DESARROLLO DEL FORMALISMO DE BARGMANN-WIGNER PARA MESONES VECTORIALES *

por

Andrés José Kálnay

Instituto de Matemática, Astronomia y Física,
Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1964

---

* Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad de Buenos Aires.

Este trabajo fué iniciado en el Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

INDICE

CAPITULO PRIMERO

INTRODUCCION

El objetivo central de este trabajo es desarrollar el formalismo de Bargmann-Wigner (=BW) para los mesones vectoriales, tratando de seguir cuando es posible una via paralela a la seguida por Dirac para spin $\frac{1}{2}$. Se tratará que resalten las diferencias, cuando existan.

1.a - NOCIONES PRELIMINARES

Para mesones vectoriales (spin 1) la función de onda $\psi_{i_1 i_2}(x)$ tiene en el formalismo de BW dos índices spinoriales, $i_1, i_2 = 1, 2, 3, 4$.

Los operadores matriciales M tales que $M\psi = \varphi$, tienen 4 índices y $M\psi = \varphi$ significa $M_{i_1 i_2, j_1 j_2} \psi_{j_1 j_2} = \varphi_{i_1 i_2}$. Sean P y Q matrices 4×4 de dos índices; en el caso frecuente en que M es el producto tensorial de una matriz $P_{(1)}$ que opera sobre los índices spinoriales de la izquierda de ψ, por otra matriz $Q_{(2)}$ que opera sobre los de la derecha, $M = P_{(1)} Q_{(2)}$ significa $M_{i_1 i_2, j_1 j_2} = P_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2}$; en particular, $P_{(1)} I_{(2)}$ opera así sobre ψ: $(P_{(1)} I_{(2)} \psi)_{i_1 i_2} = P_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \psi_{j_1 j_2} = P_{i_1 j_1} \psi_{j_1 i_2}$; $I_{(1)} Q_{(2)}$ opera así: $(I_{(1)} Q_{(2)} \psi)_{i_1 i_2} = \delta_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} \psi_{j_1 j_2} = Q_{i_2 j_2} \psi_{j_1 j_2}$.

Frecuentemente abreviaremos $P_{(1)} I_{(2)} \psi$ escribiendo $P_{(1)} \psi$, y $I_{(1)} Q_{(2)} \psi$ escribiendo $Q_{(2)} \psi$. Del mismo modo la abreviación

$M = R_{(1)} + S_{(2)}$ significa $M = R_{(1)}I_{(2)} + I_{(1)}S_{(2)}$.

Nota: Un asterisco * puesto a continuación del número de orden de una fórmula indica que no es original nuestra, si bien ofrecemos una demonstración nueva. Un doble asterisco** indica que ni la fórmula ni la demonstración son originales nuestras.

1.b - LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER

Para spin 1 son

$$P_\mu \gamma^\mu{}_{(1)} \psi = m\,\psi \qquad (1.1\text{-a})^{**}$$

$$P_\mu \gamma^\mu{}_{(2)} \psi = m\,\psi \qquad (1.1\text{-b})^{**}$$

$$\psi_{ij} = \psi_{ji} \qquad (1.1\text{-c})^{**}$$

y su significado en subíndices es claro con la notación precedente; las γ^μ son las utilizadas para spin $\frac{1}{2}$.

Fueron obtenidas por Bargamnn y Wigner en 1948 [1], basados en consideraciones sobre representaciones de grupos. En realidad Bargmann y Wigner obtuvieron ecuaciones para spin arbitrario. Se puede consultar una exposición detallada en un artículo de Leite Lopes [17]. Bargmann y Wigner llegaron hasta las ecuaciones de los campos libres, dejando casi sin desarrollar el formalismo correspondiente.

Es fácil ver que (1.1-a) y (c) implican (b), por lo que basta imponer

$$P_\mu \gamma^\mu_{(1)} \psi = m\,\psi \qquad (1.2\text{-a})^{**}$$

$$\psi_{ij} = \psi_{ji} \qquad (1.2\text{-b})^{**}$$

1.c - MAS SOBRE NOTACION

+ significa el conjugadohermitiano habitual: para funciones de onda, $\psi^+_{i_2 i_1} = \psi^*_{i_1 i_2}$; para matrices (puras) $M^+_{i_1 i_2; j_1 j_2} = M^*_{j_1 j_2, i_1 i_2}$ con lo que si $M = P_{(1)} Q_{(2)}$ es $M^+ = P^+_{(1)} Q^+_{(2)}$; T indica transpuesto. $\psi^T \varphi$ indica abreviadamente $\mathrm{Tr}\ \psi^+ \varphi = \psi^+_{i_2 i_1} \varphi_{i_1 i_2}$.

Si M ψ se interpreta como el productohabitual de las matrices M y ψ, ambas de dos índices y ambas 4 × 4, a veces resultan útiles las fórmulas

$$M_{(1)} \psi = M\psi; \quad M_{(2)} \psi = \psi M^T; \quad \psi^+ M_{(1)} = \psi^+ M; \quad \psi^+ M_{(2)} = M\psi^+ \qquad (1.3)$$

que se demuestran aplicando en los los. miembros las definiciones precedentes y en los 2os. las reglas habituales del álgebra matricial elemental. Por lo tanto, si ψ es simétrica en los índices spinoriales, <u>y si además</u>

$$(M_{(1)}\psi)_{ij} = (M_{(1)}\psi)_{ji} \qquad \text{entonces} \qquad M_{(1)}\psi = M\psi = M_{(2)}\psi \qquad (1.4)$$

(Es esencial la hipótesis subrayada); aplicación: (1.1) implica (1.2).

Sistemáticamente usaremos letras delgadas(e.g. ψ) para indicar entes análogos a los descriptos habitualmente con letras gruesas (e.g. $\boldsymbol{\psi}$) en spin $\frac{1}{2}$ o cero, predominando spin $\frac{1}{2}$ (únicamente paralelizaremos spin 0 en algunas secciones del capítulo 8). Las pocas excepciones (p^μ, x^μ) se hacen evidentes pos si mismas.

En la representación p, $p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, salvo que indiquemos explícitamente lo contrario. Usamos $c = \hbar = 1$. La métrica es

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$ y $a, b, \ldots = 1, 2, 3$ indican índices tensoriales; $i, j, \ldots$ índices spinoriales.

La identidad es $I = I_{(1)} I_{(2)}$ o sea $I_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2}$; además definimos $\tilde{I}_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1}$. Como en spin $\frac{1}{2}$, $\beta = \gamma^0$ (no confundir con las β^μ de Duffin-Kemmer que son 10×10); β es 4×4, como $\vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma}$, $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$. En los pocos casos en que usamos una representación de las matrices de Dirac, será la (2.6).

Usamos la convención de suma para índices spinoriales o tensoriales mudos, pero una raya bajo un índice indica no sumar si sólo está repetidos dos veces; 2 rayas, no sumar si sólo está repetido 3 veces, etc. P. ej., si $i,j = 1,2$, $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2$; $a_{\underline{i}} b_{\underline{i}} = a_1 b_1$ ó $a_2 b_2$; $a_{\underline{i}} b_{\underline{i}} c_{\underline{i}} = a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2$; $a_{\underline{\underline{i}}} b_{\underline{\underline{i}}} c_{\underline{\underline{i}}} = a_1 b_1 c_1$ ó $a_2 b_2 c_2$.

La mayor parte de las demostraciones están en apéndices; A3-2 significa apéndice 2 de la sección 3. La fórmula número 1 de tal apéndice se indica (A3-2.1), mientras que (3.1) es la la. fórmula del tercer capítulo del texto. En los apéndices no usamos la convención del asterisco (enunciada en Secc. 1.a).

Hemos escrito en entrelineado simple temas de aplicación poco frecuente o detalles dedicados al rigor.

1.d - OTROS FORMALISMOS

Los formalismos de Kemmer [15] y Belinfante [2,3,4] tratan de describir a los mesones vectoriales paralelizando a la ecuación de Dirac para el electrón, y ambos pueden servir para describir simultáneamente partículas de spin 1 y 0. Corresponde mencionar también los trabajos de de Broglie [9].

Las ecuaciones de Kemmer para la partícula libre son

$$p_\mu \beta^\mu \psi = m\psi \qquad (1.5\text{-a})^{**}$$

donde, si el spin es igual a uno (puro) es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_{10} \end{pmatrix} \qquad (1.5\text{-b})^{**}$$

El álgebra de las matrices β^μ es más complicada que la de las γ^μ de Dirac debido principalmente a que las β^μ son singulares, lo cual dificulta el cálculo, y, a veces, la interpretación física. En particular el hamiltoniano no sólo tiene autovalores $\pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$ sino también 0.

Las ecuaciones de Belinfante pueden pensarse como obtenidas eligiendo una representación de las matrices β^μ,

$$\beta^\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)}\right) \qquad (1.6)^{**}$$

y son (para spin 1 puro)

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)}\right)p_\mu \psi = m\psi \qquad (1.7\text{-a})^{**}$$

$$\psi_{ij} = \psi_{ji} \qquad (1.7\text{-b})^{**}$$

donde $\psi_{\text{Belinfante}} = \psi_{BW}$; también aparecen operadores singulares; en el caso de Belinfante, aparecen esencialmente porque su objetivo básico es describir complexivamente spin 0 y 1 (no utilizando, salvo excepciones la (1.7-b)); las ecuaciones (1.7) de Belinfante y las (1.1) de BW son equivalentes [3,+], y este trabajo tanto podría titularse "Desarrollo del formalismo de BW" como "Ampliación modificada del formalismo de Belinfante".

Hay que aclarar que no puede esperarse eliminar todos los operadores singulares para spin 1, ya que e. g. la componente z del spin admite el autovalor 0; pero si se trabaja con spin 1 puro, y si entre las ecuaciones equivalente (1.1) y (1.7) se toman las (1.1) como punto de partida, se puede obtener de manera natural la eliminación de operadores singulares innecesarios.

El método de la fusión de de Broglie ha sido discutido en el pasado, pero las ecuaciones a que llega para $m \neq 0$ (de Broglie, op. cit. [9], Cap. VII ec. 22) son idénticas a las de BW si se añade $\psi_{ij} = \psi_{ji}$. El método de la fusión lo lleva de manera natural a utilizar operadores singulares.

En todos los formalismos anteriores la función de onda tiene componentes redundantes; (hay 10 componentes entotal, si se especifica spin 1 puro, pero el número de componentes spino-

---

[+] Belinfante parte en gral. de (1.7-a) con $(\gamma^{\mu}_{(1)} + \gamma^{\mu}_{(2)})$ singular; pero menciona, como forma equivalente unas ecuaciones idénticas a las (1.1); el interés del trabajo de BW está más en la forma de establecerlas, que en las ecuaciones mismas.

riales que físicamente se ha de esperar si la carga es $\pm$ e, es $2 \times 3 = 6$ (el 3 corresponde a la componente del spin); la existencia de componentes redundantes obliga a tornar ciertas precauciones al calcular, y facilita la introducción de operadores singulares, pero permite (si de desea) dar forma <u>manifiesta</u> a la covariancia relativista.

Existen formalismos [12, 14, 25, 26] "tipo spin $\frac{1}{2}$" en los cuales se eliminan las quatro componentes redundantes, y que carecen de operadores singulares innecesarios, pero a costa de abandonar el carácter manifiesto de la covariancia relativista (por ejemplo las ecuaciones resultan de 1er. orden en $\partial/\partial t$ y de 2° orden en las derivadas espaciales).

<u>Dejamos constancia que no hemos agotado la lista de formalismos empleados para spin 1</u>; agregaremos unicamente el original, de Proca [23, 24] en que las ecuaciones no imitan la forma de la ecuación de Dirac para spin $\frac{1}{2}$ sino a las ecuaciones del electromagnetismo:

$$\partial_\nu U^\nu = 0 \qquad (1.7'\text{-a})^{**}$$

$$m\, G_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu \qquad (1.7'\text{-b})^{**}$$

$$\partial_\nu\, G^{\mu\nu} = m\, U^\mu \qquad (1.7'\text{-c})^{**}$$

En notación tridimensional ponemos +

+ $\vec{E}$, $\vec{H}$ para el mesón vectorial; $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{H}}$ para el electromagnético, y E para la energía.

$$U^0 = V;(U^1,U^2,U^3) = \vec{U};(G^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.7'')^{**}$$

entonces las ecuaciones de Proca se agrupan, como es bien sabido, en un sistema de ecuaciones fundamentales,

$$-\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = m\,\vec{E} + \text{grad } V \qquad (1.7\text{-a})^{**}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = m\,\vec{U} + \text{rot } \vec{H}$$

$$m\,\vec{H} = \text{rot } \vec{U}$$

$$m\,V = -\,\text{div } \vec{E} \qquad (1.7\text{-b})^{**}$$

y otro de consecuencias,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\,\text{div } \vec{U}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\,\text{rot } \vec{E} \qquad (1.7\text{-c})^{**}$$

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

1.e - La Funcion de Onda Adjunta $\overline{\Psi}$

Se define $\overline{\Psi}$ en forma tal que $\overline{\Psi}\Psi$ sea invariante ante transformaciones propias de Lorentz. Consecuentemente con Belinfante [2] ponemos

$$\overline{\Psi} = \Psi^{+}\,\gamma^{o}_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)} \qquad (1.8)^{**}$$

De (1.2) se obtiene

$$\left.\begin{aligned} i\,\partial_o\,\psi^+ &= -i\,\vec{\partial}\cdot\psi^+\,\vec{\alpha}_{(1)} - m\,\psi^+\,\beta_{(1)} \\ \psi^+_{ij} &= \psi^+_{ji} \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

o sea

$$\left.\begin{aligned} i\,\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu_{(1)} + m\,\bar{\psi} &= 0 \\ \bar{\psi}_{ij} &= \bar{\psi}_{ji} \end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

formalmente análogas a las del electrón.

Hemos hablado de invariancia Lorentz; ella está discutida en gral. en el Cap. 6, pero aseveraciones como la citada se comprenden rápidamente si se tiene en cuenta que ante una transformación propia de Lorentz ψ se transforma como $\psi_{(1)}\,\varphi_{(2)}$ ($\psi_{(1)}$, $\varphi_{(2)}$, fermiones de spin $\frac{1}{2}$).

CAPITULO SEGUNDO

INSTRUMENTOS MATEMATICOS UTILES PARA EL DESARROLLO DEL FORMALISMO

La mayor parte de este capítulo de matemáticas está dedicado a crear un instrumento que nos permita trabajar con precisión en un espacio de componentes redundantes, aún en la delicada teoría de una "partícula". Intercalar aquí este capítulo, puede dar lugar a la impresión de que el formalismo de BW es más complicado que los similares; sin embargo no es así, pues si prolongamos y profundizamos los demás formalismos de componentes redundantes hasta una etapa similar a la que esperamos conseguir con este trabajo, necesitaríamos crear también allí instrumentos matemáticos semejantes.

2.a - EL PRODUCTO ESCALAR

En el formalismo de BW puede definirse un producto escalar invariante [1]

$$\int \frac{1}{p_o} \left| \psi^+ \gamma^o_{(1)} \gamma^o_{(2)} \varphi \right| d^3p = \int \frac{1}{p_o} |\bar{\psi}\varphi| d^3p \qquad (2.1)^{**}$$

que es definido positivo. Sin embargo, tratándose de spin entero nos convendrá introducir en la 1a. cuantificación una "aproximación de una partícula" (cf. Cap. 3) donde la densidad ρ no es la densidad de probabilidad sino una densidad de carga, y (para esa finalidad) no podemos usar (2.1).

En cambio nos resultará adecuado el producto escalar

$$(\psi,\varphi) = \int(\psi,\varphi)_{sp}\, d^3x\,;\ (\psi,\varphi)_{sp} = \psi^+ \gamma^o_{(2)}\varphi \qquad (2.2)$$

(métrica indefinida en el espacio de las ψ) en el que hemos ais lado la parte puramente spinoral $(\psi,\varphi)_{sp}$. El producto escalar (2.2) es tal que conduce de manera natural a la densidad ρ correcta (cf. Cap. 3).

En una formulación sin componentes redundantes, todos los productos escalares

$$(\psi\,,\varphi) = \int \psi^+ \eta\, \varphi\, d^3x$$

con igual distribución de signos en el espectro de η son <u>físicamente equivalentes</u> [22]; por lo tanto, nuestro (2.2) es físicamente indistinguible de todo otro producto escalar tal que llevado a una representación ψ' sin componentes redundantes, el nuevo η tenga la misma distribución de signos que $\eta = I_{(1)}\gamma^o_{(2)}$. Nuestra distribución de signos es simétrica.

Por otro lado, la simetría de ψ y φ respecto de los índices spinoriales implica que

$$(\psi,\varphi)_{sp} = \psi^+ \gamma^o_{(2)}\varphi = \psi^+\left[a\,\gamma^o_{(2)} + (1-a)\gamma^o_{(1)}\right]\psi$$

donde <u>a</u> es un número arbitrario; siendo equivalente trabajar con cualquier <u>a</u>, hemos elegido $a = 1$ por simplicidad. Si fuese $a = \frac{1}{2}$, el papel de η estaría desempeñado por $\frac{1}{2}(\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)})$, que es sin gular.

2.b - LA CONDICIÓN INICIAL

Es sabido que [3] las ecuaciones de BW implican la condición inicial

$$(I-\gamma^0_{(1)}\gamma^0_{(2)})(\gamma^0_{(1)}H_{(1)}+\gamma^0_{(2)}H_{(2)})\psi=0 \text{ con } H=\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m \quad , \quad (\psi_{ij}=\psi_{ji}) \qquad (2.3\text{-a})$$

o sea

$$\left[(I-\gamma^0_{(1)}\gamma^0_{(2)})+\frac{1}{2m}(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)})\cdot\vec{p}(I+\gamma^0_{(1)}\gamma^0_{(2)})\right]=0, \quad (\psi_{ij}=\psi_{ji}) \qquad (2.3\text{-b})^{**}$$

que sólo contiene derivadas espaciales y no es, por lo tanto, parte de la ecuación de evolución propiamente dicha de las ondas; como la cumple $\psi(t,x)$ para todo t, o sea, en particular, $\psi(0,x)$, se la llama "condición inicial". Tiene equivalente en las formulaciones de Kemmer y Proca.

Hemos podido dar una forma más simple a la condición inicial, esto es,

$$H_{(1)}\psi=H_{(2)}\psi \qquad (\psi_{ij}=\psi_{ji}) \qquad (2.3\text{-c})$$

donde $H=\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m$. Es trivial demonstrar que las ecuaciones de BW implican (2.3-c): para ello basta multiplicar (1.1-a) por $\gamma^0_{(1)}$, (1.1-b) por $\gamma^0_{(2)}$, y recordando $\partial\psi_{ij}/\partial t=\partial\psi_{ji}/\partial t$, usar (1.4). Pero, por supuesto, ello no basta para demonstrar la equivalencia entre (2.3-c) y p. ej. (2.3-b), pues una de las dos ecuaciones podría ser más restrictiva que la otra; la demonstración de la equivalencia entre nuestra forma (2.3-c) de la condición inicial y la (2.3-b) de Belinfante se da en el apéndice A2-1.

Corolario: Como (demonstración trivial) la (2.3-c) es condición necesaria y suficiente para que $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ sea el valor inicial de una posible función de onda, lo propio ocurre con (2.3-a) y (b).

En el formalismo de Kemmer no es fácil encontrar una simplificación tipo (2.3-c) de la condición inicial.

2.c - LOS ESPACIOS $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{sim}$ y $\mathcal{W}$: OTROS ESPACIOS ASOCIADOS. LAS ψ^{I} Y ψ^{II} DE BELINFANTE

Objectivos de esta sección: 1º : Introducir el espacio $\mathcal{E}$, que en la teoría de una carga será el espacio de los vectores de estado, y en la teoría de campos será el espacio de los operadores de campo (tomados a tiempo fijo). 2º : Introducir espacios auxiliares que serán útiles en lo que sigue.

2.c-1 - Los Espacios $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{sim}$ y $\mathcal{W}$.

Definición: Llamaremos $\mathcal{E}$ al espacio vectorial de las $\psi_{ij}(\vec{x})$ (con i, j = 1, 2, 3, 4) tales que $\int |\psi_{ij}(\vec{x})|^2 \, d^3x$ exista.

El grado de libertad espinorial es $4 \times 4 = 16$.

Definición: Llamaremos $\mathcal{E}^{sim}$ al espacio vectorial de los elementos de $\mathcal{E}$ que cumplen

$$\psi_{ij}(\vec{x}) = \psi_{ji}(\vec{x})$$

El grado de libertad spinorial es igual al número de elementos independientes de una matriz simétrica 4×4, o sea 10.

$\mathcal{E}^{sim}$ es un subespacio de $\mathcal{E}$.

Definición: Llamaremos $\mathcal{W}$ al espacio vectorial de los elementos de $\mathcal{E}^{sim}$ que cumplen la condición inicial (2.3).

Demostraremos más adelante que el grado de libertad spinorial es 6. $\mathcal{W}$ es un subespacio de $\mathcal{E}^{sim}$. Esto cae fuera de lo común, pues p. ej. en spin $\frac{1}{2}$ cualquier

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \\ f_4(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

tal que $\int |f_i|^2 \, d^3x$ exista puede ser el valor inicial $\psi(0, \vec{x})$ de una posible función de onda $\psi(t, \vec{x})$; o sea, allí los análogos de $\mathcal{E}^{sim}$ y $\mathcal{W}$ coinciden, cosa que aquí no ocurre pues (2.3) no es una identidad en $\mathcal{E}^{sim}$.

El que el verdadeiro grado de libertad baje a 6 se visualizará en (2.63) observando la forma explícita de los elementos de $\mathcal{W}$ en una representación se observará lo mismo de manera más sencilla en la representación de Foldy-Wouthuysen-Tani, en la que la condición inicial toma una forma muy simple (cf.(3.92) y (3.100)).

También se visualizará dicho gradode libertad observando la bse que introduciremos en el Cap. 4 para subtender la parte spinorial de $\mathcal{W}$; o bien calculando las autofunciones del spin (Secc. 3.1-2). Por otra parte, 6 es el número que físicamente es de esperar (cf. Secc. 1.d).

En todos los otros formalismos que trabajan con componentes redundantes (Secc. 1.d) se pueden introducir espacios análogos a $\mathcal{E}^{sim}$ y $\mathcal{W}$; los mismos están implícitos en la condición inicial que todos los autores mencionan, aunque no explicitan dichos espacios. Sin embargo, el trabajar explícitamente con $\mathcal{E}^{sim}$ y $\mathcal{W}$ (o sus equivalentes) nos permitirá discutir en forma clara ciertos aspectos oscuros de la teoría (p. ej. el autovalor 0 del hamiltoniano de Kemmer, Secc. 3.c).

Es conveniente recalcar que en la teoría de una "partícula" (Cap. 3) $\mathcal{W}$ (y no $\mathcal{E}^{sim}$) será el espacio de los vectores de estado, y que en la teoría de campos (Cap.8) $\mathcal{W}$ (y no $\mathcal{E}^{sim}$) se transformará en el espacio de los operadores de campo (tomados en t = const.).

2.c-2 - Notación

Si queremos explicitar que trabajamos en la representación x, o en la p, pondremos $\mathcal{W}^x$, o $\mathcal{W}^p$, etc. Si queremos explicitar que trabajamos en una representación diferente de la original (p. ej. en la de Foldy-Wouthuysen-Tani) pondremos $\mathcal{W}^1$, etc.

2.c-3 - Espacios Spinoriales

Introduciremos nociones cómodas para trabajar p. ej. en el Cap.4. Si en los elementos de los espacios de dimensión infinita $\mathcal{E}^p$, $\mathcal{E}^{sim,p}$ o $\mathcal{W}^p$ fijamos p, obtenemos espacios vectoriales de dimen sión 16, 10 o 6 a los que llamamos respectivamente $\mathcal{E}_{sp}$, $\mathcal{E}_{sp}^{sim}$ y W_{sp}^{p}. El índice sp está para recordar que p. ej. los elementos de $\mathcal{E}_{sp}$ sólo tienen variables spinoriales (i,j).

$\mathcal{E}_{sp}$ es el espacio de las matrices $m_{ij}(i,j = 1,2,3,4)$; $\mathcal{E}_{sp}^{sim}$ es el espacio de las matrices m_{ij} simétricas, y W_{sp}^{p} es el espacio de las matrices m_{ij} simétricas que para un valor <u>fijo</u> prefijado de un parámetro p cumplen

$$(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{p} + \beta_{(1)}\, m)\, m = (\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p} + \beta_{(2)}\, m)\, m \qquad (2.4\text{-a})$$

(ver (2.3-c)). Simbólicamente, si

$$H(\vec{p}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m \qquad (2.4\text{-b})^{**}$$

es

$$H_{(1)}(\vec{p})m = H_{(2)}(\vec{p})\, m \qquad (2.4\text{-c})$$

El producto escalar (ψ, φ) (2.2) puede definirse en $\mathcal{E}$, en $\mathcal{E}^{sim}$ o en W. El producto escalar $(\psi, \varphi)_{sp}$ puede definirse en $\mathcal{E}_{sp}$, en $\mathcal{E}_{sp}^{sim}$ o en W_{sp}^{p}.

<u>2.c-4 - Los espacios $\mathcal{E}^{ant}$ y $\mathcal{E}_{sp}^{ant}$</u>.

Para obtener el operador proyección que proyecta $\mathcal{E}$ en W (Secc. 2.f-6) nos será útil definir:

$\mathcal{E}^{ant}$ es el espacio vectorial de las $\psi_{ij}(\vec{x}) \in \mathcal{E}$ antisimé-trica: $\psi_{ij}(\vec{x}) = -\psi_{ji}(\vec{x})$.

Como antes, se puede definir el espacio $\mathcal{E}_{sp}^{ant}$ de las ma-trices antisimétricas, que tiene dimensión 6.

2.c-5 - Las ψ^{I} y ψ^{II} de Belinfante [3].

Sea ψ un elemento de <u>cualquiera</u> de los espacios anteriores, por ejemplo de $\mathcal{E}$. Se puede poner

$$\psi = \psi^{I} + \psi^{II}; \qquad (2.5\text{-a})^{**}$$

$$\psi^{I} = \Lambda^{I}\psi \; ; \; \psi^{II} = \Lambda^{II}\psi; \qquad (2.5\text{-b})^{**}$$

$$\Lambda^{I} = \frac{1}{2}\left(I + \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right) \; ; \; \Lambda^{II} = \frac{1}{2}\left(I - \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right) \quad (2.5\text{-c})^{**}$$

Como es sabido, Λ^{I} y Λ^{II} tienen todas las propiedades de un operador proyección, es decir

$$(\Lambda^{I})^2 = \Lambda^{I} \qquad (\Lambda^{II})^2 = \Lambda^{II} \qquad \Lambda^{I}\Lambda^{II} = \Lambda^{II}\Lambda^{I} = 0 \qquad (2.5\text{-d})^{**}$$

y proyectan a $\mathcal{E}$ respectivamente en los suespacios $\mathcal{E}^{I}$ y $\mathcal{E}^{II}$ ($\psi^{I} \in \mathcal{E}^{I}$, $\psi^{II} \in \mathcal{E}^{II}$ si $\psi \in \mathcal{E}$); análogamente proyectan $\mathcal{E}^{sim}$ en $\mathcal{E}^{sim\,I}$ y $\mathcal{E}^{sim\,II}$, $\mathcal{W}$ en $\mathcal{W}^{I}$ y $\mathcal{W}^{II}$, etc. Si $\oplus$ indica suma directa, es

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{I} \oplus \mathcal{E}^{II}; \; \mathcal{E}^{sim} = \mathcal{E}^{sim\,I} \oplus \mathcal{E}^{sim\,II}; \; \mathcal{W} = \mathcal{W}^{I} \oplus \mathcal{W}^{II} \qquad (2.5\text{-e})$$

(es decir para toda $\psi \in \mathcal{E}$ es $\psi = \psi^{I} + \psi^{II}$, $\psi^{I} \in \mathcal{E}^{I}$, $\psi^{II} \in \mathcal{E}^{II}$, etc.).

<u>Estas descomposiciones son ortogonales respecto a (2.2)</u>; es decir, para toda $\psi^{I} \in \mathcal{E}^{I}$ (o $\mathcal{E}^{sim\,I}$, etc) y para toda $\varphi^{II} \in \mathcal{E}^{II}$ (o $\mathcal{E}^{sim\,II}$, etc.) es

$$(\psi^{I}, \varphi^{II}) = 0 \, , \qquad (2.5\text{-f})$$

como se demostrará en Secc. 2.f.

Como $\psi^{I} \in \mathcal{E}^{sim\,I}_{sp}$ tiene 6 componentes independientes (ver (2.9-b) más abajo), y también 6 es la dimensión de $\mathcal{W}^{p}_{sp}$, Λ^{I} es uno de los medios que fueron utilizados para eliminar las 4 componentes redundantes de $\psi \in \mathcal{E}^{sim}_{sp}$ (ver p. ej. Heitler [14] que usa la versión formalismo de Kemmer de Λ^{I}). Quedarse con $\psi^{I} \in \mathcal{E}^{sim\,I}$

tiene por equivalente en el formalismo original de Proca (1.7) a desechar (usando una representación adecuada) a U^o y G^{kl} ($k,l = 1,2,3$) es decir desechar los análogos mesónico vectoriales del potencial escalar A^o y del campo magnético F^{kl} del electromagnetismo (que es lo que hacen Tiomno y Giambiagi [12]). Esto está ya hecho, y lo mencionamos simplemente por completitud.

Es conveniente aclarar que si bien $\Lambda^I \psi = \psi^I$ ($\psi \in \mathcal{E}^{sim}$) puede conducir a un formalismo correcto sin componentes redundantes, $\underline{\mathcal{E}^{sim\,I}}$ <u>no es el espacio $\mathcal{W}$ de los vectores de estado</u>, ni en el formalismo de BW ni en los restantes similares (comparar (2.9) con (2.63), más adelante). Es decir, no toda $\psi \in \mathcal{W}$ es tal que $\Lambda^I \psi = \psi$; pasando a la representación de Foldy-Wouthuysen-Tani (Secc. 3.n) deberá por supuesto mantenerse que no toda $\psi' \in \mathcal{W}'$ será tal que $\Lambda^I \psi' = \psi'$ (comparar (2.9) con (3.100), más adelante). Nótese: Λ^I, <u>no</u> $\Lambda^{I'}$.

<u>2.c-6 - Una representación</u>

A veces utilizaremos la <u>representación usual de las γ^μ</u>,

$$\gamma^o = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6-a}**$$

en la cual +

+ No sumar ! (cf. Secc. 1.c).

$$\gamma^{o}_{ij} = \varepsilon_{\underline{i}}\ \delta_{\underline{i}j} \qquad (2.6\text{-b})^{**}$$

con

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1,\ \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1. \qquad (2.7)$$

En esta representación, si $\varphi \in \mathcal{E}^{sim}$, es

$$(\psi,\varphi)_{sp} = \psi^{*}_{11}\varphi_{11} + \psi^{*}_{22}\varphi_{22} + 2\psi^{*}_{12}\varphi_{12} - 2\psi^{*}_{33}\varphi_{33} - 2\psi^{*}_{44}\varphi_{44} - 2\psi^{*}_{34}\varphi_{34} \qquad (2.6\text{-c})^{*}$$

De (2.5-c) y (2.6-b),

$$\Lambda_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \frac{1}{2}\left(\delta_{i_1 j_1}\delta_{i_2 j_2} + \gamma^{o}_{i_1 j_1}\gamma^{o}_{i_2 j_2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon_{\underline{i_1}}\varepsilon_{\underline{i_2}}\right)\delta_{\underline{i_1} j_1}\delta_{\underline{i_2} j_2} \qquad (2.8\text{-a})$$

análogamente

$$\Lambda^{II}_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \frac{1}{2}\left(1 - \varepsilon_{\underline{i_1}}\varepsilon_{\underline{i_2}}\right)\delta_{\underline{i_1} j_1}\delta_{\underline{i_2} j_2} \qquad (2.8\text{-b})$$

Por lo tanto, así sea $\psi \in \mathcal{E}$ o $\psi \in \mathcal{E}^{sim}$ o $\psi \in \mathcal{W}$, es

$$\psi^{I}_{i_1 i_2} = \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon_{\underline{i_1}}\varepsilon_{\underline{i_2}}\right)\psi_{\underline{i_1}\underline{i_2}}, \qquad \psi^{II}_{i_1 i_2} = \frac{1}{2}\left(1 - \varepsilon_{\underline{i_1}}\varepsilon_{\underline{i_2}}\right)\psi_{\underline{i_1}\underline{i_2}}, \qquad (2.9\text{-a})$$

o sea

$$\psi^{I} = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & \psi_{34} \\ 0 & 0 & \psi_{43} & \psi_{44} \end{pmatrix} \qquad \psi^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \psi_{13} & \psi_{14} \\ 0 & 0 & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & {}_{32} & 0 & 0 \\ \psi_{41} & {}_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.9\text{-b})^{**}$$

Se ve que si $\psi \in \mathcal{E}^{sim}$, ψ tiene 6 componentes spinoriales independdientes, como anticipamos más arriba.

2.d - IGUALDADES Y EQUIVALENCIAS

2.d-1 - Igualdades.

Es bien conocida la definición de igualdad $M \underset{\mathcal{B}\mathcal{A}}{=} N$ de dos operadores M y N que transforman un espacio $\mathcal{A}$ en elementos de un espacio $\mathcal{B}$:

$$M \underset{\mathcal{B}\mathcal{A}}{=} N \text{ si para todo } \psi \in \mathcal{A} \text{ es } M\psi = N\psi \in \mathcal{B}. \qquad (2.10\text{-a})^{**}$$

Como los espacios: $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{sim}$ y $\mathcal{W}$ no son iguales, escribir p. ej. $M \underset{\mathcal{E}\mathcal{E}}{=} N$ no será necesariamente lo mismo que escribir $M \underset{\mathcal{E}\mathcal{W}}{=} N$

Como deberemos trabajar con varios espacios+, evitaremos errores y confusiones si explicitamos los espacios $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en nuestras igualdades.

Abreviaremos,

$$\left.\begin{array}{lll} M \underset{\mathcal{A}}{=} N & \text{significa} & M \underset{\mathcal{E}\mathcal{A}}{=} N \\ M = N & \text{significa} & M \underset{\mathcal{E}}{=} N \end{array}\right\} \qquad (2.10\text{-b})$$

(la. 2a. abreviación se debe a que $\mathcal{E}$ es el espacio en el que habitualmente operarían las matrices de 4 índices $M_{i_1 i_2, j_1 j_2}$ por lo que la noción de igualdad en $\mathcal{E}$ coincide con la usual).

Nótese que nuestros operadores que transforman $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ no siempre son del tipo que los matemáticos llaman "sobre" $\mathcal{B}$. (Es decir, no siempre todo punto de $\mathcal{B}$ es imagen de uno $\mathcal{A}$).

Será de aplicación reiterada este evidente teorema:

+ No podemos restringirmos a $\mathcal{W}$: Con ayuda de (2.33) podrá demostrarse que ej. si $\psi \in \mathcal{W}$ es $H(1)\psi \in \mathcal{W}$ pero que puede ser $\gamma^{\mu}_{(1)}\psi \notin \mathcal{W}$.

"Sea $\mathcal{A}_1$ un subespacio de $\mathcal{A}$; sea $\mathcal{B}_1$ un subespacio de $\mathcal{B}$ tal que para todo $\psi = \mathcal{A}_1$ es $M\psi \in \mathcal{B}_1$ (de donde $N\psi \in \mathcal{B}_1$); entonces [+]

$$M \underset{\mathcal{B}\mathcal{A}}{=} N \quad \Longrightarrow \quad M \underset{\mathcal{B}_1\mathcal{A}_1}{=} N \quad (2.11\text{-a})$$

<u>Corolario</u> (recordar (2.10-b)):

$$M = N \quad \Longrightarrow \quad M \underset{\varepsilon^{sim}}{=} N \quad \Longrightarrow \quad M \underset{\mathcal{W}}{=} N \qquad (2.11\text{-b})^{\ddagger}**$$

En el apendice A2-2 se dan las demonstraciones de las fórmulas que siguen:

$$\text{Si} \quad A_{ij,rs} = B_{ij,sr} \quad \text{es} \quad A \underset{\varepsilon\, sim}{=} B \qquad (2.12)^{\ddagger}$$

$$\text{si} \quad H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m \quad \text{es} \quad H_{(1)}I_{(2)} \underset{\mathcal{W}}{=} I_{(1)}H_{(2)} \qquad (2.13)^{\ddagger}$$

Por supuesto, p. ej. la (2.12) debe entenderse así: "Si A y B transforman ε^{sim} en puntos de ε y si $A_{ij,rs}$, entonces A y B son iguales en el espacio de los operadores que transforman ε^{sim} en puntos de ε".

Es de señalar que dos operadores pueden tener "elementos de matriz diferentes" (en el sentido usual) y ser iguales en el espacio de los operadores que transforman cierto espacio en otro espacio; por ejemplo, en la representación (2.6) es $\beta_{11} = 1$; $\vec{\alpha}_{11} = \vec{\alpha}_{33} = 0$; $\beta_{33} = -1$.

+ El símbolo " $\Longrightarrow$ " significa "implica".

‡ Esta fórmula vale también si $\varepsilon \to \varepsilon_{sp}$, $\varepsilon^{sim} \to \varepsilon^{sim}_{sp}$ y $\mathcal{W} \to \mathcal{W}^{p}_{sp}$.

$$\therefore \; (H_{(1)}I_{(2)})_{\underset{i_1 i_2}{\downarrow\downarrow}\,\underset{j_1 j_2}{\downarrow\downarrow}}{}_{13,13} = H_{11}\delta_{33} = (m\beta + \vec{\alpha}\cdot\vec{p})_{11} \times 1 = m$$

y

$$(I_{(1)}H_{(2)})^{\uparrow\uparrow\;\uparrow\uparrow}_{13,13} = \delta_{11}H_{33} = 1 \times (m\beta + \vec{\alpha}\cdot\vec{p})_{33} = -m \neq (H_{(1)}I_{(2)})_{13,13} \tag{2.14}$$

Sin embargo, es $H_{(1)}I_{(2)} \underset{\mathcal{W}}{\equiv} I_{(1)}H_{(2)}$ en el sentido de que ambos operadores aplicados al mismo vector de $\mathcal{W}$ dan igual resultado. En cambio, como vimos, es

$$I_{(1)}H_{(2)} \neq H_{(1)}I_{(2)}. \tag{2.15}$$

2.d-2 - Equivalencia escalar

Esta noción es importante porque en la teoría de una "partícula" (Cap. 3) veremos que dos operadores "equivalentes escalar" dan los mismos valores medios.

Por definición, M y N son operadores equivalentes + escalar en un espacio vectorial $\mathcal{H}$ si para todo $\psi \in \mathcal{H}$ es

$$(\psi,\ M\,\psi) = (\psi,\ M\psi) \tag{2.16-a}$$

o sea (cf. (2.2))

$$\int \psi^+ \gamma^0_{(2)} M\,\psi\, d^3x = \int \psi^+ \gamma^0_{(2)} N\ d^3x \tag{2.16-b}$$

indicamos,

$$M \underset{\mathcal{H}}{\underset{esc}{\sim}} N\ . \tag{2.16-c}$$

\+ **Esta equivalencia es también una equivalencia en el sentido de los matemáticos; además, M y N son congruentes módulo O "donde O es el espacio de los operadores O tales que $(\psi,\ O\,\psi) = 0$.**

Es

$$M \underset{\substack{esc \\ \mathcal{A}}}{\sim} N \Longleftrightarrow (\psi, M\varphi) = (\psi, N\varphi) \quad . \tag{2.17}$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$. La demo stración se basa en una conocida identidad algebraica (ver A2-3).

Observamos además que en la definición no se exige que M y N transformen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$; basta que transformen $\mathcal{A}$ en elementos de un espacio $\mathcal{B}$ tal que $(\psi, M\psi)$ tenga sentido para $\psi \in \mathcal{A}$, $M\psi \in \mathcal{B}$; para esto último es suficiente que el producto escalar (2.2) esté definido en el espacio $\mathcal{E}(\psi$ y $\varphi \in \mathcal{E})$ y que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ estén contenidos en $\mathcal{E}$.

Análogamente definiremos: M y N son equivalentes escalar spinorial en un espacio vectorial $\mathcal{A}$ si para todo $\psi \in \mathcal{A}$ es

$$(\psi, M\psi)_{sp} = (\psi_2 \; N\psi) \tag{2.18-a}$$

o sea

$$\psi^+ \gamma^o_{(2)} M \psi = \psi^+ \gamma^o_{(2)} N \psi \tag{2.18-b}$$

indicaremos

$$M \;\; (\underset{\mathcal{A}}{\widetilde{esc}})_{sp} \; N . \tag{2.19}$$

Como para el caso anterior se demuestra que

$$M \; (\underset{\mathcal{A}}{\widetilde{esc}})_{sp} N \Longleftrightarrow (\psi, M\varphi)_{sp} = (\psi, N\varphi)_{sp} \tag{2.20}$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$.

Además es evidente que

$$M \underset{\mathcal{A}}{(\widetilde{esc})_{sp}} N \Longrightarrow M \underset{\mathcal{A}}{\widetilde{esc}} N \qquad (2.21)$$

aunque la recíproca puede ser falsa.

Se impone una pregunta: La noción de equivalencia escalar, no es siempre la misma que la de igualdad ? La respuesta es: En nuestro caso, no, como demostraremos a continuación:

Antes (y para dar motivo a la duda) recordemos el conocido teorema: "Sea $\{\psi, \varphi\}$ un producto escalar de elementos $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$, tal que $\{\psi, \psi\} > 0$ salvo $\psi = 0$; sean M y N dos operadores que transforman $\mathcal{A}$ "sobre" + $\mathcal{A}$.

Entonces,

$$\{\psi, M\varphi\} = \{\psi, N\varphi\} \text{ para todo } \psi, \varphi \in \mathcal{A} \Longrightarrow M = N\text{"} \quad (2.22)^{**}$$

(El teorema se muestra así: Si $M \underset{\mathcal{A}}{=} N$, evidentemente $\{\psi, M\varphi\} = \{\psi, N\varphi\}$. Si $\{\psi, M\varphi\} = \{\psi, N\varphi\}$ es $\{\psi, (M - N)\varphi\} = 0$; como ψ es arbitraria, pongo $\psi = (M - N)\varphi \therefore \{(M - N)\varphi, (M - N)\varphi\} = 0$ de donde, por la hipótesis es $(M - N)\varphi = 0$.

Pero en nuestro caso el teorema no es aplicable pues (problemas aparte con el "sobre") puede ser $(\psi, \psi) = 0$ con $\psi \neq 0$.++ Claro que aún se puede pensar que con otras hipótesis (válidas

+ Es decir, que todo elemento φ de A puede pensarse como imagen de otro elemento ψ de A (p. ej $\varphi = M\psi$).

++ Observando (2.2) y usando la representación (2.6) para γ^0 es intuitivo que $\psi \neq 0$ con $(\psi, \psi) = 0$; la prueba rigurosa la damos en A2-4.

Cabe nota similar a la nota + hecha al introducir la equivalencia escalar. Se puede demostrar verificando que si ψ cumple (2.3), no la cumple $\varphi = \gamma^0_{(1)} \gamma^0_{(2)} \psi$, o bien empleando la (3.33) a demostrarse más adelante.

para nuestro caso) pueda redemostrarse (2.22); pero ello es imposible pues en A2-5 damos un contraejemplo de operadores equivalentes pero diferentes.

2.d-3 - Equivalencia tensorial

Esta equivalencia es importante al estudiar las representaciones tensoriales del grupo de Lorentz (Cap. 6) del tipo $\bar{\psi} M \psi$ (de allí viene el nombre).

Definimos: M y N son equivalentes tensorial en $\mathcal{A}$. si para todo $\psi \in \mathcal{A}$ es (recordar (1.8)).

$$\bar{\psi} M \psi = \bar{\psi} N \psi \tag{2.23-a}$$

indicamos

$$M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N$$

Como en A2-3 se demuestra que

$$M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \iff \bar{\psi} M \varphi = \bar{\psi} N \varphi \tag{2.24}$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$

Además, si $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ o $\mathcal{E}^{sim}$ es $M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \iff \psi^{+} M \psi = \psi^{+} N \psi$ para todo

$$\psi \in \mathcal{A} \iff \psi^{+} M \varphi = \psi^{+} N \varphi \text{ para todo } \psi, \varphi \in \mathcal{A} \tag{2.25}$$

Por ejemplo, para demostrar que $M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \iff \psi^{+} M \varphi = \psi^{+} N \varphi$ cámbiese $\psi \longrightarrow \gamma^{o}_{(1)} \gamma^{o}_{(2)} \psi$ en (2.24).

La demostración de (2.25) exige que si $\psi \in \mathcal{A}$ sea $\gamma^{o}_{(1)} \gamma_{(2)} \psi \in \mathcal{A}$ lo que ocurre para $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ o $\mathcal{E}^{sim}$, pero no ocurre en W^{+}. El caso $\mathcal{A} = W$ queda incluído en la (2.26):

Si $\mathcal{A}=\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{sim}$ o $\mathcal{W}$ es

$$\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}M \underset{\mathcal{A}}{\sim} \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} N \iff \psi^{+}M\psi = \psi^{+}N\psi \text{ para todo par } \psi\in\mathcal{A} \iff$$

$$\iff \psi^{+}M\varphi = \psi^{+}N\varphi \text{ para todo } \psi,\varphi\in\mathcal{A} \tag{2.26}$$

2.d-4 - Fórmulas sobre equivalencias

Sea $\mathcal{A}_1$ un subespacio de $\mathcal{A}$; es evidente que

$$M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \implies M \underset{\mathcal{A}_1}{\sim} N \tag{2.27-a}$$

$$M \,(\underset{\mathcal{A}}{\widetilde{esc}})_{sp}\, N \implies M \,(\underset{\mathcal{A}_1}{\widetilde{esc}})_{sp}\, N \implies M \underset{\mathcal{A}_1}{\widetilde{esc}} N \tag{2.27-b}$$

$$M \underset{\mathcal{A}}{\widetilde{esc}} N \implies M \underset{\mathcal{A}_1}{\widetilde{esc}} N \,. \tag{2.27-c}$$

También es trivial que

$$M \underset{\mathcal{B}\mathcal{A}}{=} N \implies \begin{cases} M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N & (2.28\text{-a}) \\ M \,(\underset{\mathcal{A}}{\widetilde{esc}})_{sp}\, N \end{cases} \implies M \underset{\mathcal{A}}{\widetilde{esc}} N \quad (2.28\text{-b})$$

Pasaje de equivalencias a igualdades:

Digo que

a) si $\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}M$ y $\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}N$ transforman $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}$ entonces

$$M \underset{\mathcal{A}}{\sim} N \implies \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} M \underset{\mathcal{A}\mathcal{A}}{=} \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} N; \tag{2.29-a}$$

b) si $\gamma^{o}_{(2)}M$ y $\gamma^{o}_{(2)}N$ transforman $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}$ entonces

$$M \underset{\mathcal{A}}{\widetilde{esc}} N \implies \gamma^{o}_{(2)} M \underset{\mathcal{A}\mathcal{A}}{=} \gamma^{o}_{(2)} N \,. \tag{2.29-b}$$

No siempre se cumplen las hipótesis en las que (2.29) es válida.+.

Demostramos e.g. la (b): Defino el producto escalar $\{\psi,\varphi\} = (\psi, \gamma^{o}_{(2)}\varphi) = \psi^{+}\varphi$ que es tal que $\{\psi,\psi\} > 0$ salvo $\psi = 0$; $M \underset{\mathcal{R}}{\underset{esc}{\sim}} N$ implica $\{\psi, \gamma^{o}_{(2)} M\varphi\} = \{\psi, \gamma^{o}_{(2)} N\varphi\}$; como $\gamma^{o}_{(2)} M$ y $\gamma^{o}_{(2)} N$ son "sobre" podemos aplicar (2.22) y escribir $\gamma^{o}_{(2)} M \underset{\mathcal{R}\mathcal{R}}{=} \gamma^{o}_{(2)} M$.

En A2-6 se demuestran las fórmulas (2.30) - (2.33):

$$\gamma^{o}_{(1)} M \underset{\mathcal{R}}{\sim} \gamma^{o}_{(1)} N \iff M \underset{\mathcal{R}}{(\underset{esc}{\sim})}_{sp} N \implies M \underset{\mathcal{R}}{\underset{esc}{\sim}} N \tag{2.30}$$

$$A_{(1)} B_{(2)} \underset{\varepsilon}{\underset{sim}{\sim}} B_{(1)} A_{(2)} \qquad (2.31)^{++}$$

$$M_{ij,k\ell} = N_{ji,k\ell} = P_{ij,\ell k} \implies M \underset{\varepsilon_{sp}}{\underset{sim}{\sim}} N \underset{\varepsilon_{sp}}{\underset{sim}{\sim}} P \tag{2.31'}$$

$$A_{(1)}B_{(2)} \underset{\varepsilon^{sim}_{sp}}{(\underset{esc}{\sim})} (\gamma^{o}B)_{(1)} (\gamma^{o}A)_{(2)} \tag{2.32-a}$$

$$\Lambda^{II} \underset{\varepsilon^{sim}_{sp}}{(\underset{esc}{\sim})_{sp}} 0 \tag{2.32-b}$$

pese a ser

$$\Lambda^{II} \underset{\varepsilon^{sim}_{sp}}{\neq} 0 \tag{2.32-c}$$

\+ Ejemplo en que no se dan las hipótesis: De (2.33-b) (ver más abajo) es $I \underset{\varepsilon^{sim}}{\underset{esc}{\sim}} \frac{1}{2} (\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} + I)$ pero como $\frac{1}{2} (\gamma^{o}_{(1)} + \gamma^{o}_{(2)})$ es singular, no tiene inversa; entonces $\gamma^{o}_{(2)} \left[\frac{1}{2} (\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} + I)\right]$ no tiene inversa. Por lo tanto no puede hallarse $\psi^{(2)}$ tal que $\varphi = \gamma^{o}_{(2)}\left[\frac{1}{2} (\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} + I)\right]\psi$ con lo que fallan las hipótesis necesarias para (2.29-b).

++ A_{ij} y B_{ij} son matrices 4 x 4, de dos índices.

$$A_{(1)}B_{(2)} \underset{\varepsilon^{sim}}{\underset{esc}{\sim}} (\gamma^{o}B)_{(1)}(\gamma^{o}A)_{(2)} \tag{2.33-a}$$

$$\Lambda^{II} \underset{\varepsilon^{sim}}{\underset{esc}{\sim}} 0 \qquad o \qquad I \underset{\varepsilon^{sim}}{\underset{esc}{\sim}} \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} \tag{2.33-b}$$

pese a ser

$$\Lambda^{II} \underset{\varepsilon^{sim}}{\neq} 0 \tag{2.33-c}$$

Es surprendente la

$$\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{p} \underset{W}{\underset{esc}{\sim}} 0 \;; \qquad \vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p} \underset{W}{\underset{esc}{\sim}} 0 \;; \tag{2.33-d}$$

sin embargo,

$$\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{p} \underset{W}{\underset{esc}{\sim}} 0 \;; \qquad \vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p} \underset{W}{\neq} 0 \tag{2.33-e}$$

$$\gamma^{o}_{(2)}\vec{\gamma}_{(1)}\cdot\vec{p} \underset{W}{\underset{esc}{\sim}} 0 \;; \qquad \gamma^{o}_{(1)}\vec{\gamma}_{(2)}\cdot\vec{p} \underset{W}{\underset{esc}{\sim}} 0 \tag{2.33-f}$$

$$\gamma^{o}_{(1)} \underset{W}{\underset{esc}{\sim}} \gamma^{o}_{(2)} \;. \tag{2.33-g}$$

<u>2.e - CONJUGACIÓN PSEUDOHERMITIANA.</u>[+]

<u>2.e-1 - El procedimiento conocido para un espacio con métrica indefinida cuando no hay componentes redundantes.</u>

Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial de elementos $\psi_i(\vec{x})$ <u>sin componentes redundantes</u>; sea η un operador hermitiano (en el sentido habitual) de autovalores $\pm$ 1, es decir tal que

---

[+] Necesitamos la noción de pseudohermiticidad para poder definir observables en la teoría de una carga (Cap. 3).

$$\eta = \eta^+, \qquad (2.34\text{-a})^{**}$$

$$\eta^2 = I. \qquad (2.34\text{-b})^{**}$$

Salvo a veces la nomenclatura, obtenemos de las referencias [22, 19, 10] las siguientes nociones:

Se define un <u>produto escalar</u>

$$(\psi,\varphi) = \int \psi^+ \eta\, \varphi\, d^3x\ , \qquad \psi, \varphi \in \mathcal{H}\ ; \qquad (2.35)^{**}$$

entonces la <u>métrica</u> en el espacio $\mathcal{H}$ es indefinida:

$$(\psi,\psi) \gtrless 0\ . \qquad (2.36)^{**}$$

<u>Definiciones</u>

A) El conjugado pseudohermitiano $\bar{A}$ de un operador A es tal que [10]

$$(A\psi, \varphi) = (\psi, \bar{A}\varphi), \qquad (\text{para todo } \psi,\varphi \in \mathcal{H}); \qquad (2.37\text{-a})^{**}$$

es [22, 19, 10]

$$\bar{A} = \eta A^+ \eta\ . \qquad (2.37\text{-b})^{**}$$

B) Un operador es pseudohermitiano si [22, 19, 10]

$$A = \bar{A}\ . \qquad (2.38)^{**}$$

<u>2.e-2 - Adaptamos el procedimiento anterior a nuestro caso</u>.

El producto escalar (2.2) es del tipo (2.35) con

$$\eta = I_{(1)}\, \gamma^0_{(2)}\ ; \qquad (2.39)$$

η cumpre (2.34).

Sea $\mathcal{A}$ uno cualquiera de los espacios $\mathcal{W}$, ε^{sim} o ε ; definimos: A') <u>El conjugado pseudohermitiano $\overset{\mathcal{A}}{\bar{M}}$</u> de un operador

M, es todo operador tal que

$$(M\psi,\varphi) = (\psi, \overset{\mathcal{A}}{M}\varphi) \qquad (2.40\text{-a})$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$.

Queremos hallar la incógnita $\overset{\mathcal{A}}{M}$; si indicamos

$$\overline{M} = \gamma^{o}_{(2)}\, M^{+}\, \gamma^{o}_{(2)} \qquad (2.40\text{-b})$$

entonces una solución $\overset{\mathcal{A}}{M}$ de (2.40-a) es $\overset{\mathcal{A}}{M} = \overline{M}$ puesto que
$(M\psi,\varphi) = \int d^3x (M\psi)^{+}\gamma^{o}_{(2)}\varphi = \int \psi^{+}M^{+}\gamma^{o}_{(2)}\varphi\, d^3x = (\psi, \overline{M}\varphi)$,

pero también es solución (cf. Secc. 2.d-2) todo otro operador $\overset{\mathcal{A}}{M}$ tal que

$$\overset{\mathcal{A}}{M} \underset{\overset{\mathcal{A}}{esc}}{\sim} \overline{M}\ , \qquad (2.40\text{-c})$$

de manera que la solución puede no ser única (recordar los ejemplos de operadores diferentes pero que son equivalentes escalar). Vemos que <u>tenemos más soluciones</u> que en (2.37).

<u>Nota</u>: Al igual que en la definición (2.26), en la (2.40) no se exige que M y $\overset{\mathcal{A}}{M}$ transformen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$; basta que transformen $\mathcal{A}$ en un espacio $\mathcal{B}$ tal que $(M\psi,\varphi)$ y $(\psi, \overset{\mathcal{A}}{M}\varphi)$ tengan sentido para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{A}$, para lo cual (si $\mathcal{A} = \mathcal{W}$, ε^{sim} o ε) basta definir (ψ,φ) en ε, a imponer que si $\varphi \in \varepsilon$ sea $M\varphi \in \varepsilon$, $\overset{\mathcal{A}}{M}\varphi \in \varepsilon$.

Llamaremos a $\overline{M}$ <u>el conjugado pseudohermitiano principal de M</u>; es trivial que

$$\overline{M + N} = \overline{M} + \overline{N} \qquad (2.41\text{-a})$$

$$\overline{M\,N} = \overline{N}\,\overline{M} \qquad (2.41\text{-b})$$

$$(\psi, M\psi)^{*} = (\psi, \overset{\mathcal{A}}{M}\psi) = (\psi, \overline{M}\psi)\ . \qquad (2.42)$$

También es fácil demostrar que si $\mathcal{A}_1$ es un subespacio de $\mathcal{A}$;

$$\overset{\mathcal{A}}{\overline{M}} \underset{\mathcal{A}_1}{\widetilde{esc}} \overset{\mathcal{A}}{\overline{M}} \tag{2.43}$$

La (2.43) nos permite pasar p. ej. de la conjugación pseudohermitiana en ε^{sim} a la conjugación pseudohermitiana en $\mathcal{W}$.

La conjugación en la cual estamos físicamente interesados es la conjugación en $\mathcal{W}$, pero a veces necesitaremos las efectuadas en ε^{sim} y en ε (p. ej. al estudiar operadores que proyectan ortogonalmente sobre $\mathcal{W}$).

Como en spin $\frac{1}{2}$, a veces puede ser útil poder definir la conjugación pseudohermitiana en el espacio spinorial únicamente; sea $\mathcal{A}_{sp}$ uno cualquiera de los espacios ε_{sp}, ε_{sp}^{sim} o $\mathcal{W}_{sp}^{p}$ (recordar Secc. 2. c); definimos el conjugado hermitiano $\overset{\mathcal{A}}{\overline{M}}{}^{sp}$ de un operador M en el espacio $\mathcal{A}_{sp}$, mediante

$$(M\psi,\varphi)_{sp} = (\psi, \overset{\mathcal{A}}{\overline{M}}{}^{sp}\varphi)_{sp} \tag{2.44-a}$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{A}_{sp}$

Si

$$\overline{M}^{sp} = \gamma^{o}_{(2)}|M^{+} \gamma^{o}_{(2)} \tag{2.44-b}$$

(quí + = conjugado hermitiano en el espacio spinorial únicamente), entonces

$$\overset{\mathcal{A}}{\overline{M}}{}^{sp} (\underset{\mathcal{A}}{\widetilde{esc}})_{sp} \overline{M}^{sp} \tag{2.44-c}$$

B') Adaptamos B) (Secc. 2.e-1) a nuestro caso:

Def.: Un operador M es pseudohermitiano en un espacio $\mathcal{A}$ si

$$M \underset{\mathcal{A}}{\widetilde{esc}} \overset{\mathcal{A}}{\overline{M}} \tag{2.45-a}$$

o sea si

$$M \underset{\mathcal{H}}{\widetilde{\mathrm{esc}}} \bar{M} \,. \qquad (2.45\text{-b})$$

Entonces,

$$(M\psi,\varphi) = (\psi,M\varphi) \qquad (2.45\text{-c})$$

para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$.

Por qué en (2.43) no ponemos el signo $\underset{\mathcal{H}}{=}$? Porque el símbolo $\underset{\mathcal{H}}{\widetilde{\mathrm{esc}}}$ es suficiente para que se cumpla la (2.45-c) que es todo lo que necesitaremos para la física.

Para que (2.45-b) se cumpla es condición <u>suficiente</u> (pero no necesaria) que sea

$$M \underset{\mathcal{H}}{=} \bar{M} \qquad (2.45\text{-d})$$

<u>2.f - PROYECCIONES</u>

Los operadores proyección que más necesitaremos serán [+] los que proyecten ortogonalmente (respecto de (2.2)) ε o ε^{sim} sobre $\mathcal{W}$; por ejemplo, los necesitaremos para tener operadores prácticos que representen observables en la teoría de una "partícula" (Cap. 3).

<u>2.f-1 - Repaso de nociones conocidas</u>

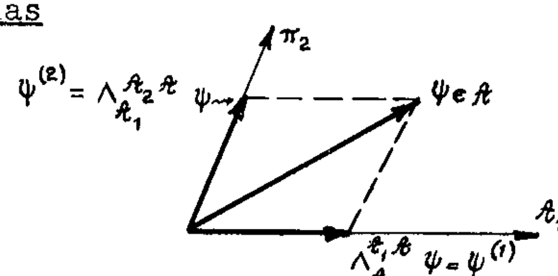

Fig. 2-1

En general $\Lambda_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{H}_1 \mathcal{H}}$ indicará el operador que proyecta un espacio $\mathcal{H}$ sobre un subespacio $\mathcal{H}_1$ en la

---

+ Al menos en la aproximación de una "partícula".

dirección de un subespacio complementario $\mathcal{H}_2$ (fig. 2-1).

Si la proyección es ortogonal (respecto de (2.2)), lo indicaremos con un subíndice "$\perp$". Además, cuando no hay riesgo de error, podremos suprimir algunas de las especificaciones indicadas.

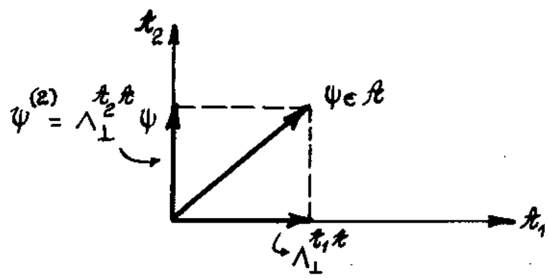

Fig. 2-2

Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos subespacios de (fig. 2-1 o 2-2) tales que se tiene la suma directa

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \qquad (2.46\text{-a})^{**}$$

es decir tales que toda $\psi\in\mathcal{H}$ es del tipo

$$\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} \qquad (2.46\text{-b})^{**}$$

con

$$\psi^{(1)} = \Lambda_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{H}_1\mathcal{H}}\psi\in\mathcal{H}_1 \quad , \quad \psi^{(2)} = \Lambda_{\mathcal{H}_1}^{\mathcal{H}_2\mathcal{H}}\psi\in\mathcal{H}_2 \ . \qquad (2.46\text{-c})^{**}$$

Es,

$$\Lambda_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{H}_1\mathcal{H}} + \Lambda_{\mathcal{H}_1}^{\mathcal{H}_2\mathcal{H}} \underset{\mathcal{H}\mathcal{H}}{=} I ; \left(\Lambda_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{H}_1\mathcal{H}}\right)^2 \underset{\mathcal{H}\mathcal{H}}{=} \Lambda_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{H}_1\mathcal{H}} ; \left(\Lambda_{\mathcal{H}_1}^{\mathcal{H}_2\mathcal{H}}\right)^2 = \Lambda_{\mathcal{H}_1}^{\mathcal{H}_2\mathcal{H}} ; \qquad (2.46\text{-d})^{**}$$

$$\Lambda_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{H}_1\mathcal{H}}\,\Lambda_{\mathcal{H}_1}^{\mathcal{H}_2\mathcal{H}} \underset{\mathcal{H}\mathcal{H}}{=} \Lambda_{\mathcal{H}_1}^{\mathcal{H}_2\mathcal{H}}\,\Lambda_{\mathcal{H}_2}^{\mathcal{H}_1\mathcal{H}} \underset{\mathcal{H}\mathcal{H}}{=} 0$$

Si queremos que la descomposición sea <u>ortogonal</u> respecto de (2.2) (fig. 2-2) es decir que sea para todo $\psi^{(1)}\in'\mathcal{H}_1$, $\varphi^{(2)}\in\mathcal{H}_2$, entonces es <u>suficiente</u> (cf. A2-7) que $\Lambda_\perp^{\mathcal{H}_1\mathcal{H}}$ $\left(\underset{\mathcal{H}_1\mathcal{H}}{\text{o}}\,\Lambda_\perp^{\mathcal{H}_2\mathcal{H}}\right)$ sean pseudohermitianas en $\dfrac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_2\mathcal{H}}$:

$$\Lambda_{\perp}^{\mathscr{R}_1\mathscr{R}} \ \underset{\mathscr{R}}{\widetilde{\mathrm{esc}}} \ \Lambda_{\perp}^{\mathscr{R}_1\mathscr{R}} \qquad \left(\text{de donde } \Lambda_{\perp}^{\mathscr{R}_2\mathscr{R}} \ \underset{\mathscr{R}}{\widetilde{\mathrm{esc}}} \ \Lambda_{\perp}^{\mathscr{R}_2\mathscr{R}}\right) \qquad (2.46\text{-f})^{**}$$

Ejemplo: Las descomposiciones $\varepsilon = \varepsilon^{I} \oplus \varepsilon^{II}$, $\varepsilon^{sim} = \varepsilon^{sim\ I} \oplus \varepsilon^{sim\ II}$, etc. de Secc. 2.c-5 son ortogonales porque (cf. A2-8)

$$\Lambda^{I} = \Lambda^{I} \qquad (\text{o sea } \Lambda^{II} = \Lambda^{II}); \qquad (2.47)$$

la (2.47), con ayuda de (2.28-b) implica que se cumple (2.46-f). (Para ser consecuentes con la notación deberíamos haber puesto $\Lambda_{\perp}^{\varepsilon^{I}\varepsilon}$, etc., pero ello no es práctico en este caso).

2.f-2 - Un operador proyección simple (pero no ortogonal) de ε^{sim} sobre $\mathcal{W}$.

Definimos los operadores

$$\Lambda_{F}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}} = \frac{1}{2}\left(I + \frac{H_{(1)}\ H_{(2)}}{p_o^2}\right). \qquad (2.48\text{-a})$$

$$\Lambda_{\mathcal{W}}^{F\varepsilon^{sim}} = I - \Lambda_{F}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}} = \frac{1}{2}\left(I - \frac{H_{(1)}\ H_{(2)}}{p_o^2}\right). \qquad (2.48\text{-b})$$

Se trata de operadores proyección puesto que (como es trivial demonstrar)

$$\Lambda_{F}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}\,2} = \Lambda_{F}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}; \left(\Lambda_{\mathcal{W}}^{F\varepsilon^{sim}}\right)^2; \Lambda_{\mathcal{W}}^{F\varepsilon^{sim}}; \Lambda_{F}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}} \Lambda_{\mathcal{W}}^{F\varepsilon^{sim}} =$$

$$= \Lambda_{\mathcal{W}}^{F\varepsilon^{sim}} \Lambda_{F}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}} = 0\,. \qquad (2.49)$$

Sea $\psi \in \varepsilon^{sim}$; es evidente que $\Lambda_{F}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}$ cumple la condición inicial (2.3-c) de donde $\Lambda_F^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}} \in \mathcal{W}$: $\Lambda_F^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}$ proyecta ε^{sim} sobre $\mathcal{W}$; también de (2.3-c) se deduce que $\Lambda_{\mathcal{W}}^{F\varepsilon^{sim}} \psi \notin \mathcal{W}$; llamaremos F al subespacio de las $\Lambda_{\mathcal{W}}^{F\varepsilon^{sim}} \psi$. Tenemos pues la suma directa

$$\varepsilon^{sim} = \mathcal{W} \oplus F \qquad (2.50)$$

que podemos simbolizar como sigue: representaremos ε^{sim} con el plano del papel y los subespacios $\mathcal{W}$ y F de ε^{sim} con las dos rectas de la figura 2-3.

Evidentemente

$$\Lambda_F^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}} \underset{\mathcal{W}}{=} I; \; \Lambda_{\mathcal{W}}^{F\varepsilon^{sim}} \underset{\mathcal{W}}{=} 0 \qquad (2.51)$$

Pese a que el operador $\Lambda_F^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}$ es muy simple, tiene inconvenientes para las aplicaciones que siguen pues la descomposición (2.50) no es ortogonal respecto del producto escalar (2.2) (ver prueba en A2-9); es decir, existen ciertos pares de vectores $\psi^{(\mathcal{W})} \in \mathcal{W}$, $\varphi^{(F)} \in F$ tales que

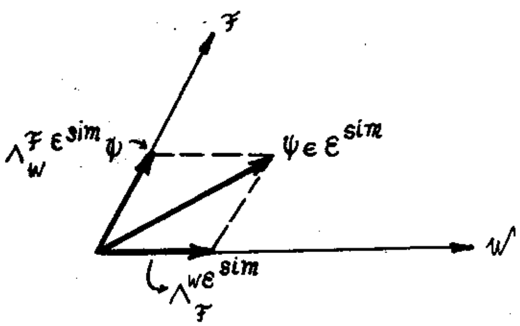

Fig. 2-3

$$(\psi^{(\mathcal{W})}, \varphi^{(F)}) \neq 0 \; ; \qquad (2.52)$$

ésto lo hemos simbolizado en Fig. 2-3 dibujando ejes oblicuos.

2.f-3 - El operador $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}$ que proyecta ortogonalmente ε^{sim} sobre $\mathcal{W}$:

Buscamos un operador $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}$ que proyecte ε^{sim} sobre $\mathcal{W}$

y otro

$$\Lambda_{\perp}^{g\,\varepsilon^{sim}} \underset{\varepsilon^{sim}}{=} I - \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}} \tag{2.53}$$

que proyecte ε^{sim} en g, tales que la descomposición

$$\varepsilon^{sim} = \mathcal{W} \oplus g \tag{2.54}$$

sea ortogonal respecto a (2.2). Es decir, que si $\psi \epsilon \mathcal{W}$, $\varphi \epsilon$ g sea

$$(\psi,\varphi) = 0 \tag{2.55}$$

lo que simpolizamos dibujando ejes perpendiculares:

Vamos a construir $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}$ en base a que cumple (2.55) y que sea

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}\ \psi \in \mathcal{W} \tag{2.56}$$

para toda $\psi \epsilon\, \varepsilon^{sim}$.

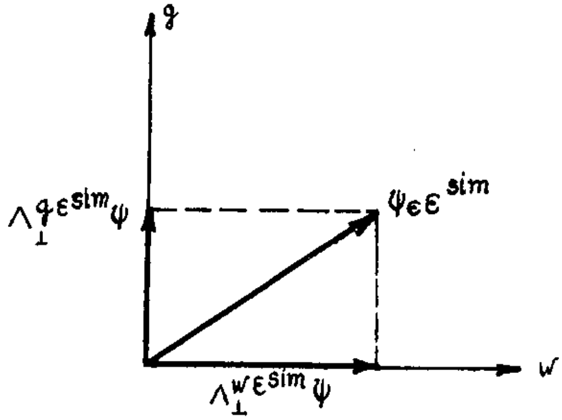

Fig. 2-4

La (2.33-b) nos dice que podemos satisfacer (2.55) si todo elemento de g pertenece a $\varepsilon^{sim\ II}$; el próximo paso debe ser evidentemente escribir (2.56) usando Λ^{I} y Λ^{II}; para ello usamos la Secc. 2.b y las (2.5) para que una $\psi\epsilon\varepsilon^{sim}$ pertenezca también a $\mathcal{W}$, es condición necesaria y suficiente que se cumpla

$$\Lambda^{II}\psi = -\frac{\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}}{2m}\,\Lambda^{I}\,\psi. \tag{2.57-a}$$

Como $\gamma^{o}\,\vec{\gamma} = -\vec{\gamma}\,\gamma^{o}$ y como $\psi = (\Lambda^{I} + \Lambda^{II})\psi$, es lo mismo poner

$$\psi = \Lambda^{I}\psi - \Lambda^{II}\frac{\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}}{2m}\;\psi. \qquad (2.57\text{-b})$$

Entonces es razonable <u>ensayar</u>

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}} = a\,I + (1-a)\left[\Lambda^{I} - \Lambda^{II}\;\frac{\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}}{2m}\right]$$

donde <u>a</u> es un número a determinar, diferente de 1 puesto que si $a \neq 1$ toda $\varphi \in \varepsilon^{sim}$ se proyecta en una $\psi = \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}\varphi$ que cumple (2.57) y que por lo tanto pertenece a $\mathcal{W}$.

Hallamos <u>a</u> imponiendo (como ya dijimos) que g esté incluído en $\varepsilon^{sim\ II}$: $\Lambda_{\perp}^{g\varepsilon^{sim}}\varphi = \left(I - \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}\right)\varphi \in \varepsilon^{sim\ II}$ para lo que basta

$$\Lambda^{I}\left(I - \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}\right)\varphi = 0$$

(recordar: $\Lambda^{I}\,\Lambda^{II} = 0$); de aquí obtenemos

$$a = 0$$

o sea

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}} = \Lambda^{I} - \Lambda^{II}\;\frac{\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}}{2m} \qquad (2.58\text{-a})$$

Aún falta probar que $\left(\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}\right)^{2} = \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}$ o sea que se trata de un operador proyección propiamente dicho, pero antes indiquemos que el $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}$ definido por (2.58-a) cumple también (cf. A2-10)

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}} = \left[I - \frac{1}{2m}\;\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\right]\Lambda^{I} \qquad (2.58\text{-b})$$

$$= \frac{1}{4m}\left(I + \frac{H_{(1)}\;H_{(2)}}{p_{o}^{2}}\right)\left(H_{(1)}\,\gamma^{o}_{(1)} + H_{(2)}\gamma^{o}_{(2)}\right) \qquad (2.58\text{-c})$$

$$= \frac{1}{4m}\left(H_{(1)}\gamma^0_{(1)}+H_{(2)}\gamma^0_{(2)}+H_{(2)}\gamma^0_{(1)}+H_{(1)}\gamma^0_{(2)}\right) \qquad (2.58\text{-d})$$

$$= \frac{1}{4m}\left(H_{(1)}+H_{(2)}\right)\left(\gamma^0_{(1)}+\gamma^0_{(2)}\right) \qquad (2.58\text{-e})$$

$$= \frac{1}{4m}\left[2m+2m\ \gamma^0_{(1)}\gamma^0_{(2)}-\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\ p+\left(\gamma^0_{(1)}\vec{\alpha}_{(2)}+\gamma^0_{(2)}\vec{\alpha}_{(1)}\right)\cdot p\right] \qquad (2.58\text{-f})$$

$$= I-\frac{1}{4m}\left(\gamma^0_{(1)}-\gamma^0_{(2)}\right)\left(H_{(1)}-H_{(2)}\right) \qquad (2.58\text{-g})$$

En cuando a $\Lambda^{g}\ \varepsilon^{sim}$ ponemos

$$\Lambda^{g}_{\perp}\,\varepsilon^{sim} = I-\Lambda^{W\varepsilon^{sim}}_{\perp} \qquad (2.59)$$

y tenemos p. ej. (cf. 2.58-g),

$$\Lambda^{g}_{\perp}\,\varepsilon^{sim} = \frac{1}{4m}\left(\gamma^0_{(1)}-\gamma^0_{(2)}\right)\left(H_{(1)}-H_{(2)}\right) \qquad (2.60)$$

Se trata de un operador proyección propiamente dicho pues (cf. A2-11)

de donde

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\Lambda^{W\varepsilon^{sim}}_{\perp}} \ \underset{\varepsilon^{sim}}{\sim}\ \Lambda^{W\varepsilon^{sim}}_{\perp} \\ \\ \overline{\Lambda^{g\varepsilon^{sim}}_{\perp}} \ \underset{\varepsilon^{sim}}{\sim}\ \Lambda^{g\varepsilon^{sim}}_{\perp} \end{array}\right\} \qquad (2.61\text{-b})$$

(no es lícito reemplazar " $\underset{\varepsilon^{sim}}{\sim}$ " por " $\underset{\varepsilon}{\sim}$ " ni por " $\underset{\varepsilon^{sim}}{=}$ " ni por " = ").

Con (2.61) hemos reficiado (2.55) (cf. (2.46-f)); además evidentemente

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}^{sim}} \underset{\mathcal{W}}{=} I \; ; \; \Lambda_{\perp}^{g\mathcal{E}^{sim}} \underset{\mathcal{W}}{=} 0 \tag{2.62}$$

<u>Una representación</u>:

En la representación (2.6) de las γ^{μ} toda $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}^{sim}} \psi \in \mathcal{W}$ obtenida por proyección ortogonal a partir de una $\psi \in \mathcal{E}^{sim}$ es de la forma (cf. A2-12),

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}^{sim}}\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dfrac{p^3\psi_{11}+p_-\psi_{12}-p^3\psi_{33}-p_-\psi_{34}}{2m} & \dfrac{p_+\psi_{11}-p^3\psi_{12}-p^3\psi_{34}-p_-\psi_{44}}{2m} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \dfrac{p^3\psi_{12}+p_-\psi_{22}-p_+\psi_{33}+p^3\psi_{34}}{2m} & \dfrac{p_+\psi_{12}-p^3\psi_{22}-p_+\psi_{34}+p^3\psi_{44}}{2m} \\ \dfrac{p^3\psi_{11}+p_-\psi_{12}-p^3\psi_{33}-p_-\psi_{34}}{2m} & \dfrac{p^3\psi_{12}+p_-\psi_{22}-p_+\psi_{33}+p^3\psi_{34}}{2m} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \dfrac{p_+\psi_{11}-p^3\psi_{12}-p^3\psi_{34}-p_-\psi_{44}}{2m} & \dfrac{p_+\psi_{12}-p^3\psi_{22}-p_+\psi_{34}\,p^3\psi_{44}}{2m} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

donde $\psi_{21} = \psi_{12}$; $\psi_{43} = \psi_{34}$; $p_{\pm} = p^{1} \pm ip^{2}$.

<u>Corolario</u>:

Comparando con (2.9) se ve que <u>para construir por proyección ortogonal + un elemento $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}^{sim}} \psi \in \mathcal{W}$ a partir de una $\psi \in \mathcal{E}^{sim}$, sólo se necesita la parte ψ^{I} de ψ.</u> A la misma conclusión se llega observando (2.58-b). Es decir, si $\psi \in \mathcal{E}^{sim}$,

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}^{sim}} \psi = \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}^{sim}} \psi^{I} = \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}^{sim}} (\Lambda^{I}\psi) \; . \tag{2.64}$$

+ Salvo lo de "proyección ortogonal" este corolario no es nuevo (Ver Belinfante [3]).

2.f-4 - Productos de operadores proyección tipos 2.f-2 y 2.f-3.

