

TESE DE MESTRADO

# Buracos Negros Dilatônicos

Manuel Eleuterio Rodrigues

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Março de 2006

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
ICRA

# Buracos Negros Dilatônicos

Manuel Eleuterio Rodrigues

**Banca Examinadora:**

**Presidente: Nelson Pinto Neto**

**Júlio César Fabris**

**Sebastião Alves Dias**

**Suplente: José Martins Salim**

Dissertação de Mestrado

Orientador: Prof. Dr. Nelson Pinto Neto

Rio de Janeiro

2006

# Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele eu nunca poderia ter concluído este curso.
- Agradeço aos meus pais por me darem a oportunidade de uma boa educação, a minha esposa Glaise por ter compreendido as dificuldades ao longo do curso, aos meus irmãos Jackles, Jackson, Jefferson, Janaifferson, Keila, Keite, Kelem, Keuri e Keifer, por sempre me incentivarem nos estudos.
- Agradeço em especial aos professores Júlio César Fabris e Nelson Pinto Neto por me darem a oportunidade de fazer este trabalho juntamente com eles.
- Agradeço ao professor Sebastião Dias pelos auxílios constantes em Teoria Quântica de Campos e aos meus amigos Martin Aparicio, Zeila Virginia, Victor, Cesar Castromonte e outros.
- Agradeço ao meu amigo Glauber Tadaiesky Marques pelos auxílios em todo o tempo.
- Agradeço à CAPES pela bolsa de estudos.

# Resumo

Neste trabalho analisamos o comportamento da temperatura de Hawking sob uma transformação conforme entre variedades, para os buracos negros carregados assintoticamente planos e assintoticamente não planos da teoria Einstein-Maxwell-Dilaton e os buracos negros frios da teoria de Brans-Dicke. Obtivemos a invariância conforme da temperatura de Hawking para os buracos negros das duas teorias e uma nova classe de buracos negros frios.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>1 BURACOS NEGROS E TERMODINÂMICA</b>	<b>7</b>
1.1 Buracos Negros	7
1.2 Termodinâmica de Buracos Negros	9
<b>2 BURACO NEGRO DILATÔNICO CARREGADO</b>	<b>13</b>
2.1 As Equações de Campo	13
2.2 As Equações de Campo e o Modelo para a Geometria	17
2.3 Soluções Exatas do Buraco Negro Dilatônico Carregado	21
2.4 Temperatura de Hawking para o Buraco Negro Assintoticamente Plano	25
2.5 Temperatura de Hawking para o Buraco Negro Assintoticamente Não Plano	26
2.6 Temperatura de Hawking para os Modelos de Cordas a Baixas Energias	28
<b>3 BURACOS NEGROS FRIOS</b>	<b>36</b>
3.1 Soluções Exatas	36
3.2 Buracos Negros Frios Neutros com $k > 0$	40

3.3 Buracos Negros Frios Neutros com $k = 0$ . . . . .	48
3.4 Buracos Negros Frios Neutros com $k < 0$ . . . . .	50
<b>Conclusão</b>	<b>53</b>
<b>Apêndice A</b>	<b>55</b>
<b>Apêndice B</b>	<b>59</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

# Introdução

No início do século passado Planck, discretizando a energia em pequenos pacotes energéticos chamados “quanta”, descreveu corretamente o fenômeno da radiação do corpo negro, iniciando assim a chamada “Mecânica Quântica” (MQ), onde o espectro de validade das grandezas físicas pode ser discreto.

No decorrer dos anos, tanto antigos experimentos como novos que consideravam os fundamentos da matéria, continuaram comprovando a MQ. Então, com a consideração de que campos quantizados representavam partículas elementares da matéria e suas simetrias através dos grupos de calibre, formulou-se o famoso “Modelo Padrão” das partículas elementares e o “Grupo de Renormalização”, quantizando assim as interações fundamentais, menos a gravitacional.

Existem inúmeras tentativas de quantizar a gravitação, mas mencionaremos aqui somente a Teoria de Cordas (TC) [37], contendo a gravitação quantizada, mas é válida para baixas e altas energias, no caso de baixas energias podendo ser levada à Relatividade Geral de Einstein. Em particular, existe uma aproximação chamada semi-clássica da gravitação ou Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos [20], que considera campos quantizados interagindo com a gravitação clássica, valendo somente a baixas energias. Assim, para baixas energias podemos considerar válidas tanto a Teoria de Cordas como a Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos.

Faremos neste trabalho a análise semi-clássica do comportamento da temperatura de Hawking para os buracos negros carregados da teoria Einstein -Maxwell-Dilaton (EMD) generalizada por um parâmetro  $\alpha$ , e que pode ser levada à Teoria de Cordas por uma transformação conforme. Também faremos a análise semi-clássica do comportamento da

temperatura de Hawking para os buracos negros frios da Teoria de Brans-Dicke, que em certos casos pode ser levada à Teoria de Cordas.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira.

No primeiro capítulo, fazemos uma breve revisão sobre buracos negros (BN) e termodinâmica de buracos negros clássicos e semi-clássicos. No segundo capítulo, primeiramente resolvemos as equações de Einstein para a teoria EMD, com fonte pontual e estática e com o espaço-tempo esféricamente simétrico e estático. A seguir calculamos a temperatura de Hawking dos buracos negros assintoticamente planos (AP) para o *referencial de Einstein* e o *referencial de cordas*, estabelecemos soluções da teoria EMD de buracos negros carregados assintoticamente não planos (ANP) e calculamos a temperatura de Hawking dos mesmos. Ao término do capítulo, generalizamos a ação da teoria EMD com a introdução de um novo parâmetro  $\omega$ , para possibilitar a abrangência dos modelos de cordas e calculamos a temperatura de Hawking neste caso. No terceiro e último capítulo, estabelecemos a existência de buracos negros frios para a teoria de Brans-Dicke, calculando assim a temperatura de Hawking para os mesmos. O objetivo de estudarmos os buracos negros da teoria EMD e de Brans-Dicke é que podemos estabelecer o comportamento da temperatura de Hawking em relação a dois *referenciais*, no caso EMD o de Einstein e o de cordas e no caso de Brans-Dicke o de Jordan e o de Einstein, que se relacionam por uma transformação conforme.



# Capítulo 1

## BURACOS NEGROS E TERMODINÂMICA

### 1.1 Buracos Negros

A teoria da Relatividade Geral (RG) de Einstein, concluída em 1915, é uma teoria que atribui uma visão geométrica às interações gravitacionais. Sua formulação original se deu com a atribuição do espaço-tempo ser uma variedade riemanniana, ou seja, sem torção, e a derivada covariante da métrica sendo nula. A dinâmica era regida pelas equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde “ $R_{\mu\nu}$ ” são as componentes do tensor de Ricci, “ $g_{\mu\nu}$ ” as componentes do tensor métrico associado ao espaço-tempo, “ $\mathcal{R}$ ” o escalar de curvatura, “ $T_{\mu\nu}$ ” as componentes do tensor momentum-energia da matéria contida no espaço-tempo e as unidades são as naturais ( $G = c = 1$ ).

Em 1916, Schwarzschild [34] encontrou uma solução exata das equações de Einstein. Ele se restringiu a um espaço-tempo sem fonte de matéria, com simetria esférica e estático, resultando no elemento de linha:

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (1.2)$$

onde “ $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ ” é o elemento de ângulo sólido e “ $M$ ” a massa contida em  $r = 0$ . Analisando este elemento de linha, nota-se que há uma região do espaço-tempo em

que só se pode entrar e não se pode sair, chamada de *horizonte de eventos*, cuja coordenada  $r \in (0; 2M]$ . Também se nota que existe uma singularidade (região divergente no espaço-tempo, que definiremos como sendo a região onde o escalar de Kretschmann (3.18) é divergente) em “ $r = 0$ ”. O conjunto da massa “ $M$ ”, localizada na singularidade  $r = 0$ , e o *horizonte de eventos*, foi denominado Buraco Negro (BN). Além disso, em 1923, Birkhoff [29] demonstrou que esta é a única solução esfericamente simétrica e estática sem fonte de matéria.

Muito tempo depois, em 1963, Kerr [30] obteve uma solução que generalizava o caso do BN de Schwarzschild. Agora o elemento de linha era:

$$dS^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (1.3)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

$$a = \frac{l}{M} = \text{momentum angular por massa}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Essa é uma solução de um BN girante, ou seja, o BN possui momentum angular e o espaço-tempo não tem fonte de matéria.

Na tentativa de descrever um espaço-tempo com fonte de matéria, a primeira fonte abordada foi o campo eletromagnético de Maxwell. Então Reissner [35] e Nordstrom [36] obtiveram uma solução esfericamente simétrica e estática com o campo de Maxwell como fonte, resultando no seguinte elemento de linha:

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (1.4)$$

que seria um BN carregado com carga “ $q$ ”. Todas essas soluções de BN (Schwarzschild, Kerr e Reissner-Nordstrom) são soluções assintoticamente planas (AP), isto é, no limite em que  $r \rightarrow \infty$ , o elemento de linha se iguala ao de Minkowski.

Hoje se sabe que, em geral, para um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico, só podem ser obtidas soluções de buracos negros nas quais os parâmetros físicos que os caracterizam são sua massa, sua carga e seu momentum angular. Estas serão as características dos buracos negros estudados aqui.

## 1.2 Termodinâmica de Buracos Negros

A existência de buracos negros no Universo, ainda hoje é questionada por muitos físicos, mas se existirem, sua formação está estabelecida. A formação de um BN se dá por um colapso gravitacional de um objeto massivo. Se qualquer objeto massivo colapsando entrar com toda sua massa numa região com raio menor que o de Schwarzschild

$$r_S = 2M, \quad (1.5)$$

em unidades naturais, o colapso gravitacional formará inevitavelmente um BN. Então, toda a informação contida na matéria do objeto massivo, partículas bosônicas ou fermiônicas por exemplo, será perdida. Para analisar essa perda de informação na formação de um BN, Bekenstein, em 1973, obteve a fórmula [23]

$$dM = \mathcal{T}_H dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ, \quad (1.6)$$

para a solução de Kerr-Newman, onde “ $M$ ” é a massa do BN, “ $\mathcal{T}_H$ ” a tensão na superfície do horizonte de eventos, “ $A$ ” a área, “ $\Omega_H$ ” a velocidade angular no horizonte, “ $J$ ” o momentum angular, “ $\Phi_H$ ” o potencial elétrico no horizonte e “ $Q$ ” a carga do BN. Logo após Smarr [31] obteve a forma exata

$$M = \mathcal{T}_H A + 2\Omega_H J + \Phi_H Q. \quad (1.7)$$

Entretanto, em 1971, Hawking havia demonstrado o teorema que dizia: A área de um buraco negro nunca decresce

$$\delta A \geq 0. \quad (1.8)$$

A partir destes resultados, foi formulada por Bardeen, Carter e Hawking [32] a termodinâmica de buracos negros clássicos, que faz uma analogia dos princípios da termodinâmica com as leis que regem a dinâmica de BN. As leis da termodinâmica de BN clássicos são quatro:

- A “Lei Zero”: A gravidade superficial (2.55) é constante, para buracos negros em equilíbrio.

Esta é o análogo da lei zero da termodinâmica: A temperatura de corpos em equilíbrio é constante.

- A “Primeira Lei”:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ, \quad (1.9)$$

onde  $\kappa$  é a gravidade superficial do BN.

Esta é o análogo da primeira lei da termodinâmica:  $dE = TdS - pdV$ .

- A “Segunda Lei”:

$$\delta A \geq 0. \quad (1.10)$$

Esta é o análogo da segunda lei da termodinâmica:  $\delta S \geq 0$ .

- A “Terceira Lei”:

A gravidade superficial (2.55) não pode ir a zero por processos físicos.

Esta é o análogo da terceira lei da termodinâmica: A temperatura de um sistema físico, não pode ir a zero por processos físicos.

Uma observação importante é que como BN clássicos não irradiam, a termodinâmica de BN clássicos só vale para BN extremos ( $\kappa = 0$ ), pois os que têm gravidade superficial diferente de zero, e portanto temperatura não nula, em analogia com a mecânica estatística usual, necessariamente irradiariam. Mas em 1975, Hawking [17] considerou efeitos da gravitação clássica em um campo escalar quântico. O resultado foi que considerando um estado de vácuo no infinito passado  $\mathfrak{S}^-$  (ver figura 1.1), antes da formação do BN, na região AP, então, depois da formação do BN, na região AP do infinito futuro  $\mathfrak{S}^+$ , um observador detectaria uma temperatura característica de um corpo negro, irradiada pelo BN. Assim, atribuiu-se o nome temperatura de Hawking para a temperatura dos BN, incluindo os BN não extremos pois agora não havia mais razões para se restringir somente à classe de BN extremos as leis da termodinâmica de BN. A análise do estado de vácuo quântico sem ambiguidades (devido a possibilidade de transformações gerais de coordenadas no infinito passado  $\mathfrak{S}^-$  e no infinito futuro  $\mathfrak{S}^+$ ) é possível porque há um

vácuo que é invariante pela ação dos elementos (que são os operadores relacionados as grandezas físicas relevantes) do grupo de Poincaré associado as regiões da variedade em questão. Mas os vácuos das regiões  $\mathfrak{S}^+$  e  $\mathfrak{S}^-$  diferem, resultando na interpretação de que o campo gravitacional clássico, interagindo com os campos quânticos, gerasse produção de partículas, justo o número de partículas que diferem entre os vácuos quânticos.

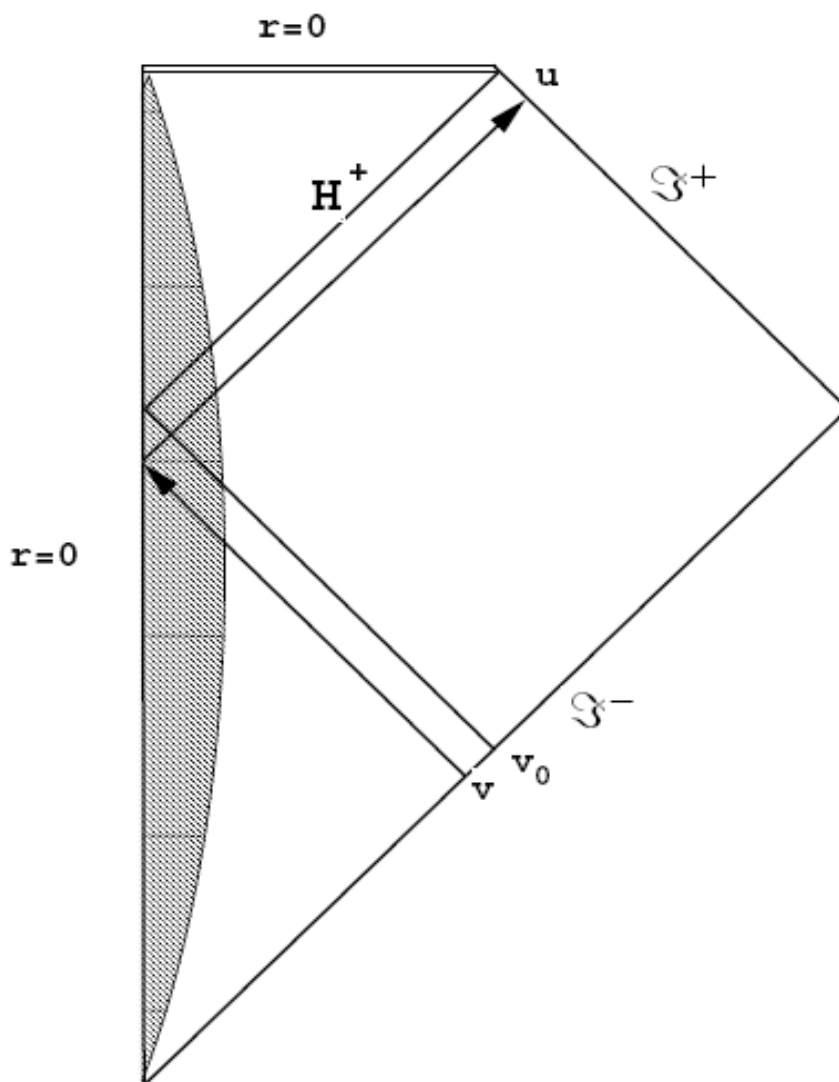


Figura 1.1: Diagrama de Penrose do espaço-tempo de um buraco negro formado por colapso gravitacional. A região sombreada é o interior do corpo colapsando;  $r = 0$ , linha na esquerda, é a linha de mundo do centro deste corpo;  $r = 0$ , linha ao topo do diagrama, é a singularidade de curvatura;  $H^+$  é o horizonte de eventos futuro. Um raio vindo do infinito passado  $\mathfrak{S}^-$  com  $v < v_0$  passa pelo corpo e escapa para  $\mathfrak{S}^+$  com raio  $u = \text{constante}$ . Raios do infinito passado  $\mathfrak{S}^-$  com  $v > v_0$  não escapam para o infinito futuro  $\mathfrak{S}^+$  e eventualmente alcançam a singularidade.

