionic Heisenberg algebra and present an identification with the algebra of the one-dimensional $\mathcal{N}$-extended supersymmetric quantum mechanics, possible for even $\mathcal{N}$. A second construction for the deformation of the one-dimensional $\mathcal{N}$-extended supersymmetric quantum mechanics is presented in the superspace representation, where the supersymmetry generators are realised in terms of operators belonging to the universal enveloping superalgebra of one bosonic and several fermionic oscillators. In both constructions we recover, in a more general setting, some Cliffordization results of the literature.

Introdução

As divergências afligem a mecânica quântica desde os seus primórdios [1]. A possibilidade de resolver-se o problema das divergências introduzindo-se um comprimento fundamental como regulador ultravioleta natural foi primeiro aventada por Heisenberg [2]. A ideia, inspirada na própria relação de incerteza momento-posição, é a de que, em escalas menores que a distância elementar, os conceitos de ponto e instante deixem de fazer sentido, sendo substituídos por uma noção difusa de espaço-tempo. A maneira mais simples de implementar a não comutatividade do espaço-tempo é por meio de uma relação do tipo

$$[x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu},$$

com $\theta_{\mu\nu}$ uma matriz antissimétrica constante. Esta relação de comutação induz a relação de incerteza

$$\Delta x_\mu \Delta x_\nu \geq \frac{1}{2}|\theta_{\mu\nu}|,$$

com $|\theta_{\mu\nu}|$ da ordem de grandeza do quadrado da distância elementar.

Um candidato natural para este comprimento (ver [3], [4]) é o chamado *comprimento de Planck*

$$\ell_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}},$$

que combina as constantes fundamentais da natureza (constante de Newton G, constante de Planck $\hbar$ e velocidade da luz c) de modo dimensionalmente apropriado. Por tratar-se de uma constante da natureza, e não de um corte imposto pela mão do homem, este regulador ultravioleta seria extremamente benvindo na teoria quântica.

No entanto, é imediato ver que uma teoria deste tipo é manifestamente não covariante de Lorentz. Com efeito, as coordenadas x_μ transformam-se como vetores enquanto $\theta_{\mu\nu}$ é constante em todos os referenciais.

A fim de evitar esta inconveniência, Snyder introduziu em [5] a relação de comutação

$$[x_\mu, x_\nu] = i\theta(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu),$$

que é claramente covariante sob transformações de Lorentz. No entanto, provavelmente devido tanto à falha em realizar predições experimentais acuradas quanto ao grande sucesso das técnicas de renormalização, esta proposta recebeu pouca atenção à época. Assim, a teoria quântica com espaço-tempo não comutativo passou por um período longo de ostracismo.

O interesse ressurgiu com Seiberg e Witten [6], que mostraram que a teoria de cordas, num certo limite de baixas energias, pode ser realizada como uma teoria quântica de campos efetiva num espaço-tempo não comutativo. Tal ressurgimento foi também, em grande medida, propiciado pelos desenvolvimentos matemáticos ocorridos na década de 80, como veremos a seguir. Desde então, teorias não comutativas têm sido área de intensa pesquisa, e para revisão do assunto indicamos, e.g., [7], [8] e [9].

Os desenvolvimentos matemáticos a que nos referimos acima foi a introdução do conceito de grupo quântico por Drinfel'd ([10], [11]) e Jimbo [12], inicialmente no contexto de sistemas quânticos integráveis. A ideia é que, se a estrutura do espaço-tempo é deformada, os grupos de simetria que agem sobre ele não podem deixar de sê-lo. No entanto, grupos e álgebras de Lie, que implementam as simetrias, são objetos ditos rígidos, ou seja, insuscetíveis de deformação. Portanto, para pôr em prática o programa de deformar os grupos de simetria foi necessário lançar mão das álgebras de Hopf, nascidas muito antes no seio da topologia algébrica [13] e tema de interesse dos matemáticos desde então (ver os clássicos [14], [15] e, mais recentemente, [16]).

As álgebras de Hopf fornecem, portanto, o cenário matemático adequado para empreender o estudo dos grupos quânticos. O assunto é imensamente vasto e ramificado, e encontra-se bem exposto, por exemplo, em [17] e [18]. Para uma interessante coletânea de artigos pioneiros, ver [19].

Este formalismo permitiu, por exemplo, reconciliar a não comutatividade com a covariância de Lorentz: em [20], o problema é sanado considerando-se o espaço comutativo subjacente (portanto manifestamente covariante de Lorentz) dotado de um produto deformado, produto este que é implementado por meio de um Drinfel'd twist.

Neste trabalho, aplicaremos a maquinaria das álgebras de Hopf e do Drinfel'd twist às álgebras de Heisenberg bosônicas e fermiônicas. No capítulo **1**, expomos (sucintamente) a teoria básica geral das álgebras de Hopf e do Drinfel'd twist e, em particular, como aplicá-la à álgebra universal envelopante de uma álgebra de Lie. No capítulo **2**, inicialmente mostramos que, a despeito de afirmações em contrário, é, sim, possível construir a álgebra universal envelopante da álgebra de Heisenberg dotada de uma estrutura de álgebra de Hopf, e estudamos sua deformação tanto no contexto de primeira quantização quanto no contexto em que ela é realizada por meio de objetos bilineares integrados dos campos e osciladores de Schrödinger (segunda quantização), o que é feito lançando-se mão dos osciladores de Wigner. No capítulo **3**, estudamos a deformação da álgebra de Heisenberg fermiônica e apresentamos uma identificação com a álgebra da mecânica quântica supersimétrica unidimensional $\mathcal{N}$-estendida, possível para valores pares de $\mathcal{N}$. Estudamos também a deformação da mecânica quântica supersimétrica em sua representação de superespaço (possível para qualquer $\mathcal{N}$), recuperando, num contexto mais geral, alguns resultados da literatura prévia de teorias não anticomutativas com violação da regra de Leibniz ([21], [22]).

Os resultados originais desta tese encontram-se em [23] e [24].

Capítulo 1

Álgebras de Hopf e Drinfel'd Twist

Neste capítulo faremos uma breve exposição das estruturas matemáticas que serão necessárias ao entendimento dos capítulos subsequentes.

1.1 Álgebras de Hopf

Considere um espaço vetorial A sobre um corpo $\mathbf{k}$ e os mapas $\mathbf{k}$-lineares $\mu : A \otimes A \to A$ e $\eta : \mathbf{k} \to A$. Chamamos (A, μ, η), ou simplesmente A, uma *álgebra associativa com unidade* (ou *unital*) se os diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes id"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{k} \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes id"] \arrow[d] & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"'] \\
A & A \otimes \mathbf{k} \arrow[l] \arrow[u, "id\otimes\eta"']
\end{tikzcd}$$

comutarem.

O mapa μ é chamado de *multiplicação* e o mapa η de *unidade*, e μ e η são chamados *estruturas* ou *mapas estruturais* da álgebra. Denotamos $\mu(a \otimes b) = a \cdot b$ ($a, b \in A$). O primeiro diagrama corresponde à propriedade da associatividade, que também pode ser expressa como

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \tag{1.1}$$

$a, b, c \in A$.

O segundo diagrama garante a existência da unidade à esquerda e à direita $\mathbf{1}$ em A , com $\eta(1) = \mathbf{1}$ (1, evidentemente, é a unidade em $\mathbf{k}$).

A noção de *coálgebra* (ou *cógebra*) pode ser introduzida de forma natural dualizando-se (no sentido de teoria de categorias [25]) as definições acima. Em particular, o sentido das setas dos diagramas deve ser invertido. Assim sendo, considere um espaço vetorial C sobre o corpo $\mathbf{k}$ e os mapas $\mathbf{k}$-lineares $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\epsilon : C \to \mathbf{k}$. Chamamos (C, Δ, ϵ), ou por simplicidade C, uma *coálgebra* se os diagramas

$$\begin{tikzcd} C\otimes C\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "id\otimes\Delta"'] \\ C\otimes C \arrow[u, "\Delta\otimes id"'] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} \mathbf{k}\otimes C & C\otimes C \arrow[l, "\epsilon\otimes id"'] \arrow[d, "id\otimes\epsilon"] \\ C \arrow[u] \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[r] & C\otimes\mathbf{k} \end{tikzcd}$$

comutarem.

O mapa Δ é chamado de *coproduto* ou *comultiplicação* e o mapa ϵ *counidade*, sendo Δ e ϵ conhecidos como *coestruturas* ou *mapas coestruturais* da coálgebra. Convém aqui introduzir a notação de Sweedler (ver [14]), ou notação sigma, que consiste em suprimir os índices de soma na expressão do coproduto, isto é,

$$\Delta(a) = \sum_i (a_1)_i \otimes (a_2)_i \equiv a_1 \otimes a_2, \tag{1.2}$$

$a \in C$.

A propriedade correspondente ao primeiro diagrama é conhecida como coassociatividade, e equivale à expressão

$$\Delta(a_1) \otimes a_2 = a_1 \otimes \Delta(a_2), \tag{1.3}$$

enquanto a propriedade de counitariedade contida no segundo diagrama é garantida por $\epsilon(\mathbf{1}) = 1$, onde evidentemente denotamos por $\mathbf{1}$ a unidade em C e por 1 a unidade em $\mathbf{k}$, valendo a relação

$$\epsilon(a_1) \otimes a_2 = a_1 \otimes \epsilon(a_2). \tag{1.4}$$

Usamos a notação μ_A, η_A, $\mathbf{1}_A$ e Δ_C, ϵ_C para situações em que há várias álgebras ou cógebras, omitindo o subscrito quando não houver risco de confusão.

Sejam agora A e $\tilde{A}$ álgebras e $h : A \to \tilde{A}$ um mapa linear. Dizemos que h é um *homomorfismo de álgebras* se ele for multiplicativo e preservar a unidade, isto é, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "h\otimes h"] \arrow[d, "\mu_A"'] & \tilde{A} \otimes \tilde{A} \arrow[d, "\mu_{\tilde{A}}"] \\
A \arrow[r, "h"] & \tilde{A}
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h"] & & \tilde{A} \\
& \mathbf{k} \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_{\tilde{A}}"'] &
\end{tikzcd}$$

comutarem.

Tais condições podem ser expressas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} h(a \cdot b) &= h(a)\tilde{\cdot}h(b) && (1.5) \\ h(\mathbf{1}_A) &= \mathbf{1}_{\tilde{A},} && (1.6) \end{aligned}$$

onde $a, b \in A$, $\cdot$ é a multiplicação em A e $\tilde{\cdot}$ a multiplicação em $\tilde{A}$.

Analogamente, para C e $\tilde{C}$ coálgebras, um mapa linear $g : C \to \tilde{C}$ é dito um *homomorfismo de coálgebras* se ele for comultiplicativo e preservar a counidade, isto é, os diagramas

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "g\otimes g"] & \tilde{C} \otimes \tilde{C} \\ C \arrow[u, "\Delta_C"] \arrow[r, "g"] & \tilde{C} \arrow[u, "\Delta_{\tilde{C}}"'] \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & & \tilde{C} \arrow[dl, "\epsilon_{\tilde{C}}"] \\ & \mathbf{k} & \end{tikzcd}$$

comutarem.

A informação contida nos diagramas pode ser escrita simplesmente como

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{C}}(g(c)) &= g(c_1) \otimes g(c_2) && (1.7) \\ \epsilon_{\tilde{C}}(g(\mathbf{1}_C)) &= 1, && (1.8) \end{aligned}$$

onde $c \in C$ e $c_1 \otimes c_2 = \Delta_C(c)$.

Seja agora (B, μ, η) uma álgebra sobre $\mathbf{k}$ e (B, Δ, ϵ) uma coálgebra sobre $\mathbf{k}$. Chamamos $(B, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, ou simplesmente B, uma *biálgebra* (ou *bígebra*) se as estruturas μ e η e as coestruturas Δ e ϵ forem *compatíveis*, isto é, μ e η forem homomorfismos de coálgebra e Δ e ϵ forem homomorfismos de álgebra.

A compatibilidade entre estruturas e coestruturas exprime-se diagramaticamente como a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & B \arrow[r, "\Delta"] & B \otimes B \\
B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[rr, "id\otimes\tau\otimes id"'] & & B \otimes B \otimes B \otimes B, \arrow[u, "\mu\otimes\mu"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\Delta"] & B \otimes B \\
\mathbf{k} \arrow[u, "\eta"] \arrow[r] & \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \arrow[u, "\eta\otimes\eta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\epsilon\otimes\epsilon"'] & B \arrow[d, "\epsilon"] \\
\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \arrow[r] & \mathbf{k}
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{k} \arrow[rr, "id"'] \arrow[dr, "\eta"'] & & \mathbf{k}, \\
& B \arrow[ur, "\epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

com $\tau : a \otimes b \mapsto b \otimes a$ o chamado *mapa de troca* ou *transposição*.

Em fórmulas, o conteúdo dos diagramas é, respectivamente,

$$\Delta(a \cdot b) = a_1 \cdot b_1 \otimes a_2 \cdot b_2 \tag{1.9}$$

$$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{1.10}$$

$$\epsilon(a \cdot b) = \epsilon(a)\epsilon(b) \tag{1.11}$$

$$\epsilon(\mathbf{1}) = 1, \tag{1.12}$$

onde $a, b \in B$ e a multiplicação em $\mathbf{k}$ é indicada pela simples justaposição. Essas expressões serão muito usadas no decorrer desta tese.

Seja agora A uma álgebra e C uma coálgebra. Tomemos $\mathrm{Hom}(C, A)$ (C e A como espaços vetoriais). Definimos, para $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$, a operação de *convolução*

$$f * g = \mu_A(f \otimes g)\Delta_C. \tag{1.13}$$

$\mathrm{Hom}(C, A)$ tem uma estrutura natural de álgebra com mapas estruturais dados por

$$\mu_{\mathrm{Hom}(C,A)}(f \otimes g) = f * g \tag{1.14}$$

$$\eta_{\mathrm{Hom}(C,A)}(\lambda) = \lambda\eta_A \circ \epsilon_C, \tag{1.15}$$

$\lambda \in \mathbf{k}$.

Considere agora H uma biálgebra. Se existir $S \in \mathrm{Hom}(H, H)$ tal que

$$S * \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}(H,H)} = \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}(H,H)} * S = \eta_H \circ \epsilon_H, \tag{1.16}$$

$(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$, ou por simplicidade H, é uma *álgebra de Hopf*. O elemento $S : H \to H$ é chamado de *antípoda* ou *coinversa*. Se existir, tal elemento será único, o que decorre diretamente de ser uma inversa à esquerda e à direita.