En A2-13 se demustran las fórmulas que siguen; si se recuerdan las fig. 2-3 y 2-4 los resultados obtenidos se hacen intuitivos con las figuras asociadas a las ecuaciones que siguen:

$$\Lambda_{\perp}^{W\varepsilon^{sim}} \Lambda_{F}^{W\varepsilon^{sim}} = \Lambda_{F}^{W\varepsilon^{sim}} \quad (2.65\text{-a})$$

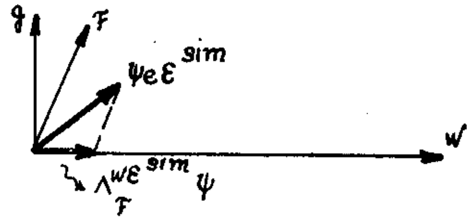

Fig. 2-5-a

$$\Lambda_{\perp}^{W\varepsilon^{sim}} \Lambda_{W}^{F\varepsilon^{sim}} = \Lambda_{W}^{F\varepsilon^{sim}} - \Lambda_{\perp}^{g\varepsilon^{sim}} \quad (2.65\text{-b})$$

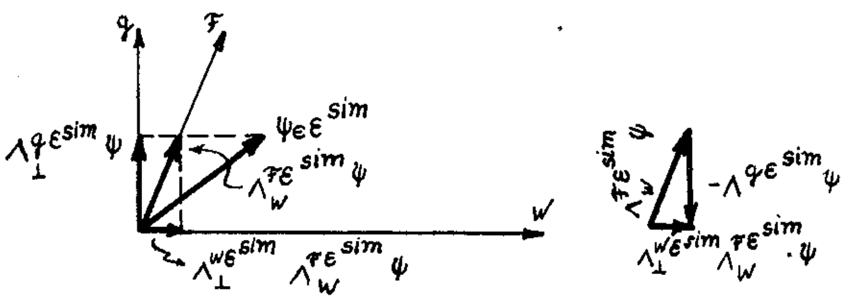

Fig. 2-5-b

$$\Lambda_{\perp}^{g\varepsilon^{sim}} \Lambda_{F}^{W\varepsilon^{sim}} = 0 \quad (2.65\text{-c})$$

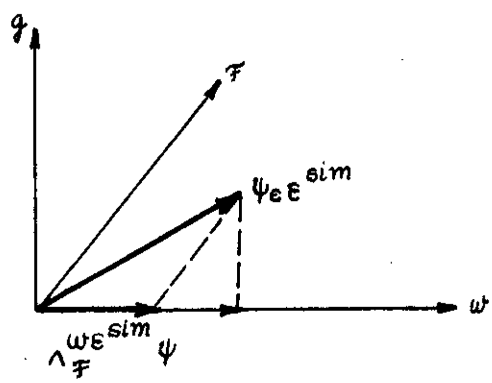

Fig. 2-5-c

$$\Lambda_{\perp}^{g\varepsilon^{sim}} \Lambda_{W}^{F\varepsilon^{sim}} = \Lambda_{\perp}^{g\varepsilon^{sim}} \Lambda \,\Big\|\, \Lambda_{\perp}^{g\varepsilon^{sim}} \Lambda_{W}^{F\varepsilon^{sim}} \tag{2.65-d}$$

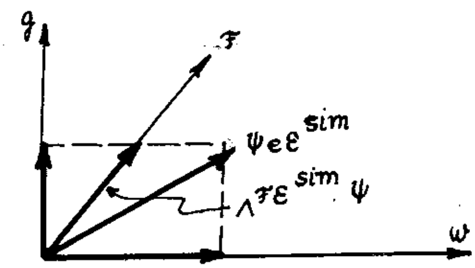

Fig. 2-5-d

$$\Lambda_{F}^{W\varepsilon^{sim}} \Lambda_{\perp}^{W\varepsilon^{sim}} = \Lambda_{\perp}^{W\varepsilon^{sim}} \tag{2.65-e}$$

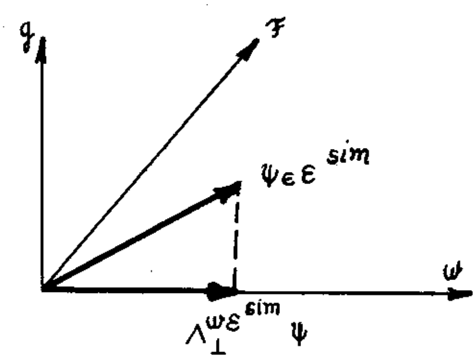

Fig. 2-5-e

$$\Lambda_{F}^{W\varepsilon^{sim}} \Lambda_{\perp}^{g\varepsilon^{sim}} = A_{F}^{W\varepsilon^{sim}} - \Lambda_{\perp}^{W\varepsilon^{sim}} \tag{2.65-f}$$

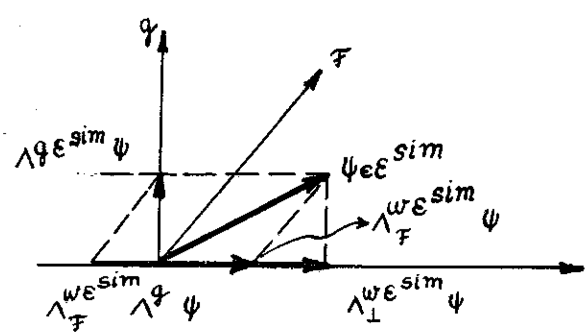

Fig. 2-5-f

$$\Lambda_{W}^{F\varepsilon^{sim}} \Lambda_{\perp}^{W\varepsilon^{sim}} = 0 \qquad (2.65\text{-g})$$

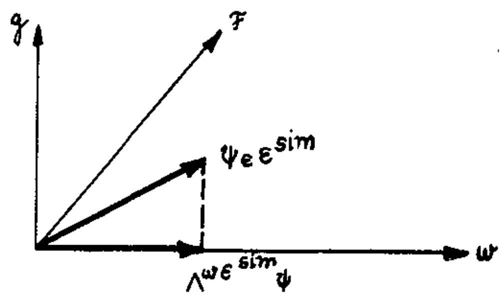

Fig. 2-5-g

$$\Lambda_{W}^{F\varepsilon^{sim}} \Lambda_{\perp}^{g\varepsilon^{sim}} = \Lambda_{W}^{F\varepsilon^{sim}} \qquad (2.65\text{-h})$$

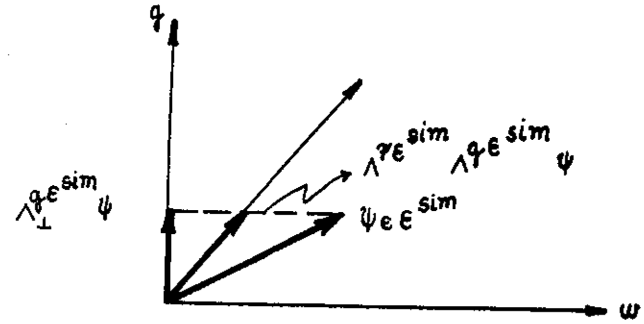

Fig. 2-5-h

2f-5 - Proyecciones (no ortogonales) de ε sobre ε^{sim} y ε^{ant}:

Las necesitaremos para 2f-6. Definimos + los operadores

$$\Lambda_{\varepsilon^{ant}}^{\varepsilon^{sim}} = \frac{1}{2}(I+\tilde{I}); \left(\Lambda_{\varepsilon^{ant}}^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}\right)_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \frac{1}{2}\left(\delta_{i_1 j_1}\delta_{i_2 j_2} + \delta_{i_1 j_2}\delta_{i_2 j_1}\right) \qquad (2.66\text{-a})$$

$$\Lambda_{\varepsilon^{sim}}^{\varepsilon^{ant}} = I - \Lambda_{\varepsilon^{ant}}^{\varepsilon^{sim}} = \frac{1}{2}(I-\tilde{I})$$

$$\left(\Lambda_{\varepsilon^{sim}}^{\varepsilon^{ant}\varepsilon}\right)_{i_1 i_2 j_1 j_2} = \frac{1}{2}\left(\delta_{i_1 j_1}\delta_{i_2 j_2} \mp \delta_{i_1 j_1}\delta_{i_2 j_2}\right) \qquad (2.66\text{-b})$$

Sea ψ un elemento de ε; es trivial que (cf. A2-14)

$$\psi^{(sim)} = \Lambda_{\varepsilon^{ant}}^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}\, \psi \in \varepsilon^{sim} \; ; \quad \psi^{(ant)} = \Lambda_{\varepsilon^{sim}}^{\varepsilon^{ant}}\, \psi \in \varepsilon^{ant} \qquad (2.67)$$

+ $\tilde{I}_{i_1 i_2 j_1 j_2} = \delta_{i_1 j_2}\delta_{i_2 j_1}$ (cf. Secc. 1-c).

y que se trata de operadores proyección pues

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\Lambda^{\varepsilon^{sim}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{ant}}\right)^{2} = \Lambda^{\varepsilon^{sim}}_{\varepsilon^{ant}} \; ; \; \left(\Lambda^{\varepsilon^{ant}}_{\varepsilon^{sim}}\right)^{2} = \Lambda^{\varepsilon^{ant}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{sim}} \\[2ex]
\Lambda^{\varepsilon^{sim}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{ant}} \Lambda^{\varepsilon^{ant}}_{\varepsilon^{sim}} = \Lambda^{\varepsilon^{ant}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{sim}} \Lambda^{\varepsilon^{sim}}_{\varepsilon^{ant}} = 0
\end{array}\right\} \qquad (2.68)$$

con lo que

$$\left.\begin{array}{l}
\Lambda^{\varepsilon^{sim}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{ant}} \underset{\varepsilon^{sim}}{=} I \; ; \; \Lambda^{\varepsilon^{ant}}_{\varepsilon^{sim}} \underset{\varepsilon^{sim}}{=} 0 \\[2ex]
\Lambda^{\varepsilon^{sim}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{ant}} \underset{\varepsilon^{ant}}{=} 0 \; ; \; \Lambda^{\varepsilon^{ant}}_{\varepsilon^{sim}} \underset{\varepsilon^{ant}}{=} I
\end{array}\right\} \qquad (2.69)$$

Las proyecciones no son ortogonales y (cf. A2-14)

$$\overline{\Lambda^{\varepsilon^{sim}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{ant}}} \underset{\substack{esc \\ \varepsilon}}{\not\sim} \Lambda^{\varepsilon^{sim}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{ant}} \qquad (2.70)^{+}$$

sin embargo en el punto siguiente estos operadores nos permitirán proyectar ortogonalmente ε sobre W.

Finalmente, si A_{ij} es una matriz 4 × 4, es (cf.A2-15)

$$\left.\begin{array}{l}
\Lambda^{\varepsilon^{sim}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{ant}} \Lambda(1) \underset{\varepsilon^{sim}}{=} \Lambda^{\varepsilon^{sim}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{ant}} \Lambda(2) \underset{\varepsilon^{sim}}{=} \frac{1}{2} \Lambda^{\varepsilon^{sim}}_{\varepsilon^{ant}}\big((1) + (2)\big) \\[2ex]
\Lambda^{\varepsilon^{ant}}_{\varepsilon^{sim}} (1) \underset{\varepsilon^{sim}}{=} -\Lambda^{\varepsilon^{ant}_{\varepsilon}} (2) \underset{\varepsilon^{sim}}{=} \frac{1}{2} \Lambda^{\varepsilon^{ant}_{\varepsilon}}_{\varepsilon^{sim}}\big((1) - (2)\big)
\end{array}\right\}$$

(2.71)

+ El símbolo $\not\sim$ es la negación del $\sim$.

2f-6 - Proyección ortogonal de $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{W}$:

Así como para $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}\,sim}$, aquí también se puede construir el operador $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}}$ a partir de propiedades prefijadas, pero su obtención es mucho más engorrosa. El resultado final es (cf. A2-16)

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}} = \Lambda^{\mathcal{W}\mathcal{E}\,sim}\,\Lambda_{\mathcal{E}ant}^{\mathcal{E}sim_{\mathcal{E}}} + \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\,\Lambda^{II}\,\Lambda_{\mathcal{E}sim}^{\mathcal{E}ant_{\mathcal{E}}} \qquad (2.72\text{-a})$$

$$= \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}\,sim}\,\Lambda_{\mathcal{E}ant}^{\mathcal{E}sim_{\mathcal{E}}} + \frac{1}{2m}\,\Lambda^{I}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\ \cdot\vec{p}\right)\Lambda_{\mathcal{E}sim}^{\mathcal{E}ant_{\mathcal{E}}} \qquad (2.72\text{-b})$$

$$= \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}\,sim}\,\Lambda_{\mathcal{E}ant}^{\mathcal{E}sim} - \frac{1}{2m}\left(H_{(1)}\gamma^{o}_{(1)} - H_{(2)}\gamma^{o}_{(2)}\right)\Lambda\,\Lambda_{\mathcal{E}sim}^{\mathcal{E}ant_{\mathcal{E}}} \qquad (2.72\text{-c})$$

$$= \Lambda^{\mathcal{W}\mathcal{E}\,sim}\,\Lambda_{\mathcal{E}ant}^{\mathcal{E}sim_{\mathcal{E}}} + \frac{1}{2m}\left(\gamma^{o}_{(1)}\,H_{(1)} - \gamma^{o}_{(2)}H_{(2)}\right)\Lambda\,\Lambda_{\mathcal{E}sim}^{\mathcal{E}ant_{\mathcal{E}}} \qquad (2.72\text{-d})$$

$$\Lambda^{\mathcal{W}\mathcal{E}} = \frac{1}{4m}\left(H_{(1)} + H_{(2)}\right)\left(\gamma^{o}_{(1)}\,\tilde{I} + \gamma_{(2)}|I\right) \qquad (2.72\text{-e})$$

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{V}\mathcal{E}}\ I - \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}}; \qquad (2.72\text{-f})$$

es un espacio tal que sus elementos son $\varphi = \Lambda^{\mathcal{V}\mathcal{E}}\,\psi$, es

$$\mathcal{W} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{E}; \qquad (2.73)$$

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}}\,\psi \in \mathcal{W}; \quad \Lambda_{\perp}^{\mathcal{V}\mathcal{E}}\ \psi \in \mathcal{V} \qquad (2.74)$$

($\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}}$ y $\Lambda_{\perp}^{\mathcal{V}\mathcal{E}}$ son operadores proyección propiamente dichos pues (cf. A2-16)

$$\left(\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}}\right)^2 = \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}};\left(\Lambda_{\perp}^{\mathcal{V}\mathcal{E}}\right)^2 = \Lambda_{\perp}^{\mathcal{V}\mathcal{E}};\ \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}}\,\Lambda_{\perp}^{\mathcal{V}\mathcal{E}} = \Lambda_{\perp}^{\mathcal{V}\mathcal{E}}\,\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\mathcal{E}} = 0 \qquad (2.75)$$

Evidentemente,

$$\Lambda_{\perp}^{\omega} \underset{\omega}{=} I \quad ; \qquad \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} \underset{\omega}{=} \tag{2.76-a}$$

$$\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} \underset{\varepsilon sim}{=} \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon sim} \tag{2.76-b}$$

La descomposición (2.73) es ortogonal pues (cf. A2-16)

$$\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} = \Lambda_{\perp} \quad ; \quad \Lambda_{\perp}^{\upsilon\varepsilon} = \Lambda_{\perp}^{\upsilon\varepsilon} \tag{2.77}$$

Debe observarse en (2.72-a) que aunque aparece $\Lambda_{\varepsilon sim}^{\varepsilon ant \varepsilon}$ $\varphi = \frac{1}{2m} (\gamma_{(1)} - \gamma_{(2)}) \cdot p \ \Lambda^{II} \Lambda_{\varepsilon sim}^{\varepsilon ant \varepsilon}$ es tal que $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$. La contribución de $\Lambda_{\varepsilon sim}^{\varepsilon ant \varepsilon}$ a la formación de ω se debe a que los espacios ε^{sim} y ε^{ant} no son ortogonales (cf. A2-14). El que la no ortogonalidad de ω y ε^{ant} obliga a la contribución de ε^{ant} cuando se proyecta ortogonalmente ε sobre ω se visualiza en la fig. (2.7) cuyo plano simboliza al subespacio subtendido por ω y ε^{ant}.

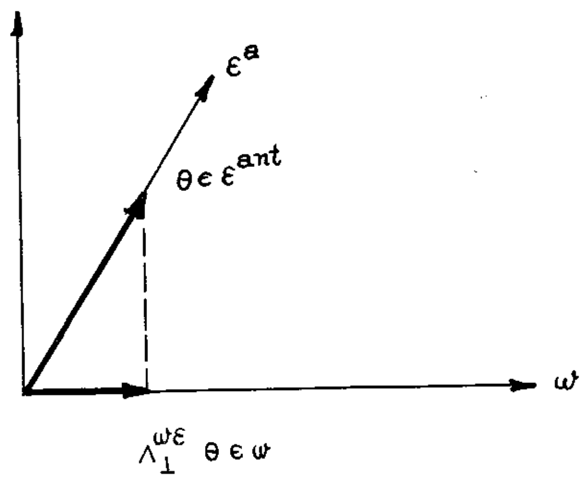

Fig. 2-7

CAPÍTULO TERCERO

LA APROXIMACIÓN DE UNA PARTICULA

3.a - RESUMEN DE NOCIONES GENERALES CONOCIDAS

Es sabido que [18, 10] para spin entero no se puede construir la aproximación de una partícula con ρ = densidad de probabilidad, $\int \rho \, d^3x = +1$, sino la aproximación de una "partícula" o carga, con $\epsilon\rho$ = densidad de carga, $\epsilon\int\rho \, d^3x = \pm e$ = carga del sistema $(e > 0)$.

Elle está conectado con el hecho de que puede definirse un producto escalar indefinido adecuado en el espacio de los vectores de estado.

Varios autores han trabajado sobre spin entero y sobre métricas indefinidas; no todos trabajan con la misma generalidad, ni emplean la misma nomenclatura, ni proceden de la misma manera. Hemos tomado ideas de varios de ellos formando así el esquema que sigue; dicho esquema es educuado para nuestro trabajo (salvo problemas conectados con $\mathcal{N} \neq \varepsilon^{sim} \neq \varepsilon$) y por lo menos libre de contradicciones internas [+]. No estudiaremos partículas neutras pues Feshbach y Villars mostraron que al menos para spin 0 es preferible atacarlas aparte, vía teoría de campos

I) Con una métrica (ψ,φ) indefinida en el espacio de los vectores de estado $[(\psi,\psi) \gtrless 0]$ se pueden describir estados en que

[+] El esquema que sigue es el más frecuentemente usado (salvo detalles) pero no el único; de Broglie [9] usa uno escencialmente diferente.

la carga total es $\pm$ e ($e > 0$). Si $(\psi,\psi) \neq 0$ normalizaremos ψ en forma que sea $(\psi,\psi) = \pm 1$. La carga total es e (ψ,ψ) [18].

II) La métrica en el espacio de los vectores de estado se define así: $(\psi,\varphi) = \int \psi^{+}\eta\,\varphi\, d^3x$ donde η (que es único para una representación dada) es un operador tal que $\eta^{+} = \eta$(+ = conjugación hermitiana habitual, es decir respecto al producto escalar $\psi^{+}\varphi$); $\eta^{+} = \eta$ implica que la carga total es real. No hay restricción física si uno se limita a η tal que $\eta^2 = I$, cosa que hacemos. [22]

III) $\rho = \psi^{+}\eta\,\psi^{5}$; la densidad de carga es e ρ = e j^{o}; [18, 10] el cuadrivector corriente es e j^{μ} [18, 10]; a menudo abreviaremos llamando densidad de carga a ρ y tetravector corriente a j^{μ} (es decir, e = 1).

IV) La conjugación pseudohermitiana se define como en A, Secc. 2.e-1 [22, 19, 10].

V) Los operadores pseudohermitianos se definen como en B, Secc. 2.e-1 [22, 19, 10].

VI) Los observables se representan por operadores pseudohermitianos para que sus valores medibles sean reales. [22, 19, 10]

VII) Los valores medios se definen por $\langle A \rangle = (\psi, A\psi)$, ψ = función de onda.

VIII) Sea $A\,\varphi_a = a\,\varphi_a$ la ecuación de autovalores de un operador pseudohermitiano A, con φ_a perteneciente al espacio de los vectores de estado: como en mecánica cuántica ordinaria φ_a es un autoestado de A. Pero el valor medible [que indicaremos con $(a)_m$] no necesariamente coincide con el autovalor a. En efecto. Se definen [14] los valores medibles $(a)_m$ del observable A como los valores medios $\langle A \rangle$ de desviación nula. Por lo tanto si $\varepsilon = (\varphi_a, \varphi_a)$ es la carga del estado representado por φ_a, el valor medible es

$(a)_m = (\varphi_a, A\, \varphi_a) = a\, \varepsilon$ que (cf.I) no necesariamente es igual a a.

IX) Si $i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ con $H = \overline{H}$ la normalización (ψ,ψ) se conserva en el tiempo [22].

X) Si $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + i[H,A]$ es $\langle \frac{dA}{dt} \rangle = \frac{d}{dt} \langle A \rangle$ [22].

XI) Llamaremos pseudounitarias a las transformaciones $\psi \rightarrow \psi' = U\psi$ de los vectores de estado, y $\eta \rightarrow \eta'$ del operador que da al producto escalar, tales que $(\psi', \varphi') = (\psi,\varphi)$. El producto escalar transformado es $(\psi', \varphi') = \int \psi'^{+} \eta' \varphi'\, d^3x$ y debe ser $\eta = U^{+} \eta' U$. [22]

XII) Los operadores se transforman según $A' = U\, A U^{-1}$ con lo cual $\langle A \rangle = \langle A' \rangle$. [22]

Nota

Admitamos (cosa que ocurrirá en nuestro caso) que existen soluciones $\psi^{(+)}$ con $(\psi^{(+)}, \psi^{(+)}) = +1$ y $\psi^{(-)}$ con $(\psi^{(-)}, \psi^{(-)}) = -1$ que sean ortogonales: $(\psi^{(+)}; \psi^{(-)}) = 0$. Entonces es inmediato que

$$\psi^{(o)} = \psi^{(+)} + \psi^{(-)} \qquad (3.1\text{-a})$$

es tal que

$$(\psi^{(o)}, \psi^{(o)}) = 0 \qquad (3.1\text{-b})$$

Es evidente que estas soluciones caen fuera de la normalización indicada en I. Caben <u>dos posibilidades</u>: incluir o excluir estos $\psi^{(o)}$ como funciones de onda de una partícula. Ni Heitler[14], ni Feshbach y Villars [10] discuten los estados $\psi^{(o)}$. Tampoco lo haremos nosotros, pues no afectan nuestros resultados; sólo señalaremos que todos los valores medibles con precisión son nulos para un estado $\psi^{(o)}$ (cf. A3-1):

$$(a)_m = (b)_m = \ldots = (q)_m = 0 \qquad (3.1\text{-c})$$

3.b - LA DENSIDAD DE CARGA; EL TETRAVECTOR CORRIENTE

De III con sólo usar (2.2) es

$$\rho = (\psi, \psi)_{sp} = \psi^{+} \gamma^{o}_{(2)} \psi \qquad (3.2\text{-a})^{*}$$

En la sección 6.g se demostrará que el <u>único</u> 4-vector no nulo que se puede formar combinando bilinearmente $^{+}$ ψ y $\bar{\psi}$ es

$$\left.\begin{array}{c} j^{\mu} = \bar{\psi}\, \gamma^{\mu}_{(1)} \psi ; \; j^{o} = \rho = \psi^{+} \gamma^{o}_{(1)} \psi = \psi^{+} \gamma^{o}_{(2)} \psi ; \\ \vec{j} = (\psi, \vec{\alpha}_{(1)} \psi) \end{array}\right\} \qquad (3.2\text{-b})^{*}$$

consecuente con (3.2-a).

Por otro lado, y como era de esperar, la teoría de campos (cap. 8) confirma (3.2-b).

Utilizando (2.31) (2.33-a) se pueden poner las (3.2-a)

$^{+}$ Sin usar μ.

y (b) en diversas formas que dan igual resultado numérido; en particular se obtiene que

$$\rho = \psi^{+} \frac{\left(\gamma^{0}_{(1)} + \gamma^{0}_{(2)}\right)}{2} \psi ; \qquad \vec{j} = \psi^{+} \frac{\left(\gamma^{0}_{(1)}\vec{\alpha}_{(2)} + \gamma^{0}_{(2)}\vec{\alpha}_{(1)}\right)}{2} \qquad (3.2\text{-c})^{*}$$

que es el j^{μ} de <u>Belinfante</u> [3] y el de de Broglie, [9] de manera que no hay novedad esencial en nuestro (3.2-b).

Usando la representación (1.6) se ve que j^{μ} se traslada en el j^{μ} de Kemmer. Además traslando j^{μ} a la formulación original (Proca) se obtiene el j^{μ} habitual en ésta (cf. cap. 6) lo cual también se conocide.

Es sabido [3] que

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \qquad (3.3)^{**}$$

lo cual se demuestra de la misma manera que para spin $\frac{1}{2}$.

<u>3.c - EL HAMILTONIANO</u>

<u>3.c-1 - Su obtención y comparación con los hamiltonianos de Kemmer;</u>

Si $H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \vec{\beta}\, m$ es el hamiltoniano de Dirac para spin $\frac{1}{2}$, las ecuaciones de BW se pueden poner en forma hamiltoniana,

$$\left.\begin{array}{ll} i\,\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = H\,\psi , & H = H_{(1)}\, I_{(2)} \\ \psi_{ij} = \psi_{ji} & \end{array}\right\} \qquad (3.4)$$

para lo cual basta multiplicar (1.2-a) por $\gamma^{0}_{(1)}$. Compárese esta trivial demostración con la necesaria para escribir las ecuaciones de Kemmer [15] en forma hamiltoniana.

En el caso de Kemmer la forma hamiltoniana $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$ no es equivalente con sus ecuaciones (1.5) $(\beta^{\mu} P_{\mu}\psi = m\psi)$ porque en la demostración se debió multiplicar ambos miembros de una ecuación por un operador singular $^{+}$, tal como lo explicita el propio Kemmer en su trabajo. Tal dificultad no aparece en nuestro caso porque hemos multiplicado (1.2-a) por $\gamma^{o}_{(1)}$ que no es singular (por lo tanto $(\gamma^{o}_{(1)})^{-1}$ existe y la demostración (1.2) $\Longrightarrow$ (3.4) es imvertibles (3.4) $\Longrightarrow$ (1.2)).

Tanto en el formalismo de BW como en el de Kemmer la correspondiente condición inicial es consecuencia de la ecuación escrita en forma manifiestamente covariante [(1.2) é (1.5)] y no es necesario postularla aparte. Lo propio ocurre en el formalismo BW cuando las ecuaciones se escriben en forma hamiltoniana. En cambio, en el de Kemmer es necesario postular por separado su condición inicial si se escribe la ecuación en la forma hamiltoniana $^{++}$. La pseudohermiticidad de H se verifica facilmente: $\bar{H} = \gamma^{o}_{(2)} H^{+}_{(1)} \gamma^{o}_{(2)} = \gamma^{o}_{(2)} H_{(1)} g^{o}_{(2)} = H_{(1)} = H$

$$\bar{H} = \gamma^{o}_{(2)} H^{+}_{(1)} \gamma^{o}_{(2)} = \gamma^{o}_{(2)} H_{(1)} \gamma^{o}_{(2)} = H_{(1)} = H \qquad (3.5)$$

$(\psi, H\psi)_{sp}$ es igual a la densidad de energía que obtendremos en

$^{+}$ Recordar que Oa=Ob dice menos que a=b.

$^{++}$ En los dos formalismos se necesita la condición inicial para plantear un problema de valores iniciales (dar una $\psi(0, \vec{x}) \epsilon\, \mathscr{W}$).

teoría de campos (cap. 8) la cual a su vez es consecuente con las densidades de energía obtenidas en otros formalismos.

3.c-2) Comparación con el hamiltoniano de de Broglie.

Por (2.13), en la ecuación $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_{(1)}\psi$ puede reemplazarse $H_{(1)}$ por otros operadores que den igual resultado (en ω); en particular puede ponerse $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2}(H_{(1)} + H_{(2)})\psi$, y se tiene el hamiltoniano de de Broglie [9].

Preferimos $H = H_{(1)}\, I_{(2)}$ en lugar de $\frac{H_{(1)} + H_{(2)}}{2}$ porque, además de ser más breve,

1) las $\left\{\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= H_{(1)}\psi \\ \psi_{ij} &= \psi_{ji} \end{aligned}\right\}$ implican la condición inicial (2.3). En cambio, de las $\left\{\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{H_{(1)} + H_{(2)}}{2}\psi \\ \psi_{ij} &= \psi_{ji} \end{aligned}\right\}$ no podemos deducir la condición inicial, y es necesario postular ésta por separado como una 3ª ecuación.

2) $\frac{1}{2}(H_{(1)} + H_{(2)})$ es singular, lo cual hace más delicado y engorroso su manejo.

Pero la elección se hace por motivos de conveniencia; no hay argumentos físicos pues $H_{(1)}I_{(2)} \underset{\omega}{=} \frac{H_{(1)} + H_{(1)}}{2}$.

Usando la representación (1.6) es fácil ver que el hamiltoniano de de Broglie es análogo al de Kemmer.

3.c-3) - El operador $m\,\beta_{(1)}I_{(2)}$

En lo que hace a encontrar un operador tal que mediante VIII (Secc. 3.a) obtengamos los valores medibles $(E)_m$ de la energía, tenemos una libertad aún mayor que la de elegir entre varios operadores iguales en ω a $H_{(1)}\,I_{(2)}$. En efecto, si $H = H_{(1)}I_{(2)}$ da los valores correctos de $(E)_m$, todo operador M tal que[+] $M \underset{\omega}{\widetilde{esc}} H$ da los mismos valores correctos de $(E)_m$, aún cuando sea $M \underset{\omega}{\neq} H$.

En particular, por (2.33-d),

$$H \underset{\omega}{\widetilde{esc}} \beta_{(1)}m \quad \text{o sea} \quad (\psi, H\psi) = (\psi, m\beta_{(1)}\psi), \quad (3.6)$$

o sea "valor medible de H "=" valor medible de $m\beta_{(1)}I_{(2)}$".

Por ser $m\beta_{(1)}I_{(2)}$ aún más simple que $H_{(1)}I_{(2)}$, uno estaría tentado de trabajar con $m\,\beta_{(1)}I_{(2)}$ como operador energía; no lo hacemos para mantener (dentro de lo posible) la similitud con la mecânica cuántica ordinaria:

1) Los autovalores $\pm$ m de $m\beta_{(1)}I_{(2)}$ no tienen nada que ver (aun que los multiplique por $\varepsilon = \pm 1$) con los valores medibles $\pm\sqrt{\vec{p}_\psi \mp m^2}$ de la energía. Ver más adelante (Secc. 3.e).

2) $m\,\beta_{(1)}$ no da la evolución temporal $\frac{\partial\psi}{\partial t}$.

3) La obtención de los autoestados de $m\beta_{(1)}I_{(2)}$ es artificiosa si este operador representa a la energía (se demostrará en Secc. 3.e-9).

+ Recordar (2.16).

3.c-4) - Sobre el autovalor cero del hamiltoniano de Kemmer.

Kemmer [15] hace notar que su hamiltoniano tiene los autovalores $\pm\, p^o = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ y 0, pero que para una plana monocromática no se obtiene 0 como valor medio, sino p_o. +

Creemos que la introducción de los espacios ω y $\mathcal{E}^{sim}$ y la forma (2.3-c) de nuestra condición inicial en el formalismo de BW permiten clarificar la cuestión.

En primer lugar, queremos demostrar que los autovectores de H con autovalor 0 no pertenecen a ω, es decir, no son posibles funciones de onda. Para ello trasladamos el hamiltoniano de Kemmer al formalismo de BW; obtenemos el hamiltoniano de de Broglie (usar (1.6)):

$$H_{Kemmer} = H_{\text{de Broglie}} = \frac{H_{(1)}I_{(2)} + I_{(1)}H_{(2)}}{2} \qquad (3.7)^{**}$$

Ahora, si $\psi^{(o)}$ es una autofuncióndel hamiltoniano de Kemmer con autovalor nulo, debe ser

$$H_{Kemmer}\, \psi^{(o)} = 0 \qquad (3.8\text{-a})$$

$$H_{(1)}\, \psi^{(o)} = -\, H_{(2)}\, \psi^{o} \qquad (3.8\text{-b})$$

Con (2.48-b)

$$\Lambda^{F\, \mathcal{E}\, sim}\ \psi^{(o)} = \psi^{(o)} \therefore \psi^{(o)} \in F \qquad (3.8\text{-c})$$

siendo F un subespacio de $\mathcal{E}^{sim}$ que te sólo tiene en común con ω el origen (ver fig. 2-3).

$$\therefore \psi^{(o)} \notin \omega \qquad (3.8\text{-d})$$

Puede darse una segunda demostración utilizando la descomposi-

+ La existencia del autovalor cero la deduce de $H^3_{Kemm.} = p_o^2\, H_{Kemmer}$.

ción en ondas planas de Cap. 4 (cf. A3-2).

Habiendo demostrado que $\psi^{(o)}$ no es una posible función de onda, basta releer VIII (Secc. 3.a) para comprender que "$\varepsilon\vec{x}$ (autovalor 0)" del hamiltoniano de Kemmer, no tiene conexión con ningún valor medible de la energía. Por supuesto ello no significa que el hamiltoniano de Kemmer sea incorrecto, sino que nuestra que hay que tomar precauciones antes de conectar con valores medibles los autovalores de un operador (aunque los multipliquemos por ε).

2.c-5) - Estados de energía + positiva $\psi^{(+)}$ y negativa $\psi^{(-)}$, operadores proyección. Valores medibles de la energía.

Por definición,

$\psi^{(+)}$ = superposición de autovectores de H con autovalor + p_o.
$\psi^{(-)}$ = " " " " " " " - p_o.

El desarrollo en ondas planas monocromáticas se da en detalle en el Cap. 4.

Sean $\omega^{(+)}$ y $\omega^{(-)}$ los subespacios de ω correspondientes a $\psi^{(+)}$ y $\psi^{(-)}$, $\psi^{(+)} \in \omega^{(+)}$; $\psi^{(-)} \in \omega^{(-)}$; $\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}$; $\omega =$

$$= \omega^{(+)} \oplus \omega^{(-)}. \tag{3.9}$$

Es evidente que los operadores proyección de ω sobre $\omega^{(+)}$ y $\omega^{(-)}$ son

+ Decimos formalmente que las soluciones son de energia positiva o negativa; por (3.17) ambas son de energía positiva; hablando con propiedad, hay que decir que son soluciones de carga positiva y negativa (cf. 3.14-a).

$$\Lambda_{\perp}^{\omega(+)} = \frac{1}{2}\left(I + \frac{H}{p^{o}}\right);\ \Lambda_{\perp}^{\omega(-)\omega} = \frac{1}{2}\left(I - \frac{H}{p^{o}}\right) \qquad (3.10)$$

y que se trata de operadores proyección propiamente dichos,

$$\left(\Lambda_{\perp}^{\omega(+)\omega}\right)^2 = \Lambda_{\perp}^{\omega(+)\omega};\quad \left(\Lambda_{\perp}^{\omega(-)\omega}\right)^2 = \Lambda_{\perp}^{\omega(-)\omega} \quad \text{etc.} \qquad (3.11)$$

Finalmente, la decomposición es ortogonal respecto a (2.2), como se demuestra así: Por (3.10), y (2.40-b) es

$$\overline{\Lambda_{\perp}^{\omega(+)\omega}} = \Lambda_{\perp}^{\omega(+)\omega} \quad ; \quad \overline{\Lambda_{\perp}^{\omega(-)\omega}} = \Lambda_{\perp}^{\omega(-)\omega} \qquad (3.12)$$

de donde, por (2.46-f) resulta la ortogonalidad en questión:

$$\left(\psi^{(+)}, \psi^{(-)}\right) = \left(\psi^{(-)}, \psi^{(+)}\right) = 0\ . \qquad (3.13)$$

Adelantamos un resultado del Cap. 4:

<u>Hay una relación entre el signo de la energía y el de la normalización</u> (este último es igual al de la carga). Es,

$$\left(\psi^{(+)}, \psi^{(+)}\right) > 0 \quad ; \quad \left(\psi^{(-)}, \psi^{(-)}\right) < 0 \qquad (3.14\text{-a})$$

Por I, Secc. 3.a debemos normalizar a + 1 (carga + e) las soluciones de energía positiva y a - 1 (carga - e) las de energía negativa:

$$\left(\psi^{(+)}, \psi^{(+)}\right) = +1 \quad ; \quad \left(\psi^{(-)}, \psi^{(-)}\right) = 1 \qquad (3.14\text{-b})$$

Si $\varepsilon = \mp 1$, las (3.14) implican

$$\left(\psi^{(\varepsilon)}, \psi^{(\varepsilon)}\right) = \varepsilon\ \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \qquad (3.15)$$

<u>Corolario</u>: Valore medibles de H.

De VIII, Secc. 3 a y de (3.14) resulta que si

$$H\ \varphi_{\pm p^{o}} = \pm\ p^{o}\ \varphi_{\pm p^{o}} \qquad (3.16)$$

(con $\varphi_{\pm\,p^o} \in \omega$), los valores medibles correspondientes son [+]

$$(E)_m = \left(\varphi_{\pm\,p^o}, H\varphi_{\pm p^o}\right) = \pm\, p_o\left(\varphi_{\pm\,p^o}, \varphi_{\pm\,p^o}\right) = +\, p_o, \quad (3.17)^*$$

contra lo que ocurre en spin $\frac{1}{2}$ en la teoría de una partícula propiamente dicha.

Por la completitud en ω de las $\varphi_{\pm\,p^o} \in \omega$ (ver Cap. 4) no hay otros valores medibles de la energia.

3.d - OBSERVABLES. GENERALIDADES

Como en VII, Secc. 3.a los valores medios de un observables A correspondientes a un estado ψ (i $\psi \in \omega$) se definen por

$$\langle A \rangle = (\psi, A\,\psi) \qquad (3.18)$$

Como en VIII, los valores medibles $(a)_m$ de un observable se definen como los valores medios correspondientes a autoestados

$$(a)_m = \langle A \rangle . \qquad (3.19)$$

Como en VI, los observables se representan por operadores pseudohermitianos en ω (ver B', Secc. 2.e-2),

$$A \ \underset{\omega}{\widetilde{\mathrm{esc}}}\ A \qquad (3.20)$$

ya que ello garantiza la realidad de los valores medios, y como consecuencia, de los valores mediables.

Sea

$$\varphi_a \in \omega \qquad (3.21\text{-a})$$

[+] Este resultado es ya conocido para spin 1; ver Heitler [14] que lo demuestra formalismo de Sakata y Taketani.

un autovector del observable A:

$$A\varphi_a = a\varphi_a \qquad (3.21\text{-b})$$

como en VIII, el estado representado por φ_a es un autoestado,

$$\varphi_a = \text{autoestado} \qquad (3.21\text{-c})$$

y el valor medible asociado a <u>a</u> es

$$(a)_m = (\varphi_a, A\,\varphi_a) = \varepsilon\, a \qquad (3.21\text{-d})$$

donde

$$\varepsilon = (\varphi_a, \varphi_a) = \pm 1 \qquad (3.21\text{-e})$$

es el signo de la carga del estado.

3.e - OBSERVABLES. EL PROBLEMA DE LOS OPERADORES QUE TRANSFORMAN ω EN $\mathcal{E}$.

La importancia práctica de la cuestión que discutiremos aquí se verá más adelante, al estudiar el spin.

3.e-1) - Los Operadores de Segunda clase Pueden Representar Observables.

Agruparemos los operadores pseudohermitianos (en ω) en dos clases:

Operadores de 1ª clase: Son los operadores A pseudohermitianos en ω tales que para todo $\psi \in \omega$ es $A\psi \in \omega$.

Operadores de 2ª clase: Son los operadores B pseudohermitianos en ω tales que existe al menos um $\psi \in \omega$ tal que $B\psi \in \mathcal{E}$ pero $B\psi \notin \omega$.

Como en mecánica cuántica ordinaria se trabaja únicamente con operadores de 1ª clase, y como otros autores han utilizando en formalismos de este tipo operadores de 2ª clase (sin discutirlo, dentro de lo que sabemos), es razonable plantearse esta <u>pregunta</u>:

Cuál de los dos puntos de vista que siguen es el correcto ?

<u>1º punto de vista</u>: Los observables se pueden representar únicamente por operadores de 1ª clase.

<u>2º punto de vista</u>: Operadores de las dos clases pueden representar observables.

Solución:

Sea B un operador de <u>2ª clase</u>; llamaremos <u>operador tipo ω asociado a B</u> al operador

$$B^{(\omega)} = A_{\perp}^{\omega\varepsilon} \; B \; A_{\perp}^{\omega\varepsilon}; \qquad (3.22)$$

evidentemente (cf. (2.74)), <u>$B^{(\omega)}$ es de 1ª clase</u>.

Una descomposición tipo Peirce

$$B = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} B \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} + \Lambda_{\perp}^{\upsilon\varepsilon} B \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} + \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} B \Lambda_{\perp}^{\upsilon\varepsilon} + \Lambda_{\perp}^{\upsilon\varepsilon} B \Lambda_{\perp}^{\upsilon\varepsilon} \qquad (2.23\text{-a})^{+}$$

conecta B con $B^{(\omega)}$.

Todo ψ de (3.18) pertenece a ω; entonces por (3.22), (2.77) y (2.76-a) es++

+ Usando (2.72-e) la igualdad es trivial.

++ Esta discusión sería más difícil si nuestros operadores proyección no fuesen ortogonales respecto a (2.2).

$$\langle B \rangle = (\psi, B\psi) = (\psi, B^{(\omega)} \psi) = \langle B^{(\omega)} \rangle \qquad (3.23\text{-b})^{+}$$

$$B \underset{\omega}{\widetilde{esc}} B^{(\omega)} \qquad (3.23\text{-c})$$

Si $B^{(\omega)}$ (operador de 1ª clase) representa aun observable, lo propio hace B (operador de 2ª clase) pues B y $B^{(\omega)}$ tienen los mismos valores modibles. Por lo tanto, el pertenecer a la 2ª clase no impide que un operador represente a un observable.

3.e-2 - Autovectores que no Corresponden a Autoestados. Falsos Valores Medibles. Falsas Degeneraciones.

Sea

$$B \quad f_b = b \ f_b \qquad (3.24)$$

la ecuación de autovalores de un operador (de 1ª o 2ª clase); si es $f_b \notin \omega$, no existe ningún estado físico cuyo vector de estado sea f_b, y por lo tanto, f_b no es un autoestado, y el número $(b)_m = (f_b, B\ f_b) = \varepsilon_b$ no es realizable experimentalmente.

Excepción: para $(b)_m$: que además de $f_b \in \omega$ exista otra $f'_b \in \omega$ ++ (con igual b), o sea degeneración; pero entonces el número $(b)_m$ corresponde al estado f'_b y no al f_b, de manera que

\+ Por lo tanto, tienen los mismos valores medibles; pero, como veremos más abajo, el método de cálculo de éstos es diferente: B tiene autoestados que no son autovectores, cosa que no ocurre con $B^{(\omega)}$.

++ Más adelante se comprenderá que esta $f_b^{o}{}'$ debe ser además autovector de $B^{(\omega)}$ (cf. Secc. 3.e-4).

en este caso lo que origina la $f_b \notin \omega$ es una degeneración aparente, no realizable experimentalmente.

Toda $f_b \notin \omega$ es un autovector que no corresponde a un autoestado.

<u>Notación</u>: Si B representa a un observable, indicaremos con $f^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon b)}$ el autoestado de carga ε correspondiente al valor medible $(b)_m = \varepsilon b$.

<u>3.e-3 - Obtención de los valores medibles y de los autoestados de un operador tipo ω.</u>

Sea $B^{(\omega)}$ un operador de 1ª clase (3.22).

<u>Teorema:</u> <u>Sea $B^{(\omega)}$ un operador tipo ω. Todos sus autovectores (en ε) correspondientes a autovalores no nulos pertenecen a ω (y son, por lo tanto, autoestado</u>.

Demostración: Sea

$$B^{(\omega)} \varphi_b = b\, \varphi_b \quad ; \quad \varphi_b \in \varepsilon \tag{3.25-a}$$

su ecuación de autovalores. Premultiplicando por $\Lambda_\perp^{\omega\varepsilon}$ deducimos (usar (2.76))

$$0 = b\, \Lambda_\perp^{\omega\varepsilon}\, \varphi_b \tag{3.25-b}$$

de manera que si $b \neq 0$ es $\Lambda_\perp^{\omega\varepsilon} \varphi_b = \varphi_b$, o sea

$$\varphi_b \in \omega \tag{3.25-c}$$

Por VIII (Secc. 3.a)

$$\varphi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon b)} = \varphi_b \qquad \text{donde} \qquad \varepsilon = (\varphi_b, \varphi_b) \tag{3.25-d}$$

Q.E.D.

Corolario: Todos los números

$$(b)_m = \varepsilon b \quad \text{con} \quad b \neq 0 \qquad (3.25\text{-e})$$

son valores medibles.

Para un operador cualquiera, es necesario verificar cuales de los números εb son valores medibles (es condición necesaria $\varphi_b \in \omega$). Para los operadores de tipo ω, solo es necesaria dicha verificación para los autovalores $b = 0$.

El conjunto $\varphi_b^{(\omega)}$ de los autoestados $\varphi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon b)}$ de un operador de tipo ω es el conjunto de sus autovectores φ_b con $b \neq 0$ más el de aquellos φ_o tales que $\Lambda_\perp^{\omega\varepsilon}\varphi_o = \varphi_o$. Simbólicamente,

$$\left\{\varphi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon b)}\right\} = \left\{\varphi_b ;\ b \neq 0\right\} \quad \text{más} \quad \left\{\varphi_o ;\ \Lambda_\perp^{\omega\varepsilon}\,\varphi_o = \varphi_o\right\} \qquad (3.25\text{-f})$$

Existen realmente autovectores $\varphi_o \notin_{(\omega)} \omega$? Pueden existir como lo prueba el ejemplo: Sea B = I; es $B^{(\omega)} = I^{(\omega)} = \Lambda^{\omega\varepsilon}$ (3.26) y evidentemente todos los vectores de υ son autovectores de $\Lambda^{\omega\varepsilon}$ con autovalor nulo.

3.e-4 - Obtención de los valores medibles y de los autoestados de un operador B de 2a. clase.

A) DIFICULTADES. DEMOSTRAREMOS INTUITIVAMENTE QUE OUEDE OCURRIR QUE NINGUNO DE LOS AUTOVECTORES DE B (MULTIPLICADO POR ε) SEA AUTOESTADO.

Es intuitivo que si B es un operador arbitrario de 2a. clase, el espacio ω no es privilegiado para el mismo de manera que existen operadores de 2a. clase (probablemente son la mayoría) cuyos autovectores f_b tienen cualquier orientaçíon respecto de ω.

Es entonces intuitivo que existen operadores de 2a. clase (y probablemente son los más) tales que <u>no tienen ningún autovector = = autoestado</u> + y por lo tanto <u>para ninguno de los números $(b)_m = \varepsilon b$ hay garantía de que sea verdadero valor medible.</u>

El plano del dibujo simboliza a . Simbolicamente se redujeron a 1 las dimensiones de los espacios y (las dimensiones spinoriales reales son 6 y 16-6=10).

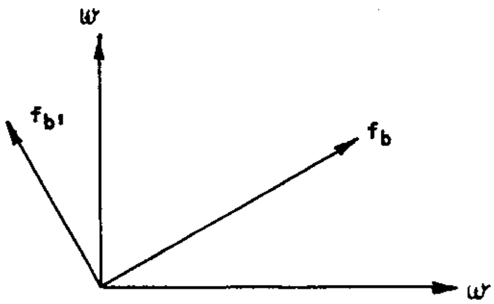

Fig. 3-1

Como la demostración de la existencia de tales operadores patológicos no es rigurosa, conviene rigorizar, lo que haremos en B. Pero antes, reforzaremos la demostración aportando un ejemplo: Sea el candidato a energía $m\beta_{(1)}I_{(2)}$ de Secc. 3.c-3; en A3-3 demostraremos que este operador pseudohermitiano es de 2a. clase, y que si $p^1 = p^2 = 0$, $p^3 \neq 0$, ninguno de sus autovectores pertenecen a ω++.

Cabe además la cuestión: Admitamos que para muchos operadores de 2a. clase ocurra la situación antedicha. Pero, no existiran ciertos operadores de 2a. clase tales que tengan un número suficiente de autovectores en ω? La respuesta es negativa, y se da en B.

B) DIFICULTADES. DEMOSTRAREMOS RIGUROSAMENTE QUE NINGUN OPERA-

+ Un $f_b \notin \omega$ no es estado, por lo que menos puede ser autoestado.

++ La dificultad no se debe a que la autofunción no sea de cuadrado integrable (por ser autoestado de p) puesto que esto es subsanable vía autodiferenciales.

DOR B DE SEGUNDA CLASE ES TAL QUE SE PUEDAN OBTENER TODOS SUS AUTOESTADOS MEDIANTE LA REGLA HABITUAL DE IGUALAR "AUTOESTADO" = = "AUTOVECTOR PERTENECIENTE AL ESPACIO DE LOS VECTORES DE ESTADO".

Admitiremos como hipótesis que los autoestados $\varphi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon b)}$ de un operador forman sistema completo en ω. Demostración por el absurdo: Supongamos que (B) es falsa; entonces para cada estado $\varphi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon b)}$ existe um autovector f_b que lo es proporcional+. Sea el conjunto de esos f_b
Si $f_b \in C$ es $f_b \in \omega$ (pues $\varphi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon b)} \in \omega$) y para toda $\psi \in \omega$ es (3.28-a)

$$\psi = \sum_C a_b \, f_b$$

(por la completitud de las $\varphi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon b)}$). Entonces,

$$B\,\varphi = \sum_C a_b \, B \, f_b = \sum_C a_b \, b \, f_b \in \omega \qquad (3.28\text{-b})$$

le cual es imposible porque B es de 2a. clase.

Por lo tanto, <u>existe al menos un estado $\varphi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon b)}$ tal que ningún autovector f_b tiene su dirección</u> (que es lo que queríamos demostrar).

C) SOLUCION.

Sabemos que: 1) El operador $B^{(\omega)}$ de (3.22) da los mismos valores medibles que B (sólo que para $B^{(\omega)}$ conocemos por 3.e-3 los autoestados (= autovectores mientras que para B conocemos sus autovectores pero existen autoestados que no son autovectores, y cuya determinación es, por lo tanto, engorrosa). 2) Los valores medibles $(b)_m$ de $B^{(\omega)}$ se obtienen a partir de su ecua-

+ En cuántica usual la constante de proporcionalidad es de módulo 1; no la especificamos para que la demostración continue válida si se admiten autoestados de pseudonorma nula (Secc. 3.a) los que no son normalizables.

ción de autovalores según (3.25).

Por lo tanto, para hallar los autoestados y los valores medibles de un operador B de 2a. clase, lo que corresponde es calcular $B^{(\omega)} = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} B \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon}$ resolver la ecuación de autovalores de $B^{(\omega)}$ (y no la de B) y usar (3.25).

Para completar demostraremos que aquellos eventuales (e suficientes) autovectores f_b de B pertenecen a ω son también autovectores de $B^{(\omega)}$ + con iguales autovalores.

En efecto, si $Bf_b = b\, f_b$, es $\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} B\, f_b = b\, \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} f_b$ y si es $f_b \notin \omega$ es $(\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} B \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon})\, f_b = b\, f_b$ de donde f_b es también autovector de I.

$$B^{(\omega)}:\ B\, f_b = b\, f_b \Longrightarrow B^{(\omega)}\, f_b = b\, f_b \quad (\text{si } f_b \in \omega). \qquad (3.29)$$

3.e-5 - Los Operadores de 2a. Clase son Correctos pero Inconvenientes. Su sustitución por operadores equivalentes tipo ω.

El que sean correctos está demostrado en (3.e-1); por lo tanto los autores que representaren observables con operadores B de 2a. clase no cometieron ningún error; pero por 3.e-4 B, en ningún caso el conjunto de número εb donde b es un autovalor de B proporciona (por ese sólo hecho) ++ el total de valores medibles, y disentimos de quienes los utilizaron como tales. El procedimiento correcto es (a nuestro juicio) el indicado en C,

\+ Si el conjunto de los autovectores de $B^{(\omega)}$ es completo en ω, es falso el teorema inverso (pues las $f_b \in C$ no forman sistema completo en ω y son por lo tanto menos numerosas).

++ Lo que es seguro es que los autovectores no dan todos los autoestados; en cuanto a los valores medibles podría ocurrir que casualmente todos coincidan con los εb, b = autovalor, pero la demostración de εb = valor medible no puede basarse en b = autovalor. Ver también (A3-4-d).

Secc. 3.e-4, o sea usar el operador $B^{(\omega)}$ asociado a B.

Pero entonces es claro que es mucho más simple olvidarse de B y sustituirlo por $B^{(\omega)}$ desde el comienzo, haciendo todos los cálculos con este.+

Es lo que haremos cada vez que aparezca un operador de 2a. clase.

3.e-6 - Teorema sobre la pseudohermiticidad (ver A3-4).

"Sea B un operador (de 1a. ó 2a. clase); siendo B pseudohermitiano en ω, $B^{(\omega)}$ es pseudohermitiano en $\mathcal{E}$ y en ω".

$$B \underset{\omega}{\widetilde{esc}} \overline{B} \Longrightarrow B^{(\omega)} \underset{\omega}{\widetilde{esc}} \overline{B^{(\omega)}} \Longrightarrow B^{(\omega)} \underset{\omega}{\widetilde{esc}} \overline{B^{(\omega)}} \qquad (3.30\text{-a})$$

Además, demostraremos que

$$B \underset{\omega}{=} \overline{B} \Longrightarrow B^{(\omega)} = \overline{B^{(\omega)}} \qquad (3.30\text{-b})$$

3.e-7 - Que ocurre cuando calculamos el operador de tipo ω asociado a un operador A de 1a. clase.?

Por hipótesis,

$$A\,\psi \in \omega \text{ para toda } \psi \in \omega \qquad (3.31)$$

Usando (2.76) y (3.31),

+ **Aún puede sustituirse $B^{(\omega)}$ por un operador A tal que $A = B^{(\omega)}$ (cf. Secc. e-7).**

$$A^{(\omega)}\psi = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} A \; \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon}\psi = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} (A\,\psi) = A\,\psi$$

$$\therefore \; A^{(\omega)} \underset{\omega}{=} A \qquad (3.32\text{-a})$$

Puede reemplazarse " $\underset{\omega}{=}$ " por " = " o sea por " = " ? Salvo casos particulares, no. En efecto: Sea A = I (que cumple (3.31); usando (3.26), $I^{(\omega)} = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon}$. Es $I^{(\omega)} \underset{\omega}{=} I$ (recordar (2.76)) pero $I^{(\omega)} \underset{\bar{\omega}}{=} 0 \;\therefore\; I^{(\omega)} \neq I$.

La demostración de (3.29) es aplicable al caso de un operador de la. clase:

$$A\,\varphi_a = a\,\varphi_a \implies A^{(\omega)}\,\varphi_a = a\,\varphi_a \qquad (3.32\text{-b})$$

para todo $\varphi_a \in \omega$. Si las φ_a forman sistema completo en ω, es

$$A\,\varphi_a = a\varphi_a \iff A^{(\omega)}\,\varphi_a = a\,\varphi_a \qquad (3.32\text{-c})$$

Lo que las (3.32-a) y (3.32-c) demuestran es que <u>cambiar A por $A^{(\omega)}$ no introduce resultados físicos diferentes</u>, o sea representan al mismo observable, y que <u>no perdemos ni autoestados, ni valores medibles</u> si ponemos $\varphi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon a)} = \varphi_a$,

$$(a)_m = \varepsilon a \text{ obtenidos de } A\,\varphi_a = a\,\varphi_a, \;\; \varphi_a \in \omega \qquad (3.32\text{-d})$$

Pero como en general es $A^{(\omega)} \neq A$, <u>no será necesariamente cierto</u> para un operador de <u>la. clase</u> (que no sea de tipo ω), que si se resuelve en ε su ecuación de autovalores <u>los autovectores de autovalor distinto de cero pertenezcan a ω.</u>

Como no perdemos autoestados ni valores medibles usando la ecuación de autovalores de A' en lugar de la de $A^{(\omega)}$, <u>no es importante sustituir $A \longrightarrow A^{(\omega)}$</u>; es más, hay casos (e. g. H) en los que pueden ser más simple y cómodo usar A en lugar de $A^{(\omega)}$.

3.e-8 - Dos condiciones necesarias y suficientes para que un operador sea de la. clase (ver A3-5).

A) "La ecuación (3.32-a) es condición necesaria y suficiente para que un operador A sea de la. clase".

B) "La ecuación

$$\left[H_{(1)}, A\right]_{\omega} = \left[H_{(2)}, A\right] \qquad (3.33)$$

es condición necesaria y suficiente para que A sea de la. clase".

Daría lo mismo usar

$$H_{(1)} A_1 \overset{=}{\omega} H_{(2)} A \qquad (3.34)$$

en lugar de (3.33) (cf. A3-5, 2) pero la (3.33) es más cómoda de usar: En muchos casos se ve a simple vista que se cumple $\left[A, H_{(1)}\right] = 0$, $\left[A, H_{(2)}\right] = 0$ de donde se cumple (3.33).

3.e-9 - Ejemplos.

A) $A = H = H_{(1)} I_{(2)}$.

Es $\left[H, H_{(1)}\right] = 0$, $\left[H, H_{(2)}\right] = 0$, por lo tanto H es de la. clase por (3.33) (como era de prever). Verifiquemos: Si $\psi \epsilon \omega$, $H_{(1)}\psi = H_{(2)}\psi$.'. $H_{(1)}H_{(1)}\psi) = p_o^2 = H_{(2)}^2 \psi = H_{(2)}(H_{(1)}\psi)$.'. $H\psi = \varphi$ cumple (2.3-c) y por ende pertenece a ω.

Como consecuencia de la fórmula gral. (3.32-a) es

$$H^{(\omega)} = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} H \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} H \qquad (3.35\text{-a})$$

Verifiquemos: Si $\psi \epsilon \omega$ es $H \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} \psi = H\psi$ (pues $\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} \underset{\omega}{=} I$); además si ψ cumple (2.3-c) también la cumple $\varphi = H\psi$, de donde $\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} \varphi = \varphi$; entonces, $H^{(\omega)} \varphi = H\psi$, o sea la (3.35-a).

B) $B = m\,\beta_{(1)}\, I_{(2)}$.

Fué discutido en Secc. 3.c-3 y en Secc. 3.e-4A como posible (e inconveniente) representante de la energía; en particular se demostró que es de 2a. clase. Verifiquemos:

B_1) Redemostraremos que es de 2a. clase con ayuda de (3.33): Las

$$\begin{aligned} \left[H_{(1)},\, m\,\beta_{(1)}\, I_{(2)}\right] &= -\,2m\, \vec{\gamma}_{(1)} I_{(2)} \cdot \vec{p} \underset{\omega}{\neq} 0\ {}^{+} \\ \left[H_{(2)},\, m\,\beta_{(1)}\, I_{(2)}\right] &= 0 \end{aligned} \qquad (3.35\text{-b})$$

muestran que

$$\left[H_{(1)},\, m\,\beta_{(1)}\, I_{(2)}\right] \neq \left[H_{(2)},\, m\,\beta_{(1)} I_{(2)}\right] \qquad (3.35\text{-c})$$

por lo que $m\,\beta_{(1)} I_{(2)}$ es de 2a. clase.

B_2) Por otra parte, por la fórmula general (3.23-c) es

$$\left(m\,\gamma^{o}_{(1)}\, I_{(2)}\right)^{(\omega)} \underset{\omega}{\widetilde{esc}}\ m\,\gamma^{o}_{(1)}\ . \qquad (3.35\text{-d})$$

Verifiquemos (3.35-d). En A3-6 calculamos explícitamente

$$\left(m\gamma^{o}_{(1)} I_{(2)}\right)^{(\omega)} = m\,\frac{1}{2}\left(\gamma^{o}_{(1)} + \gamma^{o}_{(2)}\right) - \frac{1}{2}\,\vec{p}\left(\gamma^{o}_{(2)} \vec{\gamma}_{(1)} + \right.$$

$$\left. + \gamma^{o}_{(1)} \vec{\gamma}_{(2)}\right) ; \qquad (3.35\text{-e})$$

entonces, con (2.33-f) y (2.33-g) queda demostrada nuevamente la (3.35-d).

+ Si fuera $\vec{\gamma}_{(1)}\, I_{(2)} \cdot \vec{p} \underset{\omega}{=} 0$ sería $\overrightarrow{\gamma^{o} \gamma_{(1)}}\, \vec{p} \underset{\omega}{=} 0$ contra (2.33-e).

Nota: En 3.e-9 completaremos la discución de m $\beta_{(1)}$ $I_{(2)}$ como energía.

3.e-10 - Representan el mismo observable los operadores de segunda clase B y C si son escalar en ω?

Pareceria plausible que la respuesta fuese afirmativa, pues

$$B \underset{\omega}{\widetilde{esc}} C \qquad (3.36\text{-a})$$

$$\Longrightarrow \quad \langle B \rangle = \langle C \rangle \qquad (3.36\text{-b})$$

por lo que B y C tienen - al menos aparentemente - los mismos valores medibles.

Pero la cuestión merece un análisis más cuidadosa. Veamos primero que el observable representado por un operador no está unívocamente determinado por el operador, aunque trabajamos en una representación fija:

Si hacemos caso emise de su impracticidad, los operadores de 2a. clase B, C C, ... representan legítimamente observables, pero para salvar [+] a los operadores de 2a. clase hemos tenido que asociar a cada B una regla para construir sus autoestados: Para tener los autoestados de B, hallar $B^{(\omega)}$ y calcular los autovectores de éste". Es una regla razonable, pero que no deja de tener cierto grade de arbitrariedad.[++] En efecto, supengamos

[+] Importa salvarlos pues hay operadores bien conocidos, como el spin de Kemmer (cf. Secc. 3.i-2) que son de 2a. clase.

[++] En la cuántica usual, el observable determina unívocamente al operador para una representacion dada, porque la regal es unica: "Para B, hallar los autovectores de B"; pero en nuestro caso esta regla es inadecuada si B es de 2a. clase, y la arbitrariedad reside en que pueden haber varias nuevas reglas.

por un momento que podemos construir un operador $B^{(*)}$ de la. clase tal que

$$B \underset{\omega}{\widetilde{esc}} B^{(*)} \qquad (3.36\text{-c})$$

pero que cumpla

$$B^{(\omega)} \underset{\omega}{\neq} B^{(*)} \qquad (3.36\text{-d})$$

Con el mismo derecho con que hemos ordenado: "... hallar $B^{(\omega)}$..." podríamos haber impuesto "Para tener los autoestados de B, hallar $B^{(*)}$ y calcular los autovectores de éste". Posiblemente la regla "... hallar $B^{(\omega)}$..." sea la más natural de todas, pero no por ello deja de ser arbitraria. Ahora, si se cumple (3.36-d), entonces las autovesctores y, o, los autovalores de $B^{(\omega)}$ serán diferentes de los de $B^{(*)}$ y las des reglas tendrán consecuencias físicas diferentes.

<u>Esto muestran que el observable descripto por el operador B usando la regla "... hallar $B^{(\omega)}$..." es diferente del observable descripto por el mismo operador pero usando la regla"... hallar $B^{(*)}$..."</u>.

Cómo construir $B^{(*)}$? Ello es fácil si existen B y C de 2a. clase tales que cumplan (3.36-a) y sea

$$B^{(\omega)} \underset{\omega}{\neq} C^{(\omega)} \qquad (3.36\text{-e})$$

basta elegir

$$B^{(*)} = C^{(\omega)} \qquad (3.36\text{-f})$$

ya que entonces se cumplen (c) y (d).

Existe al menos un par B y C que cumpla (3.36-a) y (3.36-e) ?

Sí, porque en A3-6 damos un ejemplo.

Resulta claro que salvo que se elijam adequadamente las reglas, los operadores B y C de (a) y (e) no representan al mismo observable.

Caben dos procedimientos:

1er. procedimiento. Sólo usar la regla 3.e-4C, este es: Para el operador B sólo usar la regla "... hallar $B^{(\omega)}$..." (llamamos B al observable así descripto). Para el operador C sólo usar la regla "... hallar $C^{(\omega)}$..." (llamamos C al observable así descripto). Es claro que si se cumple ( ) los observables B y C son diferentes, pese a (a).

2do. procedimiento. Describir al observable $\mathfrak{B}$ tanto con los operadores B como C, de la siguiente manera: Para la descripción con B, usar la regla "... hallar $B^{(\omega)}$..."; para la descripción con C usar la regla "... hallar $C^{(*)}$..." donde $C^{(*)} = B^{(\omega)}$. Por otro lado, describir al observable C también con C é B: Para la descripción con C usar la regla "... hallar $C^{(\omega)}$..."; para la descripción con B, usar la regla "... hallar $B^{(*)}$..." donde $B^{(*)} = C^{(\omega)}$.

Con el 1er. procedimiento, los observables representados por los 2 operadores B y C son forzosamente diferentes, pese a B $\underset{\omega}{\widetilde{esc}}$ C. Com el 2do. procedimiento, los dos operadores B y C tales que B $\underset{\omega}{\widetilde{esc}}$ C pueden representar al mismo observable, e no, según el par de reglas empleado. Resulta claro que los dos pro cedimientos son físicamente equivalentes, pero que el 2do. es muy complicado, y no lo emplearemos.

Aplicación: El operador m $\beta_{(1)}I_{(2)}$

En Secc. 3.c-3, 3.e-4 y 3.e-9 B_2 hemos discutido a $B = m\,\overset{o}{\gamma}_{(1)}I_{(2)}$ como posible competidor de $H = H_{(1)}I_{(2)}$ como operador de energía. Es,

$$H_{(1)}I_{(2)} \underset{\omega}{\widetilde{esc}} m\,\overset{o}{\gamma}_{(1)}I_{(2)}$$

y $$\left(H_{(1)}I_{(2)}\right)^{(\omega)} \underset{\omega}{\neq} m\left(\overset{o}{\gamma}_{(1)}I_{(2)}\right)^{(\omega)} \qquad (3.36\text{-g})$$

(para la 2a., ver A3-6. Por lo tanto, si nos atenemos al 1er. criterio $H = H_{(1)}I_{(2)}$ y m $\beta_{(1)}I_{(2)}$ representan a observables diferentes;[+] como H representa a la energía, resulta que con la regla de Secc. 3.e-4C ("... hallar $(m\overset{o}{\gamma}_{(1)}I_{(2)})^{(\omega)}$..."), m $\overset{o}{\gamma}_{(1)}I_{(2)}$ no representa a la energía.

Para que m $\overset{o}{\gamma}_{(1)}I_{(2)}$ representase a la energía, habría que recurrir a uno de los pares de reglas del complicado procedimiento número 2. Ello es factible pero artificioso.

Como verificación, demostraremos en A3-6 que si se usa el primer procedimiento los valores medibles de m $\overset{o}{\gamma}_{(1)}I_{(2)}{}^{(\omega)}$ difieren del valor medible + p_o de $H = H_{(1)}I_{(2)}$.

+ En la discusión precedente hemos supuesto B y C de 2a. clase; la discusión es similar si uno de los dos es de 1a. clase.

3.f - OBSERVABLES. LOS OPERADORES QUE TRANSFORMAN ω EN ε^{sim}.

3.f-1 - Simplificación del caso general 3.e.

Definiciones:

Operadores simétricos de 2a. clase: Son los operadores B de 2a. clase tales que para toda $\psi \in \omega$ es B $\psi \in \varepsilon^{sim}$.

Sea B un operador simétrico de 2a. clase; llamaremos operador tipo ω simétrico al operador

$$\overset{(\omega)}{B^{sim}} = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon^{sim}} \, B \, \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon^{sim}} \tag{3.37}$$

Es fácil demostrar que (cf. A3-7)

$$\overset{(\omega)}{B^{sim}} \underset{\varepsilon^{sim}}{=} B^{(\omega)} \tag{3.38-a}$$

entonces, por (2.11)

$$\overset{(\omega)}{B^{sim}} \underset{\omega}{=} B^{(\omega)} \tag{3.38-b}$$

De (3.38-b) deducimos como en (3.e-7) que cambiar $B^{(\omega)}$ por $\overset{(\omega)}{B^{sim}}$ no introduce resultados físicos diferentes y no perdemos valores medibles.

Cómo se modifica la (3.25) ?

de (3.25) y (3.38-a) deducimos que si en

$$\overset{(\omega)}{B^{sim}} \psi_b = b\, \psi_b \tag{3.39}$$

es

$$\psi_b \in \varepsilon^{sim}, \quad b \neq 0 \tag{3.40-a}$$

entonces

$$\psi_b \in \omega \tag{3.40-b}$$

o sea

$$\left\{\psi_b^{(\omega)}\right\} = \left\{\psi_b \in \mathcal{E}^{sim};\ b \neq 0\right\} \quad \text{más} \quad \left\{\psi_o \in \mathcal{E}^{sim};\ \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon^{sim}} \psi_o = \psi_o\right\} \tag{3.40-c}$$

La única desventaja de $\overset{(\omega)}{B^{sim}}$ respecto de $B^{(\omega)}$ es que puede existir $\psi_b \notin \omega$ con $b \neq 0$ (si $\psi_b \notin \mathcal{E}^{sim}$), de manera que <u>aparentemente</u> cuesta más trabajo seleccionar las ψ_b correspondientes a autoestados; pero en la práctica ese exceso de trabajo es muy pequeno ya que por simple inspección saltan a la vista las ψ_b tales que $\left(\psi_b\right)_{ij} = \left(\psi_b\right)_{ji}$.

Como $\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon^{sim}}$ es más breve que $\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon}$, resulta más simple usar $\overset{(\omega)}{B^{sim}}$ en lugar de $B^{(\omega)}$ cuando el operador de 2a. clase B es simétrico: <u>Cuando B, operador de 2a. clase sea simétrico, lo reemplazaremos por $\overset{(\omega)}{B^{sim}}$ y no por $B^{(\omega)}$.</u>

Además, como en (3.e-7), si es de la. clase no se introducen resultados físicos diferentes si se usa $\overset{(\omega)}{A^{sim}}$. Es,

$$\overset{(\omega)}{A^{sim}} \underset{\omega}{=} A \tag{3.41}$$

<u>3.f-2 - Teorema sobre la pseudohermiticidad.</u>

"Como en A3-4 se verifica que si B es simétrico de 2a. clase, siendo B pseudohermitiano en ω es $\overset{(\omega)}{B^{sim}}$ pseudohermitiano en ω":

$$B \underset{\omega}{\widetilde{esc}} \cdot \overline{B} \longrightarrow \overset{(\omega)}{B^{sim}} \underset{\omega}{\widetilde{esc}} \overline{\overset{(\omega)}{B^{sim}}} \tag{3.42}$$

En cambio si $B \underset{\omega}{=} B$ puede ser $\overset{(\omega)}{B^{sim}} \underset{\omega}{\neq} \overset{(\omega)}{B^{sim}}$, lo cual no afecta la pseudohermiticidad.

3.g - DERIVACION RESPECTO DEL TIEMPO.

Como es usual definimos $\frac{dA}{dt}$ por

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle A \rangle \qquad (3.43)$$

El resultado es [+] (cf. A3-8)

$$\frac{dA}{dt} \underset{\omega}{\overset{\sim}{esc}} i[H, A] \qquad (3.44)$$

y sólo puede reemplazarse la equivalencia escalar en ω por una igualdad en ω si se usan argumentos prácticos y de conveniencia; no con argumentos físicos (obsérvese que todas las $\frac{dA}{dt}$ definidas por (3.44) dan los mismos valores medios).

Pero (como hemos hecho con el hamiltoniano) privilegiaremos <u>arbitrariamente</u> una de las soluciones de (3.44) para trabajar con mayor comodidad. Llamaremos <u>derivada principal respecto del tiempo</u> al operador [++]

$$\frac{dA}{dt} = [H, A] \qquad (3.45)$$

derivada principal está relacionada con las demás por

$$\frac{dA}{dt} \underset{\omega}{\overset{\sim}{esc}} \frac{dA}{dt} \qquad (3.46\text{-a})$$

Motivo de la elección: Hemos visto la vantaja práctica de los operadores de 1a. clase sobre los de 2a.; en (A3-8) demostramos que si A es de 1a. clase, dA/dt también lo es (y no puede asegurarse lo mismo para las restantes dA/dt).

+ Si $\partial A/\partial t = 0$.

++ Si la derivada es principal ponemos d/dt y no d/dt.

Por otra parte, aunque B sea de 2a. clase, es (cf. A3-8):

$$\frac{dB}{dt} \underset{\omega}{\widetilde{esc}} \frac{d(B^{(\omega)})}{dt} \qquad (3.46\text{-b})$$

3.h. - EL MOMENTO LINEAL.

Es el conocido operador

$$\vec{p} = -i \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \qquad \text{(representación } \vec{x}\text{)} \qquad (3.47\text{-a})^{**}$$

$$\vec{p} = \vec{p}\cdot \qquad \text{(representación } \vec{p}\text{)} \qquad (3.47\text{-b})^{**}$$

que coincide con el usado por todos los autores.

Es trivial demostrar que

A) $\vec{p}$ es un operador de 1a. clase.

B) $\dot{\vec{p}} = \vec{p}$ (pseudohermitiano) (3.48-a)

C) $\vec{p}$ es una constante del movimiento:

$$\overrightarrow{\frac{dp}{dt}} = 0 \qquad (3.48\text{-b})^{**}$$

Casi todo lo anterior es bien sabido.

Finalmente, (3.47) es consecuente con los resultados de teoría de campos (Cap. 8).

3.i - EL MOMENTO ANGULAR.

3.i-1 - El momento angular total.

Como es sabido [1, 17] el estudio de las rotaciones infinitesimales 4-dimensionales de Lorentz provee el momento angular total

$$\vec{J} = \vec{x} \times \vec{p} + \frac{\left(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}\right)}{2} \tag{3.49}$$ **

Para aprovechar cálculos de spin $\frac{1}{2}$ es conveniente poner

$$\vec{J} = \vec{\mathcal{J}}_{(1)} + \frac{1}{2}\,\vec{\sigma}_{(2)} = \vec{\mathcal{J}}_{(2)} + \frac{1}{2}\,\vec{\sigma}_{(1)} \tag{3.50}$$

donde

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{x} \times \vec{p} + \frac{1}{2}\,\vec{\sigma} \tag{3.51-a}$$ **

es el momento angular para spin $\frac{1}{2}$.

Es bien sabido que

$$\left[H, \vec{\mathcal{J}}\right] = 0 \;. \tag{3.51-b}$$ **

Además es evidente que

$$\left[H_{(1)}, \vec{\sigma}_{(2)}\right] = \left[H_{(2)}, \vec{\sigma}_{(1)}\right] = 0 \tag{3.51-c}$$

<u>la. consecuencia de (3.51)</u> +

$$\left[H_{(1)}, \vec{\mathcal{J}}\right] = \left[H_{(2)}, \vec{\mathcal{J}}\right] = 0 \tag{3.52-a}$$

con lo cual $\vec{\mathcal{J}}$ es de la. clase (cf. (3.33)); este resultado no es nuevo: está contenido en el bien conocido hecho de que $\vec{\mathcal{J}}$ genera las rotaciones infinitesimales.

$$\psi \in \omega \Longrightarrow \mathcal{J}^k\,\psi \in \omega \tag{3.52-b}$$

por (3.32),

$$\vec{\mathcal{J}} \underset{\omega}{=} \vec{\mathcal{J}}^{(\omega)} \tag{3.52-c}$$

+ El formalismo de BW presente en la teoría de 1 "partícula" las complicaciones que son notorias por las páginas anteriores (y que no son peculiares de el sino inherentes a cualquier formalismo de componentes reduendantes), pero frente a formalismos similares tiene la ventaja de poder utilizar resultados de spin 1/2.

2a. consecuencia.

Es también trivial que $\vec{\mathcal{J}}$ es una constante del movimiento:

$$\frac{d\vec{\mathcal{J}}}{dt} = 0. \qquad (3.52\text{-d})$$

Por otra parte $\gamma^{o}_{(2)}$ conmuta con $\vec{\mathcal{J}}$; entonces como $\vec{\mathcal{J}}$ es hermitiano, es también pseudohermitiano (cf. Secc. 2.e):

$$\overline{\vec{\mathcal{J}}} = \vec{\mathcal{J}} \qquad (3.53)$$

$\vec{\mathcal{J}}$ coincide con el momento angular de de Broglie [9] y si se usa la representación (1.6) el momento angular de Kemmer [15] se traduce en (3.49). Finalmente (3.49) es consecuente con los resultados de la teoría de campos (Cap. 8).

3.1-2 - El spin.

A) El Operador Tradicional.

La consecuencia natural de (3.49) es llamar spin a $\frac{1}{2}\left(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}\right)$; $\frac{1}{2}\left(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}\right)$ es el operador de spin de Belinfante [4] y el de Kemm de Broglie [9] +; con la representación (1.6) el operador de spin de Kemmer se traduce también en dicho operador; finalmente, el uso de $\frac{1}{2}\left(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}\right)$ como spin se ve aparentemente refirmado por el hecho bien conocido de que

$$\left(\frac{\sigma^{3}_{(1)} + \sigma^{3}_{(2)}}{2}\right)^{3} = \left(\frac{\sigma^{3}_{(1)} + \sigma^{3}_{(2)}}{2}\right) \qquad (3.54\text{-a})$$

+ Pero debe recordarse que los principios de la teoría de de Broglie difieren del esquema de Secc. 3.a por lo que la discusión que sigue no es aplicable al spin de de Broglie.

implica que $\frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)}+\sigma^3_{(2)}\right)$ tiene autovalores + 1, 0, - 1.

Desgraciadamente, más abajo veremos que $\frac{1}{2}(\sigma^3_{(1)}+\sigma^3_{(2)})$ es un operador de 2a. clase por lotanto: el que sus autovalores sean + 1, 0, - 1 no ganrantiza que los valores medibles sean $+\epsilon 1$, $\epsilon 0$, $-\epsilon 1$ (cf. Secc. 3.e-4). 2) Al menos uno de los autoestados de la 3a. componente del spin no está dado por ningún autovector de $\frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)}+\sigma^3_{(2)}\right)$.

B) $\frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)}+\sigma^3_{(2)}\right)$ es de 2a. clase.

B_1) 1a. demostración: Verificar que viola (3.33).

B_2) 2a. demostración (por reducción al absurdo).

Supongamos que para toda $\varphi \in W$ sea $\psi = \frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)}+\sigma^3_{(2)}\right)\varphi \in W$. (3.54-b)

Usando la representación (2.6) es fácil ver (cf. A3-10) que

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)}+\sigma^3_{(2)}\right)\varphi =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_{11} & 0 & \frac{p^3\ \varphi_{11}-\varphi_{33}+p_-\ \varphi_{12}-\varphi_{34}}{2m} & 0 \\ 0 & -\varphi_{22} & 0 & \frac{p^3\ \varphi_{22}-\varphi_{44}+p_+\ \varphi_{34}-\varphi_{12}}{2m} \\ \frac{p^3\ \varphi_{11}-\varphi_{33}+p_-\ \varphi_{12}-\varphi_{34}}{2m} & 0 & \varphi_{33} & 0 \\ 0 & \frac{p^3\ \varphi_{22}-\varphi_{44}+p_+\ \varphi_{34}-\varphi_{12}}{2m} & 0 & -\varphi_{44} \end{pmatrix} \quad (3.54\text{-c})^{+}$$

+ $p_\pm = p^1 \pm i\, p^2$.

Por la hipótesis (3.54-b), ψ satisface $\psi = \Lambda_1^{\omega\varepsilon^{sim}} \psi$; basta entonces comparar el elemento 14 de (2.63) con el de (3.54-c) para demostrar que

$$p_+ \varphi_{11} + p_- \varphi_{44} = 0 \; ; \qquad (3.54\text{-d})$$

... (2.9-b) se ve que (3.54-d) es una restricción sobre φ^I con lo cual hemos contradicho (3.54-b): en efecto: por la Secc. 2.f sabemos que si φ es arbitraria (con tal de pertenecer a), su parte φ^I es arbitraria, contra (3.54-d).

Por lo tanto, existe al menos una $\psi \in \omega$ tal que

$$\frac{\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}}{2} \, \psi \notin \omega \qquad (3.55\text{-a})$$

Siendo $\frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}\right)$ de 2a. clase sabemos que (cf. Secc. 3.e-4B) hay autoestados que no están representados por autovectores. Sin embargo, para mayor seguridad demostramos independientemente lo que sigue:

C) Al menos para ciertos valores de $\vec{p}$, ninguna de las autofunciones de $\frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}\right)$ correspondientes al autovalor $+1$ (ó -1) pertenece a ω.

En efecto: Sea

$$\frac{\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}}{2} \, f_s = s \, f_s \quad (s = +1, 0, -1) \qquad (3.55\text{-b})$$

la ecuación de autovalores. Supongamos

$$p^2 = 0, \quad p^1 \neq 0, \quad p^3 \neq 0 \qquad (3.55\text{-c})$$

(lo cual es compatible con una medición de $\frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}\right)$ En

A3-10 demostramos que para toda f_{+1} (en $\mathcal{E}$) es

$$f_{+1} = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & f_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31} & 0 & f_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.55\text{-d})$$

entonces $f_{+1} = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} f_{+1}$; igualando los elementos 14 y 32 de (2.63) (con $\psi \to f_{+1}$) y (3.55-d) es (teniendo en cuenta (3.55-c))

$$p^1 f_{+1,11} = 0 \quad ; \qquad p^1 f_{+1,33} = 0$$

Pero como $p^1 \neq 0$ es

$$f_{+1,11} = f_{+1,33} = 0 \; . \qquad (3.55\text{-f})$$

Volviendo a (2.63) resulta entonces

$$f_{+1,31} = f_{+1,13} = 0 \; . \qquad (3.55\text{-g})$$

Entonces $f_{+1} = 0$ contra (3.55-e); por lo tanto, si vale (3.55-c) (lo cual es lícito: la no convergencia de las autofunciones de p es solucionable vía autodiferenciales) es

$$f_{+1} \notin \omega \quad (\text{para toda } f_{+1} \neq 0) \; . \qquad (3.56)$$

Análogamente para f_{-1}; en cambio, pueden existir $f_o \in \omega$.

Como no pertenecen a ω, esas f_{+1} no son estados, y menos, autoestados. Por lo tanto, probar que existe un autovalor $s = + 1$, no significa probar que existe un valor medible $\varepsilon s = + 1$.

Por supuesto, cabo aún la esperanza (que se confirmará en D) que al usar $\left(\frac{\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}}{2}\right)$ se obtengan autovalores s = (los cuales sí correspondan a vectores que pertenecen a ω); entonces sí que $\varepsilon \times 1 = \pm 1$ será valor medible.

La <u>coincidencia casual</u> del conjunto de los autovalores + 1, 0, -1 de $\frac{1}{2}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)})$ con el conjunto de los autovalores + 1, 0, - 1 de $\frac{1}{2}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)})$ (y que son los físicamente esperados) es lo que <u>ha ocultado hasta el presente el hecho de que los autovectores</u> + <u>de $\frac{1}{2}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)})$ no son estados posibles del estados posibles del sistema</u>. Si uno dice que el estado correspondiente a s = + 1 es f_{+1} y efectúa algún cálculo con ese falso estado, está errado (a nuestro parecer).

Cabe la pregunta: <u>Será realmente casual la coincidencia ?</u> No habrá un teorema por el cual siempre el espectro de un operador de 2a. clase B coincide con el de B ? La respuesta es: no hay tal teorema, pues existe el contraejemplo del operador $| = \Lambda^{II}$ discutido en A3-4c.

D) <u>Un Operador de 1a. Clase que Representa al Spin.</u>

Es evidente que $\frac{1}{2}(\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)})$ es un operador <u>simétrico</u> de 2a. clase (cf. Secc. 3.f-1). Por la discusión anterior el operador $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{(\omega)}$ representa al spin tan correctamente como $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \sigma_{(2)})$, pero con la ventaja de que:

1) (ventaja principal) por ser de 1a. clase, no se pierden <u>autoestados si se buscan sus autovectores</u>,

+ Correspondientes p. ej. a s = +1, $p^2 = 0$, $p^1 \neq 0$, $p^3 \neq 0$.

2) (secundaría) por ser de tipo ω "sim", todos sus autovectores pertenecientes a ω^{sim} con autovalor $\neq 0$ pertenecen a ω y son, por lo tanto, autoestados. Ponemos, pues

$$\mathcal{J}_{spin} = \frac{1}{2}\,(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{(\omega)} = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon\, sim}\, \frac{1}{2}\,(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})\Lambda_{\perp}^{\varepsilon\, sim} \tag{3.57}$$

Para la 3a. componente sus autovectores + $\psi_s^{(\varepsilon)}$ son tales que

$$\frac{1}{2}\,(\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)})\, \psi_s = s\, \psi_s \tag{3.58-a}$$

Como en Secc. 3.e-2 indicamos con

$$\psi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon s)}$$

a los autoestados correspondientes al valor medible εs.

Por Secc. 3.e y 3.f los autoestados $\psi^{(\varepsilon)}_{(\varepsilon s)}$ están formados por aquellas $\psi_s^{(\varepsilon)}$ que pertenecen a ω.

En (A3-11) demostramos que si $\psi_s^{(\varepsilon)} \in \varepsilon^{sim}$, es

$$s = +1,\ 0,\ -1\ ; \tag{3.58-b}$$

Los autovectores son (en ω^p_{sp}) ++

$$\psi_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p^3/2m & p_+/2m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^3/2m & 0 & 0 & 0 \\ p_+/2m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad \psi_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p^3/2m & 0 \\ 0 & 0 & -p_+/2m & 0 \\ -p^3/2m & -p_+/2m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\+ Indica el signo de la carga: $\varepsilon = (\psi_s^{(\varepsilon)}, \psi_s^{(\varepsilon)})$.