Entretanto notamos que nesta formulação semi-clássica em que o BN irradia, ele perde massa e conseqüentemente a área de seu horizonte de eventos diminui. Como a entropia do BN está relacionada com sua área por “ $S_{BN} = \frac{1}{4}A$ ”, então no processo de irradiação de partículas pelo BN há uma variação negativa na sua entropia. Para solucionar este problema, Bekenstein [33] sugeriu uma nova segunda lei generalizada para termodinâmica de BN, a qual é:

- A “Segunda Lei Generalizada”:

$$\delta S = \delta(S_{BN} + S_{Exterior}) \geq 0. \quad (1.11)$$

Esta segunda lei generalizada considera não somente a entropia do BN como um sistema isolado, já que este irradia, mas também a contribuição da entropia do exterior do BN. Assim a variação da entropia total do sistema, que é a variação da soma da entropia do BN com a entropia do exterior do BN, é sempre maior ou igual a zero, como se deve obter pelo princípio termodinâmico.

# Capítulo 2

## BURACO NEGRO DILATÔNICO CARREGADO

### 2.1 As Equações de Campo

Nos modelos da teoria de Cordas, sempre temos na ação um campo escalar chamado de dilaton. Como a teoria chamada Einstein-Maxwell-Dilaton (EMD) introduz o campo escalar dilatônico em sua ação, então estudaremos neste capítulo soluções de buracos negros da teoria EMD que podem ser levadas, via uma transformação conforme, aos modelos da teoria de cordas.

A teoria EMD é composta pelos campos:

1. A métrica do espaço-tempo “ $g^{\mu\nu}(x^\alpha)$ ”, que governa a geometria do espaço-tempo. Em particular escolheremos a geometria riemanniana, em que a torção e a derivada covariante da métrica são nulas.
2. O campo vetorial “ $A_\mu(x^\alpha)$ ”, que determina, com uma liberdade de calibre, as componentes do tensor de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu,$$

de onde obtemos o eletromagnetismo.

3. O campo escalar dilatônico “ $\varphi(x^\alpha)$ ”.

A ação da Teoria “EMD” é dada por:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} [\mathcal{R} - 2g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - e^{-2\alpha\varphi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo gera a teoria de Einstein, o segundo é o acoplamento do campo dilatônico com a gravitação e o terceiro é um termo de interação entre o campo dilatônico e o de Maxwell, acoplados a gravitação.

A equação de movimento para o campo “ $A_\alpha$ ” usando (2.1) é:

$$\frac{\delta S}{\delta A_\alpha} = 0, \quad (2.2)$$

onde “ $\delta$ ” representa a derivação funcional. Assim

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta A_\alpha(x')} &= - \int dx^4 \sqrt{-g} e^{-2\alpha\varphi} \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x')} (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) (F^{\mu\nu}) \\ &= -2 \int dx^4 \sqrt{-g} e^{-2\alpha\varphi} [\nabla_\mu \delta^4(x-x') \delta_\nu^\alpha - \nabla_\nu \delta^4(x-x') \delta_\mu^\alpha] (F^{\mu\nu}) \\ &= -4 \int dx^4 \{ \nabla_\mu [\sqrt{-g} e^{-2\alpha\varphi} \delta^4(x-x') F^{\mu\alpha}] - \delta^4(x-x') \nabla_\mu [\sqrt{-g} e^{-2\alpha\varphi} F^{\mu\alpha}] \} \\ &= \nabla'_\mu [4\sqrt{-g'} e^{-2\alpha\varphi(x')} F'^{\mu\alpha}], \end{aligned}$$

onde usamos a integração por partes, a simetria das componentes do tensor de Maxwell e que integrais de divergências totais se anulam. De (2.2) vem que:

$$\nabla_\mu [4\sqrt{-g} e^{-2\alpha\varphi(x)} F^{\mu\alpha}] = 0. \quad (2.3)$$

No caso do campo “ $\varphi$ ”, a equação de movimento é:

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0. \quad (2.4)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \varphi(x')} &= - \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ 2g^{\mu\nu} \left( \nabla_\mu \frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(x')} \nabla_\nu \varphi + \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(x')} \right) + F^2 \frac{\delta e^{-2\alpha\varphi(x)}}{\delta \varphi(x')} \right\} \\ &= - \int dx^4 \{ \nabla_\mu [4\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta^4(x-x') \nabla_\nu \varphi] - 4\sqrt{-g} \delta^4(x-x') \square \varphi + \\ &\quad + (-2\alpha) \sqrt{-g} e^{-2\alpha\varphi} F^2 \delta^4(x-x') \} \\ &= 2\sqrt{-g'} [2\square' \varphi(x') + \alpha e^{-2\alpha\varphi(x')} F'^2], \end{aligned}$$



onde usamos a integração por partes, a simetria das componentes da métrica, que integrais de divergências totais se anulam e  $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ . Obtemos então de (2.4)

$$\square\varphi(x) + \frac{\alpha}{2}e^{-2\alpha\varphi(x)}F^2 = 0. \quad (2.5)$$

Se  $g^{\mu\nu}$ ,  $g$  e  $C^{\mu\nu}$  forem respectivamente a inversa, o determinante e o cofator de  $g_{\mu\nu}$ , então:

$$\begin{aligned} g &= C^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \Rightarrow C^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu} \\ \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} &= gg^{\mu\nu} \\ \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial(-g)}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \frac{(-g)}{\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \\ \frac{\delta\sqrt{-g(x)}}{\delta g_{\mu\nu}(x')} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta^4(x-x') \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda})}{\partial g_{\alpha\beta}} &= \frac{\partial(\delta_\mu^\lambda)}{\partial g_{\alpha\beta}} = 0 = g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} + g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\nu\lambda}}{\partial g_{\alpha\beta}} \Rightarrow \\ g^{\theta\mu}g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\nu\lambda}}{\partial g_{\alpha\beta}} &= -g^{\theta\mu}g^{\mu\nu} \frac{\partial(\delta_\mu^\omega \delta_\nu^\rho g_{\omega\rho})}{\partial g_{\alpha\beta}} \Rightarrow \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} \Rightarrow \\ \frac{\delta g^{\mu\nu}(x)}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta^4(x-x'). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Com o auxílio de um referencial privilegiado onde as conexões se anulam num ponto, mas podendo ser mostradas em geral, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \stackrel{\circ}{=} 0 &\Rightarrow R^\alpha_{\beta\mu\nu} \stackrel{\circ}{=} \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Rightarrow \\ \delta R^\alpha_{\beta\mu\nu} \stackrel{\circ}{=} \partial_\mu (\delta \Gamma^\alpha_{\beta\nu}) - \partial_\nu (\delta \Gamma^\alpha_{\mu\beta}) &\stackrel{\circ}{=} \nabla_\mu (\delta \Gamma^\alpha_{\beta\nu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\alpha_{\mu\beta}) \Rightarrow \\ \delta R^\alpha_{\beta\alpha\nu} \stackrel{\circ}{=} \delta R_{\beta\nu} \stackrel{\circ}{=} \nabla_\alpha (\delta \Gamma^\alpha_{\beta\nu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde “ $\stackrel{\circ}{=}$ ” representa a igualdade somente para a escolha do referencial privilegiado.

As equações de movimento para “ $g_{\alpha\beta}$ ” são:

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} = 0. \quad (2.9)$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} &= \int dx^4 \left\{ \mathcal{R} \frac{\delta \sqrt{-g(x)}}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \frac{\delta g^{\mu\nu}(x)}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g_{\alpha\beta}} + \right. \\
&\quad \left. - 2 \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \left( g^{\mu\nu} \frac{\delta \sqrt{-g(x)}}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} + \sqrt{-g} \frac{\delta g^{\mu\nu}(x)}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{-2\alpha\varphi} \left[ F^2 \frac{\delta \sqrt{-g(x)}}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} + \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\sigma\gamma} \left( g^{\nu\gamma} \frac{\delta g^{\mu\sigma}(x)}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} + g^{\mu\sigma} \frac{\delta g^{\nu\gamma}(x)}{\delta g_{\alpha\beta}(x')} \right) \right] \right\} \\
&= \int dx^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\delta R_{\mu\nu}}{\delta g_{\alpha\beta}} + \int dx^4 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \mathcal{R} + \sqrt{-g} (-g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}) R_{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. - 2 \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \left[ g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} (-g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu}) \right] + \right. \\
&\quad \left. - e^{-2\alpha\varphi} \left[ F^2 \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} + \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\sigma\gamma} (-1) (g^{\nu\gamma} g^{\mu\alpha} g^{\sigma\beta} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\alpha} g^{\gamma\beta}) \right] \right\} \delta^4(x-x') \\
&= - \int dx^4 \delta^4(x-x') \sqrt{-g} \left\{ \left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \mathcal{R} \right) + 2 \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} \right) + \right. \\
&\quad \left. - 2 e^{-2\alpha\varphi} \left( F^{\alpha\mu} F^\beta{}_\mu - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^2 \right) \right\},
\end{aligned}$$

onde usamos (2.6), (2.7) e (2.8), as propriedades de simetria das componentes do tensor de Maxwell e da métrica, e que integrais de divergências totais se anulam. Então de (2.9), temos:

$$G^{\mu\nu} = 2T_\varphi^{\mu\nu} + 2e^{-2\alpha\varphi} T_M^{\mu\nu} \quad (2.10)$$

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{R} \quad (2.11)$$

$$T_\varphi^{\mu\nu} = \nabla_\alpha \varphi \nabla_\beta \varphi \left( g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \quad (2.12)$$

$$T_M^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (2.13)$$

Podemos destacar algumas propriedades:

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} G^{\mu\nu} &= -\mathcal{R} \\
g_{\mu\nu} T_\varphi^{\mu\nu} &= -g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \varphi \nabla_\beta \varphi \\
g_{\mu\nu} T_M^{\mu\nu} &= 0 \\
T &= 2g_{\mu\nu} (T_\varphi^{\mu\nu} + e^{-2\alpha\varphi} T_M^{\mu\nu}) = -2g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \varphi \nabla_\beta \varphi \\
T &= -\mathcal{R}.
\end{aligned} \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.10) obtemos:

$$R^{\mu\nu} = 2T_{\varphi}^{\mu\nu} + 2e^{-2\alpha\varphi}T_M^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\varphi\nabla_{\beta}\varphi. \quad (2.15)$$

## 2.2 As Equações de Campo e o Modelo para a Geometria

Agora vamos estabelecer nosso modelo geométrico definindo uma métrica para o espaço-tempo. Para isso, primeiramente impomos as simetrias que nos fornecerão a física que queremos descrever. Impondo um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, podemos escrever o elemento de linha da seguinte forma:

$$\begin{aligned} dS^2 &= U(r) dt^2 - U^{-1}(r) dr^2 - R^2(r) d\Omega^2 \\ d\Omega^2 &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Agora que o espaço-tempo está estabelecido, vamos calcular os objetos geométricos associados a ele. Dado o elemento de linha (2.16), podemos calcular as componentes da conexão através da métrica, utilizando a fórmula:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}).$$

Adotaremos a representação “(’)” para a derivação em relação a coordenada “r”. Então as componentes não nulas da conexão são:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{00} &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{00} = \frac{UU'}{2} \\ \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{11} = -\frac{U'}{2U} \\ \Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2}g^{00}\partial_1g_{00} = \frac{U'}{2U} \\ \Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{22} = -URR' \\ \Gamma^1_{33} &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{33} = -URR'\sin^2\theta \\ \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2}g^{22}\partial_1g_{22} = \frac{R'}{R} \\ \Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2g_{33} = -\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{31} &= \frac{1}{2}g^{33}\partial_1g_{33} = \frac{R'}{R} \\ \Gamma^3_{32} &= \frac{1}{2}g^{33}\partial_2g_{33} = \cot\theta.\end{aligned}$$

Calculando as componentes não nulas do tensor de Ricci, notando que nossa convenção é

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu},$$

obtemos

$$\begin{aligned}R_{00} &= \partial_\mu\Gamma^\mu_{00} - \partial_0\Gamma^\mu_{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{00} - \Gamma^\mu_{0\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu 0} \\ &= \partial_1\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00}(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) - 2\Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} \\ &= \frac{UU''}{2} + UU'\frac{R'}{R}\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}R_{11} &= \partial_\mu\Gamma^\mu_{11} - \partial_1\Gamma^\mu_{\mu 1} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{11} - \Gamma^\mu_{1\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu 1} \\ &= \partial_1\Gamma^1_{11} - \partial_1(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) + \Gamma^1_{11}(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) + \\ &\quad - (\Gamma^0_{01})^2 - (\Gamma^1_{11})^2 - (\Gamma^2_{21})^2 - (\Gamma^3_{31})^2 \\ &= -\left(\frac{U''}{2U} + 2\frac{R'}{R} + \frac{U'R'}{UR}\right)\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}R_{22} &= \partial_\mu\Gamma^\mu_{22} - \partial_2\Gamma^\mu_{\mu 2} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{22} - \Gamma^\mu_{2\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu 2} \\ &= \partial_1\Gamma^1_{22} - \partial_2\Gamma^3_{32} + \Gamma^1_{22}(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) - 2\Gamma^1_{22}\Gamma^2_{21} - (\Gamma^3_{32})^2 \\ &= -(URR' - r)'\end{aligned}\tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}R_{33} &= \partial_\mu\Gamma^\mu_{33} - \partial_3\Gamma^\mu_{\mu 3} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{33} - \Gamma^\mu_{3\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu 3} \\ &= \partial_1\Gamma^1_{33} + \partial_2\Gamma^2_{33} + \Gamma^1_{33}(\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) + \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{32} - 2\Gamma^1_{33}\Gamma^3_{31} - 2\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{32} \\ &= -\sin^2\theta(URR' - r)'.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Agora vamos impor as restrições de simetria do espaço-tempo ao tensor de Maxwell

$$\{F^{\mu\nu}\} = \begin{bmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{bmatrix},$$

que resulta em existência somente das componentes  $F^{10} = -F^{01}$  e com dependência somente em “ $r$ ”. Também impomos que o campo escalar “ $\varphi$ ” dependa somente de “ $r$ ”. Então, obtemos para (2.3):

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu} [e^{-2\alpha\varphi} F^{\mu\nu}] &= 0 \\ \partial_{\mu} [e^{-2\alpha\varphi} F^{\mu\nu}] + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} [e^{-2\alpha\varphi} F^{\lambda\nu}] + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} [e^{-2\alpha\varphi} F^{\mu\lambda}] &= 0 \\ \partial_0 [e^{-2\alpha\varphi} F^{0\nu}] + \partial_1 [e^{-2\alpha\varphi} F^{1\nu}] + \partial_2 [e^{-2\alpha\varphi} F^{2\nu}] + \partial_3 [e^{-2\alpha\varphi} F^{3\nu}] + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} [e^{-2\alpha\varphi} F^{\lambda\nu}] &= 0 \\ \partial_1 [e^{-2\alpha\varphi} F^{1\nu}] + [\Gamma^0_{0\lambda} + \Gamma^1_{1\lambda} + \Gamma^2_{2\lambda} + \Gamma^3_{3\lambda}] [e^{-2\alpha\varphi} F^{\lambda\nu}] &= 0.\end{aligned}$$

Para “ $\nu = 0$ ”

$$\begin{aligned}\partial_1 [e^{-2\alpha\varphi} F^{10}] + [\Gamma^0_{0\lambda} + \Gamma^1_{1\lambda} + \Gamma^2_{2\lambda} + \Gamma^3_{3\lambda}] [e^{-2\alpha\varphi} F^{\lambda 0}] &= 0 \\ \partial_1 [e^{-2\alpha\varphi} F^{10}] + [\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}] [e^{-2\alpha\varphi} F^{10}] &= 0.\end{aligned}$$

Resolvendo a equação diferencial encontramos

$$F^{10}(r) = x_0 e^{2\alpha\varphi(r)} \exp \left[ - \int dr (\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) \right].$$

Substituindo as componentes da conexão obtemos

$$\begin{aligned}F^{10}(r) &= x_0 e^{2\alpha\varphi(r)} \exp \left[ -2 \int \frac{dR}{R} \right] \\ F^{10}(r) &= Q \frac{e^{2\alpha\varphi(r)}}{R^2(r)}\end{aligned}\tag{2.21}$$

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int e^{-2\alpha\varphi} F^{10} \sqrt{-g} d\theta d\phi.\tag{2.22}$$

Então, usando (2.21) e (2.16), obtemos que a dupla contração das componentes do tensor de Maxwell é:

$$F^2 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2F_{10}F^{10} = 2g_{00}g_{11} (F^{10})^2 = -2Q^2 \frac{e^{4\alpha\varphi}}{R^4}.\tag{2.23}$$