A equação (1.16) é, aplicando-se a definição de convolução, equivalente a

$$\mu \circ (S \otimes \ id) \circ \Delta = \mu(id \otimes S)\Delta = \eta \circ \epsilon, \tag{1.17}$$

de modo que a definição de álgebra de Hopf pode ser apreendida pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes id"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\mu"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbf{k} \arrow[rr, "\eta"] & & H. \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "id\otimes S"] & & H \otimes H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Como consequência direta da definição, S é um antiautomorfismo de H e valem, para $a, b \in H$,

$$S(a \cdot b) = S(b) \cdot S(a) \tag{1.18}$$

$$S(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \tag{1.19}$$

$$\epsilon(S(a)) = \epsilon(a) \tag{1.20}$$

$$\Delta(S(a)) = a_2 \otimes a_1. \tag{1.21}$$

Se $S^2 = \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}(H,H)} = id_H$, H é dita *involutiva*. Em particular, se H é comutativa ou cocomutativa ($\tau \circ \Delta = \Delta$), então H é involutiva.

Voltamos agora nossa atenção para a questão das representações de uma álgebra de Hopf, que serão dadas pela ação de H (aqui encarada simplesmente como álgebra) sobre um módulo.

Seja M um $\mathbf{k}$-módulo (i.e., um espaço vetorial; para maiores detalhes, ver o capítulo **12** de [26]) e H uma álgebra. Dizemos que M é um H*-módulo à esquerda* se existir um mapa linear

$$\alpha : H \otimes M \to M$$

tal que os diagramas

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \otimes M \arrow[r, "id\otimes\alpha"] \arrow[d, "\mu\otimes id"'] & H \otimes M \arrow[d, "\alpha"] \\ H \otimes M \arrow[r, "\alpha"] & M \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} \mathbf{k} \otimes M \arrow[r, "\eta\otimes id"] \arrow[d] & H \otimes M \arrow[d, "\alpha"] \\ M \arrow[r, "id_M"] & M \end{tikzcd}$$

comutam.

O mapa α é chamado uma *ação à esquerda* de H sobre M e o par (α, M) uma *representação* de H.

Equivalentemente aos diagramas, podemos dizer que o mapa

$$\begin{aligned} \rho : H &\rightarrow \mathrm{End}(M) \\ h &\mapsto \alpha(h \otimes -) \end{aligned} \tag{1.22}$$

é um homomorfismo de álgebras (com a multiplicação em $\mathrm{End}(M)$ dada pela composição), o que é uma maneira mais convencional de ver que (α, M) constitui uma representação de H.

Por simplicidade, denotamos a ação pelo símbolo $\triangleright$, ou seja, $\alpha(h, v) = h \triangleright v$, $h \in H, v \in M$. Assim, o conteúdo dos diagramas pode ser expresso como

$$(h \cdot g) \triangleright v = h \triangleright (g \triangleright v) \tag{1.23}$$

$$\mathbf{1} \triangleright v = v, \tag{1.24}$$

$\forall g, h \in H, \forall v \in M$.

Todos estes conceitos podem ser dualizados, obtendo-se as noções de *H-comódulo*, *coação* e *correpresentação*, sobre os quais não nos deteremos. As noções de *H-módulo à direita* e *ação à direita* são inteiramente análogas.

Consideremos agora o caso mais interessante em que o H-módulo à esquerda M é uma álgebra, com multiplicação $m : M \otimes M \rightarrow M$. Dizemos que H age *covariantemente* sobre M se a multiplicação m for respeitada pela ação de H, i.e.,

$$h \triangleright (m(v \otimes w)) = m((h_1 \triangleright v) \otimes (h_2 \triangleright w)) \tag{1.25}$$

$$h \triangleright \mathbf{1}_M = \epsilon(h)\mathbf{1}_M, \tag{1.26}$$

$\forall h \in H$, $\forall v, w \in M$. Neste caso, diz-se que m é *equivariante* com respeito à ação α, e que M é uma *H-módulo-álgebra*.

Há algumas ações notáveis de H sobre si mesma, como a chamada *ação regular*, dada pela multiplicação μ, e a *ação adjunta*, dada por

$$\mathrm{ad}_g(h) = g_1 \cdot h \cdot S(g_2), \tag{1.27}$$

$g, h \in H$. A ação adjunta torna H uma H-módulo-álgebra e fornece a *representação adjunta* de H.

1.2 Drinfel'd Twist

Nesta seção introduziremos o conceito de álgebras de Hopf quase-triangulares, introduzido em [10] (para uma revisão, ver [27]) e apresentaremos um método sistemático para produzir exemplos, o chamado *Drinfel'd twist*.

Uma álgebra de Hopf H é *quase-cocomutativa* se existir um elemento invertível $\mathcal{R} \in H \otimes H$ tal que

$$(\tau \circ \Delta)(a) = \mathcal{R} \cdot \Delta(a) \cdot \mathcal{R}^{-1} \tag{1.28}$$

$\forall a \in H$.

Denotando

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^\alpha \otimes \mathcal{R}_\alpha, \quad \mathcal{R}^{-1} = \bar{\mathcal{R}}^\alpha \otimes \bar{\mathcal{R}}_\alpha, \tag{1.29}$$

onde está subentendida uma soma sobre o multi-índice α, é conveniente introduzir

$$\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}^\alpha \otimes \mathcal{R}_\alpha \otimes \mathbf{1} \tag{1.30}$$

$$\mathcal{R}_{13} = \mathcal{R}^\alpha \otimes \mathbf{1} \otimes \mathcal{R}_\alpha \tag{1.31}$$

$$\mathcal{R}_{23} = \mathbf{1} \otimes \mathcal{R}^\alpha \otimes \mathcal{R}_\alpha. \tag{1.32}$$

Uma álgebra de Hopf quase-cocomutativa é dita *quase-triangular* se

$$(\Delta \otimes id)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \tag{1.33}$$

$$(id \otimes \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}. \tag{1.34}$$

O elemento $\mathcal{R}$ é chamado *estrutura quase-triangular* ou *matriz-R universal.* Adicionalmente, se $\mathcal{R}^{-1} = \tau(\mathcal{R})$, H é dita *triangular.* Toda álgebra de Hopf cocomutativa é trivialmente triangular com $\mathcal{R} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$.

Como consequência da definição, temos que a estrutura quase-triangular $\mathcal{R}$ satisfaz à relação

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \tag{1.35}$$

que é a chamada *equação de Yang-Baxter quântica* ([28–30], [31]). Esta equação, por emergir em diversos sistemas físicos, serviu de motivação original para o estudo de álgebras de Hopf quase-triangulares: para cada representação ρ de H em matrizes, $(\rho \otimes \rho)\mathcal{R}$ é uma solução matricial de (1.35), daí $\mathcal{R}$ ser conhecida como matriz-R universal. Para mais detalhes, ver, e.g., [27].

Para provar que $\mathcal{R}$ satisfaz à equação de Yang-Baxter quântica, aplicamos $(id \otimes \tau)$ a (1.34) obtendo

$$(id \otimes \tau \circ \Delta)\mathcal{R} = (id \otimes \tau)\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}, \tag{1.36}$$

e, por outro lado, fazemos uso da condição de quase-cocomutatividade (1.28)

$$(id \otimes \tau \circ \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{23}((id \otimes \Delta)\mathcal{R})\mathcal{R}_{23}^{-1} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}^{-1}. \tag{1.37}$$

Como $\mathcal{R}_{23}$ é invertível, (1.35) se verifica.

Agora, passamos a expor o método do Drinfel'd twist (ver [32]), que pode ser usado para gerar álgebras de Hopf quase-triangulares a partir da deformação de álgebras de Hopf cocomutativas. Para tanto, iniciemos por algumas definições. Seja H uma álgebra de Hopf. Um *2-cociclo* é um elemento invertível $\xi \in H \otimes H$ tal que

$$(\mathbf{1} \otimes \xi)(id \otimes \Delta)\xi = (\xi \otimes \mathbf{1})(\Delta \otimes id)\xi. \tag{1.38}$$

O 2-cociclo ξ é dito *counitário* se

$$(\epsilon \otimes id)\xi = \mathbf{1} = (id \otimes \epsilon)\xi. \tag{1.39}$$

Sejam agora $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ uma álgebra de Hopf cocomutativa e $\mathcal{F} \in H \otimes H$ um 2-cociclo counitário. Temos que $\chi = \mu(id \otimes S)\mathcal{F}$ é um elemento invertível de H com $\chi^{-1} = \mu(S \otimes id)\mathcal{F}^{-1}$.

Definindo $\Delta^{\mathcal{F}} : H \to H \otimes H$ e $S^{\mathcal{F}} : H \to H$ como

$$\Delta^{\mathcal{F}}(a) = \mathcal{F}\Delta(a)\mathcal{F}^{-1} \tag{1.40}$$

$$S^{\mathcal{F}}(a) = \chi S(a)\chi^{-1}, \tag{1.41}$$

$(H, \mu, \eta, \Delta^{\mathcal{F}}, \epsilon, S^{\mathcal{F}})$ é uma álgebra de Hopf triangular com matriz-R universal dada por

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{F}^{-1}. \tag{1.42}$$

Denotamos a álgebra de Hopf torcida $(H, \mu, \eta, \Delta^{\mathcal{F}}, \epsilon, S^{\mathcal{F}})$ por $H^{\mathcal{F}}$. É de se ressaltar que, como álgebra, $H^{\mathcal{F}}$ é idêntica a H (i.e., são o mesmo espaço vetorial e as estruturas algébricas não são deformadas). O elemento $\mathcal{F}$ é chamado de *twist*, e a notação

$$\mathcal{F} = f^{\alpha} \otimes f_{\alpha}, \quad \mathcal{F}^{-1} = \bar{f}^{\alpha} \otimes \bar{f}_{\alpha}, \tag{1.43}$$

com soma sobre o multi-índice α, será usada adiante.

Para provar que $H^{\mathcal{F}}$ é uma álgebra de Hopf, devemos mostrar que $\Delta^{\mathcal{F}}$ é coassociativo, i.e.,

$$(\Delta^{\mathcal{F}} \otimes id)\Delta^{\mathcal{F}}(a) = (id \otimes \Delta^{\mathcal{F}})\Delta^{\mathcal{F}}(a), \tag{1.44}$$

e que $S^{\mathcal{F}}$ é um antípoda, ou seja,

$$(S^{\mathcal{F}} \otimes id)\Delta^{\mathcal{F}}(a) = (id \otimes S^{\mathcal{F}})\Delta^{\mathcal{F}}(a), \tag{1.45}$$

$\forall a \in H$. A demonstração envolve tão-somente aplicação direta das definições, das propriedades (1.18), (1.21) e da condição de 2-cociclo counitário (1.38), (1.39).

Passamos a provar a triangularidade de $H^{\mathcal{F}}$. Inicialmente, verificamos que $H^{\mathcal{F}}$ é quase-cocomutativa:

$$\tau \circ \Delta^{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{21} \Delta \mathcal{F}_{21}^{-1} = \mathcal{R}\mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1}\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}\Delta^{\mathcal{F}}\mathcal{R}^{-1}. \tag{1.46}$$

Devemos mostrar que $\mathcal{R}$ definido em (1.42) é uma estrutura quase-triangular, i.e.,

$$(\Delta^{\mathcal{F}} \otimes id)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \tag{1.47}$$

$$(id \otimes \Delta^{\mathcal{F}})\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \tag{1.48}$$

o que requer apenas manipulações das propriedades básicas e da condição de 2-cociclo, além da cocomutatividade de H. Por fim, é evidente que

$$\mathcal{R}_{21} = \mathcal{F}\mathcal{F}_{21}^{-1} = \mathcal{R}^{-1}. \tag{1.49}$$

Tomemos agora uma H-módulo-álgebra M dotada de multiplicação m sobre a qual H age covariantemente no sentido de (1.25)–(1.26). Por definição,

$$v \star w = m^{\mathcal{F}}(v \otimes w) = m(\mathcal{F}^{-1} \triangleright (v \otimes w)), \tag{1.50}$$

$v, w \in M$. Neste caso, $m^{\mathcal{F}}$ define uma nova álgebra associativa $M_{\star}$ que é covariante sob a ação da álgebra de Hopf deformada $H^{\mathcal{F}}$ definida anteriormente. A prova desta afirmação é simples. A associatividade de $\star$ segue da condição de 2-cociclo satisfeita por $\mathcal{F}$. Para provar a equivariância de $m^{\mathcal{F}}$, basta ver que $h \triangleright (m^{\mathcal{F}}(v \otimes w)) = m^{\mathcal{F}}(\Delta^{\mathcal{F}}(h) \triangleright (v \otimes w))$:

$$\begin{aligned} h \triangleright (m^{\mathcal{F}}(v \otimes w)) = h \triangleright m(\mathcal{F}^{-1} \triangleright (v \otimes w)) &= m(\Delta(h)\mathcal{F}^{-1} \triangleright (v \otimes w)) = \\ = m(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\Delta(h)\mathcal{F}^{-1} \triangleright (v \otimes w)) &= m^{\mathcal{F}}(\Delta^{\mathcal{F}}(h) \triangleright (v \otimes w)). \end{aligned} \tag{1.51}$$

1.3 Álgebra Universal Envelopante e seu Drinfel'd Twist

Neste trabalho, a única álgebra de Hopf com que lidaremos será a *álgebra universal envelopante* de uma álgebra de Lie sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$, conforme veremos a seguir.

Recapitulemos, primeiramente, a definição de álgebra de Lie. Sejam $\mathfrak{g}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbf{k}$ e $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ uma operação binária bilinear ($[\alpha x + \beta y, z] = \alpha\,[x,z] + \beta\,[y,z]$ e $[z, \alpha x + \beta y] = \alpha\,[z,x] + \beta\,[z,y]$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{k}$, $x, y, z \in \mathfrak{g}$).

Se $[\cdot,\cdot]$ satisfizer a propriedade de antissimetria e a identidade de Jacobi,

$$[x,y] + [y,x] = 0 \tag{1.52}$$

$$[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0, \tag{1.53}$$

$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$, ou simplesmente $\mathfrak{g}$, é chamada uma *álgebra de Lie*.