++ Ver definición de ω^p_{sp} en Secc. 2.c-3.

$$\psi_o^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & p_-/2m & -p^3/2m \\ 1 & 0 & p^3/2m & p_+/2m \\ p_-/2m & p^3/2m & 0 & 0 \\ -p^3/2m & p_+/2m & 0 & 0 \end{pmatrix}; \psi_o^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_-/2m & -p^3/2m \\ 0 & 0 & p^3/2m & -p_+/2m \\ -p_-/2m & p^3/2m & 0 & 1 \\ -p^3/2m & -p_+/2m & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_-/2m & -p^3/2m \\ 0 & p_-/2m & 0 & 0 \\ 0 & -p^3/2m & 0 & 0 \end{pmatrix}; \psi_{1}^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -p_-/2m \\ 0 & 0 & 0 & p^3/2m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_-/2m & p^3/2m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el mismo apéndice se demuestra que para s fijo, no hay otros autovectores independientes del par $\psi_s^{(+1)}$ y $\psi_s^{(-1)}$ donde + 1 y - 1 corresponden a los dos estados de la carga. Las $\psi_s^{(\varepsilon)}$ forman <u>sistema completo</u> en $\mathcal{W}_{sp}^{p}$ y son <u>linealmente independientes</u>; además son <u>ortonormales</u> respecto de (2.2):

$$(\psi_s^{(\varepsilon)}, \psi_{s'}^{(\varepsilon')}) = \varepsilon\, \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\, \delta_{ss'} \qquad (3.58\text{-d})$$

Recordando que si el autovalor es s y la carga ε el valor medible es s, es evidente que los <u>autoestados</u> $\psi_{(r)}^{(\varepsilon)}$ de valor medible $r = \varepsilon s$ y carga ε son

$$\left.\begin{aligned} \psi_{(1)}^{(1)} &= \psi_1^{(1)} \; ; & \psi_{(1)}^{(-1)} &= \psi_{-1}^{(-1)} \\ \psi_{(o)}^{(1)} &= \psi_o^{(1)} \; ; & \psi_{(o)}^{(-1)} &= \psi_o^{(-1)} \\ \psi_{(-1)}^{(1)} &= \psi_{-1}^{(1)} \; ; & \psi_{(-1)}^{(-1)} &= \psi_1^{(-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (3.58\text{-e})$$

Queda por discutir una <u>importante cuestión</u>: El spin está conectado con las rotaciones para $\vec{p} = 0$, y es sabido que el estudio de las mismas conduce al operador $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})$; parecería, pues, que nuestro operador de spin $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})^{(\omega)}$ fuese inapropiado; pero no es así pues de (A3-11.1) y (A3-11.2) vemos que <u>si $\vec{p}=0$</u>.

$$\frac{1}{2}(\sigma^3_{(1)}+\sigma^3_{(2)}) = \frac{1}{2}(\sigma^3_{(1)}+\sigma^3_{(2)})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}}\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\psi_{44} \end{pmatrix} \quad (3.59\text{-a})$$

de manera que <u>tanto</u> $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})$ <u>como</u> $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}}$ <u>generan las rotaciones para $\vec{p}=0$</u>. Otra manera de expresar lo mismo es decir que esas rotaciones definen al operador $\vec{\mathcal{J}}_{\text{spin}}$ a menos de un $\Delta\vec{\mathcal{J}}_{\text{spin}}$ que es tal que

$$\lim_{p\to 0}\Delta\vec{\mathcal{J}}_{\text{spin}} = 0 \,. \qquad (3.59\text{-b})$$

Finalmente, a) tanto $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})$ como $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}}$ son consecuentes con la <u>teoría de campos, "formulación $\frac{1}{2}$"</u> (Secc. 8.f-4); b) es trivial que $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})$ es <u>pseudohermitiano</u> (es hermitiano y conmuta con $\gamma^{o}_{(\omega)(2)}$); <u>por lo tanto, también es pseudohermitiano</u> $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})^{\text{sim}}$ (cf. (3.42)):

$$\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}} \underset{\omega}{\widetilde{\text{esc}}} \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)}) \qquad (3.59\text{-c})$$

<u>3.1-3 - El momento angular orbital</u>

De (3.49) se deduce:

a) Si se adopta como spin al operador de 2a. clase $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})$ entonces el momento angular orbital es $\vec{x} \times \vec{p}$; como $\vec{\mathcal{J}}$ es de 1a. clase, $\vec{x} \times \vec{p}$ es de 2a. clase.

b) Si se adopta al operador de 1a. clase $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}}$ entonces el momento angular orbital es

$$\vec{\mathcal{J}}_{orb} = (\vec{x} \times \vec{p})^{(\omega)}. \tag{3.60-a}$$

Si llamamos $\Delta\vec{\mathcal{J}}$ al operador de 2a. clase

$$\Delta\vec{\mathcal{J}} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}} - \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \tag{3.60-b}$$

se deduce con ayuda de (3.52) que

$$\Delta\vec{\mathcal{J}} = -(\vec{x} \times \vec{p})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}} + (\vec{x} \times \vec{p}) . \tag{3.60-c}$$

Es trivial que $\vec{x} \times \vec{p}$ es <u>pseudohermitiano</u>; por lo tanto, también lo es $(\vec{x} \times \vec{p})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}}$ (cf. (3.42)):

$$(\vec{x} \times \vec{p})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}} \underset{\omega}{\widetilde{\text{esc}}} (\vec{x} \times \vec{p})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}} \tag{3.60-d}$$

3.i - LA HELICIDAD

Es

$$r = \frac{(\mathcal{J}_{spin})\cdot\vec{p}}{|p|} = \frac{\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}}\cdot\vec{p}}{|p|} = \left[\frac{\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})\cdot\vec{p}}{|p|}\right]^{\overset{(\omega)}{\text{sim}}}; \tag{3.61-a}$$

pero es bien sabido de la teoría de spin $\frac{1}{2}$ que

$$\left[H, \frac{\frac{1}{2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})}{|p|}\right] = 0 \tag{3.62)**}$$

por lo tanto $\frac{1}{2}\frac{(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})\cdot\vec{p}}{|p|}$ conmuta con $H_{(1)}$ y $H_{(2)}$, por lo que es de 1a. clase (cf. (3.33)); entonces, $r = \Lambda^{\omega\varepsilon^{sim}}\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})\cdot\frac{\vec{p}}{|p|}\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon^{sim}}$ y $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})\cdot\frac{\vec{p}}{|p|}$ son iguales en ω (cf. (3.32)); por lo tanto, puede reemplazarse más simple

$$r \underset{\omega}{=} \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_{(1)}+\vec{\sigma}_{(2)})\cdot\frac{\vec{p}}{|p|} \ . \tag{3.61-b}$$

Es trivial deducir que r es pseudohermitiana; finalmente, de (3.62) se deduce que el 2°m. de (3.61-b) es una constante del movimiento; por lo tanto también lo es el 1°:

$$\frac{dr}{dt} \underset{\omega}{\widetilde{esc}} 0$$

3.k - EL OPERADOR POSICION HABITUAL

En mecánica cuánticano relativista es $\vec{x} = i\partial/\partial\vec{p}$ (representación p); en spin $\frac{1}{2}$ relativista (aproximación de una partícula) se usa a veces formalmente el mismo operador, aunque puede ser cuestionado, como es sabido.

Si procedemos análogamente y ponemos $\vec{x} = i\partial/\partial\vec{p}$ reencontramos (como era de esperar) el operador posición usado para spin 1 en formalismos similares a éste; pero es un operador simétrico de 2a. clase, por lo que podemos reemplazarlo por el operador de 1a. clase.

$$\vec{x} = \left(i\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right)^{(\omega)\,sim} \underset{(\omega)}{=} \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon^{sim}}\, i\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\,\Lambda^{\omega\varepsilon^{sim}} \tag{3.64-a}$$

Como tanto $i\partial/\partial\vec{p}$ como $(i\partial/\partial\vec{p})^{sim}$ tienen el mismo espectro (contínuo), la importancia de reemplazar el primero por el segundo no está en obtener el espectro correcto de valores medibles sino en obtener el autoestado correcto asociado a cada valor medible. Además, para ambos, tratándose de espectro contínuo las autofunciones debieran reemplazarse por los autodiferenciales.

Es trivial probar que $\vec{x}$ es pseudohermitiano:

$$\vec{\vec{x}} \underset{\omega}{\widetilde{esc}} \vec{x} . \qquad (3.64\text{-b})$$

Finalmente, como era de esperar,

$$\left[x^i, p^j\right] = \left[\Lambda_\perp^{\omega\varepsilon^{sim}} i \frac{\partial}{\partial_p t} \Lambda_\perp^{\omega\varepsilon^{sim}}, p^j\right] = \Lambda_\perp^{\omega\varepsilon^{sim}}\left[i \frac{\partial}{\partial_p t} p^j\right]\Lambda_\perp^{\omega\varepsilon^{sim}}$$

$$= \Lambda_\perp^{\omega\varepsilon^{sim}} \delta_{ij} \underset{\omega}{=} I \ \delta_{ij} \qquad (3.64\text{-c})$$

3.1 - EL OPERADOR PARIDAD

Sea $P^{(o)}$ el operador tal que

$$P^{(o)} \ \psi_{ij}(x^o, \vec{x}) = \psi_{ij}(x^o, -\vec{x}) . \qquad (3.65\text{-a})^{**}$$

En la Secc. 6.b se considerará la transformación ante reflexión del campo ψ; comparando la ecuación (6.9) con (3.65), deducimos que el operador paridad para spin 1 en la teoría de una "partícula" es:

$$P^{(1)} = A \ \gamma^o_{(1)} \ \gamma^o_{(2)} \ P^{(o)} \qquad (3.65\text{-b})$$

donde $\eta = \pm 1$ está determinindo per (6.10).

Como $\left[P^{(o)}\right]^2 = I \neq P^{(o)}$, $P^{(1)}$ no puede expresarse en la forma

$$P^{(\frac{1}{2})}_{(1)} \; P^{(\frac{1}{2})}_{(2)}$$

donde $P^{(\frac{1}{2})}$ sea el conocido operador paridad para spin $\frac{1}{2}$:

$$P^{(\frac{1}{2})} = \eta \gamma^{o} P^{(o)} \qquad (3.65\text{-c})^{**}$$

Esto es una excepción a un comportamiento bastante general de los mesones de spin 1 descriptos en el formalismo de BW: La de permitir expresar un ente asociado a spin 1 mediante una combinación simétrica que sólo incluya los correspondientes entes de spin $\frac{1}{2}$.

3.m - TRANSFORMACIONES PSEUDOUNITARIAS

3.m-1 - Definición

Sea U una transformación de los vectores de estado

$$\psi \longrightarrow \psi' = U \psi \text{ (lineal)} \qquad (3.66\text{-a})$$

y de la forma del producto escalar,

$$(\psi,\varphi) = \int \psi^{+} \gamma^{o}_{(2)} \varphi \, d^{3}x \longrightarrow (\psi',\varphi') = \int \psi^{+} \left(I_{(1)} \gamma^{o}_{(2)} \right)' \varphi' \, d^{3}x \; ; \qquad (3.66\text{-b})$$

diremos que U es pseudounitaria si

$$(\psi,\psi) = (\psi',\psi') \quad \text{para todo } \psi \in \omega. \qquad (3.66\text{-c})$$

(Ver XI, Secc. 3.a). Como en A2-3, se demuestra que U es pseudounitaria si y sólo si

$$(\psi,\varphi) = (\psi',\varphi') \quad \text{para todo } \psi, \varphi \in \omega. \qquad (3.66\text{-d})$$

No detallaremos la más general de las transformaciones pseudounitarias posibles; impondremos algunas restricciones; éstas serán lo suficientemente fuertes como para que la complicación matemática no sea demasiado grande, pero lo suficientemente suaves como para que,

1) dejen traslucir la inusual libertad que las equivalencias permiten en este formalismo y,

2) incluyan una transformación tipo Foldy-Wouthuysen-Tani.

Por otra parte, como se verá en 3.m-4, gran parte de las transformaciones de los vectores de estado puede ser pseudounitaria: La restricción no se encuentra sobre la transformación de los vectores de estado sino sobre la forma del producto escalar en la nueva representación (ver más adelante); ello permitirá crear transformaciones que simultáneamente serán unitarias y pseudounitarias, como la de Foldy-Wouthuysen-Tani.

Nos restringiremos a las transformaciones tales que

$$\psi'_{ij} = \psi'_{ji} \tag{3.67-a}$$

o sea

$$\psi' \in \mathcal{E}^{sim} \tag{3.67-b}$$

Llamaremos representación de BW (=Bargmann-Wigner) a toda representación que cumple (3.67); por supuesto, con (3.67) emitiremos otras transformaciones de interés: Por ejemplo, la que nos permitiría pasar de la representación original de BW al formalismo de Sakata y Taketani (Secc. 1.d).

La condición inicial (2.3) se transforma en

$$\left.\begin{array}{r}(H_{(1)}I_{(2)})'\ \psi' = (I_{(1)}H_{(2)})'\psi, \text{ con} \\ (H_{(1)}I_{(2)})' = U\, H_{(1)}I_{(2)}\, U^{-1};\quad (I_{(1)}H_{(2)})' = U\, I_{(1)}H_{(2)}\, U^{-1}\end{array}\right\} \quad (3.68)$$

que define el espacio ω en la nueva representación (e, por brevedad, en ω) (Consideramos U como una transformación que "reta" la base dejando fijos los vectores: ω' es el mismo espacio que ω; sólo varía la representación).

3.m-2 - Condición necesaria y suficiente para que una transformación sea pseudounitaria.

Por (3.66)

$$(\psi,\varphi) = (\psi',\varphi') = \int (U\psi)^{+}(I_{(1)}\gamma^{o}_{(2)})'(U\psi)d^{3}x = \int \psi^{+}U^{+}(I_{(1)}\gamma^{1}_{(2)})'U\varphi d^{3}x =$$

$$= \left(\psi\left[\gamma^{o}_{(2)}\ U^{+}\ (I_{(1)}\gamma^{o}_{(2)})'U\right]\varphi\right)$$

Como φ y φ pertenecen a ω se cumple (3.66) si y sólo si

$$I \underset{\omega}{\overset{\sim}{esc}} \gamma^{o}_{(2)}\ U^{+}\ (I_{(1)}\gamma^{o}_{(2)})\ U \qquad (3.69)$$

que es la condición pedida.

3.m-3 - Transformaciones pseudounitarias restrictas

Evidentemente (recordar (2.28)) la (3.69) se cumple si

$$I \underset{\omega}{=} \gamma^{o}_{(2)}\ U^{+}\ (I_{(1)}\gamma^{o}_{(2)})'\ U \qquad (3.70)$$

Pero la (3.70) no necesariamente implica la (3.69); en efecto, si $\psi\epsilon\omega$, $\gamma^{o}_{(2)} I \psi$ no necesariamente pertenece a ω por lo que no se cumplen las hipótesis bajo las que (2.29-b) es válida. También son suficientes las igualdades más restrictitivas.

$$I \underset{\varepsilon}{=}_{\text{sim}} \gamma^{o}_{(2)}\, U^{+} \,(I_{(1)}\, \gamma^{o}_{(2)})'\, U \;; \qquad (3.71)$$

$$I = \gamma^{o}_{(2)}\, U^{+}\, (I_{(1)}\, \gamma^{o}_{(2)})'\, U \qquad (3.72)$$

Llamaremos transformaciones pseudounitarias restrictas a las que cumplen (3.67) y (3.72).

3.m-4 - Transformaciones pseudounitarias restrictas unitarias

Por (3.72) las transformaciones pseudounitarias son restrictas si

$$(I_{(1)}\gamma^{o}_{(2)})' = U^{+\,-1}\, \gamma^{o}_{(2)}\, U^{-1} \qquad (3.73)$$

(consecuente con (XI, Secc. 3.a).

Obsérvese que más que una imposición sobre U, la (3.73) es una definición de $(I_{(1)}\, \gamma^{o}_{(2)})'$; ello permite considerar el caso en que U es además unitaria:

$$U^{+\,-1} = U \;; \qquad (3.74\text{-a})$$

entonces,

$$(I_{(1)}\, \gamma^{o}_{(2)})' = U\, \gamma^{o}_{(2)}\, U^{+} \;; \qquad (3.74\text{-b})$$

Reemplazando en (3.66-b) se tiene la forma del producto escalar en la nueva representación

$$(\psi', \varphi') = \int \psi'^{+}\, (I_{(1)}\, \gamma^{o}_{(2)})\, \varphi'\, d^3x =$$

$$= \int \psi'^{+}\, (U\, \gamma^{o}_{(2)}\, U^{+})\, \varphi'\, d^3x \qquad (3.75)$$

Como es de esperar, es

$$\left[(I_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)})'\right]^2 = I \qquad (3.76)$$

Las propiedades algebraicas de las <u>igualdades</u> y <u>equivalencias</u> (Secc. 2.d) se trasladan a la <u>nueva representación</u> reemplazando donde el buen sentido lo indique,

$$\gamma^{o}_{(2)} \longrightarrow (I_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)})' \qquad (3.77\text{-a})$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{"}\tilde{\omega}\text{"} \longrightarrow \text{"}\tilde{\omega}'\text{"} \\ \text{"}\underset{\omega}{\widetilde{\text{esc}}}\text{"} \longrightarrow \text{"}\underset{\omega'}{\widetilde{\text{esc}}}\text{"} \end{array}\right\} \qquad (3.77\text{-b})$$

etc.

La invariancia de los valores medios (y por onde de los medibles) ante U implica que el transformado A' de A debe ser tal que

$$(\psi,\ A\psi) = (\psi',\ A'\ \psi')$$

o sea

$$U\ A\ U^{+}\ \underset{\omega'}{\widetilde{\text{esc}}}\ A'.$$

Pero además queremos que si ψ es un autoestado de A, ψ' sea autoestado de A'; entonces la discusión de Secc. 3.e-10 muestra que es preferible reemplazar la equivalencia escalar por

$$U\ A\ U^{+} = A' \ ; \qquad (3.78\text{-a})$$

la (3.78-a) se satisface si ponemos

$$A' = U\ A\ U^{+} \qquad (3.78\text{-b})$$

pero sería lícito sustituir A' por cualquier operador C tal que

$$C = A' \ . \qquad (3.78\text{-c})$$

Al transformado A' dado por (3.78-b) lo llamaremos <u>transformado principal</u> de A; salvo mención en contrario, sólo usaremos transformados principales.

Así como en (3.33), la condición inicial (3.68) implica que la condición necesaria y suficiente para que un operador A' sea de la. clase es

$$\left[H_{(1)}\, I_{(2)}\, ; A' \right] \underset{\omega'}{=} \left[H_{(2)}\, I_{(1)}\, ; A' \right]; \qquad (3.79)$$

Además, (cf. A3-12) el transformado de un operador de la. clase es de la. clase.

De manera similar a (2.40), el conjugado pseudohermitiano $\overline{A'}$ de A', calculado en la nueva representación es

$$\overline{A'} = (I_{(1)}\, \gamma^{o}_{(2)})'\, A'^{+}\, (I_{(1)}\, \gamma^{o}_{(2)})' \; ; \qquad (3.80\text{-a})$$

resulta entonces (cf. A3-12)

$$\overline{A'} = (\overline{A})' \qquad (3.80\text{-b})$$

como es de desear.

<u>3.n - UNA TRANSFORMACION TIPO FOLDY-WOUTHUYSEN-TANI</u>

<u>3.n-1 - Introducción</u>

La transformación de Foldy-Wouthuysen-Tani (FWT) para spin $\frac{1}{2}$ fué preppuesta independientemente por Foldy y Wouthuysen [11] y por Tani [27, 28]; para la partícula libre es

$$U = \frac{m + \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + p^{o}}{\left[2\, p_o(p_o + m)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (3.81\text{-a})^{**}$$

$$U^{+}U = UU^{+} = I \ . \qquad (3.81\text{-b})^{**}$$

Tiene por propiedad relevante la de desacoplar manifiestamente la ecuación de evolución de las soluciones de energía positiva y negativa [11], y la de mantener invariante una forma definitiva, diferenciándose en este de las transformaciones de Lorentz [6]; puede ser generalizada el caso de la partícula interactuando con un campo electromagnético permitiendo obtener el límite no relativista de manera más correcta que con el viejo método de las componentes grandes y pequenas [11]. Además, la nueva representación es tal que sugiere nuevas observables [11] de interesantes propiedades.

Por ejemplo, se puede definir un operador posición media [11] $\vec{y}$, tal que en la nueva representación sea

$$\vec{X}' = \vec{x} \qquad (3.82\text{-a})^{**}$$

donde $\vec{x} = i\partial/\partial\vec{p}$ (representación $\vec{p}$); entonces, en la representación original se obtiene (comparar con referencia 11),

$$\vec{X} = \vec{x} + \frac{i\vec{\gamma}}{2p_o} - \frac{i(\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\vec{p}}{2\,p_o^2(p_o+m)} + \frac{(\vec{p}\times\vec{\sigma})}{2p_o(p_o+m)} \ . \qquad (3.82\text{-b})^{**}$$

El correspondiente operador posición media es

$$\vec{V} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{\vec{p}}{p_o}\ \frac{(H)}{p_o} \ ; \qquad (3.83)^{**}$$

$\vec{V}$ es más satisfactorio que el operador velocidad $\vec{v} = d\vec{x}/dt = \vec{\alpha}$ de Dirac. mientras que los autovalores de v^k sen ± 1, los de V^k sen $\pm\, p^k/p_o$ (según el signo de la energía) como es de desear.

Tiomno y Giambiagi [12] y Case [8] obtuvieron independientemente transformaciones tipo FWT para spin 1 usando formalismos sin componentes reduendantes; haremos lo propio en el formalismo de BW.

3.n-2 - Proponemos una transformación pseudounitaria restricta unitaria.

Ensayamos

$$U = U_{(1)}\, U_{(2)} \tag{3.84}$$

donde U está dada por (3.81-a); evidentemente U cumple (3.67), y por (3.81-b), U es unitaria:

$$U^{+} = U^{+}_{(1)}\, U^{+}_{(2)} = U^{-1}_{(1)}\, U^{-1}_{(2)} = U^{-1}\ . \tag{3.85}$$

Para que esta transformación unitaria sea pseudounitaria restricta debe ser (cf. 3.74-b)) [definición de $(I\,\gamma^{o}_{(2)})'$],

$$\left(I_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)}\right)' = U\,\gamma^{o}_{(2)}\,U^{+} = U_{(1)}\,U_{(2)}\,\gamma^{o}_{(2)}\,U^{+}_{(1)}\,U^{+}_{(2)} = I_{(1)}\,\gamma'^{o}_{(2)} \tag{3.86-a}$$

donde

$$\gamma'^{o} = U\,\gamma^{o}\,U^{+} = \frac{m\,\gamma^{o} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p_o} \tag{3.86-b)**}$$

es [11] el transformado de γ^{o} en la transformación de FWT para spin $\frac{1}{2}$.

En la nueva representación el producto escalar es (cf.(3.75))

$$(\varphi', \varphi') = \int \psi'^{+}\,\gamma^{o\,\prime}_{(2)}\,\psi\;d^{3}x\ ; \tag{3.87-a}$$

es (cf. Secc. 3.m)

$$(\psi', \varphi') = (\psi, \varphi) \tag{3.87-b}$$

3.n-3 - La transformación propuesta es de tipo Foldy-Wouthuysen-Tani.

Debemos demostrar que U descopla manifiestamente las soluciones de energía positiva y negativa+; procedemos como en el trabajo de Foldy y Wouthuysen para spin $\frac{1}{2}$ [11]. Sea

$$\psi' = U\psi \tag{3.88}$$

Decomponemos

$$\psi' = \phi' + \chi' \tag{3.89}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} \phi' &= \tfrac{1}{2}\,(I + \gamma^0_{(1)})\psi' \\ \chi' &= \tfrac{1}{2}\,(I - \gamma^0_{(1)})\psi' \end{aligned}\right\} \; ; \tag{3.90}$$

entonces se puede demostrar que (cf. A3-13))

$$\phi' = \psi^{(+)\prime} \tag{3.91-a}$$

es una solución de energía positiva en la nueva representación, y que

$$\chi' = \psi^{(-)\prime} \tag{3.91-b}$$

lo es de energía negativa.

Nota: Aparentemente (3.90) es tal que $\phi'_{ij} \neq \phi'_{ji}$; sin embargo, es $\phi'_{ij} = \phi'_{ji}$ ya que en la nueva representación la condición inicial es (cf.A3-14),

$$\gamma^0_{(1)} \underset{\omega'}{=} \gamma^0_{(2)} \tag{3.92}$$

+ e, mas propiamente, las de carga positiva y negativa.

Entonces (3.90) implica $\Phi' = \frac{1}{2}\ \psi' + \frac{1}{2}\left(\gamma^{0}_{(1)} + \gamma^{0}_{(2)}\right)\ \psi'$ que es claramente simétrica en los índices spinoriales, o sea

$$\psi^{(+)'}_{\epsilon}\ \varepsilon^{sim} \tag{3.93-a}$$

análogamente,

$$\psi^{(-)'}_{\epsilon}\ \varepsilon^{sim} \tag{3.93-b}$$

En spin $\frac{1}{2}$ es [11]

$$H' = U\ H\ U^{+} = \gamma^{0}\ p_{o} \tag{3.94)**}$$

Entonces el transformado (principal) de nuestro hamiltoniano es (cf. (3.84) y (3.81-b)),

$$H' = U_{(1)}\ U_{(2)}\ H_{(1)}\ U^{+}_{(1)}\ U^{+}_{(2)} = \gamma^{0}_{(1)}\ I_{(2)}\ p_{o}\ . \tag{3.95-a}$$

Con ayuda de (3.10) obtenemos los operadores que proyectan ω^{+} sobre los estados de energía $^{+}$ positiva y negativa:

$$\left[\Lambda^{\omega(+)\omega}_{\perp}\right]' = \frac{1}{2}\left(I + \gamma^{0}_{(1)} I_{(2)}\right)\ ;\ \left[\Lambda^{\omega(-)\omega}_{\perp}\right]' = \frac{1}{2}\left(I - \gamma^{0}_{(1)} I_{(2)}\right) \tag{3.95-b}$$

Es trivial que la ecuación de evolución se transforma en

$$i\ \frac{\partial \psi'}{\partial t} = H'\psi' = \gamma^{0}_{(1)}\ p_{o}\ \psi' \tag{3.96}$$

Combinando con (3.95-b) obtenemos que (3.96) se desdobla en

$$i\ \frac{\partial \psi^{(+)'}}{\partial t} = +\ p_{o}\ \psi^{(+)} \tag{3.97-a}$$

$$i\ \frac{\partial \psi^{(-)'}}{\partial t} = -\ p_{o}\ \psi^{(-)'} \tag{3.97-b}$$

Por lo tanto, las soluciones de energía positiva y negativa están manifiestamente desacopladas, y la transformación propuesta es del tipo FWT si adoptamos como caracterización de la transformación FWT el que efectúe dicho desacoplamiento.

Pero también podemos caracterizar a una transformación de FWT por el hecho de que (al menos en spin $\frac{1}{2}$) anula para todo $\vec{p}$ aquellas componentes de $\psi^{(+)'}_{ij}$ que en la vieja representación son las "pequeñas componentes" del límite no relativista.

Nuestra transformación para spin 1 cumple también esta 2a. caracterización, como se demostrará en Secc. 3.n-4.

Finalmente, en 3.n-9 demostraremos que también cumple la caracterización propuesta por Bellini y Giambiagi.

3.n-4 - Representación explícita de $\psi^{(+)'}$

Usando la representación (2.6-a) de las γ^μ y procediendo como en Secc. 2.c-6 ($\gamma^0_{ij} = \epsilon_i \delta_{ij}$) se obtiene fácilmente que (3.95-b) implica

$$\psi^{(+)'} = \left(\begin{array}{cc|cc} \psi^{(+)'}_{11} & \psi^{(+)'}_{12} & 0 & 0 \\ \psi^{(+)'}_{12} & \psi^{(+)'}_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3.99-a)

$$\psi^{(-)\prime} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \psi^{(-)\prime}_{33} & \psi^{(-)\prime}_{34} \\ 0 & 0 & \psi^{(-)\prime}_{34} & \psi^{(-)\prime}_{44} \end{array}\right) \qquad (3.99\text{-b})$$

Cada una tiene explícitamente sólo 3 componentes independientes, (explicitando, pues que se trata de partículas de spin 1). Las componentes que se anulan para todo $\vec{p}$ en la representación de FWT sen aquellas que en la antigua representación eran pequeñas en el límite no relativista, como ocurre en spin $\frac{1}{2}$.

Observamos además que para spin 1 esta transformación de FWT no sólo anula p. ej. para $\psi^{(+)}$ las componentes 33, 34, 43 y 44 asociadas dominantemente a $\psi^{(-)}$, sino que <u>por añadidura anula las componentes redundantes</u> 13, 14, 23, 24, 31, 41, 32 y 42.

Definamos

$$\psi'^{I} = \Lambda^{I}\,\psi' \;;\; \psi'^{II} = \Lambda^{II}\,\psi' \qquad (3.100)$$

(no confundir con $\psi^{I\prime} = (\Lambda^{I}\,\psi)'$, $\psi^{II\prime} = (\Lambda^{II}\,\psi)'$; entonces $\psi^{(+)\prime}$ es del tipo ψ^{I} (comparar con Secc. 2.c-5).

<u>3.n-5 - La representación de FWT origina trivialmente una formulación sin componentes redundantes.</u>

La condición inicial (3.92) implica

$$\psi' \in \omega' \longrightarrow \psi'^{II} = 0 \qquad (3.100\text{-a})$$

o sea, en la representación anterior,

$$\psi' = \left(\begin{array}{cc|cc} \psi'_{11} & \psi'_{12} & 0 & 0 \\ \psi'_{12} & \psi'_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \psi'_{33} & \psi'_{34} \\ 0 & 0 & \psi'_{34} & \psi'_{44} \end{array}\right) \qquad (3.100\text{-b})$$

Se obtiene, pues, una formulación sin componentes redundantes si se define

$$\psi' = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \vdots \\ \psi'_6 \end{pmatrix} \qquad (3.101\text{-a})$$

con $\psi'_1 = \psi'_{11}$, $\psi'_2 = \psi'_{12}$, $\psi'_3 = \psi'_{22}$, $\psi'_4 = \psi'_{33}$, $\psi'_5 = \psi_{34}$, $\psi'_6 = \psi'_{44}$;
La formulación propuesta viene dada desde el comienzo en una representación FWT, con

$$\psi^{(+)'} = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \psi^{(-)'} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \psi'_4 \\ \psi'_5 \\ \psi'_6 \end{pmatrix} \qquad (3.101\text{-b})$$

y

$$i\,\frac{\partial\psi^{(\pm)'}}{\partial t} = \pm\, p_o\, \psi^{(\pm)'} \;; \qquad (3.101\text{-c})$$

En la formulación propuesta la situación es pues idéntica a la de spin $\frac{1}{2}$, representación de FWT, salvo el número de componentes. +

3.n-6 - Operadores proyección en la nueva representación

De (2.58-c), (3.86) y (3.95),

$$(\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon\, sim})' = \frac{o}{4m}\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right)\left[\frac{i\, m\,(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}) - (\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)})\cdot\vec{p}}{p_o}\right]$$

o

$$(\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon\, sim})' = \Lambda^{I}\left[I - \frac{1}{2m}\,(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)})\cdot\vec{p}\right]. \qquad (3.102)$$

Es fácil demostrar que

$$(\tilde{I})' = \tilde{I} \;; \qquad (3.103)\ ++$$

entonces, de (2.66) se sigue que

$$\left(\Lambda^{\varepsilon\, sim_\varepsilon}_{\varepsilon\, ant}\right)' = \Lambda^{\varepsilon\, sim_\varepsilon}_{\varepsilon\, ant} \;; \qquad \left(\Lambda^{\varepsilon\, ant}_{\varepsilon\, sim}\right)' \quad \Lambda^{\varepsilon\, ant_\varepsilon}_{\varepsilon\, sim}. \qquad (3.104)$$

Reemplazando en (2.72) se demuestra que (cf. A3-15)

$$(\Lambda^{\omega\varepsilon})' = \Lambda^{I}\left\{\left[I - \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\right]\Lambda^{\varepsilon\, sim_\varepsilon}_{\varepsilon} + \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(2)}-\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\;\Lambda^{\varepsilon\, ant_\varepsilon}_{\varepsilon\, sim}\right\}$$
$$(3.105)$$

Los operadores que proyectan ω sobre $\omega^{(\pm)}$ se transformaran

---

\+ En este trabajo no emeplearemos la formulación aquí prepuesta. Queda, pues sobreentendido que cuando digamos representación de FWT nos referiremos en lo que sigue a la representación de FWT en la formulación BW (=Secc. 3.n-1, ..., 4).

++ I se define en Secc. 1.c.

a la nueva representación en (3.95-b).

3.n-7 - Transformación de algunos observables ya conocidos.

En primer lugar, es trivial que

$$(\vec{p})' = \vec{p} \tag{3.106}$$

Por otro lado, es evidente que si $B^{(\omega)}$ es el operador de tipo ω asociado a B,

$$B^{(\omega)} = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} \; B \, \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon}$$

su transformado (principal) es

$$B^{(\omega)'} = \Lambda^{\omega\varepsilon'} B' \Lambda^{\omega\varepsilon'} \tag{3.107}$$

por lo que basta calcular B'.

Es sabido [11] que en spin $\frac{1}{2}$,

$$\vec{\sigma}' = U\vec{\sigma} \; U^{+} = \vec{\sigma} + i \, \frac{\vec{\Upsilon}\times\vec{p}}{p_o} = p \times \frac{[\vec{\sigma}\times\vec{p}]}{p_o(p_o+m)} \; ; \qquad (3.108)^{**}$$

además,

$$\frac{1}{2} \, (\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})' = \vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)} \tag{3.109}$$

Entonces el spin (3.57) se transforma en

$$\vec{\mathcal{J}}_{spin} = \left(\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon\, sim'}\right) \left(\frac{\vec{\sigma}_{(1)'} + \vec{\sigma}_{(2)'}}{2}\right) \left(\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon\, sim}\right) \tag{3.110}$$

que debe combinarse con (3.105) y (3.109).

Análogamente la helicidad (3.61-b) se transforma en

$$r' \underset{\omega'}{=} \frac{1}{2} \, (\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \cdot \vec{p}/|\vec{p}| \tag{3.111}$$

Algo más complicada es la transformación del operador $\vec{x}$

de (3.64-a); esquemáticamente, sabemos que para spin $\frac{1}{2}$ es

$$\vec{x}' = U\, i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\, U^{+} = i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + M\,(\vec{p}); \qquad (3.112)^{**}$$

donde $M(\vec{p})$ es una matriz 4×4 que depende de $\vec{p}$ pero no de $\partial/\partial\vec{p}$.

Entonces,

$$U_{(2)}\, i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\, U^{+}_{(2)} = i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + M_{(2)}(\vec{p});$$

pero como $\left[U, \vec{p}\right] = 0$ es

$$\left[M_{(2)}(\vec{p}),\, U_{(1)}\right] = 0\ ,$$

de donde

$$\left(i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right)' = U_{(1)}U_{(2)}\, i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\, U^{+}_{(1)}U^{+}_{(2)} = U_{(1)}\, i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\, U^{+}_{(2)} + M_{(2)}(\vec{p}) =$$

$$= i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + M_{(1)}\,(\vec{p}) + M_{(2)}(\vec{p}.) \qquad (3.113\text{-a})$$

Si indicamos con $(\vec{x}')_{(1)}$ al operador (3.112) perteneciente al espacio de los operadores que operan sobre $\psi_{(1)}$(spin $\frac{1}{2}$), es

$$\left(i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right)' = (\vec{x}')_{(1)} + (\vec{x}')_{(2)} - i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\ ; \qquad (3.113\text{-b})$$

con (3.107),

$$\vec{x}' = \left(\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon^{\mathrm{sim}}}\right)' \left[(\vec{x}')_{(1)} + (\vec{x}')_{(2)} - i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right]\left(\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon^{\mathrm{sim}}}\right). \qquad (3.114)$$

Finalmente, de (3.60) obtenemos

$$\vec{J}_{\mathrm{orb}} = \left(\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon^{\mathrm{sim}}}\right)' \left[(\vec{x}')_{(1)} + (\vec{x}')_{(2)} - i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right] \left(\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon^{\mathrm{sim}}}\right)' \times p; \qquad (3.115)$$

de (3.50),

$$\vec{J}' = \left[(\vec{x}')_{(1)} + (\vec{x}')_{(2)} - i\, \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right] \times \vec{p} + \frac{1}{2}\,(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}) \qquad (3.116)$$

y de (3.65), el operador paridad,

$$\left[P^{(1)}\right] = \eta \left(\frac{m\,\gamma^{o} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p_o} \right)_{(1)} \gamma^{o}_{(2)}\, P^{(o)} = \eta\, \gamma^{o}_{(1)} \left(\frac{m\,\gamma^{o} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p_o} \right)_{(2)} P^{(o)} \qquad (3.117)$$

3.n-8 - Los operadores posición y velocidad media

Recordando (3.82), lo más razonable parecería ser definir al operador posición media $\vec{X}$ como aquel tal que $\vec{X}' = \vec{x} = i \frac{\partial}{\partial \vec{p}}$; pero entonces se tiene la desagradable sorpresa de que tal $\vec{X}$ no sería pseudohermitiano; en efecto, usando (3.80-a) se obtiene que su conjugado pseudohermitiano es (cf. A3-16) se obtiene que su conjugado pseudohermitiano es

$$i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} - i \frac{\vec{p}}{p_o{}^2} - i \left(\frac{m\,\gamma^{o} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{2p_o} \right) \left(\frac{\vec{\alpha}}{p_o} \right)_{(2)} \qquad (3.118)$$

Entonces uno piensa corregir la dificultad redefiniendo

$$\vec{X} = \left(i \frac{\partial}{\vec{p}} + i \frac{\partial}{\vec{p}} \right) \Big/ 2$$

que es evidentemente pseudohermitiano, pero entonces nuestro operador posición sería (en la representación de FWT),

$$i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} - \frac{i}{2} \frac{\vec{p}}{p_o^2} - i \left(\frac{m\,\gamma^{o} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{2p_o} \right)_{(2)} \left(\frac{\vec{\alpha}}{p_o} \right)_{(2)} \qquad (3.119)$$

que siendo asimétrico en los índices spinoriales transforma $\psi' \epsilon\, \omega'$ $(\therefore \epsilon\, \varepsilon^{\text{sim}'})$ en $\varphi' = \chi'\, \psi' \notin \varepsilon^{\text{sim}'}$ $(\therefore \notin \omega')$; es decir, se trataría de un operador de 2a. clase, con todos sus inconvenientes

(Secc. 3.e).

Por lo tanto, la última modificación que debemos hacerces reemplazar (3.119) por su operador asociado tipo W:

$$\vec{\lambda}' = (\Lambda_\perp^{\omega\varepsilon})' \left| i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} - \frac{i}{2} \frac{\vec{p}}{p_o^2} - i \left(\frac{m\,\gamma^o - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{2p_o^2} \right)_{(2)} \vec{\alpha}_{(2)} \left(\Lambda_\perp^{\omega\varepsilon} \right) \right. \qquad (3.120\text{-a})$$

que es, en definitiva, nuestro operador posición media (en la nueva representación).

Para pasar a la representación original, es mejor escribir previamente

$$\vec{X}' = \frac{1}{2} (\Lambda_\perp^{\omega\varepsilon})' \left[i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] (\Lambda_\perp^{\omega\varepsilon})' . \qquad (3.120\text{-b})$$

Entonces, con (3.80-b) es

$$\vec{X} = \frac{1}{2} \Lambda_\perp^{\omega\varepsilon} \left[\vec{q} + \vec{q} \right] \Lambda_\perp^{\omega\varepsilon} \qquad (3.121\text{-a})$$

donde $\vec{q}$ es tal que

$$\vec{q}' = i \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \qquad (3.121\text{-b})$$

Se obtiene (cf. A3-16),

$$\vec{q} = \vec{X}_{(1)} + \vec{X}_{(2)} - \vec{x} = \qquad (3.122\text{-a})$$

$$= \vec{x} + i \left(\frac{\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}}{2p_o} \right) - i \frac{\left[(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \cdot \vec{p} \right] \vec{p}}{2p_o^2 \, (p_o + m)} + \frac{\left[\vec{p}_x \, (\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)} \right]}{2\, p_o \, (p_o + m)}$$

(3.122-b)

Para (3.121-b), $\vec{q}$ debe calcularse en la vieja representación:

$$\vec{q} = \gamma^o_{(2)} \, \vec{q}^{\,+} \, \gamma^o_{(2)} = \gamma^o_{(2)} \, \vec{q} \, \gamma^o_{(2)} \, ;$$

entonces,

$$\vec{X} = \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} \left\{ \vec{x} + i\, \frac{\vec{\gamma}_{(1)}}{2p_o} - \frac{i(\vec{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{p})\vec{p}}{2p_o^2(p_o + m)} + \frac{\left[\vec{p}\, x(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)})\right]}{2p_o\ (p_o + m)} \right\} \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} \tag{3.123}$$

(De paso, queda redemostrado - ahora en la vieja representación - que $\frac{1}{2}$ $(\vec{q} + \overline{\vec{q}})$ es asimétrico en los índices spinoriales, y que por lo tanto, transforma ω en un espacio $\neq \omega$).

Puede observarse que (3.120-b) es una generalización posible del operador posición media para spin $\frac{1}{2}$ (3.82-a) pues en spin $\frac{1}{2}$, $i\partial/\partial\vec{p}$ es hermitiano respecto al producto escalar allí usado, de manera que $\frac{1}{2}\left(i\,\frac{\partial}{\partial\vec{p}} + i\,\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right) \longrightarrow i\,\frac{\partial}{\partial\vec{p}}$ y no habiendo componentes redundantes, $\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon} \longrightarrow I$, de manera que (3.120-b) $\longrightarrow$ (3.82-a).

Nuestro operador posición media origina una velocidad media $\vec{V}$ razonable (ver (3.83) para spin $\frac{1}{2}$): en A3-16 se demuestra que para spin 1,

$$\vec{V} = \frac{dX}{dt} \underset{\omega}{\overset{\sim}{esc}} \frac{\vec{p}}{p_o}\ \frac{H}{p_o} \tag{3.124-a}$$

de manera que los valores medios de $\vec{V}$ son

$$\langle \vec{V} \rangle = \pm \left\langle \frac{\vec{p}}{p_o} \right\rangle \tag{3.124-b}$$

según el signo de la energía (o mejor, de la carga).

Caso [8] obtuvo anteriormente un operador posición media y otro velocidad media para spin 1, pero trabajando en el formalismo de Sakata y Taketani.

3.n-9 - Conexión con los trabajos de Bollini y Giambiagi.

Bollini y Giambiagi [13, 6] demostraron que hay una conexión entre las transformaciones de Lorentz L_p^s que reducen $\vec{p}$ a cero$^+$, y las transformaciones U_p^s de FWT; la correspondencia es, para spin $\frac{1}{2}$,

Lorentz		FWT	
$\gamma_\mu = (\gamma_o, -\vec{\gamma})$	$\longleftrightarrow$	$\beta_\mu = (\gamma_o = \beta, \vec{\alpha})$ $^{++}$	
$p^\mu = (p^o, \vec{p})$	$\longleftrightarrow$	$q_\mu = (m, \vec{p})$	(3.125-a)**
métrica indefinida	$\longleftrightarrow$	métrica definida positiva	
$\gamma^\mu p_\mu \psi = m\,\psi$	$\longleftrightarrow$	$\beta_\mu q_\mu \psi = E\,\psi$	

Se demuestra entonces la correspondencia,

$$L_p^{\frac{1}{2}} \longleftrightarrow U_p^{\frac{1}{2}}\ ; \qquad (3.125\text{-b})^{**}$$

para spins mayor que un medio, en lugar de demostrar

$$L_p^s \longleftrightarrow U_p^s \qquad (3.126)^{**}$$

se usa (3.126) como <u>definición</u> de U_p^s; al efecto, se procede así: Partiendo del L_p^s conocido, se lo representa con ayuda de los elementos de la columna "Lorentz" de (3.125); a continuación, se reemplaza cada uno de esos elementos por su correspondiente en la columna FWT, y al operador así construído se lo llama: Transformación de FWT para spin s. En el trabajo se Bollini y Giambiagi se aplicó dicho procedimiento en el formalismo de Rarita-Schwin-

---

$^+$ s = spin; p = momento.

$^{++}$ Por supuesto, estas β^μ no son las de ecuación (1.5).

ger.

Es fácil ver que en el formalismo de BW el procedimiento citado conduce precisamente a nuestra transformacion de FWT (3.84). Para ello basta tener presente que (Cap. 6) en el formalismo de BW la transformación de Lorentz L^1 para spin 1 se puede poner,

$$L^1 = L^{\frac{1}{2}}_{(1)} \, L^{\frac{1}{2}}_{(2)} \; ; \tag{3.127}$$

entonces el procedimiento de Bollini y Giambiagi conduciría a definir

$$U^1 = U^{\frac{1}{2}}_{(1)} \, U^{\frac{1}{2}}_{(2)} \tag{3.128}$$

que coincide con nuestra (3.84).

En el trabajo de Bollini y Giambiagi se demuestra que para spin 1 su transformación de FWT mantiene invariante el producto escalar <u>positivo definido</u>

$$U_\mu^* \, U_\mu = U_\mu'^* \, U_\mu' \qquad (3.129)^{**}$$

donde U^μ es el 4-vector de Proca (ecuación (1.7')). Como verificación de (3.84) podemos demostrar que nuestra transformación de FWT también cumple (3.129). En efecto: La conexión [17]

$$\psi = \frac{1}{2m} U_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \, B^{-1} + \frac{i}{4m} G_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \, B^{-1} \qquad (3.130)^{**}$$

entre la ψ de BW y las U_μ, $G_{\mu\nu}$ de Proca es invariante en forma ante un cambio de representación. Por otro tanto las ecuaciones (7.9-a) y (7.10-a) que demostraremos más adelante usando (3.130) valen tanto en la representación original como en la de FWT; pero de esas ecuaciones se deduce fácilmente que,

$$U_\mu^* \; U_\mu = \psi(\gamma^0_{(1)} \gamma^0_{(2)} + \gamma^5_{(1)}\gamma^0_{(1)}\gamma^5_{(2)}\gamma^0_{(2)}) \psi =$$

$$= \psi^+(I + \gamma^5_{(1)} \gamma^5_{(2)}) \psi \qquad (3.131)$$

De la invariancia en forma de las (3.130) se deduce que en la representación de FWT será

$$U_\mu^{*\prime} \; U_\mu' = \psi'^+ \left[I + (\gamma^5_{(1)} \gamma^5_{(2)})'\right] \psi' \; . \qquad (3.132)$$

Pero nuestra transformación (3.84) no sólo es pseudounitaria, sino también unitaria; por lo tanto, los segundos miembros de (3.131) y (3.132) son iguales; por lo tanto, nuestra transformación cumple (3.129).

- - - - - - - - - - - -

Complemento

Podemos trasladar directamente el formalismo de BW la definición [6] de transformación de FWT que transforma $\vec{p}_1$ en $\vec{p}_2$:

$$U\,(\vec{p}_1/\vec{p}_2) = U^{-1}(\vec{p}_2)\; U(\vec{p}_1) \qquad (3.133)^{+**}$$

(que, en el trabajo de Bollini y Giambiagi es sugerida directamente por la correspondencia con la transformación de Lorentz).

Es Trivial que,

$$U(\vec{p}_1/\vec{p}_2) = U_{(1)}(\vec{p}_1/\vec{p}_2)\; U_2(\vec{p}_1/\vec{p}_2). \qquad (3.134)$$

De la misma manera, se puede trasladar la definición de transformación de de Cini-Toushek dada por Bollini y Giambiagi,

$$C(\vec{p}) = U^{-1}(\infty)\; U(\vec{p}) \qquad (3.135\text{-a})^{**}$$

y el resultado es,

$$C(\vec{p}) = C_{(1)}(\vec{p})\; C_{(2)}(\vec{p}). \qquad (3.135\text{-b})$$

+ Aquí $U(\vec{p})$ es la U de FWT escrita en la representación $\vec{p}$, con la variable $\vec{p}$.

CAPITULO CUARTO

EL DESARROLLO EN ONDAS PLANAS. CUESTIONES CONEXAS

4.a - INTRODUCCIÓN

Nuestro objetivo es efetuar el desarrollo en ondas planas para spin 1 y $m \neq 0$ procurando:

1) paralelizar el desarrollo usual en spin $\frac{1}{2}$;
2) representar los spinores $u(r, \vec{p})$ de spin 1 mediante una combinación de las u de spin $\frac{1}{2}$, ya que entonces cálculos para spin 1 podrán ser hechos mediante simple utilización de cálculos ya hechos en spin $\frac{1}{2}$.

A efectos de notación y de posterior utilización, damos el siguiente, RESUMEN DEL DESARROLLO EN ONDAS PLANAS PARA SPIN $\frac{1}{2}$:

Es bien conocido que

$$\psi_{(x)} = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$$

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=-1}^{1} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} \, a(r, \vec{p}) \, e^{-ip^o x^o + i\vec{p}.\vec{x}} \qquad (4.1)^{**}$$

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=-1}^{1} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} \, b^*(r, -\vec{p}) \, u_-(r, +\vec{p}) \, e^{ip^o x^o + i\vec{p}.\vec{x}}$$

donde $r = \pm 1$ describe la polarización $^+$, $p_o = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ y las cuatro $u_{\pm}(r, \vec{p})$ posibles para un dado $\vec{p}$, son linealmente independientes.

Si

$$H(\vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{\alpha} + m \; ; \; \not{p}_\mu = p_\mu \, \gamma^\mu \qquad (4.2)^{**}$$

$^+$ Por ejemplo las $u_+(r, \vec{p})$ pueden ser autofunciones de la helicidad $\frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma} \, \vec{p}}{|p|}$ con autovalor $r/2$ (definición "B" dada en A.4-1).

y

$$\varepsilon = \pm \qquad (4.3)^{**}$$

es

$$H(\vec{p})\; u_\varepsilon(r,\vec{p}) = \varepsilon p_o\; u_\varepsilon(r, \vec{p}) \qquad (4.4\text{-a})^{**}$$

o lo que es lo mismo,

$$\not{p}\; u_\varepsilon(r, \varepsilon\vec{p}) = \varepsilon m\; u_\varepsilon(r, \varepsilon\vec{p}) \;. \qquad (4.4\text{-b})^{**}$$

Además, (4.1) equivale a

$$\psi^{(\varepsilon)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=-1}^{1} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\; a_\varepsilon(r, \vec{p})\; u_\varepsilon(r, \vec{p})\; e^{-\varepsilon\, ip^o x^o + i\vec{p}\,\vec{x}} \qquad (4.1'\text{-a})^{**}$$

si

$$a_+(r,\vec{p}) = a(r,\vec{p});\; a(r,\vec{p}) = b^*\,(r,-\vec{p}). \qquad (4.1'\text{-b})^{**}$$

Es

$$u^+_\varepsilon(r,\vec{p})\; u_{\varepsilon'}(r',\vec{p}) = 2p_o\; \delta_{rr'}\, \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \;; \qquad (4.5)^{**}$$

$$\bar{u}_\varepsilon(r,\vec{p})\; u_\varepsilon(r',\vec{p}) = \varepsilon\, 2m\; \delta_{rr'} \qquad (4.6\text{-a})^{**}$$

$$\bar{u}_+(r,\vec{p})\; u_-(r',-\vec{p}) = \bar{u}_-(r',\vec{p})\; u_+(r,\vec{p}) = 0 \;. \qquad (4.6\text{-b})^{**}$$

Puede ponerse

$$u_\varepsilon(r,\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_o)}}\,(m + p_o + \varepsilon\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\; u_\varepsilon(r,0) \qquad (4.7)^{**}$$

donde las $u_\varepsilon(r,0)$ cumplen las (4.2), ..., (4.6) con $\vec{p} = 0$; [p.ej.

$$H(0)\; u_\varepsilon(r,0) = m\beta\, u_\varepsilon(r,0) = \varepsilon\, u_\varepsilon(r,0)\Big] \;. \qquad (4.8)^{**}$$

En A.4-1 explicitamos las <u>dos definiciones (A y B) de r</u> que usaremos en lo que sigue.

Es usual definir,

$$u(r,\vec{p}) = u_+(r,\vec{p}) \ ; \quad v(r,\vec{p}) = u_-(r,-\vec{p}) \tag{4.9**}$$

que también son linealmente independientes entre sí. Entonces ($px = p^o x^o - \vec{p}\,\vec{x}$),

$$\psi_{(x)} = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$$

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{(r=-1)}^{1} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2p_o}}\, a(r,\vec{p})\, u(r,\vec{p})\, e^{ipx} \tag{4.10**}$$

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{(r=-1)}^{1} \int \frac{d^3x}{2p_o}\, b^*(r,\vec{p})\, v(r,\vec{p})\, e^{-ipx}.$$

Es,

$$\not{p}\, u(r,\vec{p}) = m\, u(r,\vec{p}) \ ; \quad \not{p}\, v(r,\vec{p}) = -m\, v(r,\vec{p}) \ ; \tag{4.11-a**}$$

$$\overline{u}(r,\vec{p})\,\not{p} = m\, u(r,\vec{p}) \ ; \quad \overline{v}(r,\vec{p})\,\not{p} = -m\,\overline{v}(r,\vec{p}) \ ; \tag{4.11-b**}$$

$$u^+(r,\vec{p})\, u(r',\vec{p}) = 2\,p_o\,\delta_{\pi} ; \quad v^+(r,\vec{p})\, v(r',\vec{p}) = 2\,p_o\,\delta_{rr'} ; \tag{4.12-a**}$$

$$v^+(r,\vec{p})\, u(r',\vec{p}) = u^+(r,\vec{p})\, v^+(r',-\vec{p}) = 0 \ ; \tag{4.12-b**}$$

$$\overline{u}(r,\vec{p})\, u(r',\vec{p}) = 2m\,\delta_{rr'} ; \quad \overline{v}(r,\vec{p})\, v(r',\vec{p}) = -2m\,\delta_{rr'} ; \tag{4.13-a**}$$

$$\overline{u}(r,\vec{p})\, v(r',\vec{p}) = \overline{v}(r,\vec{p})\, u(r',\vec{p}) = 0 \ ; \tag{4.13-b**}$$

$$\sum_r \left[\overline{u}_i(r,\vec{p})\,\overline{u}_j(r,\vec{p}) - v_i(r,\vec{p})\,\overline{v}_j(r,\vec{p})\right] = 2m\,\delta_{ij} \ ; \tag{4.14**}$$

$$\sum_r \left[\overline{u}(r,\vec{p})\, u(r,\vec{p}) - \overline{v}(r,\vec{p})\, v(r,\vec{p})\right] = 8\,m\,. \tag{4.15**}$$

Los operadores proyección $\Lambda_{\pm}$ tales que

$$\begin{matrix} \Lambda_+ u = u & ; & \Lambda_+ v = 0 \\ \Lambda_- v = v & ; & \Lambda_- u = 0 \end{matrix} \tag{4.16**}$$

cumplen

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &= \frac{\not{p}+m}{2m} = \frac{1}{2m}\sum_r u(r,\vec{p})\,\overline{u}(r,\vec{p}) \\ \Lambda_- &= \frac{m-\not{p}}{2m} = -\frac{1}{2m}\sum_r v(r,\vec{p})\,\overline{v}(r,\vec{p}) \end{aligned} \tag{4.16-b**}$$

4.b - LAS BASES $U_{\pm}$, U_{F}, ... QUE SUBTIENDEN LOS ESPACIOS SPINORIALES $\omega_{sp}^{(\pm)p}$, ω_{sp}^{p}, $\mathcal{F}_{sp}^{\bar{p}}$, ε_{sp}^{sim}, ε_{sp}^{ant} y ε_{sp}. EL CORRESPONDIENTE DESARROLLO EN ONDAS PLANAS DE UNA ψ SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE BW.

4.b-1 - Bases para los espacios spinoriales.

Para la definición de dichos espacios, consultar Secc. 2.c-3, 2.c-4, 2.f-2 y 2.f-3.

Sea r un parámetro

$$r = -2,\ 0,\ 2 \tag{4.17}$$

que posteriormente estará conectado con la polarización de los mesones vectoriales + la cual se discute en A.4-2. Recordar r, $s = \pm 1$, $\varepsilon = \pm$. Defino los 6 spinores

$$u_{\varepsilon}(r = r + s, p) = \frac{1}{2\sqrt{|r|\,\delta\, m}} \left[u_{\varepsilon(1)}(r,\vec{p})\, u_{\varepsilon(2)}(s,\vec{p}) + u_{\varepsilon(1)}(s,\vec{p})\, u_{\varepsilon(2)}(r,\vec{p})\right] \tag{4.18-a}$$

o sea,

$$u_{+}(2,\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\, u_{+(1)}(1,\vec{p})\, u_{+(2)}(1,\vec{p})$$

$$u_{+}(0,\vec{p}) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \left[u_{+(1)}(1,\vec{p})\, u_{+(2)}(1,\vec{p}) + u_{+(1)}(-1,\vec{p})\, u_{+(2)}(1,\vec{\ })\right]$$

$$u_{+}(-2,\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\, u_{+(1)}(-1,\vec{p})\, u_{+(2)}(-1,\vec{p})$$

$$u_{-}(2,\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\, u_{-(1)}(1,\vec{p})\, u_{-(2)}(1,\vec{p})$$

$$u_{-}(0,\vec{p}) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \left[u_{-(1)}(1,\vec{p})\, u_{-(2)}(-1,\vec{p}) + u_{-(1)}(-1,\vec{p})\, u_{-(2)}(1,\vec{p})\right]$$

$$u_{-}(-2,\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m}}\, u_{-(1)}(-1,\vec{p})\, u_{-(2)}(-1,\vec{p}) \tag{4.18-b}$$

+ P. ej. las $U_{\pm}(r,p)$ pueden ser autofunciones de la helicidad (Secc. 3.j) con autovalores $r/2$ (definición B de A.4-2).

Defino además los otros 4 spinores [+]

$$u_F(r,s,\vec{p}) = \frac{1}{2\sqrt{|r|!\,m!}}\left[u_{+(1)}(r,\vec{p})\,u_{-(2)}(s,\vec{p}) + u_{-(1)}(s,\vec{p})\,u_{+(2)}(r,\vec{p})\right]. \tag{4.19}$$

Utilizando el hecho de que las $u_\varepsilon(r,\vec{p})$ de spin $\frac{1}{2}$ son linealmente independientes entre sí, es fácil demostrar que los 10 spinores (4.18) y (4.19) son linealmente independientes; como la dimensión de ε^{sim}_{sp} es 10, se deduce que <u>el conjunto de los 10 spinores $u_\varepsilon(r,\vec{p})$, $u_F(r,s,\vec{p})$ subtienden ε^{sim}_{sp} (forman base).</u>

Usando (2.48) y (4.4) es inmediato que

$$\Lambda^{\omega\varepsilon^{sim}}_{F}(\vec{p})\,u_\varepsilon(r,\vec{p}) = u_\varepsilon(r,\vec{p});\ \Lambda^{F\varepsilon^{sim}}_{\omega}(\vec{p})\,u_\varepsilon(r,\vec{p}) = 0\ ; \tag{4.20-a}$$

$$\Lambda^{F\varepsilon^{sim}}_{\omega}(\vec{p})\,u_F(r,s,\vec{p}) = u_F(r,s,\vec{p})\ ;\ \Lambda^{\omega\varepsilon^{sim}}_{F}(\vec{p})\,u_F(r,s,\vec{p}) = 0\ ; \tag{4.20-b}$$

por lo tanto, <u>los 6 spinores $u_\varepsilon(r,\vec{p})$ subtienden $^{++}\psi^{p}_{sp}$, mientras que los 4 spinores $u_F(r,s,\vec{p})$ subtienden el subespacio complementario (en ε^{sim}_{sp}) F^{p}_{sp}</u> (recordar fig. 2-3).

\+ A diferencia de ε, el subíndice $\mathcal{F}$ no toma valores numéricos; meramente expresa que (como se verá más adelante) las $u_{\mathcal{F}}$ subtienden el subespacio $\mathcal{F}^{p}_{sp}$.

++ Expresar la parte spinorial u de ψ mediante productos de spinores u de spin 1/2 no es nuevo: una vez desarrollada esta sección hemos hallado que de Broglie (cap. VII, §5) expresa la onda monocromática ψ de spin máximo = 1 así:

$$\psi_{ij}(x) = \frac{\psi_i(x)\psi'_F(x)}{C^{i\,\vec{p}\cdot\vec{x}}}$$

donde ψ y ψ' son ondas monocromáticas de spin 1/2. Esta relación de de Broglie es esencialmente igual a nuestra (4.18) salvo la simetrización (con lo que eliminamos spin 0) y el factor $1/\sqrt{|r|!}$ en la normalización (con lo cual conseguimos que las propiedades algebraicas de las u paralelicen las de las u de spin 1/2). En cambio, dentro de lo que conocemos casi todas las ecuaciones posteriores a las (4.18) no se han escrito para spin 1 en un formalismo tipo BW-Belinfante-de Broglie (excepción: Belinfante, op. cit.[4], ecuación 36). En cuanto al formalismo de Kemmer, hemos encontrado posteriormente un estudio de Booth and Wilson [7] sobre "spinores"; Booth and Wilson no usan una representación tipo (4.18).

Como el espacio spinorial de interés físico es ω^{p}_{sp}, resulta que <u>los 6 spinores de interés físico son los (4.18)</u>. Usando los operadores proyección $\Lambda_1^{\omega(\pm)\omega}$ definidos en (3.10), es trivial demostrar que las $u_+(r,\vec{p})$ subtienden $\omega^{(+)p}_{sp}$ y las $u_-(r,\vec{p})$ subtienden $\omega^{(-)p}_{sp}$. Obsérvese una vez más que la dimensión spinorial de ω, $\omega^{(+)}$ y $\omega^{(-)}$ es la que físicamente habría que esperar (respectivamente 6, 3 y 3).

Por completitud mencionemos que ε^{ant}_{sp} es subtendido por los 6 spinores que se obtienen reemplazando en las definiciones (4.18) y (4.19) de $u_{\pm}(r,\vec{p})$ y $u\,(r,s,\vec{p})$ las sumas por restas. Con esto queda completa una base para ε_{sp}.

<u>4.b-2 - Desarrollo de $\psi(x)$ de Bargmann-Wigner en ondas planas.</u>

Usando la base $u_\varepsilon(r,\vec{p})$ para los espacios spinoriales, es trivial obtener que toda ψ que cumple las ecuaciones de BW es tal que (cr. A4-3)

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)$$

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, a(r,\vec{p})\, u_+(r,\vec{p})\, e^{-ip^ox^o+i\,\vec{p}\,\vec{x}} \qquad (4.21)$$

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, b^*(r,\vec{p})\, u_-(r,\vec{p})\, e^{ip^ox^o+i\,\vec{p}\,\vec{x}}$$

(r sólo toma los valores (4.17)). Es lo mismo poner

$$\psi^{(\varepsilon)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, a\,(r,\vec{p})\, u\,(r,\vec{p})\, e^{-\varepsilon ip^ox^o+i\,\vec{p}\,\vec{x}} \qquad (4.21'\text{-a})$$

donde

$$a_+(r,\vec{p}) = a(r,\vec{p});\ a_-(r,\vec{p}) = b^*(r,-\vec{p})\ . \qquad (4.21'\text{-b})$$

4.b-3 - Las propiedades algebraicas de las $u_\varepsilon(r,\vec{p})$.

Salvo la normalización (que es arbitraria), las propiedades algebraicas de las u_ε de spin 1 pueden deducirse de la misma manera que se obtienen las propiedades algebraicas de las u de spin 1/2. Un segundo camino (que seguiremos aquí) es deducir las propiedades de las u_ε usando la representación (4.18). El resultado es que la única diferencia entre las propiedades de las u_ε y de las u_ε está en algún signo; se puede afirmar que esa diferencia de signo está conectada con la diferencia de estadística.

Usando (4.4) y nuestro $H = H_{(1)}I_{(2)}$ es inmediato que (4.18) implica

$$H(\vec{p})\ u_\varepsilon(r,\vec{p}) = \varepsilon\ p_o\ u_\varepsilon(r,\vec{p}) \qquad (4.22\text{-a})$$

o, lo que es lo mismo, +

$$\not{p}_{(1)}\ u_\varepsilon(r,\varepsilon\vec{p}) = \not{p}_{(2)}\ u_\varepsilon(r,\varepsilon\vec{p}) = \varepsilon m\ u_\varepsilon(r,\varepsilon\vec{p})\ , \qquad (4.22\text{-b})$$

análoga a (4.4).

En lo que sigue será útil el siguiente <u>lema</u>:

Si $\qquad r = r + s, \qquad r' = r' + s'$

es

$$\frac{\delta_{rr'}\ \delta_{ss'} + \delta_{rs'}\ \delta_{s'r}}{\sqrt{|r|!\ \ |r'|!}} = \delta_{rr'} \qquad (4.23)$$

Agregando (4.5), (4.6) y (4.18) se deduce que ++

+ $\not{p}_{(1)} = p_\mu \gamma^\mu_{(1)}$, etc.

++ Ver en (2.2) la definición del producto escalar en el espacio spinorial.

$$(u_\varepsilon(r,\vec{p}),\ u_{\varepsilon'}(r',\ \vec{p})_{sp} = \varepsilon 2p_o\ \delta_{rr'}\ \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \qquad (4.24)$$

que sólo difiere de (4.4) en $\varepsilon = \pm$; la (4.24) es la (correspondiente de (4.4) porque en spin 1/2 el producto escalar en el espacio spinorial es $(u_\varepsilon,\ u_{\varepsilon'})_{sp} = u_\varepsilon^+\ u_{\varepsilon'}$.

De la misma manera, con (4.5), (4.6), (1.8) en (4.18) se demuestra que

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_\varepsilon(r,\vec{p})\ u_\varepsilon(r',\ \vec{p}) &= +\ 2m\ \delta_{rr'} \\ \bar{u}_+(r,\vec{p})\ u_-(r',-\vec{p}) &= \bar{u}_-(r,\vec{p})\ u_+(r',-\vec{p}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.25)$$

que corresponde a (4.6); nuevamente sólo hay una diferencia de signo.

También,

$$u_\varepsilon^+(r,\vec{p})\ u_\varepsilon(r',\vec{p}) = \frac{2\ p_o^2}{m}\ \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\ \delta_{rr'} \qquad (4.26)$$

De (4.7) y (4.18) se deduce

$$u_\varepsilon(r,\vec{p}) = \frac{1}{2m(m+p_o)}\ \left[m + p_o + \varepsilon\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right]_{(1)}\ \left[m + p_o + \varepsilon\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\right]_{(2)} u_\varepsilon(r,0) \qquad (4.27)$$

4.c - SUBSTITUCIÓN DE LAS $u_\pm$ POR u Y v.

Como en spin 1/2, resulta conveniente definir $u(r,\vec{p}) = u_+(r,\vec{p})$;

$$v\ (r,\vec{p}) = u_-(r,\ -\vec{p}) \qquad (4.28)$$

con lo cual el desarrollo (4.21) en ondas planas de toda ψ de BW pasa a la forma +

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) \\ \psi^{(+)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\ a(r,\vec{p})\ u(r,\vec{p})\ e^{-ipx} \\ \psi^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\ b^*(r,\vec{p})\ u(r,\vec{p})\ e^{ipx} \end{aligned}\right\} \qquad (4.29)$$

+ $px = p^o x^o - \vec{p}\cdot\vec{x}$.

De (4.9), (4.18) y (4.27) se deduce que

$$\left.\begin{aligned}
u(r=r+s,\vec{p}) &= \frac{1}{2\sqrt{|r|\ m'}}\left[u_{(1)}(r,\vec{p})u_{(2)}(s,\vec{p})+u_{(1)}(s,\vec{p})u_{(2)}(r,\vec{p})\right] \\
u(r=r+s,\vec{p}) &= \frac{1}{2\sqrt{|r|\ m'}}\left[v_{(1)}(r,\vec{p})v_{(2)}(s,\vec{p})+v_{(1)}(s,\vec{p})v_{(2)}(r,\vec{p})\right]
\end{aligned}\right\}$$

Así como para las $u_{\pm}$, las propiedades algebraicas de las u y v pueden deducirse: 1) de la misma manera que las propiedades de las u y v de spin 1/2, o bien, 2) a partir de su representación (4.30). El resultado es:

$$\left.\begin{aligned}
\not{p}_{(1)}u &= \not{p}_{(2)}\ u = m\ u \\
\not{p}_{(1)}v &= \not{p}_{(2)}\ v = m\ v
\end{aligned}\right\} \qquad (4.31\text{-a})$$

análoga a (4.11); entonces,

$$\left.\begin{aligned}
\bar{u}\ \not{p}_{(1)} &= \bar{u}\ \not{p}_{(2)} = m\ \bar{u} \\
\bar{v}\ \not{p}_{(1)} &= \bar{v}\ \not{p}_{(2)} = -\ m\ v;
\end{aligned}\right\} \qquad (4.31\text{-b})$$

$$\left.\begin{aligned}
&(u(r,\vec{p}),u(r',\vec{p}))_{sp}=2\ p_o\delta_{rr'};\ (v(r,\vec{p}),\ v(r',\vec{p}))_{sp}=-2p_o\ \delta_{rr'} \\
&(u(r,\vec{p}),\ v(r',\vec{p}))_{sp} = (v(r,\vec{p}),\ u(r',\vec{p}))_{sp} = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$(4.32)$$

que corresponde a (4.12) (baría un signo).

$$\left.\begin{aligned}
\bar{u}(r,\vec{p})\ u(r',\vec{p}) &= \bar{v}(r,\vec{p})\ v(r',\vec{p}) = 2m\ \delta_{rr'} \\
\bar{u}(r,\vec{p})\ v(r',\vec{p}) &= \bar{v}(r,\vec{p})\ v(r',\vec{p}) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.33)$$

que sólo difieren de (4.13) en un signo.

$$\left.\begin{aligned}
u^+(r,\vec{p})\ u(r',\vec{p}) &= v^+(r,\vec{p})\ v(r',\vec{p}) = \frac{2p_o}{m}\,\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\ \delta_{rr'} \\
u^+(r,\vec{p})\ v(r',\vec{p}) &= v^+(r,\vec{p})\ u(r',-\vec{p}) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.33')$$

+

La (4.14) no se traslada directamente, en cambio, vale

$$\sum_r \left[u_{i_1 i_2}(r,\vec{p})\bar{u}_{j_2 j_1}(r,\vec{p}) + v_{i_1 i_2}(r,\vec{p}) v_{j_2 j_1}(r,\vec{p}) \right| \psi_{j_1 j_2} = 2m\, \psi_{i_1 i_2} \qquad (4.34\text{-a})^{+}$$

para toda $\psi \in \omega$; la (4.34) implicaría una relación tipo (4.14) si no fuera por las componentes redundantes. La (4.34) se demuestra usando (4.29) y (4.33).

$$\sum_r \left[\bar{u}(r,\vec{p})\; u(r,\vec{p}) + \bar{v}(r,\vec{p})\; v(r,\vec{p}) \right] = 12\; m \;, \qquad (4.35)$$

corresponde a la (4.15).

Los operadores proyección $\Lambda_{\pm}(\vec{p})$ tales que

$$\left.\begin{array}{lll} \Lambda\;(\vec{p})\; u(r,\vec{p}) = u(r,\vec{p}) & ; & \Lambda_{+}(\vec{p})\; v(r,\vec{p}) = 0 \\ \Lambda_{-}(\vec{p})\; v(r\;\vec{p}) = v(r,\vec{p}) & ; & \Lambda_{-}(\vec{p})\; v(r,\vec{p}) = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.36)$$

cumplen

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda_{+}(\vec{p}) \underset{\omega}{=} \dfrac{\not{p}_{(1)} + m}{2m} \underset{\omega}{=} \dfrac{\not{p}_{(2)} + m}{2m} \underset{\omega}{=} \dfrac{1}{2m} \quad \sum\limits_r u(r,\vec{p})\; \bar{u}(r,\vec{p}) \\ \Lambda_{-}(\vec{p}) \underset{\omega}{=} \dfrac{m - \not{p}_{(1)}}{2m} \underset{\omega}{=} \dfrac{m - \not{p}_{(2)}}{2m} \underset{\omega}{=} \dfrac{+1}{2m} \quad \sum\limits_r v(r,\vec{p})\; \bar{v}(r,\vec{p}) \end{array}\right\} \qquad (4.37\text{-a})$$

que corresponden a (4.16). Si se desea pasar de " $\underset{\omega}{=}$ " a " = " se puede poner, * +

$$\sum_r u_{i_1 i_2}(r,\vec{p})\bar{u}_{j_2 j_1}(r,\vec{p}) = \frac{1}{4m}\left[(\not{p}+m)_{i_1 j_1}(\not{p}+m)_{i_2 j_2} + (\not{p}+m)_{i_1 j_2}(\not{p}+m)_{i_2 j_1} \right]$$

$$\sum_r v_{i_1 i_2}(r,\vec{p})\bar{v}_{j_2 j_1}(r,\vec{p}) = \frac{1}{4m}\left[(\not{p}+m)_{i_1 j_1}(\not{p}+m)_{i_2 j_2} + (\not{p}+m)_{i_1 j_2}(\not{p}+m)_{i_2 j_1} \right] \qquad (4.37\text{-b})$$

+ Para demostrarlo, usar (4.18) y (4.16-b); partir en dos ciertos sumandos, para agruparlos con otros (esto se comprenderá al efectuar los cálculos).

entonces la (4.34-a) puede completarse con

$$\sum_r u_{i_1 i_2}(r,\vec{p})\bar{u}_{j_2 j_1}(r,\vec{p}) + v_{i_1 i_2}(r,\vec{p})\,\bar{v}_{j_2 j_1}(r,\vec{p}) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left[(\not p_{i_1 j_1}\,\not p_{i_2 j_2} + \not p_{i_1 j_2}\,\not p_{i_2 j_1} + m^2\,\delta_{i_1 j_1}\,\delta_{i_2 j_2} + m^2\,\delta_{i_1 j_2}\,\delta_{i_2 j_1}\right]. \tag{4.34-b}$$

4.d - SPINORES EN LOS ESPACIOS $\mathcal{F}^p_{sp}$ Y $\mathcal{G}^p_{sp}$.

4.d-1 - Introducción.

Los espacios $\mathcal{F}^p_{sp}$ y $\mathcal{G}^p_{sp}$ se definen a partir de los espacios $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ de la misma manera que se define el espacio spinorial $\mathcal{W}^p_{sp}$ a partir de $\mathcal{W}$, o sea como Sec. 2.c-3.

Es inmediato que una matriz simétrica m_{ij} pertenece a $\mathcal{F}^p_{sp}$,

$$m \in \mathcal{F}^p_{sp}, \quad \text{si } \Lambda_{\mathcal{W}}^{\mathcal{F}\varepsilon^{sim}}(\vec{p})\, m = m \tag{4.38}$$

n_{ij} simétrica pertenece a $\mathcal{G}^p_{sp}$,

$$n \in \mathcal{G}^p_{sp}, \quad \text{si } \Lambda_{\perp}^{\mathcal{G}\varepsilon^{sim}}(\vec{p})\, n = n \tag{4.39}$$

Por (Secc. 4.b-1) los 4 spinores $u_{\mathcal{F}}(r,s,\vec{p})$ (4.19) forman base en $\mathcal{F}^{sp}_p$; no disponemos aún de base para $\mathcal{G}^{sp}_p$.

4.d-2 - Algunas propiedades algebraicas de los spinores $u_{\mathcal{F}}$.

Respecto del producto escalar (2.2) son ortogonales entre sí y de pseudonorma nula,

$$(u_{\mathcal{F}}(r,s,\vec{p}),\, u_{\mathcal{F}}(r',s',\vec{p}\,'))_{sp} = 0 \tag{4.40}$$

pero no son ortogonales al espacio ω^p_{sp}; estas propiedades son consecuencia de (4.19), (4.18) y de las propiedades de los spinores de spin 1/2; la no ortogonalidad con ω^p_{sp} es consecuente con Secc. 2.f-2.

Además,

$$u^+_{\mathcal{F}}\,(r,s,\vec{p})\;u_{\mathcal{F}}(r',s',\vec{p}) = \frac{2p_o^2}{m}\,\delta_{rr'}\,\delta_{ss'} \qquad (4.41\text{-a})$$

$$u^+_{\mathcal{F}}\,(r,s,\vec{p})\;u_{\varepsilon}(r',\vec{p}) = 0 \qquad (4.41\text{-b})$$

4.d-3 - Los spinores u_g, base de $\mathcal{G}^p_{sp}$.

La figura 4-1 (simbólica, como las 2-2 y 2-3) sugiere que podemos obtener un sistema de vectores (no necesariamente normalizados) que sea ortogonal a ω^p_{sp} respecto de (2.2) si proyectamos los $u_{\mathcal{F}}$ ortogonalmente sobre $\mathcal{G}^p_{sp}$; definimos pues,

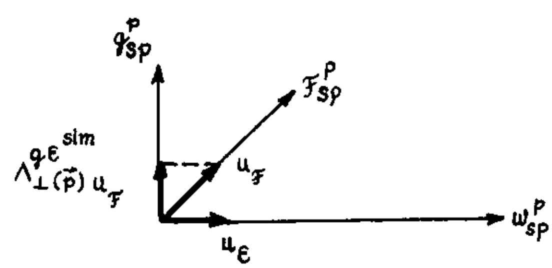

Fig. 4.1

$$u_g(r,s,\vec{p}) = \Lambda^{g\varepsilon^{\,sim}}_{\perp}\,(\vec{p})\;u\,(r,s,\vec{p})\;. \qquad (4.42)$$

La misma figura sugiere que pueden obtenerse los u_g como combinación lineal de los u_ε y de los $u_{\mathcal{F}}$; Usando (4.42), (4.18), (4.19), (2.60) y la fórmula de spin 1/2

$$\gamma^o u\,(r,\vec{p}) = \varepsilon\frac{m}{p_o}\,u_\varepsilon(r,\vec{p}) + \sum_{r'}\frac{1}{2p_o}\left[\bar{u}_{-\varepsilon}(r',\vec{p})\;u_\varepsilon(r,\vec{p})\right]u_{-\varepsilon}(r',\vec{p}) \qquad (4.43)$$

se obtiene

$$u_g(r,s,\vec{p}) = u_{\mathcal{F}}(r,s,\vec{p}) - \frac{1}{4m}\sum_r \sqrt{\frac{|r+r'|!}{|r+s\ |!}}\left[\bar{u}_+(r',\vec{p})\ u_-(s,\vec{p})\right]u_+(r+r',\vec{p})$$

$$+\frac{1}{4m}\sum_{r'}\sqrt{\frac{|r'+\ s|!}{|r+s|!}}\left[\bar{u}_{\overline{+}}(r',\vec{p})\ u_+(s,\vec{p})\right]u_-(s+r',\vec{p}) \qquad (4.44\text{-a})$$

Usando la definición A de r (cf. A4-1) se obtiene

$$u_g(1,1,\vec{p}) = u_{\mathcal{F}}(1,1,\vec{p}) + \frac{1}{2m}\Big\{p^3\ u_+(2,\vec{p}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\ p_+u_+(0,\vec{p}) -$$

$$- p^3\ u_-(2,\vec{p}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\ p_+\ u_-(0,p)\Big\}\ ;$$

$$u_g(1,-1,\vec{p}) = u_{\mathcal{F}}(1,-1,\vec{p}) + \frac{1}{2m}\Big\{\sqrt{2}p\ u_+(2,\vec{p}) - p^3u_+(0,\vec{p}) -$$

$$- p^3\ u_-(0,\vec{p}) - \sqrt{2}p_+\ u_-(-2,\vec{p})\Big\}\ ;$$

$$u_g(-1,1,\vec{p}) = u_{\mathcal{F}}(-1,1,\vec{p}) + \frac{1}{2m}\Big\{p^3u_+(0,\vec{p}) + \sqrt{2}p_+\ u_+(-2,\vec{p}) -$$

$$- \sqrt{2p_-}\,u_-(2,\vec{p}) + p^3\ u_-(0,\vec{p})\Big\}\ ;$$

$$u_g(-1,-1,\vec{p}) = u_{\mathcal{F}}(-1,-1,\vec{p}) + \frac{1}{2m}\Big\{\frac{p}{\sqrt{2}}\ u_+(0,\vec{p}) - p^3\ u_+\ (-2,\vec{p}) -$$

$$- \frac{p}{\sqrt{2}}\ u_-(0,\vec{p}) + \ p^3\ u_-(-2,\vec{p})\Big\}\ ;$$

$$(4.44\text{-b})$$

en cambio, usando en (4.44-a) la definición B se obtiene un resultado más compacto:

$$u_g(r,s,\vec{p}) = u_{\mathcal{F}}(r,s,\vec{p}) + \frac{s|p|}{2m}\ u_+(r+s,\vec{p}) - \frac{r|p|}{2m}\ u_-(r+s,\vec{p})\ . \qquad (4.44\text{-c})$$

La fórmula (4.44-b) (def. A) fué reobtenida ortogonalizando respecto de (2.2) al sistema de 10 spinores u_ε, $u_{\mathcal{F}}$; para la

(4.44-c) no se usó este 2° procedimiento.

4.d-4 - Algunas propiedades algebraicas de los spinores u_g.

Para (4.44-b) (def. A) se verificó

$$(u_g(r,s,\vec{p}),\ u_g(r',s',\vec{p}))_{sp} = 0 \tag{4.45-a}$$

Además, por construcción,

$$(u_\varepsilon(r,\vec{p}),\ u_g(r',s',\vec{p}))_{sp} = 0. \tag{4.45-b}$$

4.e - APLICACIÓN: NORMALIZACIÓN Y ORTOGONALIDAD.

Usando (4.21) y (4.24) es fácil demostrar que

$$(\psi^{(+)},\ \psi^{(+)}) = \sum_r \int d^3p\ |a(r,\vec{p})|^2 \tag{4.46-a}$$

$$(\psi^{(-)},\ \psi^{(-)}) = -\sum_r \int d^3p\ |b(r,\vec{p})|^2 \tag{4.46-b}$$

$$(\psi^{(+)},\ \psi^{(-)}) = 0 \tag{4.46-c}$$

Las (a) y (b) demuestran las (3.14-a); la (c) redemuestra (3.13). Agregando las (4.45) podemos formar la

Tabla de correlación entre subespacios ortogonales + y normas pseudonormas) para $\psi \in \mathcal{E}^{sim}$.

$\psi \in \omega^{(+)}$	$\Longrightarrow$	$(\psi,\psi) = +1$
$\psi \in \omega^{(-)}$	$\Longrightarrow$	$(\psi,\psi) = -1$
$\psi \in \mathcal{G}^{\ddagger}$	$\Longrightarrow$	$(\psi,\psi) = 0$

Tabla 4-1

+ Respecto de (2.2).

Nótese sin embargo que estas implicaciones no necesariamente pueden ser invertidas. En consecuencia, sea $\psi \in \omega$, ó $\psi \in \varepsilon^{sim}$ pero $\notin \omega$, es

$$(\psi,\psi) = \sum_r \int d^3p \left\{ |a(r,\vec{p})|^2 - |b(r,\vec{p})|^2 \right\} \qquad (4.46\text{-}d)$$

La (4.46-b) no se repite en spin 1/2, pero sí en spin 0[10].

4.f - APLICACIÓN: UNA INTERPRETACIÓN ESTADISTICA RESTRICTA (TEORIA DE UNA "PARTICULA".

No es nuestro objeto en este trabajo discutir y o ampliar las bases de la teoría general de una "partícula" para spin entero. Por lo tanto, en lo referente a interpretación estadística nos limitaremos a seguir las líneas expuestas en el artículo de Feshbach y Villars.[10]

De I, Secc. 3.a y de (4.46-d), es:

$$\text{"carga total"} = e \sum_r \int d^3p \left\{ |a(r,\vec{p})|^2 - |b(r,\vec{p})|^2 \right\} \qquad (4.47)^{+}$$

Esta ecuación se puede interpretar diciendo que $|a(r,\vec{p})|^2 d^3p$ da la proporción relativa de carga <u>positiva</u> aportada por un estado componente, de momento comprendido entre $\vec{p}$ y $\vec{p} + d\vec{p}$, energía comprendida entre $p_o = +\sqrt{p^2+m^2}$ y $p_o + dp_o$, y helicidad $^{++}\ \dfrac{\mathcal{J}_{spin}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$ igual a r/2; análogamente $|b(r,-\vec{p})|^2$ para la carga <u>negativa</u>.