Agora podemos calcular de (2.13), (2.21) e (2.23) as componentes não nulas do tensor momentum-energia de Maxwell, temos:

$$T_M^{00} = F^{0\mu} F_{\mu}^0 - \frac{1}{4} g^{00} F^2 = \frac{1}{4} g^{00} F^2 = -\frac{1}{2U} \left( Q^2 \frac{e^{4\alpha\varphi}}{R^4} \right) \quad (2.24)$$

$$T_M^{11} = F^{1\mu} F_{\mu}^1 - \frac{1}{4} g^{11} F^2 = \frac{1}{4} g^{11} F^2 = \frac{U}{2} \left( Q^2 \frac{e^{4\alpha\varphi}}{R^4} \right) \quad (2.25)$$

$$T_M^{22} = F^{2\mu} F_{\mu}^2 - \frac{1}{4} g^{22} F^2 = -\frac{1}{4} g^{22} F^2 = -\frac{1}{2R^2} \left( Q^2 \frac{e^{4\alpha\varphi}}{R^4} \right) \quad (2.26)$$

$$T_M^{33} = F^{3\mu} F_{\mu}^3 - \frac{1}{4} g^{33} F^2 = -\frac{1}{4} g^{33} F^2 = -\frac{1}{2R^2 \sin^2 \theta} \left( Q^2 \frac{e^{4\alpha\varphi}}{R^4} \right), \quad (2.27)$$

confirmando a propriedade já mencionada

$$T_M = g_{\mu\nu} T_M^{\mu\nu} = g_{00} T_M^{00} + g_{11} T_M^{11} + g_{22} T_M^{22} + g_{33} T_M^{33} = 0.$$

Também podemos calcular de (2.12) as componentes não nulas do tensor momentum-energia do campo escalar “ $\varphi$ ”, que são:

$$T_{\varphi}^{00} = \nabla_{\alpha} \varphi \nabla_{\beta} \varphi \left( g^{0\alpha} g^{0\beta} - \frac{1}{2} g^{00} g^{\alpha\beta} \right) = -\frac{1}{2} g^{00} g^{11} (\varphi')^2 = \frac{1}{2} (\varphi')^2 \quad (2.28)$$

$$T_{\varphi}^{11} = \nabla_{\alpha} \varphi \nabla_{\beta} \varphi \left( g^{1\alpha} g^{1\beta} - \frac{1}{2} g^{11} g^{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{2} (g^{11})^2 (\varphi')^2 = \frac{U^2}{2} (\varphi')^2 \quad (2.29)$$

$$T_{\varphi}^{22} = \nabla_{\alpha} \varphi \nabla_{\beta} \varphi \left( g^{2\alpha} g^{2\beta} - \frac{1}{2} g^{22} g^{\alpha\beta} \right) = -\frac{1}{2} g^{22} g^{11} (\varphi')^2 = -\frac{U}{2R^2} (\varphi')^2 \quad (2.30)$$

$$T_{\varphi}^{33} = \nabla_{\alpha} \varphi \nabla_{\beta} \varphi \left( g^{3\alpha} g^{3\beta} - \frac{1}{2} g^{33} g^{\alpha\beta} \right) = -\frac{1}{2} g^{33} g^{11} (\varphi')^2 = -\frac{U}{2R^2 \sin^2 \theta} (\varphi')^2. \quad (2.31)$$

Então, colecionando os resultados obtidos de (2.17) a (2.20) e de (2.24) a (2.31), temos que as equações (2.15) ficam:

$$\begin{aligned} (g^{00})^2 R_{00} &= 2T_{\varphi}^{00} + 2e^{-2\alpha\varphi} T_M^{00} + g^{00} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \varphi \nabla_{\beta} \varphi \\ &\frac{U''}{2U} + \frac{U'R'}{UR} + \frac{1}{U} \left( Q^2 \frac{e^{2\alpha\varphi}}{R^4} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} (g^{11})^2 R_{11} &= 2T_{\varphi}^{11} + 2e^{-2\alpha\varphi} T_M^{11} + g^{11} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \varphi \nabla_{\beta} \varphi \\ &\frac{U''}{2U} + \frac{U'R'}{UR} + \frac{1}{U} \left( Q^2 \frac{e^{2\alpha\varphi}}{R^4} \right) + 2 \left[ \frac{R''}{R} + (\varphi')^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
(g^{22})^2 R_{22} &= 2T_\varphi^{22} + 2e^{-2\alpha\varphi}T_M^{22} + g^{22}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\varphi\nabla_\beta\varphi \\
[URR' - r]' - R^2 \left( Q^2 \frac{e^{2\alpha\varphi}}{R^4} \right) &= 0 \\
(g^{33})^2 R_{33} &= 2T_\varphi^{33} + 2e^{-2\alpha\varphi}T_M^{33} + g^{33}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\varphi\nabla_\beta\varphi \\
[URR' - r]' - R^2 \left( Q^2 \frac{e^{2\alpha\varphi}}{R^4} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Vemos que as equações de campo (2.3), (2.5), (2.32), (2.33) e (2.34) são equações diferenciais ordinárias não-lineares e acopladas.

### 2.3 Soluções Exatas do Buraco Negro Dilatônico Carregado

Como vimos na seção anterior, as equações de campo (2.3), (2.5), (2.32), (2.33) e (2.34) são equações diferenciais ordinárias não-lineares e acopladas. Então, para resolvê-las, só nos resta o método das tentativas, que consiste basicamente em arrumar as equações em equações de derivadas totais e as combinar, na tentativa de desacoplá-las. Então, subtraindo (2.33) de (2.32) obtemos:

$$(\varphi')^2 = -\frac{R''}{R}. \tag{2.35}$$

Agora, somando (2.32) com o produto de  $\frac{1}{UR^2}$  por (2.34), obtemos:

$$\frac{U''}{2U} + \frac{U'R'}{UR} + \frac{[URR' - r]'}{UR^2} = 0,$$

que integrando resultará em:

$$UR^2 = (r - r_+)(r - r_-), \tag{2.36}$$

onde  $r_+$  e  $r_-$  são constantes de integração. Agora vamos calcular o D'Alambertiano de  $\varphi$ . Temos:

$$\begin{aligned}
\Box\varphi &= \partial_\nu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu\varphi] \\
&= \partial_1 [\sqrt{-g} g^{11} \partial_1\varphi].
\end{aligned}$$

Substituindo a componente da métrica e a raiz do determinante, vem

$$\square\varphi = -\frac{1}{R^2} [UR^2\varphi']' . \quad (2.37)$$

Usando (2.5) temos:

$$\frac{1}{\alpha}\square\varphi = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha\varphi}F^2 . \quad (2.38)$$

De (2.23), (2.34), (2.37) e (2.38) vemos que:

$$\begin{aligned} [URR' - r]' &= -\frac{R^2e^{-2\alpha\varphi}}{2} \left( -2Q^2\frac{e^{4\alpha\varphi}}{R^4} \right) = -\frac{1}{2}e^{-2\alpha\varphi}F^2R^2 = \frac{R^2}{\alpha}\square\varphi \\ &= -\frac{[UR^2\varphi']'}{\alpha} \\ &\Rightarrow [\alpha URR' - \alpha r + UR^2\varphi']' = 0 \\ &\Rightarrow \varphi' = \frac{\alpha r - r_0}{UR^2} - \alpha \left( \frac{R'}{R} \right) = P(r) - \alpha \left( \frac{R'}{R} \right) , \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde  $r_0$  é uma constante de integração.

Substituindo (2.39) em (2.35), obtemos:

$$\frac{R''}{R} + \alpha^2 \left( \frac{R'}{R} \right)^2 - 2\alpha P(r) \left( \frac{R'}{R} \right) + P^2(r) = 0 \quad (2.40)$$

$$P(r) = \frac{\alpha r - r_0}{UR^2} = \frac{\alpha r - r_0}{(r - r_+)(r - r_-)} , \quad (2.41)$$

escolhendo “ $r_0 = \alpha r_+$ ” e substituindo em (2.41), temos

$$P(r) = \frac{\alpha}{(r - r_-)} . \quad (2.42)$$

Agora vamos supor que:

$$R^2(r) = r^k (r - r_-)^l ; k, l \in \mathfrak{R} , \quad (2.43)$$



então

$$2RR' = 2r^k (r - r_-)^l \left[ \frac{k}{2r} + \frac{l}{2(r - r_-)} \right]$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{2} \left[ \frac{k}{r} + \frac{l}{(r - r_-)} \right] \quad (2.44)$$

$$\left( \frac{R'}{R} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[ \frac{k^2}{r^2} + \frac{2kl}{r(r - r_-)} + \frac{l^2}{(r - r_-)^2} \right] \quad (2.45)$$

$$\left( \frac{R'}{R} \right)' = \frac{R''}{R} - \left( \frac{R'}{R} \right)^2 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{k}{r^2} + \frac{l}{(r - r_-)^2} \right]$$

$$\frac{R''}{R} = \frac{1}{4} \left[ \frac{k^2 - 2k}{r^2} + \frac{2kl}{r(r - r_-)} + \frac{l^2 - 2l}{(r - r_-)^2} \right]. \quad (2.46)$$

Usando (2.42), (2.44), (2.45) e (2.46) em (2.40), temos:

$$\frac{1}{4} \left[ \frac{(1 + \alpha^2)k^2 - 2k}{r^2} + 2 \frac{(1 + \alpha^2)kl - 2\alpha^2 k}{r(r - r_-)} + \frac{(1 + \alpha^2)l^2 - 2(1 + 2\alpha^2)l + 4\alpha^2}{(r - r_-)^2} \right] = 0,$$

a igualdade só é satisfeita quando

$$l = l_1 \text{ ou } l_2$$

$$k = k_1 \text{ ou } k_2$$

$$l_1 = 2 \quad ; \quad l_2 = 1 - \gamma$$

$$k_1 = 0 \quad ; \quad k_2 = 1 + \gamma$$

$$\gamma = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2}. \quad (2.47)$$

Como

$$\alpha \in (-\infty; +\infty)$$

$$\gamma \in (-1; +1),$$

então uma possível solução geral para (2.43) será:

$$R^2 = r^{k_2} (r - r_-)^{l_2} = r^{1+\gamma} (r - r_-)^{1-\gamma} = r^2 \left( 1 - \frac{r_-}{r} \right)^{1-\gamma}$$

$$R^2(r) = r^2 \left( 1 - \frac{r_-}{r} \right)^{1-\gamma}, \quad (2.48)$$

que substituindo em (2.36), obtemos:

$$U(r) = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^\gamma, \quad (2.49)$$

e (2.39) fica

$$\begin{aligned} \int_\infty^r dr \frac{d\varphi}{dr} &= \alpha \left[ \int_\infty^r \frac{dr}{(r - r_-)} - \int_\infty^r dr \frac{dR}{dr} \frac{1}{R} \right] \\ \varphi(r) - \varphi_\infty &= \alpha \ln \left[ \frac{(r - r_-)}{R} \right] \\ e^{2\alpha\varphi} &= e^{2\alpha\varphi_\infty} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{1-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Substituindo (2.50) e (2.48) em (2.21), temos:

$$F = \frac{Q e^{2\alpha\varphi_\infty}}{r^2} dr \wedge dt.$$

Finalmente, o elemento de linha (2.16) para nossa solução fica:

$$dS^2 = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^\gamma dt^2 - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\gamma} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{1-\gamma} d\Omega. \quad (2.51)$$

Esta é uma solução exata de um espaço-tempo esfericamente simétrico, assintoticamente plano (AP) que tem um buraco negro (BN) eletricamente carregado e estático, com horizonte interno “ $r_-$ ” e horizonte externo “ $r_+$ ”, que estão relacionados com os parâmetros físicos massa e carga do buraco negro através de:

$$M = \frac{r_+ + \gamma r_-}{2} \quad (2.52)$$

$$Q = e^{-\alpha\varphi_\infty} \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{r_+ r_-}, \quad (2.53)$$

onde calculamos esses resultados no apêndice “A”. Também, como o parâmetro  $\gamma$  varia continuamente entre -1 e 1, temos infinitas soluções exatas de BN eletricamente carregados em (2.51).

Podemos calcular, através da propriedade (2.14), o escalar de curvatura deste espaço-tempo usando o traço do tensor momentum-energia total que é:

$$\begin{aligned} T &= -2g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \\ &= 2U(r) (\varphi')^2. \end{aligned}$$

De (2.50), determinamos

$$\varphi'(r) = \left( \frac{1-\gamma}{2\alpha} \right) \frac{r_-}{r(r-r_-)},$$

então:

$$T = 2 \left( \frac{1-\gamma}{2\alpha} \right)^2 \frac{r_-^2}{r^2 (r-r_-)^2} \left( 1 - \frac{r_+}{r} \right) \left( 1 - \frac{r_-}{r} \right)^\gamma,$$

logo, de (2.14) obtemos

$$\mathcal{R} = -2r_-^2 \left( \frac{1-\gamma}{2\alpha} \right)^2 \frac{(r-r_+)(r-r_-)^{\gamma-2}}{r^{3+\gamma}}. \quad (2.54)$$

Como  $\gamma \in (-1; +1)$ , vemos que existe uma singularidade em  $r = 0$ , e uma divergência em  $\mathcal{R}$  quando  $r = r_-$ , e que no limite em que “ $r \rightarrow \infty$ ”,  $\mathcal{R}$  se anula. Entretanto  $\mathcal{R}$  é regular em  $r = r_+$ .

## 2.4 Temperatura de Hawking para o Buraco Negro Assintoticamente Plano

Nesta seção, estamos interessados em fazer uma análise semi-clássica da gravitação do buraco negro dilatônico, ou seja, quantizar outros campos chamados campos de matéria, e deixar o campo gravitacional como campo clássico de fundo. Então faremos a termodinâmica semi-clássica de buracos negros, iniciada por Hawking [17] e desenvolvida por outros autores ([20]-[25], [27], ver uma formulação clássica e semi-clássica em [7]), calculando a temperatura através do método da gravidade superficial.

A gravidade superficial de um buraco negro ([7],[15] e [27]) é dada pela expressão:

$$\kappa = \left[ \frac{g'_{00}}{2\sqrt{-g_{00}g_{11}}} \right]_{r=r_H}, \quad (2.55)$$

e a temperatura de Hawking([7],[15] e [27]) do buraco negro será:

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (2.56)$$

Então, para o caso do buraco negro (2.51), temos que a gravidade superficial (2.55) é

$$\kappa_{AP} = \frac{(r_+ - r_-)^\gamma}{2r_+^{1+\gamma}}, \quad (2.57)$$

e a temperatura de Hawking (2.56) neste caso será:

$$T_{AP} = \frac{(r_+ - r_-)^\gamma}{4\pi r_+^{1+\gamma}}. \quad (2.58)$$

## 2.5 Temperatura de Hawking para o Buraco Negro Assintoticamente Não Plano

Nesta seção, vamos obter uma propriedade muito interessante do buraco negro dilatônico. Fazendo uma transformação de coordenadas, que não é um difeomorfismo, podemos obter de um buraco negro assintoticamente plano um outro buraco negro assintoticamente não plano (ANP). A transformação de coordenadas que realiza o processo de mudança da geometria AP para a geometria ANP é chamada de limite extremo-próximo ao horizonte, pois a geometria que surge é parecida com a de um buraco negro extremo do caso dilatônico eletricamente carregado, devido à semelhança entre o buraco negro original, que possui horizontes externo e interno, e o novo buraco negro, que contém um único horizonte, o de eventos. Esta transformação de coordenadas dá a impressão que só é válida próximo ao horizonte, daí o nome próximo ao horizonte. Como veremos, impomos um limite que tornará as transformações de coordenadas singulares, modificando assim as propriedades físicas dos buracos negros obtidos.