As álgebras de Lie não são associativas, o que impossibilita a aplicação da técnica do Drinfel'd twist, como é nossa intenção. A fim de contornar este obstáculo, torna-se necessário encontrar uma álgebra associativa com unidade que contenha o espaço vetorial $\mathfrak{g}$. A construção natural a fazer é a álgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$, que terá, como veremos, as importantes propriedades de possuir $\mathfrak{g}$ como subespaço linear e exibir, naturalmente, uma estrutura de álgebra de Hopf.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbf{k}$. Considere a álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$

$$T(\mathfrak{g}) = \bigotimes{}^{\bullet}\mathfrak{g} = \mathbf{k} \oplus \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \oplus \dots \tag{1.54}$$

Seja agora I o ideal em $T(\mathfrak{g})$ gerado pelo conjunto de todos os elementos da forma $(x \otimes y - y \otimes x) - [x, y]$. A *álgebra universal envelopante* de $\mathfrak{g}$ é definida como o quociente

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I. \tag{1.55}$$

O teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que enunciaremos a seguir, fornecerá uma descrição explícita e mais tratável da álgebra universal envelopante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, bem como algumas importantes consequências. (Para maiores detalhes, ver o capítulo **5** de [33]).

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sua álgebra universal envelopante e $\{\tau_i\}$ uma *base totalmente ordenada* de $\mathfrak{g}$ com elementos satisfazendo as relações de comutação $[\tau_i, \tau_j] = iC_{ij}^k\tau_k$. A afirmação do teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt é que o conjunto dos monômios $\{\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_n}\}$ com $i_1 \leq \cdots \leq i_n$ é uma base para $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Tal resultado nos fornece uma descrição bem mais conveniente de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, qual seja, a de que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é a álgebra dos polinômios dos geradores τ_i módulo as relações de comutação $[\tau_i, \tau_j] = iC_{ij}^k \tau_k$, com C_{ij}^k as chamadas *constantes de estrutura* da álgebra de Lie. Adotaremos este ponto de vista nos capítulos seguintes.

Como corolário do teorema, temos que $\mathfrak{g}$ injeta-se naturalmente em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ por meio do homomorfismo canônico $\iota : \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, sendo, em particular, o subespaço linear de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

A álgebra universal envelopante de uma álgebra de Lie tem naturalmente um caráter de álgebra de Hopf, herdado de sua estrutura de álgebra tensorial, com coestruturas dadas por

$$\Delta(\tau_i) = \tau_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \tau_i \tag{1.56}$$

$$\epsilon(\tau_i) = 0, \tag{1.57}$$

e antípoda dado por

$$S(\tau_i) = -\tau_i. \tag{1.58}$$

Para provar que (1.56)–(1.58) fornecem uma estrutura de álgebra de Hopf, basta verificar as propriedades (1.9) e (1.11):

$$\begin{aligned}
\Delta(\tau_i \cdot \tau_j) &= (\tau_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \tau_i) \cdot (\tau_j \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \tau_j) \\
&= \tau_i \cdot \tau_j \otimes \mathbf{1} + \tau_i \otimes \tau_j + \tau_j \otimes \tau_i + \mathbf{1} \otimes \tau_i \cdot \tau_j \\
&= (\tau_i)_1 \cdot (\tau_j)_1 \otimes (\tau_i)_2 \cdot (\tau_j)_2, \qquad (1.59)
\end{aligned}$$

onde cabe salientar a dupla aplicação da notação de Sweedler e, portanto, a ocorrência de uma dupla soma,

$$\epsilon(\tau_i \cdot \tau_j) = \epsilon(\tau_i)\epsilon(\tau_j) = 0, \tag{1.60}$$

e, por fim, mostrar que S é um antípoda, o que pode ser feito aplicando a definição explícita dada em (1.17):

$$\begin{aligned}
\mu(S \otimes id)\Delta(\tau_i) &= \mu(S(\tau_i) \otimes \mathbf{1} + S(\mathbf{1}) \otimes \tau_i) = -\tau_i + \tau_i = \\
\mu(id \otimes S)\Delta(\tau_i) &= \mu(\tau_i \otimes S(\mathbf{1}) + \mathbf{1} \otimes S(\tau_i)) = \tau_i - \tau_i = \\
&= 0 = \eta(\epsilon(\tau_i)) = \epsilon(\tau_i)\mathbf{1}.
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Por meio da multiplicatividade e linearidade de Δ e ϵ e da antimultiplicatividade de S, tais definições podem ser estendidas a todos os monômios de τ_i e, portanto, a todos os elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Com (1.10), (1.12) e (1.19), completa-se a descrição de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ como álgebra de Hopf.

Para a álgebra universal envelopante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, a ação adjunta (1.27) é o comutador de Lie, como pode ser verificado diretamente:

$$\mathrm{ad}_{\tau_i}(\tau_j) = (\tau_i)_1 \cdot \tau_j \cdot S\left((\tau_i)_2\right) = \tau_i \cdot \tau_j \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot \tau_j \cdot (-\tau_i) = [\tau_i, \tau_j]. \tag{1.62}$$

Passemos agora à aplicação da prescrição apresentada na seção anterior à álgebra universal envelopante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Para tanto, tomemos um elemento

$$\mathcal{F} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \tag{1.63}$$

que seja um twist, i.e., satisfaça às condições (1.38) e (1.39). Por meio das expressões (1.40) e (1.41), calculamos o coproduto e antípoda deformados dos elementos primitivos $\tau_i \in \mathfrak{g}$

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{F}}(\tau_i) &= \mathcal{F}\Delta(\tau_i)\mathcal{F}^{-1} && (1.64)\\
S^{\mathcal{F}}(\tau_i) &= \chi S(\tau_i)\chi^{-1}, && (1.65)
\end{aligned}
$$

com as estruturas algébricas e counidade permanecendo inalteradas. Chamamos a álgebra de Hopf deformada assim obtida de $\mathcal{U}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$.

É evidente que $\mathfrak{g}$ não é o subespaço linear de $\mathcal{U}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$. É natural, portanto, investigar qual seria o subespaço linear que gera $\mathcal{U}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$. Chamaremos este espaço $\mathfrak{g}^{\mathcal{F}}$ e seus elementos $\tau_i^{\mathcal{F}}$ de *geradores deformados*.

As condições para $\mathfrak{g}^{\mathcal{F}}$, apontadas em [34], são três, a saber: (i) a de que $\{\tau_i^{\mathcal{F}}\}$ seja uma base de $\mathfrak{g}^{\mathcal{F}}$, (ii) a deformação mínima da regra de Leibniz

$$
\Delta^{\mathcal{F}}(\tau_i^{\mathcal{F}}) = \tau_i^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + f_i^j \otimes \tau_j^{\mathcal{F}}, \qquad (1.66)
$$

$f_i^j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, e (iii) a de que, sob a ação adjunta deformada, denotada por $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{F}}$, as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}$ sejam reproduzidas

$$
[\tau_i^{\mathcal{F}}, \tau_j^{\mathcal{F}}]_{\mathcal{F}} = iC_{ij}^k \tau_k^{\mathcal{F}}. \qquad (1.67)
$$

Para obtermos $\mathfrak{g}^{\mathcal{F}}$, há um procedimento canônico (ver [35], [36]). Tomam-se como geradores deformados

$$
\tau_i^{\mathcal{F}} = \bar{f}^{\alpha}(\tau_i)\bar{f}^{\alpha} \qquad (1.68)
$$

com coproduto deformado dado por

$$\Delta^{\mathcal{F}}(\tau_i^{\mathcal{F}}) = \tau_i^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \bar{\mathcal{R}}^{\alpha} \otimes \bar{\mathcal{R}}_{\alpha}(\tau_i^{\mathcal{F}}). \tag{1.69}$$

Em consonância com (1.27), a ação adjunta deformada é dada por

$$[\tau_i^{\mathcal{F}}, \tau_j^{\mathcal{F}}]_{\mathcal{F}} = (\tau_i^{\mathcal{F}})_1 \cdot \tau_j^{\mathcal{F}} \cdot S^{\mathcal{F}}\left((\tau_i^{\mathcal{F}})_2\right). \tag{1.70}$$

Assim construído, $\mathfrak{g}^{\mathcal{F}}$ satisfaz às três condições requeridas.

Por fim, como pretendemos estudar também sistemas fermiônicos, faremos uso das chamadas *superálgebras de Lie* (ou álgebras de Lie $\mathbb{Z}_2$-graduadas), e suas superálgebras de Hopf deformadas.

Uma *superálgebra de Lie* sobre um corpo $\mathbf{k}$ (de característica zero) é um espaço vetorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ dotado de uma operação binária bilinear $[\cdot, \cdot\} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfazendo às propriedades de $\mathbb{Z}_2$-graduação

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j\} \subset \mathfrak{g}_{(i+j \bmod 2)}, \tag{1.71}$$

antissimetria $\mathbb{Z}_2$-graduada

$$[x, y\} = (-1)^{|x||y|}[y, x\}, \tag{1.72}$$

e identidade de Jacobi generalizada

$$(-1)^{|x||z|}[[x, y, z\} + (-1)^{|y||x|}[[y, z\}, x\} + (-1)^{|z||y|}[[z, x\}, y\} = 0, \tag{1.73}$$

$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$, e onde $|x| = i$ se $x \in \mathfrak{g}_i$ (*grau* de x). Chamamos $\mathfrak{g}_0$ a parte *par* ou *bosônica* de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}_1$ a parte *ímpar* ou *fermiônica* de $\mathfrak{g}$. A superálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ também pode ser estendida a sua *superálgebra universal envelopante* dotada de estrutura de superálgebra de Hopf.

As fórmulas (1.18), (1.42), (1.68) e (1.70) são naturalmente estendidas ao caso das superálgebras como

$$
\begin{aligned}
S(\tau_i \cdot \tau_j) &= (-1)^{|\tau_i||\tau_j|} S(\tau_j) \cdot S(\tau_i) && (1.74)\\
\mathcal{R} &= \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{|\bar{f}^{\beta}||f^{\alpha}|} (f_{\alpha} \bar{f}^{\beta} \otimes f^{\alpha} \bar{f}_{\beta}) && (1.75)\\
\tau_i^{\mathcal{F}} &= \sum_{\alpha} (-1)^{|\bar{f}_{\alpha}||\tau_i|} \bar{f}^{\alpha}(\tau_i) \bar{f}_{\alpha} && (1.76)\\
\left[\tau_i^{\mathcal{F}}, \tau_j^{\mathcal{F}}\right\}_{\mathcal{F}} &= \sum_{k} (-1)^{|\tau_j^{\mathcal{F}}||(\tau_i^{\mathcal{F}})_2^k|} (\tau_i^{\mathcal{F}})_1^k \cdot \tau_j^{\mathcal{F}} \cdot S^{\mathcal{F}}\left((\tau_i^{\mathcal{F}})_2^k\right). && (1.77)
\end{aligned}
$$

Capítulo 2

Álgebras de Heisenberg Bosônicas: Primeira e Segunda Quantizações

Neste capítulo mostraremos como é possível (ao contrário do que se admitia em [37] e [38]) construir a álgebra universal envelopante da álgebra de Heisenberg e deformá-la por meio da técnica do Drinfel'd twist, obtendo, como resultado, uma teoria não comutativa. Mostraremos, também, como esta estrutura pode ser recuperada no contexto da segunda quantização, utilizando-se o formalismo dos osciladores de Wigner.

2.1 Álgebra de Heisenberg Deformada

Nesta seção, aplicaremos o formalismo delineado no capítulo anterior à álgebra de Heisenberg bosônica, que denotaremos $\mathfrak{h}(\mathcal{N})$.

Para tanto, considere a álgebra $\mathfrak{h}(\mathcal{N})$:

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \tag{2.1}$$

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}\hbar \tag{2.2}$$

$$[\hbar, x_i] = [\hbar, p_j] = 0, \tag{2.3}$$

$i, j = 1, ..., \mathcal{N}$.

Aplicaremos o twist

$$\mathcal{F} = \exp\left(\frac{i}{2}\alpha_{ij} p_i \otimes p_j\right), \tag{2.4}$$

onde α_{ij} é uma matriz antissimétrica. A condição de 2-cociclo (1.38) é trivialmente satisfeita, visto que $\mathcal{F}$ é um twist dito *abeliano*, pois envolve apenas geradores que comutam entre si.

Cabe aqui salientar a necessidade de identificar corretamente o papel da extensão central $\hbar$ como elemento da álgebra $\mathfrak{h}(\mathcal{N})$, e não como múltiplo da identidade, devendo, portanto, ser tratado de maneira idêntica aos demais geradores de $\mathfrak{h}(\mathcal{N})$, isto é, com coproduto e antípoda dados por

$$\Delta(\hbar) = \hbar \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \hbar \tag{2.5}$$

$$S(\hbar) = -\hbar. \tag{2.6}$$

Agora, procedemos à deformação de $\mathfrak{h}(\mathcal{N})$.

Com o auxílio da fórmula de Hadamard, calculamos o coproduto deformado de x_k:

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathcal{F}}(x_k) &= \exp\left(\frac{i}{2}\alpha_{ij}p_i\otimes p_j\right)\Delta(x_k)\exp\left(-\frac{i}{2}\alpha_{ij}p_i\otimes p_j\right)= \\ &= x_k\otimes\mathbf{1}+\mathbf{1}\otimes x_k+\frac{\alpha_{kj}}{2}\left(\hbar\otimes p_j-p_j\otimes\hbar\right). \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Como p_i and $\hbar$ comutam com os p_js do twist, seus coprodutos não se deformam:

$$\Delta^{\mathcal{F}}(p_k) = \Delta(p_k) \qquad (2.8)$$

$$\Delta^{\mathcal{F}}(\hbar) = \Delta(\hbar). \qquad (2.9)$$

O antípoda não é deformado. Para ver isto, basta calcular o elemento

$$\chi\equiv f^{\alpha}S(f_{\alpha})=\exp\left(-\frac{i}{2}\alpha_{ij}p_ip_j\right)=\mathbf{1}, \qquad (2.10)$$

de modo que $S^{\mathcal{F}}=\chi S\chi^{-1}=S$.

A deformação de x_k é dada por (1.68):

$$x_k^{\mathcal{F}}=\bar{f}^{\alpha}(x_k)\bar{f}_{\alpha}=x_k-\frac{\alpha_{kj}}{2}\hbar p_j, \qquad (2.11)$$

enquanto p_i and $\hbar$, pela razão aduzida acima, não sofrem deformação.

Calculamos, agora, os coprodutos deformados dos geradores deformados. Neste caso, a matriz-R universal é simplesmente $\mathcal{R}=\mathcal{F}^{-2}$ (pois $\mathcal{F}_{21}=\mathcal{F}^{-1}$, pela antissimetria de α_{ij} e abelianidade do twist). Assim, o coproduto deformado de $x_k^{\mathcal{F}}$ é obtido usando-se (1.69):

$$\Delta^{\mathcal{F}}(x_k^{\mathcal{F}}) = x_k^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x_k^{\mathcal{F}} + \alpha_{ik} p_i \otimes \hbar, \tag{2.12}$$

onde ressaltamos a contribuição de $\hbar$.