De (3.4), (4.21), (4.18) y (4.4-a) se deduce

$$\langle H \rangle = \sum_r \int d^3p\ p^o \left\{ |a(r,\vec{p})|^2 + |b(r,-\vec{p})|^2 \right\} \quad ; \qquad (4.48)$$

$^{+}$ Mediante un cambio de variable de integración, da lo mismo poner aquí $b(r,\vec{p})$ o $b(r,-\vec{p})$; sin embargo, ahora colocamos $b(r,-\vec{p})$ para que $|b(r,-\vec{p})|^2$ sea la proporción de carga $-e$, helicidad r/2 y momento +p (ver (4.49) más adelante).

$^{++}$ Aquí adoptamos la definición B de r (cf. A4-2).

de (3.47), (4.21) y (4.18),

$$p^k = \sum_r \int d^3p \; p^k \left\{ |a(r,\vec{p})|^2 + |b(r,-\vec{p})|^2 \right\}; \qquad (4.49)$$

de (3.61), (4.21), (4.18) y (A4-1.4),

$$\left\langle \frac{\vec{J}_{spin} \cdot p}{|p|} \right\rangle = \sum_r \int d^3p \; \frac{r}{2} \left\{ |a(r,\vec{p})|^2 + |b(r,-\vec{p})|^2 \right\}, \; \left(\frac{r}{2} = 1, 0, -1\right). \qquad (4.50)$$

Utilizando la interpretación mencionada de $|a(r,\vec{p})|^2 d^3p$ y $|b(r,-\vec{p})|^2 d^3p$, se obtiene que la energía media $\langle H \rangle$ es el promedio de las energías + p_o de los estados especificados por su momento, el signo de la carga y la helicidad, ponderando el promedio con la cantidad de carga de cada estado. Análogamente para los valores medios del momento y de la helicidad.

+ Recordar que el valor medible de la energía es + p_o (cf. (3.17)).

CAPÍTULO QUINTO

REPRESENTACIÓN DE LAS $\Psi(x)$ DE BARGMANN-WIGNER MEDIANTE DOS CAMPOS SPINORIALES $\psi'(x)$ Y $\psi''(x)$ DE SPIN $\frac{1}{2}$

(TEORIA NUMERO c)

5.a - UNA REPRESENTACIÓN

5.a-1 - Teorema

Tesis: Sean $\psi'^{(\varepsilon)}(x)$ y $\psi''^{(\varepsilon)}(x)$ dos soluciones arbitrarias $^{+}$ de la ecuación de Dirac para spin 1/2 correspondientes a un mismo signo ε de la energía, sin mezcla con componentes de signo $-\varepsilon$; sea la funcion $^{+}$

$$\Phi^{(\varepsilon)}(z;x^0) = \frac{\lambda}{\sqrt{2m}} \int d^3x \left\{ \psi'^{(\varepsilon)}_{(1)}(z-x)\, i \frac{\partial}{\partial x^0}\, \psi''^{(\varepsilon)}_{(2)}(x) + (1) \longleftrightarrow (2) \right\} \qquad (5.1)$$

donde $(1) \longleftrightarrow (2)$ indica un sumando idéntico al primero salvo el intercambio de subíndices spinoriales $i_1 \longleftrightarrow i_2$. Entonces,

a) Como función de z, Φ satisface las ecuaciones de BW (1.2):

$$i \frac{\partial}{\partial z^\mu} \gamma^\mu_{(1)} \Phi^{(\varepsilon)}(z;\, x^0) = m\, \Phi^{(\varepsilon)}(z;\, x^0) \qquad (5.2\text{-a})$$

$$\Phi^{(\varepsilon)}_{ij}(z;\, x^0) = \Phi^{(\varepsilon)}_{ji}(z;\, x^0) \qquad (5.2\text{-b})$$

b) pese a la apariencia del 2° miembro de (5.1), Φ es independiente de x^0:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \Phi^{(\varepsilon)}(z;\, x^0) = 0 \qquad (5.3)$$

$^{+}$ $x = (x^0, \vec{x})$; $z = (z^0, \vec{z})$.

Demostración:

Para demostrar (5.2-a) basta observar que por hipótesis

$$i \frac{\partial}{\partial z^{\mu}} \psi'^{(\varepsilon)}(z) = m\, \psi'^{(\varepsilon)}(z) \qquad (5.4)^{**}$$

La (5.2-b) es consecuencia del sumando (1) $\longleftrightarrow$ (2) de (5.1). Para demostrar la (5.3) usaremos (4.1'): Como $\psi'^{(\varepsilon)}$ está formada por conponentes de energía εp_o es

$$\psi'^{(\varepsilon)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=-1}^{1} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, a'_{\varepsilon}(r, \vec{p})\, u_{\varepsilon}(r, \vec{p})\, e^{-\varepsilon i p^o z^o + i \vec{p}\cdot\vec{z}} \qquad (5.5\text{-a})^{**}$$

análogamente,

$$\psi''^{(\varepsilon)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=-1}^{1} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, "a"(s, \vec{p}'')\, u(s, \vec{p}'')\, e^{-\varepsilon i p^{o''} x^o + i \vec{p}''\cdot\vec{x}} \qquad (5.5\text{-b})^{**}$$

Sustituyendo en (5.1) se demuestra

$$\Phi^{(\varepsilon)}(z; x^o) = \frac{\varepsilon\lambda}{2\sqrt{2m}} \sum_{r,s=-1}^{1} \int d^3p\, a'_{\varepsilon}(r,\vec{p})\, a''_{\varepsilon}(s,\vec{p}) \Big[u_{\varepsilon,(1)}(r,\vec{p})\, u_{\varepsilon(2)}(s,\vec{p}) +$$

$$+ (1) \longleftrightarrow (2) \Big] \times e^{-\varepsilon i p^o z^o + i \vec{p}\cdot\vec{z}} \qquad (5.6)$$

Las exponenciales $e^{\varepsilon i p^o x^o}$ y $e^{-\varepsilon i p''^o x^o}$ que contenían la dependencia aparente de Φ en x^o se han cancelado debido a una $\delta(p - p'')$. De (5.6) se obtiene inmediatamente (5.3).

Q.E.D.

5.a-2 - Teorema inverso

Tesis: Toda solución $\psi^{(\varepsilon)}(z)$ de las ecuaciones (1.2) de BW formada sólo por componentes de un signo definido ε de la carga puede ponerse en la forma (5.1), es decir

$$\psi^{(\varepsilon)}(z) = \frac{\lambda}{\sqrt{2m}} \int d^3x \; \left\{\psi'^{(\varepsilon)}_{(1)}(z-x)\, i\, \frac{\partial}{\partial x^o}\; \psi''^{(\varepsilon)}(x) + (1) \longleftrightarrow (2)\right\} . \tag{5.7}$$ +

Una regla para determinar explícitamente las $\psi'^{(\varepsilon)}$ y $\psi''^{(\varepsilon)}$ que deben usarse es:

a) desarróllese $\psi^{(\varepsilon)}(z)$ según (4.21'), o sea

$$\psi^{(\varepsilon)}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, a_\varepsilon(r, \vec{p})\, u_\varepsilon(r,\vec{p})\, e^{-\varepsilon i p^o z^o + i\, \vec{p}\cdot\vec{z}}; \tag{5.8}$$

b) ψ' y ψ'' se determinan hallando las a'_ε y a''_ε de (5.5), las que deben cumplir

$$a_\varepsilon(r = r + s,\, \vec{p}) = \frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{|r|!}}\, (2\pi)^{3/2}\, 2\sqrt{p^o}\; a'_\varepsilon(r,\vec{p})\; a''_\varepsilon(s,\vec{p}). \tag{5.9}$$

Pese a que (5.9) no determina unívocamente $\psi'^{(\varepsilon)}$ y $\psi''^{(\varepsilon)}$, es condición suficiente para que se cumpla la (5.7).

<u>Demostración</u>:

Por Secc. (4.b-2) sabemos que para demostrar que <u>toda</u> solución $\psi^{(\varepsilon)}(z)$ de las ecuaciones de BW (con carga pura ε e) admite la representación (5.7) basta demostrar que $\Phi^{(\varepsilon)}(z;\, x^o)$ admite un desarrollo idéntico al (5.8).

Sustituyendo (5.9) en (5.6) se demuestra que

$$\Phi^{(\varepsilon)}(z; x^o) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, \frac{1}{2} \sum_{r,s=-1}^{1} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, |r|!\;\; a_\varepsilon(r, \vec{p})\; u_\varepsilon(r,\vec{p})\; e^{-\varepsilon i p^o z^o + i\, \vec{p}\cdot\vec{z}} \tag{5.10}$$

con $r = r + s$. Por otra parte, siendo $r = r + s = -2,\, 0,\, 2$ se

+ Modificando adecuadamente la (5.9) puede conseguirse una fórmula análoga <u>sin</u> el "$i\partial/\partial x^o$", o sea como el 2º miembro de la ecuación (a) del apéndice A5-1. Sin embargo, preferimos mantener el "$i\partial/\partial x^o$" pues puede demostrarse que entonces la representación es invariante ante una transformación de Lorentz.

cumple que

$$\sum_{r,s=-1}^{1} |r|!\, f(r) = 2 \sum_{r} f(r) \; . \tag{5.11}$$

Entonces, comparando con (5.8) es

$$\phi^{(\varepsilon)}(z;\, x^{o}) = \psi^{(\varepsilon)}(z) \; . \tag{5.12}$$

(La aparente contradicción originada en que $\psi^{(\varepsilon)}(z)$ es independiente de x^{o} no es tal debido a (5.3)).

(Q.E.D.)

Observaciones:

A) Pudiendo representarse mediante (5.7) las soluciones de carga pura , toda otra solución de carga impura admite representación, combinando (5.7) con

$$\psi(z) = \psi^{(+)}(z) + \psi^{(-)}(z) \; . \tag{5.13}$$

B) El parámetro adimensional λ se introduce en (5.7) para una eventual normalización; para soluciones no normalizadas, λ es arbitrario y puede hacerse $\lambda = 1$.

C) Fijada la $\psi^{(\varepsilon)}(z)$ que se va a representar, puede elegirse una $\psi'^{(\varepsilon)}$ casi arbitraria, determinando $\psi''^{(\varepsilon)}$ mediante (5.9); el único requisito sobre $\psi'^{(\varepsilon)}$ es que contenga todos los momentos $\vec{p}$ que contiene $\psi^{(\varepsilon)}$ (el peso de cada onda monocromática no importa en $\psi'^{(\varepsilon)}$ y, para un $\vec{p}$ dado, que contenga todas las polarizaciones r que contribuyen a las r contenidas en $\psi^{(\varepsilon)}$. O sea, si

$$a_{\varepsilon}(r = r + s,\, \vec{p}) \neq 0 \tag{5.14-a}$$

debe ser

$$a'_{\varepsilon}(r,\, \vec{p}) \neq 0 \; . \tag{5.14-b}$$

5.b - OTRAS FORMAS DE LA REPRESENTACIÓN. FORMA MANIFIESTAMENTE COVARIANTE

De (5.7) se deducen las representaciones

$$\psi^{(\varepsilon)}(z) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2m}}\int d^3x \left\{\psi'^{(\varepsilon)}_{(1)}(x)\ i\frac{\partial}{\partial x^o}\psi''^{(\varepsilon)}_{(2)}(z-x) + (1)\longleftrightarrow(2)\right\} \tag{5.15}$$

y

$$\psi^{(\varepsilon)}(z) = \frac{\lambda}{\sqrt{2m}}H_{(2)}(z)\int d^3x \left\{\psi'^{(\varepsilon)}_{(1)}(x)\ \psi''^{(\varepsilon)}_{(2)}(z-x) + (1)\longleftrightarrow(2)\right\} \tag{5.16}$$

donde

$$H(z) = \vec{\alpha}\cdot\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{z}}\right) + m\beta\ ; \tag{5.17**}$$

(ver las demostraciones en A5-1).

Se designamos

$$d\sigma_\mu = (dx^1dx^2dx^3,\ d\ x^odx^2dx^3,\ dx^odx^1dx^2,\ dx^odx^1dx^2) \tag{5.18}$$

entonces la forma manifiestamente covariante de la representación (5.7) es

$$\psi^{(\varepsilon)}(z) = \frac{\lambda}{\sqrt{2m}}\int d\sigma^\mu\left\{\psi'^{(\varepsilon)}_{(1)}(z-x)\ i\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi''^{(\varepsilon)}(x) + (1)\longleftrightarrow(2)\right\} \tag{5.19}$$

5.c - COMPARACIÓN CON LA REPRESENTACIÓN DE DE BROGLIE

De Broglie [+] utiliza la "fusión" de dos partículas $\psi_{(1)}$ y $\psi_{(2)}$ de spin 1/2 como instrumento para obtener las partículas ψ de spin 1 y sus ecuaciones (idénticas a (1.1) salvo que no se pone $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ con lo que el spin 1 no es puro).

Su ecuación de la "fusión",

[+] De Broglie, op. cit. Cap. VII, §2.

$$\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\psi'_{(1)}(x)\right]\psi''_{(2)}(x)=\psi'_{(1)}(x)\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\psi''_{(2)}(x)\right]=\frac{1}{2}\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\psi(x)\right] \tag{5.20-a)**}$$

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'_{(1)}(x)\right]\psi''_{(2)}(x)=\psi'_{(1)}(x)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi''_{(2)}(x)\right]=\frac{1}{2}\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x)\right] \tag{5.20-b)**}$$

le conduce a escribir

$$\psi(x) \mp \psi'_{(1)}(x)\psi''_{(2)}(x) \ . \tag{5.21)**}$$

A partir de las ecuaciones (de Dirac) que satisfacen $\psi'_{(1)}$ y $\psi''_{(2)}$, y de la restricción (5.20) obtiene las ecuaciones (1.1-a) y b) para ψ. Pero, <u>independientemente de la idea de la fusión la (5.21) es una representación de ψ, y como tal la compararemos con nuestra (5.7)</u>:

Es sabido que una objeción que se ha hecho a (5.21) es que sólo proporciona las ψ que cumplen (5.20), o sea esencialmente se trabaja con dos partículas no ligadas cuyos momentos + son $\vec{p}/2$. Es claro que el sistema resultante debe ser de spin 1 (o cero) y momento $\vec{p}$, pero también que no cualquier ψ de spin 1 puede representarse así (en caso contrario ψ no representará a una partícula elemental, por ser sólo superposición de partículas no ligadas).

Nuestra representación (5.7) no adolece de la objeción anterior.

+ Si se trata de autoestados de $\vec{p}$.

CAPITULO SEXTO

LAS OPERACIONES DE SIMETRIA. LAS FORMAS BILINEALES $\bar{\psi}M\psi$.

Una parte del materia ofrecido en esta sección es conocido; sin embargo, lo incluímos por completitud; indicamos explícitamente cuando los resultados son conocidos, usando por ejemplo la convención de los asteriscos (Secc. 1.a).

6.a - TRANSFORMACIONES INDUCIDAS POR EL GRUPO DE LAS TRANSFORMACIONES CONTINUAS DE LORENTZ

6.a-1 - Transformaciones homogéneas

Es bien sabido [2, 1, 17] que la transformación infinitésima propia y ortocrona de Lorentz,

$$x'^{\mu} = \ell^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} , \quad \det \ell^{\mu}_{\nu} = +1 \quad , \quad \ell^{00} > 0 , \tag{6.1-a)**}$$

$$\ell_{\mu\nu} = \ell^{*}_{\mu\nu} \quad , \quad \ell_{\mu\nu}\, \ell^{\mu x} = \ell_{\nu\mu}\, \ell^{x'\mu} = \ell_{\nu\mu}\, \ell^{\lambda\mu} = \delta^{\lambda}_{\nu} \tag{6.1-b)**}$$

$$\ell_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} , \qquad |\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{6.1-c)**}$$

induce en ψ la transformación

$$\psi'(x') = D\,\psi(x) = D\,\psi(\ell^{-1} x') , \; D = D_1 D_2 \tag{6.2-a)**}$$

donde

$$D = I - \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\, \sigma^{\mu\nu} , \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) \tag{6.3-a)**}$$

es la matriz de la transformación

$$\psi'(x') = D\,\psi(x) = D\,\psi(\ell^{-1} x) \tag{6.3-b)**}$$

inducida sobre los spinores ψ de spin 1/2.

La (6.2-a) puede ponerse en las formas equivalentes,

$$\psi'(x') = D\,\psi(x)\,D^T \qquad (6.2\text{-b})$$

y

$$\psi'(x') = \left[I - \tfrac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\,(\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)})\,\psi(x)\right. . \qquad (6.2\text{-c})^{**}$$

De (6.2) se deduce [2]

$$\overline{\psi}'(x') = \overline{\psi}(x)\,D^{-1} = \overline{\psi}(x)\,D^{-1}_{(1)}\,D^{-1}_{(2)}\,\psi = D^{-1\,T}\psi(x)\,D^{-1} . \qquad (6.4)^{**}$$

Sea $\varepsilon^{\mu\nu}$ una rotación 3-dimensional de ángulo ε alrededor del eje $z: \varepsilon_{12} = -\varepsilon$; $\varepsilon_{ij} = 0$ si $(i,j) \neq (1,2)$ o $(2,1)$. De (6.2) se deduce, como es sabido,

$$\psi'(x) = (I + i\varepsilon\,J_2)\,\psi(x) \qquad (6.5)^{**}$$

donde J_2 está dado en (3.49).

6.a-2 - Traslaciones

Es bien sabido [1, 2] que ante

$$x'^{\mu} = a^{\mu} + x^{\mu} \qquad (6.6\text{-a})^{**}$$

es

$$\psi'(x) = (I - i\,a_{\mu}\,p^{\mu})\,\psi(x) \qquad (6.6\text{-b})^{**}$$

6.b - TRANSFORMACIONES INDUCIDAS POR REFLEXIONES ESPACIALES

6.b-1 - La transformación. Caso vectorial y caso pseudovectorial

Sea la reflexión espacial

$$x = (x^0, \vec{x}) \longrightarrow x' = (x^0, -\vec{x}); \qquad (6.7)^{**}$$

es sabido que mientras los spinores relativistas de spin 1/2 se transforman según [16]

$$\psi'(x') = \eta\,\gamma^0\psi(x) \qquad (6.8\text{-a})^{**}$$

con

$$\eta = \pm 1 \text{ (fermiones reales)} \qquad (6.8\text{-b})^{**}$$

o

$$\eta = \pm i \text{ (fermiones imaginarios)}, \qquad (6.8\text{-c})^{**}$$

los spinores relativistas de spin 1 se transforman según [2]

$$\psi'(x') = \eta\, \gamma^{o}_{(1)}\, \gamma^{o}_{(2)}\, \psi(x) = \eta\, \gamma^{o}\, \psi(x)\, \gamma^{o^{T}} \qquad (6.9\text{-a})^{**}$$

donde

$$\eta = \pm 1 \,. \qquad (6.9\text{-b})^{**}$$

Es fácil verificar que las ecuaciones (1.2) de BW quedan invariantes en forma ante (6.7) y (6.9).

También es sabido [2] que

$$\eta = -1 \longrightarrow \text{campo vectorial}, \qquad (6.10\text{-a})^{*}$$

$$\eta = +1 \longrightarrow \text{campo pseudovectorial}. \qquad (6.10\text{-b})^{*}$$

Es frecuente demostrar (6.10) con ayuda de una determinada representación de las γ^{μ}; puede demostrarse (6.10) independientemente de toda representación de las γ^{μ} si se usa la ecuación (7.2) (ver más adelante) que conecta la ψ de BW con las U_{μ} y $G_{\mu\nu}$ de Proca (recrodar (1.7')).

6.b-2 - Sobre la representación dada en el Cap. 5.

De (5.7), (6.8) y (6.9) se deduce fácilmente que los campos spinoriales ψ' y ψ'' con los cuales obtenemos nuestra representación (5.7) de ψ cumplen lo que sigue:

A) ψ' y ψ'' pertenecen a la misma familia; es decir, son ambas reales o ambas imaginarias. Matemáticamente no hay razones para excluir este último caso.

B) Si representa a un <u>campo vectorial</u> deben elegirse ψ' y ψ'' de paridades opuestas.

C) Si representa a un <u>campo pseudovectorial</u> deben elegirse ψ' y ψ'' de igual paridad.

<u>6.b-3 - Segunda cuantificación - Transformación de los operadores creación y destrucción.</u>

Cuando se efectúa la segunda cuantificación los coeficientes a y b^* del desarrollo en ondas planas (4.29) se transforman en los operadores destrucción y creación a y b^+. $\psi(x)$ pasa a ser un operador que actúa sobre el espacio de Hilbert de los vectores de estado:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} \Big[a\,(r, \vec{p})\, u(r, \vec{p})\, e^{-ipx} +$$

$$+ \, b^+\,(r, \vec{p})\, r(r, \vec{p})\, e^{ipx} \Big] . \qquad (6.11)$$

La reflexión espacial induce una transformación unitaria P,

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = P\,\psi(x)\,P^{-1} = \eta\ \gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}\,\psi(x') \qquad (6.12\text{-a})$$

donde P actúa sobre a y b^+ pero no sobre u y v:

$$a'(r, \vec{p}) = P\,a(r, \vec{p})\,P^{-1} \ ;$$

$$b'^+(r, \vec{p}) = P\,b^+(r, \vec{p})\,P^{-1} . \qquad (6.12\text{-b})$$

De (6.11) y (6.12) se deduce (cf. A6-1):

$$\sum_r a'(r,\vec{p})\,u(r,\vec{p}) = \eta \sum_r\ a(r,-\vec{p})\,\gamma^o_{(1)}\,\gamma^o\ \ a(r,-\vec{p}) \qquad (6.13\text{-a})$$

$$\sum_r b'^+(r,\vec{p})\,v(r,\vec{p}) = \eta \sum_r b^+(r,-\vec{p})\,\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}\,v(r,-\vec{p}) \qquad (6.13\text{-b})$$

En A6-1 demostramos que $r^{o}_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)}$ $u\,(r,\,-\vec{p})$ pertenece al subespacio subtendido por $u(r,\,\vec{p})$ ($\vec{p}$ fijo, $r = -2,\,0,\,2$), o sea:

$$\gamma^{o}_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)}\,u(r,\,-\vec{p}) = \sum_{r'} \lambda(r,\,r',\,\vec{p})\,u(r',\,\vec{p}) \qquad (6.14\text{-a})$$

con λ = número; análogamente,

$$\gamma^{o}_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)}\,v(r,-\vec{p}) = \sum_{r} \mu(r,\,r',\,\vec{p})\,v(r',\,\vec{p}) \qquad (6.14\text{-b})$$

De (6.13) y (6.14),

$$a'(r,\,\vec{p}) = \eta \sum_{r''} \lambda(r'',\,r,\,\vec{p})\,a(r',\,-\vec{p}) \qquad (6.15\text{-a})$$

$$b'(r,\,\vec{p}) = \eta^{*} \sum_{r''} \mu^{*}(r'',\,r,\,\vec{p})\,b(r'',\,-\vec{p}) \qquad (6.15\text{-b})$$

λ y μ sólo pueden determinarse si se especifica la definición de r [ver las definiciones A y B en A4-1 (spin 1/2) y A4-2 (spin 1)].

En A6-1 se demuestra que:

A) Con la <u>definición A</u> es

$$\lambda(r,\,r',\,\vec{p}) = +\,\delta_{r,r'}\;;\qquad \mu(r,\,r',\,\vec{p}) = +\,\delta_{r,r'} \qquad (6.16\text{-a})$$

por lo que

$$a'(r,\vec{p}) = +\;\eta\,(r,\,-\vec{p})\;;\qquad b'(r,\,\vec{p}) = +\;\eta^{*}(r,\,-\vec{p}) \qquad (6.16\text{-b})$$

[para spin 1/2 es

$$a'(r,\vec{p}) = \eta\,a(r,-\vec{p})\;;\quad b'(r,\vec{p}) = -\,\eta^{*}\,b(r,-\vec{p})\Big]. \qquad (6.16)^{**}$$

B) Con la <u>definición B</u> es

$$\lambda(r,\,r',\,\vec{p}) = +\,\delta_{r,-r'}\;;\quad \mu(r,\,r',\,\vec{p}) = +\,\delta_{r,-r'} \qquad (6.17\text{-a})$$

por lo que

$$a'(r,\vec{p}) = +\,\eta\,a(-r,\,-\vec{p});\quad b'(r,\vec{p}) = +\,\eta^{*}\,b(-r,\,-\vec{p}) \qquad (6.17\text{-b})$$

[para spin 1/2 es [16]

$$a'(r,\vec{p}) = \eta a(-r, -\vec{p}) \; ; \quad b'(r,\vec{p}) = - \eta^* b(-r, -\vec{p})] \qquad (6.17')^{**}$$

6.c - CONJUGACIÓN PARTICULA-ANTIPARTICULA

En las definiciones y desarrollos seguimos el ordenamiento dado en el libro de Leite Lopes [16], Cap. 4. Abreviación: "Conjugación partícula-antipartícula" = "Conjugación-C". La conjugación-C para partículas de spin 1 en formalismos de este tipo fué estudiada por primeira vez por Belinfante [2]. Belinfante usa la ecuación (6.21) como definición; no conecta la misma con la 2a. cuantificación. Nosotros procederemos así:

Sea Ψ_o el vector de estado del vacío; en base a los operadores creación y destrucción se define eloperador conjugación-C mediante

$$C\, a^+(r,\vec{p})\, \Psi_o = \xi^*\, b^+(r,\vec{p})\, \Psi_o \qquad (6.18\text{-a})^{**}$$

$$C\, b^+(r,\vec{p})\, \Psi_o = \xi\, a(r,\vec{p}) \qquad (6.18\text{-b})^{**}$$

$$C\, \Psi_o = \Psi_o \qquad (6.18\text{-c})^{**}$$

donde ξ es un factor de fase:

$$\xi \xi^* = 1 \qquad (6.18\text{-d})^{**}$$

Definimos una matriz $C\, i_1 i_2, j_1 j_2$ que opera en el espacio spinorial mediante +

$$u(r,\vec{p}) = C\, \bar{v}(r,\vec{p}) \qquad (6.19\text{-a})$$

$$v(r,\vec{p}) = C\, \bar{u}(r,\vec{p}) \qquad (6.19\text{-b})$$

Usando el desarrollo en ondas planas (4.29) es fácil demos

+ En spin 1/2 se define C tal que $u = C\, \bar{v}^T$ pero aquí $\bar{r}^T = \bar{v}$.

trar que

$$C\psi C^{-1} = \xi\, C\, \psi \qquad (6.20)$$
$$C\bar{\psi} C^{-1} = \xi^{*}\psi\, C^{-1}$$

Entonces, usando la representación (4.30) de las u y v en términos de spinores de spin 1/2 (Cap. 4) se deduce

$$C = C_{(1)}\, C_{(2)} \qquad (6.21)^{*}$$

donde C es la matriz usada en la conjugación partícula-antipartícula para spin 1/2:

$$u(r, \vec{p}) = C\, \bar{v}^{\,r}(r, \vec{p}) \;; \quad v(r, \vec{p}) = C\, \bar{u}^{\,r}(r, \vec{p}) \qquad (6.22\text{-a})^{**}$$

$$C^{-1}\gamma^{\mu} C = -\gamma^{\mu r} \qquad (6.22\text{-b})^{**}$$

$$C^{T} = -C \qquad (6.22\text{-c})^{**}$$

6.d - TRANSFORMACIONES INDUCIDAS POR LA INVERSION TEMPORAL

Sólo nos ocuparemos de la teoría número c. Sea la inversión temporal

$$x = (x^{o}, \vec{p}) \longrightarrow x' = (-x^{o}, \vec{x}) \,. \qquad (6.23)^{**}$$

Toda transformación antilineal inducida sobre ψ será de la forma

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = \xi\, B\, \bar{\psi}(x), \quad \xi\xi^{*} = 1 \qquad (6.24\text{-a})$$

donde hemos separado el factor de fase ξ por conveniencia posterior; $B i_1\, i_2\, j_1\, j_2$ es una matriz que opera sobre el espacio spinorial. En spin 1/2 se suele poner $\psi'(x') = B\bar{\psi}^{r}(x)$ pero aquí $\psi^{T} = \psi$.

Exigimos invariancia de forma de las ecuaciones de B-W ante la inversión (6.23); hemos encontrado (la verificación es directa) que se mantiene la invariancia si ponemos

$$B = B_{(1)}\, B_{(2)} \qquad (6.24\text{-b})$$

donde B es la matriz usada para la inversión temporal del electrón, es decir tal que

$$\left.\begin{array}{ll} B^{-1}\,\gamma^{o}\;B = \gamma^{oT}, & B^{-1}\,\vec{\gamma}\,B = -\,\vec{\gamma}^{T} \\ B^{+} = B^{-1}, & B^{T} = -\,B \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} (6.25\text{-a})^{**} \\ (6.25\text{-b})^{**} \end{array}$$

Usualmente se pone

$$B = \gamma^{o}\,\gamma^{5}\,C\;, \qquad (6.25\text{-b})^{**}$$

con C definida por (6.22).

La invariancia de forma de las ecuaciones de B-W se mantiene cualquiera sea el factor de fase ξ.

$\bar{\psi}$ se transforma según

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x') = \xi^{*}\,\psi(x)\,B^{-1} \qquad (6.24\text{-c})$$

Pero por que exigimos una transformación <u>antilineal</u> ? Es fácil demostrarlo imitando un argumento usado para otros spines: Por el Cap. 10 la ecuación de B-W en presencia de un campo electromagnético A_{μ}, $F_{\mu\nu}$, es (ec. 10.3)

$$(i\partial_{\mu} - e\,A_{\mu})\,\gamma^{\mu}_{(1)}\,\psi = m\,\psi - \frac{i\,e\,F_{\mu\nu}}{Bm}\,(\gamma^{\mu}_{(1)} - \gamma^{\mu}_{(2)})\,(\gamma^{\mu}_{(1)} + \gamma^{\mu}_{(2)})\,\psi \qquad (6.25)$$

$$\psi = \psi^{T}\;;$$

imponemos invariancia de forma de (6.25) ante la inversión (6.23); usamos la transformación conocida del campo electromagnético:

$$\begin{array}{ll} A'_{o}\,(x') = A_{o}(\vec{x}), & \vec{A}'(x') = -\,\vec{A}(x) \\ F'_{ok}(x') = F_{ok}(x), & F'_{k\ell}(x') = -\,F_{k\ell}(x); \end{array} \qquad (6.26)^{**}$$

si ensayamos satisfacer la invariancia de (6.25) mediante una transformación <u>lineal</u>

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = \xi\,B'\psi(x)$$

obtenemos fácilmente contradicción. Este problema no se presenta usando la transformación antilineal (6.24). Finalmente, admitiendo continuidad respecto de A_μ, no podemos usar una transformación lineal ni siquiera para los campos libres que consideramos en los Cap. 1 a 9.

6.e - LAS FORMAS BILINEARES $\overline{\Psi} M \varphi$ Y LAS OPERACIONES DE SIMETRIA REPRESENTACIONES TENSORIALES DEL GRUPO DE LORENTZ

6.e-1 - Introducción

Como en spin 1/2 estamos interesados en formas bilineales en la función de onda; la forma bilineal algebraica más general es

$$\overline{\Psi} \; M \; \varphi$$

donde $M \; i_1 i_2 j_1 j_2$ es una matriz arbitraria. En spin 1/2 se plantearon dos cuestiones:

1) Hallar una base en el espacio de las formas $\overline{\Psi} M \varphi$;

2) Seleccionar la base de manera que sus elementos sean representaciones tensoriales del grupo de Lorentz.

Es bien conocida la solución:

$$\overline{\Psi} \; I \, \varphi \, ; \; \overline{\Psi} \gamma^\mu \varphi \, ; \; \overline{\Psi} \; \sigma^{\mu\nu} \; ; \; \overline{\Psi} \; \gamma^5 \, \gamma^\mu \varphi \, ; \; i \, \overline{\Psi} \, \gamma^5 \varphi \qquad (6.27)^{**}$$

La solución (6.27) de las cuestiones 1 y 2 para spin 1/2 es uno de los instrumentos más importantes con que cuenta la teoría.

Intentaremos plantiar y resolver (dentro de lo posible) las cuestiones 1 y 2 para spin 1. En esta sección consideraremos la cuestión 2: Proponemos 16^2 formas,

$$\psi I_{(1)} I_{(2)} \varphi, \bar{\psi}\, \gamma^{\mu}_{(1)}\, I_{(2)}\ \varphi,\ \ldots,\ -\bar{\psi}\gamma^5_{(1)}\gamma^5_{(2)}\varphi. \qquad (6.28)$$

y despreocupándonos de si forman base o no, demostraremos que son representaciones tensoriales del grupo de Lorentz; también estudiaremos su comportamiento ante la conjugación-C. En la sección 6.f analizaremos el problema más difícil: Como restringir e modificar (6.28) de manera que forme base (cuestión 1) sin perder la covariancia relativista.

6.e-2 - Lema

"Si $\psi, \varphi \in \omega$, las cantidades

$$Q\ (x,y)^{\lambda'_1\lambda'_2\ldots\lambda'_{m'};\,\lambda''_1\lambda''_2\ldots\lambda''_{m''}} =_{df} \bar{\psi}(x)\,\gamma^{\lambda'_1}_{(1)}\gamma^{\lambda'_2}_{(1)}\ldots\gamma^{\lambda'_{m'}}_{(1)}\gamma^{\lambda''_1}_{(2)}\gamma^{\lambda''_2}_{(2)}\gamma^{\lambda''_{m''}}_{(2)}\,\varphi(y) \qquad (6.29)^{+}$$

se comportan ante el grupo ortocrono de Lorentz como tensores de ordem $m' + m''$.

Nota: Tomamos ψ y φ de la misma paridad: en (6.9),

$$\eta_{\psi} = \eta_{\varphi} \qquad (6.30)$$

Demostración: Basta hallar por separado las leyes de transformación ante:

A) Subgrupo de las transformacions infinitésimas (propias):

Por secc. 6.a-1 ante la rotación (6.1) $Q^{\lambda'_1\ldots\lambda'_{m'};\,\lambda''_1\ldots\lambda''_{m''}}(x,y)$ se transforma en

$$[Q'(x',y')]^{\lambda'_1\ldots\lambda'_{m'};\,\lambda''_1\ldots\lambda''_{m''}} = \bar{\psi}(x)\, D^{-1}\, \gamma^{\lambda'_1}_{(1)}\ldots\gamma^{\lambda'_{m'}}_{(1)}\gamma^{\lambda''_1}_{(2)}\ldots\gamma^{\lambda''_{m''}}_{(2)}\ D\varphi(y) =$$

$$= \bar{\psi}(x)\left[D^{-1}\gamma^{\lambda'_1}D\right]_{(1)}\ldots\left[D^{-1}\gamma^{\lambda'_{m'}}D\right]_{(1)}\left[D^{-1}\gamma^{\lambda''}\ D\right]_{(2)}\ldots\left[D^{-1}\gamma^{\lambda''_{m''}}D\right]_{(2)}\varphi(y).$$

Por la teoria de spin 1/2 es bien sabido que

$$D^{-1}\gamma^{\lambda}\,D = l^{\lambda}_{\ \nu}\ \gamma^{\nu}, \qquad (6.31)^{**}$$

+ "df" significa "por definición".

De donde,

$$[Q'(x', y')]^{\lambda'_1 \ldots \lambda'_{m'}; \lambda''_1 \ldots \lambda''_{m''}} = \ell^{\lambda'_1}_{\nu'_1} \ldots \ell^{\lambda'_{m'}}_{\nu'_{m'}} \; \ell^{\lambda''_1}_{\nu''_1} \ldots \ell^{\lambda''_{m''}}_{\nu''_{m''}} \times$$

$$\times \; [Q(x, y)]^{\nu'_1 \ldots \nu'_m \; ; \; \nu''_1 \ldots \nu''_{m''}} \qquad (6.32)$$

B) Reflexiones espaciales:

Usar análogamente Secc. 6.b; las fases η_ψ y η_φ desaparecen debido a (6.30).

6.e-3 - Tabla de 16^2 formas bilineales que se agrupan en representaciones tensoriales del grupo de Lorentz

En la tabla 6-1 se dan las propiedades de transformación de todas las 16^2 formas del tipo (6.28) (la demostración se esbozará más abajo), y una abreviatura que usaremos para las mismas.

Los signos menos y los factores i provienen de haber conservado los factores i al efectuar los productos tensoriales $\Gamma^A_{(1)} \Gamma^B_{(2)}$ donde $\Gamma^A = I, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^5 \gamma^\mu, i\,\gamma^5,$ $A = 1,2,\ldots,16;$

(6.33)**

a su vez los factores i en (6.33) son los frequentemente elegidos para obtener $\overline{\psi}\,\Gamma^A \psi$ = real en spin 1/2; el resultado, es por supuesto, $\psi\,\Gamma^A_{(1)} \Gamma^B_{(2)} \psi$ = real.

TABLA 6-1

FORMAS BILINEALES QUE SE AGRUPAN EN REPRESENTACIONES TENSORIALES DEL GRUPO DE LORENTZ

Forma bilineal	Abreviatura	Carácter tensorial si Ψ, $\varphi \in \omega$
$\bar{\Psi}(x)\ I_{(1)} I_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{;}$	escalar
$\bar{\Psi}(x)\ I_{(1)} \gamma^{\mu}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{;\mu}$	vector
$\bar{\Psi}(x)\ I_{(1)} \sigma^{\mu\nu}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{;\mu\nu}$	tensor antisimétrico de 2º orden
$\bar{\Psi}(x)\ I_{(1)} \gamma^{5}_{(2)} \gamma^{\mu}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{;5\mu}$	pseudovector
$i\ \bar{\Psi}(x)\ I_{(1)} \gamma^{5}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{;5}$	pseudoescalar
$\bar{\Psi}(x)\ \gamma^{\mu}_{(1)} I_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{\mu;}$	vector
$\bar{\Psi}(x)\ \gamma^{\mu}_{(1)} \gamma^{\nu}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{\mu;\nu}$	tensor de 2º orden
$\bar{\Psi}(x)\ \gamma^{\lambda}_{(1)} \sigma^{\mu\nu}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{\lambda;\mu\nu}$	tensor de 3er. orden, antisimétrico en $\mu\nu$.
$\bar{\Psi}(x)\ \gamma^{\mu}_{(1)} \gamma^{5}_{(2)} \gamma^{\nu}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{\mu;5\nu}$	pseudotensor de 2º orden
$i\ \bar{\Psi}(x)\ \gamma^{\mu}_{(1)} \gamma^{5}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{\mu;5}$	pseudovector
$\bar{\varphi}(x)\ \sigma^{\mu\nu}_{(1)} I_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{\mu\nu;}$	tensor antisimétrico de 2º orden
$\bar{\Psi}(x)\ \sigma^{\mu\nu}_{(1)} \gamma^{\lambda}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{\mu\nu;\lambda}$	Tensor de 3er. orden, antisimétrico en $\mu\nu$.
$\bar{\Psi}(x)\ \sigma^{\mu\nu}_{(1)} \sigma^{\lambda\rho}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{\mu\nu;\lambda\rho}$	Tensor de 4º orden, antisimetrico en $\mu\nu$ y en $\lambda\rho$.
$\bar{\Psi}(x)\ \sigma^{\mu\nu}_{(1)} \gamma^{5}_{(2)} \gamma^{\lambda}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{\mu\nu;5\lambda}$	pseudotensor de 3er. orden, antisimetrico en $\mu\nu$.
$i\ \bar{\Psi}(x)\ \sigma^{\mu\nu}_{(1)} \gamma^{5}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{\mu\nu;5}$	pseudotensor de 3er. orden, antisimetrico en $\mu\nu$.
$\bar{\Psi}(x) \gamma^{5}_{(1)} \gamma^{\mu}_{(1)} I_{(2)}\ (y)$	$F^{5\mu;}$	pseudovector
$\bar{\Psi}(x) \gamma^{5}_{(1)} \gamma^{\mu}_{(1)} \gamma^{\nu}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{5\mu;\nu}$	pseudotensor de 2º orden
$\bar{\Psi}(x) \gamma^{5}_{(1)} \gamma^{\lambda}_{(1)} \sigma^{\mu\nu}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{5\lambda;\mu\nu}$	pseudotensor de 3er. orden, antisimétrico en $\mu\nu$.
$\bar{\Psi}(x) \gamma^{5}_{(1)} \gamma^{\mu}_{(1)} \gamma^{5}_{(2)} \gamma^{\nu}_{(2)} \varphi(y)$	$F^{5\mu;5\nu}$	tensor de 2º orden
$i\ \bar{\Psi}(x) \gamma^{5}_{(1)} \gamma^{\mu}_{(1)} \gamma^{5}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{5\mu;5}$	vector
$i\ \bar{\Psi}(x) \gamma^{5}_{(1)} I_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{5;}$	pseudoescalar
$i\ \bar{\Psi}(x) \gamma^{5}_{(1)} \gamma^{\mu}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{5;\mu}$	pseudovector
$i\ \bar{\Psi}(x) \gamma^{5}_{(1)} \sigma^{\mu\nu}_{(2)}\, \varphi(y)$	$F^{5;\mu\nu}$	pseudotensor de 2º orden, antisimétrico en $\mu\nu$.

Forma bilineal	Abreviatura	Carácter tensorial si $\psi, \varphi \in \omega$
$i\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^5_{(1)}\gamma^5_{(2)}\gamma^{\mu}_{(2)}\,\varphi(y)$	$F^{5;5\mu}$	vector
$-\bar{\psi}(x)\,\gamma^5_{(1)}\gamma^5_{(2)}\,\varphi(y)$	$F^{5;5}$	escalar

La regla usada para la abreviatura es autoevidente, y permite por un lado reconstruir sin esfuerzo la forma bilineal, y por el otro, tener presente el carácter tensorial de la misma.

Para demostrar el caráter tensorial debe usarse el lema 6.e-2 y recordar

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\quad \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\rho} \qquad (6.34\text{-a})^{**}$$

$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ es el pseudotensor de Levi-Civita, totalmente antisimétrico y tal que

$$\varepsilon_{0123} = +1 \;. \qquad (6.34\text{-b})^{**}$$

(Nosotros usamos el γ^5 hermitiano:

$$(\gamma^5)^2 = +I) \;. \qquad (6.34\text{-c})^{**}$$

Usando 6.e-2 y (6.34-a) y (b) los cálculos son directos.

Para utilización posterior recordamos que

$$\gamma^5\,\sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta\alpha\beta}\quad \sigma^{\alpha\beta} \qquad (6.34\text{-d})^{**}$$

<u>6.e-4 - Transformación de las formas bilineales ante la conjugación partícula-antipartícula</u>

Usando las ecuaciones (6.20), (6.21) y (6.22) se calcula fácilmente la transformación ante conjugación-C de los elementos de la tabla 6-1. El resultado es +

$$\bar{\psi}\,\Gamma^{A}_{(1)}\,\Gamma^{B}_{(2)}\,\varphi \xrightarrow{+} \xi^{*}_{\psi}\xi_{\varphi}\,\bar{\varphi}\,\Gamma^{A}_{(1)}\,\Gamma^{B}_{(2)}\,\psi$$

para
$F^{;}$, $F^{;5\mu}$, $F^{;5}$, $F^{\mu;\nu}$, $F^{\lambda;\mu\nu}$, $F^{\mu\nu;\lambda}$, $F^{\mu\nu;\lambda\rho}$, $F^{5\mu;}$, $F^{5\mu;5\nu}$,

$F^{5\mu;5}$, $F^{5;}$, $F^{5;5\mu}$ y $F^{5;5}$. (6.35-a)

$$\bar{\psi}\,\Gamma^{A}_{(1)}\,\Gamma^{B}_{(2)}\,\varphi \longrightarrow -\,\xi^{+}_{\psi}\xi_{\varphi}\,\bar{\varphi}\,\Gamma^{A}_{(1)}\,\Gamma^{B}_{(2)}\,\psi$$

para
$F^{;\mu}$, $F^{;\mu\nu}$, $F^{\mu;}$, $F^{\mu;5\nu}$, $F^{\mu;5}$, $F^{\mu\nu;}$, $F^{\mu\nu;5\lambda}$, $F^{\mu\nu;5}$, $F^{5\mu;\nu}$, $F^{5\lambda;\mu\nu}$,

$F^{5;\mu}$, $F^{5;\mu\nu}$. (6.35-b)

6.f - EL PROBLEMA DE HALLAR UNA BASE MANIFIESTAMENTE COVARIANTE PARA EL ESPACIO DE LAS FORMAS BILINEARES

6.f-1 - Introducción

El objeto de esta sección 6.f es seleccionar o modificar los elementos de la tabla 6-1 de manera que dentro de lo posible:

A) formen base en el espacio de $\bar{\psi}M\varphi$ con $\psi,\varphi\in\omega^{p}_{sp}$ ++ (- problema 2, Secc. 6.1, y que).

B) no se pierda la covariancia relativista conseguida en Secc. 6.e; en otras palabras, los elementos de la base deben continuar siendo agrupables en representaciones tensoriales del grupo de

---

+ Γ^{A} está definida en (6.33).

++ Los espacios spinoriales ω^{p}_{sp}, ... se definieron en Secc. 2.c-3.

Lorentz.

Primero debemos resulver varios problemas previos, que consisten en resolver la misma cuestión en espacios más amplios (e.g. ε_{sp}, ε_{sp}^{sim}, ...) que ω_{sp}^{p}. Para unificar la notación, indicaremos com K'K al espacio de las formas bilineales $\bar{\psi}M\varphi$ con $\psi \in K'$, $\varphi \in K$.

Los 16^2 elementos de la tabla 6-1 no forman base en $\overline{\omega_{sp}^{p'}}$ ω_{sp}^{p} porque siendo 6 la dimensión de ω_{sp}^{p} la dimensión de $\overline{\omega_{sp}^{p'}}\,\omega_{sp}^{p}$ es 6^2 ($\neq 16^2$); para tener elementos linealmente independientes en $\omega_{sp}^{p'}\omega_{sp}^{p}$ deberíamos, pues, eliminar $16^2 - 6^2$ elementos de la tabla 6-1. Lo primero que uno ensaya es ver que relaciones de dependencia originan las condiciones

$$\psi_{ij} = \psi_{ji} \tag{1.2-b}$$

y

$$H_{(1)}\,\psi = H_{(2)}\,\psi ; \tag{2.3-c}$$

usando estas relaciones, uno puede suprimir elementos linealmente independientes en la tabla 6-1; pero entonces los elementos remanentes ya no se pueden agrupar en representaciones tensoriales del grupo de Lorentz $^{+}$. Por qué ? Porque la utilización de 2-3) rompa el carácter manifiesto de la covariancia relativista.

En cambio, podremos acercarnos (pero no totalmente) a los objetivos A y B si permitimos que los coeficientes del desarrollo de $\bar{\psi}M\varphi$ en elementos de la base dependen de los momentos (con lo cual el problema deja de ser puramente matricial).

Sea p el momento del cual depende $\varphi(p) \in \omega^{p}_{,p}$; p' el de $\psi(p') \in \omega_{sp}^{p'}$; entonces en Secc. 6.f-6 hallaremos para toda matriz

$^{+}$ Con más precisión: nosotros no hemos conseguido agruparlos.

M (es decir para toda $\psi(p') M \varphi(p) \epsilon\, \omega^{p'}_{sp}\, \omega^{p}_{sp}$) un desarrollo del tipo

$$\psi(p') M \varphi(p) = \sum_A C^A(p,p') \overline{\psi}(p') M^A \varphi(p). \qquad (6.36)$$

En este desarrollo los C^A (p, p') serán funciones no matriciales de p^μ y p'^μ (con $p^o = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$); los C^A serán tensores si el 1er. miembro es un tensor (pero no necesariamente del mismo orden), y las $\overline{\psi}(p') M^A \varphi(p)$ serán agrupables en representaciones tensoriales del grupo de Lorentz, de manera que el 2° miembro de (6.36) sea manifiestamente covariante.

En spin 1/2 los coeficientes del desarrollo de $\overline{\psi} M \varphi$ en combinación lineal de las (6.27) no son funciones de $\vec{p}$ y $\vec{p}'$ si M no depende de $\vec{p}$ y $\vec{p}'$. Por qué aquí deberemos trabajar con coeficientes C^A(p, p') ? Porque mientras en spin 1/2 no hay condición inicial, aquí el momento $\vec{p}$ aparece en la definición del espacio spinorial ω^p_{sp} (cf. (2.4)). Esto nos traerá inconvenientes (cf. Secc. 6.f-6).

Pero, como hemos anticipado, antes de poder obtener la solución (6.36) debemos resolver problemas previos, que son:

- Base para $\overline{\varepsilon_{sp}}\ \varepsilon_{sp}$;

- " " $\overline{\varepsilon^{sim}_{sp}}\, \varepsilon^{sim}$;

- obtención de un operador Λ^V puramente matricial e "invariante" relativista que proyecta ε^{sim}_{sp} (dimensión = 10) en un subespacio ε^V_{sp} tal que si bien $\varepsilon^V_{sp} \neq \omega^p_{sp}$, sea dimensión ε^V_{sp} = dimensión ω^p_{sp} = 6 (6.37);

$\left[\Lambda^I\right.$ cumple (6.37) (cf. Secc. 2.c-5) pero no nos sirve porque no es "invariante" relativista$\left.\right]$;

- base para $\overline{\varepsilon^v_{sp}}\ \varepsilon^v_{sp}$.

<u>6.f-2 - Base para $\overline{\varepsilon^v_{sp}}\ \varepsilon^v_{sp}$</u> $^+$

En primer lugar, es trivial demostrar que $\overline{\varepsilon_{sp}}\ \varepsilon_{sp}$ es un espacio vectorial.

En segundo lugar, la dimensión de ε_{sp} es $4^2 = 16$; por lo tanto,

$$\text{dimensión de } \overline{\varepsilon_{sp}}\ \varepsilon_{sp} = 16^2 \ ; \tag{6.38}$$

una demostración de (6.38) (con método usual) se da en A6-2.

En tercer lugar, los elementos de $\overline{\varepsilon_{sp}}\ \varepsilon_{sp}$ dados en tabla 6-1 (con $\psi, \varphi \in \varepsilon_{sp}$) son linealmente independientes según demostramos en A6-2.

Pero hay 16^2 elementos $F^{A;B}$ en la tabla 6-1. Por lo tanto, (ver (6.38)) <u>las 16^2 formas bilineales $F^{A;B}$ dadas en tabla 6-1, con $\psi, \varphi \in \varepsilon_{sp}$, forman base en $\overline{\varepsilon_{sp}}\ \varepsilon_{sp}$</u>.

<u>6.f-3 - Base (superabundante) para $\overline{\varepsilon^{sim}_{sp}}\ \varepsilon^{sim}_{sp}$</u>.

A) 135 FORMAS BILINEALES SUFICIENTES PARA SUBTENDER $\overline{\varepsilon^{sim}_{sp}}\ \varepsilon^{sim}_{sp}$

Para abreviar la escritura eliminando las reiteradas ψ, φ, conviene usar la notación de equivalencia tensorial (Secc. 2.d-3), hallar formas bilineales linealmente independientes en ε^{sim}_{sp},

$$\bar{\psi}\,\Gamma^A\,\varphi \qquad A = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, \quad \psi, \varphi \in \varepsilon^{sim}_{sp}$$

es hallar matrices Γ^A tales que

$$\sum_A c_A \Gamma^A \underset{\varepsilon_{sp}}{\overset{sim}{\sim}} 0 \Longrightarrow c_A = 0 . \qquad (6.39)$$

Hallar una base

$$\bar{\psi} \Gamma^A \varphi , \quad A = 1, 2, \dots , \quad \psi, \varphi \in \varepsilon_{sp}^{sim}$$

en $\varepsilon_{sp}^{sim} \varepsilon_{sp}^{sim}$ es hallar un número suficiente de matrices Γ^A tales que

1) cumplan (6.39)

2) para toda M exista el desarrollo

$$M \underset{\varepsilon_{sp}}{\overset{sim}{\sim}} \sum_A c_A \Gamma^A \qquad (6.40)$$

Por ser las $F^{A,B}$ de tabla 6-1 base para $\overline{\varepsilon_{sp}}\ \varepsilon_{sp}$, podemos afirmar que para toda M existe el desarrollo

$$M \underset{\varepsilon_{sp}}{\overset{sim}{\sim}} \sum_{A,B=1}^{16} d_{A,B} \Gamma^A_{(1)} \Gamma^B_{(2)} \qquad (6.41)$$

(las $d_{A,B}$ son números; las Γ^A se definieron en (6.33)). Por (2.31) deducimos que para toda M existe el desarrollo

$$M \underset{\varepsilon_{sp}}{\overset{sim}{\sim}} \sum_{B=1}^{16} \sum_{A<B} c_{A,B} \Gamma^A_{(1)} \Gamma^B_{(2)} \qquad (6.42)$$

Con la notación de tabla 6-1 podemos escribir, pues la tabla seguiente:

TABLA 6-2

135 FORMAS BILINEALES SUFICIENTES PARA SUBTENDER $\overline{\varepsilon^{sim}_{sp}}\ \varepsilon^{sim}_{sp_o}$

Forma	Restricción sobre los índices	Número máximo de componentes independentes
$F^{;}$	-	1
$F^{;\mu}$	-	4
$F^{;\mu\nu}$	$\mu<\nu$	6
$F^{;5\mu}$	-	4
$F^{;5}$	-	1
$F^{\mu;\nu}$	$\mu\leqslant\nu$	10
$F^{\lambda;\mu\nu}$	$\mu<\nu$	24
$F^{\mu;5\nu}$	-	15
$F^{\mu;5}$	-	4
$F^{\mu\nu;\lambda\rho}$	$\mu<\nu;\ \lambda<\rho;\ \mu\leqslant\lambda;\ \nu\leqslant\rho$	21
$F^{\mu\nu;5\lambda}$	$\mu<\nu$	24
$F^{\mu\nu;5}$	$\mu<\nu$	6
$F^{5\mu;5\nu}$	$\mu\leqslant\nu$	10
$F^{5\mu;5}$	-	4
$F^{5;5}$	-	1

Las componentes que violan la restricción sobre los índices se obtienen recordando que

1) (2.31) $\Longrightarrow$ $F^{A;B} = F^{B;A}$ (6.43-a)

2) $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ (6.43-b)

y usando la

$$F^{\mu;5}{}_{\mu} = 0 \qquad (6.43\text{-c})$$

que se demuestra en (B).

El número <u>máximo</u> de componentes independientes de cada representación tensorial del grupo de Lorentz de obtiene con las relaciones de simetría (6.43); por qué lo de "máximo" ? porque pueden (y deben) haber más relaciones entre las $F^{A;B} \epsilon\ \varepsilon^{sim}\varepsilon^{sim}$; esas relaciones deben existir ya que siendo dimension $\varepsilon^{sim}_{sp} = 10$, es

$$\text{dimensión } \overline{\varepsilon^{sim}_{sp}}\ \varepsilon^{sim}_{sp} = 10^2 \tag{6.44}$$

mientras que en la tabla 6-2 hay 135 elementos: sobran 35.

B) DEMOSTRAREMOS QUE $F^{\mu;5\nu}$ ES UN PSEUDOTENSOR QUE TRAZA NULA

En A6-3 demostramos que en la representación (2.6) de las γ^μ es

$$\gamma^\mu_{(1)}\gamma_{\mu(2)}\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11}-\psi_{33} & \psi_{21}-\psi_{34} & 0 & \psi_{14}-\psi_{23} \\ \psi_{21}-\psi_{34} & \psi_{22}-\psi_{44} & \psi_{23}-\psi_{14} & 0 \\ 0 & \psi_{23}-\psi_{14} & \psi_{33}-\psi_{11} & \psi_{43}-\psi_{12} \\ \psi_{14}-\psi_{23} & 0 & \psi_{43}-\psi_{12} & \psi_{44}-\psi_{22} \end{pmatrix}, \psi\epsilon\varepsilon^{sim} \tag{6.45}$$

En dicha representación la γ^5 de (6.34) es

$$5 = \begin{pmatrix} \psi 0 & \psi I \\ \psi I & \psi 0 \end{pmatrix} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.46}**$$

Por lo tanto, si $\psi \epsilon\ \varepsilon^{sim}_{sp}$ es

$$\gamma^5_{(2)}\gamma^\mu_{(1)}\gamma_{\mu(2)}\psi = \begin{pmatrix} 0 & \psi_{14}-\psi_{23} & \psi_{11}-\psi_{33} & \psi_{21}-\psi_{34} \\ \psi_{23}-\psi_{14} & 0 & \psi_{12}-\psi_{34} & \psi_{22}-\psi_{44} \\ \psi_{33}-\psi_{11} & \psi_{34}-\psi_{12} & 0 & \psi_{23}-\psi_{14} \\ \psi_{34}-\psi_{12} & \psi_{44}-\psi_{22} & \psi_{14}-\psi_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.47}$$

pero entonces

$$\psi_\epsilon \varepsilon^{sim}_{sp} \Longrightarrow \gamma^5_{(2)} \gamma^\mu_{(1)} \gamma_{\mu(2)} \psi_\epsilon \varepsilon^{ant}_{sp} \qquad (6.48)$$

por lo que

$$\gamma^\mu_{(1)} \gamma^5_{(2)} \gamma_{\mu(2)} \varepsilon^{sim}_{sp} \quad 0 \qquad (6.49)$$

C) POR QUE NO ELIMINAMOS EN TABLA 6-2 LAS 35 FORMAS QUE SOBRAN PARA SUBTENDER $\varepsilon^{sim}_{sp}\ \varepsilon^{sim}_{sp}$?

Nuestro objetivo es en realidad intentar hallar una base para $\overline{\omega}_{sp}\ \omega^p_{sp} \psi^p_{sp}$; nos hemos detenido en $\overline{\varepsilon^{sim}_{sp}}\ \varepsilon^{sim}_{sp}$ sólo para sistematizar algo los pasos que permiten pasar de $\overline{\varepsilon_{sp}}\ \varepsilon_{sp}$ (dimensión $= 16^2 = 256$) a ω^p_{sp} (dimensión $= 6^2 = 36$). Más breve que eliminar ahora las 35 formas que sobran en $\varepsilon^{sim}\ \overline{\varepsilon^{sim}_{sp}}\ \varepsilon^{sim}_{sp}$ será eliminarlas con el mismo procedimiento (uso de Λ^V) que nos permitirá obtener una base (sin elementos sobrantes) para $\overline{\varepsilon^{simV}_{sp}}\varepsilon^{simV}_{sp}$, y de allí pasar a $\overline{\omega^p_{sp}}\ \omega^p_{sp}$ (Secc. 6.f-4, -5 y -6).

Sin embargo, por completitud indicaremos un procedimiento que permite obtener una base no superabundante para $\varepsilon^{sim}_{sp}\varepsilon^{sim}_{sp}$. La identidad de Pauli [20] puede escribirse,

$$4\ \delta_{i_1 j_2}\ \delta_{i_2 j_1} = \Big[I_{(1)} I_{(2)} + \gamma^\mu_{(1)} \gamma_{\mu(2)} + \sigma^{\mu\nu}_{(1)}\ \sigma_{\mu\nu(2)} +$$

$$+ (i\gamma^5\gamma^\mu)_{(1)}\ (i\gamma^5\gamma_\mu)_{(2)} + \gamma^5_{(1)}\gamma^5_{(2)} \Big]_{i_1 i_2 j_1 j_2} \qquad (6.50)^{**}$$

Por otra parte, por (2.31')

$$4\ \delta_{i_1 j_2}\ \delta_{i_2 j_1} \quad \varepsilon^{\widetilde{sim}}_{sp}\ 4\ \delta_{i_1 i_2}\ \ \delta_{j_1 j_2} \qquad (6.51)$$

De (6.50) y (6.51) deducimos

$$\gamma^5_{(1)}\gamma^5_{(2)} \underset{\varepsilon_{sp}^{sim}}{\simeq} 3\, I_{(1)}\, I_{(2)} - \gamma^\mu_{(1)}\,\gamma^\mu_{(2)} - \sigma^{\mu\nu}_{(1)}\,\sigma_{\mu\nu(2)} -$$

$$- (i\gamma^5\gamma^\mu)_{(1)}\,(i\,\gamma^5\gamma_\mu)_{(2)} \qquad (6.52)$$

por lo que $F^{5,5}$ puede eliminar de la tabla 6-2.

A continuación, pueden obtenerse un cierto número de relaciones "tipo identidad de Pauli" que permiten expresar $\gamma^\mu_{i_1 j_2}\delta_{i_2 j_1}$, ... como combinación lineal de las $\Gamma^A_{i_1 i_2}\,\Gamma^B_{j_1 j_2}$. Iterando el procedimiento empleado para pasar de (6.50) a (6.52), se encuentran más relaciones "tipo (6.52)", con lo cual los elementos no independientes de tabla 6-2 pueden ser puestos explícitamente como combinación lineal de los 100 restantes.

<u>6.f-4 - Definición de los operadores proyección Λ^V y Λ^{VI}. Los espacios ε_{sp}^{simV} y $\varepsilon_{sp}^{sim\ VI}$. Propiedades</u>.

Definimos

$$\Lambda^V = \frac{1}{2}\,(I + \gamma^5_{(1)}\,\gamma^5_{(2)});\quad \Lambda^{VI} = I - \Lambda^V = \frac{1}{2}\,(I - \gamma^5_{(1)}\,\gamma^5_{(2)}); \qquad (6.53)$$

son operadores proyección:

$$(\Lambda^V)^2 = \Lambda^V;\quad (\Lambda^{VI})^2 = \Lambda^{VI};\ \Lambda^V\Lambda^{VI} = \Lambda^{VI}\Lambda^V = 0\ . \qquad (6.54)$$

Efectuamos la descomposición

$$\varepsilon_{sp}^{sim} = \varepsilon_{sp}^{sim\,V} \oplus \varepsilon_{sp}^{sim\ VI}$$

mediante

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \psi^V + \psi^{VI} \in \varepsilon_{sp}^{sim} \\ \psi^V &= \Lambda^V\,\psi \in \varepsilon_{sp}^{sim\ V} \\ \psi^{VI} &= \Lambda^{VI}\,\psi \in \varepsilon_{sp}^{sim\ VI} \end{aligned}\right\} \qquad (6.55)$$

Se demuestra trivialmente:

$$\Lambda^V \gamma^5_{(1)} \gamma^5_{(2)} = \gamma^5_{(1)} \gamma^5_{(2)} \Lambda^V = \Lambda^V ; \qquad (6.56)$$

$$\gamma^5_{(1)} \Lambda^V = \gamma^5_{(2)} \Lambda^V ; \; \Lambda^V \gamma^5_{(1)} = \Lambda^V \gamma^5_{(\;)} \qquad (6.57)$$

$$\gamma^{\mu}_{(i)} \Lambda^V = \Lambda^{VI} \gamma^{\mu}_{(i)} ; \; \gamma^{\mu}_{(i)} \Lambda^{VI} = \Lambda^V \gamma^{\mu}_{(i)} ; \quad i = 1, 2; \qquad (6.58)$$

con esta última se obtiene

$$\gamma^{\mu}_{(i_1)} \gamma^{\mu 2}_{(i_2)} \cdots \gamma^{\mu_{2n}}_{(i2n)} \Lambda^V = \Lambda^V \gamma^{\mu_1}_{(i1)} \gamma^{\mu_2}_{(i2)} \cdots \gamma^{\mu_{2n}}_{(i2n)} \qquad (6.59\text{-a})$$

$$\gamma^{\mu_1}_{(i_1)} \gamma^{\mu_2}_{(i_2)} \cdots \gamma^{\mu_{2n+1}}_{(i_{2n+1})} \Lambda^V = \Lambda^{VI} \gamma^{\mu_1}_{(i_1)} \gamma^{\mu_2}_{(i_2)} \cdots \gamma^{\mu_{2n+1}}_{(i2n+1)} \qquad (6.59\text{-b})$$

donde $(i_j) = (1)$ ó (2) indistintamente; la (6.59) permanece válida con

$$\Lambda^V \longleftrightarrow \Lambda^{VI}$$

De (6.46) deducimos que en la representación usual (2.6) de las γ^{μ} es

$$\psi^V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_{11} + \psi_{33} & \psi_{12} + \psi_{34} & 2.\psi_{13} & \psi_{14} + \psi_{23} \\ \psi_{12} + \psi_{34} & \psi_{22} + \psi_{44} & \psi_{23} + \psi_{14} & 2.\psi_{24} \\ 2.\psi_{13} & \psi_{23} + \psi_{14} & \psi_{33} + \psi_{11} & \psi_{34} + \psi_{12} \\ \psi_{14} + \psi_{23} & 2.\psi_{24} & \psi_{34} + \psi_{12} & \psi_{44} + \psi_{22} \end{pmatrix} \qquad (6.60)$$

Como sólo intervienen 6 combinaciones de las ψ_{ij} es:

$$\text{dimensión } \varepsilon^{\text{simV}}_{\text{sp}} = 6 \; ; \qquad (6.61\text{-a})$$

por lo tanto,

dimensión $\varepsilon^{simV}_{sp}\,\varepsilon^{simV}_{sp} = 6^2 = 36$. (6.61-a)

<u>6.f-5 - Base (propiamente dicha para $\overline{\varepsilon^{simV}_{sp}}\,\varepsilon^{simV}_{sp}$.</u>

Como $\overline{\varepsilon^{simV}_{sp}}\,\varepsilon^{simV}_{sp}$ es un subespacio de $\overline{\varepsilon^{simV}_{sp}}\,\varepsilon^{simV}_{sp}$, $\overline{\varepsilon^{simV}_{sp}}\,\varepsilon^{simV}_{sp}$ puede ser subtendido por los 135 elementos de tabla 6-2; buscaremos relaciones entre los mismos (pensados como elementos de $\overline{\varepsilon^{simV}_{sp}}\,\varepsilon^{simV}_{sp}$) para satisfacer (6.61-b).

A) RELACIONES QUE VINCULAN ENTRE SI A DIFERENTES REPRESENTACIONES TENSORIALES DEL GRUPO DE LORENTZ.

Por (6.56),

$$\left.\begin{aligned} \gamma^5_{(1)}\gamma^5_{(2)} &\underset{\varepsilon^{simV}_{sp}}{=} I \\ (\gamma^5\gamma^\mu)_{(1)}\,(\gamma^5\gamma^\nu)_{(2)} &\underset{\varepsilon^{simV}_{sp}}{=} \gamma^\mu_{(1)}\gamma^\nu_{(2)} \end{aligned}\right\} \qquad (6.62)^{+}$$

Por (6.58),

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^\mu_{(1)} \underset{\varepsilon^{simV}_{sp}}{\sim} 0 \\ &(\gamma^5\gamma^\mu)_{(1)} \underset{\varepsilon^{simV}_{sp}}{\sim} 0 \\ &\gamma^\lambda_{(1)}\,\sigma^{\mu\nu}_{(2)} \underset{\varepsilon^{sim}_{sp}}{\sim} 0 \\ &\gamma_{(1)}\gamma^5_{(2)} \underset{\varepsilon^{simV}_{sp}}{\sim} 0 \\ &\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\,(\gamma^5\gamma^\lambda)_{(2)} \underset{\varepsilon^{simV}_{sp}}{\sim} 0 \\ &(\gamma^5\gamma^\mu)_{(1)}\gamma^5_{(2)} \underset{\varepsilon^{simV}_{sp}}{\sim} 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.63)$$

+ **La notación para igualdades se dió en Secc. 2.d-1.**

Usando (6.57) y (6.34-d) se obtiene

$$\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)} \underset{\varepsilon^{\text{sim V}}_{\text{sp}}}{=} \widetilde{(\sigma^{\mu\nu}\gamma^{5})}_{(1)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\sigma^{\alpha\beta}_{(1)} \qquad (6.64)$$

Por lo tanto, para subtender $\overline{\varepsilon^{\text{sim V}}_{\text{sp}}}\,\varepsilon^{\text{sim V}}_{\text{sp}}$ se pueden suprimir en tabla 6-2 las formas $F^{;\mu}$; $F^{;5\mu}$; $F^{\lambda;\mu\nu}$; $F^{\mu;5}$; $F^{\mu\nu;5\lambda}$; $F^{5\mu;5\nu}$ y $F^{5\mu;5}$.

B) RELACIONES QUE VINCULAN ENTRE SI A ELEMENTOS DE UNA MISMA REPRESENTACIÓN TENSORIAL.

B_1) $\underline{F^{\mu;\nu}}$

Reemplazando (6.60) en (6.45) se obtiene

$$\gamma^{\mu}_{(1)}\ \gamma_{\mu(2)} \underset{\varepsilon^{\text{sim V}}_{\text{sp}}}{=} 0\ ; \qquad (6.64'\text{-a})$$

por lo tanto en $\varepsilon^{\text{sim V}}_{\text{sp}}\varepsilon^{\text{sim V}}_{\text{sp}}$, $F^{\mu;\nu}$ <u>es de traza nula</u>:

$$F^{\mu;}{}_{\mu} = 0 \qquad (6.64'\text{-b})$$

Por lo tanto las componentes independientes de $F^{\mu;\nu}$ bajan del número máximo 10 al número máximo $10 - 1 = 9$.

B_2) $\underline{F^{\mu;5\nu}}$

De (5.64'-a) se deduce inmediatamente que

$$\gamma^{\mu}_{(1)}(\gamma^{5}\,\gamma_{\mu})_{(2)} \underset{\varepsilon^{\text{sim V}}_{\text{sp}}}{=} 0\ ; \qquad (6.65'\text{-a})$$

por lo tanto en $\varepsilon_{sp}^{\text{sim V}}$ $\varepsilon_{sp}^{\text{sim V}}$ también $F^{\mu;5\nu}$ <u>es de traza nula</u>:

$$F_{\mu}^{\mu;5} = 0 \ , \qquad (6.65'\text{-b})$$

lo cual es consecuente con (6.49).

Demostraremos ahora que $F^{\mu;5\nu}$ <u>es un tensor simétrico</u>: Por (6.57)

$$\gamma^{\mu}_{(1)}(\gamma^5\gamma^{\nu})_{(2)} = -\gamma^{\mu}_{(1)}(\gamma^{\nu}\gamma^5)_{(2)} \underset{\varepsilon_{sp}^{\text{sim V}}}{=} -(\gamma^{\mu}\gamma^5)_{(1)}\gamma^{\nu}_{(2)} =$$

$$= (\gamma^5\gamma^{\mu})_{(1)}\gamma^{\nu}_{(2)}; \qquad (6.66\text{-a})$$

usando ahora (2.31),

$$\gamma^{\mu}_{(1)}(\gamma^5\gamma^{\nu})_{(2)} \underset{\varepsilon_{sp}^{\text{sim V}}}{\sim} \gamma^{\nu}_{(1)}(\gamma^5\gamma^{\mu})_{(2)} \ . \qquad (6.66\text{-b})$$

Llamando

$$a^{\mu\nu} =_{df} F^{\mu;5\nu} \qquad (6.66\text{-c})$$

resulta

$$a^{\mu\nu} = a^{\nu\mu}. \qquad (6.66\text{-d})$$

Las (6.65'-b) y (6.66-d) bajan el número máximo de componentes independientes de $F^{\mu;5\nu}$ de 16 a $16-1-6 = 9$.

B$_3$) <u>$F^{\mu\nu;\lambda\rho}$</u>

Las <u>propiedades de simetría</u> de $F^{\mu\nu;\lambda\rho}$ son

$$F^{\mu\nu;\lambda\rho} = F^{\lambda\rho;\mu\nu} \qquad (6.67\text{-a})$$

$$F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -F^{\nu\mu;\lambda\rho}; \quad F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -F^{\mu\nu;\rho\lambda} \qquad (6.67\text{-b})$$

$$F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu},{}_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\lambda\rho},{}_{\gamma\delta}\,F^{\alpha\beta;\gamma\delta} \qquad (6.67\text{-c})$$

Las dos primeras son consequencias triviales de (6.43); la 3a. se puede demostrar usando (6.57) y (6.34-d):

$$\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\,\sigma^{\lambda\rho}_{(2)} \underset{\varepsilon_{sp}^{\text{sim V}}}{=} (\sigma^{\mu\nu}\gamma^5)_{(1)}(\sigma^{\lambda\rho}\gamma^5)_{(2)} = (-\tfrac{i}{2})^2\varepsilon^{\mu\nu},{}_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\lambda\rho},{}_{\gamma\delta}\,\times$$

$$\times\ \sigma^{\alpha\beta}_{(1)}\,\sigma^{\gamma\delta}_{(2)} \qquad (6.67\text{-c}')$$

Escribiendo todos los elementos de $F^{\mu\nu;\lambda\rho}$ y usando (6.67) puede verse que $F^{\mu\nu,\lambda\rho} \epsilon\, \varepsilon_{sp}^{sim\,V}\, \varepsilon_{sp}^{sim\,V}$ tiene a lo sumo 12 componentes independientes; pueden p. ej. elegirse

$F^{01;01}$ $F^{01;02}$ $F^{01;01}$ $F^{01;12}$ $F^{01,13}$ $F^{01;}$ F $F^{02,02}$ $F^{02;03}$
$F^{02;12}$ $F^{02;13}$ $F^{03;03}$ $F^{03;12}$

Una consecuencia de (6.67-c') es

$$\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\, \sigma_{\mu\nu(2)} = 4\, \vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} \underset{\varepsilon_{sp}}{\overset{=}{sim}} \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\alpha}_{(2)} \qquad (6.67\text{-c}'')$$

donde como es habitual indicamos

$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}$; $\sigma^i = \sigma^{jk}$, ijk = 123 y permutaciones cíclicas. (6.67')**

C) NUEVAS RELACIONES QUE VINCULAN ENTRE SI A DIFERENTES REPRESENTACIONES TENSORIALES DEL GRUPO DE LORENTZ.

En A6-4 demostramos

$$\vec{\sigma}_{(1)}\ \ \vec{\sigma}_{(2)} \underset{\varepsilon_{sp}}{\overset{=}{sim}} I\ ; \qquad (6.67''\text{-a})$$

por (6.67-c") es lo mismo poner

$$\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\alpha}_{(2)} \underset{\varepsilon_{sp}}{\overset{=}{sim}} I \qquad (6.67''\text{-b})$$

$$\frac{1}{4}\, \sigma^{\mu\nu}_{(1)}\, \sigma_{\mu\nu(2)} \underset{\varepsilon_{sp}^{sim\,V}}{=} I \qquad (6.67''\text{-c})$$

También demostramos en A6-4 que

$$\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\, \sigma^{\lambda\rho}_{(2)}\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda o} \underset{\varepsilon_{sp}}{\overset{=}{sim}} V\, 8\, i\, \gamma^5_{(2)} \qquad (6.67'')$$

D) OBTENCIÓN DE UNA BASE PARA $\overline{\varepsilon_{sp}^{sim\,V}}\ \ \varepsilon_{sp}^{sim\,V}$

Hay 36 elementos independientes de tabla 6-2 que sobreviven como independientes frente a las relaciones halladas en A, B y C los cuales subtienden a $\overline{\varepsilon^{\mathrm{sim}\,V}_{sp}}\;\varepsilon^{\mathrm{sim}\,V}_{sp}$ (pues los elementos de tabla 6-2 subtienden a $\overline{\varepsilon^{\mathrm{sim}V}_{sp}}\;\varepsilon^{\mathrm{sim}V}_{sp}$). Pero por (6.61-b) la dimensión de $\overline{\varepsilon^{\mathrm{sim}\,V}_{sp}}\;\varepsilon^{\mathrm{sim}V}_{sp}$ es justamente 36; por lo tanto, no puedan existir nuevas relaciones que disminuyan aún más dicho número: esos 36 elementos forman base en $\overline{\varepsilon^{\mathrm{sim}V}_{sp}}\,\varepsilon^{\mathrm{sim}V}_{sp}$. De tablas 6-1 y 6-2 y de A, B y C obtenemos una selección posible:

TABLA 6-3

BASE (PROPIAMENTE DICHA) PARA $\overline{\varepsilon^{\mathrm{sim}V}_{sp}}\;\varepsilon^{\mathrm{sim}\,V}_{sp}$

Forma bilineal	Abreviaturas	Número de componentes independientes	Relaciones entre elementos de una misma representacion tensorial
$\overline{\psi}\, I_{(1)}\sigma^{\mu\nu}\varphi$	$F^{;\mu\nu}$	6	$F^{;\mu\nu} = -F^{;\nu\mu}$
$\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}_{(1)}\,\gamma^{\nu}_{(2)}\,\varphi$	$F^{\mu;\nu}$	9	$F^{\mu;\nu} = F^{\nu;\mu}$; $F^{\mu;}_{\mu} = 0$
$\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}_{(1)}(\gamma^5\gamma^{\nu})_{(2)}\,\varphi$	$F^{\mu;5\nu}$	9	$F^{\mu;5\nu} = F^{\nu;5\mu}$; $F^{\mu;5}_{\mu} = 0$
$\overline{\psi}\;\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\sigma^{\lambda\rho}_{(2)}$	$F^{\mu\nu;\lambda\rho}$	12	$F^{\mu\nu;\lambda\rho} = F^{\lambda\rho;\mu\nu}$ $F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -F^{\nu\mu;\lambda\rho}$ $F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -F^{\mu\nu;\rho\lambda}$ $F^{\mu\nu;\lambda\rho} = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\lambda\rho}{}_{\gamma\delta}\quad F^{\alpha\beta;\gamma\delta}$

Completamos resumiendo las relaciones que permiten expresar a los <u>restantes</u> elementos de tabla 6-2 en términos de la base hallada para $\overline{\varepsilon^{\mathrm{sim}\,V}_{sp}}\;\varepsilon^{\mathrm{sim}V}_{sp}$:

TABLA 6-4

LAS FORMAS BILINEARES QUE SUBTIENDEN $\overline{\varepsilon^{sim}_{sp}}\,\varepsilon^{sim}_{sp}$ PERO QUE NO PERTENECEN A LA BASE HALLADA PARA $\overline{\varepsilon^{simV}_{sp}}\,\varepsilon^{simV}_{sp}$ SE DESARROLLAN EN TERMINOS DE ESTA

Forma bilineal	Abreviatura	Su desarrollo según la base dada en Tabla 6-3
$\overline{\psi}\,\varphi$	$F^{;}$	$= \frac{1}{4}\,F^{\mu\nu;}{}_{\mu\nu}$
$\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}_{(2)}\,\varphi$	$F^{;\mu}$	$= 0$
$\overline{\psi}\gamma^{5}\gamma^{\mu}\varphi$	$F^{;5\mu}$	$= 0$
$i\ \overline{\psi}\gamma^{5}_{(2)}\,\varphi$	$F^{;5}$	$= +\frac{1}{8}\,F^{\mu\nu;\lambda\rho}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$
$\overline{\psi}\,\gamma^{\lambda}_{(1)}\sigma^{\mu\nu}_{(2)}\,\varphi$	$F^{\lambda;\mu\nu}$	$= 0$
$i\ \overline{\psi}\gamma^{\mu}_{(1)}\,\gamma^{5}_{(2)}\,\varphi$	$F^{\mu;5}$	$= 0$
$\overline{\psi}\,(\gamma^{5}\ \gamma^{\lambda})_{(2)}\,\varphi$	$F^{\mu\nu;5\lambda}$	$= 0$
$i\ \overline{\psi}\ \sigma^{\mu\nu}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\,\varphi$	$F^{\mu\nu;5}$	$= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta}\quad F^{;\alpha\beta}$
$\overline{\psi}(\gamma^{5}\gamma^{\mu})_{(1)}\ (\gamma^{5}\gamma^{\nu})_{(2)}\varphi$	$F^{5\mu;5\nu}$	$= F^{\mu;\nu}$
$i\ \overline{\psi}(\gamma^{5}\gamma^{\mu})_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\,\varphi$	$F^{5\mu;5}$	$= 0$
$-\ \overline{\psi}\gamma^{5}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\,\varphi$	$F^{5;5}$	$= -\frac{1}{4}\,F^{\mu\nu;}{}_{\mu\nu}$

6.f-6 - Desarrollo de los elementos de $\omega^{p'}_{sp}\,\omega^{p}_{sp}$ como combinación lineal de representaciones tensoriales del grupo de Lorentz

Trabajaremos con ondas de p^{μ} bien definido; en esta Secc. $p^{0} = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^{2}}$; sean $\varphi(p)\in\omega^{p}_{sp}$, $\psi(p')\in\omega^{p'}_{sp}$ y M = matriz arbitraria. Es,

$$\overline{\psi}(p')\,M\varphi(p) = \left[\overline{\psi^{V}(p')+\psi^{VI}(p')}\right]\ M\left[\varphi^{V}(p)+\varphi^{VI}(p)\right]. \qquad (6.68)$$

Pero

$$p_{\beta}\ \gamma^{\beta}_{(i)}\,\varphi(p) = m\ \varphi(p), \qquad i = (1,2); \qquad (6.69)^{**}$$

multiplicando por Λ^V o Λ^{VI} y usando (6.58) se obtiene

$$p_\beta \gamma^\beta_{(i)} \varphi^{VI}(p) = m\, \varphi^V(p); \quad p_\beta \gamma^\beta_{(i)} \varphi^V(p) = m\, \varphi^{VI}(p); \; i = 1,2 \tag{6.70-a}$$

Cambiamos $\varphi(p) \longrightarrow \psi(p')$ y tomamos adjuntos:

$$p'_\alpha \bar{\psi}^{VI}(p') \gamma^\alpha_{(i)} = m\, \bar{\psi}^V(p'); \; p'_\alpha \bar{\psi}^V(p') \gamma^\alpha_{(i)} = m\, \bar{\psi}^{VI}(p'); \; i = 1,2 \tag{6.70-b}$$

En (6.68)

$$\bar{\psi}(p')\, M\, \varphi(p) = \bar{\psi}^V(p')\, \hat{M}(p,\, p')\, \varphi^V(p) \tag{6.71-a}$$

donde abreviamos

$$\hat{M}(p,\, p') =_{df} \left[I + \frac{1}{m}\, p'_\alpha\, \gamma^\alpha_{(i)}\right] M \left[I + \frac{1}{m}\, p_\beta\, \gamma^\beta_{(j)}\right], \; i,\; j = 1,\; 2. \tag{6.71-b}$$

Por Secc. 6.f-5 $\bar{\psi}^V\, \hat{M}\, \varphi^V$ puede desarrollarse unívocamente en la base de tabla 6-3:

$$\begin{aligned}\psi^V(p')\, \hat{M}(p,\, p')\, \varphi^V(p) - a_{\mu\nu}(p,\, p')\, \psi^V(p')\, \sigma^{\mu\nu}_{(2)}\, \varphi^V(p) &+ \\ b_\nu + b_\mu(p,\, p')\, \bar{\psi}^V(p')\, \gamma^\mu_{(1)}\, \gamma^\nu_{(2)}\, \varphi^V(p) &+ \\ + c_{\mu\nu}(p,\, p')\, \psi^V(p')\, \gamma^\mu_{(1)} (\gamma^5 \gamma^\nu)_{(2)}\, \varphi^V(p) &+ \\ + d_{\mu\nu\lambda\rho}(p,\, p')\, \psi^V(p')\, \sigma^{\mu\nu}_{(1)}\, \sigma^{\lambda\rho}_{(2)} \quad \varphi^V(p) &\end{aligned} \tag{6.72}$$

donde $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ y $d_{\mu\nu\lambda\rho}$ son los coeficientes, y carecen de índices spinoriales.