A transformação de coordenadas que leva o BN AP no BN ANP é:

$$\begin{aligned} r_- &= \varepsilon^{-\alpha^2} r_0 \\ r_+ &= r_- + \varepsilon b \\ r &= r_- + \varepsilon \bar{r} \\ t &= \varepsilon^{-1} \bar{t} \\ \varphi_\infty &= \frac{1}{\alpha} \ln \beta - \alpha \ln \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.59)$$

então:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^\gamma &= \frac{\varepsilon^2 \bar{r}^\gamma (\bar{r} - b)}{r_0^{1+\gamma} \left(1 + \varepsilon^{1+\alpha^2} \frac{\bar{r}}{r_0}\right)^{1+\gamma}} \\
r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{1-\gamma} &= r_0^{1+\gamma} \bar{r}^{1-\gamma} \left(1 + \varepsilon^{1+\alpha^2} \frac{\bar{r}}{r_0}\right)^{1+\gamma} \\
e^{2\alpha\varphi} &= \beta^2 \left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right)^{1-\gamma} \left(1 + \varepsilon^{1+\alpha^2} \frac{\bar{r}}{r_0}\right)^{\gamma-1} \\
F &= \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\beta}{r_0} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^{1+\alpha^2} \frac{b}{r_0}}}{\left(1 + \varepsilon^{1+\alpha^2} \frac{\bar{r}}{r_0}\right)^2} d\bar{r} \wedge d\bar{t},
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Substituindo (2.60) em (2.51) e fazendo o limite em que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o que faz com que (2.59) não seja mais uma simples transformação de coordenadas, e a mudança ( $\bar{r} \rightarrow r$ ;  $\bar{t} \rightarrow t$ ), temos:

$$dS^2 = \frac{r^\gamma (r - b)}{r_0^{1+\gamma}} dt^2 - \frac{r_0^{1+\gamma}}{r^\gamma (r - b)} dr^2 - r_0^{1+\gamma} r^{1-\gamma} d\Omega, \tag{2.61}$$

que é uma solução de um BN ANP, com um horizonte de eventos “ $b$ ” somente, ao contrário do anterior que possuía dois horizontes, um interno e outro externo. E os novos parâmetros ( $r_0; \beta; b$ ) estão relacionados com os parâmetros físicos massa e carga por:

$$M = \frac{(1 - \gamma)}{4} b \tag{2.62}$$

$$Q = \frac{r_0}{\beta} \sqrt{\frac{(1 + \gamma)}{2}}, \tag{2.63}$$

onde (2.63) pode ser calculada fazendo a transformação (2.59) em (2.53) e o limite em que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , sendo que a massa foi calculada no apêndice “A”. Também podemos calcular o escalar de curvatura deste espaço-tempo. Fazendo a transformação de coordenadas (2.59) em (2.54) e tomando o limite em que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , após fazendo a mudança ( $\bar{r} \rightarrow r$ ) obtemos o escalar de curvatura do espaço-tempo ANP como sendo:

$$\mathcal{R}_{ANP} = - \left(\frac{1 - \gamma^2}{2}\right) \frac{(r - b) r^{\gamma-2}}{r_0^{1+\gamma}}. \tag{2.64}$$

Note que este é regular em  $r = b \neq 0$ . Se  $r \gg 1$ , então

$$\mathcal{R}_{ANP} \propto r^{\gamma-1}, \tag{2.65}$$

como  $\gamma - 1 < 0$ , então (2.65) nos mostra que  $\mathcal{R}_{ANP}$  decresce quando  $r$  aumenta, e no limite em que “ $r \rightarrow \infty$ ”,  $\mathcal{R}_{ANP}$  se anula. Também vemos que existe uma singularidade em “ $r = 0$ ”, como no caso do BN AP.

Usando (2.61) em (2.55) para calcular a gravidade superficial do BN ANP temos que:

$$\begin{aligned}\kappa_{ANP} &= \left[ \frac{g'_{00}}{2\sqrt{-g_{00}g_{11}}} \right]_{r=b} \\ &= \frac{b^\gamma}{2r_0^{1+\gamma}},\end{aligned}\tag{2.66}$$

substituindo (2.66) em (2.56), obtemos a temperatura de Hawking para o BN ANP:

$$T_{ANP} = \frac{\kappa_{ANP}}{2\pi} = \frac{b^\gamma}{4\pi r_0^{1+\gamma}}.\tag{2.67}$$

## 2.6 Temperatura de Hawking para os Modelos de Cordas a Baixas Energias

Nesta seção, vamos calcular a temperatura de Hawking para todos os modelos de cordas a baixas energias acopladas somente com o campo eletromagnético, com as restrições que impomos para obter o elemento de linha (2.16) e o campo de Maxwell (2.21). A análise semi-clássica para esses modelos de cordas é possível porque ela será feita a uma escala de energia em que é válida tanto a análise semi-clássica quanto a teoria de cordas em 4 dimensões. Passaremos da teoria EMD para a Teoria de Cordas (TC) a baixas energias por uma transformação conforme, onde na literatura usa-se os termos “*referencial de Einstein*” para a teoria EMD e “*referencial de Cordas*” para os modelos da TC. Também, logo mais a frente, ficará clara a razão de falarmos que calcularemos a temperatura de Hawking para todos os modelos da TC; o parâmetro  $\alpha$  que introduzimos na ação (2.1) pode variar em qualquer valor real, obtendo assim, para um valor fixo escolhido de  $\alpha$ , os possíveis modelos da TC. Exemplos disto podem ser encontrados nas referências [1]-[4].

Agora estamos interessados em obter os modelos de cordas para os buracos negros, tanto os AP (2.51) quanto os ANP (2.61). Para isso vamos primeiramente analisar a ação (2.1), generalizada mediante uma transformação conforme.

Uma transformação conforme leva de uma variedade “ $M$ ” com métrica “ $g_{\mu\nu}$ ” para a mesma variedade “ $M$ ” com métrica “ $\bar{g}_{\mu\nu}$ ”, preservando ângulos e razões entre objetos geométricos (ver apêndice B, [7], [18]). A relação entre as métricas se dá pela função

$\Omega(x^\alpha)$  que é diferenciável e estritamente positiva:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (2.68)$$

então, de (B.1) e (B.5) temos:

$$g^{\mu\nu} = \Omega^2 \bar{g}^{\mu\nu} \quad (2.69)$$

$$\det [\bar{g}_{\mu\nu}] = \bar{g} = \det [\Omega^2 g_{\mu\nu}] = \Omega^{2D} g$$

$$\sqrt{-g} = \Omega^{-D} \sqrt{-\bar{g}} \quad (2.70)$$

$$\bar{\mathcal{R}} = \Omega^{-2} [\mathcal{R} - 2(D-1) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \ln \Omega - (D-2)(D-1) g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \ln \Omega) (\nabla_\nu \ln \Omega)]$$

$$\mathcal{R} = \Omega^2 \bar{\mathcal{R}} + 2(D-1) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \ln \Omega + (D-2)(D-1) g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \ln \Omega) (\nabla_\nu \ln \Omega), \quad (2.71)$$

onde “ $D$ ” é a dimensão da variedade “ $M$ ”. Com o intuito de obtermos os modelos de cordas, vamos escolher um fator conforme geral

$$\Omega = \exp \left[ \frac{2\omega\varphi}{(D-2)} \right], \quad (2.72)$$

onde  $\omega$  é um novo parâmetro real, cuja introdução nos possibilitará a obtenção dos modelos da TC. Então, substituindo (2.72) em (2.69)-(2.71) temos:

$$g^{\mu\nu} = \exp \left[ \frac{4\omega\varphi}{(D-2)} \right] \bar{g}^{\mu\nu} \quad (2.73)$$

$$\sqrt{-g} = \exp \left[ \frac{-2\omega D\varphi}{(D-2)} \right] \sqrt{-\bar{g}} \quad (2.74)$$

$$\mathcal{R} = \exp \left[ \frac{4\omega\varphi}{(D-2)} \right] \bar{\mathcal{R}} + \nabla_\mu \nabla_\nu \left[ \frac{4\omega(D-1)g^{\mu\nu}\varphi}{(D-2)} \right] + \frac{4\omega^2(D-1)}{(D-2)} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi. \quad (2.75)$$

A ação (2.1) generalizada é:

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left\{ \mathcal{R} - \frac{B}{(D-2)} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \exp \left[ \frac{-4\alpha\varphi}{(D-2)} \right] F^2 \right\}. \quad (2.76)$$

onde  $B$  é uma constante arbitrária.

Fazendo as transformações (2.73), (2.74) e (2.75) em (2.76), teremos:

$$S = \int d^D x \sqrt{-\bar{g}} e^{-2\omega\varphi} \left\{ \bar{\mathcal{R}} + \left[ \frac{4\omega^2(D-1) - B}{(D-2)} \right] \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \varphi \bar{\nabla}_\nu \varphi - \exp \left[ \frac{4\varphi(\omega - \alpha)}{(D-2)} \right] \bar{F}^2 \right\}. \quad (2.77)$$

No nosso caso particular em que  $D = B = 4$ , temos que (2.69) e (2.77) se tornam:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} = e^{2\omega\varphi} g_{\mu\nu} = e^{2\omega\varphi_\infty} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{\omega}{\alpha}(1-\gamma)} g_{\mu\nu} \quad (2.78)$$

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{-2\omega\varphi} \left\{ \bar{\mathcal{R}} + (6\omega^2 - 2) \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \varphi \bar{\nabla}_\nu \varphi - e^{2\varphi(\omega-\alpha)} \bar{F}^2 \right\}, \quad (2.79)$$

onde a primeira expressão foi obtida de (2.50). Então, o elemento de linha (2.51) é levado a um elemento de linha conforme pela transformação (2.69). No caso particular em que  $\omega = \alpha$ , temos:

$$d\bar{S}^2 = e^{2\alpha\varphi_\infty} \left\{ \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{1-2\gamma} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{2(1-\gamma)} d\Omega \right\}. \quad (2.80)$$

O elemento de linha (2.51), está no referencial chamado de *referencial de Einstein*, enquanto o elemento de linha (2.80) se encontra no referencial chamado *referencial de Cordas*. A ação (2.79), que está no *referencial de Cordas*, pode ser classificada em:

### 1. Cordas Tipo I

Fazendo os parâmetros  $\omega = 2\alpha = 1$  em (2.79), obtemos:

$$S_I = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ e^{-2\varphi} \left[ \bar{\mathcal{R}} + 4\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \varphi \bar{\nabla}_\nu \varphi \right] - e^{-\varphi} \bar{F}^2 \right\}, \quad (2.81)$$

que é justo a ação de cordas tipo I em 4 dimensões [37].

### 2. Cordas Tipo IIA

Fazendo os parâmetros  $\omega = 1$ ;  $\alpha = 0$  em (2.79), obtemos:

$$S_{IIA} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ e^{-2\varphi} \left[ \bar{\mathcal{R}} + 4\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \varphi \bar{\nabla}_\nu \varphi \right] - \bar{F}^2 \right\}, \quad (2.82)$$

a qual é a ação de cordas tipo IIA em 4 dimensões [37].

### 3. Cordas Heteróticas

Fazendo os parâmetros  $\omega = \alpha = 1$  em (2.79), obtemos:

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{-2\varphi} \left\{ \bar{\mathcal{R}} + 4\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\mu \varphi \bar{\nabla}_\nu \varphi - \bar{F}^2 \right\}, \quad (2.83)$$



a qual é a ação de cordas heteróticas em 4 dimensões [37]. Uma observação é que na maioria dos casos em que existe campo de Maxwell no modelo de cordas tipo IIB a baixas energias em 4 dimensões, pode ser feita uma transformação na ação de cordas tipo IIB que leva à ação de cordas heteróticas (2.83). Portanto, não vamos citar o modelo de cordas tipo IIB aqui.

A gravidade superficial (2.55) do buraco negro conforme (2.80) será:

$$\begin{aligned}\bar{\kappa} &= \left[ \frac{\bar{g}'_{00}}{2\sqrt{-\bar{g}_{00}\bar{g}_{11}}} \right]_{r=r_H} \\ \bar{\kappa} &= \kappa + \left[ \frac{\Omega'}{\Omega} \sqrt{-\frac{g_{00}}{g_{11}}} \right]_{r=r_H}.\end{aligned}\quad (2.84)$$

Basta então calcularmos o segundo termo do lado direito de (2.84), para determinarmos a gravidade superficial do buraco negro conforme (2.80). Usando (2.51) e (2.72), temos:

$$\left[ \frac{\Omega'}{\Omega} \sqrt{-\frac{g_{00}}{g_{11}}} \right]_{r=r_H} = 0, \quad (2.85)$$

logo, de (2.57), (2.58) e (2.84), a temperatura de Hawking para o buraco negro dilatônico conforme é:

$$\bar{T}_{AP} = \frac{\bar{\kappa}}{2\pi} = T_{AP} = \frac{(r_+ - r_-)^\gamma}{4\pi r_+^{1+\gamma}}. \quad (2.86)$$

Calculamos inicialmente a temperatura de Hawking para o buraco negro dilatônico (2.51), que se encontra no *referencial de Einstein*, resultando em (2.58). Agora calculamos a temperatura de Hawking para o buraco negro dilatônico (2.80), que está no *referencial de Cordas* resultando em (2.86). Isso nos mostra uma propriedade muito útil, que é a **invariância conforme da temperatura de Hawking** dos buracos negros dilatônicos gerados por (2.51) e (2.80) variando o parâmetro  $\alpha$ .

Agora vamos calcular, para o caso em que  $\omega = \alpha$  em (2.79), a gravidade superficial e a temperatura de Hawking do buraco negro ANP conforme ao BN ANP (2.61). Podemos fazer isso generalizando as transformações de coordenadas (2.59) que levam do elemento AP (2.51) para o ANP (2.61). Para isso, basta encontrar uma transformação que não introduza divergências na métrica e que seja independente do termo que será levado a

zero no final, em todas as componentes da métrica. Podemos fazer isso através das transformações generalizadas

$$\begin{aligned}
r_- &= \varepsilon^{n_1} r_0 \\
r_+ &= r_- + \varepsilon^{n_2} b \\
r &= r_- + \varepsilon^{n_2} \bar{r} \\
t &= \varepsilon^{n_3} \bar{t} \\
\varphi_\infty &= n_4 \ln \beta - n_5 \ln \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.87}$$

As componentes da métrica (2.78) e o fator conforme, no caso em que  $\omega = \alpha$ , usando as transformações (2.87), são

$$\begin{aligned}
e^{2\alpha\varphi_\infty} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) &= \frac{\beta^{2\alpha n_4} \bar{r} (\bar{r} - b) \varepsilon^{2(n_2 - n_1 - \alpha n_5)}}{r_0^2 \left(1 + \varepsilon^{n_2 - n_1} \frac{\bar{r}}{r_0}\right)^2} \\
e^{2\alpha\varphi_\infty} \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{1-2\gamma} &= \beta^{2\alpha n_4} \frac{\bar{r}^{1-2\gamma} r_0^{2\gamma}}{(\bar{r} - b)} \left(1 + \varepsilon^{n_2 - n_1} \frac{\bar{r}}{r_0}\right)^{2\gamma} \varepsilon^{2(\gamma n_1 - \gamma n_2 - \alpha n_5)} \\
e^{2\alpha\varphi_\infty} r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{2(1-\gamma)} &= \beta^{2\alpha n_4} \bar{r}^{2(1-\gamma)} r_0^{2\gamma} \left(1 + \varepsilon^{n_2 - n_1} \frac{\bar{r}}{r_0}\right)^{2\gamma} \varepsilon^{2[\gamma n_1 + (1-\gamma)n_2 - \alpha n_5]} \\
e^{2\alpha\varphi} &= \beta^{2\alpha n_4} \left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right)^{(1-\gamma)} \varepsilon^{(1-\gamma)(n_2 - n_1) - 2\alpha n_5} \left(1 + \varepsilon^{n_2 - n_1} \frac{\bar{r}}{r_0}\right)^{\gamma-1}.
\end{aligned}$$

Substituindo no elemento de linha (2.80), teremos que ter as seguintes restrições para os expoentes de  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
-n_1 + n_2 + n_3 - \alpha n_5 &= 0 \\
\gamma n_1 + (1 - \gamma)n_2 - \alpha n_5 &= 0 \\
-(1 - \gamma)n_1 + (1 - \gamma)n_2 - 2\alpha n_5 &= 0 \\
-n_1 + n_2 &= m > 0,
\end{aligned} \tag{2.88}$$

que são satisfeitas escolhendo:

$$\begin{aligned}
n_1 &= -\frac{(1-\gamma)}{2}m \\
n_2 &= \frac{(1+\gamma)}{2}m \\
n_3 &= -\frac{(1+\gamma)}{2}m \\
n_4 &= l \\
n_5 &= \frac{(1-\gamma)}{2\alpha}m ; \quad l, m \in \mathfrak{R}^+ .
\end{aligned}$$

Com essa escolha generalizada, fazendo o limite em que  $\varepsilon \rightarrow 0$  e a mudança ( $\bar{r} \rightarrow r ; \bar{t} \rightarrow t$ ), teremos um novo elemento de linha que é de um espaço-tempo ANP conforme ao ANP (2.61), dado por:

$$d\bar{S}_{ANP}^2 = \beta^{2\alpha l} \left\{ \frac{r(r-b)}{r_0^2} dt^2 - \frac{r_0^{2\gamma} r^{1-2\gamma}}{(r-b)} dr^2 - r_0^{2\gamma} r^{2(1-\gamma)} d\Omega \right\} . \quad (2.89)$$

A gravidade superficial de (2.89) é:

$$\bar{\kappa}_{ANP} = \kappa_{ANP} + \left[ \frac{\Omega'}{\Omega} \sqrt{-\frac{g_{00}^{ANP}}{g_{11}^{ANP}}} \right]_{r=r_H} , \quad (2.90)$$

como

$$\left[ \frac{\Omega'}{\Omega} \sqrt{-\frac{g_{00}^{ANP}}{g_{11}^{ANP}}} \right]_{r=b} = 0 ,$$

então, de (2.66), (2.67) e (2.90), temos que a temperatura de Hawking para o BN ANP conforme (2.89) será:

$$\bar{T}_{ANP} = T_{ANP} = \frac{b^\gamma}{4\pi r_0^{1+\gamma}} . \quad (2.91)$$

Novamente, calculamos a temperatura do BN ANP (2.61) e a temperatura do BN ANP conforme (2.89) resultando no mesmo valor. Algumas observações aqui são de extrema importância. A primeira é que temos uma propriedade de invariância conforme da temperatura de Hawking de um buraco negro. Esta propriedade depende somente do segundo termo do lado direito de (2.84) ser nulo, o que não pode ser demonstrado em geral para todos os buracos negros, pois este termo pode resultar num valor diferente de zero, divergir ou até mesmo gerar uma indeterminação. A segunda é que o cálculo da temperatura

de Hawking para o caso do BN ANP conforme (2.89) poderia ser feito de uma maneira direta. Basta multiplicarmos o fator conforme, obtido usando as transformações (2.59) que levam o elemento de linha (2.51) em (2.61), pelo elemento de linha (2.61) e obteríamos o elemento de linha (2.89) diretamente, então poderia ser calculada a temperatura de Hawking (2.91) do caso ANP conforme. Mas existe uma sutileza neste caso: se primeiro multiplicamos o fator conforme (2.50) em cada componente do elemento de linha (2.51), e então fazemos as transformações (2.59), teremos que obedecer às restrições (2.88), obtidas para os expoentes do parâmetro “ $\varepsilon$ ”. Mas só obteremos uma métrica aceitável, sem divergências, no caso em que “ $\alpha = 0$  ou 1”, que resulta em perda de generalidade da ação (2.1).