O antípoda de $x_k^{\mathcal{F}}$ é facilmente obtido usando-se a propriedade antimultiplicativa de S:

$$S(x_k^{\mathcal{F}}) = -x_k - \frac{1}{2}\alpha_{kj}\hbar p_j = -x_k^{\mathcal{F}} - \alpha_{kj}\hbar p_j. \tag{2.13}$$

Estamos, agora, de posse de todas as expressões necessárias ao cálculo dos colchetes deformados dos geradores deformados, conforme (1.70):

$$\left[x_i^{\mathcal{F}}, p_j^{\mathcal{F}}\right]_{\mathcal{F}} = i\delta_{ij}\hbar \tag{2.14}$$

$$\left[x_i^{\mathcal{F}}, x_j^{\mathcal{F}}\right]_{\mathcal{F}} = 0 \tag{2.15}$$

$$\left[p_i^{\mathcal{F}}, p_j^{\mathcal{F}}\right]_{\mathcal{F}} = 0 \tag{2.16}$$

$$\left[\hbar^{\mathcal{F}}, x_i^{\mathcal{F}}\right]_{\mathcal{F}} = \left[\hbar^{\mathcal{F}}, p_i^{\mathcal{F}}\right]_{\mathcal{F}} = 0. \tag{2.17}$$

Note-se que os colchetes deformados das quantidades deformadas possuem as mesmas constantes de estrutura que os colchetes ordinários das quantidades não deformadas. O mesmo se observa em [39] para a álgebra universal envelopante da álgebra de Poincaré, $\mathcal{U}(iso(1,3))$.

Calculamos agora os colchetes ordinários das quantidades deformadas.

São eles

$$\left[x_i^{\mathcal{F}}, p_j^{\mathcal{F}}\right] = i\delta_{ij}\hbar \tag{2.18}$$

$$\left[x_i^{\mathcal{F}}, x_j^{\mathcal{F}}\right] = i\alpha_{ij}\hbar^2 \tag{2.19}$$

$$\left[p_i^{\mathcal{F}}, p_j^{\mathcal{F}}\right] = 0 \tag{2.20}$$

$$\left[\hbar^{\mathcal{F}}, x_i^{\mathcal{F}}\right] = \left[\hbar^{\mathcal{F}}, p_i^{\mathcal{F}}\right] = 0. \tag{2.21}$$

Note-se, agora, que os $x_i^{\mathcal{F}}$s têm natureza não comutativa, ao contrário dos x_is originais (2.1). A comutatividade pode ser restaurada pela transformação inversa de (2.11), i.e., $x_i = x_i^{\mathcal{F}} + \frac{\alpha_{ij}}{2}\hbar p_j$, que é conhecida como *desvio de Bopp* na literatura [40]. No entanto, a deformação nas coestruturas não pode ser removida por nenhuma tranformação, sendo, portanto, ao nosso ver, mais fundamental. Também é interessante lembrar que $\mathfrak{h}(\mathcal{N})$ é o subespaço linear de $\mathcal{U}(\mathfrak{h}(\mathcal{N}))$ e notar que, analogamente, os $x_i^{\mathcal{F}}$s (junto com $p_i^{\mathcal{F}} = p_i$ e $\hbar^{\mathcal{F}} = \hbar$) formam o subespaço linear de $\mathcal{U}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{h}(\mathcal{N}))$, que chamaremos $\mathfrak{h}^{\mathcal{F}}(\mathcal{N})$.

Finalmente, queremos estudar a deformação da multiplicação no $\mathcal{U}(\mathfrak{h}(\mathcal{N}))$-módulo M que consiste no espaço de funções em $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ dotado da multiplicação ponto a ponto usual

$$\begin{aligned} m(g \otimes h) &= g \cdot h, \\ (g \cdot h)(\breve{x}) &= g(\breve{x})h(\breve{x}), \end{aligned} \tag{2.22}$$

$\breve{x} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$.

A ação da álgebra $\mathfrak{h}(\mathcal{N})$ sobre o módulo é a ação adjunta, i.e., é tal que

p_i age por derivação e x_i por multiplicação,

$$p_i \triangleright g(\check{x}) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \check{x}_i} g(\check{x}) \tag{2.23}$$

$$x_i \triangleright g(\check{x}) = \check{x}_i \cdot g(\check{x}). \tag{2.24}$$

A multiplicação deformada no módulo (ver [41]) é dada por

$$\begin{aligned} g(\check{x}) \star h(\check{x}) &\equiv m^{\mathcal{F}}(g(\check{x}) \otimes h(\check{x})) = (m \circ \mathcal{F}^{-1})(g(\check{x}) \otimes h(\check{x})) = \\ &= \left(\bar{f}^{\alpha} \triangleright g(\check{x})\right) \cdot \left(\bar{f}_{\alpha} \triangleright h(\check{x})\right) = \\ &= e^{\frac{i}{2}\theta_{ij}\frac{\partial}{\partial \check{x}_i}\frac{\partial}{\partial \check{y}_j}} \left(g(\check{x}) \cdot h(\check{y})\right) |_{\check{x}=\check{y}}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde introduzimos, por conveniência, $\theta_{ij} = \alpha_{ij}\hbar^2$.

O produto estrela, para este caso particular, é comumente conhecido como produto de Weyl-Groenewold [42] ou produto de Moyal [43].

Definindo-se o colchete de Moyal como $[g, h]_\star \equiv (g \star h - h \star g)$, vemos implementada a não comutatividade entre as variáveis de posição:

$$[\check{x}_i, \check{x}_j]_\star = i\theta_{ij}. \tag{2.26}$$

Aqui foi necessário introduzir a notação $\check{x}_i$ para as quantidades no módulo correspondentes aos operadores x_i. A correspondência entre funções de operadores da álgebra de Heisenberg e funções no espaço comutativo se dá por meio da transformação de Wigner, introduzida em [44]. Inversamente, para obtermos funções de operadores a partir de funções de variáveis do espaço de fase, devemos usar a bem conhecida transformação introduzida por Weyl em [45].

2.2 Segunda Quantização e Osciladores de Wigner

Tendo estudado a deformação da álgebra de Heisenberg bosônica, pretendemos agora mostrar como esta estrutura pode ser obtida num contexto de segunda quantização, sobre a qual cabe fazer uma brevíssima digressão agora. Nesta seção, $\hbar$ é um número.

Considere a Lagrangiana

$$L = \int d^D x \left(\frac{i\hbar}{2} \psi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial_o} \psi - \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\psi|^2 \right). \tag{2.27}$$

É imediato mostrar que ela fornece, como equação de movimento, a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi. \tag{2.28}$$

Passando para o formalismo Hamiltoniano, a própria definição do momento canonicamente conjugado dá origem aos vínculos

$$\pi_\psi - \frac{i\hbar}{2} \psi^* \approx 0 \tag{2.29}$$
$$\pi_\psi^* - \frac{i\hbar}{2} \psi \approx 0, \tag{2.30}$$

onde π_ψ, π_ψ^* representam os momenta canonicamente conjugados a ψ, ψ^*.

Aplicando-se o formalismo de colchetes de Dirac (ver [46]), pode-se impor a igualdade forte sobre os vínculos, obtendo-se os colchetes

$$\{\psi(\vec{x},t),\psi^*(\vec{y},t)\}_{DB} = \frac{1}{i\hbar}\delta^D(\vec{x}-\vec{y}). \tag{2.31}$$

Agora, o procedimento usual de quantização canônica pode ser aplicado e fornece as relações de comutação

$$\left[\psi(\vec{x}),\psi^\dagger(\vec{y})\right] = \delta^D(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.32}$$

$$\left[\psi(\vec{x}),\psi(\vec{y})\right] = \left[\psi^\dagger(\vec{x}),\psi^\dagger(\vec{y})\right] = 0. \tag{2.33}$$

Definimos os objetos

$$X_i = \int d^Dy\; y_i\psi^\dagger(\vec{y})\psi(\vec{y}) \tag{2.34}$$

$$P_i = -\frac{i\hbar}{2}\int d^Dy\,\psi^\dagger(\vec{y})\overset{\leftrightarrow}{\partial_i}\psi(\vec{y}) \tag{2.35}$$

que satisfazem às relações de comutação

$$[X_i,P_j] = i\hbar\delta_{ij}N \tag{2.36}$$

$$[X_i,X_j] = 0 \tag{2.37}$$

$$[P_i,P_j] = 0, \tag{2.38}$$

$$[N,X_i] = [N,P_i] = 0 \tag{2.39}$$

onde $N = \int d^Dy\;\; \psi^\dagger(\vec{y})\psi(\vec{y})$ é o chamado operador número de partículas. As expressões (2.34)-(2.35) relacionam o formalismo da segunda quantização com o da primeira quantização, como veremos.

As expressões (2.36)-(2.38) reproduzem a álgebra de Heisenberg, com $\hbar N$ fazendo o papel de extensão central no caso de N partículas. Para mostrar que tal identificação, de fato, faz sentido, devemos ver que X_i é um operador posição e P_i um operador momento. Definindo-se $|\vec{y}\rangle = \psi^\dagger(\vec{y})|0\rangle$ e aplicando-se (2.32)-(2.33), obtemos, como desejado,

$$X_i|\vec{y}\rangle = y_i|\vec{y}\rangle. \tag{2.40}$$

Um cálculo direto permite mostrar que

$$\begin{aligned} [P_i, \psi(\vec{x})] &= i\hbar\partial_i\psi(\vec{x}) && (2.41) \\ \left[P_i, \psi^\dagger(\vec{x})\right] &= i\hbar\partial_i\psi^\dagger(\vec{x}), && (2.42) \end{aligned}$$

de modo que P_i é o gerador das translações. Com isto, temos uma descrição da álgebra de Heisenberg no formalismo de segunda quantização.

Os campos podem ser agora expandidos em seus modos de Fourier

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^D}\int d^Dp\; e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}a_{\vec{p}} && (2.43) \\ \psi^\dagger(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^D}\int d^Dp\; e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}a^\dagger_{\vec{p}}, && (2.44) \end{aligned}$$

e, inversamente,

$$\begin{aligned} a_{\vec{p}} &= \int d^Dx\; e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\psi(\vec{x}) && (2.45) \\ a^\dagger_{\vec{p}} &= \int d^Dx\; e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\psi^\dagger(\vec{x}). && (2.46) \end{aligned}$$

A álgebra satisfeita por $a_{\vec{p}}$, $a^\dagger_{\vec{p}}$ é

$$\begin{aligned} \left[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] &= (2\pi\hbar)^D \delta^D(\vec{p} - \vec{p}') && (2.47) \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] &= \left[a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}'}\right] = 0. && (2.48) \end{aligned}$$

É interessante notar que a álgebra dos campos (2.32)-(2.33) e dos osciladores correspondentes (2.47)-(2.48) é a própria álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}(\mathcal{N})$ no limite $\mathcal{N} \to \infty$, com $\psi^\dagger(\vec{x})$ e $a^\dagger_{\vec{p}}$ como momenta conjugados a $\psi(\vec{x})$ e $a_{\vec{p}}$, respectivamente, e $\delta^D(\vec{x} - \vec{y})$ e $(2\pi\hbar)^D \delta^D(\vec{p} - \vec{p}')$ num papel análogo a $i\hbar\delta_{ij}$.

Agora tentaremos construir a estrutura de álgebra de Hopf das álgebras dos campos $\psi(\vec{x})$, $\psi^\dagger(\vec{x})$ e osciladores $a_{\vec{p}}$, $a^\dagger_{\vec{p}}$, para depois deformá-la por meio do mesmo twist $\mathcal{F}$ (2.4).

Para tanto, iniciamos por expressar $\vec{P}$ no espaço dos momenta

$$P_i = \frac{1}{(2\pi\hbar)^D} \int d^D p \; p_i a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}, \qquad (2.49)$$

e obtemos a álgebra dos osciladores com P_i

$$\begin{aligned} [P_i, a_{\vec{p}}] &= -p_i a_{\vec{p}} && (2.50) \\ \left[P_i, a^\dagger_{\vec{p}}\right] &= p_i a^\dagger_{\vec{p}}. && (2.51) \end{aligned}$$

Aplicamos agora o twist

$$\mathcal{F} = \exp\left(\frac{i}{2}\alpha_{ij} P_i \otimes P_j\right), \qquad (2.52)$$

e obtemos a deformação de $a_{\vec{p}}$ e $a^\dagger_{\vec{p}}$

$$\begin{aligned} a^{\mathcal{F}}_{\vec{p}} &= \bar{f}^\alpha(a_{\vec{p}})\bar{f}_\alpha = a_{\vec{p}}\, e^{\frac{i}{2}\alpha_{ij}p_i P_j} && (2.53)\\ a^{\dagger\mathcal{F}}_{\vec{p}} &= \bar{f}^\alpha(a^\dagger_{\vec{p}})\bar{f}_\alpha = a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-\frac{i}{2}\alpha_{ij}p_i P_j}, && (2.54)\end{aligned}$$

que é a mesma encontrada em [47], bem como a deformação dos campos $\psi(\vec{x})$ e $\psi^\dagger(\vec{x})$

$$\begin{aligned} \psi^{\mathcal{F}}(\vec{x}) &= \psi(\vec{x})\, e^{\frac{\hbar}{2}\alpha_{ij}\overleftarrow{\partial}_i P_j} && (2.55)\\ \psi^{\dagger\mathcal{F}}(\vec{x}) &= \psi^\dagger(\vec{x})\, e^{\frac{\hbar}{2}\alpha_{ij}\overleftarrow{\partial}_i P_j}. && (2.56)\end{aligned}$$

A deformação de $\psi(\vec{x})$ e $\psi^\dagger(\vec{x})$ é compatível com a de $a_{\vec{p}}$ e $a^\dagger_{\vec{p}}$ pois elas se relacionam pela transformada de Fourier usual

$$\begin{aligned} a^{\mathcal{F}}_{\vec{p}} &= \int d^D x\, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\psi^{\mathcal{F}}(\vec{x}) && (2.57)\\ a^{\dagger\mathcal{F}}_{\vec{p}} &= \int d^D x\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\psi^{\dagger\mathcal{F}}(\vec{x}). && (2.58)\end{aligned}$$

Conforme vimos, a estrutura algébrica de Heisenberg é corretamente reproduzida pelas álgebras de $\psi(\vec{x})$, $\psi^\dagger(\vec{x})$ e $a_{\vec{p}}$, $a^\dagger_{\vec{p}}$ (no sentido de (2.36)-(2.38) com $\hbar N \to \hat{\hbar}$, sendo $\hat{\hbar}$ a extensão central da seção anterior). Tentaremos agora reproduzir a estrutura coalgébrica, e veremos que, numa abordagem ingênua, o processo falha já no caso não deformado.