Reemplazando en (6.71) queda finalmente

$$\boxed{\begin{aligned}\psi(p')\, M\varphi(p) = \;(p')\, \Lambda^V \Big[& a_{\mu\nu}(p,\, p')\, \sigma^\mu_{(2)} + \\ & + b_{\mu\nu}(p,\, p')\, \gamma^\mu_{(1)}\, \gamma^\nu_{(2)} + \\ & + c_{\mu\nu}(p,\, p')\, \gamma^\mu_{(1)}\, (\gamma^5 \gamma^\nu_{(2)}) + \\ & + d_{\mu\nu\lambda\rho}(p,\, p')\, \sigma^{\mu\nu}_{(1)}\, \sigma^\lambda_{(2)} \Big] \qquad \Lambda^V \varphi(p), \\ \Lambda^V = \frac{1}{2}\, (I + \gamma^5_{(1)}\, \gamma^5_{(2)}). & \qquad\qquad (6.74)^+\end{aligned}}$$

+ A primera vista parecería haber error, ya que $\bar{\psi} M \varphi$ pueden ser p. ej. un vector, mientras que en las F que aparecen en el 2º miembro de (6.74) no hay ningún vector (cf. tabla 6-1). Pero no hay tal, porque las $a_{\mu\nu}, \ldots$ pueden ser e.g. vectores. Ver ejemplos en Secc. 6-f-7.

Con (6.74) nos hemos acercado a los objetivos enunciados en Secc. 6.f-1. Observese, de paso, que no se ha roto el caracter manifiesto de la covariancia relativista.

Pero (6.74) no es el desarrollo del 1er. miembro en elementos de una base, porque falla la unicidad. El desarrollo de $\bar{\psi}\,\Lambda^V\, M\, \Lambda^V \varphi$ según la base de tabla 6-3 es único, pero para $\hat{M}$ fijo, $\hat{M}$ no es única. En efecto en (6.71-b) podemos poner o bien $i = 1$, $j = 1$, o bien $i = 1$, $j = 2$, etc.

Por que perdimos la unicidad ? Por haber especificado p^μ. Aclaremos pasando a spin 1/2: Allí, si ψ y φ son arbitrarios, $\bar{\psi}\varphi$ no es combinación de las $\psi\gamma^\alpha\varphi$; pero si φ tiene momento $\vec{p}$ y signo de la energía p^0 bien definidos, es $p_\alpha \bar{\psi}(p')\gamma^\alpha \varphi(p) =$ $= m\,\bar{\psi}(p')\,\varphi(p)$, o sea se pierde la unicidad del desarrollo de una forma bilineal en término de las (6.27).

La utilidad de (6.74) no está en la unicidad (que no tiene), sino en asegurar a $\bar{\psi} M \varphi$ un desarrollo covariante en 36 sumandos en lugar dos 135 de tabla 6-2.

6.f-7 - Ejemplos

A) $M = I$

A_1) En (6.71-a) pongo $i = j = 1$:

$$\hat{I} = \left[I + \frac{1}{m}\, p'_\alpha\, \gamma^\alpha_{(1)} \right] \left[I + \frac{1}{m}\, p_\beta\, \gamma^\beta_{(1)} \right]$$

Desarrollando y usando

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta = g^{\alpha\beta} - i\,\sigma^{\alpha\beta}, \qquad (6.75)^{**}$$

se obtiene

$$\hat{I} = I + \frac{1}{m}(p_\alpha + p'_\alpha)\gamma^\alpha_{(1)} + \frac{1}{m^2}p'_\alpha p^\alpha I - \frac{1}{m^2}\sigma^{\alpha\beta}_{(1)} p'_\alpha \; p_\beta \tag{6.76}$$

Reemplazamos en (6.71-a) y usamos tablas 6-3 y 6-4:

$$\psi(p')\varphi(p) = \Psi(p')\Lambda^V\left[\frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\sigma_{\mu\nu(2)}\left(1 + \frac{p'^\alpha p_\alpha}{m^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{i\sigma^{\alpha\beta}_{(2)}}{m^2} p'_\alpha \, p_\beta\right]\Lambda^V \varphi(p) \tag{6.77}$$

A_2) En (6.71) pongo $i = 1$, $j = 2$.

$$\hat{I} = \left[I + \frac{1}{m}p'_\alpha \gamma^\alpha_{(1)}\right]\left[I + \frac{1}{m}p_\beta \gamma^\beta_{(2)}\right]$$

$$= I + \frac{1}{m}(p'_\alpha \gamma^\alpha_{(1)} + p_\beta \gamma^\beta_{(2)}) + \frac{1}{m^2}p'_\alpha \, p_\beta \gamma^\alpha_{(1)}\gamma^\beta_{(2)}$$

En (6.71-a) y usando las tablas 6-3 y 6-4,

$$\overline{\Psi}(p')\varphi(p) = \overline{\Psi}(p')\Lambda^V\left[\frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\sigma_{\mu\nu(2)} + \frac{1}{m^2}p'_\alpha \, p_\beta \gamma^\alpha_{(1)}\gamma^\beta_{(2)}\right]\Lambda^V \varphi(p). \tag{6.78}$$

<u>Sobre la unicidad</u>:

Tanto (6.77) como (6.78) son del tipo (6.74), pero con coeficientes diferentes. Claroque son iguales: Usando

$$p_\beta \gamma^\beta_{(1)}\varphi^V = p_\beta \gamma^\beta_{(2)}\varphi^V$$

ambas se reducen a

$$\overline{\Psi}(p')\varphi(p) = \overline{\Psi}(p')\Lambda^V\left[\frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\sigma_{\mu\nu(2)}\left(1 + \frac{p'^\alpha p_\alpha}{m^2}\right)\right]\Lambda^V \varphi(p) \tag{6.79}$$

B) <u>$M = \gamma^\mu_{(1)}$</u>

B_1) En (6.71) pongo $i = j = 1$.

$$\hat{\gamma}^{\mu} = \left[I + \frac{1}{m} p'_{\alpha} \gamma^{\alpha}_{(1)} \right] \gamma^{\alpha}_{(1)} \left[I + \frac{1}{m^2} p_{\beta} \gamma^{\beta}_{(1)} \right] =$$

$$= \frac{1}{m} p'_{\alpha} \gamma^{\alpha}_{(1)} \gamma^{\mu}_{(1)} + \frac{1}{m} p_{\beta} \gamma^{\mu}_{(1)} \gamma^{\beta}_{(1)} + \cdots$$

donde los puntos suspensivos indican sumandos que por tabla 6-4 no contribuirán a (6.72). Reemplazando en (6.71-a) y usando (6.75),

$$\psi(p) \gamma^{\mu} \varphi(p) = \frac{1}{m} \overline{\psi}(p') \left[p'^{\mu} + p^{\mu} - i(p'_{\alpha} - p_{\alpha}) \sigma^{\alpha\mu}_{(1)} \right] \varphi(p) \tag{6.80}$$

B_2) En (6.71) pongo $i = 1$, $j = 2$.

$$\hat{\gamma}^{\mu} = \left[I + \frac{1}{m} p'_{\alpha} \gamma^{\alpha}_{(1)} \right] \gamma^{\mu}_{(1)} \left[I + \frac{1}{m} p_{\beta} \gamma^{\beta}_{(2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{m} p'_{\alpha} \gamma^{\alpha}_{(1)} \gamma^{\mu}_{(1)} + \frac{1}{m} p_{\beta} \gamma^{\mu}_{(1)} \gamma^{\beta}_{(2)} =$$

$$= \frac{1}{m} p'_{\mu} - \frac{i}{m} p'_{\alpha} \sigma^{\alpha\mu}_{(1)} + \frac{1}{m} p \gamma^{\mu}_{(1)} \gamma^{\beta}_{(2)}$$

$$\overline{\psi}(p') \gamma^{\mu} \varphi(p) = \frac{1}{m} \overline{\psi}(p') \left[p'^{\mu} - i\, p'_{\alpha} \sigma^{\alpha\mu}_{(2)} + p_{\beta} \gamma^{\mu}_{(1)} \gamma^{\beta}_{(2)} \right] \varphi(p) \tag{6.81}$$

Cabe discusión similar sobre la unicidad.

6.g - APLICACIÓN: LA CORRIENTE

En Secc. 3.b hemos recordado que la corriente es (3.2)

$$j^{\mu} = \overline{\psi} \gamma^{\mu}_{(1)} \psi$$

Como en spin 1 tenemos más covariantes matriciales (36) que en spin 1/2 (16) puede uno indagar, si no existe otro vector j'^{μ} tal que

$$\partial_{\mu} j'^{\mu} = 0 \tag{6.82}$$

La respuesta es: <u>El único 4-vector que puede escribirse</u>

sin usar derivadas y que satisface (6.82) es $j'^{\mu} = a\, j^{\mu}$. a = = número.

Escribimos "... puede escribirse sin usar derivadas ..." porque debido a la existencia de componentes redundantes una forma bilineal $\overline{\psi} M \varphi$ con M = matriz pura puede reescribirse en una forma equivalente que incluya los p (ver (6.80) y (6.81)).

En efecto: El 4-vector más general que puede escribirse sin usar p^{μ} lo obtenemos de tabla 6-2.

$$j^{\mu} = a\, F^{\mu} + b\, F^{\lambda;\mu} + c\, F^{5\mu;5}$$

$$= \overline{\psi}(x)\left[a\, \gamma^{\mu}_{(2)} + b\gamma^{\lambda}_{(1)}\, \sigma_{(2)\lambda}{}^{\mu} + i\, c\, \gamma^{5}_{(1)}\, \gamma^{\mu}_{(1)}\, \gamma^{5}_{(2)}\right]\psi(x) \tag{6.83}$$

donde $\psi \epsilon \omega$ y a, b y c son números.

Por que escribimos el vector más general perteneciente a ε^{sim} ε^{sim} si nuestra ψ pertenecen al subespacio ω de ε^{sim} ? Porque si explicitamos que $\psi \epsilon \omega$, las componentes redundantes hacen que una misma forma puede escribirse con o sin p^{μ}. En cambio, si $\psi \epsilon \omega$ es $\psi \epsilon\, \varepsilon^{sim}$, y en este espacio no se plantean esas ambiquedades (recordar que trabajamos con el vector más general que puede escribirse sin p^{μ}).

Calculamos $\partial_{\mu}\, j'^{\mu}$ usando las (1.1) de BW y la ecuación adjunta (1.10).+ El resultado es

$$\partial_{\mu}\, j'^{\mu} = 2m\, \overline{\psi}\left[b\, (I + \gamma^{\lambda}_{(1)}\gamma_{(2)}) + c\, \gamma^{5}_{(1)}\, \gamma^{5}_{(2)}\right]\psi$$

Una $\psi\, \epsilon\, \omega$ es la $\psi^{(1)}_{1}$ de (3.58-c) para la cual podemos elegir $p^{k} \simeq 0$; entonces la única componente "grande" en el límite no

+ **Por (1.4) puede usarse $\gamma^{\mu}_{(2)}$ en lugar de $\gamma^{\mu}_{(1)}$ en (1.10).**

relativista es $\left(\psi_1^{(1)}\right) = 1$. Para esa ψ,

$$\partial_\mu j'^\mu = 2m \left[b(I + \gamma^\lambda_{(1)} \gamma_{(2)\lambda}) + c\, \gamma^5_{(1)} \gamma^5_{(2)} \right]_{1,11} = 4mb.$$

La (6.82) $\Longrightarrow$ $b = 0$ (6.84-a)

(basta una ψ que viole (6.82) para obligar $b = 0$).

Otra ψ posible es la $\psi_1^{(-1)}$ de (3.58-c) cuya única componente "grande" en el límite no relativista es $(\psi_1^{(-1)})_{33} = 1$. Para esa ψ,

$$\partial_\mu j'^\mu = 2m\,(c - b)\ .$$

Usando $b = 0$ queda

$$c = 0 \qquad (6.84\text{-b})$$

Reemplazando en (6.83) queda probado que el 4-vector más general que cumple las propiedades requeridas es [+]

$$j'^\mu = a\, j^\mu = a\, \bar\psi\, \gamma^\mu_{(1)} \psi \qquad (6.85)$$

+ Hemos usado (2.31) para reemplazar $\gamma^\mu_{(2)}$ por $\gamma^\mu_{(1)}$.

CAPÍTULO SEPTIMO

CONEXION CON OTROS FORMALISMOS

7.a - INTRODUCCIÓN

La traducción de resultados desde el formalismo de BW a otros formalismos es tediosa. En particular, el pasaje al formalismo de Proca (1.7') de ciertas formas bilineales $\overline{\psi} M \varphi$ es bastante engorrosa. Por ello efectuamos de una vez por todas ciertas traducciones. Necesitaremos algunas para confrontar nuestra teoría de campos (Cap. 8) con la usual. Incluímos otras por completitud.

7.b - DICCIONARIO DE TRADUCCIÓN ENTRE EL FORMALISMO DE BW Y EL PROCA.

7.b-1 - Introducción

Las ecuaciones de Proca son las (1.7'), (1.7"). Se puede pasar de las ecuaciones de Proca a las de BW de la siguiente manera [17]: Se definen U_μ y

$$G_{\mu\nu} = - G_{\nu\mu} \tag{7.1}**$$

tales que

$$\psi = \frac{1}{2m} \left(U_\mu \gamma^\mu + \tfrac{1}{2} G_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu\right)\gamma^5 \mathcal{B}^{-1} \tag{7.2}**$$

donde $\mathcal{B}_{ij}$ es una matriz que cumple (T = transpuesto)

$$\gamma^{\mu T} = \mathcal{B} \gamma^\mu \mathcal{B}^{-1} \tag{7.3-a}**$$

resulta

$$\mathcal{B}^T = - \mathcal{B} \tag{7.3-b}**$$

Basta luego multiplicar (7.2) por operadores adecuados y tomar trazas para demostrar que si ψ cumple las ecuaciones de BW, U_μ y $G_{\mu\nu}$ cumplen las de Proca.

Hemos encontrado que una representación es

$$\mathcal{B} = \sigma^2 \tag{7.3-c}$$

que cumple la relación lícita, pero no forzosa,

$$\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} \tag{7.4}$$

<u>7.b-2 - Traducción de las formas bilineares $\overline{\psi} M \varphi$. Procedimiento general</u>.

Queremos traducir las formas de la tabla 6-2. Usamos (1.3):

$$\overline{\psi'} M_{(1)} N_{(2)} \psi = \psi'^+ \gamma^o_{(1)} \gamma^o_{(2)} M_{(1)} N_{(2)} \psi =$$

$$= (\gamma^{oT} \psi^+ \gamma^o)(M \psi N^T);$$

reemplazamos ψ y ψ' por sus desarrollos (7.2):

$$\overline{\psi} M_{(1)} N_{(2)} \varphi = \frac{1}{4m^2} \operatorname{Tr} \gamma^{oT} \mathcal{B} \gamma^5 (U'^*_\mu \gamma^{\mu +} - \tfrac{1}{2} G^*_{\mu\nu} \gamma^{\nu +} \gamma^{\mu +}) \gamma^o M \times$$

$$\times (U_\alpha \gamma^\alpha + \tfrac{1}{2} G_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta) \gamma^5 \mathcal{B}^+ N^T. \tag{7.5}$$ +

Sea N una de las matrices I, γ^μ, $\sigma^{\mu\nu}$, $\gamma^5 \gamma^\mu$, γ^5; obtenemos

$$N^T = \omega \, \mathcal{B} \, N \mathcal{B}^+ \tag{7.6-a}$$

con

$$\omega_I = \omega_{\gamma\mu} = \omega_{\gamma 5} = + 1, \quad \omega_{\sigma_{\alpha\beta}|\alpha \neq \beta} = \omega \gamma^5 \gamma^\mu = - 1. \tag{7.6-b}$$

De (7.3) y de $\gamma^{oT} \mathcal{B} = \mathcal{B} \gamma^o =$ en (7.5),

$$\overline{\psi'} M_{(1)} N_{(2)} = \frac{\omega}{4m^2} \operatorname{Tr} \mathcal{B} \gamma^o \gamma^5 (U^*_\mu \gamma^{\mu +} - \tfrac{1}{2} G_{\mu\nu} \gamma^{\nu +} \gamma^{\mu +}) \gamma^o M \times$$

$$\times (U_\alpha \gamma^\alpha + \tfrac{1}{2} G_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta) \gamma^5 N \mathcal{B}^+ \tag{7.7}$$

+ La traza del 2º miembro está implícita en el 1º (cf. Secc. 1.c).

Usando (7.3-a) y (7.4) obtenemos finalmente

$$\overline{\psi}' M_{(1)} N_{(2)} \psi = -\frac{\omega_N}{4m^2} \mathrm{Tr}(U'^{*}_{\mu}\gamma^{\mu} - \tfrac{1}{2} G^{*}_{\mu\nu}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) \, M(U_{\alpha}\gamma^{\alpha} + \tfrac{1}{2} G_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}) \, \gamma^5 N \gamma^5 \tag{7.8}$$

En lo que resta de la Secc. 7.b-2 aplicamos (7.8) a los diversos casos $M = I$, $N = I$; $M = I$, $N = \gamma^{\mu}$, ...; $M = \gamma^5$, $N = \gamma^5$. Los cálculos son directos; no los incluímos porque seguimos nos bien conocidos métodos para el cálculo de trazas, y, en total, resultan bastante largos.

Damos los resultados. Para los tensores de menor rango incluímos la escritura tridimensional.

A) ESCALAR $F^{;}$

$$F^{;} = \overline{\psi}'\psi = -\frac{1}{m^2} U'^{*}_{\mu} U^{\mu} - \frac{1}{2m^2} G'^{*}_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta}; \tag{7.9-a}$$

escritura 3-dimensional:

$$F^{;} = \frac{1}{m^2} (-V'^{*}V + \vec{U}'^{*} \cdot \vec{U} + \vec{E}'^{*} \cdot \vec{E} - \vec{H}'^{*} \vec{H}). \tag{7.9-b}$$

B) ESCALAR $F^{5;5}$

$$F^{5;5} = \overline{\psi}'\gamma^5_{(1)}\gamma^5_{(2)}\psi = -\frac{1}{m^2} U'^{*} U + \frac{1}{2m^2} G'^{*}_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta}; \tag{7.10-a}$$

escritura 3-dimensional:

$$F^{5;5} = \frac{1}{m^2} (-V'^{*}V + \vec{U}'^{*}\vec{U} - \vec{E}'^{*}\vec{E} + \vec{H}'^{*}\vec{H}) . \tag{7.10-b}$$

C) PSEUDOESCALAR $F^{;5}$

$$F^{;5} = i\, \psi' \,\gamma^5(2)\psi = -\frac{1}{4m^2} G'^{*}_{\mu\nu} G_{\alpha\beta}\, \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}; \tag{7.11-a}$$

escritura 3-dimensional:

$$F^{;5} = \frac{1}{m^2}(\vec{E}'^{*}\cdot\vec{H} + \vec{E}\cdot\vec{H}'^{*}) \qquad (7.11\text{-b})$$

D) VECTOR $F^{;\mu}$

$$F^{;\mu} = \psi^{\mu}\gamma^{\mu}_{(2)}\psi = \frac{i}{m^2}(G'^{*\mu\nu}\ U_{\nu} - G^{\mu\nu}\ U'^{+}_{\nu}); \qquad (7.12\text{-a})$$

escritura 3-dimensional:

$$\left.\begin{aligned} F^{;0} &= \overline{\psi}'\ \gamma^{0}_{(2)}\ \psi = \frac{i}{m^2}(\vec{E}'^{*}\cdot\vec{U} - \vec{E}\cdot\vec{U}'^{*}); \\ \overline{\psi}'\vec{\gamma}_{(2)}\psi &= \frac{i}{m^2}(\vec{E}'^{*}V - \vec{E}\cdot V'^{*}) + \frac{i}{m^2}(\vec{U}\times\vec{H}'^{*} - \vec{U}'^{*}\times\vec{H}) \end{aligned}\right\} (7.12\text{-b})$$

E) VECTOR $F^{;5\mu;5}$

$$F^{5\mu;5} = i\ \overline{\psi}'\ \gamma^{5}_{(1)}\gamma^{\mu}_{(1)}\gamma^{5}_{(1)}\psi = \frac{1}{m^2}(U'^{*}_{\alpha}\ G^{\alpha\mu} + G'^{*}\quad) \qquad (7.13\text{-a})$$

escritura 3-dimensional:

$$\left.\begin{aligned} i\ \overline{\psi}'\ \gamma^{5}_{(1)}\gamma^{0}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\psi &= -\frac{1}{m^2}(\vec{U}'^{*}\cdot\vec{E} + \vec{E}'^{*}\cdot\vec{U}) \\ i\overline{\psi}'\gamma^{5}_{(1)}\vec{\gamma}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\psi &= \frac{1}{m^2}(-\vec{E}'^{*}V - \vec{E}V'^{*} + \vec{H}'^{*}\times\vec{U} + \vec{H}\times\vec{U}'^{*}) \end{aligned}\right\}$$

F) PSEUDOVECTOR $F^{;5\mu;}$

$$F^{;5\mu} = \overline{\psi}'\gamma^{5}_{(2)}\gamma^{\mu}_{(2)}\psi = -\frac{1}{2m^2}(U'^{*}_{\lambda}\ G_{\alpha\beta} + G'^{*}_{\alpha\beta}\ U_{\lambda})\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}; \qquad (7.14\text{-a})$$

escritura 3-dimensional:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\psi}'\ \gamma^{5}_{(2)}\gamma^{0}_{(2)}\psi &= \frac{1}{m^2}(\vec{U}'^{*}\cdot\vec{H} + \vec{H}'^{*}\vec{U}) \\ \overline{\psi}'\ \gamma^{5}_{(2)}\vec{\gamma}_{(2)}\psi &= \frac{1}{m^2}\Big[-(V'^{*}\vec{H} + V\ \vec{H}'^{*}) - (\vec{E}\times\vec{U}'^{*} + \vec{E}'^{*}\times\vec{U})\Big] \end{aligned}\right\} (7.14\text{-b})$$

G) PSEUDOVECTOR $F^{\mu;5}$

$$F^{\mu;5} = i\overline{\psi}'\gamma^{\mu}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\psi = \frac{i}{2m^2}(U'^{*}_{\lambda}G_{\alpha\beta} - G'^{*}_{\alpha\beta}\ U_{\lambda})\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}; \qquad (7.15\text{-a})$$

$$i\,\overline{\psi}'\gamma^{0}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\psi = \frac{i}{m^2}\,(-\vec{U}'^{*}\,\vec{H} + \vec{H}'^{*}\vec{U})$$

$$i\,\overline{\psi}'\vec{\gamma}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\psi = \frac{i}{m^2}\,(V'^{*}\,\vec{H} - V\vec{H}'^{*}) + (\vec{E}\times\vec{U}'^{*} - \vec{E}'^{*}\times\vec{U}) \qquad (7.15\text{-b})$$

H) TENSOR ANTISIMETRICO DE 2° ORDEN $F^{;\mu\nu}$

$$F^{;\mu\nu} = \overline{\psi}'^{*}\,\sigma^{\mu\nu}_{(2)}\psi = \frac{i}{m^2}\left[(-U'^{*\mu}U^{\nu} + U'^{*\nu}U^{\mu}) + (G'^{*\mu\alpha}G^{\nu}_{\alpha} - G'^{*\nu\alpha}G^{\mu}_{\alpha})\right] \qquad (7.16\text{-a})$$

escritura 3-dimensional:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\psi}'^{*}\,\vec{\sigma}_{(2)}\psi &= \frac{i}{m^2}\,(-\vec{U}'^{*}\times\vec{U} + \vec{H}'^{*}\times\vec{H}) \\ \overline{\psi}'^{*}\,i\,\vec{\alpha}_{(2)}\psi &= \frac{i}{m^2}\left[(\vec{U}'^{*}V - V'^{*}\vec{U}) + (\vec{E}'^{*}\times\vec{H} - \vec{E}\times\vec{H}'^{*})\right] \end{aligned}\right\} \qquad (7.16\text{-b})$$

I) TENSOR SIMETRICO DE 2° ORDEN $F^{\mu;\nu}$

$$F^{\mu;\nu} = \overline{\psi}'^{*}\gamma^{\mu}_{(1)}\gamma^{\nu}_{(2)}\psi =$$

$$= \frac{1}{m^2}\Big[(U'^{*\mu}U^{\nu} + U'^{*\nu}U^{\mu} - U'^{*\alpha}U_{\alpha}g^{\mu\nu}) +$$

$$+ (G'^{*\mu\alpha}G^{\nu}_{\alpha} + G'^{*\nu\alpha}G^{\mu}_{\alpha} + \tfrac{1}{2}G'^{*\alpha\beta}G_{\alpha\beta}\,g^{\mu\nu})\Big] \qquad (7.17\text{-a})$$

escritura 3-dimensional:

$$F^{1;2} = \frac{1}{m^2}\Big[(U'^{*1}U^{2} + U'^{*2}U^{1}) + (E'^{*1}E^{2} + E^{1}E'^{*2}) -$$

$$- (H'^{*1}H^{2} + H'^{*2}H^{1})\Big] \quad \text{y permutaciones sobre } 1,2,3;$$

$$\left.\begin{aligned} F^{0;b} &= \frac{1}{m^2}\,(V'^{*}\vec{U} + \vec{U}'^{*}V + \vec{E}'^{*}\times\vec{H} + \vec{E}\times\vec{H}'^{*})^{b}; \\ F^{0;0} &= \frac{1}{m^2}\,(V'^{*}V + \vec{U}'^{*}\vec{U}) + (\vec{E}'^{*}\cdot\vec{E} + \vec{H}'^{*}\cdot\vec{H}) \\ F^{b;b} &= \frac{1}{m^2}\,(V'^{*}V + 2U'^{*\underline{b}}U^{\underline{b}} - \vec{U}'^{*}\vec{U} - 2\,E'^{*\underline{b}}E^{\underline{b}} + E'^{*}\cdot E - \\ &\qquad - 2\,H'^{*\underline{b}}H^{\underline{b}} + \vec{H}'^{*}\cdot\vec{H}) \end{aligned}\right\} \qquad (7.17\text{-b})^{+}$$

\+ No sumar sobre b (cf. Secc. 1.c).

J) TENSOR SIMETRICO DE 2° ORDEN $F^{5\mu;5\nu}$

$$F^{5\mu;5\nu} = \psi' \gamma^5_{(1)} \gamma^\mu_{(1)} \gamma^5_{(2)} \gamma^\nu_{(2)} \psi = \frac{1}{m^2} \Big[-(U'^{*\mu} U^\nu + U'^{*\nu} U^\mu - U'^{*\alpha} U_\alpha g^{\mu\nu}) + + (G'^{*\mu\alpha} G_\alpha{}^\nu + G'^{*\nu\alpha} G^\mu_\alpha + \tfrac{1}{2} G'^{*\alpha\beta} G_{\alpha\beta} g^{\mu\nu}) \Big] \quad (7.18\text{-a})$$

escritura 3-dimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{51;52} = -\dfrac{1}{m^2} \Big[(U'^{*1} U^2 + U'^{*2} U^1) + (E'^{*1} E^2 + E'^{*2} E^1) + \\ \qquad + (H'^{*1} H + H \\ \qquad \text{y permutaciones sobre } 1, 2, 3. \\ F^{50;5b} = \dfrac{1}{m^2} \Big[-(V'^* \vec{U} + \vec{U}'^* V) + (\vec{E}'^* \times \vec{H} + \vec{E}'^* \times \vec{H}'^*) \Big]^b \\ F^{50;50} = \dfrac{1}{m^2} \Big[-(V'^* V + \vec{U}'^* \vec{U}) + \vec{E}'^* \vec{E} + H \quad H \Big] \\ F^{5b;5b} = \dfrac{1}{m^2} \Big[-V'^* V - 2U'^{*\underline{b}} U^{\underline{b}} + \vec{U}'^* \vec{U} - 2 E'^{*\underline{b}} E^{\underline{b}} + \\ \qquad + \vec{E}'^* \vec{E} - 2 \vec{H}'^{*\underline{b}} - H^{\underline{b}} + \vec{H}'^* \cdot \vec{H} \Big] \end{array} \right. \quad (7.18\text{-b})^+$$

K) PSEUDOTENSOR DE 2° ORDEN, DE TRAZA NULA, $F^{\mu;5\nu}$

$$F^{\mu;5\nu} = \psi' \gamma^\mu_{(1)} \gamma^5_{(2)} \gamma^\nu_{(2)} \psi =$$

$$= \frac{i}{m^2} \Big[-U'^*_\alpha U_\beta \varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} + \tfrac{1}{2} \varepsilon^{\tau\sigma\mu\alpha} G'^*_{\sigma\tau} G^\nu_\alpha + \tfrac{1}{2} \varepsilon^{\tau\sigma\nu\alpha} G'^*_{\sigma\tau} G^\mu_\alpha - - \tfrac{1}{4} g^{\mu\nu} G'^*_{\sigma\tau} G_{\alpha\beta} \varepsilon^{\sigma\tau\alpha\beta} \Big] . \quad (7.19)$$

+ No sumar sobre b.

L) PSEUDOTENSOR ANTISIMETRICO DE 2° ORDEN, $F^{\mu\nu;5}$

$$F^{\mu\nu;5} = i\,\psi'^{*}\,\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\psi =$$

$$= \frac{i}{m^2}\left[U'^{*}_{\sigma}U_{\alpha}\varepsilon^{\sigma\mu\nu\alpha} - \frac{1}{2}G'^{*}_{\sigma\tau}G_{\alpha}{}^{\nu}\varepsilon^{\tau\sigma\mu\alpha} + \frac{1}{2}G'^{*}_{\sigma\tau}G_{\alpha}{}^{\mu}\varepsilon^{\tau\sigma\nu\alpha}\right] \qquad (7.20)$$

M) TENSOR DE 3er ORDEN $F^{\rho;\mu\nu}$

$$F^{\rho;\mu\nu} = \psi'^{*}\gamma^{\rho}_{(1)}\,\sigma^{\mu\nu}_{(2)}\psi =$$

$$= \frac{1}{m^2}\Big[U'^{*\rho}G^{\mu\nu} + G'^{*\mu\nu}U^{\rho}) + (U'^{*\mu}G^{\rho\nu} + G'^{*\rho\nu}U^{\mu}) + (U'^{*\nu}G^{\mu\rho} + G'^{*\mu\rho}U^{\nu}) +$$

$$+ g^{\rho\mu}(U'^{*\alpha}G^{\nu} + U^{\alpha}G'^{*\nu}_{\alpha}) + g^{\rho\nu}(U'^{*\alpha}G^{\mu}_{\alpha} + U^{\alpha}G'^{*\mu}_{\alpha})\Big] \qquad (7.21)$$

N) PSEUDOTENSOR DE 3er. ORDEN $F^{\mu\nu;5\rho}$

$$F^{\mu\nu;5\rho} = \overline{\psi}'^{*}\,\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\gamma^{\rho}_{(2)} =$$

$$= \frac{1}{m^2}\Big[-2(U'^{*}_{\sigma}G^{\rho}_{\alpha} + U_{\sigma}G'^{*\rho})\varepsilon^{\alpha\sigma\mu\nu} + \frac{1}{2}(U'^{*}_{\sigma}G_{\alpha\beta} - U_{\sigma}G'^{*}_{\alpha\beta})$$

$$(\varepsilon^{\mu\sigma\alpha\beta}g^{\nu\rho} - \varepsilon^{\nu\sigma\alpha\beta}g^{\mu\rho}) + i\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\beta}(U^{\alpha}G'^{*}_{\alpha\beta} - U'^{*\alpha}G_{\alpha\beta})\Big] \qquad (7.22)$$

O) TENSOR DE 4° ORDEN $F^{\mu\nu;\rho\omega}$

$$F^{\mu\nu;\rho\omega} = \overline{\psi}\,\sigma^{\mu\nu}_{(1)}\,\sigma^{\rho\omega}_{(2)}\psi =$$

$$= \frac{1}{m^2}\Big\{U'^{*\alpha}U_{\alpha}(g^{\omega\mu}g^{\nu\rho} - g^{\omega\nu}g^{\mu\rho}) +$$

$$+ \Big[-g\ {}^{\rho}(U'^{*\omega}U^{\nu} + U'^{*\nu}U^{\omega}) + g^{\mu\omega}(U'^{*}\ U^{\rho} + U'^{*\rho}U^{\nu}) +$$

$$+ g^{\nu\rho}(U'^{*\omega}U^{\mu} + U'^{*\mu}U^{\omega}) - g^{\omega\nu}(U'^{*\mu}U^{\rho} + U'^{*\rho}U^{\mu})\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}G'^{*}_{\sigma\tau}G^{\sigma\tau}(g^{\mu\rho}g^{\nu\omega} - g^{\mu\omega}g^{\nu\rho}) - \frac{1}{4}G'^{*}_{\sigma\tau}G_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\sigma\tau\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\rho\omega} +$$

$$+ 2\Big[(G'^{*\omega\mu}G^{\nu\rho}\ G^{\omega\mu}) + (G'^{*\omega\nu}G^{\rho\mu} + G'^{*\rho\mu}G^{\omega\nu})\Big] +$$

$$+ \Big[g^{\mu\rho}(G'^{*\omega\alpha}G^{\nu}_{\alpha} + G'^{*\nu\alpha}G^{\omega}_{\alpha}) - g^{\mu\omega}(G'^{*\nu\alpha}G_{\alpha}{}^{\rho} + G'^{*\rho\alpha}G^{\nu}_{\alpha}) -$$

$$- g^{\nu\rho}(G'^{*\mu\alpha}G_{\alpha}{}^{\omega} + G'^{*\omega\alpha}G^{\mu}_{\alpha}) + g^{\nu\omega}(G'^{*\rho\alpha}G^{\mu}_{\alpha} + G'^{*\mu\alpha}G_{\alpha}{}^{\rho})\Big]\Big\} \qquad (7.23)$$

7.b-3 - Um procedimiento particular para recalcular algunas formas bilineales

Llamo,

$$\Phi_o = \frac{1}{2}\gamma^o \gamma^5 \mathcal{B}^{-1};$$

$$\Phi_k = \frac{1}{2}\gamma^k \gamma^5 \mathcal{B}^{-1}, \qquad k = 1, 2, 3; \qquad (7.24)$$

$$\Phi_k = (i/2)\alpha^k \gamma^5 \mathcal{B}^{-1}, \qquad k = 4, 5, 6;$$

$$\Phi_k = -\frac{1}{2}\sigma^k \gamma^5 \mathcal{B}^{-1}, \qquad k = 7, 8, 9.$$

Entonces la (7.2) se puede poner

$$\psi = V\,\Phi_o + \sum_1^3 U^k\,\Phi_k + \sum_1^3 E^k\,\Phi_{k+3} + \sum_1^3 H^k\,\Phi_{k+6} \qquad (7.25)$$

Con los procedimientos habituales para el cálculo de trazas obtenemos

$$\Phi_i^+\ \Phi_j = \delta_{ij}\ ; \qquad (7.26)$$

Si llamamos

$$b_{ij} = \Phi_i^+ \gamma^o_{(1)}\, \Phi_j = \Phi_i^+ \gamma^o_{(2)}\, \Phi_j \qquad (7.27\text{-a})$$

obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} b_{ij} = 0 \ \text{ salvo} \\ b_{41} = b_{52} = b_{63} = +\, i \\ b_{14} = b_{25} = b_{36} = -\, i \end{array}\right\} \qquad (7.27\text{-b})$$

Las (7.25), (7.26) y (7.27) permiten recalcular algunas formas bilineales. En todos los casos recalculados hemos obtenido el mismo resultado que con el procedimiento general 7.b-2.

7.b-4 - Aplicaciones:

A) TRADUCCION DE LA DENSIDAD DE CARGA

Por (3.2-a) y (2.31)

$$\rho = \psi^{+} \gamma^{o}_{(2)} \overline{\psi} = \psi \gamma^{o}_{(1)} \psi = \overline{\psi} \gamma^{o}_{(2)} \psi = F^{jo}; \qquad (7.28\text{-a})$$

el resultado con el procedimiento general lo obtenemos con (7.12-b):

$$\rho = \frac{i}{m^2} (\vec{E}'^{*} \cdot \vec{U} - \vec{E} \cdot \vec{U}'^{*}) \qquad (7.28\text{-b})$$

que es idéntico al o empleado por quienes usan el formalismo de Proca. El resultado con el procedimiento particular lo obtenemos con (7.25) y (7.27) y es nuevamente (7.28-b).

B) TRADUCCION DE LA DENSIDAD DE CORRIENTE.

Por (3.2-b) y (2.31)

$$j^{k} = \psi \gamma^{k}_{(1)} \psi = \overline{\psi} \gamma^{k}_{(2)} \psi = F^{jk}; \qquad (7.29\text{-a})$$

el resultado del procedimiento general lo obtenemos con (7.12-b):

$$\vec{j} = \frac{i}{m^2} \left[(\vec{E}^{*} \cdot V - \vec{E} \cdot V) + (\vec{U} \times \vec{H}^{*} - \vec{U}^{*} \times \vec{H}) \right] \qquad (7.29\text{-b})$$

también idéntica a la corriente empleada por quienes usan el formalismo de Proca.

C) TRADUCCION DE LA DENSIDAD DE ENERGIA $(\psi, H\psi)_{sp}$

Por (3.4), (2.2) y (2.31')

$$(\psi, H\psi)_{sp} = \psi^{+} \gamma^{o}_{(2)} (m \gamma^{o}_{(1)} + \vec{\alpha}_{(1)} \vec{p}) \psi = m \overline{\psi} \psi + \overline{\psi} \vec{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{p} \psi$$

$$= m \overline{\psi} \psi + \overline{\psi} \vec{\gamma}_{(2)} \vec{p} \psi; \qquad (7.30)$$

si en (7.12-b) sustituímos

$$\overline{\psi}' \longrightarrow \overline{\psi} \ ; \qquad \psi \longrightarrow p^{2} \psi = - i \, \partial_{a} \psi$$

obtenemos

$$\bar{\psi}\,\vec{\gamma}_{(2)}\,\vec{p}\,\psi = \frac{1}{m^2}\left[\vec{E}^*\cdot \mathrm{grad}\, V - V^*\ \mathrm{div}\ E + \vec{H}^*\ \mathrm{rot}\ \vec{U} + \vec{U}^*\cdot \mathrm{rot}\ \vec{H}\right];$$

integrando por partes el 2° y 3er. sumando del 2° miembro y usando las (1.7") resulta

$$\bar{\psi}\,\vec{\gamma}_{(2)}\cdot\vec{p}\,\psi = \frac{1}{m}\left[+\ 2V^*V + 2\,\vec{H}^*\,\vec{H} + \frac{1}{m}\,\mathrm{div}\,(\vec{U}^*\times\vec{H} - \vec{E}^*V)\right] \qquad (7.31)$$

Combinando con (7.9-b),

$$(\psi,\ H\psi)_{sp} = \frac{1}{m}\,(V^*V + \vec{U}^*\vec{U} + \vec{E}^*\,\vec{E} + \vec{H}^*\,\vec{H}) + \frac{1}{m^2}\,\mathrm{div}\,(\vec{E}^*V + \vec{U}^*\times H) \qquad (7.32)$$

que sólo difiere en una divergencia de la densidad de energía usada por quienes emplean el formalismo de Proca; esa divergencia es irrelevante en cuanto a la energía total.

Verificación: Por (3.4),

$$(\psi,\ H\psi)_{sp} = (\psi,\ \frac{i\partial}{\partial t}\,\psi)_{sp} = \psi\,\gamma^{o}_{(1)}\ i\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\ ;$$

usando (7.12-b) y (1.7") se reobtiene la (7.32).

D) REDEMOSTRACIÓN DE LA EQUIVALENCIA (A2-6.12).

Cumplimos fácilmente con el compromiso enunciado en el apéndice A2-6: debemos probar que

$$\int d^3x\ (\psi,\ H\,\psi)_{sp} = m\int \bar{\psi}^{+}\,\psi\, d^3x$$

o sea

$$\int d^3x\ (\psi,\ H\,\psi)_{sp} = m\int \bar{\psi}\,\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\psi\ d^3x \qquad (7.33)$$

Para demostrar la (7.33) basta comparar (7.32) con la 3a. (7.17-b).

7.b-5 - Una representación de ψ, de ψ^V y de ψ^{VI}

Por completitud recordamos que (como es bien sabido),

$$\psi = \frac{i}{2m}\begin{pmatrix} U_- + E_- & -U^3 - E^3 & -H_- & -V + H^3 \\ -U^3 - E^3 & -U_+ - E_+ & V + H^3 & H_+ \\ -H & -V + H^3 & -U_- + E_- & -U^3 - E^3 \\ -V + H^3 & H_+ & U^3 - E^3 & U_+ - E_+ \end{pmatrix} \qquad (7.34)^{**}$$

donde abreviamos

$$k_{\pm} = k^1 \pm i\, k^2 \qquad (7.35)^{**}$$

para todo 3-vector k.

La (7.34) se puede obtener usando (7.2), (7.3) y la representación (2.6) de las γ^μ.

Usando (6.46) y (7.34) la ψ^V definida en Secc. 6.f-4 resulta ser

$$\psi^V = \frac{i}{2m}\begin{pmatrix} E_- & -E^3 & -H_- & H^3 \\ -E^3 & -E_+ & H^3 & H_+ \\ -H_- & H^3 & E_- & -E^3_+ \\ H^3 & H_+ & -E^3 & -E_+ \end{pmatrix} (7.36)$$

Correspondientemente,

$$VI = \frac{i}{2m}\begin{pmatrix} U_- & -U^3 & 0 & -V \\ -U^3 & -U_+ & V & 0 \\ 0 & V & -U_- & U^3 \\ -V & 0 & U^3 & U_+ \end{pmatrix} (7.37)$$

Se comprende entonces que a la descomposición

$$\psi = \psi^V + \psi^{VI}$$

hecha en el formalismo de BW le corresponde, en el de Proca al agrupar por un lado a los 6 $G_{\mu\nu}$ y por el otro a los 4 U^μ.

CAPITULO OCTAVO

TEORIA CLASICA DE CAMPOS

8.a - INTRODUCCIÓN

8.a-1 - El problema de las variables independientes. Antecedentes.

Queremos obtener una formulación lagrangeana en el formalismo de BW. Un punto delicado es el número de variables independientes a usar en el método variacional. Sea la densidad lagrangeana +

$$\mathcal{L} = - m\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}\psi\, i\,\partial_\mu (\gamma^\mu_{(1)} + \psi - \frac{1}{2}(i\partial_\mu \psi)\gamma^\mu_{(1)}\psi \qquad (8.1)^{**}$$

Si usamos como variables independientes a las diez ψ_{ij} con $i \leqslant j$ ++ y a las correspondientes ψ_{ij} obtenemos vía ecuaciones de Euler las ecuaciones (1.7-a) que (como es sabido) son equivalentes a las (1.1) de BW. Es más: Un cierto número de resultados (corriente, tensor energía-momento, etc.) coinciden con los correctos. Sin embargo, este procedimiento (usar diez ψ_{ij} independientes) para obtener las ecuaciones de BW es incorrecto, pues las ecuaciones de BW se encargan de reducir el grado de libertad spinorial de 10 a 6: Hay contradicción: Entre las consecuencias del delito aparecen dificultades para establecer las relaciones de conmutación de la versión cuantizada (o, lo que es equivalente, los paréntesis de Poisson de la clásica).

La necesidad de usar sólo 6 componentes independientes de ψ fué planteada ya por Belinfante [3] quien propuso ψ^{I} como parte independiente y ψ^{II} como parte dependiente de ψ (cf. Secc. 2.c-5).

+ Empleando la equivalencia (2.31) la densidad lagrangeana (8.1) se transforma en la de Belinfante [4].

++ Por (1.1-c).

Pero, obviamente

$$\psi^{I} = \frac{d}{2}\left(I+\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi$$

no es una variable covariante. Nuestro objetivo será usar una parte manifiestamente covariante de ψ como parte independiente del campo.

Kemmer [15] obtuvo la corriente y el tensor energía momento sin partir de un lagrangeano. Booth y Wilson dan el lagrangeano para el formalismo de Kemmer + (cuya traducción al de BW coincide con (8.1)). Al menos parcialmente, usan 6 componentes independientes de ψ, pero en forma no covariante.

Más conocida es la formulación lagrangeana en el formalismo de Proca. Como texto para una de las maneras de desarrollarlo puede usarse el artículo de Pauli [21] sobre teorías de campos relativistas; usa como independientes en el procedimiento variacional las 10 variables U_μ, $G_{\mu\nu}$(con $\mu<\nu$) y las correspondientes complejas conjugadas. Otra manera de desarrollarlo es la descripta en el texto de Bogoliubov y Shirkov [5]; ellos imponen la condición subsidiaria antes de variar la acción, con lo cual el número de variables independientes en el procedimiento variacional es el correcto.

Abreviación: "Proca", o "Proca, usual" = "formalismo de Proca tal como está descripto en el artículo de Pauli [21] o en el texto de Wentzel [30].

Las variables que emplearemos en el formalismo de BW no se

+ Ver también el artículo de Pauli [21].

traducen (dentro de lo que sabemos) en ningún juego de variables independientes empleado en otros formalismos.

8.a-2 - Objetivos

Nos proponemos:

1) Desarrollar rigurosamente la teoría de campos en el formalismo de BW usando 6 componentes independientes de ψ (y otras tantas para $\bar{\psi}$).

2) Usar una parte manifiestamente covariante del juego de variables, y hacer manifiestamente covariante el procedimiento donde nos sea posible.

3) Obtener analogía formal con los resultados de la teoría de campos para otros valores del spin.

Anticipamos que (como ha ocurrido con buena parte de lo que antecede) podremos obtener bastante analogía con lo que ocurre en spin 1/2. La analogía no puede ser total (spin).

Pero, sorprendentemente, también podemos obtener bastante analogía + con lo que ocurre en spin cero (cargado).

Usaremos dos densidades lagrangeanas, $\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}$ y $\mathcal{L}^{(0)}$; con la primera conseguiremos la analogía con spin 1/2. Con la segunda, analogía con lo que ocurre en spin cero (cargado) ++ a menos de un factor uniforme 1/m.

Compararemos los resultados obtenidos con ambos lagrangeanos, así como con resultados anteriores de otros formalismos.

8.a-3 - Notación y nomenclatura

Indicaremos con un superíndice (1/2) a los entes obtenidos

+ No total.

++ Nos referimos a la formulación usual para el caso Klein-Gordon, con una componente para φ; no a la de 5 componentes (Kemmer [15]) ni de dos componentes (Sakata y Taketani [25,26], Feshbach y Villars [10]).

a partir de $\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}$ y, por brevidad, llamaremos formulación 1/2 a la formulación correspondiente. Compararemos los resultados con los correspondientes de spin 1/2, para establecer cuando existe (o no existe) tal analogía.

Análogamente el superíndice (o) corresponde a los entes deducidos de $\mathcal{L}^{(o)}$ y la formulación correspondiente será la formulación 0. En la comparación con los resultados para spin 0, sobreentenderemos el factor 1/m arriba mencionado.

En todo el Cap. 8 usaremos únicamente campos simétricos:

$$\psi \in \varepsilon_t^{sim} \tag{8.2}$$

ε_t^{sim} difiere del ε^{sim} definido en Secc. 2.c-1 en que ε^{sim} se fabrica con funciones de $\vec{x}$ y ε_t^{sim} con funciones de $x = (t, \vec{x})$. Análogamente ε_t^{I}, etc.

8.b - ELECCIÓN DE LAS VARIABLES. OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER.

8.b-1 - Descomposición invariante del campo en parte independiente y parte dependiente

Como en Secc. 6.f-4 descomponemos

$$\psi(x) = \psi^{V}(x) + \psi^{VI}(x); \tag{8.3-a}$$

$$\psi^{V}(x) = \Lambda^{V}\psi(x) = \frac{1}{2}\left(I + \gamma^5_{(1)}\gamma^5_{(2)}\right)\psi(x) \tag{8.4-a}$$

$$\psi^{VI}(x) = \Lambda^{VI}\psi(x) = \frac{1}{2}\left(I - \gamma^5_{(1)}\gamma^5_{(2)}\right)\psi(x). \tag{8.5-a}$$

(la diferencia con (6.55) es que ahora trabajamos con $\psi \in \varepsilon_t^{sim}$ en lugar de ε^{sim}).

Por (6.61-a) sabemos que $\psi^{V}(x)$ tiene 6 componentes independientes. Por lo tanto, elegiremos $\psi^{V}(x)$ como parte independiente de $\psi(x)$ (es decir, como la parte de $\psi(x)$ cuyas 6 componentes independientes variaremos arbitrariamente). Como no necesitamos (ni podremos usar) más de 6 variables independientes, podemos (y debemos) establecer una dependencia arbitraria de ψ^{VI} en función de ψ^{V}.

Elegimos

$$\psi^{VI}(x) = \frac{i}{2m}\partial\beta\,(\gamma^{\beta}_{(1)}+\gamma^{\beta}_{(2)})\,\psi^{V}(x). \qquad (8.6\text{-a})$$

Análogamente, descomponemos

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{V}(x) + \bar{\psi}^{VI}(x); \qquad (8.3\text{-b})$$

$$\psi^{V}(x) = \psi(x)\,\Lambda^{V} = \psi(x)\,\frac{1}{2}\left(I+\gamma^{5}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\right); \qquad (8.4\text{-b})$$

$$\psi^{VI}(x) = \psi(x)\,\Lambda^{VI} = \psi(x)\,\frac{1}{2}\left(I-\gamma^{5}_{(1)}\gamma^{5}_{(2)}\right); \qquad (8.5\text{-b})$$

Elegimos $\bar{\psi}^{V}(x)$ como parte independiente de $\bar{\psi}$, e imponemos

$$\bar{\psi}^{VI}(x) = \frac{-i}{2m}\,\partial_{\alpha}\psi^{V}(x)(\gamma_{(1)}+\gamma_{(2)}). \qquad (8.6\text{-b})$$

En esta etapa no sabemos cuanto vale $i\,\partial_{\beta}\,\gamma^{\beta}_{(1)}\,\psi^{VI}$ ó $i\,\partial_{\beta}\,\gamma^{\beta}\,\psi^{VI}$; pero podemos asegurar que

$$i\,\partial_{\beta}\gamma^{\beta}\psi^{VI} = i\partial_{\beta}\,\gamma^{\beta}_{(2)}\,\psi^{VI} \qquad (8.6'\text{-a})$$

En efecto, (8.6-a) implica

$$i\,\partial_{\mu}\,(\gamma^{\mu}_{(1)}-\gamma^{\mu}_{(2)})\,\psi^{VI} = -\frac{1}{2m}\,(\gamma^{\mu}_{(1)}\gamma^{\beta}_{(1)}-\gamma^{\mu}_{(2)}\gamma^{\beta}_{(2)})\,\psi^{V} =$$

$$= -\frac{1}{2m}\,(\partial_{\mu}\partial^{\mu}-\partial_{\mu}\partial^{\mu})\,\psi^{V} = 0\ .$$

Análogamente,

$$(i\partial_{\alpha}\bar{\psi}^{VI})\,\gamma^{\alpha}_{(1)} = (i\partial_{\alpha}\,\psi^{VI})\,\gamma^{\alpha}_{(2)}. \qquad (8.6'\text{-b})$$

8.b-2 - 1er. lema

Afirmo que si para $\bar{\theta}(x)$ fijo y $[\delta\varphi(x)]^V \epsilon\, \varepsilon^{\overline{sim\,V}}$ arbitraria es

$\overline{\theta(x)}|\delta\varphi(x)|^V = 0$, entonces $\left[\bar{\theta}(x)\right]^{V sim} = 0$. (8.7-a)+

Sobre $\overline{\theta^{VI}}$ nada puedo decir porque siendo

$$\Lambda^{VI}\,\Lambda^V = 0$$

es $\overline{\theta^{VI}}(\delta\varphi)^V = (\overline{\theta^{VI}})\left[\Lambda^V(\delta\varphi^V)^{\bar{V}}\right] = 0$,

para todo $\overline{\theta^{VI}}$. Análogamente, nada puedo decir sobre $(\bar{\theta})^V$ ant ++.

La prueba de (8.7-a) se efectúa fácilmente usando la representación (6.60).

Asisismo, si para $\theta(x)$ fijo y $[\delta\varphi(x)]^V \epsilon\, \varepsilon^{\overline{sim\,V}}$ arbitrario es $[\delta\varphi(x)]^V\,\theta(x) = 0$, entonces $[\theta(x)]^{V\ sim} = 0$. (8.7-b)

8.b-3 - Por que usar ψ^V como parte independiente del campo ? Papel que desempeñará el primer lema.

El procedimiento variacional nos conducirá a expresiones del tipo

$$\theta\,\delta\varphi = 0 \quad \text{o sea} \quad \bar{\theta}_{ji}\,\varphi_{ij} = 0. \qquad (8.8)$$

Como sólo 6 de las $\delta\varphi_{ij}$ son independientes, no podemos anular el coeficiente de cada $\delta\varphi_{ij}$. Debemos elegir seis $\delta\varphi_{ij}$ como independientes, expresar las restantes en función de estas, y anular el coeficiente de las seis $\delta\varphi_{ij}$ independientes.

Lo primero que uno ensayaría sería imponer

$$\delta\varphi \in \psi_t \qquad (8.9)$$

+ $(\bar{\theta})^{V\ sim}$ significa la parte simétrica de $\bar{\theta}^V$:

$$\left[(\bar{\theta})^{V\ sim}\right]_{ij} = \frac{(\bar{\theta}^V)_{ij} + (\bar{\theta}^V)_{ji}}{2}$$

++ Como sólo usamos ψ simétrica (cf. (8.2)) sorprenderá que nos preocupemos por θ^V ant (antisimetrica); ocurre que puede presentarse por ejemplo $\theta = \gamma^{\mu}(1)\,\psi$ que no es simetrica aunque lo sea ψ.

y usar una representación, por ejemplo la (2.6) de las γ^{μ}; entonces toda $\delta\varphi \in \omega_t$ sería de la forma del 2° miembro de (2.63). Observándolo se comprende que lo más directo sería elegir como componentes independientes

$$\delta\varphi_{11},\ \delta\varphi_{12} = \delta\varphi_{21},\ \delta\varphi_{22},\ \delta\varphi_{33},\ \delta\varphi_{34} = \delta\varphi_{43} \text{ y } \delta\varphi_{44} \qquad (8.10)$$

o sea las componentes pertenecientes a ψ^{I} (cf. (2.9)). Por lo tanto la parte independiente de ψ sería ψ^{I}, o sea la propuesta por Belinfante. Como se dijo en la Secc. 8.a-1, esta solución no es deseable por falta de covariancia manifiesta.

Justamente, nosotros elegimos ψ^{V} como parte independiente de ψ para efectuar una elección invariante Lorentz. En (8.8) ponemos

$$\delta\varphi \in \varepsilon_t^{\text{sim V}} \quad \text{o sea} \quad \delta\varphi = \delta\varphi^{\text{sim V}} \qquad (8.11)$$

$$\therefore \quad \bar{\theta}_{jij}\ \delta\varphi_{ij}^{\text{simV}} = 0 \ . \qquad (8.12)$$

Subsiste la dificultad de que no todas las componentes (ahora de $\delta\varphi^{\text{sim V}}$) son independientes. Pero ello no es problema: lo resuelva el 1er. lema.

<u>8.b-4 - Los espacios auxiliares ε_t^{B}, ε_t^{M}, ε_t^{III} y ε_t^{IV}.</u>

A) LOS ESPACIOS ε_t^{B} y ε_t^{M}.

Mediante los conocidos operadores proyección

$$\Lambda^{B} = \frac{m^2 - \Box}{2m^2} \quad \text{y} \quad \Lambda^{M} = \frac{m^2 + \Box}{2m^2} \qquad (8.13\text{-a})^{**}$$

($\Box = \partial_{\mu}\partial^{\mu}$), se puede descomponer de manera unívoca toda $\psi(x) = \psi(t, \vec{x})$ en

$$\psi = \psi^B + \psi^M \tag{8.13-b)**}$$

$$\psi^B = \Lambda^B \psi \; ; \qquad \psi^M = \Lambda^M \psi \tag{8.13-c)**}$$

tales que

$$\Box\psi^B = - m^2 \psi^B \; ; \qquad \Box\psi^M = + m^2 \psi^M \tag{8.13-d)**}$$

Es

$$\varepsilon_t^{sim} = \varepsilon_t^{sim\,B} \oplus \varepsilon_t^{sim\,M} \tag{8.13-e}$$

B) LOS ESPACIOS ε_{sp}^{VI} Y ε_{sp}^{III}

Definimos

$$\Lambda^{III}(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left[I + \frac{(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p})}{\vec{p}^2}\right];$$

$$^{IV}(\vec{p}) = I - \Lambda^{III}(p) = \frac{1}{2}\left[I + \frac{(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p})(\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p})}{\vec{p}^2}\right].$$

(8.14-a)

Es fácil demostrar que son operadores proyección:

$$\left[\Lambda^{III}(\vec{p})\right]^2 = \left[\Lambda^{IV}(\vec{p})\right]^2 = I; \; \Lambda^{III}(\vec{p})\, \Lambda^{IV}(\vec{p}) = \Lambda^{IV}(\vec{p})\, \Lambda^{III}(\vec{p}) = 0.$$

(8.14-b)

Operan sobre los espacios spinoriales (ver definición en Secc. 2.c-3) y

Por ejemplo:

$$\varepsilon_{sp}^{sim} = \varepsilon_{sp}^{sim\ III^p} \oplus \varepsilon_{sp}^{sim\ IV\ p} \tag{8.15-a}$$

Para toda matriz simétrica,

$$\omega \in \varepsilon_{sp}^{sim} \tag{8.15-b}$$

es

$$\omega = \omega^{III}(p) + \omega^{IV}(\vec{p}) \tag{8.15-c}$$

con

$$\left.\begin{aligned} \omega^{III}(\vec{p}) &= \Lambda^{III}(\vec{p})\, \omega \epsilon\, \varepsilon^{\text{sim III}\, p} \\ \omega^{IV}(\vec{p}) &= \Lambda^{IV}(p)\, \omega \epsilon\, \varepsilon^{\text{sim IV}\, p} \end{aligned}\right\} \qquad (8.15\text{-d})$$

C) LOS ESPACIOS ε_t^{III} Y ε_t^{IV}.

Para efectuar una descomposición en partes III e IV de toda

$$\psi(x) = \psi(t, \vec{x}) \in \varepsilon_t^{\text{sim}} \qquad (8.16\text{-a})$$

la desarrollamos en integral de Fourier respecto de las variables espaciales:

$$\psi(x) = \int d^3p\, \omega(t, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} ; \qquad (8.16\text{-b})$$

descomponemos $\omega(t, \vec{p})$ según (8.15-c) y llamamos

$$\left.\begin{aligned} \psi^{III}(x) &= \int d^3p\, \omega^{III}(t, \vec{p})\, e^{i\,\vec{p}\cdot\vec{x}} \\ \psi^{IV}(x) &= \int d^3p\, \omega^{IV}(t, \vec{p})\, e^{i\,\vec{p}\cdot\vec{x}} \end{aligned}\right\} \qquad (8.16\text{-c})$$

con lo cual

$$\psi(x) = \psi^{III}(x) + \psi^{IV}(x) . \qquad (8.16\text{-d})$$

Llamaremos Λ^{III} (resp. Λ^{IV}) al operador que proyecta $\psi(x)$ sobre $\psi^{III}(x)$ (resp. $\psi^{IV}(x)$).

D) PROPIEDADES DE $\Lambda^{III}(p)$ Y $\Lambda^{IV}(p)$.

Siendo

$$\vec{\alpha}_{(i)}\cdot\vec{p}\,\Lambda^{III}(\vec{p}) = \Lambda^{III}(\vec{p})\,\vec{\alpha}_{(i)}\cdot\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)})\cdot\vec{p} , \quad i = 1, 2, \qquad (8.17\text{-a})$$

y

$$(\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)})\cdot\vec{p}\,\Lambda^{IV}(\vec{p}) = \Lambda^{IV}(\vec{p})(\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)})\cdot\vec{p} = 0 \qquad (8.17\text{-b})$$

es

$$(\vec{\alpha}_{(i)}\cdot\vec{\nabla})\Lambda^{III} = \Lambda^{III}(\vec{\alpha}_{(i)}\cdot\vec{\nabla}) = (\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)})\cdot\vec{\nabla} , \quad i = 1,2, \qquad (8.18\text{-a})$$

y $$(\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)})\cdot\vec{\nabla}\,\Lambda^{IV} = \Lambda^{IV}(\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)})\cdot\vec{\nabla} = 0 . \qquad (8.18\text{-b})$$

$$(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{p})(\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p})\Lambda^{III}(\vec{p}) = \Lambda^{III}(\vec{p})(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{p})(\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p}) = \vec{p}^{\,2}\,\Lambda^{III}(\vec{p}); \tag{8.19-a}$$

$$(\vec{\alpha}_{(1)}\;\vec{p})(\vec{\alpha}_{(2)}\;\vec{p})\;{}^{IV}(\vec{p}) = \Lambda^{IV}(\vec{p})(\vec{\alpha}_{(1)}\;\vec{p})(\vec{\alpha}_{2}\;\vec{p}) = -\;\vec{p}^{\,2}\,\Lambda^{IV}(\vec{p}) \tag{8.19-b}$$

es

$$(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{2}\cdot\vec{\nabla})\Lambda^{III} = \Lambda^{III}(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{\nabla}) = \Delta\;\Lambda^{III}; \tag{8.20-a}$$

$$(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{2}\cdot\vec{\nabla})\Lambda^{IV} = \Lambda^{IV}(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{\nabla}) = -\,\Delta\;\Lambda^{IV}\;. \tag{8.20-b}$$

E) CONMUTACIÓN DE OPERADORES PROYECCIÓN.

Los operadores proyección Λ^{I} y Λ^{II} se definieron en Secc. 2.c-5, los Λ^{V} Λ^{VI} en Secc. 6.f-4. Comparando las definiciones se observa que

> los operadores proyección Λ^{I}, Λ^{II}, Λ^{III}, Λ^{IV}, Λ^{V}, Λ^{VI}, Λ^{B} y Λ^{M} conmutan entre sí. (8.21)

Por lo tanto, si e.g. llamamos

$$\psi^{I\;III} = \Lambda^{III}\,\Lambda^{I}\;\psi \;\text{y}\; \psi^{III\;I} = \Lambda^{I}\,\Lambda^{III}\,\psi$$

es

$$\psi^{\pm\;VI} = \psi^{III\;I} \qquad \text{etc.}$$

<u>8.b-5 - Notas sobre la condición inicial</u>

A) NOTACIÓN

Sea σ un hiperplano de tipo espacial (fig. 8-1). Indicaremos con $\Psi(\sigma)$ la función de 3 variables que queda cuando en $\Psi(x) = \Psi(x^{o}, \vec{x})$ imponemos $x \in \sigma$. Análogamente, $\partial_\mu \Psi(\sigma)$ es la función que queda cuando en la función $\partial_\mu \Psi(x)$ restringimos $x^{\mu} \in \sigma$.

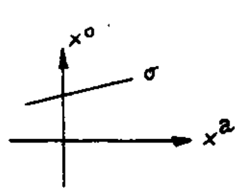

Fig. 8.1

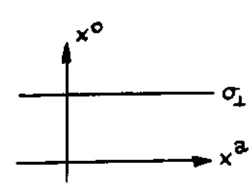

Fig. 8.2

Si σ es el hiperplano x^0 = const. reemplazaremos σ por σ (fig. 8.2).

B) LA CONDICIÓN EN TERMINOS DE ψ^V.

En (2.3) la condición inicial restringe las funciones de x^a(a = 1, 2, 3); por eso (2.3) no contiene derivadas temporales. Pero la definición (8.6-a) de la parte VI de una ψ se aplica <u>únicamente</u> a fucniones de x^a <u>y</u> x': $\psi = \psi(x^0, \vec{x})$. Por lo tanto si expresamos la proposición

$$\text{"}\psi(\sigma_\perp) \in \omega \text{ sobre un cierto } \sigma_\perp\text{"} \qquad (8.22\text{-a})$$

en términos de ψ^V, puede aparecer $\partial_0 \psi(\sigma_\perp)$.

Esto justifica la aparición de derivadas temporales en el resultado que sigue, y que se demuestra en A8-2:

$$\boxed{\psi(\sigma_\perp) \Longleftrightarrow \begin{cases} \Lambda^{II}\Lambda^{IV}\,\psi^V\,(o\ ) = 0 & \text{(a)} \\ \Lambda^{II}\Lambda^{III}\,(m^2 - \Delta - \vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\partial_0)\,\psi^V(\sigma_\perp) & \text{(b)} \end{cases} \quad (8.23)}$$

<u>La (8.23) es una nueva forma de la condición inicial</u>.

C) GENERALIZACIÓN COVARIANTE

Queremos dar sentido a la proposición

$$\text{"}\psi\ (\sigma) \in \omega_0 \text{ sobre un cierto } \sigma\text{"} \qquad (8.22\text{-b})$$

si o es un hiperplano arbitrario de tipo espacial.

<u>Definición</u>: " $\psi(x)$ pertenece a ω sobre un hiperplano σ de tipo espacial si la transformación de Lorentz que transforma σ en un $\sigma_\perp$ transforma $\psi(\sigma)$ en una $\psi'(\sigma'_\perp)$ que cumple (2.3) o, lo que es lo mismo, (8.23). Llamamos $\psi'(x')$ al segundo miembro de (6.2-c).,

iterado, si la transformación es finita."

Mediante hiperplanos tangentes puede aún generalizarse la condición inicial a hipersuperficies de tipo espacial cualesquiera.

8.b-6 - Las dos densidades lagrangeanas que se usarán

En la formulación 1/2 imponemos

$$\boxed{\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})} = -m\, \psi^V \psi^V + \frac{1}{m} (\partial_o \psi)^V \gamma^\sigma_{(1)} \gamma^\tau_{(2)} (\partial_\tau \psi)^V.} \tag{8.24}$$

La analogía con spin 1/2 estriba únicamente en las consecuencias de $^{(\frac{1}{2})}$.

En la formulación 0 imponemos

$$\boxed{\mathcal{L}^{(o)} = -m\, \psi^V \psi^V + \frac{1}{m} (\partial_\sigma \overline{\psi})^V (\partial^\sigma \psi^V).} \tag{8.25}$$

$\mathcal{L}^{(o)}$ es formalmente análogo a la densidad lagrangeana usada para spin 0,

$$\mathcal{L} = -m^2 \varphi^* \varphi + (\partial_\sigma \varphi^*)(\partial^\sigma \varphi)$$

salvo el factor 1/m mencionado más arriba).

8.b-7 - Más sobre notación

Pese a que en (8.24) y (8.25) sólo 6 componentes de ψ^V_{ij} (y 6 de $\overline{\psi}^V_{ji}$) son independientes, usaremos como notación

$$\frac{\partial}{\partial \psi_{ij}{}^V} (\overline{\psi}^V \psi^V) = \frac{\partial}{\partial \psi^V_{ij}} \left(\overline{\psi}^V_{r_2 r_1} \psi^V_{r_1 r_2} \right) = \overline{\overline{\psi}^V_{ji}} \tag{8.26-a}$$

En otras palabras: Si llamamos

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}^V_{r_2 r_1} \psi^V_{r_1 r_2}$$

conservaremos la dependencia funcional

$$\mathcal{L}' = f(\psi^V_{11}, \psi^V_{12}, \psi^V_{21}, \ldots, \psi^V_{44}; \overline{\psi^V_{11}}, \ldots, \overline{\psi^V_{44}})$$

sin reemplazar explícitamente las 16 ψ^V_{ij}(resp. $\overline{\psi^V_{ji}}$) dependientes en función de las seis independientes.

Conviene proceder así para que no aparezcan asimetrías. Por ejemplo, si usando

$$\psi^V_{ij} = \psi^V_{ji}$$

pusiéramos explícitamente las diez ψ^V_{ij} con $i > j$ en función de las ψ^V_{ij} con $i < j$ sería

$$\frac{\partial(\bar{\psi}^V \psi^V)}{\partial \psi^V_{12}} = 2\ \bar{\psi}^V_{12}; \qquad \frac{\partial(\bar{\psi}^V\ \psi^V)}{\psi^V_{11}} = \psi^V_{11}\ .$$

Perores asimetrías aparecen si usamos (6.60) para eliminar las cuatro restantes componentes dependientes.

La (8.26-a) no teniendo asimetrías nos permite compactar

$$\frac{\partial(\psi^V \psi^V)}{\partial \psi^V} = \bar{\psi}^T \tag{8.26-b}$$

Análogamente

$$\frac{\partial\left[(\partial_\sigma \bar{\psi}^V)\,\gamma^\sigma_{(1)}\gamma^\tau_{(2)}(\partial_\tau \psi)^V\right]}{\partial(\partial_\mu\ \psi^V)} = (\partial_o\ \bar{\psi}^V)\,\gamma^\sigma_{(1)}\ \gamma^\mu_{(2)} \tag{8.26-c}$$

Etc.

8.b-8 - El procedimiento variacional (formulación 1/2)

A) DEFINICIONES E HIPOTESIS

Como es usual, definimos la acción

$$W^{(\frac{1}{2})} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x\, \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}$$

donde σ_1 y σ_2 son dos hiperplanos de tipo espacial. Damos a ψ^V y $\bar{\psi}^V$ (no a ψ y $\bar{\psi}$!) variaciones arbitrarias $\delta\psi^V$ y $\delta\psi^V$ tales que cumplan

$$\delta\psi^V \in \mathcal{E}^{sim} , \qquad \delta\bar{\psi}^V \in \overline{\mathcal{E}^{sim}} \tag{8.27-a}$$

y las habituales prescripciones

$$\delta\psi^V|_{\sigma_1} = \delta\psi^V|_{\sigma_2} = \delta\bar{\psi}^V|_{\sigma_1} = \bar{\psi}^V|_{\sigma_2} = 0 . \tag{8.27-b}$$

La (a) implica que sólo 6 de las $(\delta\,\psi^V)_{ij}$ son independientes.

Los campos y sus derivadas se anulan en el infinito espacial.

Además, sobre una de las dos hipersuperficies, por ejemplo sobre σ_1 imponemos,

$$\psi(\sigma_1) \in \omega_{\sigma_1} \;; \qquad \partial_\mu \psi(\sigma_1) \in \omega_{\sigma_1} \tag{8.28}$$ +

donde μ es la dirección de la normal a σ_1. Esta no es una restricción adicional del grado de libertad, pues no afecta a $\delta\psi^V$ en las regiones en que no es nulo (o sea en el interior de las franjas delimitadas por σ_1 y σ_2.

Como es usual, postulamos

$$\delta W^{(\frac{1}{2})} = 0 \tag{8.29}$$

B) ECUACIONES DE EULER GENERALIZADAS.

Integrando por partes en (8.20) se obtiene

+ Expresando la parte VI de ψ mediante (8.6-a). Para notación ver 8.b-7.

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial \psi^V} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\alpha \psi^V)} \right) \right] \delta \psi^V + \delta \bar{\psi}^V \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial \psi^V} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\alpha \bar{\psi}^V)} \right) \right] \right\} d\, x = 0$$

de donde

$$\psi \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial \psi^V} - \partial_\alpha \left(\frac{\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\alpha \psi^V)} \right) \right] \delta \psi^V = 0 \qquad (8.30\text{-a})$$

$$\delta \bar{\psi}^V \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial \psi^V} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\alpha \bar{\psi}^V)} \right) \right] = 0 \qquad (8.30\text{-b})$$

En (8.30-a), o sea en

$$[\ ]_{i_2 i_1} \quad \delta \psi^V_{i_1 i_2} = 0$$

el procedimiento usual consistiría en anula en coeficiente de ca da $\delta \psi^V{}_{i_1 i_2}$. En nuestro caso no lo podemos hacer, pues no todas las $\delta \psi^V_{i_1 i_2}$ son independientes.

En cambio, usando el 1er. lema obtenemos inmediatamente una forma generalizada delas ecuaciones de Euler,

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial \psi^V} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\alpha \psi^V)} \right) \right]^{V\ \mathrm{sim}} = 0 \qquad (8.31\text{-a})$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial \bar{\psi}^V} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\alpha \bar{\psi}^V)} \right) \right]^{V\ \mathrm{sim}} = 0 \qquad (8.31\text{-b})$$

C) PRIMERA FORMA DE LAS ECUACIONES DE EVOLUCIÓN.

De (8.24) y (8.31-b) se obtiene

$$\left[m^2 \psi^V + \gamma^{\alpha}_{(1)} \gamma^{\sigma}_{(2)} \partial_\alpha \partial_\sigma \psi^V\right]^{V\ sim} = 0$$

Como en <u>este</u> caso el corchete es simétrico ante el intercambio (1) $\longleftrightarrow$ (2) de los índices spinoriales,

$$[\ ]^{V\ sim} = [\ ]^V$$

Además, por (6.59-a)

$$[\ ]^V = [\ ]$$

Por lo tanto,

$$\boxed{m^2 \psi^V + \gamma^{\alpha}_{(1)} \gamma^{\sigma}_{(2)} \partial_\alpha \partial_\sigma \psi^V = 0} \qquad (8.32\text{-a})$$

Análogamente,

$$\boxed{m^2 \overline{\psi}^V + (\partial_\alpha \partial_o \overline{\psi}^V) \gamma^{\alpha}_{(1)} \gamma^{\sigma}_{(2)} = 0} \qquad (8.32\text{-b})$$

Nuestro objetivo final será obtener la forma usual (1.2) de las ecuaciones de BW. Como etapas intermedias demostraremos <u>primero</u> que la condición inicial de cumple no sólo en σ_1 (cf. (8.28)) sino en todo x^μ comprendido entre σ_1 y σ_2, <u>y luego</u>, que las ψ no pueden ser de tipo M (Secc. 8.b-4). Entre estas etapas habrá que intercalar varias subetapas.

<u>Nota</u>: En (D) y (E) particularizaremos σ_1 haciéndolo de tipo $\perp$:

$$\sigma_1 = \sigma_1$$

(cf. Secc. 8.b-5A). Como el resultado final es manifiestamente covariante y como $\psi(\sigma_{1\perp}) \epsilon\, \omega_{\sigma 1}$ tiene generalización covariante (Cf. Secc. 8.b-5G) esta particularización no restringe la genera lidad de los resultados.

D) DEMOSTRAREMOS QUE NO SOLO ψ Y $\partial_o \psi$ CUMPLEN LA CONDICIÓN INICIAL SOBRE $\sigma_{1\perp}$ SINO QUE TAMBIÉN $\partial_o^2 \psi(\sigma_1)$ Y $\partial^3 \psi(\sigma_{1\perp})$ LA CUMPLEN SOBRE $\sigma_{1\perp}$.+

Nota: De que $\varphi = \partial_o \psi$ cumpla (2.3) sobre $\sigma_{1\perp}$,

$$H_{(1)} \varphi(t_1, \vec{x}) = H_{(2)} \varphi(t_1, \vec{x}) \qquad (\alpha)$$

no podemos deducir por mera derivación temporal que

$$H_1 \partial_o\varphi(t_1, \vec{x}) = H_{(2)} \partial_o \varphi(t_1, \vec{x}) \qquad (\beta)$$

puesto que por ahora sólo sabemos que $\varphi(t, \vec{x})$ cumple (2.3) para $t = t$ (no sabemos si (2.3) se cumple en un intervalo $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t$).

Además, podemos construir un contraejemplo: Sea $\theta(t, \vec{x})$ tal que

$$H_{(1)} \theta(t, \vec{x}) = - H_{(2)} \theta(t, \vec{x})$$

para todo t[θ existe: puede construirse con las $u_{\mathcal{F}}$ de (4.19)]; sea Ω tal que

$$H_{(1)} \Omega(t, x) = + H_{(2)} \Omega(t, x)$$

para todo t [Ω existe: es cualquier solución de las (1.1)]. Entonces

$$\varphi(t, \vec{x}) = \Omega(t, \vec{x}) + (t - t_1)\, \theta(t, \vec{x})$$

cumple (α) pero viola (β).

De (8.28) y (8.23) es,

$$\Lambda^{II} \Lambda^{IV} \psi^{V} (\sigma_1) = 0 \qquad (8.33\text{-a})$$

+ Para la notación ver Secc. 8.b-5A.

$$\Lambda^{II}\,\Lambda^{IV}\,\partial_o\,\psi^V\,(\sigma_{1\perp}) = 0 \tag{8.33-b}$$

$$\Lambda^{II}\,\Lambda^{III}\,(m^2 - \Delta - \vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}_o)\,\psi^V(\sigma_1\ ) = 0 \tag{8.33-c}$$

$$\Lambda^{II}\,\Lambda^{III}\,(m^2 - \Delta - \vec{\alpha}_{(1)}\vec{\nabla}\partial_o)\partial_o\,\psi^V(\sigma_{1\perp}) = 0\ . \tag{8.33-d}$$

Premultiplicando (8.32-a) por $\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}$ se obtiene (para todo λ^μ),

$$m^2\,\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}\,\psi^V(x^\mu) + \partial_o^2\,\psi^V(x^\mu) + (\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)})\partial_o\cdot\nabla\,\psi^V(x^\mu) +$$

$$+ (\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{\nabla})\,\psi^V(x^\mu) = 0 \tag{8.34}$$

Premultiplicamos ésta por $\Lambda^{II}\,\Lambda^{III}$; usando (8.21), (8.18), (8.20) y la (A8-2.2) que aquí transcribimos,

$$\Lambda^I\,\gamma^o_{(1)} = \Lambda^I\,\gamma^o_{(2)} = \Lambda\ \Lambda^I = \gamma^o_{(2)}\,\Lambda^I \tag{8.35-a}$$

$$\Lambda^{II}\,\gamma^o_{(1)} = -\,\Lambda^{II}\,\gamma^o_{(2)} = \gamma^o_{(1)}\,\Lambda^{II} = -\,\gamma^o_{(2)}\,\Lambda^{II} \tag{8.35-b}$$

$$\Lambda^I\,\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)} = \gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}\,\Lambda^I = \Lambda^I \tag{8.35-c}$$

$$\Lambda^{II}\,\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)} = \gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}\,\Lambda^{II} = -\,\Lambda^{II} \tag{8.35-d}$$

obtenemos:

$$- m^2\,\Lambda^{III}\Lambda^{II}\psi^V(x^\mu) + \partial_o^2\,\Lambda^{II}\Lambda^{III}\psi^V(x^\mu) + 2\,\Lambda^{II}\Lambda^{III}(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla})\partial_o\,\psi^V +$$

$$+ \Lambda^{II}\,\Lambda^{III}\Delta\psi^V(x^\mu) = 0 \tag{8.36}$$

Imponiendo en ésta $x^\mu\in\sigma_{1\perp}$ y usando (8.33-c) resulta

$$\Lambda^{II}\Lambda^{III}\,(\partial_o^2 + \vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\partial_o)\,\psi^V(\sigma_{1\perp}) = 0 \tag{8.37}$$

Por otra parte premultiplicamos (8.34) por $\Lambda^{II}\,\Lambda^{IV}$ y usa mos (8.18), (8.20) y (8.35); obtenemos

$$- m^2\Lambda^{IV}\Lambda^{II}\psi^V(x^\mu) + \partial_o^2\,\Lambda^{II}\Lambda^{IV}\psi^V(x^\mu) - \Lambda^{II}\Lambda^{IV}\Delta\,\psi^V\ (x^\mu) = 0; \tag{8.38}$$

teniendo en cuenta (8.33-a) resulta

$$\Lambda^{II}\Lambda^{IV}\left[\partial_o^2\ \psi^V\ (\sigma_{1\perp})\right] = 0 \tag{8.39}$$

Finalmente premultiplicando (8.34) por $\Lambda^I\ \Lambda^{III}\ \partial_o$ se obtiene, luego de usar (8.35-c), (8.18) y (8.20),

$$m^2\ \Lambda^{III}\Lambda^I\ \partial_o\ \psi^V(x^\mu) + \Lambda^I\Lambda^{III}\ \partial_o^3\ \psi^V(x^\mu) + 2\ \Lambda^I\Lambda^{III}\ \alpha_{(1)}\cdot\nabla\,\partial_o\psi^V(x^\mu) + \\ + \Lambda^I\ \Lambda^{III}\Delta\,\partial_o\ \psi^V(x^\mu) = 0 \tag{8.40}$$

Imponemos $x^\mu \in \sigma_1$, premultiplicamos por $\vec{\alpha}_{(1)}\vec{\nabla}$ y usamos (8.33-c), (8.20) y (8.37) +:

$$\Lambda^{II}\ \Lambda^{III}\ (-m^4 + m^2\Delta\ + \alpha_{(1)}\cdot\nabla\,\partial_o^3\ + \Delta\,\partial_o^2)\ \psi^V(\sigma_{1\perp}) = 0 \tag{8.41}$$

Pero por (8.33-c) y (8.37) es

$$\Lambda^{II}\ \Lambda^{III}\ (m^2 - \Delta + \partial_o^2)\ \psi^V(\sigma_{1\perp}) = 0 \tag{8.42}$$

con lo que (8.41) se transforma en

$$\Lambda^{II}\ \Lambda^{III}(m^2 - \Delta\ + \vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\bar{\partial}_o)\left[\partial_o^2\quad \psi^V(\sigma_1\ \ )\right] = 0 \tag{8.43}$$

Merced a (8.23) las (8.39) y (8.43) implican

$$\partial_o^2\ \ \psi\,(\sigma_{1\perp}) \in\ \omega \tag{8.44-a}$$

Para obtenerla hemos usado (8.34), (8.33-a) y (8.33-c); de manera similar, si derivásemos (8.34) respecto al tiempo y utilizamos (8.33-b) y (8.33-d) obtendríamos

$$\partial_o^3\ \ \psi\,(\sigma_{1\perp}) \in\ \omega \tag{8.44-b}$$

+ Al ser atravesado por $\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}$, Λ^I muda en Λ^{II}.

E) DEMOSTRAREMOS QUE CUMPLEN LA CONDICIÓN INICIAL NO SOLO SOBRE σ_1, SINO TAMBIÉN PARA TODO x^μ. CONSECUENCIAS.