Agora se considerarmos o caso da transformação conforme geral (2.78), temos que o elemento (2.51) fica:

$$d\widehat{S}^2 = e^{2\omega\varphi_\infty} \left\{ \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\gamma(1-\frac{\omega}{\alpha})+\frac{\omega}{\alpha}} dt^2 - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{\omega}{\alpha}-\gamma(1+\frac{\omega}{\alpha})} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{(1+\frac{\omega}{\alpha})(1-\gamma)} d\Omega \right\}. \quad (2.92)$$

Logo a gravidade superficial de (2.92) será:

$$\begin{aligned} \widehat{\kappa}_{AP} &= \left[ \frac{\widehat{g}'_{00}}{2\sqrt{-\widehat{g}_{00}\widehat{g}_{11}}} \right]_{r=r_H} \\ &= \frac{(r_+ - r_-)^\gamma}{2r_+^{1+\gamma}}. \end{aligned}$$

A temperatura de Hawking neste caso resulta em:

$$\widehat{T}_{AP} = T_{AP} = \frac{(r_+ - r_-)^\gamma}{4\pi r_+^{1+\gamma}}. \quad (2.93)$$

Vemos que no caso de um fator conforme geral (2.72) a temperatura de Hawking continua sendo invariante conforme. No caso do BN ANP conforme pelo fator (2.72) transformado por (2.87) para

$$e^{2\omega\varphi} = \beta^{2\omega l} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{\omega}{\alpha}(1-\gamma)}, \quad (2.94)$$

o elemento de linha (2.61), transformado por (2.94), fica:

$$d\widehat{S}_{ANP}^2 = \beta^{2\omega l} \left\{ \frac{(r-b) r^{\frac{\omega}{\alpha} + \gamma(1-\frac{\omega}{\alpha})}}{r_0^{\gamma(1-\frac{\omega}{\alpha}) + (1+\frac{\omega}{\alpha})}} dt^2 - \frac{r_0^{\gamma(1+\frac{\omega}{\alpha}) + (1-\frac{\omega}{\alpha})} r^{\frac{\omega}{\alpha} - \gamma(1+\frac{\omega}{\alpha})}}{(r-b)} dr^2 \right. \\ \left. - r_0^{\gamma(1+\frac{\omega}{\alpha}) + (1-\frac{\omega}{\alpha})} r^{(1+\frac{\omega}{\alpha})(1-\gamma)} d\Omega \right\}. \quad (2.95)$$

A gravidade superficial de (2.95) é:

$$\widehat{\kappa}_{ANP} = \left[ \frac{(\widehat{g}_{00}^{ANP})'}{2\sqrt{-\widehat{g}_{00}^{ANP}\widehat{g}_{11}^{ANP}}} \right]_{r=r_H} \\ = \frac{b^\gamma}{2r_0^{1+\gamma}}.$$

Assim, a temperatura de Hawking para o BN ANP conforme (2.95) pelo fator geral (2.72) será:

$$\widehat{T}_{ANP} = T_{ANP} = \frac{b^\gamma}{4\pi r_0^{1+\gamma}}, \quad (2.96)$$

mostrando que a temperatura de Hawking para o caso do BN ANP é invariante conforme pelo fator conforme geral (2.72). Então, como vimos nesta seção, conseguimos mostrar que a temperatura de Hawking, para os modelos de cordas gerados pela ação (2.79), é invariante conforme.

# Capítulo 3

## BURACOS NEGROS FRIOS

### 3.1 Soluções Exatas

A teoria chamada Teoria Escalar Tensorial (TET) é composta pelos campos:

1. A métrica do espaço-tempo “ $g^{\mu\nu}(x^\alpha)$ ”, que governa a geometria do espaço-tempo. Em particular escolheremos a geometria riemanniana, em que a torção e a derivada covariante da métrica são nulas.
2. O campo vetorial “ $A_\mu(x^\alpha)$ ”, que determina, com uma liberdade de calibre, o tensor de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu,$$

de onde obtemos o eletromagnetismo.

3. O campo escalar “ $\phi(x^\alpha)$ ”.

A densidade Lagrangiana da “TET” é dada por:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \phi \mathcal{R} + \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right], \quad (3.1)$$

onde o primeiro termo gera a dinâmica da geometria que está acoplada com o campo escalar, o segundo gera a dinâmica do campo escalar e o terceiro a dinâmica do campo de Maxwell.

Dizemos que a densidade lagrangiana (3.1) está no *referencial de Jordan*. Pela transformação conforme

$$\widehat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x^\alpha) g_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde

$$\Omega(x^\alpha) = \sqrt{\widehat{\phi}}, \quad (3.3)$$

é o fator conforme, podemos passar do chamado *referencial de Jordan* para o chamado *referencial de Einstein*, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \phi \widehat{g}^{\mu\nu} \\ \sqrt{-g} &= \Omega^{-4} \sqrt{\widehat{g}} = \phi^{-2} \sqrt{\widehat{g}} \\ \mathcal{R} &= \Omega^2 \widehat{\mathcal{R}} + 6 g^{\mu\nu} [\nabla_\mu \nabla_\nu \ln \Omega + (\nabla_\mu \ln \Omega) (\nabla_\nu \ln \Omega)] \\ &= \phi \widehat{\mathcal{R}} + 3 \widehat{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{3}{2} \phi^{-1} \widehat{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.1) e desprezando o termo de divergência total, obtemos:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\widehat{g}} \left[ \widehat{\mathcal{R}} + \left( \omega + \frac{3}{2} \right) \phi^{-2} \widehat{g}^{\mu\nu} \widehat{\nabla}_\mu \phi \widehat{\nabla}_\nu \phi - \widehat{F}^2 \right]. \quad (3.5)$$

Se tivermos a seguinte mudança de campo escalar

$$\varphi = \left| \omega + \frac{3}{2} \right| \ln \phi \quad (3.6)$$

$$\omega = \text{constante},$$

então, (3.5) se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{-\widehat{g}} \left[ \widehat{\mathcal{R}} + \epsilon \widehat{g}^{\mu\nu} \widehat{\nabla}_\mu \varphi \widehat{\nabla}_\nu \varphi - \widehat{F}^2 \right] \\ \epsilon &= \frac{\omega + \frac{3}{2}}{\left| \omega + \frac{3}{2} \right|} = \text{sign} \left( \omega + \frac{3}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

A “TET” com  $\omega$  constante é a chamada Teoria de Brans-Dicke (TBD) [38]. Se  $\omega > -\frac{3}{2}$ , a “TBD” é chamada normal, pois possui uma densidade de energia do campo escalar, no *referencial de Einstein*, positiva. Mas se  $\omega < -\frac{3}{2}$ , então a “TBD” é chamada de anômala, pois a densidade de energia do campo escalar, no *referencial de Einstein*, é negativa.

Considerando o espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, temos que o elemento de linha tem a forma (2.16). Uma possível classe de soluções para o elemento de linha, gerada das equações de movimento obtidas variando a ação construída com (3.1) em relação a métrica, é obtida em [28],

$$dS^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \phi^{-1}\widehat{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{\phi} \left( \frac{1}{q^2 s^2(h; u + u_1)} dt^2 - \frac{q^2 s^2(h; u + u_1)}{s^2(k; u)} \left[ \frac{du^2}{s^2(k; u)} + d\Omega^2 \right] \right) \quad (3.8)$$

$$F_{\mu\nu} = (\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 1} - \delta_{\mu 1}\delta_{\nu 0}) \frac{1}{q s^2(h; u + u_1)} \quad (3.9)$$

$$\varphi = Cu, \quad (3.10)$$

onde  $q$  é a carga do campo de Maxwell,  $h, k, C$  e  $u_1$  são constantes de integração que cumprem

$$2k^2 \text{sign}(k) = \epsilon C^2 + 2h^2 \text{sign}(h), \quad (3.11)$$

e a função  $s$  é dada por

$$s(k; u) = \begin{cases} k^{-1} \sinh(ku) ; & k > 0 \\ u ; & k = 0 \\ k^{-1} \sin(ku) ; & k < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

As soluções (3.8) são de um buraco negro esfericamente simétrico, eletricamente carregado, estático e AP, onde a variável  $u$  pode assumir valores no intervalo  $(0; u_{max})$ , o valor zero correspondendo ao infinito espacial. Sem perda de generalidade, podemos normalizar a função (3.12) para obtermos “ $g_{00}(u = 0) = 1$ ”. Com isso temos:

$$s^2(h; u_1) = \frac{1}{q^2}, \quad (3.13)$$

onde  $u_1$  pode ser determinada, restando assim somente as outras constantes de integração.

Se quisermos obter o caso neutro ( $q = 0$ , vácuo escalar), basta fazer o limite em que  $q \rightarrow 0$ , preservando (3.13). Este limite só é possível para “ $h \geq 0, u_1 \rightarrow \infty$ ”. O resultado é

$$dS^2 = \frac{1}{\phi} \left( e^{-2hu} dt^2 - \frac{e^{2hu}}{s^2(k; u)} \left[ \frac{du^2}{s^2(k; u)} + d\Omega^2 \right] \right). \quad (3.14)$$



Lembrando que de (3.6) temos:

$$\phi = e^{C_0 u} \quad (3.15)$$

$$C_0 = \frac{C}{\sqrt{|\omega + \frac{3}{2}|}} \quad (3.16)$$

Agora, podemos determinar possíveis horizontes de eventos para a solução (3.14). Dizemos possível horizonte porque ainda temos que mostrar que a solução (3.14) é realmente um buraco negro. Para isso, procedemos da seguinte forma: para um elemento de linha esfericamente simétrico

$$dS^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\alpha} du^2 - e^{2\beta} d\Omega^2, \quad (3.17)$$

a geometria que descreve uma solução que caracteriza um buraco negro, obedece os critérios:

1. Na superfície em que  $u = u^*$ , que é um candidato a horizonte de eventos, temos que obter  $e^\gamma|_{u=u^*} \rightarrow 0$ .
2. A temperatura de Hawking (2.56) é finita.
3. O escalar de Kretschmann

$$K = 4K_1^2 + 8K_2^2 + 8K_3^2 + 4K_4^2, \quad (3.18)$$

é finito em  $u = u^*$ , onde

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = R^{01}_{01} = -e^{-(\alpha+\gamma)} (\gamma' e^{\gamma-\alpha})' \\ K_2 = R^{02}_{02} = -e^{-2\alpha} \gamma' \beta' \\ K_3 = R^{12}_{12} = -e^{-(\alpha+\beta)} (\beta' e^{\beta-\alpha})' \\ K_4 = R^{23}_{23} = e^{-2\beta} - e^{-2\alpha} (\beta')^2. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Como vimos no primeiro capítulo, um BN é o conjunto da massa localizada na singularidade mais o horizonte de eventos. Então, para estabelecermos critérios de existência de um BN, temos que levar em conta este conjunto que o forma. O primeiro critério está

impondo uma hipersuperfície idêntica à do horizonte de eventos. O segundo critério impõe que qualquer geodésica tipo-tempo ou tipo-luz, descrita pelas coordenadas do elemento de linha original (3.17), não passa pela hipersuperfície do primeiro critério, além de impor uma estabilidade ao BN semi-clássico, pois se a temperatura de Hawking fosse infinita, o BN evaporaria instantaneamente. O terceiro critério permite uma possível extensão analítica sobre o horizonte de eventos, pois se houvesse singularidade no horizonte, as geodésicas terminariam no horizonte e não haveria como fazer a extensão analítica sobre o horizonte nesse caso.

Estes critérios estão bem selecionados para o nosso interesse específico aqui. Uma visão mais ampla, mas equivalente, pode ser vista em [15]. Usando os critérios estabelecidos aqui, vamos mostrar a existência de buracos negros gerados pelo elemento de linha (3.14).

## 3.2 Buracos Negros Frios Neutros com $k > 0$

O elemento de linha (3.14) que está no *referencial de Jordan*, para  $k > 0$  fica sendo:

$$dS_J^2 = e^{-(2h+C_0)u} dt^2 - \frac{k^4 e^{(2h-C_0)u}}{\sinh^4(ku)} du^2 - \frac{k^2 e^{(2h-C_0)u}}{\sinh^2(ku)} d\Omega^2. \quad (3.20)$$

Comparando com (3.17), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{2\gamma} = e^{-(2h+C_0)u} \Rightarrow e^\gamma = e^{-(2h+C_0)\frac{u}{2}} \Rightarrow \gamma = -(2h+C_0)\frac{u}{2} \\ e^{2\alpha} = \frac{k^4 e^{(2h-C_0)u}}{\sinh^4(ku)} \Rightarrow e^\alpha = \frac{k^2 e^{(2h-C_0)\frac{u}{2}}}{\sinh^2(ku)} \Rightarrow \alpha = \frac{(2h-C_0)}{2}u - 2 \ln[\sinh(ku)] + 2 \ln(k) \\ e^{2\beta} = \frac{k^2 e^{(2h-C_0)u}}{\sinh^2(ku)} \Rightarrow e^\beta = \frac{k e^{(2h-C_0)\frac{u}{2}}}{\sinh(ku)} \Rightarrow \beta = \frac{(2h-C_0)}{2}u - \ln[\sinh(ku)] + \ln(k). \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Calculando (3.19) com (3.21), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{(2h+C_0)}{k^4} \sinh^3(ku) e^{(C_0-2h)u} [k \cosh(ku) - h \sinh(ku)] \\ K_2 = \frac{(2h+C_0)}{2k^4} \sinh^4(ku) e^{(C_0-2h)u} \left[ \frac{(2h-C_0)}{2} - k \coth(ku) \right] \\ K_3 = -\frac{\sinh^3(ku)}{k^3} e^{(C_0-2h)u} \left( \cosh(ku) \left[ \frac{(2h-C_0)}{2} - k \coth(ku) \right] - \frac{k \coth(ku)}{\cosh(ku)} \right) \\ K_4 = \frac{\sinh^2(ku)}{k^2} e^{(C_0-2h)u} \left( 1 - \frac{\sinh^2(ku)}{k^2} \left[ \frac{(2h-C_0)}{2} - k \coth(ku) \right]^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Como  $u \in (0; u_{max})$ , então o único candidato a horizonte de eventos será  $u^* = u_{max} = +\infty$ . Vamos agora impor os critérios de existência de BN e estabelecer em que condições

a solução (3.20) é de um BN.