A construção natural a fazer seria tomar a expressão (2.34) e aplicar a propriedade de multiplicatividade do coproduto:

$$
\begin{aligned}
\Delta(X_i) &= \int d^D y\, y_i \Delta(\psi^\dagger(\vec{y}))\Delta(\psi(\vec{y})) = \\
&= \int d^D y\, y_i (\psi^\dagger(\vec{y}) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \psi^\dagger(\vec{y}))(\psi(\vec{y}) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \psi(\vec{y})) = \\
&= X_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X_i + \int d^D y\, y_i (\psi^\dagger(\vec{y}) \otimes \psi(\vec{y}) + \psi(\vec{y}) \otimes \psi^\dagger(\vec{y})).
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

A presença do termo cruzado é inteiramente indesejável, pois o coproduto esperado seria $\Delta(X_i) = X_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes X_i$. Mostraremos agora como resolver este problema.

A solução repousa na noção de *osciladores de Wigner*. Em [48], Wigner demonstrou que as equações de movimento de Heisenberg para os operadores momento e posição podem ser satisfeitas sem que, necessariamente, as relações canônicas de comutação sejam realizadas.

A construção de Wigner requer, no caso mais simples (de um único oscilador bosônico), que a Hamiltoniana seja expressa como o anticomutador dos osciladores $a = a^-$ e $a^\dagger = a^+$,

$$
H = \frac{1}{2}\{a^-, a^+\},
\tag{2.60}
$$

e, para compatibilizar as equações de movimento de Heisenberg com as equações de Hamilton, também

$$
[H, a^\pm] = \pm a^\pm.
\tag{2.61}
$$

Introduzindo, adicionalmente,

$$E^{\pm} = \{a^{\pm}, a^{\pm}\}, \tag{2.62}$$

o que se obtém é a superálgebra ortossimplética $osp(1|2)$ (ver [49]).

Note-se que, nesta construção, os operadores de criação e aniquilação são de natureza ímpar, em oposição à sua natureza física bosônica,[1] e é precisamente esta ideia que usaremos para resolver o problema de (2.59).

Para resolver o problema da incompatibilidade da deformação da álgebra dos campos da segunda quantização com a deformação da álgebra de Heisenberg, iniciamos por re-escrever os operadores de posição, momento e número com o ordenamento de Weyl [45]:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_i &= \frac{1}{2}\int d^D y \; y_i \left(\psi^\dagger(\vec{y})\psi(\vec{y}) + \psi(\vec{y})\psi^\dagger(\vec{y})\right) &(2.63)\\
\tilde{P}_i &= \frac{1}{2}\int d^D p \; p_i \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}}\right) &(2.64)\\
\tilde{N} &= \frac{1}{2}\int d^D y \;\left(\psi^\dagger(\vec{y})\psi(\vec{y}) + \psi(\vec{y})\psi^\dagger(\vec{y})\right). &(2.65)
\end{aligned}$$

Eles satisfazem à mesma álgebra que os operadores X_i, P_i e N introduzidos anteriormente. Aproveitamos para re-escrever o operador P_i no espaço dos momenta, visto que ali ele toma uma forma diagonal que facilitará os cálculos subsequentes.

Conforme foi antecipado, declaramos agora que $\psi(\vec{y})$ e $a_{\vec{p}}$ são ímpares, e

[1] O mesmo acontece no formalismo da supersimetria BRST.

o coproduto de $\tilde{X}_i$ é corretamente induzido como

$$\begin{aligned}
\Delta(\tilde{X}_i) &= \frac{1}{2}\int d^D y\; y_i(\Delta(\psi^\dagger(\vec{y}))\Delta(\psi(\vec{y})) + \Delta(\psi(\vec{y}))\Delta(\psi^\dagger(\vec{y}))) = \\
&= \frac{1}{2}\int d^D y\; y_i[\psi^\dagger(\vec{y})\psi(\vec{y}) \otimes \mathbf{1} - \psi(\vec{y}) \otimes \psi^\dagger(\vec{y}) + \psi^\dagger(\vec{y}) \otimes \psi(\vec{y}) + \mathbf{1} \otimes \psi^\dagger(\vec{y})\psi(\vec{y}) + \\
&\quad +\psi(\vec{y})\psi^\dagger(\vec{y}) \otimes \mathbf{1} - \psi^\dagger(\vec{y}) \otimes \psi(\vec{y}) + \psi(\vec{y}) \otimes \psi^\dagger(\vec{y}) + \mathbf{1} \otimes \psi(\vec{y})\psi^\dagger(\vec{y})] = \\
&= \tilde{X}_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \tilde{X}_i, \qquad (2.66)
\end{aligned}$$

o mesmo valendo, por cálculo exatamente análogo, para os coprodutos de $\tilde{P}_i$ e $\tilde{N}$.

O antípoda de X_i também é, como esperado,

$$\begin{aligned}
S(\tilde{X}_i) &= \frac{1}{2}\int d^D y\; y_i(S(\psi(\vec{y})\psi^\dagger(\vec{y}))S(\psi^\dagger(\vec{y})\psi(\vec{y})) = \\
&= \frac{1}{2}\int d^D y\; y_i[(-1)^{|\psi(\vec{y})||\psi^\dagger(\vec{y})|}S(\psi^\dagger(\vec{y}))S(\psi(\vec{y})) + (-1)^{|\psi^\dagger(\vec{y})||\psi(\vec{y})|}S(\psi(\vec{y}))S(\psi^\dagger(\vec{y}))] = \\
&= \frac{1}{2}\int d^D y\; y_i\left(-\psi^\dagger(\vec{y})\psi(\vec{y}) - \psi(\vec{y})\psi^\dagger(\vec{y})\right) = \\
&= -\tilde{X}_i, \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

bem como

$$S(\tilde{P}_i) = -\tilde{P}_i \qquad (2.68)$$

$$S(\tilde{N}) = -\tilde{N}. \qquad (2.69)$$

A counidade não é problema, visto que $\epsilon(\psi(\vec{y})) = \epsilon(a_{\vec{p}}) = 0$ leva diretamente a $\epsilon(\tilde{X}_i) = \epsilon(\tilde{P}_i) = \epsilon(\tilde{N}) = 0$.

O caso não deformado encontra-se, portanto, resolvido. Resta mostrar, agora, que as deformações (2.53)-(2.54) e (2.55)-(2.56) induzem corretamente as deformações dos objetos bilineares integrados.

A deformação de $\tilde{X}_i$ pode ser mais facilmente calculada no espaço dos momenta:

$$\tilde{X}_i^{\mathcal{F}} = \frac{i\hbar}{4}\int d^D p \, \left(a_{\vec{p}}^{\dagger\mathcal{F}} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{p_i} a_{\vec{p}}^{\mathcal{F}} + a_{\vec{p}}^{\mathcal{F}} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{p_i} a_{\vec{p}}^{\dagger\mathcal{F}} \right) = \tilde{X}_i - \frac{1}{2}\alpha_{ij} p_j \hbar \tilde{N}, \qquad (2.70)$$

e vê-se que ela se reduz à deformação (2.11) no limite de uma partícula ($\hbar\tilde{N} \to \hat{\hbar}$).

A (ausência de) deformação de $\tilde{P}_i$ também pode ser facilmente calculada

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i^{\mathcal{F}} &= \frac{1}{2}\int d^D p \; p_i \left(a_{\vec{p}}^{\dagger\mathcal{F}} a_{\vec{p}}^{\mathcal{F}} + a_{\vec{p}}^{\mathcal{F}} a_{\vec{p}}^{\dagger\mathcal{F}} \right) = \\ &= \frac{1}{2}\int d^D p \; p_i \left(a_{\vec{p}}^{\dagger} e^{\frac{i}{2}\alpha_{ij}p_i P_j} e^{\frac{-i}{2}\alpha_{ij}p_i P_j} a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} e^{\frac{-i}{2}\alpha_{ij}p_i P_j} e^{\frac{i}{2}\alpha_{ij}p_i P_j} a_{\vec{p}}^{\dagger} \right) = \\ &= \tilde{P}_i. \end{aligned} \qquad (2.71)$$

Deste modo, conclui-se que, além de poder-se construir a álgebra universal envelopante da álgebra dos campos e osciladores de Schrödinger e deformá-la por meio do Drinfel'd twist, também se pode induzir corretamente a estrutura de álgebra de Hopf dos operadores posição e momento, tanto no caso usual quando no caso deformado, desde que se encarem os campos e osciladores fundamentais como geradores ímpares de uma superálgebra de Lie.

2.3 Álgebras de Heisenberg Estendidas

Apresentamos, nesta seção, um exemplo muito simples de um procedimento que pode ter aplicações bastante interessantes. Tal procedimento consiste em construir elementos compostos a partir dos elementos primitivos da álgebra de Heisenberg e depois, por razões físicas (e.g., a necessidade de induzir-se uma regra de composição correta para o estado de muitas partículas), declarar que são elementos primitivos de uma álgebra estendida. A natureza composta original é utilizada, tão somente, para calcular as constantes de estrutura da nova álgebra. Estas ideias encontram-se bem discutidas em [51].

Iniciamos com a álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}(\mathcal{N})$ descrita acima e introduzimos os elementos

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{p_i p_j}{\hbar}, \\ M_{ij} &= \frac{x_i p_j}{\hbar}, \\ N_{ij} &= \frac{p_i x_j}{\hbar}, \\ V_{ij} &= \frac{x_i x_j}{\hbar}, \end{aligned} \tag{2.72}$$

que agora declaramos serem elementos primitivos de uma álgebra estendida.

A álgebra assim estendida satisfaz a

$$\begin{aligned}
[K_{ij},x_k] &= -i\delta_{ik}p_j - i\delta_{jk}p_i, \\
[M_{ij},x_k] &= -i\delta_{jk}x_i, \\
[N_{ij},x_k] &= -i\delta_{ik}x_j, \\
[M_{ij},p_k] &= i\delta_{ik}p_j, \\
[N_{ij},p_k] &= i\delta_{jk}p_i, \\
[V_{ij},p_k] &= i\delta_{ik}x_j + i\delta_{jk}x_i, \\
[V_{ij},K_{kl}] &= i\delta_{jk}M_{il} + i\delta_{jl}M_{ik} + i\delta_{ik}N_{lj} + i\delta_{il}N_{kj}, \\
[V_{ij},M_{kl}] &= i\delta_{il}V_{jk} + i\delta_{jl}V_{ik}, \\
[V_{ij},N_{kl}] &= i\delta_{ik}V_{jl} + i\delta_{jk}V_{il}, \\
[K_{ij},M_{kl}] &= -i\delta_{ik}K_{jl} - i\delta_{jk}K_{il}, \\
[K_{ij},N_{kl}] &= -i\delta_{il}K_{jk} - i\delta_{jl}K_{ik}, \\
[M_{ij},N_{kl}] &= i\delta_{ik}M_{lj} - i\delta_{jl}M_{ik}. \qquad (2.73)
\end{aligned}$$

Trata-se, na verdade, da álgebra dada pela soma semidireta $\mathfrak{h}(\mathcal{N}) \oplus_s sp(2\mathcal{N})$ [52].

Agora podemos considerar a Hamiltoniana do oscilador harmônico dada por

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2} + \omega^2 \sum_i \frac{x_i^2}{2} = \lambda \left(K_{ii} + \omega^2 V_{ii}\right), \qquad (2.74)$$

onde λ é uma constante de normalização apropriada.

Aplicamos agora o twist usual

$$\mathcal{F} = \exp(i\alpha_{ij} p_i \otimes p_j), \tag{2.75}$$

com $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$.

A Hamiltoniana deformada é

$$H^{\mathcal{F}} = H - 2\lambda\omega^2\hbar\alpha_{ij}M_{ij} + \lambda\omega^2\hbar^2\alpha_{ij}\alpha_{ik}K_{jk}. \tag{2.76}$$

O coproduto deformado da Hamiltoniana é

$$\Delta^{\mathcal{F}}(H) = \Delta(H) - 2\lambda\omega^2\alpha_{ij}(p_i \otimes x_j - x_j \otimes p_i) + \lambda\omega^2\alpha_{ij}\alpha_{kj}(\hbar K_{ik} \otimes \hbar - \hbar \otimes \hbar K_{ik}), \tag{2.77}$$

sendo, por outro lado, o coproduto deformado da Hamiltoniana deformada

$$\Delta^{\mathcal{F}}(H^{\mathcal{F}}) = H^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H^{\mathcal{F}} - 4\lambda\omega^2\alpha_{ij}(p_i \otimes x_j) + 2\lambda\omega^2\alpha_{ij}\alpha_{kj}(\hbar K_{ik} \otimes \hbar). \tag{2.78}$$

Este tipo de extensão da álgebra de Heisenberg e a classe de Hamiltonianas que ele fornece tem sido discutido, por exemplo, no contexto de mecânica conforme e supersimetria bosonizada [53].

Capítulo 3

Álgebras de Heisenberg Fermiônicas e Mecânica Quântica Supersimétrica Deformada

Teorias quânticas em espaços não anticomutativos vêm sendo estudadas na abordagem do Drinfel'd twist ([54], [55]). Neste capítulo estudaremos as deformações da mecânica quântica supersimétrica unidimensional $\mathcal{N}$-estendida por meio do twist das álgebras de Heisenberg fermiônicas. Mostraremos que duas construções são possíveis, quais sejam, a identificação da álgebra de supersimetria com a álgebra de Heisenberg fermiônica (possível para $\mathcal{N}$ par), e a realização da álgebra de supersimetria em termos de operadores pertencentes à álgebra universal envelopante gerada por um oscilador bosônico e $\mathcal{N}$ osciladores fermiônicos (possível para qualquer $\mathcal{N}$). Recuperaremos, num contexto mais geral, alguns resultados da literatura.