A partir de la hipótesis (8.28) y mediante iteración de (D) resulta

$$\partial_o^{(n_o)}\, \psi\, (\sigma_{1\perp}) \in \omega\, ; \; n_o = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \qquad (8.45\text{-a})$$

Por otra parte derivando espacialmente la condición inicial (2.3-c)

$$H_{(1)}\, \psi(\sigma_{1\perp}) = H_{(2)}\, \psi(\sigma_{1\perp})$$

resulta que

$$\partial_1^{n_1}\, \partial_2^{n_2}\; {}_3^{n_3}\; (\sigma_{1\perp}) \in \omega\, , \;\; n_i = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \qquad (8.45\text{-b})^{+}$$

Mediante un desarrollo en serie de Taylor se obtiene la tesis de la primera etapa:

$$\boxed{\psi(x^o,\, \vec{x}) \in \omega_{x_o} \quad \text{para todo } x_o} \,. \qquad (8.46)$$

Como consecuencia valen para todo x^μ las relaciones demostradas para $x^\mu \in \sigma_1$:

$$\Lambda^{II}\, \Lambda^{IV}\, \psi^V\, (x^\mu) = 0 \qquad (8.47\text{-a})$$

$$\Lambda^{II}\, \Lambda^{III} (m^2 - \Delta - \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \partial_o)\, \psi^V (x^\mu) = 0\;; \qquad (8.47\text{-b})$$

de (8.37),

$$\Lambda^{II}\, \Lambda^{III} (\partial_o^2 + \alpha_{(1)} \cdot \nabla\, \partial_o)\, \psi^V (x^\mu) = 0\;; \qquad (8.47\text{-c})$$

de (8.42),

$$\Lambda^{II}\, \Lambda^{III} (\Box + m^2)\, \psi^V (x^\mu) = 0\;; \qquad (8.47\text{-d})$$

además,

+ Derivando espacialmente no se plantea el problema que para derivadas temporales fue discutido en la nota incluida en D.

$$H_{(1)}\,\psi(x^{\mu}) = H_{(2)}\;\psi(x^{\mu})\;. \qquad (8.47\text{-e})$$

F) DEMOSTRAREMOS QUE SI ψ ES SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL, SUS PARTES ψ^B Y ψ^M TAMBIÉN LO SON. +

Hay que probar que

1) ψ^V cumple (8.32-a) $\Longrightarrow$ $\begin{cases}\psi^{BV}\\ \psi^{MV}\end{cases}$ cumplen ++ (8.32-a)

2) $\delta\psi^V$ cumple (8.27) $\Longrightarrow$ $\begin{cases}\psi^{BV}\\ \psi^{MB}\end{cases}$ cumplen (8.27)

3) $\psi(\sigma_1)$ cumple (8.28) $\Longrightarrow$ $\begin{cases}\psi^{B}(\sigma_1)\\ \psi^{M}(\sigma_1)\end{cases}$ cumplen (8.28).

La primera se demuestra probando que Λ^B y Λ^M (8.13) conmutan con todos los operadores que aparecen en (8.32-a). La segunda es trivial.

Para la tercera, volveremos a particularizar por un momento $\sigma_1 = \sigma_{1\perp}$(Secc. 8.b-5A) lo cual no es restrictivo pues el resultado final es covariante. Hay que probar que

$$H_{(1)}\,\psi(\sigma_1) = H_{(2)}\;\psi(\sigma_1) \qquad (8.48\text{-a})$$

$$H_{(1)}\left[\Box\,\psi(\sigma_1)\right] = H_{(2)}\left[\Box\,\psi(\sigma_2)\right]\;. \qquad (8.48\text{-b})$$

Antes de probar (D) esto era un problema difícil porque de (8.48-a) no se seguía <u>a priori</u>

$$H_{(1)}\left[\partial_0^2\,\psi(\sigma_1)\right] = H_{(2)}\left[\partial_0^2\;\psi\,(\sigma_1)\right]$$

\+ ψ^B y ψ^M se definen en 8.b-4A.

++ Por (8.21) $\psi^{BV} = \psi^{VB}$, etc.

(cf. la nota que encabeza D). Pero una vez demostrada D sabemos que esto es cierto [(cf. (8.44-a)].

El resto de la demostración es trivial.

G) DEMOSTRAREMOS QUE SI ψ^M ES SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL, SU PARTE $\psi^{M\,VI}$ ES NULA.

Escribimos (8.32-a) con $\psi \longrightarrow \psi^M$; la premultiplicamos por $\frac{i}{2m}\partial_\beta\,\gamma^\beta_{(r)}$ con $r = 1$; obtenemos

$$m^2 \left[\frac{i}{2m}\,\partial_\beta\;\gamma^\beta_{(1)}\right]\psi^{MV} + \Box\left[\frac{i}{2m}\partial_\tau\;\gamma^\tau_{(2)}\right]\psi^{MV} = 0\ .$$

Efectuamos lo mismo con $r = 2$ y sumamos ambos resultados. Comparando con (8.6-a) resulta

$$m^2\,\psi^{M\,VI} + \Box\,\psi^{M\,VI} = 0\ .$$

Usando (8.13-a) deducimos

$$\psi^{M\,VI} = 0 \tag{8.49}$$

H) DEMOSTRAREMOS QUE SI ψ^M ES SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL, SU PARTE $\psi^{MV\;IV}$ ES NULA.

Sea ψ^M una solución del problema variacional; premultiplicando (8.32-a) (con $\psi \longrightarrow \psi^M = \psi^{MV}$) por $\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}$ y usando (8.13-d) para despejar $\partial_o^2\,\psi^{MV}$ se obtiene

$$\left[2\,m^2\,\Lambda^I + \Delta + (\vec{\alpha}_{(1)} + \vec{\alpha}_{(2)})\cdot\vec{\nabla}\partial_o + (\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{\nabla})\right]\psi^{MV} = 0. \tag{8.50}$$

Premultiplicando por $\Lambda^I\,\Lambda^{IV}$ y usando (8.18) y (8.20) resulta

$$(\Delta + 2\,m^2)\,\psi^{MV\,I\,VI} = 0$$

que para x^o fijo es una ecuación elíptica homogénea en $\vec{x}$; como $\psi^{MV\,I\,VI}$ se anula para $\vec{x}\longrightarrow\infty$ (cf. A) la solución es idénticamente nula. También $\psi^{M\,V\,II\,IV}$ es nula por (8.47-a). Entonces,

$$\psi^{MV\,VI} = 0 \ . \tag{8.52}$$

Finalmente, para una ψ arbitraria es (cf. Secc. 8.b-4),

$$\psi = \psi^{V} + \psi^{VI} = \ldots = \psi^{VI\ III} + \psi^{V\ II\ III} + \psi^{V\ IV} + \psi^{VI} . \tag{8.53}$$

Teniendo en cuenta (G) y (8.51) tenemos que <u>para toda</u> ψ^{M} solución del problema variacional es

$$\psi^{M} = \psi^{M\,V} = \psi^{M\,V\,I\ III} + \psi^{M\,V\,II\ III} \tag{8.54}$$

I) DEMOSTRAREMOS QUE LA PARTE ψ^{M} DE TODA SOLUCIÓN ψ DEL PROBLEMA VARIACIONAL ES IDENTICAMENTE NULA.

Sea ψ^{M} una solución; (8.47) $\Longrightarrow$

$$\psi^{M\,V\ II\ III} = 0 \ . \tag{8.55}$$

Por otra parte, premultiplicando (8.50) por $\Lambda^{III}\,\Lambda^{I}$ se obtiene

$$(m^{2}+\Delta)\,\psi^{M\,V\,I\ III} + \alpha_{(1)}\cdot\nabla\,\partial_{o}\,\psi^{M\ V\ II\ III} = 0 \tag{8.56}$$

Con (8.55)

$$(m^{2}+\Delta)\,\psi^{M\ V\ I\ III} = 0 \ ; \tag{8.57}$$

usando un argumento idéntico al empleado para $\psi^{M\,V\,I\ IV}$ (punto H) resulta

$$\psi^{M\ V\ I\ III} = 0 \ . \tag{8.58}$$

De (8.54), (8.55) y (8.58) resulta que para toda solución ψ^{M} es

$$\psi^{M}(x^{\mu}) \equiv 0 \ . \tag{8.59-a}$$

Entonces, por (F), para toda solución ψ del problema variacional es

$$\Lambda^{M}\,\psi(x^{\mu}) \equiv 0 \ . \tag{8.59-b}$$

Con esto hemos llegado a la segunda etapa intermedia anunciada al final de C. A la ecuación (8.32-a) podemos anadir

$$\boxed{\psi = \psi^B} \qquad (8.60\text{-a})$$

o sea

$$\boxed{\Box \psi = m^2 \psi} \qquad (8.60\text{-b})$$

de donde

$$\boxed{\Box \psi^V = - m^2 \psi^V} \qquad (8.60\text{-c})$$

Nota: Hemos demostrado (8.60) con un σ_1 particular (σ_1 = hiperplano x_o = const). Pero como (8.60) es covariante, vale para σ_1= = hiperplano de tipo espacial arbitrario.

J) DEMOSTRAREMOS QUE TODA ψ SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL CUMPLE LA ECUACIÓN (1.7) DE BELINFANTE.

Premultiplicamos (8.6-a) por $\frac{1}{2m}(\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)})\partial_\mu$. Teniendo en cuenta (8.32-a) y (8.60-c) obtenemos

$$\psi^V = \frac{1}{2m}(\gamma^\beta_{(1)} + \gamma^\beta_{(2)})\partial_\beta \psi^{VI} \qquad (8.61)$$

Sumamos miembro a miembro (8.61) y (8.6-a):

$$\psi = \frac{1}{2m}(\gamma^\beta_{(1)} + \gamma^\beta_{(2)})\partial_\beta \psi$$

que es la ecuación (1.7) de Belinfante.

K) AFIRMAMOS QUE TODA ψ SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL CUMPLE LAS ECUACIONES (1.1) DE BARGMANN-WIGNER.

Lo único que faltaría probar es que las (1.7) implican las (1.1), pero esto fué hecho mucho tiempo atrás por Belinfante [3].

Esquematizamos la demostración de Belinfante: Se premultiplica (1.7) por $i\,\partial_\nu(\gamma^\nu_{(1)} - \gamma^\nu_{(2)})$: Se obtiene $i\partial_\nu\ \partial^\nu_{(1)}$ =

$= i\, \partial_\nu \partial^{\nu}_{(2)} \psi$. Reemplazando en (1.7) se obtiene las (1.1-a) y (b). La (1.1-c) fué postulada en (8.2).

Con procedimiento similar se obtiene la <u>ecuación adjunta</u> (1.10) a partir de (8.32-b).

L) DEMOSTRAMOS QUE TODA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE B-W ES SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL.

Cabe demostrarlo, porque en principio podría ocurrir que p. ej. (8.32-a) sea más fuerte que las (1.1) de BW.

Partimos de (1.1-a) y (b). Aplicando m. a m. Λ^{V} ó Λ^{VI} se obtiene

$$\psi^{V} = \frac{i}{m}\ \gamma^{\mu}_{(i)} \partial_\mu\, \psi^{VI} \tag{8.62-a}$$

$$\psi^{VI} = \frac{i}{m}\, \gamma^{\mu}_{(i)} \partial_\mu\, \psi^{V} \tag{8.62-b}$$

$i = 1, 2$.

Combinamos (a) con $i = 1$ y (b) con $i = 2$. Otenemos la (8.32-a). Por otra parte, sabemos (cf. Secc. 2.b) que las soluciones de BW cumplen para todo x^{μ} la condición inicial; por lo tanto, también sus derivadas temporales cumplen la condición inicial para todo x^{μ}; con más razón, cumplen (8.28). Análogamente para la ecuación adjunta.

CONCLUSIÓN:

ψ = solución de nuestro procedimiento variacional (formulación 1/2)
$\Longleftrightarrow \psi$ = solución de las ecuaciones de BW. (8.63)

8.b-9 - El procedimiento variacional (formulación 0).

A) DEFINICIONES E HIPOTESIS:

Son idénticas a Secc. 8.b-8A salvo (1/2) ⟶ (0):

$$W^{(o)} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \, \mathcal{L} \; ;$$

$$\delta\psi^V \epsilon \;\; \varepsilon^{sim} \qquad \delta\bar{\psi}^V \epsilon \; \varepsilon^{sim} \qquad (8.64\text{-a})$$

$$\delta\psi^V\big|_{\sigma_1} = \delta\psi^V\big|_{\sigma_2} = \delta\bar{\psi}^V\big|_{\sigma_1} = \delta\bar{\psi}^V\big|_{\sigma_2} = 0 \;. \qquad (8.64\text{-b})$$

$\psi(\sigma_1) \in \omega\sigma_1$; $\partial_\mu \, \psi(o_1) \in \omega\,\sigma_1$ (μ = dirección normal a σ_1) (8.65)

Los campos y sus derivadas se anulan en el infinito espacial. Finalmente,

$$\delta\, W^{(o)} = 0 \;. \qquad (8.66)$$

B) ECUACIONES DE EULER GENERALIZADAS.

Como en la Secc. 8.b-8B se obtiene

$$\left[\frac{\partial\mathcal{L}^{(o)}}{\partial\psi^V} - \frac{\partial\,\mathcal{L}^{(o)}}{\partial(\partial_\alpha\psi^V)}\right]^{V\ sim} = 0 \qquad (8.67\text{-a})$$

$$\left[\frac{\partial\,\mathcal{L}^{(o)}}{\partial\;\bar{\psi}^V} - \left(\frac{\partial\,\mathcal{L}^{(o)}}{\partial(\partial_\alpha\bar{\psi}V)}\right)\right]^{V\ sim} = 0 \qquad (8.67\text{-b})$$

C) PRIMERA FORMA DE LAS ECUACIONES DE EVOLUCIÓN.

De (8.25) y (8.67),

$$\boxed{\begin{aligned} \square\psi^V &= - m^2\, \psi^V \\ \square\bar{\psi}^V &= - m^2\, \bar{\psi}^V \end{aligned}} \qquad (8.68\text{-a})$$

como era de esperar dada la analogía formal de $\mathcal{L}^{(o)}$ con la densidad de lagrangeana de Klein-Gordon (sólo el número de componentes es diferente).

Sólo elaboraremos la (a): (8.68-a) en (8.6-a),

$$\square\, \psi^{VI} = - m^2\, \psi^{VI}$$

que en (8.3-a) implica

$$\boxed{\square\psi = - m^2\, \psi} \qquad (8.69)^*$$

D) DESCOMPOSICIÓN EN ONDAS PLANAS.

Es

$$\psi_{i_1 i_2}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, c_{i_1 i_2}(\vec{p}, t)\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \qquad (8.70)$$

con

$$p_o = + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\ . \qquad (8.71)$$

Reemplazando en (8.69) se obtiene una ecuación para la evolución de C (p, t); integrándola,

$$\psi_{i_1 i_2}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varepsilon'=-1}^{+1} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, d^{(\dot{\varepsilon})}_{i_1 i_2}(\vec{p})\, e^{i\vec{p}\vec{x} - i\varepsilon' p_o t} \qquad (8.72)$$

Siendo simétrica (cf. (8.2)),

$$d^{(\dot{\varepsilon})}(p) \in \varepsilon^{sim}_{sp}\ . \qquad (8.73)^{+}$$

+ ε^{sim}_{sp} se definió en Secc. 2.c-3.

que es subtendido [+] por los 10 spinores $u_{\varepsilon}(r,\vec{p})$, $u_{\mathcal{F}}(r,s,\vec{p})$ definidos en (4.18) y (4.19):

$$\psi_{i_1 i_2}(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varepsilon'=-1}^{1} \sum_{\varepsilon'=-1}^{1} \sum_{r} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_0}}\, e_{\varepsilon}^{(\varepsilon')}(r,\vec{p})\, u_{\varepsilon, i_1 i_2}(r,\vec{p})\, e^{i\vec{p}\,\vec{x} - i\varepsilon' p_0 t}$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varepsilon'=-1}^{1} \sum_{r,s} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_0}}\, K^{(\varepsilon')}(r,s,\vec{p})\, u_{\mathcal{F}\, i_1 i_2}(r,s,\vec{p})\, e^{i\vec{p}\vec{x} - i\varepsilon' p_0 t} \tag{8.74}$$

donde $c_{\varepsilon}^{(\varepsilon')}$ y $k^{(\varepsilon')}$ son coeficientes sin índices spinoriales.

E) CONSECUENCIAS DE LA CONDICIÓN SOBRE σ_1.

Usaremos como σ_1 el hiperplano definido por

$$t = x' = 0 \;. \tag{8.75}$$

Como nuestros resultados finales son covariantes ante transformaciones contínuas de Lorentz, la (8.75) no restringe las mismas.

Calculamos $\psi(0,\vec{x})$, e imponemos la primera (8.65). Como las $u_{\mathcal{F}}(r,s,\vec{p})$ no pertenecen a ω_{sp}^{p} (cf. (4.20)) sus coeficientes se anulan:

$$k^{(+1)}(r,s,\vec{p}) + k^{(-1)}(r,s,\vec{p}) = 0.$$

Hacemos lo mismo para la segunda (8.65), recordando que con el σ_1 elegido la dirección de su normal es $\mu = 0$. Resulta

$$k^{(+1)}(r,s,\vec{p}) - k^{(-1)}(r,s,\vec{p}) = 0,$$

de donde

$$k^{(\varepsilon)}(r,s,p) = 0 \quad \forall\ \varepsilon, r, s, \vec{p}. \tag{8.76}$$

+ Cf. Secc. 4.b-1.

con lo que la segunda integral en (8.74) desaparece:

$$\psi_{i_1 i_2}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varepsilon'=-1}^{1} \sum_{\varepsilon=-1}^{1} \sum_{r} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, e_{\varepsilon}^{(\varepsilon')}(r, \vec{p})\; u_{\varepsilon, i_1 i_2}(r, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\vec{x} - i\varepsilon' p_o t} \tag{8.77}$$

y ahora ψ cumple automáticamente la condición sobre σ_1.

G) DESCOMPOSICIÓN DE ψ EN $\psi^b + \psi^m$:

Como por una parte las seis u(r, p) son independientes entre sí, y por otra $e^{-ip_o t}$ y $e^{+ip_o t}$ son dos funciones independientes, tengo en (8.77) 6 × 2 = 12 funciones independientes, que reagruparé en dos,

$$\psi(x) = \psi^b(x) + \psi^m(x) \tag{8.78-a}$$

de esta manera: ψ^b está formada por los términos con = ',

$$\psi^b = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varepsilon=-1}^{1} \sum_{r} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, C_{\varepsilon}^{(\varepsilon)}(r, \vec{p})\, u_{\varepsilon}(r, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - i\varepsilon p_o t} \tag{8.78-b}$$

y ψ^m por los términos con $\varepsilon = -\varepsilon'$,

$$\psi^m = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varepsilon=-1}^{1} \sum_{r} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, C_{+\varepsilon}^{(-\varepsilon)}(r, \vec{p})\, u_{+\varepsilon}(r, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - i\varepsilon p_o t} \tag{8.78-c}$$

Por lo antedicho la descomposición existe y es única. Además ψ^b y ψ^m se pueden caracterizar por

$$i\, \partial_o\, \psi^b = H_{(1)}\, \psi^b = H_{(2)}\, \psi^b \tag{8.79-a}$$

$$-i\, \partial_o\, \psi^m = H_{(1)}\, \psi^m = H_{(2)}\, \psi^m \tag{8.79-b}$$

Además, <u>si ψ es una solución del problemavariacional, sus partes ψ^b y ψ^m también lo son</u>. Trataremos de demostrar que las ψ^m son nulas.

H) ECUACIONES QUE LIGAN A LAS PARTES VII, VIII, IV I y VI II de ψ^m.

La (8.79)

$$i\,\partial_o\,\psi^m = -\,H_{(i)}\,\psi^m\,, \qquad i=1,\,2$$

es

$$i\,\partial_o\,\psi^m = +\,i\,\nabla\cdot\alpha_{(i)}\;\psi^m = \gamma^o_{(i)}\;m\;\psi^m\,, \qquad i=1,\,2 \quad (8.80)$$

Aplicamos Λ^V y Λ^{VI}:

$$i\,\partial_o\,\psi^{m\,V} = i\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha}_{(i)}\,\psi^{m\,V} - \gamma^o_{(i)}\,m\,\psi^{m\;VI} \qquad (8.81\text{-a})$$

$$i\,\partial_o\,\psi^{m\;VI} = i\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha}_{(i)}\,\psi^{m\;VI} - \gamma^o_{(i)}\,m\,\psi^{m\;V} \qquad i=1,\,2 \qquad (8.81\text{-b})$$

y ahora Λ^I y Λ^{II}:

$$i\,\partial_o\,\psi^{mV\,I} = i\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha}_{(i)}\,\psi^{mV\,II} - \gamma^o_{(1)}\,m\,\psi^{m\;VI\;I} \qquad (8.82\text{-a})$$

$$i\,\partial_o\,\psi^{mV\,II} = i\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha}_{(i)}\,\psi^{mV\,I} - \gamma^o_{(i)}\,m\,\psi^{m\;VI\;II} \qquad (8.82\text{-b})$$

$$i\,\partial_o\,\psi^{m\;VI\;I} = i\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha}_{(i)}\,\psi^{m\;VI\;II} - \gamma^o_{(i)}\,m\,\psi^{m\;V\;I} \qquad (8.82\text{-c})$$

$$i\,\partial_o\,\psi^{m\;VI\;II} = i\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha}_{(i)}\,\psi^{m\;VI\;I} - \gamma^o_{(i)}\,m\,\psi^{m\;V\;II} \qquad (8.82\text{-d})$$

$$i=1,\,2.$$

I) DEMOSTRACIÓN DE QUE PARA TODA SOLUCIÓN ψ^m DEL PROBLEMA VARIACIONAL ES $\psi^{m\;V\,I} = 0$.

La (8.6-a) se escribe para ψ^m

$$\psi^{m\;VI} = \frac{i}{2m}\,(\gamma^o_{(1)}+\gamma^o_{(2)})\,\partial_o\,\psi\,\psi + \frac{i}{2m}\,(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)})\,\vec{\nabla}\psi^{m\;V}\,; \qquad (8.83)$$

para cada i multiplicamos (8.81-a) por $\gamma^o_{(i)}$ y semisumamos los ca sos $i=1$ e $i=2$.

$$\psi^{m\ VI} = \frac{-i}{2m}(\gamma^0_{(1)}+\gamma^0_{(2)})\,\partial_0\,\psi^{m\ V} + \frac{i}{2m}(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)})\cdot\nabla\,\psi^{m\ V} \quad (8.84)$$

Comparando con (8.83):

$$\psi^{m\ VI} = \frac{i}{2m}(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)})\,\vec{\nabla}\,\psi^{m\ V} \quad (8.85)$$

y

$$(\gamma^0_{(1)}+\gamma^0_{(2)})\,\partial_0\,\psi^{m\ V} = 0$$

de donde

$$\partial_0\,\psi^{m\ VI} = 0\ . \quad (8.86)$$

<u>Nótese que estos resultados no sólo valen en σ_1 sino para todo x^μ comprendido entre σ_1 y σ_2</u>. En efecto, la (8.79) si vale para $t=0$ vale para todo t (ver (8.78)).

Entonces podemos derivar (8.86) respecto del tiempo:

$$\partial_0^2\,\psi^{m\ V\ I} = 0\ .$$

$$\therefore\ (\Delta - m^2)\,\psi^{m\ V\ I} = 0$$

que siendo una ecuación elíptica homogénea en $\vec{x}$, y anulándose los campos para $\vec{x} \longrightarrow \infty$ implica

$$\psi^{m\ V\ I} = 0 \quad (8.88)$$

J) DEMOSTRACIÓN DE QUE TODA SOLUCIÓN ψ^m DEL PROBLEMA VARIACIONAL ES IDENTICAMENTE NULA.

Aplicando Λ^{II} a (8.85) y usando (8.88) obtenemos

$$\psi^{m\ VI\ II} = 0 \qquad \therefore \qquad \partial_0\,\psi^{m\ VI\ II} = 0. \quad (8.89)$$

Derivamos respecto al tiempo (8.82-b) y (c) y sustituímos (8.86) y (8.89); resulta

$$\partial_o^2 \psi^{m\ V\ II} = \partial_o^2 \psi^{m\ VI\ I} = 0$$

de donde, como para $\psi^{m\ V\ I}$,

$$\psi^{m\ V\ II} = \psi^{m\ VI\ I} \tag{8.90}$$

(8.88), (8.89) y (8.90) informan que

$$\boxed{\psi^{m} = 0} \quad , \forall x^{\mu} \tag{8.91-a}$$

o sea, en (8.78-a),

$$\psi = \psi^{b} \tag{8.91-b}$$

Con (8.79-a) tenemos finalmente:

$$\boxed{\text{Para toda } \psi \text{ es } i\,\partial_o \psi = H_{(1)} \psi = H_{(2)} \psi} \tag{8.91-c}$$

K) DEMOSTRACIÓN DE QUE TODA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA VARIACIONAL CUMPLE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER.

Basta multiplicar

$$i\ \partial_o\ \psi = H_{(1)}\psi$$

por $\gamma^o_{(1)}$ para obtener (1.1-a); idem (1.1-b).

De manera similar (8.68-b) implica la ecuación adjunta (1.10).

L) DEMOSTRACIÓN DE QUE TODA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER LO ES DEL PROBLEMA VARIACIONAL.

Es sabido que basta operar con $i\,\partial_\alpha\,\gamma^\alpha_{(1)}$ sobre (1.1-a) para obtener

$$\Box\,\psi = -\,m^2\,\psi$$

de donde, aplicando Λ^V decudimos (8.68-a).

Finalmente, como en 8.b-8-0, las soluciones de BW cumplen la (8.65).

CONCLUSIÓN:

ψ = solución de nuestro procedimiento variacional (formulacion 0)
$\Longleftrightarrow$ ψ = solución de las ecuaciones de BW. (8.92)

<u>8.b-10 - Nota sobre la falta de contradicción en cuanto al número de variables independientes</u>.

En la formulación 1/2 (resp. 0) del procedimiento variacional hemos usado variaciones $\delta\psi^V$ de 6 componentes spinoriales independientes. Pero, aunque injustificado, podría arguirse que quizás la (8.28) (resp. 865)) restrinja ese grado de libertad.

Para asegurar que no es así, basta recordar que nuestro procedimiento variacional <u>equivale</u> a las ecuaciones de BW (cf. (8.63) y (8.92)) u que las ecuaciones de BW aseguran a sus soluciones un grado de libertad spinorial también igual a 6 (cf. Secc. 2.c-5).

<u>8.b-11 - Corolario sobre la relación entre ψ^{VI} y ψ^V</u>.

Una vez demostradas las ecuaciones de B-W (1.1), aplicarles Λ^V ó Λ^{VI} permite simplificar las (8.6):

$$\psi^{VI}(x) = \frac{1}{m}\partial_\mu\, \gamma^\mu_{(k)}\, \psi^V(x), \quad \overline{\psi}^{VI}(x) = -\frac{1}{m}\left[\partial_\mu\, \overline{\psi}^V(x)\right]\gamma^\mu_{(k)},\ k=1,2 \tag{8.92'-a}$$

y añadir

$$\psi^V(x) = \frac{1}{m}\partial_\mu\, \gamma^\mu_{(k)}\, \psi^{VI}_{(x)}, \quad \overline{\psi}^V(x) = -\frac{1}{m}\left[\partial_\mu\, \overline{\psi}^{VI}(x)\right]\gamma^\mu_{(k)} \tag{8.92'-b}$$

8.c - SEGUNDO LEMA

8.c-1 - Elección de componentes independientes en ψ^V.

Observando (6.60) nos damos cuenta que en la representación usual de las γ^μ podemos elegir como componentes independientes las que siguen:

$$\left.\begin{array}{ll} \psi^{V(1)} = \frac{1}{2}\left(\psi_{11} + \psi_{33}\right) ; & \psi^{V(2)} = \frac{1}{2}\left(\psi_{12} + \psi_{34}\right) \\ \psi^{V(3)} = \psi_{13} ; & \psi^{V(4)} = \frac{1}{2}\left(\psi_{14} + \psi_{23}\right) \\ \psi^{V(5)} = \frac{1}{2}\left(\psi_{22} + \psi_{44}\right) ; & \psi^{V(6)} = \psi_{24} \end{array}\right\} \qquad (8.93)$$

que denotaremos con:

$$\psi^{V(A)}; \ A = 1, 2, \ldots, 6. \qquad (8.94)$$

Las $\psi^{V(A)}$ muestran desagradables asimetrías, pero no nos preocuparemos por ellas pues, con ayuda del lema a demostrar, las haremos desaparecer.

8.c-2 - Enunciado del segundo lema

"Sean

$$\theta^V \in \varepsilon^V \quad V, \quad \Omega^V \in \varepsilon^{\mathrm{sim}\,V}, \quad \chi^V \in \varepsilon^{\mathrm{sim}\,V} \qquad (8.95\text{-a})^{+}$$

entonces

$$1) \sum_{A=1}^{6} \left[\frac{\partial(\overline{\theta^V \Omega^V})}{\partial \Omega^{V(A)}}\right] \chi^{V(A)} = \left[\frac{\partial(\overline{\theta^V \Omega^V})}{\partial \Omega^V}\right] \chi^V \qquad (8.96\text{-a})$$

$$2) \sum_{A=1}^{6} \left[\frac{\partial(\overline{\theta^V \Omega^V})}{\partial \Omega^{V(A)}}\right] \chi^{V(A)} = \overline{\theta^V} \chi^V \qquad (8.97\text{-a})$$

análogamente, si $\chi^V \in \varepsilon^{\mathrm{sim}\,V}$ $\theta^V \in \varepsilon^{\mathrm{sim}\,V}$, $\Omega^V \in \varepsilon^V$ $\qquad (8.95\text{-b})^{++}$

\+ θ^V no es necesariamente simétrico.

++ Ω^V no es necesariamente simétrico.

$$1)\ \sum_{A=1}^{6} \overline{\chi^{V(A)}} \left[\frac{\partial(\overline{\theta^V \Omega^V})}{\partial\, \theta^{V(A)}} \right] = \overline{\chi^V} \left[\frac{\partial(\overline{\theta^V \Omega^V})}{\partial\, \overline{\theta^V}} \right] \tag{8.96-b}$$

$$2)\ \sum_{A=1}^{6} \overline{\chi^{V(A)}} \left[\frac{\partial(\overline{\theta^V}\, \Omega^V)}{\partial\, \theta^{V(A)}} \right] = \overline{\chi^V}\, \Omega^V \text{ " }. \tag{8.97-b}$$

Las derivadas que aparecen en los segundos miembros son las definidas en Secc. 8.b-7. Las derivadas que aparecen en los primeros miembros son las calculadas poniendo las 16 $(\Omega^V)_{ij}$ y las 16 $(\theta^V)_{ij}$ en función de las seis $\Omega^{V(A)}$ y de las seis $\theta^{V(A)}$.

La demostración se efectúa en A8-1.

8.c-3 - Rol del segundo lema

Los observables del campo se construyen con expresiones tipo

$$\sum \frac{\partial(\overline{\theta_i\, \Omega})}{\partial \Omega}\, x_k \quad y \quad \sum \bar{x}_k\, \frac{\partial(\overline{\theta_i}\, \Omega_i)}{\partial\, \bar{\theta}_k}$$

donde se suma usualmente sobre las componentes independientes de los campos; en nuestro caso ello conduce a evaluar expresiones tipo 1er. miembro de (8.96) y (8.97), es decir, a cálculos desagradables, laboriosos y dependientes de la representación. Lo cual se evita con el 2° lema.

8.d- LA CORRIENTE

8.d-1 - Formulación 1/2

La densidad lagrangeana $\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}$ (8.24) es invariante ante una trans formación infinitesimal de fase. Como es bien sabido, ello implica la existencia de una corriente conservada,

$$j^{(\frac{1}{2})\mu} = e\ i \sum_{A=1}^{6} \left[\overline{\psi}^{V(A)} \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi}^{V(A)})} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\mu \psi^{V(A)})} \psi^{V(A)} \right] \quad (8.98)$$

En (8.96-b) ponemos:

$$\theta^{\bar{v}} = \partial_\mu \psi^V_\mu \ ; \Omega^V = \frac{1}{m} \gamma^o_{(1)} \gamma^I_{(2)} \partial_\tau \psi^V ; \ \chi^V = \psi^V \quad (8.99)$$

que <u>son compatibles con la definición de Λ^V</u>. En efecto, por ejemplo la 2a. es correcta porque siendo

$$\Lambda^V \gamma^\mu_{(1)} \gamma^\tau_{(2)} = \gamma^\mu_{(1)} \gamma^\tau_{(2)} \Lambda^V,$$

si $\psi^V \epsilon\ \mathcal{E}^{\text{sim}\, V}$ es

$$\frac{1}{m} \gamma_{(1)} \gamma_{(2)} \partial_\tau \psi^V \epsilon\ \mathcal{E}^V$$

Entonces,

$$\sum_{A=1}^{6} \overline{\psi}^{V(A)} \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi}^{V(A)})} = \frac{1}{m} \overline{\psi}^V \gamma^\mu_{(1)} \gamma^\tau_{(2)} \partial_\tau \psi^V \quad (8.100\text{-a})$$

Análogamente,

$$\sum_{A=1}^{6} \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\mu \psi^{V(A)})} \psi^{V(A)} = \frac{1}{m} (\partial_\sigma \overline{\psi}^V) \gamma^o_{(1)} \gamma^\mu_{(2)} \psi^V \quad (8.100\text{-b})$$

de manera que

$$j^{(\frac{1}{2})\mu} = \frac{ei}{m} \left[\overline{\psi}^V \gamma^\mu_{(1)} \gamma^\tau_{(2)} \partial_\tau \psi^V - (\partial_\sigma \overline{\psi}^V) \gamma^o_{(1)} \gamma^\mu_{(2)} \psi^V \right] \quad (8.101)$$

Con (8.92'),

$$j^{(\frac{1}{2})\mu} = e \left[\overline{\psi}^V \gamma^\mu_{(1)} \psi^{VI} + \overline{\psi}^{VI} \gamma^\mu_{(2)} \psi^V \right].$$

Por (2.31) podemos sustituir la $\gamma^\mu_{(2)}$ del último sumando por $\gamma^\mu_{(1)}$, pero como además es

$$\overline{\psi}^{V}\,\gamma^{\mu}_{(1)}\,\psi^{V} = \overline{\psi}^{VI}\,\gamma^{\mu}_{(1)}\,\psi^{VI} = 0$$

queda

$$\boxed{j^{(\frac{1}{2})\mu} = e\,\psi\;\gamma^{\mu}_{(1)}\,\psi} \qquad (8.102)^{*}$$

Se puede verificar que las ecuaciones de BW implican

$$\partial_{\mu}\, j^{(\frac{1}{2})\mu} = 0\ . \qquad (8.103)^{*}$$

La (8.102) es formalmente análoga a la corriente $e\,\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\psi$ del electrón.

8.d-2 - Formulación 0

Es

$$j^{(o)\mu} = e\,i\sum_{A=1}^{6}\left[\overline{\psi}^{V(A)}\,\frac{\partial\,\mathcal{L}^{(o)}}{\partial(\partial_{\mu}\,\psi^{V(A)})} - \frac{\partial\,\mathcal{L}^{(o)}}{\partial(\partial_{\mu}\,\psi^{V(A)})}\,\psi^{V(A)}\right] \qquad (8.104)$$

Usando (8.25) obtenemos (procediendo como en la formulación 1/2)

$$\boxed{j^{(o)\mu} = \frac{e\,i}{m}\left[\psi^{V}\partial^{\mu}\,\psi^{V} - (\partial^{\mu}\;\overline{\psi}^{V})\,\psi^{V}\right]} \qquad (8.105)$$

formalmente análoga a la corriente $e\,i\left[\varphi^{*}\partial^{\mu}\,\varphi - (\partial^{\mu}\,\varphi)^{*}\,\varphi\right]$ $(8.106)^{*}$ para spin cero cargado (salvo el factor 1/m mencionado en Secc. 8.a-2). La analogía no es de extrañar dada la correspondiente analogía del lagrangeano.

Las ecuaciones de BW implican las de Klein-Gordon, las que a su vez permiten verificar

$$\partial_{\mu}\, j^{(o)\mu} = 0 \qquad (8.106')$$

8.d-3 - Comparación entre las dos formulaciones

Llamamos

$$\boxed{\Delta j^{\mu} = j^{(o)\mu} - j^{(\frac{1}{2})\mu}} \tag{8.107}$$

Queremos calcular Δj^{μ}. En (8.101), 2° miembro, podemos sustituir

$$\gamma^{\tau}_{(2)} \longrightarrow \gamma^{\tau}_{(1)}$$

gracias a (8.62-b). Por otra parte, por (2.31) podemos sustituir

$$\gamma^{\sigma}_{(1)}\ \gamma^{\mu}_{(2)} \longrightarrow \gamma^{\mu}_{(1)}\ \gamma^{\sigma}_{(2)}$$

y, como más arriba,

$$\gamma^{\sigma}_{(2)} \longrightarrow \gamma^{\sigma}_{(1)}$$

En definitiva queda

$$j^{(\frac{1}{2})\mu} = \frac{ei}{m}\left[\bar{\psi}^{V}\ \gamma^{\mu}_{(1)}\gamma^{\tau}_{(1)}\partial_{\tau}\ \psi^{V} - (\partial_{\sigma}\bar{\psi}^{V})\ \gamma^{\mu}_{(1)}\gamma^{\sigma}_{(1)}\ \psi^{V}\right] \tag{8.108}$$

(8.105) y (8.108) en (8.107) dan, luego de un cálculo directo,

$$\boxed{\Delta j^{\mu} = \frac{e}{m}\partial_{\alpha}\ (\psi^{V}\ \sigma^{\alpha\mu}_{(i)}\ \ \psi^{V})}\quad ,\ i = 1,2 \tag{8.109}$$

con $\sigma^{\alpha\mu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\mu}\right]$.

Las dos corrientes son (al menos) globalmente equivalentes en cuanto dan la misma carga total: En un hiperplano $x^{o} =$ $=$ const.,

$$\boxed{\int d^3x\ j^{(\frac{1}{2})o} = \int d^3x\ j^{(o)o}} \tag{8.111-a}$$

Esta última ecuación se obtiene trivialmente a partir de (8.109).

La corriente total es un 4-vector de tipo temporal +. Por

\+ En la teoría número c el primer miembro de (8.111-a) vale $\pm$ 1 (cf. (8.112) y Secc. 3.aI) y, por lo tanto, no puede anularse.

lo tanto (8.111-a) nos dice que hay un sistema de referencia en que

$$\boxed{\int d^3x \; j^{(\frac{1}{2})\mu} = \int d^3x \; j^{(o)\mu}} \qquad (8.111\text{-b})$$

Vía transformación de Lorentz, la (8.111) vale en todo sistema inercial.

Las dos formulaciones proporcionan, pues, no sólo la misma carga total, sino también la misma corriente total.

8.d-4 - Comparación con la aproximación de una carga

La corriente que coincide con la usada en la aproximación de una carga es la de la formulación 1/2,

$$\boxed{j^{(\frac{1}{2})\mu} = j^{\mu}_{1\ \text{carga}}} \qquad (8.112)$$

(Ver (3.2-b) y (8.102)).

8.d-5) Comparación con otros formalismos

Por (7.28) y (7.29), ó bien por (7.12) se ve que la corriente que se traduce en la corriente usualmente empleada [21,30] en el formalismo de Proca

$$j^{\mu}_{\text{Proca}} = \frac{ei}{m^2} \left(G^{*\mu\nu} \, U_\nu = G^{\mu\nu} \, U^*_\nu\right) \qquad (8.113)^{**}$$

es nuevamente la de la formulación 1/2:

$$j^{(\frac{1}{2})\mu} = j^{\mu}_{\text{Proca}} \qquad (8.114\text{-a})$$

En cuanto a la $j^{(o)\mu}$, se traduce al formalismo de Proca en

$$j^{(o)\mu} = \frac{e\,i}{2\,m^3}\left[G^*_{\alpha\beta}\,\partial^\mu\,G^{\alpha\beta} - (\partial_\mu\,G^*_{\alpha\beta}\quad)G^{\alpha\beta}\right]; \qquad (8.114\text{-b})$$

Para probarlo, basta tener en cuenta que

1) por Secc. 7.b-5 extraer de ψ la parte ψ^V equivale en el formalismo de Proca a extraer la parte $G^{\alpha\beta}$ del conjunto $G^{\alpha\beta}$, U^α;

2) $\psi\ \partial^\mu\ \psi$ se obtiene de $F^{\dot{}}$ (7.9) mediante

$$\overline{\psi'} \longrightarrow \overline{\psi}$$

$$\psi \longrightarrow \partial^\mu\ \psi$$

3) sustitución similar para $(\partial^\mu\ \overline{\psi})\,\psi$.

En lo referente a la comparación con otros formalismos, mediante (8.112) nos remitimos a lo dicho en la aproximación de una carga (Secc. 3-b).

8.d-6 - Representación momento

Por completitud repetios aquí la (4.47), teniendo en cuenta (8.111) y (8.112):

$$\boxed{\text{Carga total} = \int d^3x\ j^{(\frac{1}{2})o} = \int d^3x\ j^{(o)o} = e\sum_r\int d^3p\left\{|a(r,\vec{p})|^2 - |b(r,\vec{p})|\right\} \qquad (8.115)}$$

8.d-7 - Nota sobre la diversidad de corrientes

En Secc. 6.g hemos demostrado que el único 4-vector de 4-divergencia nula que puede construirse a partir de $\overline{\psi}$ y ψ sin usar derivadas es

$$j^\mu = j^{(\frac{1}{2})\mu}$$

Ello no contradice (8.109) pues $j^{(o)\mu}$ se construye con derivadas.

8.e - EL TENSOR ENERGIA-MOMENTO. EL 4-VECTOR MOMENTO TOTAL

8.e-1 - Formulación 1/2.

La densidad lagrangeana $\mathcal{L}$(8.24) es invariante ante traslaciones. Como es bien sabido, de aquí se deduce el tensor energía momento canónico,

$$T^{(\frac{1}{2})\mu\nu} = \sum_{A=1}^{6} \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\mu \psi^{V(A)})} \partial^\nu \psi^{V(A)} + (\partial^\nu \psi^{V(A)}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^{V(A)})} - \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})} g^{\mu\nu} \right] \tag{8.116}$$

tal que

$$\partial_\mu T^{(\frac{1}{2})\mu\nu} = 0 \; . \tag{8.117)*$$

Las componentes independientes $\psi^{V(A)}$ pueden tomarse de (8.93). Pero así como para la corriente (Secc. 8.d-1) puede usarse el 2° lema para no tener que lidiar con las engorrossas y asimétricas $\psi^{V(A)}$; el procedimiento es completamente análogo al allí empleado. El resultado es

$$T^{(\frac{1}{2})\mu\nu} = \frac{1}{m} \left[(\partial_\sigma \overline{\psi}^V) \gamma^\sigma_{(1)} \gamma^\mu_{(2)} \partial^\nu \psi^V + (\partial^\nu \overline{\psi}^V) \gamma^\mu_{(1)} \gamma^\tau_{(2)} \partial_\tau \psi^V \right] \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})} g^{\mu\nu} \tag{8.118}$$

Utilizamos (8.92'), y si tenemos en cuenta que (2.32) nos permite sustituir $\gamma^\mu_{(2)} \longrightarrow \gamma^\mu_{(1)}$, obtenemos,

$$T^{(\frac{1}{2})\mu\nu} = i \left[\overline{\psi}^{VI} \gamma^\mu_{(1)} \partial^\nu \psi^V - (\partial^\mu \psi^V) \gamma^\mu_{(1)} \psi^{VI} \right]. \tag{8.119}$$

Sumamos y restamos en el 2º miembro

$$\frac{1}{2}\partial^{\nu}\left(-\ \psi^{VI}\gamma^{\mu}_{(1)}\ \psi^{V}+\psi^{V}\ \gamma^{\mu}_{(1)}\ \psi^{VI}\right)$$

desarrollamos las derivadas y tenemos en cuenta (cf. (6.59-b) y (6.54)),

$$\psi^{VI}\ \gamma^{\mu}_{(1)}\partial^{\nu}\ \psi^{VI}=0$$

y otras identidades análogas. Resulta, finalmente.

$$\boxed{T^{(\frac{1}{2})\mu\nu}=\frac{1}{2}\bar{\psi}\ \ \gamma^{\mu}_{(1)}\partial^{\nu}\psi-\frac{1}{2}\ (\partial^{\nu}\ \bar{\psi})\ \gamma^{\mu}_{(1)}\psi} \qquad (8.121)$$

<u>que es formalmente análogo al tensor energía momento canónico</u>

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\ \bar{\psi}\ \ \gamma^{\mu}\ \ \partial^{\nu}\psi-\frac{1}{2}\ (\partial^{\nu}\ \bar{\psi}\ )\ \gamma^{\mu}\ \psi$$

<u>válido en spin 1/2</u>.

Como es bien sabido, (8.117) implica que el 4-vector momento

$$P^{(\frac{1}{2})\nu}=\int d\sigma_{\mu}\ \ T^{(\frac{1}{2})\mu\nu} \qquad (8.122\text{-a})^{**}$$

se conserva:

$$\partial o\ P^{(\frac{1}{2})\nu}=0\ . \qquad (8.123)^{*}$$

Si el hiperplano o es perpendicular al eje x_o, es (cf. A8-3),

$$\boxed{P^{(\frac{1}{2})\nu}=\int d^{3}x\ (\psi,\ i\,\partial^{\nu}\psi)_{sp}\ .} \qquad (8.122\text{-b})$$

Esta igualdad, es <u>formalmente análoga a la de spin 1/2</u>.

$$P^{\nu}=\int d^{3}x\ (\psi,\ i\,\partial^{\nu}\psi)_{sp}\ .$$

En efecto, al pasar de spin 1 a spin 1/2 debemos reemplazar el producto escalar spinorial (2.2)

$$(\psi,\varphi)_{sp} = \psi^T \gamma^o_{(2)} \varphi \qquad (8.124\text{-a})$$

que usamos en spin 1 por el producto escalar spinorial

$$(\psi,\varphi)_{sp} = \psi^+ \varphi \qquad (8.124\text{-b})^{**}$$

que se usa en spin 1/2.

8.e-2 - Formulación 0.

Es

$$T^{(o)\mu\nu} = \sum_{A=1}^{6} \left[\frac{\partial \mathcal{L}^{(o)}}{\partial(\partial_\mu \psi^{V(A)})} \partial^\nu \psi^{V(A)} + (\partial^\nu \overline{\psi}^{V(A)}) \frac{\partial \mathcal{L}^{(o)}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi}^{V(A)})} - \right.$$

$$\left. - \mathcal{L}^{(o)} g^{\mu\nu} \right] \qquad (8.125)$$

Procediendo como en la formulación 1/2 obtenemos usando (8.25),

$$\boxed{T^{(o)\mu\nu} = \frac{1}{m} (\partial^\mu \overline{\psi}^V)(\partial^\nu \psi^V) + \frac{1}{m} (\partial^\nu \psi^V)(\partial^\mu \psi^V) - \mathcal{L}^{(o)} g^{\mu\nu} \qquad (8.126)}$$

tal que

$$\partial_\mu T^{(o)\mu\nu} = 0 \ . \qquad (8.127)$$

La (8.126) es formalmente equivalente al tensor energía-momento

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\mu \varphi^*)(\partial^\nu \varphi) + (\partial^\nu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - \mathcal{L}\, g^{\mu\nu}$$

usado para spin 0.

El 4-momento conservado es

$$P^{(o)\nu} = \int d\sigma_\mu \, T^{(o)\mu\nu} \qquad (8.128)$$

tal que

$$\partial_o \, P^{(o)\nu} = 0 \; . \qquad (8.129)^*$$

Reemplazando (8.126) y (824) en (8.128) se obtiene (con σ perpendicular al eje x^o),

$$\boxed{P^{(o)o} = \frac{1}{m}\int d^3x^3 \left[m^2 \, \overline{\psi}^V\psi^V + (\partial^o \, \overline{\psi}^V)(\partial^o \, \psi^V) + (\vec{\nabla} \, \overline{\psi}^V)(\vec{\nabla} \, \psi^V)\right]} \qquad (8.130)$$

y

$$\boxed{P^{(o)a} = \frac{1}{m}\int d^3x \left[(\partial^a \, \overline{\psi}) \; \partial_o \, \psi^V + (\partial_o \, \overline{\psi}^V)(\partial^a \;\; \psi^V)\right]} \qquad (8.131)$$

8.e-3 - Comparación entre las dos formulaciones.

Los dos tensores energía momento canónicos $T^{(\frac{1}{2})\mu\nu}$ y $T^{(o)\mu\nu}$ no parecen ser idénticos, pero sí lo son los cuadrivectores energía-momento total,

$$\boxed{P^{(\frac{1}{2})\nu} = P^{(o)\nu}} \qquad (8.132)$$

según se demuestra en A8-4.

8.e-4 - Comparación con la aproximación de una carga

De (8.132), (8.122-b), Secc. 3. h, Secc. 3.a VII y (2.2),

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{P}^{(\frac{1}{2})} &= \vec{P}^{(o)} = (\psi, \, \vec{p}_{\substack{\text{operador}\\ \text{aprox}\\ \text{1 carga}}} \, \psi) = \\ &= \langle \vec{p} \rangle_{\substack{\text{aprox}\\ \text{1 carga}}} \end{aligned}} \qquad (8.133\text{-a})$$

Para la componente temporal procedemos análogamente, pero reemplazando i ∂_o por H mediante (3.4):

$$\boxed{\begin{aligned} P^{(\frac{1}{2})o} = P^{(o)o} &= (\psi, H_{\substack{\text{operador}\\ \text{aprox}\\ \text{1 carga}}} \psi) = \\ &= \langle H \rangle_{\substack{\text{aprox}\\ \text{1 carga}}} \end{aligned}} \qquad (8.133\text{-b})$$

como era de descar.

8.e-5 - Comparación con otros formalismos

Recordando que por (2.31) y (2.27-a) es

$$\gamma^o_{(2)} \underset{\omega}{\sim} \frac{1}{2} (\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)}) \qquad (8.134)$$

se demuestra a partir de (8.65) que P^{ν} es equivalente al 4-vector momento de Belinfante [4].

Usando (1.6), $T^{(\frac{1}{2})\mu\nu}$ se traslada en el tensor energía-momento de Kemmer [15] quien lo postula (pero Pauli [21] lo demuestra).

En el formalismo de Proca (1.7") el momento 3-dimensional es [30]

$$P^{(\text{Proca})\,a} = \frac{1}{m^2} \int \left[\vec{E}^* \cdot \partial^a \vec{U} + \vec{E} \cdot \partial^a \vec{U}^*\right] d^3x \qquad (8.135\text{-a})^{**}$$

y la energía del campo [21, 30],

$$P^{(\text{Proca})o} = \frac{1}{m} \int \left[V^*V + \vec{U}^* \cdot \vec{U} + \vec{E}^* \cdot \vec{E} + \vec{H}^* \cdot \vec{H}\right] d^3x \ . \qquad (8.135\text{-b})^{**}$$

Empleando (7.12) con $\psi' \longrightarrow \psi$ y $\psi \longrightarrow \partial^a \psi$ deducimos de

(8.122-b), (8.132) y (8.135-a),

$$\vec{p}^{(\frac{1}{2})} = \vec{p}^{(o)} = \vec{p}^{(Proca)} \quad . \qquad (8.136\text{-a})$$

Utilizando los resultados de Secc. 7.b-4C y teniendo en cuenta (8.133-b) y (8.135-b), obtenemos

$$p^{(\frac{1}{2})o} = p^{(o)o} = p^{(Proca)o} \qquad (8.136\text{-b})$$

8.e-6 - Representación momento

De (1.33), (4.48) y (4.49) deducimos

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{p}^{(\frac{1}{2})} = \vec{p}^{(o)} &= \sum_r \int d^3p\ \vec{p}\ \left\{|a(r,\vec{p})|^2 + |b(r,-\vec{p})|^2\right\} \\ p^{(\frac{1}{2})o} = p^{(o)o} &= \sum_r \int d^3p\ p^o\ \left\{|a(r,\vec{p})|^2 + |b(r,-\vec{p})|^2\right\} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (8.137\text{-a}) \\ (8.137\text{-b}) \end{aligned}$$

$p^o = + \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$.

Como es bien sabido, para spin 1 la energía total del campo es definida positiva (lo cual no ocurre para spin 1/2), aún en la 1a. cuantificación.

8.f - EL TENSOR DENSIDAD DE MOMENTO ANGULAR. EL TENSOR MOMENTO ANGULAR.

8.f-1 - Formulación 1/2

A) EL PROCEDIMIENTO HABITUAL

La densidad lagrangeana $\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}$ (8.24) es invariante ante rotaciones infinitesimales,

$$x^{\mu} \longrightarrow x^{o\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_{\mu\nu}\ x^{\nu}, \qquad |\varepsilon_{\mu\nu}| \ll 1 \qquad (8.38)^{**}$$

lo cual, como es bien sabido implica la existencia de un tensor densidad de momento angular total $M_{tot}^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu}$ tal que

$$\partial_{\lambda} M_{tot}^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu} = 0 \ . \qquad (8.139)^*$$

Siendo nuestras variables las $\psi^{V(A)}$ y $\overline{\psi}^{V(A)}$ (por ejemplo las (8.93)) el procedimiento habitual nos conduciría a escribir

$$M_{tot}^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu} = M_{orb}^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu} + M_{spin}^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu} \qquad (8.140)$$

$$M_{orb}^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu} = x\ \ T^{(\frac{1}{2})\lambda\mu} - x^{\mu}\ T^{(\frac{1}{2})\lambda\mu} \qquad (8.141)$$

(donde $T^{(\frac{1}{2})\mu\nu}$ es el tensor energía momento canónico) y

$$M_{spin}^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu} = -\sum_{A=1}^{6}\sum_{B=1}^{6} \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_{\lambda}\ \psi^{V(A)})} A_{AB}^{\mu\nu}\ \psi_{B}^{V} - \sum_{A=1}^{6}\sum_{B=1}^{6} \overline{\psi}^{V(A)}$$

$$\overline{A}_{AB}\ \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_{\lambda}\ \overline{\psi}^{V(B)})} \qquad (8.142)$$

donde A_{AB} y $\overline{A}_{AB}$ son tales que

$$\delta\psi^{V(A)}(x) = \psi^{V(A)}(x') - \psi^{V(A)}(x) = \frac{1}{2}\sum_{B=1}^{6} \varepsilon_{\mu\nu}\ A_{AB}^{\mu\nu}\ \psi^{V(B)}(x), \qquad (8.143\text{-a})$$

$$\delta\psi^{V(A)}(x) = \overline{\psi}^{V(A)}(x') - \overline{\psi}^{V(A)}(x) = \frac{1}{2}\sum_{B=1}^{6} \varepsilon_{\mu\nu}\ \overline{\psi}^{V(B)}_{(x)} A_{BA}^{\mu\nu} \qquad (8.143\text{-b})$$

B) DIFICULDAD.

(8.142) nos envuelve nuevamente con las $\psi^{V(A)}$, lo cual como ya reiteradamente hemos dicho conduce a cálculos engorrosos y asimétricos; esto se agrava ahora con las A_{AB} de por medio. Para los observables anteriores nos auxilió el 2° lema, pero las A_{AB} intercaladas en (8.142) oscurecen un poco su aplicación directa.

SOLUCIÓN

Contraemos (8.142) con y usamos (8.143):

$$M_{spin}^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} = -2\sum_{A=1}^{6}\frac{\partial\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\lambda\ \psi^{V(A)})}\delta\psi^{V(A)} - 2\sum_{A=1}^{6}\delta\bar{\psi}^{V(A)}\frac{\partial\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\lambda\psi^{V(A)})} \tag{8.144}$$

Los términos del 2° miembro son ahora justamente de la forma de los primeros miembros de (8.96) por lo que el segundo lema es claramente aplicable:

$$M_{spin}^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} = -2\frac{\partial\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\lambda\psi^{V})}\delta\psi^{V} - 2\,\delta\bar{\psi}^{V}\frac{\partial\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\lambda\bar{\psi}^{V})} \tag{8.145}$$

Por Secc. 8.a-1 es

$$\delta\psi = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\,(\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu})\,\psi\,, \qquad (8.146\text{-a})^{**}$$

$$\delta\bar{\psi} = +\frac{i}{4}\bar{\psi}\,(\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu})\,\varepsilon_{\mu\nu}\,, \qquad (8.146\text{-b})^{**}$$

donde nosotros el signo de $\sigma^{\mu\nu}$ lo definimos tal que

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu). \qquad (8.147)^{**}$$

Como $\sigma_{(1)}^{\mu\nu}$ $(i=1,\ 2)$ conmuta con Λ^V, es

$$\delta\psi^V = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\,(\sigma_{(1)}^{\mu\nu} + \sigma_{(2)}^{\mu\nu})\,\psi^V \tag{8.148-a}$$

$$\delta \overline{\psi}^{V} = + \frac{i}{4} \overline{\psi}^{V}(\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)})\varepsilon_{\mu\nu} . \qquad (8.148\text{-b})$$

Reemplazamos en (8.145) e igualamos en ambos miembros la parte antisimétrica de los coeficientes de las $\varepsilon_{\mu\nu}$:

$$M^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu}_{spin} = \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\lambda \psi^{T})} \left[\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)} \psi^{V}\right] - \frac{i}{2} \left[\overline{\psi}^{V} (\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)})\right] \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_\lambda \overline{\psi}^{V})} \qquad (8.149)$$

Ahora, el primer corchete pertene a ε^{simV} (resp. ε^{simV}) de manera que podemos completar el uso del 2° lema, empleando las (8.97). El resultado es,

$$M^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu}_{spin} = \frac{i}{2m} (\partial_\sigma \overline{\psi}^{V}) \gamma^{\sigma}_{(1)} \gamma^{\lambda}_{(2)} (\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)}) \psi^{V} -$$

$$- \frac{i}{2m} \overline{\psi}^{V}(\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)}) \gamma^{\lambda}_{(1)} \gamma^{\tau}_{(2)} \partial_\tau \psi^{V}$$

M edienta (8.92') podemos simplificar,

$$M^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu}_{spin} = - \frac{1}{2} \overline{\psi}^{VI} \gamma^{\lambda}_{(2)}(\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)}) \psi^{V} - \frac{1}{2} \overline{\psi}^{V}(\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)})\gamma^{\lambda}_{(1)} \psi^{VI} \qquad (8.150)$$

Como $|\overline{\psi}^{V}(\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)})|_{i_2 i_1}$ es simétrica en los índices spinoriales $i_1 i_2$, la (2.32) nos permite cambiar $\gamma^{\lambda}_{(2)} \longrightarrow \gamma^{\lambda}_{(1)}$. Entonces,

$$\boxed{M^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu}_{spin} = \frac{1}{2} \psi^{VI} \gamma^{\lambda}_{(1)}(\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)}) \psi^{V} - \frac{1}{2} \overline{\psi}^{V}(\sigma^{\mu\nu}_{(1)} + \sigma^{\mu\nu}_{(2)})\gamma^{\lambda}_{(1)} \psi^{VI} \qquad (8.151)}$$

que <u>no se asemeja mucho al tensor densidad de momento angular para spin 1/2</u>,

$$M^{\lambda;\mu\nu}_{spin} = -\frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma^{\lambda}\;\sigma^{\mu\nu}\psi - \frac{1}{4}\bar{\psi}\,\sigma^{\mu\nu}\gamma^{\lambda}\,\psi \qquad (8.152)^{**}$$

Esto no es de extrañar, pues justamente lo que diferencia a un electrón de un mésón vectorial es el spin. Sin embargo para el tensor de momento angular $J^{ab}(a,b = 1,2,3)$ la diferencia disminuye.

Como es usual, obtenemos los tensor es momento angular $J^{\mu\nu}$ a partir de las densidades $M^{\lambda;\mu\nu}$,

$$J^{(\frac{1}{2})\mu\nu}_{Q} = \int d\sigma_{\lambda}\;M^{(\frac{1}{2})\lambda;\mu\nu}_{Q} \qquad (8.153)^{**}$$

Q = tot, orb ó spin.

Elegimos la hipersuperficie σ perpendicular al eje x^{o}. Entonces de (8.151),

$$-J^{(\frac{1}{2})a}_{spin} = J^{(\frac{1}{2})bc}_{spin} = \frac{1}{2}\int\Big[\bar{\psi}^{VI}\,\gamma^{o}_{(1)}(\sigma^{bc}_{(1)} + \sigma^{bc}_{(2)})\,\psi^{V} +$$

$$+\bar{\psi}^{V}\,\gamma^{o}_{(1)}(\sigma^{bc}_{(1)} + \sigma^{bc}_{(2)})\,\psi^{VI}\Big]\;d^{3}x \qquad (8.154)$$

a,b,c = 1,2,3 y permutaciones cíclicas. Por lo tanto,

$$\boxed{\begin{aligned} -J^{(\frac{1}{2})a}_{spin} = J^{(\frac{1}{2})bc}_{spin} &= -\int \psi\,\gamma^{o}_{(1)}\,\frac{(\sigma^{bc}_{(1)} + \sigma^{bc}_{(2)})}{2}\,\psi\, d^{3}x \\ &= -\int\left(\psi,\,\frac{(\sigma^{bc}_{(1)} + \sigma^{bc}_{(2)})}{2}\,\psi\right)_{sp} d^{3}x \end{aligned}} \qquad (8.155)$$

$J^{(\frac{1}{2})a}_{spin}$ es el spin del campo. Para spin 1/2 el resultado (bien conocida) es

$$-J^{a}_{spin} = \frac{1}{2}\int \psi\,(\gamma^{o}\ \sigma^{bc})\psi\ d^{3}x \qquad (8.156\text{-a})^{**}$$

$$= \int\left(\psi,\ \frac{\sigma^{bc}}{2}\psi\right)_{sp} d^{3}x\ . \qquad (8.156\text{-b})^{**}$$

<u>Se pasa de spin 1 a spin 1/2 reemplazando los producto escalares spinoriales como en (8.24) y reemplazando</u>.

$$\frac{\left(\sigma^{bc}_{(1)} + \sigma^{bc}_{(2)}\right)}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}\,\sigma^{bc} \qquad (8.157)$$

<u>que es lo que cabría esperar</u>.

En cuanto a $J^{(\frac{1}{2})o\,a}$ que está asociado con el movimiento del centro de masa [29] la parte de spin resulta ser

$$J^{(\frac{1}{2})o\,a}_{spin} = -i\int d^{3}x\left[\psi^{VI}\,\gamma^{o}_{(2)}\alpha^{a}_{(1)}\,\psi^{V} + \psi^{V}\,\gamma^{o}_{(2)}\,{}^{a}_{(1)}\,\psi^{VI}\,\psi^{I}\right. = \qquad (8.158)$$

$$\boxed{-\,i\int d^{3}x\ \psi^{+}\,\gamma^{a}_{(1)}\ \psi = -\,i\int d^{3}x(\psi,\ \gamma^{o}_{(2)}\gamma^{a}_{(1)}\ \psi)_{sp}} \qquad (8.159)$$

mientras que para spin 1/2 es [16]

$$J^{o\,a}_{spin} = 0\ . \qquad (8.160)^{**}$$

<u>Esta es la primera diferencia formal que encontramos entre spin 1 y spin 1/2</u> que no se reduzca a

1) cambiar el signo de un segundo miembro (ver ejemplos en Cap. 4);
2) cambiar el producto escalar (ver ejemplos en este capítulo y en el 3°);
3) complicaciones debidas a la existencia de componentes redundan

tes (Cap. 2, 3, 6 y 8).

Salvo la 1), las restantes podían ser encubiertas por una escritura que paralelizaba spin 1 y 1/2. Esto no lo podemos hacer con las componentes 0i del tensor de spin.

En realidad, aún nos falta probar que el 2° miembro de (8.159) no es idénticamente nulo, como podría ocurrir vía componentes redundantes (cf. Cap. 2). Por ello en A8-5 construímos una $\psi \in \omega_t$ que no anula a (8.159), con lo cual queda probado que

$$J^{(\frac{1}{2})oa}_{spin} \neq 0 \qquad (8.160')$$

8.f-2 - Formulación 0

Procediendo como en la formulación 1/2, obtenemos la densidad de momento angular total,

$$M^{(o)\lambda;\mu\nu}_{tot} = M^{(o)\lambda;\mu\nu}_{orb} + M^{(o)\lambda;\mu\nu}_{spin} \qquad (8.161)$$

tal que

$$\partial_\lambda M^{(o)\lambda;\mu\nu}_{tot} = 0 \qquad (8.162)^{**}$$

donde

$$M^{(o)\lambda;\mu\nu}_{orb} = x^\nu\, T^{(o)\lambda\mu} - x^\mu\, T^{(o)\lambda\nu} \qquad (8.163)$$

y [en lugar de (8.145)],

$$M^{(o)\lambda;\mu\nu}_{spin}\varepsilon_{\mu\nu} = -2\,\frac{\partial\mathscr{L}^{(o)}}{\partial(\partial_\lambda\psi^V)}\,\delta\psi^V - 2\,\delta\bar{\psi}^V\,\frac{\partial\mathscr{L}^{(o)}}{\partial(\partial_\lambda\psi^V)} \qquad (8.164)$$

Con ayuda de (8.146) y (8.25) deducimos

$$M^{(o)\lambda;\mu\nu}_{spin} = \frac{i}{m}(\partial^{\lambda}\bar{\psi}^{V})\left[\frac{(\sigma^{\mu\nu}_{(1)}+\sigma^{\mu\nu}_{(2)})\psi^{V}}{2}\right] - \frac{i}{m}\left[\psi^{V}\,\frac{(\sigma^{\mu\nu}_{(1)}+\sigma^{\mu\nu}_{(2)})}{2}\right]\partial^{\lambda}\,\psi^{V} \tag{8.165-a}$$

o aún, por (2.32),

$$M^{(o)\lambda;\mu\nu}_{spin} = \frac{i}{m}\,(\partial^{\lambda}\,\bar{\psi}^{V})\,\sigma^{\mu\nu}_{(2)}\,\psi^{V} - \frac{i}{m}\bar{\psi}^{V}\,\sigma^{\mu\nu}_{(2)}\partial^{\lambda}\,\psi^{V}\,. \tag{8.165-b}$$

Los tensores momento angular $J^{\mu\nu}$ son

$$J^{(o)\mu\nu}_{Q} = \int d\sigma_{\mu}\;M^{(o)\mu\nu}_{Q} \qquad (8.166)^{**}$$

Q = tot, orb o spin.

Calculamos el tensor spin del campo usando un hiperplano σ perpendicular al eje x^{o}:

$$J^{(o)\mu\nu}_{spin} = \frac{i}{m}\int d^{3}x\left[(\partial^{o}\,\bar{\psi}^{V})\,\frac{(\sigma^{\mu\nu}_{(1)}+\sigma^{\mu\nu}_{(2)})}{2}\;\psi^{V} - \bar{\psi}^{V}\,\frac{(\sigma^{\mu\nu}_{(1)}+\sigma^{\mu\nu}_{(2)})}{2}\,\partial^{o}\psi^{V}\right] = \tag{8.167-a}$$

$$= \frac{i}{m}\int d^{3}x\left[(\partial^{o}\,\bar{\psi}^{V})\,\sigma^{\mu\nu}_{(2)}\psi^{V} - \bar{\psi}^{V}\sigma^{\mu\nu}_{(2)}\,\partial^{o}\,\psi^{V}\right] \tag{8.167-b}$$

Expresaremos $J^{(o)\mu\nu}_{spin}$ en términos de ψ y $\bar{\psi}$: Empleamos (8.92'-a) con $k=1$ para despejar las derivadas temporales que aparecen en (8.167-b). Como consequencia de emplear (8.92'-a) aparecen derivadas espaciales, pero podemos cancelar los términos que las contienen mediante una integración por partes. El resultado es,

$$J^{(o)\mu\nu}_{spin} = -\int d^{3}x\left[\bar{\psi}^{VI}\,\gamma^{o}_{(1)}\,\sigma^{\mu\nu}_{(2)}\,\psi^{V} + \bar{\psi}^{V}\,\gamma^{o}_{(1)}\,\sigma^{\mu\nu}_{(2)}\,\psi^{VI}\right]$$

o sea

$$\boxed{\begin{aligned} J^{(o)\mu\nu}_{spin} &= -\int d^3x\, \psi\, \gamma^{o}_{(1)}\, \sigma^{\mu\nu}_{(2)}\, \psi = \qquad (8.168\text{-a}) \\ &= -\,(\psi,\ \sigma^{\mu\nu}_{(2)}\,\psi)\ . \qquad (8.168\text{-b}) \end{aligned}}$$

En particular, el <u>spin del campo</u> es

$$\boxed{J^{(o)oa}_{spin} = J^{(o)bc}_{spin} - (\psi\ \sigma^{a}_{(2)}\ \psi)}\ ;\ \sigma^2\ i\ ^b\ x^c \qquad (8.169)$$

$$\boxed{J^{(o)oa}_{spin} = -\ i\ (\psi,\ \alpha^{a}_{(2)}\ \psi)} \qquad (8.170)$$

La (8.168-b) muestra una <u>diferencia esencial con spin cero</u>, donde

$$J^{\mu\nu}_{spin} = 0\ . \qquad (8.171)^{**}$$

$\mathcal{L}^{(o)}$ es formalmente análoga a la densidad lagrangeana usual para spin 0, y antes de llegar al momento angular, venía proporcionando resultados formalmente análogos a los de spin cero. Por qué es

$$J^{(o)\mu\nu}_{spin} \neq 0\ ?$$

Porque mientras que para spin cero, se cumple

$$\delta\psi = \delta\psi^* = 0$$

ante rotaciones espaciales, en nuestro caso es (cf. (8.146))

$$\delta\psi^V \neq 0, \qquad \delta\bar{\psi}^V \neq 0 .$$

Pero, aunque (8.168-b) sugiera

$$\boxed{J^{(o)\mu\nu}_{spin} \neq 0} \qquad (8.172)$$

podría ocurrir que vía componentes redundantes (cr. Cap. 2) el 2º miembro de (8.168) fuese nulo; no es así, porque en A8-6 demostramos que existe ψ al menos un campo $\psi \in \omega_t$ tak que para él,

$$-J^{(o)12}_{spin} = J^{(o)3}_{spin} \neq 0 \qquad (8.173)$$

8.f-3 - Comparación entre los dos formalismos

Las ecuaciones (8.155) y (8.168) muestran que los spines tienen formas diferentes en las dos formulaciones. Pero (nuevamente por las componentes redundantes) queremos asegurarnos que

$$\boxed{J^{(\frac{1}{2})a}_{spin} \neq J^{(o)a}_{spin}} \qquad (8.174)$$

Lo hacemos en A8-6 probando que existe al menos una $\psi \in \omega_t$ tal que

$$J^{(\frac{1}{2})a}_{spin} \neq J^{(o)a}_{spin}$$

Pero, aún cabría la posibilidad de que una transformación canónica adecuada lleve $J^{(\frac{1}{2})a}_{spin}$ (8.155) a la forma $J^{(o)a}_{spin}$ (8.168)+.

+ Es decir, que la ψ con la que calculamos $J^{(\frac{1}{2})}_{spin}$ pertenezca a una representación diferente que la ψ con la que calculamos $J^{(o)}_{spin}$, y que las dos representaciones sean conectables mediante una transformación canónica.

Ello también es imposible: En efecto, en A8-7 demostramos que

1) $\overrightarrow{J^{(o)}_{spin}}$ es una constante del movimiento

$$\frac{d\vec{J}^{(o)}_{spin}}{d+} = 0, \qquad \text{para toda } \psi \in \omega_t; \tag{8.175-b}$$

2) $\vec{J}^{(\frac{1}{2})}_{spin}$ no es una constante del movimiento,

$$\boxed{\frac{d\;\vec{J}^{(\frac{1}{2})}_{spin}}{dt} \neq 0} \quad ; \tag{8.175-a}$$

en efecto, existe al menos una $\psi \in \omega_t$ tal que al menos en $t = 0$ es

$$\frac{d\;J^{(\frac{1}{2})}_{spin}}{dt} < 0$$

(signo = excluído).

Por lo tanto, $\overrightarrow{J^{(\frac{1}{2})}_{spin}}$ y $\overrightarrow{J^{(o)}_{spin}}$ no son conectables mediante una transformación canónica, pues las transformaciones canónicas conservan las constantes del movimiento.

Hasta este punto, las dos formulaciones deban (al menos) los mismos observables globales [carga total, corriente total y cuadrivector energía-momento, cf. (8.111) y (8.132)] y las mismas ecuaciones de evolución [cf. (8.63) y (8.92)]. Pero, llegados al spin, vemos que las dos formulaciones no son equivalentes.

8.f-4 - Comparación con la aproximación de una carga

Por (3.57), (2.23), (3.38) y (8.155),

$$\langle \vec{J} \rangle_{\substack{\text{aprox}\\ \text{1 carga}}} = (\psi, \tfrac{1}{2} \, |\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}|^{\text{sim}\,(\omega)} \, \psi) =$$

$$= (\psi, \tfrac{1}{2} \, |\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}|^{(\omega)} \, \psi) =$$

$$= (\psi, \tfrac{1}{2} \, |\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}| \, \psi) =$$

$$= \vec{J}^{(\frac{1}{2})}_{\text{spin}}$$

$$\boxed{\langle \vec{J}_{\text{spin}} \rangle_{\substack{\text{aprox}\\ \text{1 carga}}} = \vec{J}^{(\frac{1}{2})}_{\text{spin}}} \qquad (8.176)$$

Es probable que a partir de $\vec{J}^{(o)}_{\text{spin}}$ pueda construirse un otro operador de spin, para otra teoría de una carga. Por (8.174) y (8.175), las dos teorías de una carga (la desarrollada en el Cap 3, y la que sugerimos) no son equivalentes. Pero no desarrollamos esta posibilidad. Sólo indicamos el hecho de que los autovalores de $\sigma^3_{(2)}$ sean $\pm$ 1 y no +1, - 1 y 0 no inhabilita a la nueva teoría de una carga, pues $\sigma^3_{(2)}$ es de 2a. clase (cf. Secc. 3.e).

8.f-5 - Comparación con otros formalismos

Del texto de Wentzel [30] obtenemos un pseudotensor de spin usual en la formulación de Proca:

$$\vec{J}^{(\text{Proca, usual})}_{\text{spin}} = \frac{1}{m^2} (\vec{E} \times \vec{U}^* + \vec{E}^* \times \vec{U}). \qquad (8.177)^{**}$$

Por otra parte, mediante la tabla 6-1,

$$J^{(\frac{1}{2})3}_{spin} = \frac{1}{2}\int d^3x \, (F^{o;12} - F^{;53}). \qquad (8.178)$$

El último integrando lo tenemos explícitamente traducido a la formulación de Proca 3-dimensional en (7.14-b); el primero lo obtenemos vía (7.21) en la forma covariante, y de allí con (1.7") lo trasladamos a la 3-dimensional. El resultado es la 3a. componente del 2º miembro de (8.177), de donde

$$\boxed{\vec{J}^{(\frac{1}{2})}_{spin} = \vec{J}^{(Proca,\ usual)}_{spin}} \qquad (8.179\text{-a})$$

Vía (8.174) deducimos inmediatamente,

$$\boxed{\vec{J}^{(o)}_{spin} \neq \vec{J}^{(Proca,\ usual)}_{spin}} \qquad (8.179\text{-b})$$

En cambio $J^{(o)12}_{spin}$ coincide (salvo el signo) con el empleado por Bogoliubov en su versión del formalismo de Proca:

$$J^{(Proca,\ Bog)12}_{spin} = \frac{1}{m^3}\int d^3x \left[U^{*2} \, \partial_o \, U' + (\partial_o \, U')^* \, U^2 - U^{*1} \, \partial_o \, U^2 - (\partial_o \, U^*)^* \, U^1\right]. \qquad (8.180)^{**}$$

En efecto: De (9.168-a) y tabla 6-1,

$$J^{(o)12}_{spin} = -\int d^3x \, F^{o;12} \qquad (8.181)$$

Reemplazando (1.7'-b) obtenemos,

$$J^{(o)12}_{spin} = - J^{(Proca,\ Bog.)12}_{spin} + \frac{1}{m^3}\int d^3x \left\{ \left[U^{*o}\partial_1 U^2 + U^2\partial_1 U^{*o} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - U^{*o}\partial_2\, U^1 - U^{*1}\partial_2\, U^o \right] + [\text{complejo conjugado}] \right\} .$$

Integrando por parte la integral se anula y queda

$$J^{(o)12}_{spin} = - J^{(Proca,\ Bog.)12}_{spin} \tag{8.182}$$

Como verificación, puede observarse que nuestra (8.175-b) es consecuente con la afirmación de Bogoliubov [5] de que no sólo el momento angular total, sino el spin que él emplea son constantes del movimiento. El origen de la conservación del spin es el mismo en los dos casos: Proviene del uso de un tensor energía momento canónico simétrico ver (8.126).

Respecto de otros formalismos, el empleo de (2.31) permite fácilmente demostrar que $\vec{J}^{(\frac{1}{2})}_{spin}$ es equivalente al de Belinfante [4], que es idéntico al de de Broglie. [9]

$$\vec{J}^{(Bel)}_{spin} - \frac{1}{4}\int \psi^+ \, (\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)})(\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)})\; d^3x \qquad (8.183)^*$$

y que vía (1.6) se traduce en el de Kemmer [15].

8.g - SOBRE OTRAS FORMULACIONES POSIBLES

Hemos partido de dos densidades lagrangeanas diferentes $\mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}$ (8.24) y $\mathcal{L}^{(o)}$ (8.25). Hemos obtenido las mismas ecuaciones de evolución (las de BW) la misma 4-corriente total, el mismo 4-vector energía momento, pero diferente spin, uno conservado, $\vec{J}^{(o)}_{spin}$ y otro no conservado $\vec{J}^{(\frac{1}{2})}_{spin}$ (cf. Secc. 8.f-3) por lo que las dos formulaciones no son físicamente equivalentes.

Sea R un <u>número real</u>. De la linealidad de las expressiones utilizadas, se sigue que si definimos una nueva densidad lagrangeana,

$$\mathcal{L}^{(R)} = 2\ H\ \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})} + (1 - 2R)\mathcal{L}^{(o)} \qquad (8.184\text{-a})$$

<u>volvemos a obtener como ecuaciones de movimiento las (1.2) de BW</u>, y, para los observables $\mathcal{O}\ (\mathcal{O} = j^{\mu},\ \ldots,\ \vec{J}_{spin})$

$$\mathcal{O}^{(R)} = 2\ R\ \mathcal{O}^{(\frac{1}{2})} + (1 - 2R)\mathcal{O}^{(o)}\ . \qquad (8.184\text{-b})$$

Por ejemplo, para la corriente tenemos en lugar de (8.98) u (8.104),

$$J^{(R)\mu} = e\ i \sum_{A=1}^{i} \left[\bar{\psi}^{V} \frac{\partial \mathcal{L}^{(R)}}{\partial(\partial_{\mu}\ \bar{\psi}^{V(A)})} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(R)}}{\partial(\partial_{\mu}\ \psi^{V(A)})}\ \psi^{V(A)} \right] \qquad (8.185\text{-a})$$

Reemplazando (8.183-b) y teniendo en cuenta (8.98) y (8.104) resulta inmediatamente

$$j^{(R)\mu} = 2\ R\ J^{(\frac{1}{2})\mu} + (1 - 2\ R)\ j^{(o)\mu}\ . \qquad (8.185\text{-b})$$

Análogamente para los demás observables.

De lo anterior se sigue que

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\int d^3x\ j^{o(R)\mu} = \int d^3x\ j^{(\frac{1}{2})\mu} = \int d^3x\ j^{(o)\mu} & \quad (8.186\text{-a}) \\
P^{(R)\mu} = P^{(\frac{1}{2})\mu} = P^{(o)\mu} & \quad (8.186\text{-b}) \\
\vec{J}^{(R)}_{spin} \neq \begin{cases} \vec{J}^{(\frac{1}{2})}_{spin} & \text{salvo } R = 1/2 \\ \vec{J}^{(o)}_{spin} & \text{salvo } R = 0 \end{cases} & \quad (8.186\text{-c}) \\
\dfrac{d\ \vec{J}^{(R)}_{spin}}{dt} = 2R \dfrac{d\ \vec{J}^{(\frac{1}{2})}_{spin}}{dt} \neq 0 \text{ salvo } R = 0 & \quad (8.186\text{-d})
\end{array}}$$

y que la formulación R no es conectable mediante una transformación canónica con las formulaciones 1/2 ó 0.

Afirmar que ψ describe a una partícula con masa m y spin de autovalores +1, 0, -1, más hipótesis razonables, llevan (como es sabido) de manera unívoca a las ecuaciones de BW[1, 17] (a menos de un cambio de representación).

Pero por (186-d) eso no basta para que quede unívocamente determinada la física de la partícula, ni siquiera en el límite en que las interacciones tienden a cero: No queda unívocamente determinado si el spin es constante del movimiento o no, ni la "intensidad" de su variación temporal.

<u>Hasta ésta etapa de nuestro trabajo, podemos decir que presumiblemente la física del mesón vectorial queda unívocamente determinada si (además de la masa) se da otro parámetro R contínuo, real, adimensional e invariante Lorentz</u>.

El o dos valores de R con correlato experimental, sólo pueden ser hallados mediante una predicción experimentalmente verifi cable. Pero para ello necesitamos la segunda cuantificación, con un desarrollo mayor del que haremos en el próximo capítulo.

CAPÍTULO NOVENO

INTRODUCCION A LA TEORIA CUANTICA DE CAMPOS

9.a - DEFINICIONES Y NOTACIONES

9.a-1 - La matriz δ^V.

Indicamos con $\{a\, b\}$ al par no ordenado a, b. Definimos,

$$\delta^V(\{ij\}, \{kl\}) = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\ \delta_{jl} + \delta_{il}\ \delta_{jk} + \gamma^5_{ik}\ \gamma^5_{jl} + \gamma^5_{il}\ \gamma^5_{jk}\right) \qquad (9.1)$$

Observamos que el 2º miembro es invariante ante

$$i \longleftrightarrow j \qquad y, \acute{o} \qquad k \longleftrightarrow l \qquad (9.2)$$

Es fácil calcular la tabla de valores de δ^V en la representación (6.46) de γ^5. El resultado es

a) $\delta^V = 1$ para

ij	kl
11	11
22	22
33	33
44	44
11	33
22	44
13	13
24	24

; $\delta^V = \frac{1}{2}$ para

ij	kl
12	12
14	14
23	23
34	34
12	34

(9.3-a)

y demás valores obtenidos vía (9.2) y mediante

b) $\delta^V(\{ij\}, \{kl\}) = \delta^V(\{kl\}, \{ij\})$ (9.3-b)

c) $\delta^V = 0$

en los casos restantes.

Observamos que a las triviales (9.2) se añade la simetría (9.3-b). Para ella basta que sea $\gamma^5_{ij} = \pm \gamma^5_{ji}$, lo cual ocurre el menos en las representaciones usuales.