Usando (3.21), o primeiro e o segundo critérios ficam:

$$e^\gamma|_{u=u^*} = e^{-\frac{(2h+C_0)}{2}u}|_{u=u^*} = \begin{cases} 0 \Rightarrow C_0 > 0 \\ 0 \Rightarrow C_0 < 0 ; 2h > |C_0| \\ +\infty \Rightarrow C_0 < 0 ; 2h < |C_0|. \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\kappa = \gamma' e^{\gamma-\alpha}|_{u=u^*} = -\frac{(2h+C_0)}{2k^2} \sinh^2(ku) e^{-2hu}|_{u=u^*} = \begin{cases} 0 \Rightarrow h > k \\ \pm\infty \Rightarrow h < k \end{cases}$$

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = 0 \Rightarrow h > k. \quad (3.24)$$

Usando (3.22), o terceiro critério fica:

$$K_1|_{u=u^*} = K_2|_{u=u^*} = \begin{cases} 0 \Rightarrow C_0 > 0 ; 2h > 4k + C_0 \\ \text{Indeterminado} \Rightarrow C_0 > 0 ; 2h < 4k + C_0 \\ 0 \Rightarrow C_0 < 0 ; |C_0 - 2h| > 4k \\ \text{Indeterminado} \Rightarrow C_0 < 0 ; |C_0 - 2h| < 4k \\ \text{Finito} \Rightarrow 2h = 4k + C_0 \end{cases} \quad (3.25)$$

$$K_3|_{u=u^*} = K_4|_{u=u^*} = \begin{cases} 0 \Rightarrow C_0 > 0 ; 2h > 4k + C_0 \\ -\infty \Rightarrow C_0 > 0 ; 2h < 4k + C_0 \\ 0 \Rightarrow C_0 < 0 ; |C_0 - 2h| > 4k \\ -\infty \Rightarrow C_0 < 0 ; |C_0 - 2h| < 4k \\ \text{Finito} \Rightarrow 2h = 4k + C_0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Colecionando os resultados obtidos em (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26), temos que as soluções que caracterizam um BN em (3.20), são quando:

$$\begin{aligned} C_0 > 0 ; 2h \geq 4k + C_0 \\ C_0 < 0 ; |C_0 - 2h| > 4k ; h > k ; 2h > |C_0|. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para esta classe de buracos negros no *referencial de Jordan*, vimos que a temperatura de Hawking (3.24) é **zero** e por isso os chamamos de **buracos negros frios**. Todos os

elementos de linha gerados por (3.20), variando os parâmetros de integração, que não cumprem as restrições de existência (3.27), não são buracos negros, são outro tipo de estrutura no espaço-tempo.

Agora para compararmos as temperaturas de Hawking dos dois *referenciais*, o de *Jordan* e o de *Einstein*, é só estabelecer os possíveis buracos negros no *referencial de Einstein* com os critérios de existência. Assim, já estaremos calculando a temperatura no segundo critério e ainda estabelecendo as soluções de BN para o *referencial de Einstein*. Lembrando que o elemento de linha (3.20), passa para o *referencial de Einstein* multiplicando-o pelo quadrado do fator conforme (3.3), que resulta em:

$$dS_E^2 = e^{-2hu} dt^2 - \frac{k^4 e^{2hu}}{\sinh^4(ku)} du^2 - \frac{k^2 e^{2hu}}{\sinh^2(ku)} d\Omega^2. \quad (3.28)$$

Notemos que fazendo o limite em que  $C_0 \rightarrow 0$  no elemento (3.20), obtemos o elemento (3.28). Então, para obtermos (3.21) e (3.22) no *referencial de Einstein*, basta fazer o mesmo limite. Resultando em:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{2\hat{\gamma}} = e^{-2hu} \Rightarrow e^{\hat{\gamma}} = e^{-hu} \Rightarrow \hat{\gamma} = -hu \\ e^{2\hat{\alpha}} = \frac{k^4 e^{2hu}}{\sinh^4(ku)} \Rightarrow e^{\hat{\alpha}} = \frac{k^2 e^{hu}}{\sinh^2(ku)} \Rightarrow \hat{\alpha} = hu - 2 \ln[\sinh(ku)] + 2 \ln(k) \\ e^{2\hat{\beta}} = \frac{k^2 e^{2hu}}{\sinh^2(ku)} \Rightarrow e^{\hat{\beta}} = \frac{k e^{hu}}{\sinh(ku)} \Rightarrow \hat{\beta} = hu - \ln[\sinh(ku)] + \ln(k). \end{array} \right. \quad (3.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{K}_1 = \frac{2h}{k^4} \sinh^3(ku) e^{-2hu} [k \cosh(ku) - h \sinh(ku)] \\ \hat{K}_2 = \frac{h}{k^4} \sinh^4(ku) e^{-2hu} [h - k \coth(ku)] \\ \hat{K}_3 = -\frac{\sinh^3(ku)}{k^3} e^{-2hu} \left( \frac{\cosh(ku)}{k} [h - k \coth(ku)] - \frac{k \coth(ku)}{\cosh(ku)} \right) \\ \hat{K}_4 = \frac{\sinh^2(ku)}{k^2} e^{-2hu} \left( 1 - \frac{\sinh^2(ku)}{k^2} [h - k \coth(ku)]^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Os critérios de existência de BN para o elemento (3.28), usando (3.29) e (3.30), ficam sendo:

$$e^{\hat{\gamma}}|_{u=u^*} = e^{-hu}|_{u=u^*} = 0 \quad (3.31)$$

$$\hat{\kappa} = \hat{\gamma}' e^{\hat{\gamma} - \hat{\alpha}}|_{u=u^*} = -\frac{h}{k^2} \sinh^2(ku) e^{-2hu}|_{u=u^*} = \begin{cases} 0 \Rightarrow h > k \\ -\infty \Rightarrow h < k \end{cases}$$

$$\hat{T} = \frac{\hat{\kappa}}{2\pi} = 0 \Rightarrow h > k \quad (3.32)$$

$$\widehat{K}_1|_{u=u^*} = \widehat{K}_2|_{u=u^*} = \widehat{K}_3|_{u=u^*} = \widehat{K}_4|_{u=u^*} = \begin{cases} 0 \Rightarrow h > 2k \\ \text{Finito} \Rightarrow h = 2k \\ +\infty \Rightarrow h < 2k \end{cases} . \quad (3.33)$$

Logo, não há singularidade no horizonte de eventos de (3.28) quando:

$$h \geq 2k \quad (3.34)$$

Então, os elementos de linha (3.20) e (3.28), obedecendo as restrições impostas para a existência de buracos negros (3.27) e (3.34), são uma classe de **buracos negros Frios em que a temperatura de Hawking é invariante conforme**, no caso igual a zero, tanto para o *referencial de Jordan* quanto para o *referencial de Einstein*. Uma observação muito importante é que se as restrições obtidas pelos critérios de existência de BN não forem satisfeitas, haverá uma estrutura geométrica no espaço-tempo que não é um BN. Vamos ver um exemplo claro disso agora.

No caso em que o parâmetro

$$h = \frac{3}{2}k, \quad (3.35)$$

temos de (3.11):

$$C_0 = -\sqrt{-\frac{5}{2\epsilon(\omega + \frac{3}{2})}}k. \quad (3.36)$$

Para  $\omega = -\frac{5}{2}$ , temos que  $C_0 = -\frac{\sqrt{10}}{2}k$  e também

$$|C_0 - 2h| = \frac{6 + \sqrt{10}}{2}k > 4k. \quad (3.37)$$

Vemos que (3.35) e (3.37) satisfazem as restrições de existência de BN (3.27), que está no *referencial de Jordan*. Mas (3.35) não satisfaz a restrição de existência de BN (3.34) para o *referencial de Einstein*. Com a escolha de parâmetro (3.35), temos buracos negros no *referencial de Jordan* mas não temos BN no *referencial de Einstein*. Este é um exemplo claro que a **temperatura de Hawking não é invariante conforme**, mas isso se deve a existência de buracos negros Frios no *referencial de Jordan* e a não existência de buraco negros no *referencial de Einstein*. Como não há BN no *referencial de Einstein*,

não podemos definir temperatura de Hawking neste caso. Então a invariância conforme é violada não pela mudança do valor da temperatura de Hawking, mas pela impossibilidade da definição de temperatura devido a não existência de BN em um *referencial*. Este é um dos vários possíveis casos de violação da invariância conforme da temperatura de Hawking devido a transformação conforme (3.2) não ser uma isometria conforme (ver apêndice B), ou seja, a transformação conforme não sendo um difeomorfismo, os pontos do horizonte de eventos, pertencentes ao espaço-tempo, podem ser mapeados em pontos singulares, modificando a estrutura de BN para uma estrutura diferente, em que as geodésicas terminam na hipersuperfície singular. Entretanto, não analisamos o que acontece com os pontos da região de dentro do horizonte de eventos dos buracos negros no *referencial de Jordan*. Não sabemos se todos os pontos são mapeados na hipersuperfície singular ou somente os pontos em que  $u = u^*$  são mapeados em pontos singulares. Poderia restar uma região interna, correspondente aos pontos do BN sem  $u = u^*$ , que seria um outro conjunto de pontos aberto completamente separado da nova variedade resultante da aplicação da transformação conforme. As possibilidades estão representadas nas figuras 2 e 3.

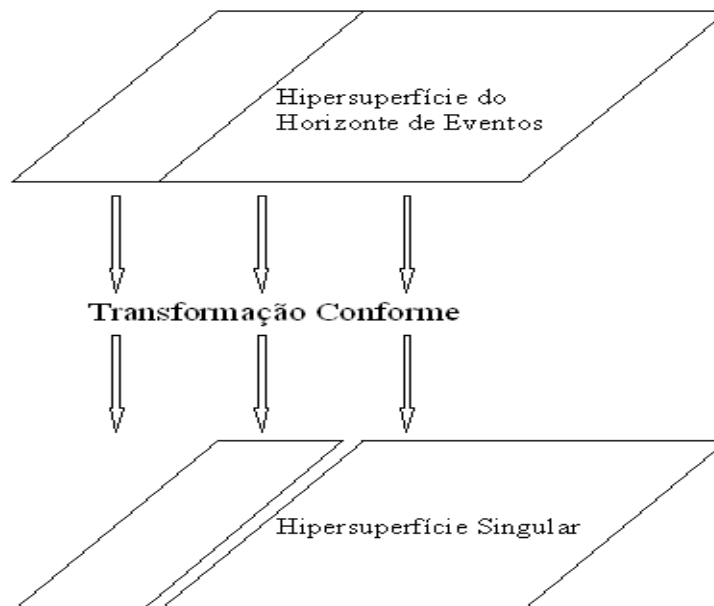


Figura 2

A propriedade de invariância conforme da temperatura de Hawking para o caso de

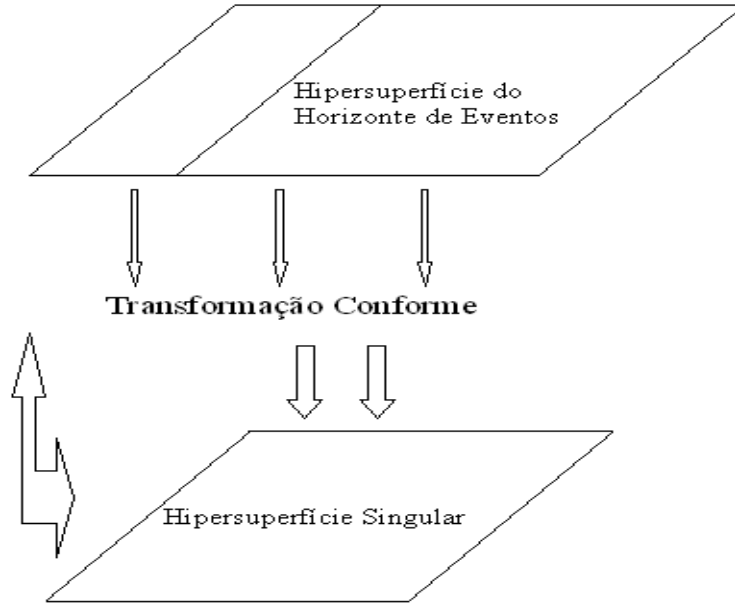


Figura 3

uma isometria conforme, deve ser mostrada como um teorema, usando vetores de Killing do espaço-tempo. Isso deve ser minuciosamente estudado em um outro trabalho para a completa compreensão da invariância conforme da temperatura de Hawking.

Uma outra observação importante é que se considerarmos a transformação de coordenadas

$$\begin{aligned}
 e^{-2ku} &= P(r) = 1 - \frac{2k}{r} & (3.38) \\
 e^{-2hu} &= P^{\frac{h}{k}}(r) ; \quad e^{2hu} = P^{-\frac{h}{k}}(r) \\
 \phi^{-1} &= [P(r)]^{\frac{C}{2k\sqrt{|\omega+\frac{3}{2}|}}} \\
 du^2 &= \frac{1}{r^4 P^2(r)} dr^2 \\
 \sinh(ku) &= \frac{k}{r} P(r)^{-\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

e a mudança de parâmetros

$$\xi = \frac{C}{2k\sqrt{|\omega + \frac{3}{2}|}} \quad (3.39)$$

$$a = \frac{h}{k}, \quad (3.40)$$

o elemento de linha (3.20), transformado por (3.38), (3.39) e (3.40) fica:

$$dS_J^2 = P^\xi(r)[P^a(r)dt^2 - P^{-a}(r)dr^2 - P^{1-a}(r)r^2d\Omega^2]. \quad (3.41)$$

Identificando com (3.17), temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{2\gamma} = P^{a+\xi} \Rightarrow e^\gamma = P^{\frac{a+\xi}{2}} \Rightarrow \gamma = \frac{a+\xi}{2} \ln P \\ e^{2\alpha} = P^{-(a-\xi)} \Rightarrow e^\alpha = P^{-\frac{(a-\xi)}{2}} \Rightarrow \alpha = -\frac{(a-\xi)}{2} \ln P \\ e^{2\beta} = r^2 P^{1-(a-\xi)} \Rightarrow e^\beta = r P^{\frac{[1-(a-\xi)]}{2}} \Rightarrow \beta = \frac{[1-(a-\xi)]}{2} \ln P + \ln r. \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Calculando (3.19) com (3.42), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = -\left(\frac{a+\xi}{2}\right) [P^{(a-\xi)-1} P'' + (a-1)P^{(a-\xi)-2} (P')^2] \\ K_2 = -\left(\frac{a+\xi}{2}\right) P' \left[ \frac{1-(a-\xi)}{2} P^{(a-\xi)-2} P' + \frac{1}{r} P^{(a-\xi)-1} \right] \\ K_3 = \frac{(a-\xi)-1}{2} [P^{(a-\xi)-1} P' - \frac{r}{2} P^{(a-\xi)-2} P' + r P^{(a-\xi)-1} P''] \\ K_4 = \frac{1}{r^2} P^{(a-\xi)-1} - \left[ \frac{(1-a+\xi)^2}{4} P^{(a-\xi)-2} (P')^2 + \frac{(1-a+\xi)}{r} P^{(a-\xi)-1} + \frac{1}{r^2} P^{(a-\xi)} \right]. \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Como o candidato a horizonte de eventos é  $r_H = 2k$ , temos que os critérios de existência de BN ficam sendo:

$$e^\gamma|_{r=r_H} = \left[ \left(1 - \frac{2k}{r}\right)^{\frac{a+\xi}{2}} \right]_{r=2k} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \Rightarrow a + \xi \geq 0 \\ +\infty \Rightarrow a + \xi < 0 \end{array} \right. \quad (3.44)$$

$$\kappa = \gamma' e^{\gamma-\alpha}|_{r=r_H} = \frac{a+\xi}{2} P' P^{a-1}|_{r=2k} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \Rightarrow a > 1 \\ \text{Finita} \Rightarrow a = 1 \\ +\infty \Rightarrow a < 1 \end{array} \right.$$

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \Rightarrow a > 1 \\ \text{Finita} \Rightarrow a = 1 \end{array} \right. \quad (3.45)$$



$$K_1|_{r=r_H} = K_2|_{r=r_H} = K_3|_{r=r_H} = K_4|_{r=r_H} = \begin{cases} 0 \Rightarrow a - \xi \geq 2 \\ \pm\infty \Rightarrow a - \xi < 2 \end{cases}. \quad (3.46)$$