3.1 Álgebra de Heisenberg Fermiônica e Álgebra de Supersimetria Unidimensional $\mathcal{N}$-estendida

Considere a álgebra de Grassmann gerada por $\mathcal{N}$ coordenadas anticomutativas θ_α. Estas coordenadas, junto com suas derivadas de Berezin $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}$, formam uma superálgebra de Lie com $2\mathcal{N}$ geradores ímpares e um único gerador par, a extensão central z. Trata-se da álgebra de Heisenberg fermiônica $\mathfrak{h}_F(\mathcal{N})$, satisfazendo às relações de (anti)comutação

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\partial_\alpha, \partial_\beta\} = 0, \tag{3.1}$$

$$\{\partial_\alpha, \theta_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} z, \tag{3.2}$$

$$[z, \partial_\alpha] = [z, \theta_\alpha] = 0. \tag{3.3}$$

Como discutido no capítulo anterior, uma interpretação cuidadosa do papel da extensão central é necessária, sendo seu coproduto e antípoda dados por

$$\Delta(z) = z \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes z \tag{3.4}$$

$$S(z) = -z. \tag{3.5}$$

Pode-se atribuir aos geradores de $\mathfrak{h}_F(\mathcal{N})$ dimensão de massa $[\theta_\alpha] = -\frac{1}{2}$, $[\partial_\alpha] = \frac{1}{2}$, $[z] = 0$.

Passamos agora à álgebra universal envelopante $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_F(\mathcal{N}))$, que tem estrutura de superálgebra de Hopf, e a deformaremos por meio do twist abeliano

$$\mathcal{F} = \exp\left(C_{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta\right), \tag{3.6}$$

expresso em termos da matriz diagonal

$$C_{\alpha\beta} = \frac{1}{M}\eta_{\alpha\beta}, \tag{3.7}$$

onde M é um parâmetro de massa e $\eta_{\alpha\beta}$ é uma matriz diagonal adimensonal admitindo, sem perda de generalidade, p entradas $+1$, q entradas -1 e r entradas zero ($p + q + r = \mathcal{N}$).

Lançando mão das técnicas desenvolvidas nos capítulos anteriores, obtemos a deformação nos geradores θ_α

$$\theta_\alpha^{\mathcal{F}} = \overline{f}^{\beta}(\theta_\alpha)\overline{f}_\beta = \theta_\alpha + C_{\alpha\beta}\partial_\beta z, \tag{3.8}$$

não sofrendo os demais geradores deformação por comutarem com os ∂_α do twist. Note-se que os geradores deformados diferem dos originais pelo análogo fermiônico do desvio de Bopp.

O coproduto deformado de θ_α é

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{F}}(\theta_\alpha) &= \exp\left(C_{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta\right)\Delta(\theta_\alpha)\exp\left(-C_{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta\right) \\
&= \theta_\alpha \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \theta_\alpha + C_{\alpha\beta}(\partial_\beta \otimes z - z \otimes \partial_\beta),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

e evidentemente

$$\Delta^{\mathcal{F}}(\partial_\alpha) = \partial_\alpha \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \partial_\alpha \tag{3.10}$$

$$\Delta^{\mathcal{F}}(z) = z \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes z. \tag{3.11}$$

Como

$$\chi = f^\alpha S(f_\alpha) = \exp\left(-C_{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\right) = \mathbf{1}, \tag{3.12}$$

o antípoda não sofre deformação.

A matriz-R universal é dada por

$$\mathcal{R} = \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{|\bar{f}^\beta||f^\alpha|}(f_\alpha \bar{f}^\beta \otimes f^\alpha \bar{f}_\beta) = \exp\left(-2C_{\alpha\beta}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta\right), \tag{3.13}$$

de modo que obtemos o coproduto deformado de $\theta_\alpha^{\mathcal{F}}$ como

$$\Delta^{\mathcal{F}}(\theta_\alpha^{\mathcal{F}}) = \theta_\alpha^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \theta_\alpha^{\mathcal{F}} + 2C_{\alpha\beta}\partial_\beta \otimes z. \tag{3.14}$$

De posse do antípoda

$$S(\theta_\alpha^{\mathcal{F}}) = -\theta_\alpha + C_{\alpha\beta} z \partial_\beta = -\theta_\alpha^{\mathcal{F}} + 2C_{\alpha\beta} z \partial_\beta, \tag{3.15}$$

podemos calcular os colchetes deformados

$$
\begin{aligned}
\left\{\theta_\alpha^{\mathcal{F}}, \partial_\beta^{\mathcal{F}}\right\}_{\mathcal{F}} &= \delta_{\alpha\beta} z^{\mathcal{F}}, \\
\left\{\theta_\alpha^{\mathcal{F}}, \theta_\beta^{\mathcal{F}}\right\}_{\mathcal{F}} &= 0, && (3.16) \\
\left\{\partial_\alpha^{\mathcal{F}}, \partial_\beta^{\mathcal{F}}\right\}_{\mathcal{F}} &= 0, && (3.17) \\
\left[\partial_\alpha^{\mathcal{F}}, z^{\mathcal{F}}\right]_{\mathcal{F}} &= \left[\theta_\alpha^{\mathcal{F}}, z^{\mathcal{F}}\right]_{\mathcal{F}} = 0, && (3.18)
\end{aligned}
$$

que possuem as mesmas constantes de estrutura da álgebra original (3.1)-(3.3).

Os colchetes ordinários dos geradores deformados tornam não anticomutativos os geradores originalmente grassmannianos:

$$
\begin{aligned}
\left\{\theta_\alpha^{\mathcal{F}}, \partial_\beta^{\mathcal{F}}\right\} &= \delta_{\alpha\beta} z, && (3.19) \\
\left\{\theta_\alpha^{\mathcal{F}}, \theta_\beta^{\mathcal{F}}\right\} &= 2C_{\alpha\beta} z^2, && (3.20) \\
\left\{\partial_\alpha^{\mathcal{F}}, \partial_\beta^{\mathcal{F}}\right\} &= 0, && (3.21) \\
\left[z^{\mathcal{F}}, \theta_\alpha^{\mathcal{F}}\right] &= \left[z^{\mathcal{F}}, \partial_\alpha^{\mathcal{F}}\right] = 0. && (3.22)
\end{aligned}
$$

Tratamos, agora, de estudar a deformação da multiplicação m num módulo M. O módulo será novamente um espaço de funções, agora das variáveis grassmanianas, e a ação de $\mathfrak{h}_F(\mathcal{N})$ dada por

$$\partial_\alpha \triangleright a = z \frac{\partial a}{\partial \theta_\alpha} \tag{3.23}$$

$$\theta_\alpha \triangleright a = \theta_\alpha \cdot a, \tag{3.24}$$

onde $\cdot$ denota a multiplicação grassmanniana usual, i.e., $a \cdot b = m(a \otimes b)$,

$a, b \in M$.

Como estamos trabalhando no módulo, que fornece uma representação de $\mathfrak{h}_F(\mathcal{N})$, a extensão central deve tomar um valor numérico. Em particular, por conveniência, escolhemos $z = 1$.

Deste modo, a multiplicação deformada é

$$a \star b \equiv m^{\mathcal{F}}(a \otimes b) = (m \circ \mathcal{F}^{-1})(a \otimes b). \quad (3.25)$$

Definindo $[a, b\}_\star \equiv a \star b + (-1)^{|a||b|} b \star a$, temos

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}_\star = 2C_{\alpha\beta}, \quad (3.26)$$

$$\{\partial_\alpha, \theta_\beta\}_\star = \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.27)$$

$$\{\partial_\alpha, \partial_\beta\}_\star = 0, \quad (3.28)$$

que nos fornece uma cliffordização das coordenadas outrora grassmannianas, análoga à obtida em [56], [57], [58] .

Agora consideraremos a álgebra de supersimetria unidimensional $\mathcal{N}$-estendida e mostraremos que, para valores pares de $\mathcal{N}$, ela é isomorfa a $\mathfrak{h}_F(\frac{\mathcal{N}}{2})$, de modo que a deformação obtida acima pode ser aplicada com facilidade se fizermos as identificações convenientes.

Para tanto, considere a álgebra formada pelos geradores de supersimetria $\widehat{Q}_I$ e a extensão central H satisfazendo a

$$\{\widehat{Q}_I, \widehat{Q}_J\} = \delta_{IJ} H, \quad (3.29)$$

$$\left[H, \widehat{Q}_I\right] = 0, \quad (3.30)$$

$I, J = 1, \ldots, \mathcal{N}$.

Para $\mathcal{N}$ par, podemos dividir os geradores ímpares nos setores quiral $_i$ e antiquiral $\overline{Q}_i$:

$$Q_i = \widehat{Q}_i + i\widehat{Q}_{i+\frac{\mathcal{N}}{2}}, \tag{3.31}$$

$$\overline{Q}_i = \widehat{Q}_i - i\widehat{Q}_{i+\frac{\mathcal{N}}{2}}, \tag{3.32}$$

com $i = 1, \ldots, \frac{\mathcal{N}}{2}$.

Feito isto, a álgebra é re-expressa como

$$\left\{Q_i, \overline{Q}_j\right\} = 2\delta_{ij}H, \tag{3.33}$$

$$\{Q_i, Q_j\} = \left\{\overline{Q}_i, \overline{Q}_j\right\} = 0, \tag{3.34}$$

$$[H, Q_i] = \left[H, \overline{Q}_i\right] = 0. \tag{3.35}$$

Esta álgebra é isomorfa a (3.1)-(3.3) se fizermos as identificações

$$Q_i \leftrightarrow \theta_\alpha \tag{3.36}$$

$$\overline{Q}_i \leftrightarrow \partial_\alpha \tag{3.37}$$

$$2H \leftrightarrow z. \tag{3.38}$$

Usando essa identificação em (3.6), deformamos, agora, a álgebra (3.33)-(3.35) por meio do twist abeliano

$$\mathcal{F} = \exp\left(\frac{C_{ij}}{2}\overline{Q}_i \otimes \overline{Q}_j\right), \tag{3.39}$$

com $C_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{M}$, onde η_{ij} é uma matriz diagonal adimensional com p entradas positivas, q negativas and r zero ($p + q + r = \mathcal{N}$) e M um parâmetro de massa.

Esta deformação, conforme antecipado, coincide com (3.6).

O coproduto deformado de Q_i é

$$\Delta^{\mathcal{F}}(Q_i) = \Delta(Q_i) + C_{ij}(\overline{Q}_j \otimes H - H \otimes \overline{Q}_j). \tag{3.40}$$

Os únicos geradores deformados são os Q_is, cuja deformação é dada por

$$Q_i^{\mathcal{F}} = Q_i + C_{ij}\overline{Q}_j H. \tag{3.41}$$

A matriz-R universal é $\mathcal{F}^{-2}$, de sorte que o coproduto deformado dos geradores deformados é

$$\Delta^{\mathcal{F}}(Q_i^{\mathcal{F}}) = Q_i^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes Q_i^{\mathcal{F}} + 2C_{ij}\overline{Q}_j \otimes H, \tag{3.42}$$

o que, juntamente com os antípodas

$$S(Q_i^{\mathcal{F}}) = -Q_i + C_{ij}\overline{Q}_j H = -Q_i^{\mathcal{F}} + 2C_{ij}\overline{Q}_j H, \tag{3.43}$$

permitirá o cálculo dos colchetes deformados

$$\left\{\overline{Q}_i^{\mathcal{F}}, Q_j^{\mathcal{F}}\right\}_{\mathcal{F}} = \delta_{ij} H^{\mathcal{F}} = \delta_{ij} H, \tag{3.44}$$

$$\left\{\overline{Q}_i^{\mathcal{F}}, \overline{Q}_j^{\mathcal{F}}\right\}_{\mathcal{F}} = 0, \tag{3.45}$$

$$\left\{Q_i^{\mathcal{F}}, Q_j^{\mathcal{F}}\right\}_{\mathcal{F}} = 0, \tag{3.46}$$

$$\left[Q_i^{\mathcal{F}}, H^{\mathcal{F}}\right]_{\mathcal{F}} = \left[\overline{Q}_i^{\mathcal{F}}, H^{\mathcal{F}}\right]_{\mathcal{F}} = 0. \tag{3.47}$$

Em contrapartida, os colchetes ordinários das quantidades deformadas são

$$\left\{\overline{Q}_i^{\mathcal{F}}, Q_j^{\mathcal{F}}\right\} = \delta_{ij} H^{\mathcal{F}}, \tag{3.48}$$

$$\left\{\overline{Q}_i^{\mathcal{F}}, \overline{Q}_j^{\mathcal{F}}\right\} = 0, \tag{3.49}$$

$$\left\{Q_i^{\mathcal{F}}, Q_j^{\mathcal{F}}\right\} = 2C_{ij}(H^{\mathcal{F}})^2, \tag{3.50}$$

$$\left[H^{\mathcal{F}}, \overline{Q}_i^{\mathcal{F}}\right] = \left[H^{\mathcal{F}}, Q_i^{\mathcal{F}}\right] = 0. \tag{3.51}$$

É de notar-se que superálgebras não lineares da forma $\{Q_a, Q_b\} = \delta_{ab} P_n(H)$, com $P_n(H)$ um polinômio de ordem n da Hamiltoniana, foram introduzidas em [50].

3.2 Representação de superespaço

Agora queremos estudar a deformação da mecânica quântica supersimétrica na representação de superespaço. Para tanto, faz-se necessário introduzir o conjunto de variáveis grassmannianas θ_I e suas derivadas ∂_{θ_I}, que, com a extensão central z, formam a álgebra $\mathfrak{h}_F(N)$, bem como o parâmetro bosônico

t e sua derivada ∂_t, que, com a extensão central $\hbar$, satisfazem à álgebra de Heisenberg bosônica $\mathfrak{h}(1)$. Obtemos, portanto, a princípio, a álgebra $\mathfrak{h}(1) \oplus \mathfrak{h}_F(N)$. Podemos agora identificar as extensões centrais ($z = \hbar$), obtendo assim uma álgebra que chamaremos $\mathfrak{h}(1, N)$. A álgebra de supersimetria $\mathcal{N}$-estendida pode ser realizada explicitamente em termos de operadores da álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{h}(1, \mathcal{N}))$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{Q}_I &= \partial_{\theta_I} + \frac{i}{\hbar}\theta_I \partial_t, && (3.52)\\
H &= i\partial_t, && (3.53)
\end{aligned}
$$

com $I = 1, \ldots, \mathcal{N}$.

Aqui é necessário impor, na mesma linha do discutido na seção **2.3** e em [51], que o coproduto não deformado de $\widehat{Q}_I$ coincida com o coproduto de um gerador fermiônico primitivo, i.e., $\Delta(\widehat{Q}_I) = \widehat{Q}_I \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \widehat{Q}_I$. Deste modo, não é preocupante a presença de termos do tipo $\frac{1}{\hbar}$ na expressão acima.

Como estamos trabalhando em $\mathcal{U}(\mathfrak{h}(1, \mathcal{N}))$, agora é possível deformar os geradores de supersimetria por meio do twist (3.6)

$$
\mathcal{F} = \exp(C_{IJ} \partial_{\theta_I} \otimes \partial_{\theta_J}), \tag{3.54}
$$

obtendo como geradores deformados

$$
\widehat{Q}_I^{\mathcal{F}} = \widehat{Q}_I + C_{IJ} H \partial_{\theta_J}, \tag{3.55}
$$

e, é claro, $H^{\mathcal{F}} = H$.