9.a-2 - La matriz δ^{VI}

Definimos

$$\delta^{VI}\left(\{r_1r_2\},\ \{t_1t_2\}\right) = \Lambda^{I}_{r_1r_2s_1s_2}\ \delta^{V}\left(\{s_1s_2\},\ \{t_1t_2\}\right). \qquad (9.4\text{-a})$$

Recordemos que con la notación dada en Secc. 1.a es

$$\Lambda^{I}_{r_1r_2,\ s_1s_2} = \frac{1}{2}\left(\delta_{r_1s_1}\ \delta_{r_2s_2} + \gamma^{o}_{r_1s_1}\ \gamma^{o}_{r_2s_2}\right).$$

Como $^{o\ 5} = {}^{5\ o}$, obtenemos de (9.4-a) que también es

$$\delta^{VI}\left(\{r_1r_2\},\ \{t_1t_2\}\right) = \delta^{V}\ \{r_1r_2\},\ \{s_1s_2\}\ \Lambda^{I}_{s_1s_2,\ t_1t_2} \qquad (9.4\text{-b})$$

De la invariancia de δ^V ante (9.2) se deduce que también δ^{VI} es invariante ante

$$r_1 \longleftrightarrow r_2 \qquad \text{y, o} \qquad s_1 \longleftrightarrow s_2. \qquad (9.5)$$

Usando (2.6-b) obtenemos que en la representación usual delas matrices de Dirac es

$$\delta^{VI}(\{ij\},\{kl\}) = \frac{1}{2}\,(1+\varepsilon_{\underline{i}}\,\varepsilon_{\underline{j}})\ \delta^{V}(\{ij\},\{kl\}) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(1+\varepsilon_{\underline{k}}\,\varepsilon_{\underline{\ell}})\ {}^{V}(\{ij\},\{kl\})\ , \qquad (9.6)^{+}$$

con $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$. Entonces deducimos inmediatamente de tabla (9.3) la tabla para δ^{VI}:

+ No sumar los indices subrayados.

a) $\delta^{VI} = 1$ para

ij	kl
11	11
22	22
33	33
44	44
11	33
22	44

, $\delta^{VI} = \frac{1}{2}$ para

ij	kl
12	12
34	34
12	34

y demás valores obtenidos vía (9.5) y mediante,

b) $\delta^{VI}(\{ij\}, \{kl\}) = \delta^{VI}(\{kl\}, \{ij\})$; (9.7-b)

c) $\delta^{VI} = 0$ en los casos restantes. (9.7-c)

9.b - LAS REGLAS DE CONMUTACIÓN EN LA FORMULACIÓN 1/2

9.b-1 - Las reglas de conmutación para tiempos iguales

Aunque en el capítulo anterior hemos mantenido (dentro de lo posible) la covariancia manifiesta, aquí usaremos como punto de partida las reglas de conmutación para tiempos iguales, pues (debido a una peculiaridad que en este caso tienen los momentos conjugados π^{o}) disminuiremos la probabilidad de ensayar juegos de reglas de conmultación incompatibles entre sí.

Como las variables son seis $\psi^{V(A)}$ y otras seis $\bar{\psi}^{V(A)}$ (por ejemplo las (8.9-3), parecería plausible ensayar

$$\left[\bar{\psi}^{V(B)}(x^{o}, \vec{x}), \pi^{V(A)o}(x^{o}, \vec{x}')\right] = i\, \delta_{AB}\, \delta(\vec{x} - \vec{x}') \qquad (9.8\text{-a})$$

$$\left[\bar{\psi}^{V(B)}(x^{o}, \vec{x}), \bar{\pi}^{V(A)o}(x^{o}, \vec{x}')\right] = i\, \delta_{AB}\, \delta(\vec{x} - \vec{x}') \qquad (9.8\text{-b})$$

$$\left[\bar{\psi}^{V(B)}(x^{o}, \vec{x}), \pi^{V(A)o}(x^{o}, \vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.8\text{-c})$$

$$\left[\psi^{V(B)}(x^o, \vec{x}), \bar{\pi}^{V(A)o}(x^o, \vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.8\text{-d})$$

$$\left[\bar{\psi}^{V(B)o}(x^o, \vec{x}), \bar{\pi}^{V(A)o}(x^o, \vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.8\text{-e})$$

$$\left[\psi^{V(B)o}(x^o, \vec{x}), \pi^{V(A)o}(x^o, \vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.8\text{-f})$$

$$\left[\bar{\psi}^{V(B)o}(x^o, \vec{x}), \bar{\pi}^{V(A)o}(x^o, \vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.8\text{-g})$$

$$\left[\psi^{V(B)}(x^o, \vec{x}), \bar{\psi}^{V(A)}(x^o, \vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.8\text{-h})$$

$$\left[\psi^{V(B)}(x^o, \vec{x}), \psi^{V(A)}(x^o, \vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.8\text{-i})$$

$$\left[\bar{\psi}^{V(B)}(x^o, \vec{x}), \bar{\psi}^{V(A)}(x^o, \vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.8\text{-j})$$

donde

$$A, B = 1, 2, \ldots, 6 \qquad (9.9)$$

y

$$\pi^{V(A)o} = \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_o \psi^{V(A)})}, \quad \bar{\pi}^{V(A)o} = \frac{\partial \mathcal{L}^{(\frac{1}{2})}}{\partial(\partial_o \bar{\psi}^{V(A)})} \qquad (9.10)$$

Pero ante todo busquemos un procedimiento que nos permita eliminar en las relaciones anteriores los índices A y B. El motivo es el mismo ya discutido en el Cap. 8.

Por (8.24)

$$\pi^{V(A)o} = \frac{1}{m} \frac{\partial\left(\left[(\partial_\sigma \bar{\psi}^V)\, \gamma^o_{(1)}\, \gamma^o_{(2)}\right]\left[\partial_o\, \psi^V(x^o, \vec{x}')\right]\right)}{\partial(\partial_o\, \psi^{V(A)})} \qquad (9.11)$$

donde habría que desarrollar cada corchete como una superposición de componentes, como en A8-1.4.

Sea ahora

$$\omega \in \omega_{sp}^{p} \tag{9.12}$$

un <u>spinor arbitrario</u> (no un operador de campo). Calculamos cada $\omega^{V(A)}$ y lo contraemos con (9.8-a), sumando respecto de A; luego de reemplazar (9.11) tenemos

$$\frac{1}{m} \left| \psi^{V(B)}(x^o, \vec{x}), \sum_{A=1}^{6} \frac{\partial \left(\left[\partial_o \bar{\psi}^V \right) \gamma^o_{(1)} \gamma^o_{(2)} \right] \left[\partial_o \psi^V(x^o, \vec{x}') \right] \right)}{\partial(\partial_o \psi^{V(A)})} = \right.$$

$$= i\, \omega^{V(B)} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{9.13}$$

(al no ser un operador, lo podemos introducir en el anterior del conmutador).

Pero en la demostración del 2º lema del Cap. anterior (Secc. 8.c-2 y apéndice A8-1) sólo interviene el aspecto spinorial de los campos, por lo que <u>el 2° lema es aplicable en el 2° factor del conmutador (9.13)</u>. Aplicándolo,

$$\frac{1}{m} \left[\psi^{V(B)}(x^o, \vec{x}), \frac{\partial \left[(\partial_\sigma \bar{\psi}^V) \gamma^o_{(1)} \gamma^o_{(2)} \right] \left[\partial_o \psi^V(x^o, \vec{x}') \right]) \omega^V}{\partial(\partial_o \psi^V)} \right] =$$

$$= i\, \omega^{V(B)} \delta(\vec{x} - \vec{x}) \tag{9.14}$$

donde ahora la derivada lo es en el sentido (8.26-a) y por lo tanto, inmediatamente calculable vía 2º lema:

El 2º factor del conmutador vale,

$$\left[(\partial_o \bar{\psi}^{\,V})\, \gamma^o_{(1)}\, \gamma^o_{(2)}\right] \omega^{\,V} .$$

Además, el 2º factor es (desde el punto de vista spinorial) un escalar, por lo que ambos miembros de (9.14) son las componentes "B" (p. ej. en el sentido (8.93)) de un spinor. Siendo iguales todas las componentes B de dichos spinores, se trata de spinores iguales; es decir, también son iguales sus componentes usuales $i_1 i_2$.

Por lo tanto,

$$\frac{1}{m}\left[\psi^V_{i_1 i_2}(x^o, \vec{x}), \left[(\partial_\sigma\, \bar{\psi}^V(x^o\, \vec{x}'))\, \gamma^o_{(1)}\, \gamma^o_{(2)}\right]\omega^V\right] = i\,\omega^V_{i_1 i_2}\ \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{9.15}$$

De esta manera, nos hemos liberado en la 1a. regla de conmutación, de los engorrosos índices A y B. Claro, que debemos desembarazarnos de ω^V. Pero antes, empleemos (8.92') para abreviar (9.15) y mostrar qué problema aparece con (9.8):

$$\left[\psi^V_{i_1 i_2}(x^o, \vec{x}), \bar{\psi}^{VI}(x^o, \vec{x})\, \gamma^o_{(2)}\, \omega^V\right] = \omega^V_{i_1 i_2}\ \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{9.16}$$

Por (2.31),

$$\frac{1}{2}\left[\psi^V_{i_1 i_2}(x^o, \vec{x}), \bar{\psi}^{VI}(x^o, \vec{x}')\left(\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)}\right)\omega^V\right] = \omega^V_{i_1 i_2}\ \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{9.17-a}$$

Pero siendo

$$\left(\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)}\right)\Lambda^{II} = \Lambda^{II}\left(\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)}\right) = 0 , \tag{9.17-b}$$

el 1er. miembro es insensible a una modificación de la parte

$$\omega^{VII} = \Lambda^{II}\omega^{V}$$

de ω^V, mientras que el 2º miembro varía al variar $\omega^{V\ II}$ (p. ej. en la representación (2.9-b) el 2º miembro no cambia al incrementar $\omega^V_{14} = \omega_{41}$, pero cambia la componente 14 del segundo).

La contradicción se debe a que las (9.8) valen en tanto los momentos no sean idénticamente nulos, y, en nuestros caso aquellos $\pi^{V(A)o}$ (y $\bar{\pi}^{V\ A(o)}$) correspondientes a valores de A que a su vez están asociados a componentes tipo II son nulos, como se comprende retrocediendo en la demostración.

Por ejemplo, con la elección (8.93) de las $\psi^{V(A)}$, las

$$\psi^{V(3)}, \quad \psi^{V(4)} \quad \text{y} \quad \psi^{V(6)}$$

están formadas únicamente con las $\psi^V_{i_1 i_2}$-s que forman una $\psi^{V\ II}$ (ver (2.9-b)) (mientras que las restantes $\psi^{V(A)}$ corresponden puramente a ψ^{VI}). En este caso la dificultad encontrada para $\omega^{V\ II}$ es un reflejo de que si hubiéramos querido calcular las

$$\pi^{V(3)o}, \quad \pi^{V(4)o} \quad \text{y} \quad \pi^{V(6)o}$$

hubiéramos encontrado

$$\pi^{V(3)o} = \pi^{V(4)o} = \pi^{V(6)o} = 0 \qquad (9.18\text{-a})$$

y

$$\bar{\pi}^{V(3)o} = \bar{\pi}^{V(4)o} = \bar{\pi}^{V(6)o} = 0 \qquad (9.18\text{-b})$$

Este tipo de dificultad se presenta con cierta frecuencia en la formulación canónica de las reglas de conmutación de campos sencillos.

Dado el conocido peligro de contradicciones que existe al trabajar con componentes redundantes, y spin elevado, la solución que ensayaremos será la de retroceder al máximo: Eliminaremos de (9.8) no sólo aquellos conmutadores con $\pi^{V(A)o} = 0$, sino también aquellas $\psi^{V(A)}$ cuyos A anule un $\pi^{V(A)o}$ (y, por supuesto, lo mismo para $\bar{\psi}^{V(A)}$ y $\bar{\pi}^{V(A)o}$).

Con la elección (8.93) de las $\psi^{V(A)}$ ello equivale a mantener (9.8) pero sustituyendo (9.9) por

$$A, B = 1, 2, \text{ó } 5 . \tag{9.19-a}$$

o simbólica (y un poco más generalmente).

$$A, B \longleftrightarrow \psi^{V\,I} \tag{9.19-b}$$

Pero ... luego de esta drástica eliminación, cómo completaremos las reglas de conmutación ? Usando las ecuaciones de evolución, lo cual resultará posible. Se puede obtener así, a partir de las menos numerosas reglas de conmutación (9.8), (9.19) un conjunto de reglas no sólo autoconsecuentes sino que también sea compatible con las ecuaciones de evolución.

Todo el procedimiento anterior ((9.12), ..., (9.16)) para independizar de las A es las reglas de conmutación es inmediatamente readaptado, con la sustitución

$$V \longleftrightarrow V\ I \tag{9.20}$$

que proviene de reemplazar (9.9) por (9.19).

Repazando rápidamente: En (9.13) en lugar de $\omega^{V(A)}$ usamos $\omega^{V\ I(A)}$, y eliminamos de la sumatoria los valores prohibidos de A. A continuación, observamos que el segundo lema del Cap. anterior (Secc. 8.c-2) continúa valiendo si en todas partes se efectúa la sustitución (9.20) (la demostración es similar a la efectuada en A8-1). Entonces podemos pasar a (9.15) y finalmente a (9.16) simplemente usando (9.20). Queda, pues,

$$\left[\psi^{V\ I}_{i_1 i_2}(x^o, \vec{x}), \bar{\psi}^{VI\ I}(x^o, \vec{x}')\,\gamma^o_{(2)}\ \omega^{V\ I}\right] = \omega^{V\ I}_{i_1 i_2}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')\ . \tag{9.21}$$

Eliminadas las asimétricas $\psi^{V(A)}$, debemos desembarazarnos del spinor auxiliar $\omega^{V\,I}$. Como $\omega^{V\,I}$ es arbitrario, esto hacer recordar al ler. lema del Cap. anterior (Secc. 8.b-2), al que trataré de usar. Defino un spinor $\theta^{(i_1 i_2)}$ tal que las componentes spinoriales de su adjunto sean

$$\left[\theta^{(i_1 i_2)}\right]_{j_2 j_1} = \delta_{i_1 j_1} = \delta_{i_2 j_2} \tag{9.22}$$

con lo cual (9.22) se escribe

$$\left[\psi^{VI}_{i_1 i_2}(x^o, \vec{x}),\ \bar{\psi}^{VI\,I}(x^o, \vec{x}')\,\gamma^o_{(2)}\,\omega^{VI}\right] = \overline{\theta^{(i_1 i_2)}}\ \omega^{V\,I} \tag{9.23}$$

El primer lema también continúa valiendo si se efectúa la sustitución (9.20). Entonces, como $\omega^{V\,I}$ es arbitrario (dentro de $\varepsilon^{\mathrm{sim}\ V\ I}$) obtenemos

$$\left[\psi^{VI}_{i_1 i_2}(x^o, \vec{x}),\ \left(\bar{\psi}^{VI\ I}(x^o, \vec{x}')\gamma^o_{(2)}\right)^{VI\ \mathrm{sim}}_{k_2 k_1}\right] = \left(\overline{\theta^{\ (i_1 i_2)}}\right)^{V\ \mathrm{sim}}_{k_2 k_1} \tag{9.24}$$

A primera vista podría objetarse " ω^{VI} es arbitrario dentro de $\varepsilon^{\mathrm{sim}\ VI}$" pues además ω cumple (9.12). Pero la (9.12) no viola la proposición en cuestión porque

$$\omega^{VI} = \Lambda^I \Lambda^V \omega = \Lambda^V \Lambda^I \omega = \Lambda^V \omega^I\ ,$$

y la parte ω^I de una $\omega \in \omega$ es arbitraria (cf. final de Secc. 2.f-3).

Ahora, de comparar (9.22) con (9.1) y (9.4-b) se deduce,

$$\overline{\left[\theta^{(i_1 i_2)}\right]^{V\ sim}_{k_2 k_1}} = \frac{1}{2}\,\delta^V\Big(\{i_1 i_2\},\,\{k_2 k_1\}\Big) \qquad (9.25\text{-a})$$

y

$$\overline{\left[\theta^{(i_1 i_2)}\right]^{V\ sim}_{k_2 k_1}} = \overline{\left[\theta^{(i_1 i_2)}\right]^{V\ sim\ I}_{k_2 k_1}}$$

$$= \frac{1}{2}\;\delta^{VI}\Big(\{i_1 i_2\},\,\{k_2 k_1\}\Big) \qquad (9.25\text{-b})$$

Reemplazando en (9.24) y sustituyendo k_2 por k_1 (cf. (9.5)) tenemos, en resumen

$$\boxed{\begin{array}{c} (9.8\text{-a}) \Longrightarrow \\ \left[\psi^{V\,I}_{i_1 i_2}(x^o,\,\vec{x}),\;(\bar{\psi}^{VI\ I}(x^o,\,\vec{x}')\gamma^o)_{k_2 k_1}\right] = \frac{1}{2}\,\delta^{V\,I}\Big(\{i_1 i_2\},\{k_1 k_2\}\Big)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \\ u = 1,\,2. \qquad (9.26\text{-a}) \end{array}}$$

<u>Notas</u>:

1) Hemos eliminado las indicaciones "V I" de $(\bar{\psi}^{VI\ I}\gamma^o_{(1)})$ porque

$$\bar{\psi}^{VI\ I}\;\gamma^o_{(2)}\;\Lambda^V\,\Lambda^I = \bar{\psi}^{VI\ I}\,\Lambda^{VI}\Lambda^I\,\gamma^o_{(2)} = \bar{\psi}^{VI\ I}$$

2) Hemos eliminado la indicación "sim" porque siendo

$$\Lambda^I\,\gamma^o_{(2)} = \Lambda^I\,\gamma^o_{(1)} = \frac{1}{2}\,\Lambda^I\Big(\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)}\Big) \qquad (9.27)$$

y siendo $\bar{\psi}^{VI\ I}_{s_2 s_1} = \bar{\psi}^{VI\ I}_{s_1 s_2}$, resulta que $(\bar{\psi}^{\ VI\ I}\gamma^o_{(2)})_{k_1 k_2}$ es simétrica ante $k_1 \longleftrightarrow k_2$

3) También por (9.27) podemos sustituir $\gamma^{o}_{(2)}$ por $\gamma^{o}_{(\mu)}$, $\mu = 1, 2$.

4) Las propiedades de simetría (9.5) de $\delta^{V\,I}$ son las del primer miembro de (9.26-a).

Con el procedimiento empleado para demostrar (9.26-a) se obtienen a partir de las restantes (9.8),

$$\left[\gamma^{o}_{(u)}\psi^{VI\ I}(x^{o},\vec{x})_{i_1 i_2},\ \bar{\psi}^{VI}_{k_2 k_1}(x^{o},\vec{x}')\right] = \frac{1}{2}\,\delta^{V\,I}\left(\{k_1 k_2\},\{i_1 i_2\}\right)\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (9.26\text{-b})(D)$$

$$\left[\bar{\psi}^{V\,I}_{i_2 i_1}(x^{o},\vec{x}),\ (\bar{\psi}\ (x^{o},x')\,\gamma^{o}_{(u)})_{k_2 k_1}\right] = 0 \qquad (9.26\text{-c})(D)$$

$$\left[\psi^{V\,I}_{i_1 i_2}(x^{o},\vec{x}),\ \left(\gamma^{o}_{(u)}\psi^{VII}(x^{o},\vec{x}')\right)_{k_1 k_2}\right] = 0 \qquad (9.26\text{-d})$$

$$\left[(\bar{\psi}^{VII}(x^{o},\vec{x})\gamma^{o}_{(u)})_{i_2 i_1}\left(\gamma^{o}_{(u)}\ \psi^{VII}(x^{o},\vec{x}')\right)_{k_1 k_2}\right] = 0 \qquad (9.26\text{-e})$$

$$\left[(\bar{\psi}^{VII}(x^{o},\vec{x})\gamma^{o}_{(u)})_{i_2 i_1},\ (\bar{\psi}^{VII}(x^{o},\vec{x}')\ \gamma^{o}_{(u)})_{k_2 k_1}\right] = 0 \qquad (9.26\text{-f})(D)$$

$$\left[(\gamma^{o}_{(u)}\ \psi^{VII}(x^{o},\vec{x}))_{i_1 i_2},\ (\gamma^{o}_{(u)}\ \psi^{VII}(x^{o},\vec{x}'))_{k_1 k_2}\right] = 0 \qquad (9.26\text{-g})$$

$$\left[\psi^{VI}_{i_1 i_2}(x^{o},\vec{x}),\ \bar{\psi}^{VI}_{k_2 k_1}(x^{o},\vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.26\text{-h})$$

$$\left[\psi^{VI}_{i_1 i_2}(x^{o},\vec{x}),\ \bar{\psi}^{VI}_{k_1 k_2}(x^{o},\vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.26\text{-i})$$

$$\left[\bar{\psi}^{VI}_{i_2 i_1}(x^{o},\vec{x}),\ \bar{\psi}^{VI}_{k_2 k_1}(x^{o},\vec{x}')\right] = 0 \qquad (9.26\text{-j})(D)$$

$u =$

de las cuales hay varias dependientes de las restantes, o de sus conjugadas hermitianas. Las hemos indicado con (D) sin afirmar con ello que las restantes sean totalmente independientes.

9.b-2 - Comparación con el formalismo de Proca

A) LAS REGLAS DE CONMUTACIÓN USUALES

Del artículo de Pauli [21] o del texto de Bogoliubov [5] obtenemos las reglas de conmutación para intervalos arbitrarios:

$$[U_\mu(x),\ U^+_\nu(x')] = i\ (m^3 g_{\mu\nu} + m\,\partial_\mu\partial_\nu)\ \Delta(x-x') \qquad (9.27\text{-a})^{+**}$$

$$[U_\mu(x),\ U_\nu(x')] = 0 \qquad (9.27\text{-b})^{**}$$

Usando conocidas propiedades de $\Delta(x)$ y las ecuaciones de Proca (1.7''') obtenemos las reglas de conmutación usuales para tiempos iguales, en la notación 3-dimensional (1.7''):

$$[V(x^o, \vec{x}),\ U^{+a}(x^o, \vec{x}')] = -i\,m\,\partial_a\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (9.28\text{-a})^*$$

$$[E^a(x^o, \vec{x}),\ U^{+b}(x^o, \vec{x}')] = i\,m^2\ \delta_{bc}\ (\vec{x}-\vec{x}') \qquad (9.28\text{-b})^*$$

$$[E^a(x^o, \vec{x}),\ H^{3+}(x^o, \vec{x}')] = i\,m\,(\delta_{a1}\partial_2 - \delta_{a2}\partial_1)\ \delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (9.28\text{-c})^*$$

y permutaciones cíclicas sobre 1, 2, 3

$$[V(x^o, \vec{x}),\ V^+(x^o, \vec{x}')] = 0 \qquad (9.28\text{-d})^*$$

$$[V(x^o, \vec{x}),\ E^+(x^o, \vec{x}')] = 0 \qquad (9.28\text{-e})^*$$

$$[V(x^o, \vec{x}),\ H^+(x^o, \vec{x}')] = 0 \qquad (9.28\text{-f})^*$$

$$[U(x^o, \vec{x}),\ U^{b+}(x^o, \vec{x}')] = 0 \qquad (9.28\text{-g})^*$$

$$[U(x^o, \vec{x}),\ H^{b+}(x^o, \vec{x}')] = 0 \qquad (9.28\text{-h})^*$$

$$[E^a(x^o, \vec{x}),\ E^{b+}(x^o, \vec{x}')] = 0 \qquad (9.28\text{-i})^*$$

$$[H^a(x^o, \vec{x}),\ H^{+b}(x^o, \vec{x}')] = 0 \qquad (9.28\text{-j})^*$$

+ Al comparar, tener presente que las U_μ de Bogoliubov difieren en un factor constante $m^{-3/2}$ de las U_μ usadas por nosotros, factor al que ya hemos tenido en cuenta.

Finalmente,
"V, $\vec{U}$, $\vec{E}$ y $\vec{H}$, tomadas en puntos diferentes pero tiempos iguales, conmutan entre sí".

Hasta aquí, el procedimiento usual.

B) TRADUCCIÓN DE NUESTRAS REGLAS DE CONMUTACIÓN AL FORMALISMO DE PROCA.

Podemos traducir (9.26) al formalismo de Proca usando (7.36) y (7.37) para traducir ψ^V y ψ^{VI}, (2.9-b) para tomar las partes I, y (2.6-b) para multiplicar por $\gamma^o_{(u)}$ ó para traducir $\bar{\psi}^{V\,I}$ ó $\bar{\psi}^{VI\,I}$.

De las (9.26) (desechando las que sabemos que no son independientes, o sea las (D)) aquellas que vinculan componentes del campo con sus conjugadas hermitianas, son las (a), (e) y (h). La (9.26-a) se traduce en la (9.28-b)$^+$, la (9.26-c) en la (9.28-g) y la (9.26-h) en la (9.28-i). Análogamente para traducir las que vinculan ψ con ψ o $\bar{\psi}$ con ψ, se traducen en parte de las (9.28-k)$^+$.

C) DEMOSTRAMOS QUE TENIENDO EN CUENTA LAS ECUACIONES DE PROCA ? DE LAS REGLAS REOBTENIDAS EN (B) SE DEDUCEN TODAS LAS (9.28):

C_1) De (9.28-i) y la segunda (1.7''' -b) se deduce (9.28-d)

C_2) De (9.28-i) y la segunda (1.7''' -b) se deduce (9.28-e)

C_3) De (9.28-g) y la primera (1.7''' -b) se deduce (9.28-j)

C_4) De (9.28-e) se deduce

$$\left[\partial_o\, V(x^o, \vec{x}), \vec{E}^+(x^o, \vec{x}')\right] = -\left[V(x^o, \vec{x}), \partial_o\, \vec{E}^+(x^o, \vec{x}')\right] \quad (9.29\text{-a})$$

+ A menos de un factor i.

Combinándola con la 1a. (1.7''' -c) y con la 2a. (1.7''' -a):

$$-[\mathrm{div}\ U(x^o,\vec{x}),\ \vec{E}^+(x^o,\vec{x}\,')] = -\ m[V(x^o,\vec{x}),\ \vec{U}^+(x^o,\vec{x}\,')] - \\ -\ [V(x^o,\ \vec{x}),\ \mathrm{rot}\ \vec{H}(x^o,\ \vec{x}\,')]\ .$$

El último término se anula debido a (9.28-f):

$$[\mathrm{div}\ U(x^o,\ \vec{x}),\ \vec{E}^+(x^o,\ \vec{x}\,')] = m[V(x^o,\ \vec{x}),\ \vec{U}^+(x^o,\ \vec{x}\,')]. \qquad (9.29\text{-}b)$$

Por otra parte conjugando hermitianamente (9.28-b), intercambiando $\vec{x} \longleftrightarrow \vec{x}\,'$ y derivando luego respecto de $\vec{x}$ se obtiene

$$[\mathrm{div}\ \vec{U}(x^o,\ \vec{x}),\ \vec{E}^+(x^o,\ \vec{x}\,')] = -\ i\ m^2\vec{\partial}\ \ \delta(\vec{x}-\vec{x}\,') \qquad (9.29\text{-}c)$$

Combinándola con (9.29-b) resulta la (9.28-a).

C_5) De la 1a. (1.7''' -b) y (9.28-b) se deduce (9.28-c).
C_6) De la 1a. (1.7''' -c) y (9.28-a) se deduce (9.28-f).

Análogamente para las que vinculan U^μ y $G^{\mu\nu}$ con U^μ y $G^{\mu\nu}$ ó $U^{\mu+}$ y $G^{\mu\nu+}$ con $U^{\mu+}$ y $G^{\mu\nu+}$.

D) (B) Y (C) IMPLICAN QUE LAS REGLAS DE CONMUTACIÓN (9.26-b)(FORMALISMO DE BARGMANN-WIGNER, FORMULACIÓN ($\frac{1}{2}$) SE TRASLADAN EN LAS REGLAS DE CONMUTACIÓN USUALES (9.27) o (9.28) DEL FORMALISMO DE PROCA. Además, procediendo análogamente, se puede demostrar la proposición inversa. En resumen

$$\boxed{(9.26)\Big|_{BW(\frac{1}{2})} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (9.27)\Big|_{Proca}} \qquad (9.30)$$

9.b-3 - Sobre la compatibilidad de nuestras reglas de conmutación

Las reglas de conmutación usuales para Proca (9.27) son

I) compatibles entre sí;

II) compatibles con las ecuaciones (1.7') de Proca.

Además, es bien sabido que las ecuaciones (1.7') de Proca son equivalentes a las (1.1) de BW (ver p. ej. el texto de Leite Lopes [17]).

Entonces, 9.b-3D implica

Las reglas de conmutación (9.26) del formalismo de BW en la formulación 1/2 son I) compatibles entre sí; II) compatibles con las ecuaciones (1.1) de BW. (9.31)

CAPÍTULO 10

SOBRE LA INTERACCIÓN CON EL CAMPO ELECTROMAGNETICO

10-a - OBJETO DE ESTE CAPÍTULO

Alguna vez se objetó a las ecuaciones (1.1) de BW que si se introduce el campo electromagnético mediante la sustitución habitual

$$p_\mu = i\partial_\mu \longrightarrow \pi_\mu = i\partial_\mu - e\,A_\mu \qquad (10.1)$$

se obtienen ecuaciones incompatibles. Si fuera imposible introducir la interacción con el campo electromagnético, nuestro trabajo sería casi inútil porque partículas inhabilitadas de interactuar son inobservables.

El objeto principal de este capítulo es recordar que en un antiguo artículo de Belinfante [3] (anterior incluso al de BW) está la forma correcta de introducir la interacción con el campo electromagnético en las equaciones (1.1) de BW. A diferencia de los restantes capítulos, nuestro trabajo original aquí es pequeño.

10-b - LAS ECUACIONES DE BW EN PRESENCIA DE CAMPO ELECTROMAGNETICO

Notación: para el campo electromagnético: A_μ, $F_{\mu\nu}$,

$$\pi_\mu = i\partial_\mu - e\,A_\mu .$$

Si $A_\mu = 0$ la ecuación (1.7) de Belinfante es equivalente a la (1.1) de BW (cf. Secc. 8.b-8K). En cambio, si en (1.7) se efectúa la sustitución en cuestión (la (10.1)) se obtienen para $A_\mu \neq 0$ ecuaciones no equivalentes a las que resultan efectuando la sustitución en las (1.1) de BW. Belinfante, usa, para $A_\mu \neq 0$ la

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}_{(1)} + \gamma^{\mu}_{(2)}\right)\pi_\mu\,\psi = m\,\psi \qquad (10.2)^{**}$$

En A10-1 repetimos cálculos de Belinfante [3] que demuestran que (10.2)

$$\boxed{\begin{aligned} &\pi_\mu\,\gamma^{\mu}_{(1)}\psi = m\,\psi - \frac{ie}{8m}F_{\mu\nu}\left(\gamma^{\mu}_{(1)} - \gamma^{\mu}_{(2)}\right)\left(\gamma^{\nu}_{(1)} + \gamma^{\nu}_{(2)}\right)\psi \\ &\pi_\mu\,\gamma^{\mu}_{(2)}\psi = m\,\psi + \frac{ie}{8m}F_{\mu\nu}\left(\gamma^{\mu}_{(1)} - \gamma^{\mu}_{(2)}\right)\left(\gamma^{\nu}_{(1)}\quad \gamma_{(2)}\right)\psi \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(10.3\text{-a})^{**} \\ &(10.3\text{-b})^{**} \end{aligned}$$

que, añadiendo

$$\boxed{\psi_{ij} = \psi_{ji}} \qquad (10.3\text{-c})$$

es la generalización de las ecuaciones (1.1) de BW en presencia de campo electromagnético. Las (10.3) son invariantes ante transformaciones de Lorentz y de gauge, lo que prueba la debilidad del argumento que se mencionó en Secc. 10.a contra las ecuaciones de BW.

Además,

$$(10.2) \Longleftrightarrow (10.3)$$

pero (10.2) está escrita con "mínima interacción electromagnética" (en el sentido tradicional), cosa que no ocurre con (10.3). Lo cual abona otra argumento contra la forma tradicional del principio de mínima interacción electromagnética.

Pero aún nos falta:

A) Probar que (10.3-c) es compatible con las (a) y (b).

B) Demostrar que las (10.3) (a) y (b) son compatibles entre sí.

C) Comparar con Proca.

Demostraremos en seguida la (A). Para (B) nos remitimos a Secc. 10.d y para C a Secc. 10.c.

Demostración de la compatibilidad de (10.3-c) con (a) y (b). (Belinfante no la da, presumibleente porque el no estaba interesado en spin 1 puro, que es consecuencia de la (10.3-c)).

Llamo

$$\varphi = \pi_\mu \ (\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)})\,\psi \tag{10.4}$$

Descompongo ψ_{ij} y φ_{ij} en parte simétrica y antisimétrica (ante el intercambio $i \longleftrightarrow j$).

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^{sim} + \psi^{ant} \\ \varphi &= \varphi^{sim} + \varphi^{ant} \end{aligned} \tag{10.5}$$

Es,

$$\varphi^{sim} = \pi_\mu \left(\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)}\right) \psi^{sim} \tag{10.6-a}$$

$$\varphi^{ant} = \pi_\mu \left(\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)}\right) \psi^{ant} \tag{10.6-b}$$

Reemplazo en (10.2); obtengo

$$\varphi^{sim} = 2m\,\psi^{sim} \tag{10.7-a}$$

$$\varphi^{ant} = 2m\,\psi^{ant} \tag{10.7-b}$$

Por lo tanto, la (10.2) se desdobla en

$$\frac{1}{2}\,\pi_\mu\left(\gamma^\mu_{(1)}+\gamma^\mu_{(2)}\right)\quad \psi^{sim}=m\,\psi^{sim} \qquad (10.8\text{-a})$$

$$\frac{1}{2}\,\pi_\mu\left(\gamma^\mu_{(1)}+\gamma^\mu_{(2)}\right)\quad \psi^{ant}=m\,\psi^{ant} \qquad (10.8\text{-b})$$

Es decir, las (10.2) (o, sus equivalentes (10.3-a) y (10.3-b)) no acoplan ψ^{sim} y ψ^{ant}. Puedo, pues, imponer la (10.3-c) sin caer en contradicción. El resultado es que las ecuaciones de BW en presencia de campo electromagnético son compatibles con spin 1 puro.

10.c - COMPARACIÓN CON EL FORMALISMO DE PROCA

Las conocidas ecuaciones de Proca en presencia de campo electromagnético son,

$$\boxed{\begin{aligned} &\pi_\mu\; U^\mu = 0 \\ &i\; m\; G^{\mu\nu} = \pi^\mu\, U^\nu - \pi^\nu\, U^\mu \\ &\pi_\mu\; G^{\mu\nu} = -\, i\; m\; U^\nu \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(10.9\text{-a})^* \\ &(10.9\text{-b})^* \\ &(10.9\text{-c})^* \end{aligned}$$

Es sabido[3] que las ecuaciones de Belinfante (10.2) son equivalentes a las de Proca. Por lo tanto las ecuaciones (10.3) también lo son. La demostración se suele efectuar utilizando una representación particular de las ψ_{ij}.

En un texto de Leite Lopes [17] se describe un método elegante para pasar de las ecuaciones (1.1) de BW a las (1.7') de Proca en ausencia de campo electromagnético. Emplearemos el mismo método para probar que

$$(10.3) \Longrightarrow (10.9)$$

en presencia de campo.

Em primer lugar, con los mismos argumentos empleados [17] para $A_\mu = 0$ se puede demostrar la (7.2) para $A_\mu \neq 0$.

Además, por (1.3) la (10.3-a) se puede escribir

$$\pi_\mu \gamma^\mu \psi = m\psi + \frac{ie}{8m} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi + \frac{ie}{8m} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \psi \gamma^{\nu T}$$

$$- \frac{ie}{8m} F_{\mu\nu} \gamma^\nu \psi \gamma^{\mu T} - \frac{ie}{8m} F_{\mu\nu} \psi \gamma^{\nu T} \gamma^{\mu T} \qquad (10.10)$$

De (7.3-a) obtenemos:

$$\mathcal{B}^{-1} \gamma^{\mu T} = \gamma^\mu \mathcal{B}^{-1} \qquad (10.11\text{-a})$$

$$\gamma^5 \mathcal{B}^{-1} \gamma^{\mu T} = - \gamma^\mu \mathcal{B}^{-1} \qquad (10.11\text{-b})$$

$$\gamma^5 \mathcal{B}^{-1} \gamma^{\nu T} \gamma^{\mu T} = \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^5 \mathcal{B}^{-1} \qquad (10.11\text{-c})$$

Reemplazamos (7.2) en (10.10), empleamos (10.11) para pasar hacia la derecha los $\gamma^5 \mathcal{B}^{-1}$; luego de postmultiplicar por $\mathcal{B} \gamma^5$ resulta,

$$\pi_\mu \gamma^\mu (U_\lambda \gamma^\lambda + \frac{i}{2} G_{\lambda\eta} \gamma^\lambda \gamma^\eta) = m (U_\lambda \gamma^\lambda + \frac{i}{2} G_{\lambda\eta} \gamma^\lambda \gamma^\eta) +$$

$$+ \frac{ie}{8m} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu (U_\lambda \gamma^\lambda + \frac{i}{2} G_{\lambda\eta} \gamma^\lambda \gamma^\eta) - \frac{ie}{8m} F_{\mu\nu} \gamma^\mu (U_\lambda \gamma^\lambda + \frac{i}{2} G_{\lambda\eta} \gamma^\lambda \gamma^\eta) \gamma^\nu +$$

$$+ i e F (U + \underline{i} G) - i e F (U + \underline{i} G) \qquad (10.12)$$

de donde,

$$\frac{1}{2} (\pi_\mu U_\lambda - \pi_\lambda U_\mu - i m G_{\mu\lambda}) \gamma^{\mu\lambda} = - \pi_\lambda \gamma^\lambda + m U_\lambda \gamma^\lambda - \underline{i} \pi_\mu G_{\lambda\eta} \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\eta +$$

$$+ \frac{ie}{8m} F_{\mu\nu} U_\lambda (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda - \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu - \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu) +$$

$$+ \frac{ie}{16m} F_{\mu\nu} G_{\lambda\eta} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\eta - \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\eta \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\eta \gamma^\mu - \gamma^\lambda \gamma^\eta \gamma^\nu \gamma^\mu)$$

$$(10.13)$$

Tomando trazas se obtiene la (10.9-a) con los procedimientos habituales del cálculo de trazas.

Premultiplico (10.13) por γ^{α} y tomo trazas; resulta la (10.9-c). Premultiplico la (10.13) por $\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}$ y tomo trazas; resulta la (10.9-b). Por lo tanto,

$$(10.3) \Longrightarrow (10.9)$$

Finalmente, combinando las ecuaciones (10.9) de Proca con (7.2) resulta (10.10), o sea la (10.3-a):

$$(10.9) \Longrightarrow (10.3)$$

10-d - NOTA SOBRE LA COMPATIBILIDAD DE LAS ECUACIONES DE BARGMANN-WIGNER EN PRESENCIA DE CAMPO ELECTROMAGNETICO

Es bien sabido que las ecuaciones (10.9) de Proca son compatibles entre sí. Como las ecuaciones de Proca son equivalentes a las (10.3) de BW, no necesita redemostrarse la compatibilidad de estas.

APENDICES

A2-1

DEMOSTRACIÓN DE QUE (2.3-b) $\Longleftrightarrow$ (2.3-c) +

a) (2.3-b) $\Longrightarrow$ (2.3-c):

Supongo válida la (2.3-b). Como

$\frac{1}{2}\ I-\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} = I - \frac{1}{2}\ I+\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}$, la (2.3-b) implica

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\quad +\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right) -\left(\overline{\gamma}_{(1)}+\overline{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\,\frac{1}{2}\left(I+\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi \qquad \text{(A2-1.1)}$$

Desarrollando, (A.2-1.1) $\overline{2m}$

$$\psi = \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}\ \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\psi = \frac{(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)})}{4m}\cdot p \ + $$

$$+\frac{\left(\gamma^{o}_{(2)}\,\vec{\alpha}^{(1)}+\gamma^{o}_{(1)}\,\vec{\alpha}_{(2)}\right)}{4m}\cdot\vec{p}\,\psi \qquad \text{(A2-1.2)}$$

Por otro lado desarrollando

$$\frac{1}{4m}\left(H_{(1)}+H_{(2)}\right)\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right) = \frac{1}{2}\left(I+\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right) +$$

$$+\frac{1}{4m}\left(-\gamma_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\,\alpha_{(1)}+\gamma^{o}_{(1)}\,\alpha_{(2)}-\gamma_{(2)}\right)\cdot\vec{p} \qquad \text{(A2-1.3)}$$

En (A2-1.2) resulta que toda ψ que cumple (2.3-b) es tal que

$$\psi = \frac{1}{4m}\left(H_{(1)}+H_{(2)}\right)\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi\ ;$$

Pero como $H^2 = p_o^2$,

+ " $\Longrightarrow$ " significa "implica"; "a $\Longleftrightarrow$ b" significa "a $\Longrightarrow$ b y b $\Longrightarrow$ a".

$$H_{(1)}\psi = \frac{1}{4m}\left(p_o^2 + H_{(1)}H_{(2)}\right)\left(\gamma^o_{(1)}+\gamma^o_{(2)}\right)\psi\,;$$

$$H_{(2)}\psi = \frac{1}{4m}\left(p_o^2 + H_{(1)}H_{(2)}\right)\left(\gamma^o_{(1)}+\gamma^o_{(2)}\right)\psi\,. \qquad \text{(A2-1.4)}$$

$$\therefore \quad H_{(1)}\psi = H_{(2)}\psi$$

que es la (2.3-c). Q.E.D.

b) (2.3-c) $\Longrightarrow$ (2.3-b):

Supongo válida la (2.3-c), de donde

$$\left(I-\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}\right)\left(\gamma^o_{(1)}\,H_{(1)}+\gamma^o_{(2)}\,H_{(2)}\right)\,\psi =$$

$$= \left(I-\gamma^o_{(1)}\,\gamma^o_{(2)}\right)\left(\gamma^o_{(1)}+\gamma^o_{(2)}\right)\,\left(H_{(1)}\,\psi\right)=$$

$$= \left(\gamma^o_{(1)}+\gamma^o_{(2)}-\gamma^o_{(2)}-\gamma^o_{(1)}\right)\,\left(H_{(1)}\psi\right)\; = 0$$

$\therefore$ (2.3-c) $\Longrightarrow$ (2.3-a)

Pero un sencillo cálculo muestra que

(2.3-a) $\longrightarrow$ (2.3-b) $\quad\therefore\quad$ (2.3-c) $\Longrightarrow$ (2.3-b) (Q.E.D.)

A2-2

DEMOSTRACIÓN DE (2.12) Y (2.13).

Si $\psi \in \varepsilon^{sim}$ es $\psi_{rs} = \psi_{sr}$ (A2-2.1)

Como $A_{ij,rs} = B_{ij,sr}$

permutando índices mudos es

$$(A\,\psi)_{ij} = A_{ij,rs}\;\;\psi_{rs} = B_{ij,sr}\;\;\psi_{rs} = B_{ij,sr}\;\;\psi_{sr}$$

usando (A2-2.1),

$$(A\,\psi)_{ij} = B_{ij,sr}\,\psi_{sr} = B_{ij,rs}\,\psi_{rs} = (B\psi)_{ij} \qquad \text{o sea}$$

$$A \underset{\varepsilon}{=}_{sim} B$$

Para demostrar (2.13) emplear (2.3-c).

A2-3

DEMOSTRACIÓN DE (2.17)

a) Pruebo que $M \underset{\mathcal{H}}{\underset{esc}{\sim}} N \Longrightarrow (\psi, M\varphi) = (\psi, N\varphi)$ para todo $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$:

Defino

$$f(\psi,\varphi) = (\psi,\, M\varphi); \quad g(\psi,\varphi) = (\psi,\, N\varphi) \qquad \text{(A2-3.1)}$$

Por (2.16) se que

$$f(\psi,\psi) = g(\psi,\psi) \quad \text{para todo} \quad \psi \in \mathcal{H} \;: \qquad \text{(A2-3.2)}$$

Lo que debo probar es que

$$f(\psi,\varphi) = g(\psi,\varphi) \quad \text{para todo } \psi,\varphi \in \mathcal{H}.$$

Como $f(\psi,\varphi)$ es lineal en φ y antilineal en ψ, vale la conocida identidad

$$4\, f(\psi,\varphi) = f(\psi+\varphi,\psi+\varphi) - f(\varphi-\psi,\varphi-\psi)$$
$$+ i f(\varphi+i\psi,\varphi+i\psi) - i f(\varphi-i\psi,\varphi-i\psi) \qquad \text{(A2-3.3)}$$

Análogamente,

$$4\, g(\psi,\varphi) = g(\psi+\varphi,\psi+\varphi) - g(\varphi-\psi,\varphi-\psi)$$
$$+ i g(\varphi+i\psi,\varphi+i\psi) - i g(\varphi-i\psi,\varphi-i\psi) \qquad \text{(A2-3.4)}$$

Pero (A2-3.2) $\longrightarrow f(\psi+\varphi,\psi+\varphi) = g(\psi+\varphi,\psi+\varphi)^{+}$, etc.,
de donde término los 2os. miembros de (A2-3.3) y (A2-3.4) son iguales; por lo tanto son iguales los primeros miembros. Luego

+ Para ψ, φ arbitrarias $\in \mathcal{H}$.

se cumple

$$f(\psi,\varphi) = g(\psi,\varphi) \quad \text{para toda} \quad \psi, \varphi \in \mathcal{H}$$

o sea se cumple

$$(\psi,\ M\varphi) = (\psi,\ N\varphi) \text{ para toda } \quad \psi,\ \varphi \in \mathcal{H} \ . \qquad \text{Q.E.D.}$$

b) La implicación opuesta es trivial. Por lo tanto, queda probada la (2.17) en los dos sentidos.

A2-4

DEMOSTRAREMOS QUE EXISTE $\psi \neq 0$ PERTENECIENTE A $\mathcal{V}$ TAL QUE

$$(\psi,\psi) = 0 \qquad \text{(A2-4.1)}$$

En el Cap. 4 se demostrará que si descomponemos las soluciones de "energía" positiva $\psi^{(+)}$ y negativa $\psi^{(-)}$ en ondas planas monocromáticas,

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_r \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, a(r,\ \vec{p})\ u(r,\vec{p})\ e^{-ipx} \qquad \text{(A2-4.2)}$$

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{\qquad}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_r \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, b^*(r,\ \vec{p})\ v(r,\ \vec{p})\ e^{-ipx}$$

entonces en la "teoría número c" es

$$\left.\begin{aligned}
(\psi^{(+)},\ \psi^{(+)}) &= \int d^3p \sum_r |a(r,\ \vec{p})|^2 \ ; \\
(\psi^{(-)},\ \psi^{(-)}) &= -\int d^3p \sum_r |b(r,\ \vec{p})|^2 ; \\
(\psi^{(+)},\ \psi^{(-)}) &= (\psi^{(-)},\ \psi^{(+)}) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A2-4.3)}$$

Aplicando el principio de superposición formamos la solución particular

$$\varphi = \psi^{(+)} + \psi^{(+)} \qquad \text{con} \quad a(r, \vec{p}) = b(r, \vec{p}) \tag{A2-4.4}$$

lo cual es siempre posible en la teoría número c. Entonces,

$$(\varphi,\varphi) = (\psi^{(+)}, \psi^{(+)}) + (\psi^{(+)}, \psi^{(-)}) + (\psi^{(-)}, \psi^{(+)}) + + (\psi^{(-)}, \psi^{(-)}) = 0$$

\- - - - - - Q.E.D.

Nota: Como toda $\psi \in \mathcal{W}$ pertenece a ε^{sim} y a $\mathcal{E}$, también en estos últimos espacios existen vectores ortogonales a sí mismos.

A2-5

CONTRAEJEMPLO: OPERADORES EQUIVALENTES,+ PERO DIFERENTES, EN ε^{sim}: DEMOSTRAREMOS QUE (ver (2.5))

$$\Lambda^{II} \underset{\substack{esc \\ \varepsilon^{sim}}}{\sim} 0 \tag{A2-5.1}$$

PESE A QUE

$$\Lambda^{II}_{\varepsilon^{sim}\,\varepsilon^{sim}} \neq 0 \tag{A2-5.2}$$

(ponemos "$\varepsilon^{sim}\,\varepsilon^{sim}$" porque Λ^{II} no se sale de ε^{sim} al operar sobre ε^{sim}).

a) Prueba de la (A2-5.1):

$$(\psi, \Lambda^{II}\psi) = \psi^{+}\gamma^{o}_{(2)}\frac{1}{2}\left(I - \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi = \frac{1}{2}\psi\left(\gamma^{o}_{(2)} - \gamma^{o}_{(1)}\right)\psi \;; \tag{A2-5.3}$$

pero como $\psi \in \varepsilon^{sim}$ es $\psi_{ij} = \psi_{ji}$

$$\therefore\; \psi^{+}\gamma^{o}_{(1)}\psi = \psi^{*}_{i_2 i_1}\gamma^{o}_{i_1 r_1}\psi_{r_1 i_2} = \psi^{*}_{pq}\gamma^{o}_{qr}\psi_{rp} = \psi^{*}_{qp}\gamma^{o}_{sr}\psi_{pr} =$$

\+ equivalentes escalar.

$$\psi^*_{j_2 j_1}\, \gamma^{o}_{j_2 \ell_2}\, \psi_{j_1 \ell_2} = \psi^+ \gamma^{o}_{(2)}\, \psi . \qquad \text{(A2-5.4)}$$

$$\therefore\ (\psi,\ \Lambda^{II}\psi) = 0$$

Pero obviamente $(\psi,\ 0\ \psi) = 0 \quad \therefore \quad (\psi,\ \Lambda^{II}\psi) = (\psi,\ 0\ \psi)$,

o sea es cierta la (A2-5.1).

b) Prueba de (A2-5.1)

Utilizando la representación (2.9-b) es evidente que

$$\psi^{II} \neq 0 \qquad \therefore \qquad \Lambda^{II}\ \psi = \psi^{II} \neq 0 . \qquad \text{Q.E.D.}$$

A2-6

DEMOSTRACIÓN DE FORMULAS DE LA SECCIÓN 2.d-4.

a) Demostración de (2.30)

a_1) Demostración de $\gamma^{o}_{(1)}\, M \underset{\mathcal{H}}{\sim} \gamma^{o}_{(1)}\, N \Longrightarrow M \left(\underset{\mathcal{H}}{\widetilde{esc}}\right)_{sp} N$. (A2-6.1)

Por (2.23) si $\gamma^{o}_{(1)}\, M \underset{\mathcal{H}}{\sim} \gamma^{o}_{(1)}\, N$ es $\psi^+ \gamma^{o}_{(2)}\, M\varphi = \psi^+ \gamma^{o}_{(2)}\, N\varphi$

(A2-6.2)

para todo $\psi,\ \varphi \in \mathcal{H}$ (pues $\bar{\psi}\ \gamma^{o}_{(1)} = \psi^+ \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\gamma^{o}_{(1)} = \psi^+ \gamma^{o}_{(2)}$);

basta usar (2.20) para ver que $M \left(\underset{\mathcal{H}}{\widetilde{esc}}\right)_{sp} N$ Q.E.D.

a_2) Demostración de $M \left(\underset{\mathcal{H}}{\widetilde{esc}}\right)_{sp} N \Longrightarrow \gamma^{o}_{(1)}\, M \underset{\mathcal{H}}{\sim} \gamma^{o}_{(1)}\, N$.

Se efectúa como en a_1 utilizando (2.20).

a_3) Demostración de que $M \left(\underset{\mathcal{H}}{\widetilde{esc}}\right)_{sp} N \Longrightarrow M \underset{\mathcal{H}}{\widetilde{esc}} N$.

Basta integrar (2.18-b) y comparar con (2.16).

b) Demostración de (2.31)

Sea $\psi \in \mathcal{E}^{sim}$; es

$$\bar{\psi}\, A_{(1)}\, B_{(2)}\, \psi = \bar{\psi}_{i_2 i_1}\, A_{i_1 j_1}\, B_{i_2 j_2}\, \psi_{j_1 j_2} \qquad \text{(A2-6.3)}$$

$\bar{\psi}\, A_{(2)}\, B_{(1)}\, \psi = \bar{\psi}_{i_2 i_1}\, A_{i_2 j_2}\, B_{i_1 j_1}\, \psi_{j_1 j_2}$; mudando $i_1 \longleftrightarrow i_2$, $j_1 \longleftrightarrow j_2$ y usando luego $\psi_{j_1 j_2} = \psi_{j_2 j_1}$, $\bar{\psi}_{i_2 i_1} = \bar{\psi}_{i_1 i_2}$ se obtiene

$\bar{\psi}\, A_{(2)}\, B_{(1)}\, \psi = \bar{\psi}_{i_2 i_1}\, A_{i_1 j_1}\, B_{i_2 j_2}\, \psi_{j_1 j_2}$. Entonces, con (A2-6.3) queda demostrada la (2.31). Análogamente se demuestra la (2.31').

c) Demostración de (2.32-a)

Por (2.31), $(\gamma^0 A)_{(1)}\, B_{(2)} \underset{\mathcal{E}^{sim}}{\sim} (\gamma^0 A)_{(2)}\, B_{(1)}$,

$$\therefore\ \bar{\psi}\, \gamma^0_{(1)}\, A_{(1)} B_{(2)}\, \psi = \bar{\psi}\, \gamma^0_{(2)} A_{(2)} B_{(1)}\, \psi,\ \therefore\ \psi^+\, \gamma^0_{(2)} A_{(1)} B_{(2)}\, \psi =$$
$$= \psi^+ \gamma^0_{(1)}\, A_{(2)}\, B_{(1)}\, \psi,$$

$$\therefore\ (\psi^+\, \gamma^0_{(2)})\, A_{(1)}\, B_{(2)}\, \psi = \left(\psi^+\, \gamma^0_{(2)}\right) \gamma^0_{(2)} \gamma^0_{(1)}\, A_{(2)}\, B_{(1)}\, \psi,$$

$\therefore$ se cumple la (2.32-a).

d) Demostración de (2.32-b) y (c).

Análoga a A2-5 con $\mathcal{E}^{sim} \longrightarrow \mathcal{E}^{sim}_{sp}$

e) Demostración de (2.33-a)

Usar (2.32-a) y la segunda (2.30).

f) Demostración de (2.33-b) y (c)

Ver A2-5.

g) Demostración de (2.33-d) y (2.33-f)

Usaremos la noción de conjugado pseudohermitiano principal $\overline{A} = \gamma^0_{(2)} A^+ \gamma^0_{(2)}$ de un operador A, que se introduce en Secc. 2.e.

Por (2.3-c) $(\psi, H_{(2)} \psi) = (\psi, H_{(1)} \psi)$ si $\psi \in W$; (A2-6.4)

por Secc. 2.e,

$$(\psi, H_{(1)} \psi) = (\overline{H}_{(1)} \psi, \psi) = (\gamma^0_{(2)} H^+_{(1)} \gamma^0_{(2)} \psi, \psi) =$$

$$= (\gamma^0_{(2)} H_{(1)} \gamma^0_{(2)} \psi, \psi) = (H_{(1)} \psi, \psi). \qquad \text{(A2-6.5)}$$

Nuevamente por (2.3-c),

$$(H_{(1)} \psi, \psi) = (H_{(2)} \psi, \psi); \qquad \text{(A2-6.6)}$$

nuevamente por Secc. 2.e,

$$(H_{(2)} \psi, \psi) = (\psi, \overline{H}_{(2)} \psi) = (\psi, \gamma^0_{(2)} H^+_{(2)} \gamma^0_{(2)} \psi) =$$

$$= (\psi, \gamma^0_{(2)} H_{(2)} \gamma^0_{(2)} \psi) = \left(\psi, \left[-\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \gamma^0_{(2)} m\right] \psi\right). \qquad \text{(A2-6.7)}$$

De (A2-6.4), (.5), (.6) y (.7),

$$\left(\psi, \left[\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} + \gamma^0_{(2)} m\right]\psi\right) = \left(\psi, \left[-\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} + \gamma^0_{(2)} m\right]\psi\right) \quad \text{o sea}$$

$$\left(\psi, \alpha_{(2)} \cdot p\, \psi\right) = 0 \quad \therefore \quad \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} \underset{\substack{esc \\ W}}{\sim} 0 . \qquad \text{(A2-6.8-a)}$$

Es

$$\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} = H_{(1)} - m\, \gamma^0_{(1)} \underset{W}{=} H_{(2)} - m\, \gamma^0_{(1)} = m\, \gamma^0_{(2)} + \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} - m\, \gamma^0_{(1)};$$

con (A2-6.8-a) y (2.33-g) +, $\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{p} \underset{\substack{esc \\ W}}{\sim} 0$. (A2-6.8-b)

Como por (2.32) es

$$(\psi, \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p}\, \psi)_{sp} = (\psi, \vec{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{p}\, \gamma^0_{(2)} \psi)_{sp}, \qquad \text{(A2-6.9)}$$

+ que se demuestra independientemente en (i).

integrando ambos miembros tenemos que (A2-6.8) $\Longrightarrow (\psi, \vec{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{p}\, \gamma^{o}_{(2)}\, \psi) =$
$= 0$

$$\therefore\ \vec{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{p}\, \gamma^{o}_{(2)} \ \underset{W}{\widetilde{esc}}\ 0. \qquad \text{(A2-6.10-a)}$$

Análogamente

$$\vec{\gamma}_{(2)} \cdot \vec{p}\, \gamma^{o}_{(1)} \ \underset{W}{\widetilde{esc}}\ 0. \qquad \text{(A2-6.10-b)}$$

Q.E.D.

Notas:

1) La 2a. (2.33-d) $\Longrightarrow (\psi,\ H_{(1)}\psi) = (\psi,\ H_{(2)}\psi) = (\psi,\ m\,\gamma^{o}_{(2)}\,\psi)$
o sea

$$H_{(1)} \ \underset{W}{\widetilde{esc}}\ m\,\gamma^{o}_{(2)} \qquad \text{(A2-6.11)}$$

y, por otra parte,

2) $$\int \psi^{+} \gamma^{o}_{(2)} H_{(1)} \psi\, d^3x = \int \psi^{+}\, m(\gamma^{o}_{(2)})\, (\gamma^{o}_{(2)})\psi\, d^3x =$$
$$= m \int \psi^{+} \psi\, d^3x \qquad \text{(A2-6.12)}$$

Esta última relación fué verificada al trasladar ambos miembros a la formulación de Proca (Cap. 7): ambos miembros se trasladan en una misma expresión.

h) Demostración de (2.33-e)

Sea $p_{\pm} = p^1 \pm i\, p^2$; usando la representación (2.6) es

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p^3 & p_- \\ p_+ & -p^3 \end{pmatrix} \qquad \text{(A2-6.13)}$$

$\therefore$ para spinores 4×1 es

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p}\,\psi = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \hline \vec{\sigma}\,\vec{p} & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdots\cdots \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^3\psi_3 + p_-\,\psi_4 \\ p_+\psi_3 - p^3\,\psi_4 \\ p^3\psi_1 + p_-\,\psi_2 \\ p_+\psi_1 - p^3\,\psi_2 \end{pmatrix}$$

(A2-6.14)

Como $(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})_{(2)}$ sólo actúa en el segundo índice de

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \qquad \text{(A2-6.15)}$$

se obtiene empleando (A2-6.14)

$$\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p}\,\psi = \begin{pmatrix} p^3\psi_{13}+p_-\psi_{14} & p_+\psi_{13}-p^3\psi_{14} & p^3\psi_{11}+p_-\psi_{12} & p_+\psi_{11}-p^3\psi_{12} \\ p^3\psi_{23}+p_-\psi_{24} & p_+\psi_{23}-p^3\psi_{24} & p^3\psi_{21}+p_-\psi_{22} & p_+\psi_{21}-p^3\psi_{22} \\ p^3\psi_{33}+p_-\psi_{34} & p_+\psi_{33}-p^3\psi_{34} & p^3\psi_{31}+p_-\psi_{32} & p_+\psi_{31}-p^3\psi_{32} \\ p^3\psi_{43}+p_-\psi_{44} & p_+\psi_{43}-p^3\psi_{44} & p^3\psi_{41}+p_-\psi_{42} & p_+\psi_{41}-p^3\psi_{42} \end{pmatrix}$$

Evidentemente, si solamente impongo $\psi\in\mathcal{E}$, es $\vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,\psi \neq 0$ $\therefore$ $\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p} \neq 0$; restrinjo: sea $\psi\in\mathcal{E}^{\text{sim}}$ $\therefore$ $\psi_{12}=\psi_{21}$; etc. pero aún así $\alpha_{(2)}\psi p \neq 0$ $\therefore$ $\alpha_{(2)}\cdot p \underset{\mathcal{E}\text{sim}}{\neq} 0$; restrinjo nuevamente: $\psi\in\mathcal{W}$; por la observación que precede a (2.64) se ve que la restricción solamente liga los $\psi_{ij}\in\mathcal{E}^{\text{sim II}}$, o sea (ver (2.9-b)) los ψ_{ij} del tipo 13, 14, 23, 24, 31, 41, 32, 42; los restantes son arbitrarios; por ejemplo, <u>ψ_{11} es arbitrario y ψ_{12} también</u>; esto implica que al menos el elemento 14 de (A2-6.16) es diferente de cero, con lo cual es $\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p}\,\psi \neq 0$ $\therefore$

$$\vec{\alpha}_{(2)}\cdot p \underset{\mathcal{W}}{\neq} 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

<u>i) Demostración de (2.33-g)</u>

Basta emplear (2.33-a) y (2.27-b).

A2-7

DEMOSTRACIÓN DE QUE (2.46-e) SE SATISFACE CON (2.46-f).

$$(2.46\text{-f}) \Longrightarrow \left(\psi^{(1)}, \Lambda_{k_1}^{k_2 k}\varphi^{(2)}\right) = \left(\psi^{(1)}, \overline{\Lambda_{k_1}^{k_2 k}}\varphi^{(2)}\right)$$

$$\therefore \qquad \left(\psi^{(1)}, \Lambda_{k_1}^{k_2 k}\varphi^{(2)}\right) = \left(\Lambda_{k_1}^{k_2 k}\psi^{(1)}, \varphi^{(2)}\right) =$$

$$= \left(0, \varphi^{(2)}\right) = 0 .$$

Además,

$$\Lambda_{k_1}^{k_2 k}\varphi^{(2)} = \varphi^{(2)}$$

$$\therefore \qquad \left(\psi^{(1)}, \varphi^{(2)}\right) = 0 . \qquad \text{Q.E.D.}$$

A2-8

DEMOSTRACIÓN DE (2.47).

Es

$$\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} = \gamma^{o}_{(2)}\left(\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right)^{+}\gamma^{o}_{(2)} = \gamma^{o}_{(2)}\left(\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right)\gamma^{o}_{(2)} = \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}$$

$\therefore$ en (2.5),

$$\overline{\Lambda^{I}} = \Lambda^{I} \ ; \ \overline{\Lambda^{II}} = \Lambda^{II} \qquad \text{Q.E.D.}$$

A2-9

DEMOSTRACIÓN DE (2.52)

<u>a) Em primer lugar no se cumple la condición suficiente (2.46-f):</u>

En efecto,

$$\overline{H}_{(2)} = \gamma^o_{(2)} H^+_{(2)} \gamma^o_{(2)} = \gamma^o_{(2)} H_{(2)} \gamma^o_{(2)} = -\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p} + m\gamma^o_{(2)} =$$

$$= H_{(2)} - 2\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p}; \; \overline{H}_{(1)} = H_{(1)} \; .$$

$$\therefore \; \Lambda_F^{W\varepsilon^{sim}} = \frac{1}{2}\left(\overline{I + \frac{H_{(1)}H_{(2)}}{p_o^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(I + \frac{H_{(1)}H_{(2)}}{p_o^2}\right) - \vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p}\,\frac{H_{(1)}}{p_o^2}$$

Ahora: El término $\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p}\,\frac{H_{(1)}}{p_o^2}$ es equivalente escalar a 0 en $\mathcal{W}$ (por (2.33)) pero no lo es en ε^{sim}, que es donde necesitaríamos que lo fuera para que se cumpliese (2.46-f):

$$\overline{\Lambda_{\mathcal{F}}^{W\varepsilon^{sim}}} \underset{\substack{esc \\ \varepsilon^{sim}}}{\sim} \Lambda_{\mathcal{F}}^{W\varepsilon^{sim}} \; .$$

<u>b) En segundo lugar, existe un ejemplo de un par de vectores, el uno de $\mathcal{W}$, el otro de $\mathcal{F}$ tales que vale (2.52):</u>

Usamos resultados del Cap. 4º (que se demuestran independientemente); si ponemos

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, a(\vec{p})\, u_+(2, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tag{A2-9.2}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, C(\vec{p})\, u_{\mathcal{F}}(1, 1, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

entonces es (cf. (4.21) y Secc. 4.b-1):

$$\psi \in \mathcal{W} \quad , \quad \varphi \in \mathcal{F} \tag{A2-9.3}$$

Por otra parte,

$$(\psi, \varphi) = \int \psi^+ \gamma^o_{(2)}\, \varphi\, d^3x =$$

$$= \int \frac{d^3p}{2p_o}\, a^+(\vec{p})\, c(\vec{p})\, (u_+(2, \vec{p}), u_{\mathcal{F}}(1,1,\vec{p}))_{sp} \; . \tag{A2-9.4}$$

Usando las definiciones A de r y r (cf. A4-1 y A4-2) se puede obtener tras algún cálculo,

$$(u_+(2, \vec{p}), u_{\mathcal{F}}(1, 1, \vec{p})_{sp} = - p_o p^3/m \qquad \text{(A2-9.5)}$$

$$\therefore \quad (\psi, \varphi) = - \frac{1}{2m} \int d^3p \; a^*(\vec{p}) \; c(\vec{p}) \; p^3 \; . \qquad \text{(A2-9.6)}$$

Basta ahora elegir

$$a(\vec{p}) = p^3 \; c(\vec{p}) \qquad y \qquad c(\vec{p}) \not\equiv 0 \qquad \text{(A2-9.7)}$$

para que sea

$$(\psi, \varphi) < 0 \qquad \therefore \qquad (\psi, \varphi) \neq 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

A2-10

SE DEMUESTRA QUE LAS FORMULAS (2.58-a), ..., (2.58-g) DEFINEN AL MISMO OPERADOR $\Lambda_{\perp}^{\sqrt{\varepsilon}\, sim}$.

a) (2.58-a) $\Longleftrightarrow$ (2.58-f):

Fué demostrado en (A2-1.2) (demostración invertible).

b) (2.58-a) $\Longleftrightarrow$ (2.58-f)

Idem en (A2-1.3).

c) (2.58-a) $\Longleftrightarrow$ (2.58-b)

Es inmediato recordando que

$$\vec{\gamma}\gamma^o = - \gamma^o \vec{\gamma} \quad \Longrightarrow \Lambda^{II} \, (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) = (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \, \Lambda^I . \qquad \text{(A2-10.1)}$$

d) (2.58-c) $\Longleftrightarrow$ (2.58-e)

Es inmediato teniendo en cuenta que

$$H^2 = p_o^2 \Longrightarrow \left(I + \frac{H_{(1)}\,H_{(2)}}{p_o^2}\right)(H_{(1)}\gamma^o_{(1)} + H_{(2)}\gamma^o_{(2)}) = H_{(1)}\gamma^o_{(1)} +$$

$$+ H_{(2)}\gamma^o_{(2)} + H_{(2)}\frac{\cancel{p_o^2}}{\cancel{p_o^2}}\gamma^o_{(1)} + H_{(1)}\frac{\cancel{p_o^2}}{\cancel{p_o^2}}\gamma^o_{(2)} = \tag{A2-10.2}$$

$$= (H_{(1)} + H_{(2)})(\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)}) \tag{A2-10.3}$$

e) (2.58-c) $\Longleftrightarrow$ (2.58-d):

Ver (A2-10.2).

f) (2.58-g) (2.58-f):

$$I - \frac{1}{4m}\left(\gamma^o_{(1)} - \gamma^o_{(2)}\right)\left(H_{(1)} - H_{(2)}\right) = I - \frac{1}{4m}\left(\gamma^o_{(1)} - \gamma^o_{(2)}\right) m\left(\gamma^o_{(1)} - \gamma^o_{(2)}\right) -$$

$$- \frac{1}{4m}\left(\gamma^o_{(1)} - \gamma^o_{(2)}\right)\left(\vec{\alpha}_{(1)} - \vec{\alpha}_{(2)}\right)\cdot\vec{p} =$$

$$= I - \frac{1}{4}\left(2I - 2\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}\right) - \frac{1}{4m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \gamma^o_{(1)}\vec{\alpha}_{(2)} - \gamma^o_{(2)}\vec{\alpha}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p} =$$

$$= \frac{I}{2} + \frac{\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}}{2} - \frac{1}{4m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p} + \frac{1}{4m}\left(\gamma^o_{(1)}\vec{\alpha}_{(2)} + \gamma^o_{(2)}\vec{\alpha}_{(1)}\right)\cdot\vec{p} =$$

Q.E.D.

A2-11

DEMOSTRACIÓN DE (2.61)

a) Demostración de (2.61-a).

Basta demostrar

$$\left(\Lambda_{\perp}^{W\varepsilon\,sim}\right)^2 = \Lambda_{\perp}^{W\varepsilon\,sim} \tag{A2-11.1}$$

pues las restantes son consecuencias de ésta.

Teniendo en cuenta que (2.58-a) (2.58-b),

$$\left(\Lambda_{\perp}^{W\varepsilon\, sim}\right)^2 = \left[I - \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right) \cdot \vec{p}\right]\Lambda^{I}\left[\Lambda^{I} - \Lambda^{II} \ \frac{(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)})\vec{p}}{2m}\right] \tag{A2.11-2}$$

Con (2.5-d),

$$\left(\Lambda^{W\varepsilon\, sim}\right)^2 = \left[I - \frac{1}{2m} \ \gamma_{(1)} + \gamma_{(2)} \cdot p\right]\left(\Lambda^{I} - 0\right)$$

que es la (A2-11.1) (ver 2.58-b). Q.E.D.

<u>b) Demostración de (2.61-b)</u>

En (A2-8) vimos que $\overline{\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}} = \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}$ (A2-11.3)

De (2.40-b),

$$\begin{aligned}
\overline{\vec{\gamma}_{(1)}} &= \gamma^{o}_{(2)}\vec{\gamma}^{+}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} = -\gamma^{o}_{(2)}\vec{\gamma}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} = -\vec{\gamma}_{(1)}\\
\overline{\vec{\gamma}_{(2)}} &= \gamma^{o}_{(2)}\vec{\gamma}_{(2)}{}^{+}\gamma^{o}_{(2)} = -\gamma^{o}_{(2)}\vec{\gamma}_{(2)}\gamma^{o}_{(2)} = +\vec{\gamma}_{(2)}\\
\overline{\vec{\alpha}_{(1)}} &= \gamma^{o}_{(2)}\vec{\alpha}^{+}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} = \gamma^{o}_{(2)}\vec{\alpha}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)} = +\vec{\alpha}_{(1)} \qquad \text{(A2-11.4)}\\
\overline{\vec{\alpha}_{(2)}} &= \gamma^{o}_{(2)}\vec{\alpha}^{+}_{(2)}\gamma^{o}_{(2)} = \gamma^{o}_{(2)}\vec{\alpha}_{(2)}\gamma^{o}_{(2)} = -\vec{\alpha}_{(2)}\\
\overline{\gamma^{o}_{(2)}\vec{\alpha}_{(1)}} &= +\vec{\alpha}_{(1)}\vec{\gamma}^{o}_{(2)} = +\vec{\alpha}_{(1)}\vec{\gamma}^{o}_{(2)} = \gamma^{o}_{(2)}\vec{\alpha}_{(1)}\\
\overline{\gamma^{o}_{(1)}\vec{\alpha}_{(2)}} &= -\gamma^{o}_{(1)}\vec{\alpha}_{(2)}
\end{aligned}$$

En (2.58-f),

$$\overline{\Lambda^{W\varepsilon\, sim}} = \frac{1}{4m}\left[2m + 2m\left(\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right) + \left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p} + \right.$$

$$\left. + \left(-\gamma^{o}_{(1)}\vec{\alpha}_{(2)} + \gamma_{(2)}\vec{\alpha}_{(1)}\right)\cdot\vec{p}\right] \tag{A2-11.5}$$

$$\overline{H}_{(2)}=\gamma^o_{(2)} H^+_{(2)} \gamma^o_{(2)} = \gamma^o_{(2)} H_{(2)} \gamma^o_{(2)} = -\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p} + m\gamma^o_{(2)} =$$

$$= H_{(2)} - 2\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p};\ \overline{H}_{(1)} = H_{(1)} .$$

$$\therefore\ \Lambda_F^{W\varepsilon^{sim}} = \frac{1}{2}\left(\overline{I + \frac{H_{(1)}H_{(2)}}{p_o^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(I + \frac{H_{(1)}H_{(2)}}{p_o^2}\right) - \vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p}\,\frac{H_{(1)}}{p_o^2}$$

Ahora: El término $\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p}\,\frac{H_{(1)}}{p_o^2}$ es equivalente escalar a 0 <u>en $\mathcal{W}$</u> (por (2.33)) pero no lo es en ε^{sim}, que es donde necesitaríamos que lo fuera para que se cumpliese (2.46-f):

$$\overline{\Lambda_{\mathcal{F}}^{W\varepsilon^{sim}}} \underset{\substack{esc \\ \varepsilon^{sim}}}{\sim} \Lambda_{\mathcal{F}}^{W\varepsilon^{sim}} .$$

<u>b) En segundo lugar, existe un ejemplo de un par de vectores, el uno de $\mathcal{W}$, el otro de $\mathcal{F}$ tales que vale (2.52)</u>:

Usamos resultados del Cap. 4º (que se demuestran independientemente); si ponemos

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, a(\vec{p})\, u_+(2, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}}\, C(\vec{p})\, u_{\mathcal{F}}(1, 1, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tag{A2-9.2}$$

entonces es (cf. (4.21) y Secc. 4.b-1):

$$\psi \in \mathcal{W} \quad , \qquad \varphi \in \mathcal{F} \tag{A2-9.3}$$

Por otra parte,

$$(\psi,\varphi) = \int \psi^+ \gamma^o_{(2)}\ \varphi\, d^3x =$$

$$= \int \frac{d^3p}{2p_o}\, a^+(\vec{p})\, c(\vec{p})\, (u_+(2, \vec{p}), u_{\mathcal{F}}(1,1,\vec{p}))_{sp} . \tag{A2-9.4}$$

Usando las definiciones A de r y r (cf. A4-1 y A4-2) se puede obtener tras algún cálculo,

$$(u_+(2, \vec{p}), u_{\mathcal{F}}(1, 1, \vec{p})_{sp} = - p_o p^3/m \qquad \text{(A2-9.5)}$$

$$\therefore \quad (\Psi,\varphi) = - \frac{1}{2m} \int d^3p \; a^*(\vec{p}) \; c(\vec{p}) \; p^3 \; . \qquad \text{(A2-9.6)}$$

Basta ahora elegir

$$a(\vec{p}) = p^3 \; c(\vec{p}) \qquad y \qquad c(\vec{p}) \not\equiv 0 \qquad \text{(A2-9.7)}$$

para que sea

$$(\Psi,\varphi) < 0 \qquad \therefore \qquad (\Psi,\varphi) \neq 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

A2-10

SE DEMUESTRA QUE LAS FORMULAS (2.58-a), ..., (2.58-g) DEFINEN AL MISMO OPERADOR $\Lambda_{\perp}^{\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{sim}}$.

a) (2.58-a) $\Longleftrightarrow$ (2.58-f):

Fué demostrado en (A2-1.2) (demostración invertible).

b) (2.58-a) $\Longleftrightarrow$ (2.58-f)

Idem en (A2-1.3).

c) (2.58-a) $\Longleftrightarrow$ (2.58-b)

Es inmediato recordando que

$$\vec{\gamma}\gamma^o = - \gamma^o\vec{\gamma} \quad \Longrightarrow \Lambda^{II} \, (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) = (\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}) \, \Lambda^{I} . \qquad \text{(A2-10.1)}$$

d) (2.58-c) $\Longleftrightarrow$ (2.58-e)

Es inmediato teniendo en cuenta que

$$\overline{\Lambda^{W}\varepsilon^{sim}} \underset{\varepsilon^{sim}}{\neq} \Lambda^{W}\varepsilon^{sim}, \quad \text{pero } (2.33\text{-a}) \Longrightarrow$$

$$\vec{\gamma}_{(1)}\, I_{(2)} \underset{\varepsilon^{sim}}{\widetilde{esc}} (\gamma^{o}\, I)_{(1)}\, (\gamma^{o}\vec{\gamma})_{(2)} = \gamma^{o}_{(1)}\, \vec{\alpha}_{(2)}$$

$$- \gamma^{o}_{(1)}\, \alpha_{(2)} \underset{\varepsilon^{sim}}{\widetilde{esc}} - (\gamma^{o}\gamma)_{(1)}\, (\gamma^{o}\gamma^{o})_{(2)} = - \vec{\gamma}_{(1)}\, I_{(2)} \qquad \text{(A2-11.6)}$$

Además (2.28) $\Longrightarrow$

$$- \vec{\gamma}_{(2)} I_{(1)} \underset{\varepsilon^{sim}}{\widetilde{esc}} -\vec{\gamma}_{(2)} I_{(1)}; \quad \gamma^{o}_{(2)}\, \vec{\alpha}_{(1)} \underset{\varepsilon^{sim}}{\widetilde{esc}} \gamma^{o}_{(2)}\, \vec{\alpha}_{(1)};$$

$$2m + 2m\, \gamma^{o}_{(1)}\, \gamma^{o}_{(2)} \underset{\varepsilon^{sim}}{\widetilde{esc}} 2m + 2m\, \gamma^{o}_{(1)}\, \gamma^{o}_{(2)}$$

con lo que

$$\overline{\Lambda^{W}\varepsilon^{sim}} \underset{\varepsilon^{sim}}{\widetilde{esc}} \Lambda^{W}\varepsilon^{sim} \qquad \text{Q.E.D.}$$

A2-12

DEMOSTRACIÓN DE (2.63) EN LA REPRESENTACIÓN (2.6)

Usando (2.6-b) se ve que

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^{o}_{(1)} + \gamma^{o}_{(2)}\right)\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\psi_{33} & -\psi_{34} \\ 0 & 0 & -\psi_{43} & -\psi_{44} \end{pmatrix}. \qquad \text{(A2-12.1)}$$

Con (A2-6.16) es, $\vec{\alpha}_{(2)} \cdot \vec{p}\left[\frac{1}{2}\,(\gamma^{o}_{(1)} + \gamma^{o}_{(2)})\,\psi\right] =$

$$=\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p}\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\psi_{33} & -\psi_{34} \\ 0 & 0 & -\psi_{43} & -\psi_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & p^3\psi_{11}+p_-\psi_{12} & p_+\psi_{11}-p^3\psi_{12} \\ 0 & 0 & p^3\psi_{21}+p_-\psi_{22} & p_+\psi_{21}-p^3\psi_{22} \\ -p^3\psi_{33}-p_-\psi_{34} & -p_+\psi_{33}+p^3\psi_{34} & 0 & 0 \\ -p^3\psi_{43}-p_-\psi_{44} & -p_+\psi_{43}-p^3\psi_{44} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(A2-12.2)

Análogamente, $\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{p}\left[\frac{1}{2}\ \gamma^0_{(1)}+\gamma^0_{(2)})\right]\psi =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p^3\psi_{33}-p_-\psi_{43} & -p^3\psi_{34}-p_-\psi_{44} \\ 0 & 0 & -p_+\psi_{33}+p^3\psi_{43} & -p_+\psi_{34}+p^3\psi_{44} \\ p^3\psi_{11}+p_-\psi_{21} & p^3\psi_{12}+p_-\psi_{22} & 0 & 0 \\ p_+\psi_{21}-p^3\psi_{21} & p_+\psi_{12}-p^3\psi_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(A2-12-3)

Por otra parte, de (2.58-c) y (2.5-b),

$$\Lambda_\perp^{W}\varepsilon^{sim}\ \psi = \frac{1}{4m}\left(H_{(1)}+H_{(2)}\right)\left(\gamma^0_{(1)}+\gamma^0_{(2)}\right)\psi =$$

$$= \frac{\vec{p}}{4m}\cdot\left(\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)}\right)\left(\gamma_{(1)}+\gamma^0_{(2)}\right) + \Lambda^{II}\ \psi \qquad \text{(A2-12-4)}$$

Basta ahora reemplazar en ésta las (A2-12.3), (A2-12.2) y (2.9-b) para obtener la (2.63).

A2-13

DEMOSTRACIÓN DE LAS (2.65).

Se pueden demostrar de varias maneras; indico la más rápida para cada caso.

a) (2.65-a)

Usar (2.58-g) y (2.48) recordando $(H_{(1)} - H_{(2)})(H_{(1)} + H_{(2)}) = 0$ (A2-13-1)

b) (2.65-b)

Como $H^2 = p_o^2$, de (2.58-g) y (2.48) se obtiene

$$\Lambda_{\perp}^{W}\varepsilon^{sim}\,\Lambda_{W}^{F}\varepsilon^{sim} = \frac{1}{2}\left(I - \frac{H_{(1)}\,H_{(2)}}{p_o^2}\right) - \frac{1}{4m}\left(\gamma^o_{(1)} - \gamma^o_{(2)}\right)\left(H_{(1)} - H_{(2)}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(I - \frac{H_{(1)}\,H_{(2)}}{p_o^2}\right) =$$

$$= \Lambda_{W}^{F}\varepsilon^{sim} - \frac{1}{4m}\left(\gamma^o_{(1)} - \gamma^o_{(2)}\right)\left(H_{(1)} - H_{(2)}\right) = \Lambda_{W}^{F}\varepsilon^{sim} - \Lambda^{g}\varepsilon^{sim}$$

(recordar (2.60). Q.E.D.

c) (2.65-c)

Usar (2.60) y (2.48).

d) (2.65-d)

Usar (2.60) y (2.48).

e) (2.65-e)

Usar (2.48) y (2.58-e).

f) (2.65-f)

Usar (2.65-e) recordando $\Lambda_{\perp}^{g\varepsilon^{sim}} = I - \Lambda_{\perp}^{w\varepsilon^{sim}}$.

g) (2.65-g)

Usar (2.65-e) recordando $\Lambda_{w}^{F\varepsilon^{sim}} = I - \Lambda_{F}^{w\varepsilon^{sim}}$.

h) (2.65-h)

Usar (2.65-e) recordando $\Lambda_{\perp}^{g\varepsilon^{sim}} = I - \Lambda_{\perp}^{w\varepsilon^{sim}}$

A2-14

a) DEMOSTRACIÓN DE (2.67).