Colecionando os critérios (3.44), (3.45) e (3.46), temos que as soluções do elemento de linha (3.41) que caracterizam buracos negros, correspondem a:

$$a - \xi \geq 2; a + \xi \geq 0 \quad (3.47)$$

O elemento de linha (3.41) no *referencial de Einstein* fica sendo:

$$dS_E^2 = P^a(r)dt^2 - P^{-a}(r)dr^2 - P^{1-a}(r)r^2d\Omega^2. \quad (3.48)$$

Fazendo “ $\xi \rightarrow 0$ ” em (3.42)-(3.46), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{2\hat{\gamma}} = P^a \Rightarrow e^{\hat{\gamma}} = P^{\frac{a}{2}} \Rightarrow \hat{\gamma} = \frac{a}{2} \ln P \\ e^{2\hat{\alpha}} = P^{-a} \Rightarrow e^{\hat{\alpha}} = P^{-\frac{a}{2}} \Rightarrow \hat{\alpha} = -\frac{a}{2} \ln P \\ e^{2\hat{\beta}} = r^2 P^{1-a} \Rightarrow e^{\hat{\beta}} = r P^{\frac{(1-a)}{2}} \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{(1-a)}{2} \ln P + \ln r. \end{array} \right. \quad (3.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{K}_1 = -\left(\frac{a}{2}\right) [P^{a-1}P'' + (a-1)P^{a-2}(P')^2] \\ \hat{K}_2 = -\left(\frac{a}{2}\right) P' \left[\frac{1-a}{2} P^{a-2}P' + \frac{1}{r}P^{a-1}\right] \\ \hat{K}_3 = \frac{a-1}{2} [P^{a-1}P' - \frac{r}{2}P^{a-2}P' + rP^{a-1}P''] \\ \hat{K}_4 = \frac{1}{r^2}P^{a-1} - \left[\frac{(1-a)^2}{4}P^{a-2}(P')^2 + \frac{(1-a)}{r}P^{a-1} + \frac{1}{r^2}Pa\right]. \end{array} \right. \quad (3.50)$$

$$e^{\hat{\gamma}}|_{r=r_H} = \left[ \left(1 - \frac{2k}{r}\right)^{\frac{a}{2}} \right]_{r=2k} = \begin{cases} 0 \Rightarrow a \geq 0 \\ \pm\infty \Rightarrow a < 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\hat{\kappa} = \hat{\gamma}' e^{\hat{\gamma}-\hat{\alpha}}|_{r=r_H} = \frac{a}{2} P' P^{a-1}|_{r=2k} = \begin{cases} 0 \Rightarrow a \geq 1 \\ \text{Finita} \Rightarrow a = 1 \\ \pm\infty \Rightarrow a < 1 \end{cases}$$

$$\hat{T} = \frac{\hat{\kappa}}{2\pi} = \begin{cases} 0 \Rightarrow a > 1 \\ \text{Finita} \Rightarrow a = 1 \end{cases}. \quad (3.52)$$

$$\widehat{K}_1|_{r=r_H} = \widehat{K}_2|_{r=r_H} = \widehat{K}_3|_{r=r_H} = \widehat{K}_4|_{r=r_H} = \begin{cases} 0 \Rightarrow a \geq 2 \\ \pm\infty \Rightarrow a < 2 \end{cases}. \quad (3.53)$$

Colecionando os resultados de (3.51)-(3.53), temos que as soluções do elemento de linha (3.48) que caracterizam buracos negros, são quando:

$$a \geq 2. \quad (3.54)$$

Vemos que (3.54) concorda com (3.34). Fizemos as transformações (3.38)-(3.40), para demonstrar, pelos parâmetros usados na literatura [15], que existe uma classe de buracos negros que não havia sido demonstrada até agora. Considerava-se que só haviam soluções que caracterizavam buracos de minhoca e não buracos negros. Mas como vimos, os critérios de existência de buracos negros são satisfeitos para o elemento de linha (3.48) quando temos (3.54), mostrando que **obtemos uma nova classe de buracos negros frios**, que ainda possuem a importante propriedade da invariância conforme da temperatura de Hawking. Uma observação importante sobre esta nova classe de buracos negros, é que a restrição (3.54) só é válida para o caso da **Teoria de Brans-Dicke anômala**, ou seja, “ $\epsilon = -1$ ” em (3.7), já que (3.11) só é satisfeita para  $a \geq 2$  se  $\epsilon = -1$ .

### 3.3 Buracos Negros Frios Neutros com $k = 0$

Agora para o caso em que  $k = 0$ , o elemento de linha (3.14) fica sendo:

$$dS_J^2 = e^{-2(h+\frac{C_0}{2})u} dt^2 - \frac{e^{2(h-\frac{C_0}{2})u}}{u^4} du^2 - \frac{e^{2(h-\frac{C_0}{2})u}}{u^2} d\Omega^2. \quad (3.55)$$

Identificando com (3.17), temos:

$$\begin{cases} e^{2\gamma} = e^{-2(h+\frac{C_0}{2})u} \Rightarrow e^\gamma = e^{-(h+\frac{C_0}{2})u} \Rightarrow \gamma = -(h+\frac{C_0}{2})u \\ e^{2\alpha} = \frac{e^{2(h-\frac{C_0}{2})u}}{u^4} \Rightarrow e^\alpha = \frac{e^{(h-\frac{C_0}{2})u}}{u^2} \Rightarrow \alpha = (h-\frac{C_0}{2})u - 2\ln(u) \\ e^{2\beta} = \frac{e^{2(h-\frac{C_0}{2})u}}{u^2} \Rightarrow e^\beta = \frac{e^{(h-\frac{C_0}{2})u}}{u} \Rightarrow \beta = (h-\frac{C_0}{2})u - \ln(u). \end{cases} \quad (3.56)$$

Então, (3.19) fica:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = -2\left(h + \frac{C_0}{2}\right)u^3 e^{(C_0-2h)u}(1-hu) \\ K_2 = -\left(h + \frac{C_0}{2}\right)u^4 e^{(C_0-2h)u} \left[\left(h - \frac{C_0}{2}\right) - \frac{1}{u}\right] \\ K_3 = -\left(h - \frac{C_0}{2}\right)u^3 e^{(C_0-2h)u} \\ K_4 = u^2 e^{(C_0-2h)u} \left(1 - u^2 \left[\left(h - \frac{C_0}{2}\right) - \frac{1}{u}\right]^2\right). \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Como o candidato a horizonte é “ $u^* = +\infty$ ”, então, usando (3.56) e (3.57), os critérios de existência de BN ficam sendo:

$$e^\gamma|_{u=u^*} = e^{-\frac{(2h+C_0)}{2}u}|_{u=u^*} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \Rightarrow C_0 > 0 \\ 0 \Rightarrow C_0 < 0; 2h > |C_0| \\ +\infty \Rightarrow C_0 < 0; 2h < |C_0|. \end{array} \right. \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \kappa = \gamma'|_{u=u^*} &= -(2h + C_0)u^2 e^{-2hu}|_{u=u^*} = 0 \\ T = \frac{\kappa}{2\pi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$K_1|_{u=u^*} = K_2|_{u=u^*} = K_3|_{u=u^*} = K_4|_{u=u^*} = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \Rightarrow C_0 > 0; 2h < C_0 \\ 0 \Rightarrow C_0 > 0; 2h > C_0 \\ 0 \Rightarrow C_0 < 0 \end{array} \right. . \quad (3.60)$$

Colecionando os resultados obtidos em (3.58)-(3.60), temos que as soluções do elemento de linha (3.55) que caracterizam buracos negros, são quando:

$$\begin{aligned} C_0 > 0; 2h > C_0 \\ C_0 < 0; 2h > |C_0|. \end{aligned} \quad (3.61)$$

O elemento de linha (3.55) transformado para o *referencial de Einstein* fica sendo:

$$dS_E^2 = e^{-2hu} dt^2 - \frac{e^{2hu}}{u^4} du^2 - \frac{e^{2hu}}{u^2} d\Omega^2. \quad (3.62)$$

As expressões (3.56) e (3.57) se tornam:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{2\hat{\gamma}} = e^{-2hu} \Rightarrow e^{\hat{\gamma}} = e^{-hu} \Rightarrow \hat{\gamma} = -hu \\ e^{2\hat{\alpha}} = \frac{e^{2hu}}{u^4} \Rightarrow e^{\hat{\alpha}} = \frac{e^{hu}}{u^2} \Rightarrow \hat{\alpha} = hu - 2 \ln(u) \\ e^{2\hat{\beta}} = \frac{e^{2hu}}{u^2} \Rightarrow e^{\hat{\beta}} = \frac{e^{hu}}{u} \Rightarrow \hat{\beta} = hu - \ln(u) \end{array} \right. \quad (3.63)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{K}_1 = -2hu^3 e^{-2hu} (1 - hu) \\ \widehat{K}_2 = -hu^4 e^{-2hu} \left( h - \frac{1}{u} \right) \\ \widehat{K}_3 = -hu^3 e^{-2hu} \\ \widehat{K}_4 = u^2 e^{-2hu} \left( 1 - u^2 \left[ h - \frac{1}{u} \right]^2 \right) . \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Usando (3.63) e (3.64), os critérios de existência de BN ficam sendo:

$$e^{\widehat{\gamma}}|_{u=u^*} = e^{-hu}|_{u=u^*} = 0 \quad (3.65)$$

$$\widehat{\kappa} = \widehat{\gamma}' e^{\widehat{\gamma} - \widehat{\alpha}}|_{u=u^*} = -hu^2 e^{-2hu}|_{u=u^*} = 0$$

$$\widehat{T} = \frac{\widehat{\kappa}}{2\pi} = 0 \quad (3.66)$$

$$\widehat{K}_1|_{u=u^*} = \widehat{K}_2|_{u=u^*} = \widehat{K}_3|_{u=u^*} = \widehat{K}_4|_{u=u^*} = 0. \quad (3.67)$$

Logo, neste caso, não há singularidade no horizonte de eventos do elemento de linha (3.62). Então, obedecendo as restrições (3.61), a temperatura de Hawking é invariante conforme para esta classe de buracos negros.

### 3.4 Buracos Negros Frios Neutros com $k < 0$

Finalmente, para o caso em que “ $k < 0$ ”, o elemento de linha (3.14) fica sendo:

$$dS_J^2 = e^{-(2h+C_0)u} dt^2 - \frac{k^4 e^{(2h-C_0)u}}{\sin^4(ku)} du^2 - \frac{k^2 e^{(2h-C_0)u}}{\sin^2(ku)} d\Omega^2. \quad (3.68)$$

Comparando com (3.17), temos

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{2\gamma} = e^{-(2h+C_0)u} \Rightarrow e^{\gamma} = e^{-(2h+C_0)\frac{u}{2}} \Rightarrow \gamma = -(2h + C_0)\frac{u}{2} \\ e^{2\alpha} = \frac{k^4 e^{(2h-C_0)u}}{\sin^4(ku)} \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{k^2 e^{(2h-C_0)\frac{u}{2}}}{\sin^2(ku)} \Rightarrow \alpha = \frac{(2h-C_0)}{2}u - 2 \ln[\sinh(ku)] + 2 \ln(k) \\ e^{2\beta} = \frac{k^2 e^{(2h-C_0)u}}{\sin^2(ku)} \Rightarrow e^{\beta} = \frac{k e^{(2h-C_0)\frac{u}{2}}}{\sin(ku)} \Rightarrow \beta = \frac{(2h-C_0)}{2}u - \ln[\sinh(ku)] + \ln(k). \end{array} \right. \quad (3.69)$$

Calculando (3.19) com (3.69), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{(2h+C_0)}{k^4} \sin^3(ku) e^{(C_0-2h)u} [k \cos(ku) - h \sin(ku)] \\ K_2 = \frac{(2h+C_0)}{2k^4} \sin^4(ku) e^{(C_0-2h)u} \left[ \frac{(2h-C_0)}{2} - k \cot(ku) \right] \\ K_3 = -\frac{\sin^3(ku)}{k^3} e^{(C_0-2h)u} \left( \cos(ku) \left[ \frac{(2h-C_0)}{2} - k \cot(ku) \right] + \frac{k \cot(ku)}{\cos(ku)} \right) \\ K_4 = \frac{\sin^2(ku)}{k^2} e^{(C_0-2h)u} \left( 1 - \frac{\sin^2(ku)}{k^2} \left[ \frac{(2h-C_0)}{2} - k \cot(ku) \right]^2 \right). \end{array} \right. \quad (3.70)$$

Usando (3.69) e (3.70), os critérios de existência de BN ficam sendo:

$$e^\gamma|_{u=u^*} = e^{-\frac{(2h+C_0)}{2} \frac{2}{k} \frac{1}{\sin^2(ku)}}|_{u=u^*} = \begin{cases} 0 \Rightarrow C_0 > 0 \\ 0 \Rightarrow C_0 < 0 ; 2h > |C_0| \\ +\infty \Rightarrow C_0 < 0 ; 2h < |C_0|. \end{cases} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \kappa = \gamma' e^{\gamma-\alpha}|_{u=u^*} &= -\frac{(2h+C_0)}{k^2} \sin^2(ku) e^{-2hu}|_{u=u^*} = 0 \\ T = \frac{\kappa}{2\pi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$K_1|_{u=u^*} = K_3|_{u=u^*} = K_4|_{u=u^*} = \begin{cases} +\infty \Rightarrow C_0 > 0 ; 2h < C_0 \\ 0 \Rightarrow C_0 > 0 ; 2h > C_0 \\ 0 \Rightarrow C_0 < 0 \end{cases} \quad (3.73)$$

$$K_2|_{u=u^*} = \begin{cases} -\infty \Rightarrow C_0 > 0 ; 2h < C_0 \\ 0 \Rightarrow C_0 > 0 ; 2h > C_0 \\ 0 \Rightarrow C_0 < 0 \end{cases} . \quad (3.74)$$

Colecionando os resultados de (3.71)-(3.74), temos que as soluções do elemento de linha (3.68) que caracterizam buracos negros, são quando:

$$\begin{aligned} C_0 > 0 ; 2h > C_0 \\ C_0 < 0 ; 2h > |C_0|. \end{aligned} \quad (3.75)$$

O elemento de linha (3.68) no *referencial de Einstein* fica sendo:

$$dS_E^2 = e^{-2hu} dt^2 - \frac{k^4 e^{2hu}}{\sin^4(ku)} du^2 - \frac{k^2 e^{2hu}}{\sin^2(ku)} d\Omega^2 . \quad (3.76)$$

Fazendo “ $C_0 \rightarrow 0$ ” em (3.69) e (3.70), obtemos:

$$\left\{ \begin{aligned} e^{2\hat{\gamma}} &= e^{-2hu} \Rightarrow e^{\hat{\gamma}} = e^{-hu} \Rightarrow \hat{\gamma} = -hu \\ e^{2\hat{\alpha}} &= \frac{k^4 e^{2hu}}{\sin^4(ku)} \Rightarrow e^{\hat{\alpha}} = \frac{k^2 e^{hu}}{\sin^2(ku)} \Rightarrow \hat{\alpha} = hu - 2 \ln[\sinh(ku)] + 2 \ln(k) \\ e^{2\hat{\beta}} &= \frac{k^2 e^{hu}}{\sin^2(ku)} \Rightarrow e^{\hat{\beta}} = \frac{k e^{hu}}{\sin(ku)} \Rightarrow \hat{\beta} = hu - \ln[\sinh(ku)] + \ln(k) \end{aligned} \right. \quad (3.77)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{K}_1 = \frac{2h}{k^4} \sin^3(ku) e^{-2hu} [k \cos(ku) - h \sin(ku)] \\ \widehat{K}_2 = \frac{h}{k^4} \sin^4(ku) e^{-2hu} [h - k \cot(ku)] \\ \widehat{K}_3 = -\frac{\sin^3(ku)}{k^3} e^{-2hu} \left( \cos(ku) [h - k \cot(ku)] + \frac{k \cot(ku)}{\cos(ku)} \right) \\ \widehat{K}_4 = \frac{\sin^2(ku)}{k^2} e^{-2hu} \left( 1 - \frac{\sin^2(ku)}{k^2} [h - k \cot(ku)]^2 \right) . \end{array} \right. \quad (3.78)$$

Usando (3.77) e (3.78), os critérios de existência de BN ficam:

$$e^{\widehat{\gamma}}|_{u=u^*} = e^{-hu}|_{u=u^*} = 0 \quad (3.79)$$

$$\widehat{\kappa} = \widehat{\gamma}' e^{\widehat{\gamma} - \widehat{\alpha}}|_{u=u^*} = -\frac{h}{k^2} \sin^2(ku) e^{-2hu}|_{u=u^*} = 0$$

$$\widehat{T} = \frac{\widehat{\kappa}}{2\pi} = 0 \quad (3.80)$$

$$\widehat{K}_1|_{u=u^*} = \widehat{K}_2|_{u=u^*} = \widehat{K}_3|_{u=u^*} = \widehat{K}_4|_{u=u^*} = 0. \quad (3.81)$$

Não existe singularidade no horizonte dos buracos negros do elemento (3.76). Então, obedecendo as restrições (3.75), a temperatura de Hawking é invariante conforme para esta classe de buracos negros.

# Conclusão

Como mencionamos, o objetivo de nosso trabalho é analisar o comportamento da temperatura de Hawking para os buracos negros carregados da teoria EMD e os buracos negros frios da teoria de Brans-Dicke.

No segundo capítulo verificamos a propriedade de **invariância conforme da temperatura de Hawking** para os buracos negros assintoticamente planos da teoria EMD generalizada pelos parâmetros “ $\alpha$ ”, da ação (2.1), e “ $\omega$ ” da ação (2.79), que não havia sido verificada ainda na literatura. Significa que, para baixas energias, a temperatura de Hawking é a mesma no *referencial de Einstein* e no *referencial de cordas* para os modelos de Cordas Tipo I (2.81), Cordas Tipo IIA (2.82) e Cordas Heteróticas (2.83) em 4 dimensões. Esta propriedade não é de forma alguma esperada por motivos físicos prévios, pois mesmo para o caso particular de uma isometria conforme, a temperatura não tem razões para permanecer a mesma, seguindo o raciocínio da Mecânica Estatística.