Obtém-se como coproduto deformado de $\widehat{Q}_I$

$$\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_I) = \Delta(\widehat{Q}_I) + C_{IJ}(\partial_{\theta_J} \otimes H - H \otimes \partial_{\theta_J}), \tag{3.56}$$

ao passo que o coproduto deformado de $\widehat{Q}_I^{\mathcal{F}}$ é

$$\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_I^{\mathcal{F}}) = \widehat{Q}_I^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \widehat{Q}_I^{\mathcal{F}} + 2C_{IJ}(\partial_{\theta_J} \otimes H). \tag{3.57}$$

Os colchetes ordinários dos geradores deformados são

$$\{\widehat{Q}_I^{\mathcal{F}}, \widehat{Q}_J^{\mathcal{F}}\} = \delta_{IJ} H + 2C_{IJ} H^2, \tag{3.58}$$

enquanto os colchetes deformados, como esperado, restauram a álgebra original

$$\{\widehat{Q}_I^{\mathcal{F}}, \widehat{Q}_J^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}} = \delta_{IJ} H. \tag{3.59}$$

Discutiremos, a seguir, os casos particulares $\mathcal{N} = 2$ e $\mathcal{N} = 4$.

3.2.1 O caso $\mathcal{N} = 2$

Consideramos, aqui, a realização dos geradores de supersimetria $\mathcal{N} = 2$ por meio da álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{h}(1, 2))$:

$$\widehat{Q}_1 = \partial_{\theta_1} + \frac{i}{\hbar}\theta_1 \partial_t, \tag{3.60}$$

$$\widehat{Q}_2 = \partial_{\theta_2} + \frac{i}{\hbar}\theta_2 \partial_t. \tag{3.61}$$

Podem-se acrescentar as derivadas fermiônicas

$$D_1 = \partial_{\theta_1} - \frac{i}{\hbar}\theta_1\partial_t, \quad (3.62)$$

$$D_2 = \partial_{\theta_2} - \frac{i}{\hbar}\theta_2\partial_t. \quad (3.63)$$

Estes quatro geradores, mais a extensão central H, satisfazem à chamada álgebra de pseudossupersimetria $\mathcal{N} = (2, 2)$ dada pelas relações

$$\{\widehat{Q}_I, \widehat{Q}_J\} = \delta_{IJ}H, \quad (3.64)$$

$$\{D_I, D_J\} = -\delta_{IJ}H, \quad (3.65)$$

$$\{D_I, \widehat{Q}_J\} = 0, \quad (3.66)$$

$$\left[H, \widehat{Q}_I\right] = [H, D_I] = 0. \quad (3.67)$$

Podemos agora deformar esta álgebra por meio de qualquer twist $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}(1,2)) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{h}(1,2))$ que seja invertível e satisfaça a condição de 2-cociclo. Em particular, um twist abeliano admissível é

$$\mathcal{F} = \exp\left(\frac{\epsilon}{M}\overline{Q} \otimes \overline{Q} + \frac{\eta}{M}\overline{D} \otimes \overline{D}\right), \quad (3.68)$$

onde

$$\overline{Q} = \widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2, \quad (3.69)$$

$$\overline{D} = D_1 - iD_2 \quad (3.70)$$

e ϵ, η são números normalizáveis a $+1$, -1 ou 0 sem perda de generalidade.

O twist (3.39) é recuperado para $\eta = 0$, $C_{11} = \frac{\epsilon}{M}$.

Os geradores deformados são

$$
\begin{aligned}
\widehat{Q}_1^{\mathcal{F}} &= \widehat{Q}_1 + \frac{\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2)H, && (3.71)\\
\widehat{Q}_2^{\mathcal{F}} &= \widehat{Q}_2 - \frac{i\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2)H, && (3.72)\\
D_1^{\mathcal{F}} &= D_1 + \frac{\eta}{M}(D_1 - iD_2)H, && (3.73)\\
D_2^{\mathcal{F}} &= D_2 - \frac{i\eta}{M}(D_1 - iD_2)H, && (3.74)
\end{aligned}
$$

e $H^{\mathcal{F}} = H$.

Os coprodutos deformados são dados por

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_1) &= \Delta(\widehat{Q}_1) + \frac{\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_1) - \frac{i\epsilon}{M}(\widehat{Q}_2 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_2),\\
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_2) &= \Delta(\widehat{Q}_2) - \frac{i\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_1) - \frac{\epsilon}{M}(\widehat{Q}_2 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_2),\\
\Delta^{\mathcal{F}}(D_1) &= \Delta(D_1) - \frac{\eta}{M}(D_1 \otimes H - H \otimes D_1) + \frac{i\eta}{M}(D_2 \otimes H - H \otimes D_2),\\
\Delta^{\mathcal{F}}(D_2) &= \Delta(D_2) + \frac{i\eta}{M}(D_1 \otimes H - H \otimes D_1) + \frac{\eta}{M}(D_2 \otimes H - H \otimes D_2).
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

Como

$$
\chi = f^\alpha S(f_\alpha) = \exp\left(-\frac{\epsilon}{M}\overline{Q}^2 - \frac{\eta}{M}\overline{D}^2\right) = \mathbf{1}, \tag{3.76}
$$

os antípodas não se deformam e são

$$
\begin{aligned}
S(\widehat{Q}_1^{\mathcal{F}}) &= -\widehat{Q}_1^{\mathcal{F}} + \frac{2\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2), && (3.77)\\
S(\widehat{Q}_2^{\mathcal{F}}) &= -\widehat{Q}_2^{\mathcal{F}} - \frac{2i\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2), && (3.78)\\
S(D_1^{\mathcal{F}}) &= -D_1^{\mathcal{F}} - \frac{2\eta}{M}(D_1 - iD_2), && (3.79)\\
S(D_2^{\mathcal{F}}) &= -D_2^{\mathcal{F}} + \frac{2i\eta}{M}(D_1 - iD_2). && (3.80)
\end{aligned}
$$

A matriz-R universal é simplesmente

$$
\mathcal{R} = \mathcal{F}^{-2} = \exp\left[-2\left(\frac{\epsilon}{M}\overline{Q}\otimes\overline{Q} + \frac{\eta}{M}\overline{D}\otimes\overline{D}\right)\right]. \qquad (3.81)
$$

Com estes resultados, podemos calcular os coprodutos deformados das quantidades deformadas. São eles

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_1^{\mathcal{F}}) &= \widehat{Q}_1^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \widehat{Q}_1^{\mathcal{F}} + \frac{2\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2) \otimes H, && (3.82)\\
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_2^{\mathcal{F}}) &= \widehat{Q}_2^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \widehat{Q}_2^{\mathcal{F}} - \frac{2i\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2) \otimes H, && (3.83)\\
\Delta^{\mathcal{F}}(D_1^{\mathcal{F}}) &= D_1^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes D_1^{\mathcal{F}} - \frac{2\eta}{M}(D_1 - iD_2) \otimes H, && (3.84)\\
\Delta^{\mathcal{F}}(D_2^{\mathcal{F}}) &= D_2^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes D_2^{\mathcal{F}} + \frac{2i\eta}{M}(D_1 - iD_2) \otimes H, && (3.85)
\end{aligned}
$$

e fornecem, conforme esperado, os colchetes deformados dos geradores deformados com as constantes de estrutura originais,

$$
\begin{aligned}
\{\widehat{Q}_I^{\mathcal{F}}, \widehat{Q}_J^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}} &= \delta_{IJ} H^{\mathcal{F}}, && (3.86)\\
\{D_I^{\mathcal{F}}, D_J^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}} &= -\delta_{IJ} H^{\mathcal{F}}, && (3.87)\\
\{D_I^{\mathcal{F}}, \widehat{Q}_J^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}} &= 0. && (3.88)
\end{aligned}
$$

Agora passamos a estudar a multiplicação deformada num módulo que consiste no espaço de funções das variáveis grassmannianas θ_1, θ_2. A multiplicação ordinária m é o produto grassmanniano usual, i.e.,

$$m(\theta_I \otimes \theta_J) = \theta_I \cdot \theta_J. \tag{3.89}$$

A ação de $\widehat{Q}_I$ e D_I no módulo é dada por

$$\widehat{Q}_I \triangleright \theta_J = D_I \triangleright \theta_J = \delta_{IJ}. \tag{3.90}$$

Definimos o produto estrela como

$$\theta_I \star \theta_J = m^{\mathcal{F}}(\theta_I \otimes \theta_J) = (m \circ \mathcal{F}^{-1})(\theta_I \otimes \theta_J) \tag{3.91}$$

e calculamos explicitamente

$$\theta_1 \star \theta_1 = -\frac{\epsilon}{M} - \frac{\eta}{M}, \tag{3.92}$$

$$\theta_2 \star \theta_2 = \frac{\epsilon}{M} + \frac{\eta}{M}, \tag{3.93}$$

$$\theta_1 \star \theta_2 = -\frac{i\epsilon}{M} - \frac{i\eta}{M} + \theta_1\theta_2, \tag{3.94}$$

de modo que os anticomutadores estrela são

$$\{\theta_1, \theta_1\}_\star = -2\left(\frac{\epsilon}{M} + \frac{\eta}{M}\right), \tag{3.95}$$

$$\{\theta_2, \theta_2\}_\star = 2\left(\frac{\epsilon}{M} + \frac{\eta}{M}\right), \tag{3.96}$$

$$\{\theta_1, \theta_2\}_\star = -2i\left(\frac{\epsilon}{M} + \frac{\eta}{M}\right). \tag{3.97}$$

Passando para coordenadas quirais

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1 + i\theta_2, \\ \bar{\theta} &= \theta_1 - i\theta_2, \end{aligned} \tag{3.98}$$

os anticomutadores estrela exprimem-se como

$$\{\theta, \theta\}_\star = -8\left(\frac{\epsilon}{M} + \frac{\eta}{M}\right), \tag{3.99}$$

$$\{\bar{\theta}, \bar{\theta}\}_\star = 0, \tag{3.100}$$

$$\{\theta, \bar{\theta}\}_\star = 0, \tag{3.101}$$

dando-nos a cliffordização em metade das coordenadas (setor quiral), como obtido em [59] e [60].

Como $H^{\mathcal{F}} = H$, poder-se-ia pensar que o setor bosônico não sofre deformação alguma. No entanto, considere o operador bosônico

$$W = \frac{i}{2}(\widehat{Q}_1\widehat{Q}_2 - \widehat{Q}_2\widehat{Q}_1), \tag{3.102}$$

que também é declarado primitivo, ou seja, $\Delta(W) = W \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes W$ e $S(W) = -W$.

Se procedermos à sua deformação (fazendo, por simplicidade, $\eta = 0$), obtemos que $W^{\mathcal{F}} = W$, pois $[\overline{Q}, W] = -2H\overline{Q}$. Não há, pois, deformação no nível algébrico. O coproduto de W, no entanto, é deformado:

$$\Delta^{\mathcal{F}}(W) = \Delta(W) - \frac{2\epsilon}{M}(\overline{Q} \otimes \overline{Q}H + \overline{Q}H \otimes \overline{Q}), \tag{3.103}$$

o que mostra que o setor bosônico não é inteiramente infenso à deformação fermiônica.

3.2.2 O caso $\mathcal{N} = 4$

Voltamos nossa atenção agora para a álgebra de supersimetria $\mathcal{N} = 4$

$$\begin{aligned} \{\widehat{Q}_I, \widehat{Q}_J\} &= \delta_{IJ} H, & (3.104) \\ \left[H, \widehat{Q}_I\right] &= 0, & (3.105) \end{aligned}$$

$(I, J = 1, 2, 3, 4)$ e aplicamos o twist

$$\mathcal{F} = \exp\left(\frac{\eta_{ij}}{M} \overline{Q}_i \otimes \overline{Q}_j\right), \tag{3.106}$$

onde η_{ij} é diagonal e

$$\begin{aligned} \overline{Q}_1 &= \widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2, & (3.107) \\ \overline{Q}_2 &= \widehat{Q}_3 - i\widehat{Q}_4. & (3.108) \end{aligned}$$

Fazemos $\eta_{11} = \epsilon$ e $\eta_{22} = \eta$.

O mesmo procedimento de antes nos permite calcular a deformação dos geradores

$$\begin{aligned}
\widehat{Q}_1^{\mathcal{F}} &= \widehat{Q}_1 + \frac{\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2)H, && (3.109)\\
\widehat{Q}_2^{\mathcal{F}} &= \widehat{Q}_2 - \frac{i\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2)H, && (3.110)\\
\widehat{Q}_3^{\mathcal{F}} &= \widehat{Q}_3 + \frac{\eta}{M}(\widehat{Q}_3 - i\widehat{Q}_4)H, && (3.111)\\
\widehat{Q}_4^{\mathcal{F}} &= \widehat{Q}_4 - \frac{i\eta}{M}(\widehat{Q}_3 - i\widehat{Q}_4)H. && (3.112)
\end{aligned}$$

Os coprodutos deformados são

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_1) &= \Delta(\widehat{Q}_1) + \frac{\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_1) - \frac{i\epsilon}{M}(\widehat{Q}_2 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_2),\\
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_2) &= \Delta(\widehat{Q}_2) - \frac{i\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_1) - \frac{\epsilon}{M}(\widehat{Q}_2 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_2),\\
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_3) &= \Delta(\widehat{Q}_3) + \frac{\eta}{M}(\widehat{Q}_3 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_3) - \frac{i\eta}{M}(\widehat{Q}_4 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_4),\\
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_4) &= \Delta(\widehat{Q}_4) - \frac{i\eta}{M}(\widehat{Q}_3 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_3) - \frac{\eta}{M}(\widehat{Q}_4 \otimes H - H \otimes \widehat{Q}_4).
\end{aligned}
\tag{3.113}$$

A matriz-R universal é simplesmente $\mathcal{F}^{-2}$, permitindo o cálculo dos coprodutos deformados dos geradores deformados

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_1^{\mathcal{F}}) &= \widehat{Q}_1^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \widehat{Q}_1^{\mathcal{F}} + \frac{2\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2) \otimes H, && (3.114)\\
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_2^{\mathcal{F}}) &= \widehat{Q}_2^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \widehat{Q}_2^{\mathcal{F}} - \frac{2i\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2) \otimes H, && (3.115)\\
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_3^{\mathcal{F}}) &= \widehat{Q}_3^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \widehat{Q}_3^{\mathcal{F}} + \frac{2\eta}{M}(\widehat{Q}_3 - i\widehat{Q}_4) \otimes H, && (3.116)\\
\Delta^{\mathcal{F}}(\widehat{Q}_4^{\mathcal{F}}) &= \widehat{Q}_4^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \widehat{Q}_4^{\mathcal{F}} - \frac{2i\eta}{M}(\widehat{Q}_3 - i\widehat{Q}_4) \otimes H. && (3.117)
\end{aligned}$$

Os antípodas são

$$
\begin{aligned}
S(\widehat{Q}_1^{\mathcal{F}}) &= -\widehat{Q}_1^{\mathcal{F}} + \frac{2\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2), && (3.118)\\
S(\widehat{Q}_2^{\mathcal{F}}) &= -\widehat{Q}_2^{\mathcal{F}} - \frac{2i\epsilon}{M}(\widehat{Q}_1 - i\widehat{Q}_2), && (3.119)\\
S(\widehat{Q}_3^{\mathcal{F}}) &= -\widehat{Q}_3^{\mathcal{F}} + \frac{2\eta}{M}(\widehat{Q}_3 - i\widehat{Q}_4), && (3.120)\\
S(\widehat{Q}_4^{\mathcal{F}}) &= -\widehat{Q}_4^{\mathcal{F}} - \frac{2i\eta}{M}(\widehat{Q}_3 - i\widehat{Q}_4), && (3.121)
\end{aligned}
$$

de modo que os colchetes deformados são, como esperado,

$$
\begin{aligned}
\{\widehat{Q}_I^{\mathcal{F}}, \widehat{Q}_J^{\mathcal{F}}\}_{\mathcal{F}} &= \delta_{IJ} H^{\mathcal{F}}, && (3.122)\\
\left[H^{\mathcal{F}}, \widehat{Q}_I^{\mathcal{F}}\right]_{\mathcal{F}} &= 0. && (3.123)
\end{aligned}
$$

Examinamos agora a multiplicação deformada $m^{\mathcal{F}}$ no espaço de funções de variáveis de Grassmann θ_I, $I = 1, \ldots, 4$, com a ação dos $\widehat{Q}_I$s sobre o módulo dada por $\widehat{Q}_I \triangleright \theta_J = \delta_{IJ}$.

Com a definição já dada de produto estrela, tem-se

$$
\begin{aligned}
\theta_1 \star \theta_1 &= -\frac{\epsilon}{M}, && (3.124)\\
\theta_2 \star \theta_2 &= \frac{\epsilon}{M}, && (3.125)\\
\theta_3 \star \theta_3 &= -\frac{\eta}{M}, && (3.126)\\
\theta_4 \star \theta_4 &= \frac{\eta}{M}; && (3.127)
\end{aligned}
$$

e todas as demais combinações coincidem com o produto grassmanniano ordinário.

Passando para coordenadas quirais

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \theta_1 + i\theta_2, && (3.128)\\
\overline{\zeta_1} &= \theta_1 - i\theta_2, && (3.129)\\
\zeta_2 &= \theta_3 + i\theta_4, && (3.130)\\
\overline{\zeta_2} &= \theta_3 - i\theta_4, && (3.131)
\end{aligned}$$

os anticomutadores estrela são

$$\begin{aligned}
\{\zeta_I, \zeta_J\}_\star &= -8\frac{\eta_{IJ}}{M}, && (3.132)\\
\{\overline{\zeta}_I, \overline{\zeta}_J\}_\star &= 0, && (3.133)\\
\{\zeta_I, \overline{\zeta}_J\}_\star &= 0, && (3.134)
\end{aligned}$$

dando-nos novamente a cliffordização nas coordenadas quirais sem barra, como em [59] e [60].

Para mostrar que o setor bosônico também sofre algum efeito do twist, procedemos analogamente e introduzimos os operadores bosônicos hermitianos

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{i}{2}(\widehat{Q}_1\widehat{Q}_2 - \widehat{Q}_2\widehat{Q}_1), && (3.135)\\
W_2 &= \frac{i}{2}(\widehat{Q}_3\widehat{Q}_4 - \widehat{Q}_4\widehat{Q}_3), && (3.136)
\end{aligned}$$

que são, novamente, considerados como elementos primitivos.

Sua álgebra com os $\overline{Q}_i$s é

$$[\overline{Q}_i, W_j] = -2H\overline{Q}_i\delta_{ij} \text{ (sem soma em } i\text{)}, \tag{3.137}$$

de modo que não há deformação no nível algébrico, i.e, $W_i^{\mathcal{F}} = W_i$. O mesmo não se verifica no nível coalgébrico, pois seus coprodutos deformados são

$$\Delta^{\mathcal{F}}(W_i) = \Delta(W_i) - \frac{2\eta_{ij}}{M}(\overline{Q}_j \otimes \overline{Q}_j H + \overline{Q}_j H \otimes \overline{Q}_j). \tag{3.138}$$

Conclusão

Neste trabalho provamos que é possível construir a álgebra universal envelopante $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ da álgebra de Heisenberg, e deformá-la por meio de um Drinfel'd twist abeliano desde que o papel da extensão central seja cuidadosamente levado em conta, i.e., considerando-a como um elemento genérico da álgebra de Lie e não um múltiplo da identidade. Mostramos que os comutadores deformados dos geradores deformados $x_i^{\mathcal{F}}$ e $p_i^{\mathcal{F}}$ do subespaço linear de $\mathcal{U}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{h})$ exibem as mesmas constantes de estrutura da álgebra original, ou seja, a álgebra $[x_i, x_j] = 0$ é reproduzida pela deformação: $[x_i^{\mathcal{F}}, x_j^{\mathcal{F}}]_{\mathcal{F}} = 0$. A não comutatividade emerge no caso híbrido, quando computamos o comutador ordinário dos geradores deformados como $[x_i^{\mathcal{F}}, x_j^{\mathcal{F}}] = i\theta_{ij}$. Mostramos também como implementar um produto estrela no módulo, e como este produto também dá origem à não comutatividade da forma $[\check{x}_i, \check{x}_j]_\star = i\theta_{ij}$

Passando ao formalismo de segunda quantização, os geradores de posição e momento da álgebra de Heisenberg são realizados como bilineares integrados dos campos e osciladores (modos de Fourier) de Schrödinger. Constrói-se a álgebra universal envelopante da álgebra dos osciladores e vê-se que a estrutura de álgebra de Hopf da álgebra de Heisenberg não é corretamente reproduzida (a falha é nas coestruturas). Mostramos que o problema é inteiramente sanado e a estrutura completa de álgebra de Hopf da álgebra de Heisenberg é corretamente induzida se adotarmos, simultaneamente, o ordenamento de Weyl e a prescrição de Wigner de encarar os osciladores de Schrödinger como geradores de uma superálgebra apropriada, como $osp(1|2n)$. Levando em conta a natureza ímpar (oposta à real natureza física) dos osciladores, pode-se obter corretamente a álgebra de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ e deformá-la em $\mathcal{U}^{\mathcal{F}}(\mathfrak{h})$. A deformação de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ é inteiramente compatível com a deformação da álgebra dos osciladores básicos.

Por fim, investigamos as deformações da álgebra de Heisenberg fermiônica e da mecânica quântica supersimétrica unidimensional $\mathcal{N}$-estendida por meio de um twist abeliano. Apresentamos duas construções possíveis. Primeiro, para valores pares de $\mathcal{N}$, pode-se proceder à identificação com a álgebra de Heisenberg fermiônica, obtendo-se a mesma deformação com a troca dos símbolos. Alternativamente, pode-se adotar a representação de superespaço, em que a álgebra da mecânica quântica supersimétrica é realizada em termos de operadores pertencentes à superálgebra universal envelopante gerada por um oscilador bosônico e múltiplos osciladores fermiônicos, e deformar a álgebra de supersimetria neste cenário. Tanto em termos de geradores deformados quanto de um produto deformado corretamente definido num módulo, reobtivemos, num contexto matemático mais geral, resultados de cliffordização da literatura. Mostramos que, mesmo tratando-se de um twist fermiônico, o setor bosônico da teoria sofre deformação em seus estados de muitas partículas, como se depreende da deformação do coproduto. Os modelos considerados admitem derivadas fermiônicas que violam a regra de Leibniz $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Referências Bibliográficas

[1] M. Born, Proc. Roy. Soc. London **A143**, 410 (1933).

[2] W. Heisenberg, Ann. Phys. **32**, 20 (1938).

[3] S. Doplicher, K. Fredenhagen e J. Roberts, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994).

[4] S. Doplicher, K. Fredenhagen e J. Roberts, Commun. Math. Phys. **172**, 187 (1995).

[5] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).

[6] N. Seiberg e E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999) [arXiv:hep-th/9908142].

[7] M. R. Douglas e N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001) [arXiv:hep-th/0106048].

[8] R. J. Szabo, Phys. Rept. **378**, 207 (2003) [arXiv:hep-th/0109162].

[9] R. Banerjee, B. Chakraborty, S. Ghosh, P. Mukherjee e S. Samanta, Found. Phys. **39**, 1297 (2009) [arXiv:0909.1000 [hep-th]].

[10] V. G. Drinfel'd, J. Sov. Math. **41**, 898 (1988) [Zap. Nauchn. Semin. **155**, 18 (1986)].

[11] V. G. Drinfel'd, Sov. Math. Dokl. **32**, 254 (1985) [Dokl. Akad. Nauk Ser. Fiz. **283**, 1060 (1985)].

[12] M. Jimbo, Lett. Math. Phys. **10**, 63 (1985).

[13] H. Hopf, Ann. of Math. **42**, 22 (1941).

[14] M. E. Sweedler, "Hopf Algebras", W. A. Benjamin, Nova York (1969).

[15] E. Abe, "Hopf Algebras", Cambridge University Press, Cambridge (1980).

[16] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu e Ş. Raianu, "Hopf Algebras: An Introduction", Marcel Dekker, Nova York (2001).

[17] V. Chari e A. Pressley, "A Guide to Quantum Groups", Cambridge University Press, Cambridge (1994).

[18] S. Majid, "Foundations of Quantum Group Theory", Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[19] M. Jimbo (org.), "Yang-Baxter Equation in Integrable Systems", World Scientific Publishing Co., Cingapura (1989).

[20] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima e A. Tureanu, Phys. Lett. B **604**, 98 (2004) [arXiv:hep-th/0408069].

[21] L. G. Aldrovandi e F. A. Schaposnik, JHEP **0608**, 081 (2006) [arXiv:hep-th/0604197].

[22] Z. Kuznetsova, M. Rojas e F. Toppan, Int. J. Mod. Phys. A **23**, 309 (2008) [arXiv:0705.4007 [hep-th]].

[23] P. G. Castro, B. Chakraborty e F. Toppan, J. Math. Phys. **49**, 082106 (2008) [arXiv:0804.2936 [hep-th]].

[24] P. G. Castro, B. Chakraborty, Z. Kuznetsova e F. Toppan, arXiv:0912.0704 [hep-th].

[25] F. Borceux, "Handbook of Categorical Algebra", vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge (2008).

[26] M. Artin, "Algebra", Prentice-Hall, Upper Saddle River (1991).

[27] S. Majid, Int. J. Mod. Phys. A **5**, 1 (1990).

[28] C. N. Yang e C. P. Yang, Phys. Rev. **150**, 321 (1966).

[29] C. N. Yang e C. P. Yang, Phys. Rev. **150**, 327 (1966).

[30] C. N. Yang e C. P. Yang, Phys. Rev. **151**, 258 (1966).

[31] R. J. Baxter, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **289**, 315 (1978).

[32] N. Reshetikhin, Lett. Math. Phys. **20**, 331 (1990).

[33] N. Jacobson, "Lie Algebras", Dover, Nova York (1962).

[34] S. L. Woronowicz, Commun. Math. Phys. **122**, 125 (1989).

[35] P. Aschieri, M. Dimitrijević, F. Meyer e J. Wess, Class. Quant. Grav. **23**, 1883 (2006) [arXiv:hep-th/0510059].

[36] P. Aschieri, J. Phys. Conf. Ser. **53**, 799 (2006) [arXiv:hep-th/0608172].

[37] A. O. Barut e R. Raczka, "Theory of group representations and applications", 2. ed., World Scientific Publishing Co., Cingapura (1986).

[38] T. D. Palev, arXiv:hep-th/9307032.

[39] P. Aschieri, arXiv:hep-th/0703013.

[40] F. Bopp, Ann. Inst. Henri Poincaré **15**, 81 (1956).

[41] P. Aschieri, Fortschr. Phys. **55**, 649 (2007).

[42] H. J. Groenewold, Physica **12**, 405 (1946).

[43] J. E. Moyal, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 99 (1949).

[44] E. P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).

[45] H. Weyl, Z. Phys. **46**, 1 (1927).

[46] P. A. M. Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, Nova York (1964).

[47] A. P. Balachandran, G. Mangano, A. Pinzul e S. Vaidya, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 3111 (2006) [arXiv:hep-th/0508002].

[48] E. P. Wigner, Phys. Rev. **77**, 711 (1950).

[49] L. Frappat, P. Sorba e A. Sciarrino, arXiv:hep-th/9607161.

[50] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe e V. P. Spiridonov, Phys. Lett. A **174**, 273 (1993) [arXiv:hep-th/9303005].

[51] B. Chakraborty, Z. Kuznetsova e F. Toppan, arXiv:1002.1019 [hep-th].

[52] M. Valenzuela, arXiv:0912.0789 [hep-th].

[53] F. Correa, M. A. del Olmo e M. S. Plyushchay, Phys. Lett. B **628**, 157 (2005) [arXiv:hep-th/0508223].

[54] B. M. Zupnik, Phys. Lett. B **627**, 208 (2005) [arXiv:hep-th/0506043].

[55] M. Dimitrijević, V. Radovanović e J. Wess, JHEP **0712**, 059 (2007) [arXiv:0710.1746 [hep-th]].

[56] A. C. Hirshfeld e P. Henselder, Annals Phys. **302**, 59 (2002).

[57] A. C. Hirshfeld e P. Henselder, Annals Phys. **308**, 311 (2003).

[58] A. C. Hirshfeld, P. Henselder e T. Spernat, Annals Phys. **314**, 75 (2004) [arXiv:quant-ph/0404168].

[59] Y. Kobayashi e S. Sasaki, Int. J. Mod. Phys. A **20**, 7175 (2005) [arXiv:hep-th/0410164].

[60] M. Ihl e C. Sämann, JHEP **0601**, 065 (2006) [arXiv:hep-th/0506057].