O resultado novo na literatura mais interessante obtido em nossa dissertação é que para os modelos de cordas a baixas energias mencionados acima, a mesma propriedade de invariância conforme da temperatura de Hawking foi obtida para **buracos negros assintoticamente não planos**. Também fizemos a análise da temperatura de Hawking dos BN assintoticamente não planos usando a transformação conforme geral (2.72). Obtivemos, assim, a invariância conforme da temperatura de Hawking para os BN assintoticamente não planos que reproduzem os modelos de cordas a baixas energias.

No terceiro capítulo, estabelecemos a existência de buracos negros neutros frios no *referencial de Jordan* e no *referencial de Einstein*, que foi abordada na referência [15], obtendo assim a mesma propriedade de invariância conforme da temperatura de Hawk-

ing para estas classes de buracos negros, o que não havia sido feito antes na literatura. Também um outro resultado novo na literatura obtido aqui é que demonstramos a existência de uma **nova classe de buracos negros frios** que possuem a propriedade de invariância conforme da temperatura de Hawking, em que os parâmetros livres das soluções descrevem a **teoria anômala de Brans-Dicke**. Notamos que há uma **quebra da invariância conforme da temperatura de Hawking** para os casos em que a transformação conforme não é uma isometria conforme, pois neste caso existem buracos negros no *referencial de Jordan* e não existe BN no *referencial de Einstein*, impossibilitando assim a análise da temperatura para o *referencial de Einstein*.



# Apêndice A

## Massa Quasi-Local

Vamos usar o formalismo desenvolvido independentemente por Brown-York [5] e Hawking-Horowitz[6] do cálculo da massa quasi-local de um espaço-tempo. Em uma variedade diferenciável “ $D$ ” dimensional com métrica “ $g_{\mu\nu}$ ” e determinante da métrica “ $g$ ”, podemos calcular a massa quasi-local da ação generalizada

$$S = \int d^D x \sqrt{-g} \left\{ R - \frac{B}{(D-2)} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \exp \left[ \frac{-4\alpha\varphi}{(D-2)} \right] F^2 \right\}, \quad (\text{A.1})$$

da seguinte maneira. Considerando o elemento de linha

$$dS^2 = U(r) dt^2 - U^{-1}(r) dr^2 - R^2(r) d\Omega_{D-2}, \quad (\text{A.2})$$

a massa quasi-local associada a este espaço-tempo será [2]:

$$M(r) = \frac{\sqrt{U(r)}}{4\pi} \left[ Y_0(r) - \sqrt{U(r)} \frac{dR(r)}{dr} \right] \left[ \frac{dA_{D-2}(R)}{dR} \right]_{R=R(r)}, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$A_{D-2}(R) = (4\pi)^{\frac{D-2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)}{\Gamma(D-2)} R^{D-2}(r) \quad (\text{A.4})$$

$$\Gamma(D) = D!,$$

e “ $Y_0(r)$ ” é o zero da energia do espaço-tempo, que é uma função arbitrária, “ $A_{D-2}(R)$ ” é a área da  $(D-2)$ -esfera do elemento de ângulo sólido de (A.2). No nosso caso em que

( $B = D = 4$ ), temos

$$A = 2\pi R^2$$

$$\left[ \frac{dA_{D-2}(R)}{dR} \right]_{R=R(r)} = 4\pi R.$$

Se escolhermos “ $Y_0(r) = 1$ ”, usando (2.48) e (2.49) em (A.3), obtemos que a massa quasi-local do buraco negro dilatônico será:

$$M(r) = r \left\{ \sqrt{\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)} - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left[ 1 - \frac{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) r_-}{r} \right] \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Fazendo o limite “ $r \rightarrow \infty$ ”, recuperamos a massa total de Bondi, podendo ser calculada pelo método formulado por Arnowitt-Deser-Misner(ADM) [19]. Então:

$$M = \lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \frac{r_+ + \gamma r_-}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Agora podemos calcular a carga associada ao buraco negro carregado (2.51). Considerando a termodinâmica de buracos negros carregados, a primeira lei é

$$dM = TdS + VdQ, \quad (\text{A.7})$$

onde “ $M$ ” é a massa total do buraco negro carregado, “ $T$ ” é a temperatura associada ao BN, “ $S$ ” a entropia, “ $V$ ” o potencial elétrico calculado no horizonte de eventos e “ $Q$ ” é a carga total do BN. Esta é a forma diferencial da primeira lei, mas a forma exata, é a fórmula de Smarr

$$M = 2TS + VQ. \quad (\text{A.8})$$

Então no caso do BN (2.51), obtemos

$$Q = \pm e^{-\alpha\varphi_\infty} \sqrt{r_+ [M - 2TS]}. \quad (\text{A.9})$$

Usando

$$S = \frac{A_H}{4} = \frac{4\pi R^2(r_+)}{4} = \pi r_+^{1+\gamma} (r_+ - r_-)^{1-\gamma}, \quad (\text{A.10})$$

de (A.6), (A.9), (A.10) e (2.58) temos:

$$Q = \pm e^{-\alpha\varphi_\infty} \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{r_+ r_-}. \quad (\text{A.11})$$

Para o elemento de linha (2.61), a massa quasi-local (A.3) é:

$$M(r) = Y_0 \sqrt{r(r-b)} - \left( \frac{1-\gamma}{2} \right) (r-b). \quad (\text{A.12})$$

Escolhendo “ $Y_0 = \left(\frac{1-\gamma}{2}\right)$ ” e fazendo o limite em que “ $r \rightarrow \infty$ ” em (A.12), obtemos que a massa total do BN (2.61) é:

$$M = \lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = \left( \frac{1-\gamma}{4} \right) b. \quad (\text{A.13})$$

Para o elemento de linha (2.80), a massa quasi-local (A.3) é:

$$M(r) = r e^{2\alpha\varphi_\infty} \left[ Y_0 \sqrt{\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{(3-2\gamma)} - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{2(1-\gamma)} \left(1 - \frac{\gamma r_-}{r}\right)} \right]. \quad (\text{A.14})$$

Escolhendo “ $Y_0 = 1$ ” e fazendo o limite em que “ $r \rightarrow \infty$ ” em (A.14), obtemos que a massa total do BN (2.80) é:

$$M = \lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = e^{2\alpha\varphi_\infty} \left( \frac{r_+ + r_-}{2} \right). \quad (\text{A.15})$$

Uma propriedade interessante pode ser mostrada com o auxílio da liberdade de calibre do potencial escalar elétrico do BN. Usando a liberdade de calibre do potencial, podemos mostrar que a entropia e a carga do BN, são invariantes conforme.

A primeira lei da termodinâmica de BN no caso conforme fica:

$$\widehat{M} = 2\widehat{T}\widehat{S} + \widehat{V}\widehat{Q}. \quad (\text{A.16})$$

Se a temperatura é invariante conforme ( $\widehat{T} = T$ ) então, se usarmos a liberdade de calibre do potencial elétrico ( $\widehat{V} = V + C$ ), temos o seguinte resultado para a constante do potencial conforme no caso em que a entropia e a carga são invariantes conforme ( $\widehat{S} = S$ ;  $\widehat{Q} = Q$ ):

$$\begin{aligned} \widehat{M} &= 2\widehat{T}\widehat{S} + \widehat{V}\widehat{Q} \\ &= 2TS + VQ + CQ \\ \Rightarrow C &= \frac{\widehat{M} - 2TS - VQ}{Q}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Logo, escolhendo a constante de calibre “ $C$ ” como (A.17), temos a propriedade que a entropia e a carga do BN são invariantes conformes. Esta propriedade é válida para todos os buracos negros carregados em que a temperatura de Hawking é invariante conforme.

# Apêndice B

## Transformação Conforme

Seja uma variedade diferenciável “ $M$ ” de dimensão “ $D$ ”, com métrica “ $g_{\mu\nu}$ ” e determinante da métrica “ $g$ ”. Podemos definir uma classe de transformações particulares que são muito úteis em várias teorias na Física. Seja uma função das coordenadas  $\Omega(x^\alpha)$ , diferenciável de classe  $C^k(k \geq 2)$  e estritamente positiva definida em “ $M$ ”. Então chamamos uma aplicação  $\Psi : M \rightarrow M$  de uma transformação conforme se ela transforma a métrica pela relação:

$$\hat{g} = \Omega^2 g, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{g} &= \hat{g}_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu \otimes dx^\nu \\ g &= g_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu \otimes dx^\nu, \end{aligned}$$

são operadores métricos em “ $M$ ”. No caso particular em que  $\Psi : M \rightarrow M$  é um difeomorfismo (aplicação inversível bijetiva e diferenciável), então dizemos que  $\Psi$  é uma isometria conforme.

Para ficar clara a importância da transformação conforme, vamos analisá-la. A relação (B.1) nos mostra que dado objetos geométricos na variedade “ $M$ ” (vetores ou formas)  $X, Y, Z$  e  $W$  definidos em um ponto  $p \in M$ . Então:

$$\frac{g(X; Y)}{g(W; Z)} = \frac{\hat{g}(X; Y)}{\hat{g}(W; Z)},$$

significando que ângulos e razões entre objetos geométricos se conservam pela transformação conforme. Então podemos mostrar que a estrutura causal do espaço-tempo se conserva por transformação conforme, vetores tipo-tempo, nulo ou espaço, usando a métrica original, permanecem vetores tipo-tempo, nulo ou espaço usando a métrica conforme.

Considerando a relação (B.1) de uma transformação conforme, podemos calcular as componentes da conexão associadas à métrica conforme

$$\begin{aligned}
\widehat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\widehat{g}^{\alpha\lambda}(\partial_{\mu}\widehat{g}_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}\widehat{g}_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}\widehat{g}_{\mu\nu}) \\
&= \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Omega^{-1}[\delta_{\nu}^{\alpha}\nabla_{\mu}\Omega + \delta_{\mu}^{\alpha}\nabla_{\nu}\Omega - g_{\mu\nu}g^{\alpha\lambda}\nabla_{\lambda}\Omega] \\
&= \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + H^{\alpha}_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Assim

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{\mu}X_{\nu} &= \partial_{\mu}X_{\nu} - \widehat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}X_{\alpha} \\
&= \nabla_{\mu}X_{\nu} - H^{\alpha}_{\mu\nu}X_{\alpha}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$H^{\alpha}_{\mu\nu} = H^{\alpha}_{\nu\mu}. \tag{B.4}$$

Podemos comparar o comportamento da equação de uma geodésica  $\lambda$  em relação a derivação  $\nabla_{\mu}$ , a uma derivação  $\widehat{\nabla}_{\mu}$ . No primeiro caso temos

$$\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\nabla_{\mu}\left(\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right) = 0,$$

mas no segundo temos

$$\begin{aligned}
\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\widehat{\nabla}_{\mu}\left(\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right) &= \frac{dx^{\mu}}{d\tau}\nabla_{\mu}\left(\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right) + \frac{dx^{\mu}}{d\tau}H^{\nu}_{\mu\alpha}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \\
&= 2\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\nabla_{\mu}\ln\Omega - \left(g_{\alpha\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right)g^{\nu\beta}\nabla_{\beta}\ln\Omega.
\end{aligned}$$

Logo, em geral  $\lambda$  não é uma geodésica em relação à derivação  $\widehat{\nabla}_{\mu}$ . Mas se  $\lambda$  for uma geodésica nula, então

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} &= 0 \\
\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\widehat{\nabla}_{\mu}\left(\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right) &= \left(2\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\nabla_{\mu}\ln\Omega\right)\left(\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right)
\end{aligned}$$

que é a equação de uma geodésica nula em um parâmetro não-afim, mostrando que o cone de luz permanece o mesmo para métrica conforme. As componentes do tensor de Riemman para a métrica conforme são:

$$\begin{aligned}\widehat{R}^{\alpha}_{\beta\mu\nu} &= \partial_{\beta}\widehat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\widehat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\mu} + \widehat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\lambda}\widehat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \widehat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\lambda}\widehat{\Gamma}^{\lambda}_{\beta\nu} \\ \widehat{R}_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} &= R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} - 2\nabla_{[\alpha}H^{\nu}{}_{\beta\mu]} + 2H^{\lambda}{}_{\mu[\alpha}H^{\nu}{}_{\beta]\lambda},\end{aligned}$$

onde os parênteses nos índices, representam antisimetrização. As componentes do tensor de Ricci para a métrica conforme são:

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{\mu\nu} &= \widehat{R}^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \\ &= R_{\mu\nu} - (D-2)\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\ln\Omega - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\ln\Omega + (D-2)(\nabla_{\mu}\ln\Omega)(\nabla_{\nu}\ln\Omega) + \\ &\quad - (D-2)g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\nabla_{\alpha}\ln\Omega)(\nabla_{\beta}\ln\Omega).\end{aligned}$$

Finalmente a relação entre os escalares de curvatura é:

$$\widehat{R} = \widehat{g}^{\mu\nu}\widehat{R}_{\mu\nu} = \Omega^{-2}[R - 2(D-1)g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\ln\Omega - (D-2)(D-1)g^{\mu\nu}(\nabla_{\mu}\ln\Omega)(\nabla_{\nu}\ln\Omega)]. \quad (\text{B.5})$$

Se definirmos as componentes do tensor de Weyl por

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{2}{D-2}\{g_{\alpha[\nu}R_{\mu]\beta} + g_{\beta[\mu}R_{\nu]\alpha}\} + \frac{2}{(D-1)(D-2)}Rg_{\alpha[\mu}g_{\nu]\beta},$$

temos que o tensor de Weyl é invariante por transformações conformes

$$\widehat{C}_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} = C_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu},$$

notando que a ordem dos índices é importante para que a simetria de invariância conforme se cumpra.

# Referências Bibliográficas

- [1] G. Clément and C. Leygnac, *Phys. Rev.* **D70**, 084018 (2004).
- [2] S. Sur, S. Das and S. SenGupta, Preprint arXiv:hep-th/0508150 v1, 20 Aug 2005.
- [3] D. Garfinkle, G. Horowitz and A. Strominger, *Phys. Rev.* **D43**, 3140 (1991).
- [4] K. C. K. Chan, J. Horne and R. B. Mann, *Nucl. Phys.* **B447**, 441 (1995).
- [5] J. D. Brown and J. W. York, *Phys. Rev.* **D47**, 1407 (1993).
- [6] S. W. Hawking and G. T. Horowitz, *Class. Quant. Grav.* **13**, 1487 (1996)
- [7] R. M. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press (1984).
- [8] S. J. Poletti, J. Twamley and D. L. Wiltshire, *Phys. Rev.* **D51**, 5720 (1995).
- [9] K. C. K. Chan and R. B. Mann, , *Phys. Rev.* **D50**, 6385 (1994).
- [10] R. Gregory and J. A. Harvey, *Phys. Rev.* **D47**, 2411 (1993).
- [11] F. Dowker, J. P. Gauntlett, D. A. Kastor and J. Traschen, *Phys. Rev.* **D49**, 2909 (1994).
- [12] G. Clément, D. Gal'tsov and C. Leygnac, arXiv:hep-th/0208225 v3 7 May 2004.
- [13] K. A. Bronnikov, G. Clément, C. P. Constantinidis and J. C. Fabris, *Grav. & Cosmol.* **4**, 128 (1998).
- [14] K. A. Bronnikov, gr-qc/0204001.



- [15] K. A. Bronnikov, C. P. Constantinidis, R. L. Evangelista and J. C. Fabris, *Inter. Journal of Mod. Phys.* **D8**, 481 (1999).
- [16] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D13**, 2188 (1976).
- [17] S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **D43**, 199 (1975).
- [18] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press (1973).
- [19] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, "The Dynamics of General Relativity" in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten (New York: Wiley) (1962).
- [20] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Field in Curved Space*. Cambridge: Cambridge University Press (1982).
- [21] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D5**, 1239 (1972).
- [22] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D7**, 949 (1973).
- [23] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D7**, 2333 (1973).
- [24] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D9**, 3292 (1974).
- [25] W. G. Unruh, *Phys. Rev.* **D14**, 870 (1976).
- [26] G. Milanesi and M. Mintchev, *arXiv:hep-th/0509080 v2 26 Sep 2005*.
- [27] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics*. The University of Chicago Press, London and Chicago (1994).
- [28] K. A. Bronnikov, *Acta Phys. Polon.* **B4**, 251 (1973).
- [29] G. D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*. Cambridge, MA: Harvard University Press (1923).

- [30] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).
- [31] L. Smarr, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 71 (1973).
- [32] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [33] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D9**, 3292 (1973).
- [34] K. Schwarzschild, *Kl. Math. Phys. Tech.*, 189-196 (1916).
- [35] H. Reissner, *Ann. Physik*, **50**, 106-120 (1916).
- [36] G. Nordstrom, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **20**, 1238-1245 (1918).
- [37] J. Polchinski, *String Pheory*. Cambridge University Press (1998).
- [38] C. H. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925 (1961).