De (2.66), si $\psi \in \mathcal{E}$:

$$\left(\Lambda^{\varepsilon^{sim}}_{\varepsilon^{ant}}\psi\right)_{i_1 i_2} = \frac{1}{2}\left(\delta_{i_1 j_1}\delta_{i_2 j_2} + \delta_{i_1 j_2}\delta_{i_2 j_1}\right)\psi_{j_1 j_2} = \frac{1}{2}\left(\psi_{i_1 i_2} + \psi_{i_2 i_1}\right)$$

$$\therefore \quad \left(\Lambda^{\varepsilon^{sim}}_{\varepsilon^{ant}}\psi\right)_{i_1 i_2} = \left(\Lambda^{\varepsilon^{sim}}_{\varepsilon^{ant}}\psi\right)_{i_2 i_1} \qquad \text{(A2-14.1)}$$

Análogamente,

$$\left(\Lambda^{\varepsilon^{ant}}_{\varepsilon^{sim}}\psi\right)_{i_1 i_2} = -\left(\Lambda^{\varepsilon^{ant}}_{\varepsilon^{sim}}\psi\right)_{i_2 i_1} \qquad \text{Q.E.D.}$$

b) DEMOSTRACIÓN DE (2.70) y de la no ortogonalidad de $\Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}$.

En primer lugar, no vale la condición suficiente (2.46-f) porque

$$\overline{\Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{i_1 i_2 j_1 j_2}} = \gamma^{o}_{i_2 r_2}\Lambda^{+}_{i_1 r_2 j_1 s_2}\gamma^{o}_{s_2 j_2} = \gamma^{o}_{i_2 r_2}\Lambda^{*}_{j_1 s_2 i_1 r_2}\gamma^{o}_{s_2 j_2} =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^{o}_{i_2 r_2}(\delta_{j_1 i_1}\delta_{s_2 r_2} + \delta_{j_1 r_2}\delta_{i_1 s_2})\gamma^{o}_{s_1 j_2} =$$

$$= \frac{1}{2}\delta_{i_1 j_1}\delta_{i_2 j_2} + \frac{1}{2}\gamma^{o}_{i_2 j_1}\gamma^{o}_{i_1 j_2} \qquad \text{(A2-14)}$$

(o sea, (2.70) es correcta).

Además, podemos demostrar que existen $\psi^{(sim)} \in \varepsilon^{sim}$ y $\varphi^{(ant)} \in \varepsilon^{ant}$ tales que

$$\left(\psi^{(sim)}, \varphi^{(ant)}\right) \neq 0 \qquad \text{(A2-14.3)}$$

En efecto: Elijo $= \psi^{(sim)}_{13} = \psi^{(sim)}_{31} = f(\vec{x})$, restantes $\psi^{(sim)}_{ij} = 0$

$$= \psi^{(ant)}_{13} = \psi^{(ant)}_{31} = f(\vec{x}), \quad \text{restantes } \psi^{(ant)}_{ij} = 0$$

con f(x) arbitraria de cuadrado integrable. (A2-14.4)

Uso (2.6-b):

$$\left(\psi^{(sim)}, \varphi^{(ant)}\right) = \int \psi^{(sim)+}_{i_2 i_1} \gamma^{o}_{i_2 r_2} \varphi^{(ant)}_{i_1 r_2} d^3x = \int \varepsilon_{\underline{i_2}} \psi^{(sim)+}_{\underline{i_2} i_1} \varphi^{(ant)}_{i_1 \underline{i_2}} =$$

$$= \int \left\{ \varepsilon_1 \psi^{(sim)+}_{13} \varphi^{(ant)}_{31} + \varepsilon_3 \psi^{(sim)+}_{31} \varphi^{(ant)}_{13} \right\} d^3x = \int \Big\{ (+1)\, f^*(\vec{x}) \left[-f(\vec{x})\right] +$$

$$+ (-1)\, f^*(\vec{x})\, f(\vec{x}) \Big\} d^3x = -2 \int |f|^2\, d^3x.$$

basta elegir $f(\vec{x})$ no idénticamente nula para que sea

$$\left(\psi^{(sim)}, \varphi^{(ant)}\right) < 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

A2-15

DEMOSTRACIÓN DE (2.71).

Por ejemplo, demostración de la segunda:

$$\text{Sea} \quad \psi \in \varepsilon^{sim} = \left(\Lambda^{\varepsilon^{ant}}_{\varepsilon^{sim}} A_{(1)} I_{(2)} \psi \right)_{i_1 i_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} \right) A_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_2} \psi_{k_1 k_2} =$$

$$= \frac{1}{2} A_{i_1k_1}\delta_{i_2k_2}\psi_{k_1k_2} - \frac{1}{2} A_{i_2k_1}\delta_{i_1k_2}\psi_{k_1k_2} =$$

$$= \frac{1}{2} A_{i_1k_1}\delta_{i_2k_2}\psi_{k_1k_2} - \frac{1}{2} A_{i_2k_1}\delta_{i_1k_2}\psi_{k_2k_1} =$$

Mudando índices mudos ($k_1 \Longleftrightarrow k_2$) en el último término,

$$\left(\Lambda^{\varepsilon ant}_{\varepsilon sim}\ A_{(1)}\ I_{(2)}\psi\right)_{i_1i_2} = \frac{1}{2} A_{i_1k_1}\delta_{i_2k_2}\psi_{k_1k_2} - \frac{1}{2} A_{i_2k_2}\delta_{i_1k_1}\psi_{k_1k_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(A_{(1)}\ I_{(2)} - I_{(1)}\ A_{(2)}\right)\psi\right]_{i_1i_2} \quad \text{Q.E.D.}$$

A2-16

a) DEMOSTRACIÓN DE QUE LAS (2.72-a), ... (2.72-e) DEFINEN EL MIS MO OPERADOR

a_1) (2.72-a) $\Longleftrightarrow$ (2.72-b):

Es inmediata con (A2-10.1).

a_2) (2.72-a) $\Longleftrightarrow$ (2.72-c)

Es

$$H\gamma^o = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\,\gamma^o) = -\vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m\ I$$

$$\therefore\ (H\gamma^o)_{(1)} - (H\gamma^o)_{(2)} = -\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p} + m\left(I_{(1)}\ I_{(2)} - I_{(2)}\ I_{(1)}\right) =$$

$$= -\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p} \qquad \text{(A2-16.1)}$$

Con esta, la demostración se completa fácilmente.

a_3) (2.72-a) $\Longleftrightarrow$ (2.72-d).

Es $\gamma^o\ H = \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + m\ I$

$$\therefore\ \left(\gamma^o\ H\right)_{(1)} - \left(\gamma^o\ H\right)_{(2)} = +\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p} + 0, \qquad \text{(A2-16.2)}$$

que permite efectuar la demostración.

a_4) (2.72-e) $\Longleftrightarrow$ (2.72-c): Basta desarrollar usando (2.72-c), (2.58-e) y (2.66).

b) DEMOSTRACIÓN DE $(\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon}\,\psi) \in \mathcal{W}$ PARA TODA $\psi \in \mathcal{W}$. (A2-16.3)

Sea $\psi \in \mathcal{E}$; con (2.72-c),

$$H_{(1)} - H_{(2)}\left(\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon}\,\psi\right) = \left(H_{(1)} - H_{(2)}\right)\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon^{sim}}\left(\Lambda_{\varepsilon ant}^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}\,\psi\right)$$
$$- \left(H_{(1)} - H_{(2)}\right)\frac{1}{2m}\left[\left(H_{(1)}\gamma^{o}_{(1)} - H_{(2)}\gamma^{o}_{(2)}\right)\Lambda^{II}\right]\Lambda_{\varepsilon sim}^{\varepsilon^{ant}\varepsilon}\,\psi.$$

Por (2.56) el 1er. sumando es nulo (recordar (2-3.c)). También es nulo el 2° pues

$$H_{(1)} - H_{(2)}\quad H_{(1)}\gamma^{o}_{(1)} - H_{(2)}\gamma^{o}_{(2)}\quad \Lambda^{II} =$$
$$= \left(p_o^2\gamma^{o}_{(1)} - H_{(1)}H_{(2)}\gamma^{o}_{(2)} - H_{(2)}H_{(1)}\gamma^{o}_{(1)} + p_o^2\,\gamma^{o}_{(2)}\right)\Lambda^{II} =$$
$$= \left(p^{o^2} - H_{(1)}H_{(2)}\right)\left(\gamma^{o}_{(1)} + \gamma^{o}_{(2)}\right)\frac{1}{2}\left(II - \gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(p^{o^2} - H_{(1)}H_{(2)}\right)\left(\gamma^{o}_{(1)} + \gamma^{o}_{(2)} - \gamma^{o}_{(2)} - \gamma^{o}_{(1)}\right) = 0\ .$$

Por lo tanto,

$$H_{(1)}\left(\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon}\,\psi\right) = H_{(2)}\left(\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon}\,\psi\right) \qquad \text{(A2-16-4)}$$

o sea $\left(\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon}\,\psi\right)$ cumple (2.3-c) o sea pertenece a $\mathcal{W}$.

c) DEMOSTRACIÓN DE (2.75).

Basta demostrar $\left(\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon}\right)^2 = \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon}$ (A2-16.5)

pues las restantes son consecuencia de esta.

c_1) Sea $\psi \in \varepsilon^{sim}$; por (2.69) la (2.72) implica

$$= \qquad {}^{\text{sim}} \tag{A2-16.6}$$

pero $\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon^{\text{sim}}} \psi \in \varepsilon^{\text{sim}}$ de manera que reiterando,

$$\left(\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon}\right)^2 \psi = \Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon}\left(\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon^{\text{sim}}} \psi\right) = \Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon^{\text{sim}}}\left(\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon^{\text{sim}}} \psi\right); \text{ pero } \left(\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon^{\text{sim}}}\right)^2 \tag{A2-16.7}$$

$$\left[\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon^{\text{sim}}} \therefore \left(\Lambda^{\mathcal{W}\varepsilon}\right)^2 \psi = \Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon^{\text{sim}}} \psi\right]$$

De (A2-16.6) y (7),

$$\left(\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon}\right)^2 \psi = \Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon} \psi \therefore \quad \left(\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon}\right)^2 \underset{\varepsilon\varepsilon^{\text{sim}}}{=} \Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon} \tag{A2-16.8}$$

c_2) Demostración de (A2-16.14).

Sea $\psi \in \varepsilon^{\text{ant}}$; por (2.69),

$$\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon} \psi = + \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right) \cdot \vec{p} \ \Lambda^{II} \psi \tag{A2-16.9}$$

Pero siendo $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$ es $\left[\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right) \cdot \vec{p} \ \Lambda^{II} \psi\right] \in \varepsilon^{\text{sim}}$

$$\tag{A2-16.10}$$

de manera que reiterando y volvien o a usar (2.69) resulta

$$\left(\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon}\right)^2 \psi = \Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon^{\text{sim}}} \left(\frac{1}{2m}\right)\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right) \cdot \vec{p} \ \Lambda^{II} \psi \tag{A2-16.11}$$

Por otro lado, de la demostración hecha en (b) se deduce que

$$\left(H_{(1)} - H_{(2)}\right) \left[\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right) \cdot \vec{p} \ \Lambda^{II}\right] = 0$$

de manera que

$$\frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right) \cdot \vec{p} \ \Lambda^{II} \psi \in \mathcal{W} \tag{A2-16.12}$$

Entonces, con (2.62) la (A2-16.10) queda,

$$\left(\Lambda_\perp^{\mathcal{W}\varepsilon}\right)^2 \psi = + \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right) \cdot \vec{p} \ \Lambda^{II} \psi \tag{A2-16.13}$$

De (A2-16.9) y (A2-16.13),

$$\left(\Lambda_\perp^{W\varepsilon}\right)^2 \psi = \Lambda_\perp^{W\varepsilon}\ \psi \ \therefore \qquad \left(\Lambda_\perp^{W\varepsilon}\right)^2_{\varepsilon\varepsilon^{ant}} = \Lambda_\perp^{W\varepsilon} \qquad \text{(A2-16.14)}$$

c_3) De (A2-16.8) y (A2-16.14),

$$\left(\Lambda_\perp^{W\varepsilon}\right)^2 = \Lambda_\perp^{W\varepsilon} \qquad \text{o sea} \qquad \left(\Lambda_\perp^{W\varepsilon}\right)^2 = \Lambda_\perp^{W\varepsilon} \qquad \text{Q.E.D.}$$

d) DEMOSTRACIÓN DE $\overline{\Lambda_\perp^{W\varepsilon}} = \Lambda_\perp^{W\varepsilon}$ (A2-16.15)

(de donde $\Lambda_\perp^{W\varepsilon} = \Lambda_\perp^{W\varepsilon}$).

d_1) Demuestro primero que

$$\left(\Lambda^{I}\ \Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}\right)^+ = \left(\Lambda^{I}\ \Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}\right) \ ; \qquad \left(\Lambda^{II}\ \Lambda^{\varepsilon^{ant}}\right)^+ = \Lambda^{II}\ \Lambda_\perp^{\varepsilon^{ant}} \qquad \text{(A2-16.16)}$$

En efecto:

$$\left[\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}\Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}\right]_{i_1 i_2 k_1 k_2} = \left(\gamma^o_{i_1 j_1}\ \gamma^o_{i_2 j_2}\right)\left(\frac{\delta_{j_1k_1}\delta_{j_2k_2} + \delta_{j_1k_2}\delta_{j_2k_1}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\gamma^o_{i_1k_1}\gamma^o_{i_2k_2} + \gamma^o_{i_1k_2}\ \gamma^o_{i_2k_1}}{2} \qquad \text{(A2-16.17)}$$

Con (2.5)

$$\left(\Lambda^{I}\ \Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}\right)_{i_1i_2j_1j_2} = \frac{1}{4}\left(\delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2} + \delta_{i_1j_2}\delta_{i_2j_1} + \right.$$

$$\left. + \gamma^o_{i_1j_1}\ \gamma^o_{i_2j_2} + \gamma^o_{i_1j_2}\gamma^o_{i_2j_1}\right).$$

Análogamente,

$$\Lambda^{II}\ \Lambda^{\varepsilon^{ant}\varepsilon}_{\varepsilon^{sim}}\ {}_{i_1i_2j_1j_2} = \frac{1}{4}\left(\delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2} - \delta_{i_1j_2}\delta_{i_2j_1} - \right.$$

$$\left. + \gamma^o_{i_1j_1}\gamma^o_{i_2j_2} + \gamma^o_{i_1j_2}\gamma^o_{i_2j_1}\right). \qquad \text{(A2-16.18)}$$

en el 2° m. todos los operadores son evidentemente hermitianos; el único que merece verificación es el último sumando:

Sea

$$B_{i_1i_2j_1j_2} = \gamma^o_{i_1j_2}\gamma^o_{i_2j_1}; \quad B^+_{i_1i_2j_1j_2} = \gamma^o_{j_1i_2}\gamma^o_{j_2i_1} = \gamma^o_{i_2j_1}\gamma_{i_1j_2} =$$

$$= B_{i_1i_2j_1j_2}$$

$\therefore$ también el último sumando es hermitiano, con lo que la (A2-16.16) queda demostrada.

d_2) Demuestro que

$$\Lambda^I \; \Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}} = \Lambda^I \, \Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}} \; ; \; \Lambda^{II} \, \Lambda^{\varepsilon^{ant}\varepsilon}_{\varepsilon^{sim}} = \Lambda^{II} \; \Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}} \quad (A2\text{-}16.19)$$

En efecto: Si un operador A es hermitiano, $\bar{A} = \gamma^o_{(2)} \, A \, \gamma^o_{(2)}$ entonces, con (A2-16.18),

$$\Lambda^I \; \Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{i_1i_2j_1j_2} = \gamma^o_{i_2r} \left(\Lambda^I \, \Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}\right)_{i_1r,j_1s} \; \gamma^o_{sj2} =$$

$$= \frac{1}{4}\gamma^o_{i_2r}\left(\delta_{i_1j_1}\;\delta_{rs} + \delta_{i_1s}\;\delta_{rj_1} + \gamma^o_{i_1j_1}\;\gamma^o_{rs} + \gamma^o_{i_1s}\;\gamma^o_{rj_1}\right) = \gamma^o_{sj2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\delta_{i_1j_1}\,\delta_{i_2j_2} + \gamma^o_{i_2j_1}\gamma^o_{i_1j_2} + \gamma^o_{i_1j_1}\;\gamma^o_{i_2j_2} + \delta_{i_1j_2}\;\delta_{i_2j_1}\right) =$$

$$= \left(\Lambda^I \;\; \Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}\right)_{i_1i_2j_1j_2} ,$$

Por otra parte

$$\left(\Lambda^{II}\,\Lambda^{\varepsilon^{ant}\varepsilon}_{\varepsilon^{sim}}\right)_{i_1i_2j_1j_2} = \gamma^o_{i_2r}\left(\Lambda^{II}\;\Lambda^{\varepsilon^{ant}\varepsilon}_{\varepsilon^{sim}}\right)_{i_1r,j_1s}\;\gamma^o_{sj2} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\gamma^o_{i_2r}\left(\delta_{i_1j_1}\delta_{rs} - \delta_{i_1s}\delta_{rj_1} - \gamma^o_{i_1j_1}\,\gamma^o_{rs} + \gamma^o_{i_1s}\;\gamma^o_{rj_1}\right)\gamma^o_{sj2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2} - \gamma^o_{i_2j_1}\gamma^o_{i_1j_2} - \gamma^o_{i_1j_1}\gamma^o_{i_2j_2} + \delta_{i_1j_2}\delta_{i_2j_1}\right).$$

Por otro lado,

$$\left(\Lambda^{II}\Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}\right)_{i_1i_2j_1j_2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\delta_{i_1r_1}\delta_{i_2r_2} - \gamma^o_{i_1r_1}\gamma^o_{i_2r_2}\right)\left(\delta_{r_1j_1}\delta_{r_2j_2} + \delta_{r_1j_2}\delta_{r_2j_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2} + \delta_{i_1j_2}\delta_{i_2j_1} - \gamma^o_{i_1j_1}\gamma^o_{i_2j_2} - \gamma^o_{i_1j_2}\gamma^o_{i_2j_1}\right)$$

de donde

$$\Lambda^{II}\Lambda^{\varepsilon^{ant}\varepsilon}_{\varepsilon^{sim}} = \Lambda^{II}\Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}$$

d_3)

De (2.58-d) y (2.72-a),

$$\Lambda^{\psi\varepsilon}_{\perp} = \left[I - \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\right]\Lambda^{I}\Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}} +$$

$$+ \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\ \Lambda^{II}\Lambda^{\varepsilon^{ant}\varepsilon}_{\varepsilon^{sim}} \qquad \text{(A2-16.20)}$$

Con (2.41), (A2-16.19) y (A2-11.4),

$$\overline{\Lambda^{\psi\varepsilon}_{\perp}} = \left(\Lambda^{I}\Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}\right)\left[I + \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2m}\left(\Lambda^{II}\Lambda^{\varepsilon^{sim}\varepsilon}_{\varepsilon^{ant}}\right)\left(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\right. \qquad \text{(A2-16.21)}$$

d_3-1) Sea $\psi\in\varepsilon^{sim}$; por (2.65),

$$= \left[I - \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\ \Lambda^{I}\psi\right. \qquad \text{(A2-16.22)}$$

Si $\psi\in\varepsilon^{sim}$ es $\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\psi\in\varepsilon^{ant}$ y $\left(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\,\psi\in\varepsilon^{sim}$

$$\overline{\Lambda_{\perp}^{w\varepsilon}\ \psi} = \Lambda^{I}\,\psi + 0 - \frac{1}{2m}\ \Lambda^{II}\left(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right)\psi \tag{A2-16.23}$$

Por (A2-2.10), las (A2-16.22) y (A2-16.23)

$$\Lambda_{\perp}^{w\varepsilon}\,\psi = \overline{\Lambda_{\perp}^{w\varepsilon}\,\psi} \qquad \text{o sea} \qquad \Lambda^{w\varepsilon} \underset{\varepsilon\varepsilon^{sim}}{=} \overline{\Lambda_{\perp}^{w\varepsilon}} \tag{A2-16.24}$$

d_3-2) Sea $\psi \in \varepsilon^{ant}$; $\Lambda_{\perp}^{w\varepsilon}\,\psi = \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\ \Lambda^{II}\,\psi$ (A2-16.25)

Ahora $\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\ \psi \in \varepsilon^{sim}$; $\left(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\ \psi \in \varepsilon^{ant}$; (A2-16.25')

$$\therefore\ \Lambda_{\perp}^{w\varepsilon}\,\psi = \Lambda^{I}\,\frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p} \tag{A2-16.26}$$

Usando nuevamente (A2-10.1) es

$$\overline{\Lambda_{\perp}^{w\varepsilon}}\ \psi = \Lambda_{\perp}^{w\varepsilon}\ \psi \qquad \text{o sea} \qquad \Lambda_{\perp}^{w\varepsilon} \underset{\varepsilon\varepsilon^{ant}}{=} \Lambda_{\perp}^{w\varepsilon} \tag{A2-16.27}$$

d_3-3) De d_3-1 y d_3-2,

$$\overline{\Lambda_{\perp}^{w\varepsilon}} = \Lambda_{\perp}^{w\varepsilon} \qquad \text{Q.E.D.}$$

A3-1

DEMOSTRACIÓN DE (3.1-c)

Sea $\psi^{(o)}_{a,b,---q}$ un estado que cumple (3.1-b). Los valores medibles con presición $(a)_m$, $(b)_m$, ---, $(q)_m$ para tal estado, corresponderán en general a observables A, B, ---, Q tales que

$$A\psi^{(o)}_{a,b,---,q} = a\ \psi^{(o)}_{a,b,---,q}$$

$$B\psi^{(o)}_{a,b,---,q} = b\ \psi^{(o)}_{a,b,---,q}$$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

$$Q\psi^{(o)}_{a,b,---,q} = q\psi^{(o)}_{a,b,---,q}$$

Entonces

$$(a)_m = (\psi^{(o)}_{a,b,---,q}, A\psi^{(o)}_{a,b,---,q}) = a\ (\psi^{(o)}_{a,b,---,q}, \psi^{(o)}_{a,b,---,b});$$

por (3.1-b),

$$(a)_m = 0;$$

Analogamente,

$$(b)_m = 0; \ ------- \ ; (q)_m = 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

A3-2

DEMOSTRACIÓN DE (3.8-d)

Por Sec. 4.b-1 los 10 spinores (4.18) y (4.19) substituyen el espacio spinorial ε^{sim}_{sp}; usando (4.4-a), es inmediato que sólo las cuatro $u_{\mathcal{F}}$ de (4.19) (y no las u_{ε} de 4.18) pueden contribuir a la parte spinorial de una $\psi^{(o)}$ que cumpla (3.8-b). Pero entonces toda $\psi^{(o)}$ es del tipo

$$\psi^{(o)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r,s} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} C(r, s, \vec{p})\, u_{\mathcal{F}}(r, s, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \qquad (A3\text{-}2.1)$$

donde las C son coeficientes sin subíndices spinoriales.

Supongamos ahora que pudiera ser $\psi^{(o)} \epsilon \mathcal{W}$; entonces (2.3-c) en (A3-2.1) implica

$$C(r, s, \vec{p}) = 0 \qquad (A3\text{-}2.1)$$

si se usa nuevamente (4.19) y (4.4-a). O sea, la única $\psi^{(o)} \epsilon \mathcal{W}$ es la

$$\psi^{(o)} = 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

A3-3

a) DEMOSTRACIÓN DE QUE m $\gamma^o_{(1)}$ ES DE 2a. CLASE.

En la representación (2.6) se ve usando (A2-12.1) que p. ej. para toda $\psi \epsilon \mathcal{W}$ tal que $\psi \neq 0$ (lo cual es posible: ver (2.63)) es m $\gamma^o_{(1)} \psi \notin \varepsilon^{sim}$ y por lo tanto m $\gamma^o_{(1)} \psi \notin \mathcal{W}$. Q.E.D.

b) DEMOSTRACIÓN DE QUE SI

$$p_1 = p_2 = 0, \qquad p_3 \neq 0 \;, \qquad (A3\text{-}3.1)$$

NINGUN AUTOVECTOR f^b DE m $\gamma^o_{(1)}$ PERTENECE A $\mathcal{W}$.

Siempre es posible medir simultánemente el momento y la energía de una partícula libre; aunque no lo usemos (cf. Secc. 3.c-3), m $\gamma^o_{(1)}$ puede representar la energía como operador de 2a. clase; es pues compatible (A3-3.1) con una medición de m $\gamma^o_{(1)}$.

Trabajaremos en la representación p. Por (A2-12-1) los autovectores en $\mathcal{E}$ de m $\gamma^o_{(1)}$ son

$$f^{+1} = \begin{pmatrix} f_{11}^{+1} & f_{12}^{+1} & f_{13}^{+1} & f_{14}^{+1} \\ f_{21}^{+1} & f_{22}^{+1} & f_{23}^{+1} & f_{24}^{+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; f^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{31}^{-1} & f_{32}^{-1} & f_{33}^{-1} & f_{34}^{-1} \\ f_{41}^{-1} & f_{42}^{-1} & f_{43}^{-1} & f_{44}^{-1} \end{pmatrix}$$

(A3-3.2)

Demostraremos por el absurdo que $f^{+1} \notin \mathcal{W}$ (salvo el caso sin interés $f^{+1} = 0$). (A3-3.3)

Si fuera

$$0 \neq f^{+1} \in \mathcal{W} \qquad \text{(a)}$$

sería $f^{+1} \in \varepsilon^{sim}$, de donde,

$$f^{+1} = \begin{pmatrix} f_{11}^{+1} & f_{12}^{+1} & 0 & 0 \\ f_{12}^{+1} & f_{22}^{+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \; f_{31}^{+1} = f_{32}^{+1} = f_{41}^{+1} = f_{42}^{+1} = 0$$

(A3-3.4)

De (2.63) obtenemos f_{31}^{+1}, f_{41}^{+1}, f_{32}^{+1} y f_{42}^{+1} si $f^{+1} \in \mathcal{W}$; usando (A3-3.1) queda, $f_{31}^{+1} = \frac{p^3}{m} f_{11}^{+1}$; $f_{41}^{+1} = -\frac{p^3}{m} f_{12}^{+1}$; $f_{32}^{+1} = \frac{p^3}{m} f_{12}^{+1}$; $f_{42}^{+1} = -\frac{p^3}{m} f_{22}^{+1}$ (A3-3.5)

Como $p^3 \neq 0$ obtenemos de (A3-4.4) y (A3-3.5),

$$f_{11}^{+1} = f_{12}^{+1} = f_{22}^{+1} = 0 \quad \therefore \quad f^{+1} = 0 \;\therefore\; \text{(a) es falsa.} \qquad \text{(A3-3.6)}$$

Análogamente,

$$f^{-1} \notin \mathcal{W} \qquad \text{Q.E.D.}$$

A3-4

a) DEMOSTRACIÓN DE $B \underset{w}{\underset{esc}{\sim}} B \Longrightarrow B^{(w)} \underset{\mathcal{E}}{\underset{esc}{\sim}} \overline{B^{(w)}}$ (A3-4-1)

Sea $\psi \in \mathcal{E}$ usando (2.77), $(\psi, B^{(w)}\psi) = (\psi, \overline{\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}}\ \overline{B}\ \overline{\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}}\psi)$ $= (\psi, \Lambda_\perp^{w\mathcal{E}} B \Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi) = (\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi, \overline{B}\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi)$. Como $\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi \in w$ y como $B \underset{w}{\underset{esc}{\sim}} B$ es $(\psi, \overline{}^{(w)}\psi) = (\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi, B\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi) = (\psi, \overline{\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}}\ B\ \Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi) =$ $= (\psi, \Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\ B\ \Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi) = (\psi, B^{(w)}\psi)$

donde volvemos a usar (2.77). Q.E.D.

b) SE COMPLETA LA DEMOSTRACIÓN DE (3.30-a)

Falta demostrar que

$$B^{(w)} \underset{w}{\underset{esc}{\sim}} B^{(w)} \qquad \text{(A3-4-2)}$$

lo cual es inmediato con (2.27-c).

Por otro lado, la relación

$$B \underset{w}{\underset{esc}{\sim}} \overline{B} \Longrightarrow B^{(w)} \underset{w}{\underset{esc}{\sim}} \overline{B^{(w)}} \qquad \text{(A3-4-3)}$$

(Algo menos fuerte que la (3.30-a)); es consecuencia directa de (3.23-b) ya que esta implica que $B \longrightarrow B^{(w)}$ conserva el carácter real de los valores medios.

c) DEMOSTRACIÓN DE (3.30-b)

Sea $\psi \in w$; es $B\psi = B\psi$ (A3-4.4)

Entonces $\overline{B^{(w)}}\psi = \overline{\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}}\ \overline{B}\ \overline{\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}}\psi = \Lambda^{w\mathcal{E}}\ \overline{B}\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi$;

pero

$$\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi \in wg \text{ (A3-4.4)} \Longrightarrow B\Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi = \overline{B}\ \Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\ \psi$$

$\therefore\ \overline{B^{(w)}}\psi = \Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\ B\ \Lambda_\perp^{w\mathcal{E}}\psi = B^{(w)}\psi$ Q.E.D.

d) DEMOSTRACIÓN DE QUE EXISTEN OPERADORES B DE 2a CLASE TALES QUE SU ESPECTRO DIFIERE DEL DE $B^{(\mathcal{W})}$.

Basta un ejemplo: $B = \Lambda^{II}$; $B^2 = \Lambda^{II} = B$ = su espectro es: 0; 1.

Usando (2.58-b) y $\Lambda^{I}\Lambda^{II} = 0$, es +

$B^{(\mathcal{W})}_{sim} = \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon sim}\ \Lambda^{II}\ \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon sim} = 0$ cuyo espectro es: 0. Q.E.D.

A3-5

DEMOSTRACIÓN DE 3.e-8

A_1) Demostración de (3.32-a) $\Longrightarrow$ "$A\psi \in \mathcal{W}$ para toda $\psi \in \mathcal{W}$";
$A\psi = A^{(\mathcal{W})}\psi$ pero $A^{(\mathcal{W})}\psi \in \mathcal{W}$.

$$\therefore\ A\psi \in \mathcal{W}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

A_2) Demostración de "$A\psi \in \mathcal{W}$ para toda ψ" $\Longrightarrow$ (3.32-a).

Ver 3.e-7.

B_1) Demostración de (3.33) $\Longrightarrow$ "$A\psi \in \mathcal{W}$ para toda $\psi \in \mathcal{W}$"

(3.33) $\Longrightarrow$ que si $\psi \in \mathcal{W}$ es

$$H_{(1)}A\psi - A\,H_{(1)}\psi = H_{(2)}A\psi - A\,H_{(2)}\psi$$

Pero $\psi \in \mathcal{W} \Rightarrow H_{(1)}\psi = H_{(2)}\psi$ (cf. (2.3-c))

$\therefore H_{(1)}(A\psi) = H_{(2)}(A\psi)$ $\therefore A\psi \in \mathcal{W}$(cf. (2.3-c)). Q.E.D.

B_2) Demostración de "$A\psi \in \mathcal{W}$ para toda $\psi \in \mathcal{W}$" $\Longrightarrow$ (3.33).

$$\psi \in \mathcal{W} \Longrightarrow H_{(1)}\psi = H_{(2)}\psi \Longrightarrow A\,H_{(1)}\psi = A\,H_{(2)}\psi \Longrightarrow \qquad \text{(A3-5.1)}$$

+ Usaremos $B^{(\mathcal{W})}_{sim}$ en lugar de $B^{(\mathcal{W})}$ por lo discutido más adelante en Secc. 3.f.

$$\Longrightarrow A\, H_{(1)} \underset{\mathcal{W}}{=} A\, H_{(2)} \,. \qquad \text{(A2-5.1)}$$

$$A\,\psi \in \mathcal{W} \Longrightarrow H_{(1)}\,(A\psi) = H_{(2)}(A\,\psi) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow H_{(1)}\, A \underset{\mathcal{W}}{=} H_{(2)}\, A \,. \qquad \text{(A3-5.2)}$$

De (A3-5.1) y (A3-5.2),

$$\left[A,\, H_{(1)}\right] \underset{\mathcal{W}}{=} \left[A,\, H_{(2)}\right]. \qquad \text{Q.E.D.}$$

A3-6

a) DEMOSTRACIÓN DE (3.35-e)

Por (3.32) para toda $\psi \in \mathcal{W}$ es

$$\left(m\,\gamma^{o}_{(1)}\, I_{(2)}\right)^{(\mathcal{W})} \psi = m\, \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon}\, \gamma^{o}_{(1)} \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon}\, \psi = m\, \Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon}\, \gamma^{o}_{(1)}\, \psi .$$

Con (2.72-a), (2.58-b) y (2.71) es

$$m\left(\gamma^{o}_{(1)} I_{(2)}\right)^{(\mathcal{W})} \psi = m\left[I - \frac{1}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot p\right]\frac{1}{2}\left(\gamma^{o}_{(1)} + \gamma^{o}_{(2)}\right)\psi \; +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\left(\gamma^{o}_{(1)} - \gamma^{o}_{(2)}\right)\cdot p\; \psi = \qquad \text{(A3-6.1)}$$

$$= m\,\frac{1}{2}\left(\gamma^{o}_{(1)} + \gamma^{o}_{(2)}\right)\psi - \frac{\vec{p}}{2}\left(\gamma^{o}_{(2)}\, \vec{\gamma}_{(1)} + \gamma^{o}_{(1)}\, \vec{\gamma}_{(2)}\right)\psi. \qquad \text{(A3-6.2)}$$

Q.E.D.

b) DEMOSTRACIÓN DE (3.36-g)

Por reducción al absurdo: Si fuera $\left(m\, \gamma^{o}_{(1)}\, I_{(2)}\right)^{(\mathcal{W})}\psi =$ $H_{(1)}\,\psi$ para toda $\psi \in \mathcal{W}$, sería también (cf. (2.3-c)),

$$\left(m\,\gamma^{o}_{(1)}\, I_{(2)}\right)^{(\mathcal{W})} \psi = \frac{1}{2}\left(H_{(1)} + H_{(2)}\right)\psi \,.$$

Usando $H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\,\gamma^{o}$ y (3.35-e) sería

$$\vec{p}\cdot\left(\vec{\alpha}_{(1)} + \vec{\alpha}_{(2)} + \gamma^{o}_{(2)}\vec{\gamma}_{(1)} + \gamma^{o}_{(1)}\vec{\gamma}_{(2)}\right)\psi = 0 \,,$$

o sea

$$\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right)\left(\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)}\right)\,\vec{p}\,\psi = 0 \quad \therefore \quad \Lambda^{I}\left(\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\,\psi = 0. \tag{A3-6.3}$$

Pero

$$p_o\,\psi = \frac{1}{2}\left(H_{(1)}+H_{(2)}\right)\psi = \frac{m}{2}\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi + \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\,\psi;$$

premultiplicando ésta por Λ^{I} y usando (A3-6.3) sería

$$p^{o}\,\frac{1}{2}\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi = m\,\Lambda^{I}\,\psi.$$

o sea

$$(p_o - m)(\Lambda^{I}\psi) = 0 \qquad \text{con}^{+} \quad p_o \neq m\ ;$$

$$\therefore \quad \psi^{I} = 0$$

Pero por (2.3-b) ello implicaría

$$\psi = 0$$

Hemos llegado a un absurdo, lo cual prueba (3.36-g). Q.E.D.

c) DEMOSTRACIÓN DE QUE LOS VALORES MEDIBLES DE $\left(m\,\gamma^{o}_{(1)}\right)^{(W)}$ SON DIFERENTES DE LOS DE H:

Busco primero los autovalores λ de $\left(m\,\gamma^{o}_{(1)}\right)^{(W)}$:

$$\lambda\,\psi_\lambda = \left(m\,\gamma^{o}_{(1)}\right)^{(W)}\psi_\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi_\lambda - \frac{1}{4}\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi_\lambda + \frac{1}{4}\vec{p}\left(\vec{\gamma}_{(1)}-\vec{\gamma}_{(2)}\right)\left(\gamma^{o}_{(1)}-\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi_\lambda. \tag{A3-6.4}$$

Premultiplicamos por Λ^{II} recordando $\Lambda^{II}\,\vec{\gamma}_{(1)} = \vec{\gamma}_{(1)}\,\Lambda^{I}$, etc. y que

$^{+}$ Salvo $\vec{p} = 0$, lo cual no afecta la conclusión.

$$\Lambda^{II}\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right) = 0; \quad \Lambda^{I}\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right) = \gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)};$$

$$\Lambda^{I}\left(\gamma^{o}_{(1)}-\gamma^{o}_{(2)}\right) = 0 . \tag{A3-6.5}$$

Se obtiene

$$\lambda\,\psi^{II}_{\lambda} = -\frac{1}{4}\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi^{I}_{\lambda} .$$

Iterando con el operador del 2º miembro,

$$\lambda^{2}\,\psi^{II}_{\lambda} = \frac{1}{16}\left[\ \vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\cdot\vec{p}\ \ \gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\ \right]$$

$$\left[\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\left(\gamma^{o}_{(1)}+\gamma^{o}_{(2)}\right)\right]\left(\Lambda^{I}\,\psi_{\lambda}\right) .$$

Llevando el Λ^{I} hacia la izquiera y usando (A3-6.5) se ve que

$$\lambda^{2}\ \psi^{II}_{\lambda} = 0 .$$

<u>1er. caso</u>: $\lambda = 0$.

<u>2º caso</u>: $\psi^{II}_{\lambda} = 0, \qquad \therefore \quad \psi_{\lambda} = \psi^{I}_{\lambda}$. (A3-6.6)

Me interesan los $\psi_{\lambda} \in \mathcal{W}$ pues son los posibles autoestados; pero $\psi_{\lambda} \in \mathcal{W}$ implica (por (2.3-b) y (A3-6.6)),

$$\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\ \ \psi_{\lambda} = 0$$

de donde deducimos

$$p\cdot\left[\gamma^{o}_{(2)}\ \vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\alpha}_{(2)}\right]\psi_{\lambda} = 0; \qquad \vec{p}\cdot\left[\gamma^{o}_{(1)}\ \vec{\gamma}_{(2)}+\vec{\alpha}_{(1)}\right]\psi_{\lambda} = 0; \tag{A3-6.7}$$

o sea

$$\vec{p}\cdot\left(\vec{\gamma}_{(1)}-\vec{\gamma}_{(2)}\right)\left(\gamma^{o}_{(1)}-\gamma^{o}_{(2)}\right)\psi_{\lambda} = 0 \tag{A3-6.8}$$

(A3-6.6) y (A3-6.8) en (A3-6.4),

$$\lambda \psi_\lambda^I = \frac{1}{2} m \left(\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)}\right) \psi_\lambda^I - \frac{1}{4} \left(\vec{\gamma}_{(1)} + \vec{\gamma}_{(2)}\right) \cdot \vec{p} \left(\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)}\right) \psi_\lambda^I .$$

Aplicando Λ^I y recordando (A3-6.5),

$$\lambda \psi_\lambda^I = \frac{1}{2} m \left(\gamma^o_{(1)} + \gamma^o_{(2)}\right) \psi_\lambda^I .$$

Iterando con el operador del 2º miembro,

$$\lambda^2 \psi_\lambda^I = m^2 \Lambda^I \psi_\lambda^I = m^2 \psi_\lambda^I \quad \therefore \lambda = \pm m . \qquad \text{(A3-6.9)}$$

Reuniendo los dos casos:

$$\lambda \pm m, \; 0 . \qquad \text{(A3-6.10)}$$

Multiplicando por la carga $\varepsilon = \pm 1$ resulta que los valores medibles de $(m \gamma^o_{(1)} I_{(2)})^{(W)}$ son a lo sumo $\pm m$, 0 es decir diferentes (salvo $\vec{p}$ particulares) del único valor medible $+p_o$ de $H = H_{(1)} I_{(2)}$ (cf. (3.17)).

Q.E.D.

A3-7

DEMOSTRACIÓN DE (3.38-a).

Por ser B simétrico de 2a. clase es

$$\psi \in \mathcal{E}^{sim} \Longrightarrow B \psi \in \mathcal{E}^{sim}; \qquad \text{(A3-7.1)}$$

por otro lado, si $\varphi \in \mathcal{E}^{sim}$ es (cf. (2.76-b),

$$B^{(W)} \varphi = \Lambda_\perp^{W\varepsilon} B \Lambda_\perp^{W\varepsilon} \varphi = \Lambda_\perp^{W\varepsilon} B \Lambda_\perp^{W\varepsilon\, sim} \varphi ; \qquad \text{(A3-7.2)}$$

poniendo $\psi = \Lambda_\perp^{W\varepsilon\, sim} \varphi$, deducimos de (A3-7.1)

$$B \Lambda_\perp^{W\varepsilon\, sim} \varphi \in \mathcal{E}^{sim}; \qquad \text{(A3-7.3)}$$

usando entonces nuevamente (2.76-b),

$$B^{(W)} \varphi = \Lambda_\perp^{W\varepsilon\, sim} B \Lambda_\perp^{W\varepsilon\, sim} \varphi ; \qquad \text{(A3-7.4)}$$

pero de (3.37),

$$\overset{(\mathscr{W})}{B^{sim}}\ \varphi = \Lambda_{\perp}^{\mathscr{W}\varepsilon^{sim}}\ B\ \Lambda_{\perp}^{\mathscr{W}\varepsilon^{sim}}\ \varphi ;$$

$$\therefore\ \overset{(\mathscr{W})}{B^{sim}} \underset{\varepsilon^{sim}}{=} B^{(\mathscr{W})} \qquad \text{Q.E.D.}$$

A3-8

a) DEMOSTRACIÓN DE (3.44).

Siendo $\partial A/\partial t = 0$ es (para toda $\psi \in \mathscr{W}$)

$$\left(\psi, \frac{dA}{dt}\psi\right) = \frac{d}{dt}\ (\psi, A\psi) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}, A\psi\right) + \left(\psi, A\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) ;$$

usando

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \quad \text{y} \quad \overline{H} = H$$

se llega por la vía habitual a

$$\left(\psi, \frac{dA}{dt}\psi\right) = (\psi, i\,[H, A]\psi) \ . \qquad \text{(A3-8.1)}$$

Pero de aquí no se deduce necesariamente (en nuestro caso) una igualdad sino una equivalencia (cf. Secc. 2.d-2):

$$\frac{dA}{dt} \underset{\mathscr{W}}{\overset{\sim}{esc}} i[H, A] \ . \qquad \text{Q.E.D.}$$

b) DEMOSTRACIÓN DE QUE SI A ES DE 1a. CLASE, dA/dt TAMBIÉN LO ES.

Si llamamos

$$x = \left[H_{(1)}, \frac{dA}{dt}\right] - \left[H_{(2)}, \frac{dA}{dt}\right] \qquad \text{(A3-8.2)}$$

la tesis es +

+ Se sobreentiende $H_{(1)} \longrightarrow H_{(1)}\, I_{(2)}$, etc.

$$\mathcal{X} \underset{\mathcal{W}}{=} 0 \text{ (cf. (3.33)).} \tag{A3-8.3}$$

Usando $H^2_{(1)} = H^2_{(2)} = p_o^2$ es

$$\mathcal{X} = \left[H_{(1)}, \left[H_{(1)}, A\right]\right] - \left[H_{(2)}, \left[H_{(1)}, A\right]\right] =$$

$$= \left[H_{(1)}, H_{(1)} A - A H_{(1)}\right] - \left[H_{(2)}, H_{(1)} A - A H_{(1)}\right] =$$

$$= p_o^2 A - H_{(1)} A H_{(1)} - H_{(1)} A H_{(1)} + A p_o^2 - H_{(2)} H_{(1)} + H_{(2)} A H_{(1)} +$$
$$+ H_{(1)} A H_{(2)} - A H_{(1)} H_{(2)} . \tag{A3-8.4}$$

Sea $\psi \epsilon \mathcal{W}$; A es de la. clase; $\therefore A\psi \epsilon \mathcal{W}$ (A3-8.5)

$\therefore$ si $\varphi \epsilon \mathcal{W}$ es $H_{(1)} \varphi \epsilon \mathcal{W}$, $H_{(2)} \varphi \epsilon \mathcal{W}$ (A3-8.6)

pues $H_{(1)} \varphi$ y $H_{(2)} \varphi$ cumplen (2.3-c).

Entonces

$$H_{(2)} H_{(1)} A\psi = H_{(2)}(H_{(1)} A \psi) = H_{(1)}(H_{(1)} A \psi) = p_o^2 A\psi$$

$$\therefore \qquad H_{(2)} H_{(1)} A \underset{\mathcal{W}}{=} p_o^2 A . \tag{A3-8.7}$$

Análogamente,

$$H_{(2)}(A H_{(1)}\psi) = H_{(1)}(A H_{(1)}\psi); \; H_{(2)} A H_{(1)} \underset{\mathcal{W}}{=} H_{(1)} A H_{(1)}; \tag{A3-8.8}$$

$$H_{(1)}(A H_{(2)}\psi) = H_{(2)}(A H_{(2)}\psi); \; H_{(1)} A H_{(2)} \underset{\mathcal{W}}{=} H_{(2)} A H_{(2)}; \tag{A3-8.9}$$

$$A^{(1)} H_{(1)}H_{(2)}\psi = A H^2_{(1)} \psi = A p_o^2 \psi; \; A H_{(1)} H_{(2)} \underset{\mathcal{W}}{=} A p_o^2 . \tag{A3-8.10}$$

Reemplazando en (A3-8.4),

$$\mathcal{K} \underset{W}{=} 0 \qquad\qquad \text{Q.E.D.}$$

c) DEMOSTRACIÓN DE (3.46-b).

$$B \underset{\substack{esc\\ W}}{\sim} B^{(W)} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\langle B\rangle = \frac{d}{dt}\langle B^{(W)}\rangle \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\langle \frac{dB}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dB^{(W)}}{dt} \right\rangle \Longrightarrow \qquad (3.46\text{-b}).$$

A3-9

DEMOSTRACIÓN DE QUE (Secc. 3.1-1) EL QUE $\vec{\mathcal{J}}$ SEA DE 1a. CLASE ES CONSECUENTE CON EL HECHO DE QUE GENERA LAS ROTACIONES INFINITESIMALES $\frac{3}{4}$.

Es bien sabido que (cap. 6) la función de onda $\psi'(x)$ proveniente de rotar infinitesimalmente al sistema es

$$\psi'(x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\mathcal{J}_{\mu\nu}\,\psi(x) \qquad \text{(A3-9.1)}$$

Como ψ' es un estado posible, $\psi'(x)\varepsilon\,\mathcal{W}\therefore\ \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon}\,\psi'(x) = \psi'(x)$

$$\therefore\ \Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon}\psi(x) - \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon}\,\mathcal{J}_{\mu\nu}\psi(x) = \psi(x) - \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\mathcal{J}_{\mu\nu}\,\psi(x) \qquad \text{(A3-9.2)}$$

Como $\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon}\psi = \psi$, se verifica que (A3-9.2) se satisface si y sólo si

$$\Lambda_{\perp}^{\omega\varepsilon}\,\mathcal{J}_{\mu\nu}\,\psi = \mathcal{J}_{\mu\nu}\,\psi \qquad \text{(A3-9.3)}$$

para toda $\psi\varepsilon\mathcal{W}$; por lo tanto, (A3-9.1) implica que $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ (cuya parte espacial es $\vec{\mathcal{J}}$) es de 1a. clase.

A3-10

a) DEMOSTRACIÓN DE (3.54-c).

En la representación (2.6),

$$\sigma^3\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ -\psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \sigma^3_{ij}\,\psi_j = -(-1)^{\underline{i}}\,\psi_{\underline{i}}; \qquad \text{(A3-10.1)}^{+}$$

entonces

$^{+}$ No sumar sobre $\underline{i}$ (Cf. Secc. 1.c).

$$\left[\frac{\sigma^3_{(1)}+\sigma^3_{(2)}\psi}{2}\right]_{i_1 i_2} = \frac{1}{2}\,\sigma^3_{i_1 j_1}\,\psi_{j_1 i_2} + \frac{1}{2}\,\sigma^3_{i_2 j_2}\,\psi_{i_1 j_2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(-1)^{i_1} + (-1)^{i_2}\right]\psi_{i_1 i_2} \qquad \text{(A3-10.2)}$$

Por lo tanto para toda $\varphi \in \mathcal{E}$ es

$$\frac{\sigma^3_{(1)}+\sigma^3_{(2)}}{2}\,\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & 0 & \varphi_{13} & 0 \\ 0 & \varphi_{22} & 0 & -\varphi_{24} \\ \varphi_{31} & 0 & \varphi_{33} & 0 \\ 0 & -\varphi_{42} & 0 & -\varphi_{44} \end{pmatrix} \qquad \text{(A3-10.3)}$$

Si $\psi \in \omega$, es $\varphi = \Lambda^{\omega/\varepsilon^{sim}}\,\varphi$; entonces (2.63) implica que φ = 2º miembro de (2.63) (con $\psi \longrightarrow \varphi$); de allí sale (3.54-c).

Q.E.D.

b) DEMOSTRACIÓN DE (3.55-d).

De (3.55-b) con s = + 1, y de (A3-11.3) con $\varphi \longrightarrow f_1$ es

$$\begin{pmatrix} f_{1,11} & 0 & f_{1,13} & 0 \\ 0 & -f_{1,22} & 0 & -f_{1,24} \\ f_{1,31} & 0 & f_{1,33} & 0 \\ 0 & -f_{1,42} & 0 & -f_{1,44} \end{pmatrix} = (+1)\times \begin{pmatrix} f_{1,11} & f_{1,12} & f_{1,13} & f_{1,14} \\ f_{1,21} & f_{1,22} & f_{1,23} & f_{1,24} \\ f_{1,31} & f_{1,32} & f_{1,33} & f_{1,34} \\ f_{1,41} & f_{1,42} & f_{1,43} & f_{1,44} \end{pmatrix}$$

$\therefore\ f_{1,12}=f_{1,14}=f_{1,21}=f_{1,22}=f_{1,23}=f_{1,24}=f_{1,32}=f_{1,34}=f_{1,41}=f_{1,42}=$
$f_{1,43}=f_{1,44} = 0$, de donde se deduce (3.55-d).

A3-11

DEMOSTRACIÓN DE (3.58).

a) Cálculo de $\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}\right)\Lambda_\perp^{w\varepsilon^{sim}}\psi$ para $\psi \in \varepsilon^{sim}$

Por (3.54-c) $\frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}\right)\Lambda_\perp^{w\varepsilon^{sim}}\psi$ está dado por el 2° m. de (3.54-c), con $\varphi \longrightarrow \psi$:

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}\right)\Lambda_\perp^{w\varepsilon^{sim}}\psi =$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & \frac{p^3\left(\psi_{11}-\psi_{13}\right)+p_-\left(\psi_{12}-\psi_{34}\right)}{2m} & 0 \\ 0 & -\psi_{22} & 0 & \frac{p'\left(\psi_{22}-\psi_{44}\right)+p_+\left(\psi_{34}-\psi_{12}\right)}{2m} \\ \frac{\left(\psi_{11}\,\psi_{33}\right)+p_-\left(\psi_{12}-\psi_{34}\right)}{2m} & 0 & \psi_{33} & 0 \\ 0 & \frac{p^3\left(\psi_{22}-\psi_{44}\right)+p_+\left(\psi_{34}-\psi_{12}\right)}{2m} & 0 & -\psi_{44} \end{pmatrix} \qquad \text{(A3-11.1)}$$

b) Cálculo de $\left(\frac{\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}}{2}\right)^{(w)\,sim}\psi$ para $\psi \in \varepsilon^{sim}$.

$$\frac{1}{2}\left(\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}\right)^{(w)}\psi = \Lambda_\perp^{w\varepsilon^{sim}}\theta = 2^{\underline{o}} \text{ m. de } (2.63) \text{ con}^{+}\ \psi \longrightarrow \theta =$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & \frac{p^3\ \psi_{11}-\psi_{33}}{2m} & \frac{p_+\,\psi_{11}+p_-\,\psi_{44}}{2m} \\ 0 & -\psi_{32} & \frac{-p_-\,\psi_{22}-p_+\psi_{33}}{2m} & \frac{p^3\left(\psi_{22}-\psi_{44}\right)}{2m} \\ \frac{p^3\left(\psi_{11}-\psi_{33}\right)}{2m} & \frac{p_-\left(\psi_{32}-p_+\,\psi_{33}\right)}{2m} & \psi_{11} & 0 \\ \frac{p_+\,\psi_{11}+p_-\,\psi_{44}}{2m} & \frac{p^3\left(\psi_{22}-p_+\,\psi_{44}\right)}{2m} & 0 & -\psi_{44} \end{pmatrix} \qquad \text{(A3-11.2)}$$

c) Soluciones de (3.58-a). Por otro lado si $\psi \in \varepsilon^{sim}$,

---

+ Observar que $\theta_{11} = \psi_{11}$; $\theta_{12} = \theta_{21} = \theta_{34} = \theta_{43} = \theta$; $\theta_{22} = -\psi_{22}$; $\theta_{33} = \psi_{33}$; $\theta_{44} = -\psi_{44}$.

$$S\psi = S \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{13} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{14} & \psi_{24} & \psi_{34} & \psi_{41} \end{pmatrix} \qquad \text{(A3-11.3)}$$

Por (A3-11.2) y (A3-11.3) las soluciones de (3.58-a) deben cumplir <u>entre otras</u> las que resultan de igualar los elementos 11, 12, 22, 33, 34, 44 de dichas ecuaciones (con $\psi \longrightarrow \psi_s^{(\varepsilon)}$):

$$\begin{aligned}
&11) \qquad \psi^{(\varepsilon)}_{s,11} = S\,\psi^{(\varepsilon)}_{s,11} \\
&12) \qquad 0 = S\,\psi^{(\varepsilon)}_{s,12} \\
&22) \qquad -\psi^{(\varepsilon)}_{s,22} = S\,\psi^{(\varepsilon)}_{s,22} \\
&33) \qquad \psi^{(\varepsilon)}_{s,33} = S\,\psi^{(\varepsilon)}_{s,33} \\
&34) \qquad 0 = S\,\psi^{(\varepsilon)}_{s,34} \\
&44) \qquad -\psi_{s,44} = S\,\psi^{(\varepsilon)}_{s,44}
\end{aligned} \qquad \text{(A3-11.4)}$$

Las (A3-11.4) son condiciones necesarias pero no suficientes (pues faltan igualar los restantes elementos) para las $\psi_s^{(\varepsilon)}$ de (3.58-a). Por lo tanto <u>las únicas soluciones posibles (pero aún inseguras) son</u>

$$S = 1, \qquad S = 0, \qquad S = -1;$$

las (A3-11.4) determinan la parte I de $\psi_s^{(\varepsilon)}$ (ver (2.9-b)):

$$S = 1, \quad \left(\psi_1^{(\varepsilon)}\right)^I = \begin{pmatrix} \psi_{1,11}^{(\varepsilon)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{1,33}^{(\varepsilon)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A3-11.5-a}$$

$$S = 0, \quad \left(\psi_o^{(\varepsilon)}\right)^I = \begin{pmatrix} 0 & \psi_{0,12}^{(\varepsilon)} & 0 & 0 \\ \psi_{0,12}^{(\varepsilon)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{0,34}^{(\varepsilon)} \\ 0 & 0 & \psi_{0,34}^{(\varepsilon)} & 0 \end{pmatrix} \tag{A3-11.5-b}$$

$$S = -1, \quad \left(\psi_{-1}^{(\varepsilon)}\right)^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{-1,22}^{(\varepsilon)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{-1,44}^{(\varepsilon)} \end{pmatrix} \tag{A3-11.5-c}$$

Recalcamos que las $\psi_s^{(\varepsilon)}$ cuya parte I está dada por (A3-11.5) son soluciones aún inseguras; pero que no puede haber soluciones de otro tipo pues lo impediría (A3-11.4).

De aquí en adelante nos restringiremos a trabajar en el espacio spinorial $\mathcal{V}_{sp}^p$ de Secc. 2.c-3; las autofunciones en $\mathcal{V}$ se obtienen fácilmente si se conocen las autofunciones en $\mathcal{V}_{sp}^p$.

Los dos vectores de $\mathcal{V}_{sp}^p$ cuyas partes I son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son del tipo (A3-11.5-a); por (2.6-c) para el primero es

$$\varepsilon = \left(\psi_1^{(\varepsilon)}, \psi_1^{(\varepsilon)}\right) = +1$$

y para el segundo

$$\varepsilon = -1;$$

ponemos, pues:

$$\left(\psi_1^{(1)}\right)^{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \left(\psi_1^{(-1)}\right)^{I} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que los dos vectores que acabamos de definir subtienden todo el subespacio de $\varepsilon_{sp}^{sim\ I}$ definido por las (A3-11.5-a). Pero de (2.63) y (2.9-b) vemos que un sistema de vectores ψ_n de W_{sp}^{p} es completo en W_{sp}^{p} si sus partes ψ_n^{I} forman sistema completo en $\varepsilon_{sp}^{sim\ I}$; de manera análoga concluímos que las $\psi_1^{(1)}$ y $\psi_1^{(-1)}$ cuyas partes I están dadas en (A3-11.6-a) forman sistema completo en el subespacio de W_{sp}^{p} definido por las soluciones de (3.58-a) con S = +1 .

Con ayuda de (2.63) terminamos de construir las $\psi_1^{(\pm 1)}$:

$$\psi_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p^3}{2m} & \frac{p_+}{2m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p^3}{2m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_+}{2m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \psi_1^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-p^3}{2m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-p_+}{2m} & 0 \\ \frac{-p^3}{2m} & \frac{-p_+}{2m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(A3-11.7-a)

Como ya hemos dicho, nuestras "soluciones" <u>(hasta aquí)</u> pueden no ser realmente soluciones de (3.58-a); <u>pero son las soluciones correctas</u> pues de (A3-11.7-a) y (A3-11.2) deducimos que efectivamente es

$$\left(\frac{\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}}{2}\right)^{(w)}_{\text{sim}} \quad \psi_1^{(\pm 1)} = \pm\, \psi_1^{(\pm 1)} .$$

Como ya demostramos, no puede haber otras soluciones (independientes de éstas) con S = + 1.

Procediendo análogamente para S = 0 y S = - 1 se llega a que

$$\left(\psi_0^{(1)}\right)^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \left(\psi_0^{(-1)}\right)^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(A3-11.6-b)

$$\left(\psi_{-1}^{(1)}\right)^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \left(\psi_{-1}^{(-1)}\right)^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(A3-11.6-c)

Por lo tanto,

$$\psi_o^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{p_-}{2m} & \frac{-p^3}{2m} \\ 1 & 0 & \frac{p^3}{2m} & \frac{p_+}{2m} \\ \frac{p_-}{2m} & \frac{p^3}{2m} & 0 & 0 \\ \frac{-p^3}{2m} & \frac{p_+}{2m} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-p}{2m} & \frac{-p^3}{2m} \\ 0 & 0 & \frac{p^3}{2m} & \frac{-p_+}{2m} \\ \frac{-p_-}{2m} & \frac{p^3}{2m} & 0 & 1 \\ \frac{-p^3}{2m} & \frac{-p_+}{2m} & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

(A3-11.7-b)

$$\psi_{-1}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{p_-}{2m} & \frac{-p^3}{2m} \\ 0 & \frac{p_-}{2m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-p^3}{2m} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \psi_{-1}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-p_-}{} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p^3}{2m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-p_-}{2m} & -\frac{p^3}{2m} & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

(A3-11.7-c)

Las (A3-11.7) coinciden con las (3.58-c); ya hemos demostrado que no hay otros autovectores independientes. Es fácil ver que forman sistema completo en W^p_{sp}, pues sus partes I lo forman en $\mathcal{E}^{\mathrm{sim\,I}}$; además son linealmente independientes porque

$$\sum_{s,\varepsilon} a_s^{(\varepsilon)} \psi_s^{(\varepsilon)} = 0 \qquad \text{(A3-11.8)}$$

implica

$$\sum_{s,\varepsilon} a_s^{(\varepsilon)} \psi_s^{(\varepsilon)} = 0 \qquad \text{(A3-11.9)}$$

Basta observar (A3-11.6) para ver que estas últimas implican

$$a_s^{(\epsilon)} = 0 \; .$$

Finalmente, son ortogonales (respecto de (2.2)) como se verifica con (2.6-c); siendo pseudo-normalizadas por construcción, se cumple la (3.58-d).

Q.E.D.

A3-12

a) DEMOSTRACIÓN DE QUE EL TRANSFORMADO DE UN OPERADOR DE 1a. CLASE ES DE 1a. CLASE (SECC. 3.m-4).

Efectuando operaciones, es para toda $\psi' \in \mathcal{U}'$ (si A es el transformado principal de A),

$$\left\{\left[(H_{(1)}I_{(2)})', A'\right] - \left[(I_{(1)}H_{(2)})', A'\right]\right\} \psi' =$$

$$= U\left\{\left[(H_{(1)}I_{(2)}), A\right] - \left[(I_{(1)}H_{(2)}), A\right]\right\} \psi$$

por lo que (3.33) $\Longleftrightarrow$ (3.79). Demostrada la (3.79) para los transformados principales, es trivial que vale también para todos los otros transformados (cf. 3.78-c)).

b) DEMOSTRACIÓN DE (3.80-b).

$$\overline{A'} = \left(I_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\right)' \; A'^{+} \left(I_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)}\right)' =$$

$$= U \left(I_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)}\right) U^{+}U\, A^{+}\, U^{+}U \left(I_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)}\right) U^{+} =$$

$$= U \left(\gamma^{o}_{(2)}\, A^{+}\, \gamma^{o}_{(2)}\right) \; U^{+} = U\, A\, U^{+} = (\overline{A})'. \qquad \text{Q.E.D.}$$

A3-13

a) DEMOSTRACIÓN DE (3.91).

Seguimos el procedimiento empleado por Foldy y Wouthuysen para spin 1/2:

1a. demostración

De (3.96) y (3.90) es trivial que

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi' = p_o \Phi' \; ; \quad i \frac{\partial}{\partial t} \chi' = - p_o \chi' \qquad \text{(A3-13.1)}$$

de donde sesigue la (3.91). Q.E.D.

2a. demostración

Por Cap. 4 tenemos la descomposición en ondas planas en la vieja representación,

$$\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} a(r, \vec{p}')u_{\pm} (r, \vec{p}') \, e^{\mp ip_o' x_o \pm i\vec{p}' \cdot \vec{x}} \qquad \text{(A3-13.2)}$$

Por (3.10) es

$$u_{\pm} = \frac{1}{2}\left(I \pm \frac{H_{(1)}}{p_o}\right)u$$

y, combinando (2.3) con (3.10) es

$$u_{\pm} = \frac{1}{2}\left(I \pm \frac{H_{(2)}}{p_o}\right) \frac{1}{2} \left(I \pm \frac{H_{(1)}}{p_o}\right) u; \qquad \text{(A3-13.3)}$$

de donde,

$$\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p'}{\sqrt{2p_o'}} a(r, \vec{p}') \frac{1}{2}\left(I \pm \frac{H_{(2)}}{p_o'}\right)\frac{1}{2}\left(I \pm \frac{H_{(1)}}{p_o'}\right)$$

$$u(r, \vec{p}') \times e^{\mp ip_o' x_o \pm i\vec{p}' \cdot \vec{x}}. \qquad \text{(A3-13.4)}$$

Por otra parte, (3.81-a) puede ponerse

$$U = \frac{(\beta H + p_\circ)}{\left[2p_o(p_o+m)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (A3\text{-}13.5)$$

con lo cual ((3.84) se transforma en

$$U = \frac{(\beta_{(1)}H_{(1)}+p_\circ)(\beta_{(2)}H_{(2)}+p_o)}{\left[2p_o(p_o+m)\right]} \qquad (A3\text{-}13\text{-}6)$$

Reemplazando (A3-13.4) y (A3-13.6) en $\psi^{(\pm)} = U\,\psi^{(\pm)}$ se llega tras algunas operaciones a

$$\psi^{(\pm)\prime} = \frac{1}{2}\left(I \pm \beta_{(1)}\right)\frac{1}{2}\left(I \pm \beta_{(2)}\right)\times$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{p}\int\frac{d^3p'}{\sqrt{2p_o'}}\,a(r,\vec{p}\,')\,\frac{p'^{o}}{2(p_o'+m)}\left(I\pm\frac{H_{(1)}}{p_o'}\right)\left(I\pm\frac{H_{(2)}}{p_o'}\right)u(r,\vec{p}\,')\times$$

$$\times\, e^{\mp i} \quad . \qquad (A3\text{-}13.7)$$

Como $\psi' = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}$, resulta

$$\psi = \frac{1}{2}\;I + \beta_{(1)}\,\beta_{(2)}\;\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{r}\int\frac{d^3p'}{\sqrt{2p_o'}}\,a(r,\vec{p}\,')\,\frac{p'^{o}}{2(p_o'+m)}\times$$

$$\times\left(I\pm\frac{H_{(1)}}{p_o'}\right)\left(I\pm\frac{H_{(2)}}{p_o'}\right)u(r,\vec{p}\,')\,e^{\mp ip'x} . \qquad (A3\text{-}13.8)$$

Entonces, con (3.90) se obtiene

$$\begin{Bmatrix}\Phi'\\ \chi'\end{Bmatrix}\left(\frac{I\pm\beta_{(1)}}{2}\right)\left(\frac{I\pm\beta_{(2)}}{2}\right)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{r}\int\frac{d^3p'}{\sqrt{2p_o'}}\;\frac{p_o'}{2(p_o'+m)}\times$$

$$\times\, a(r,\vec{p}\,')\left(I\pm\frac{H_{(1)}}{p_o'}\right)\left(I\pm\frac{H_{(2)}}{p_o'}\right)u(r,\vec{p}\,')\,e^{\mp\, ip'x} \quad . \qquad (A3\text{-}13.9)$$

Comparando (A3-13.7) y (A3-13.9) resulta la (3.91). Q.E.D.

3a. demostración

Hasta aquí hemos seguido el procedimiento de Foldy y Wouthuysen para spin $\frac{1}{2}$ (procedimientos 1 y 2); pero quizás sea aún más breve observar que (3.95-b) y (3.90) implican directamente la (3.91). Q.E.D.

A3-14

DEMOSTRACIÓN DE (3.92).

Por (3.95-a),

$$\left(H_{(1)}\, I_{(2)}\right)' = \gamma^{0}_{(1)}\, I_{(2)}\, p_0 \,. \qquad \text{(A3-14.1)}$$

De la misma manera se obtiene

$$\left(I_{(1)}\, H_{(2)}\right)' = I_{(1)}\, \gamma^{0}_{(2)}\, p_0 \,. \qquad \text{(A3-14.2)}$$

Por (2.3-c) si $\psi \in \mathcal{W}$ ($\therefore$ $\psi' \in \mathcal{W}'$) es

$$p_0\, \gamma^{0}_{(1)}\, \psi' = p_0\, \gamma^{0}_{(2)}\, \psi' \qquad \text{Q.E.D.}$$

Como $p_0 \neq 0$, se obtiene (3.92).

A3-15

DEMOSTRACIÓN DE (3.105).

$$\left[\left(H_{(1)}\, \gamma^{0}_{(1)} - H_{(2)}\, \gamma^{0}_{(2)}\right) \Lambda^{II}\right[= \frac{1}{2}\, |H_{(1)}\, \gamma^{0}_{(1)} - H_{(2)}\, \gamma^{0}_{(2)} -$$

$$- H_{(1)}\, \gamma^{0}_{(2)} + H_{(2)}\, \gamma^{0}_{(1)}\Big] \,.$$

Usando (3.86-b) y (3.94) se obtiene

$$[\;]' = \frac{1}{2}\left[-\vec{\gamma}_{(1)}\cdot\vec{p} + \vec{\gamma}_{(2)}\cdot\vec{p} + \gamma^{o}_{(1)}\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{p} - \gamma^{o}_{(2)}\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{p}\right] =$$

$$= -\Lambda^{I}\left(\vec{\gamma}_{(1)} - \vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\vec{p}\,.$$

Reemplazando en (2.72-c), junto con (3.102) y (3.104) se deduce la (3.105). Q.E.D.

A3-16

a) DEMOSTRACIÓN DE (3.118)

Utilizando (3.80-a) y (3.86) es (en la representación de FWT),

$$i\frac{\partial}{\partial p^{a}} = \left(\frac{m\,\gamma^{o} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p_o}\right)_{(2)} i\frac{\partial}{\partial p^{a}}\left(\frac{m\,\gamma^{o} - \alpha\cdot p}{p_o}\right)_{(2)} =$$

$$= \left(\frac{m\,\gamma^{o} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p_o}\right)_{(2)} i\left[\frac{\partial}{\partial p^{a}}\left(\frac{m\,\gamma^{o} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p_o}\right)_{(2)}\right] + \left(\frac{m\,\gamma^{o} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p_o}\right)^{2} i\frac{\partial}{\partial p^{a}}\,.$$

Como

$$\left(\frac{m\,\gamma^{o} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{p_o}\right)^{2} = (\gamma^{o\prime})^{2} = I,$$ se obtiene la (3.118).

b) DEMOSTRACIÓN DE (3.122)

Por (3.121-b), (3.78-b), (3.84) y (3.82-b)

$$q^{a} = U_{(1)}\left[U_{(2)}\, i\frac{\partial}{\partial p^{a}}\, U^{+}_{(2)}\right] U^{+}_{(1)} =$$

$$= U_{(1)}\, x^{a}_{(2)}\, U^{+}_{(1)} =$$

$$= U_{(1)}\left[x^a + i\,\frac{\gamma^a_{(2)}}{2\,p_o} - i\,\frac{(\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{(2)}\,p^a}{2p_o^2(p_o+m)} + \frac{(\vec{p}\times\vec{\sigma})^a_{(2)}}{2\,p_o(p_o+m)}\right]U^+_{(1)} =$$

$$= U_{(1)}\,x^a\,U^+_{(1)} + \frac{i\,\gamma^a_{(2)}}{2p_o} - i\,\frac{(\vec{\gamma}\cdot\vec{p})_{(2)}\,p^a}{2\,p_o^2\,(p_o+m)} + \frac{(\vec{p}\times\vec{\sigma})^a_{(2)}}{2\,p_o\,(p_o+m)} \qquad \text{(A3-16.2)}$$

Pero $U_{(1)}\,x^a\,U^+_{(1)} = X^a_{(1)}$; volviendo a usar (3.82-b) y (A3-16.2) se obtiene la (3.122-b). La (3.122-a) se obtiene de la anterior, usando una vez más la (3.82-b). Q.E.D.

c) DEMOSTRACIÓN DE (3.124).

En la representación de FWT es (cf. 3.45)

$$\frac{d}{dt}\;i\,\frac{\partial}{\partial\vec{p}} = i\left[\gamma^o p^o,\; i\,\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right] = \frac{\vec{p}}{p_o}\,\gamma^o = \frac{\vec{p}}{p_o}\left(\frac{H'}{p_o}\right) \qquad \text{(A3-16.3)}$$

Por otra parte,

$$\langle\bar{B}\rangle = \langle B\rangle^* \Longrightarrow \frac{d}{dt}\langle\bar{B}\rangle = \frac{d}{dt}\langle B\rangle^* \Longrightarrow \langle\frac{d}{dt}\,\bar{B}\rangle = \langle\frac{d}{dt}\,B\rangle^* \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\;\bar{B}\;\underset{w}{\widetilde{\mathrm{esc}}}\;\overline{\left(\frac{d}{dt}\,B\right)}\;. \qquad \text{(A3-16.4)}$$

Pero $\overline{\frac{\vec{p}}{p_o}\left(\frac{H'}{p_o}\right)} = \frac{\vec{p}}{p_o}\left(\frac{H^o}{p_o}\right)$; entonces, de (A3-16) se deduce,

$$\frac{d}{dt}\overline{\left(i\,\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right)} = \frac{d}{dt}\;i\,\frac{\partial}{\partial\vec{p}} \quad\therefore\quad \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\left(i\,\frac{\partial}{\partial\vec{p}} + i\,\overline{\frac{\partial}{\partial\vec{p}}}\right) = \frac{\vec{p}}{p_o}\left(\frac{H'}{p_o}\right)$$

$$\text{(A3-16.5)}$$

Con (3.46-b),

$$\frac{d}{dt}\left[\left(i\,\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right)^{(w)}\right]\;\underset{w}{\widetilde{\mathrm{esc}}}\;\frac{\vec{p}}{p_o}\left(\frac{H'}{p_o}\right) \qquad \text{(A3-16.6)}$$

Volviendo a la representación original, se tiene la (3.124).

A4-1

EL PARAMETRO r DE LOS SPINORES u (r, p) DE SPIN 1/2.

Para evitar confusiones en una sección posterior, necesitaremos <u>distinguir explícitamente</u> entre dos definiciones <u>usuales</u> de r.

<u>Definición A</u>

Se pone

$$u_+(1,0) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\ u_+(-1,0)= \sqrt{2m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\ u(1,0) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$u(-1,0) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}; \qquad \text{(A4-1.1)}$$

entonces $u_\varepsilon(r, \vec{p})$ queda definido mediante (4.7), y el "r" de $u_\varepsilon(r, \vec{p})$ es por definición el "r" de $u_\varepsilon(r,0)$.

Se bien

$$\sigma_z\ u_\varepsilon(r,\ 0) = r\ u_\varepsilon(r,\ 0) \qquad \text{(A4-1.2)}$$

las $u_\varepsilon(r, \vec{p})$ aquí definidas <u>no</u> resultan autofunciones de σ_z (salvo $p_x = p_y = 0$) ni se $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}/|\vec{p}|$ (salvo $\vec{p} = 0$). Pero conducen a las formas tradicionales

$$u_+(1,\ \vec{p}) = \text{const} \times \begin{pmatrix}1\\0\\p^3/(m+p_o)\\p_+/(m+p_o)\end{pmatrix} \quad \text{, etc.} \qquad \text{(A4-1.3)}$$

Definición B

Se construyen las $u_\varepsilon(r, \vec{p})$ como autofunciones de la helicidad, con autovalor $r/2$:

$$\frac{1}{2}\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\ u_\varepsilon(r, \vec{p}) = \frac{1}{2}\, r\ u_\varepsilon(r, \vec{p}) \qquad \text{(A4-1.4)}$$

Se demuestra (Messiah, op cit[18], tomo II, Secc. XX-25) que un procedimiento equivalente pero más simple para obtener estas $u_\varepsilon(r, \vec{p})$ es buscar las $u_\varepsilon(r, 0)$ tales que

$$\frac{1}{2}\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\ u_\varepsilon(r, 0) = \frac{1}{2}\, r\ u_\varepsilon(r, 0) \qquad \text{(A4-1.5)}$$

obteniendo luego las $u_\varepsilon(r, \vec{p})$ mediante (4.7).

A4-2

EL PARAMETRO r DE LOS SPINORES $u_\pm(r, \vec{p})$ DE SPIN 1.

Definición A

Por analogía con spin 1/2 ponemos

$$u_+(2,0) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\quad u_-(2,0) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$u_+(0,0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\quad u_-(0,0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$u_+(-2,0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad u_-(-2,0) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que son autofunciones de la componente z de $\frac{1}{2}\left(\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}\right)$. Entonces $u_\varepsilon(r, \vec{p})$ queda definido mediante (4.27), y el "r" de $u_\varepsilon(r, \vec{p})$ es, por definición el "r" de las $u_\varepsilon(r, 0)$.

Es equivalente usar (4.18) empleando las $u_\varepsilon(r, \vec{p})$ de tipo A definidas en el apéndice anterior.

Definición B.

Similarmente a spin 1/2, construímos las u (r, $\vec{p}$) como autofunciones en $\mathcal{W}$ de la helicidad, con autovalor r/2. Con (3.61),

$$\frac{\vec{\sigma}_{(1)} + \vec{\sigma}_{(2)}}{2\,|\vec{p}|}\; u_\varepsilon(r, \vec{p}) = \frac{r}{2}\; u_\varepsilon(r, \vec{p}). \qquad \text{(A4-2.2)}$$

Es equivalente usar (4.18) empleando las $u_\varepsilon(r, \vec{p})$ de tipo B.

Nota: Al igual que para spin 1/2, la definición A de un estado de polarización, pero no un autoestado de la helicidad (salvo $\vec{p} = 0$) ni de la 3a. componente del spin (salvo $p_x = p_y = 0$). La polarización correspondiente a la definición A es la de una partícula que en un sistema de reposo está en un autoestado de la 3a. componente del spin.

A4-3

DEMOSTRACIÓN DE (4.21).

Como función de $\vec{x}$ solamente, (es decir, t, i_1 e i_2 fijos),

$\psi_{i_1 i_2}(t, \vec{x})$ admite desarrollo en integral de Fourier, si se trabaja con hipótesis matemáticas adecuadas,

$$\psi_{i_1 i_2}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} C_{i_1 i_2}(\vec{p}, t)\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \qquad (A4\text{-}3.1)$$

Impongo $\psi \in \mathcal{W}$; entonces,

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon} \psi(t, \vec{x}) = \psi(t, \vec{x}). \qquad (A4\text{-}3.2)$$

Usando (A4-3.1) e igualando coeficientes de Fourier,

$$\Lambda_{\perp}^{\mathcal{W}\varepsilon} (\vec{p})\, C(\vec{p}, t) = C(\vec{p}, t) \qquad (A4\text{-}3.3)$$

o sea (para t fijo)

$$C(\vec{p}, t) \in \mathcal{W}_{sp}^{p} \qquad (A4\text{-}3.4)$$

Como los 6 spinores (4.18) subtienden $\mathcal{W}_{sp}^{p}$ (cf. Secc. 4-b.1), entonces existen coeficientes $d(r, \vec{p}, t)$ y $e(r, \vec{p}, t)$ tales que para t fijo,

$$C_{i_1 i_2}(\vec{p}, t) = \sum_r \Big[d(r, \vec{p}, t)\, u_{+;i_1 i_2}(r, \vec{p}) + \\ + e(r, \vec{p}, t)\, u_{-;i_1 i_2}(r, \vec{p}) \Big]. \qquad (A4\text{-}3.5)$$

(Nótese que ni d ni e tienen índices spinoriales).

En (A4-3.1),

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} d(r, \vec{p}, t)\, u_+(r, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \\ + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} e(r, \vec{p}, t)\, u_-(r, \vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}. \qquad (A4\text{-}3.6)$$

Usando (3.4) y (4.18) resulta

$$d(r, \vec{p}, t) = d(r, \vec{p}, 0)\, e^{-ip^0x^0}; \quad e(r, \vec{p}, t) = e(r, \vec{p}, 0)\, e^{ip^0x^0};$$

llamando

$$a(r, \vec{p}) = d(r, \vec{p}, 0); \qquad b(r, \vec{p}) = e^*(r, -\vec{p}, 0)$$

se obtiene (4.21). Q.E.D.

A5-1

a) DEMOSTRACIÓN DE (5.15).

Formamos la expresión

$$\hat{\Phi}^{(\varepsilon)}(z, x^0) = \frac{\lambda}{\sqrt{2m}} \int d^3x \left\{ \psi'^{(\varepsilon)}_{(1)}(z-x)\, \psi''^{(\varepsilon)}_{(2)}(x) + (1) \longleftrightarrow (2) \right\}; \tag{A5-1.1}$$

ahora, si $\psi''(x)$ satisface a la ecuación de Dirac, entonces

$$\varphi(x) = \int \psi''(x^0, \vec{x})\, dx^0 \quad \text{(integral indefinida)} \tag{A5-1.2}$$

también la satisface; por lo tanto $\hat{\Phi}^{(\varepsilon)}$ es del tipo de las $\hat{\Phi}^{(\varepsilon)}$ definidas en (5.1) con la sustitución $\psi'' \longrightarrow \varphi$.

Como el teorema 5.a-1 vale para cualquier par de soluciones ψ', ψ'', vale también para ψ', φ; de donde, $\hat{\Phi}^{(\varepsilon)}$ cumple (5.3):

$$\frac{\partial \hat{\Phi}^{(\varepsilon)}}{\partial x^0}(z, x^0) = 0 \,. \tag{A5-1.3}$$

(Esta ecuación puede obtenerse también usando (5.5) en (A5-1.1)).

De (5.7), (A5-1.1) y (A5-1.3) obtenemos

$$\psi^{(\varepsilon)}(z) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2m}} \int d^3x \left\{ \left[i \frac{\partial}{\partial x^0} \psi'^{(\varepsilon)}_{(1)}(z-x) \right] \psi''^{(\varepsilon)}(x) + (1) \longleftrightarrow (2) \right\}. \tag{A5-1.4}$$

Para obtener (5.15) solo resta intercambiar $\psi' \longleftrightarrow \psi''$.

b) DEMOSTRACIÓN DE (5.16).

Como

$$i \frac{\partial}{\partial x^o} \psi''(x) = \left[-i \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{\alpha} + m\beta \right] \psi''(x),$$

es

$$i \frac{\partial}{\partial x^o} \psi''(z-x) = -i \frac{\partial}{\partial (z^o - x^o)} \psi''(z-x) =$$

$$= - \left[-i \frac{\partial}{\partial (\vec{z} - \vec{x})} \cdot \vec{\alpha} + m\beta \right] \psi''(z-x) =$$

$$= - \left[-i \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \cdot \vec{\alpha} + m\beta \right] \psi''(z-x)$$

$$= - H(z)\, \psi''(z-x) \, . \qquad \text{(A5-1.5)}$$

(A5-1.5) en (5.15) implica (5.16).

A6-1

a) DEMOSTRACIÓN DE (6.13).

Multiplicando (6.11) por P a la izquierda, y por P^{-1}, y teniendo en cuenta (6.12-b),

$$\psi'(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} \Big[a'(r, \vec{p})\, u(r, \vec{p})\, e^{-ipx} +$$

$$+ b'^{+}(r, \vec{p})\, v(r, \vec{p})\, e^{ipx} \Big] . \qquad \text{(A6-1.1)}$$

Por otra parte, como $px = p_o x_o - \vec{p} \cdot \vec{x}$,

$$\psi(x') = \psi(x^o, -\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} \Big[a(r, \vec{p})\, u(r, \vec{p})\, e^{-i(p^o x^o + \vec{p}\cdot\vec{x})} + b^+(r, \vec{p})\, v(r, \vec{p})\, e^{i(p^o x^o + \vec{p}\cdot\vec{x})} \Big];$$

cambiando de variable de integración

$$\psi(x') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_o}} \Big[a(r, -\vec{p})\, u(r, -\vec{p})\, e^{-ipx} + b^+(r, -\vec{p})\, v(r, -\vec{p})\, e^{ipx} \Big] . \quad \text{(A6-1.2)}$$

De (6.12-a), (A6-1.1) y (A6-1.2) se deduce inmediatamente (6.13).

b) DEMOSTRACIÓN DE (6.14).

Fijando $\vec{p}$, el subespacio $W_{sp}^{(+)p}$ subtendido por las $u(r, \vec{p}) = u_+(r, \vec{p})$ es el de los autovectores de $H(\vec{p}) = |\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\beta|_{(1)}\, I_{(2)}$ con autovalor $+\, p_o$ (cf. Secc. 4.b) y que cumplen además $u_{ij} = u_{ji}$.

$$u \in W_{sp}^{(+)p} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + m\beta|_{(1)}\, I_{(2)}\, u = p_o\, u \\ u_{ij} = u_{ji} \end{cases} \quad \text{(A6-1.3)}$$

Si en

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m|_{(1)}\, u(r', +\vec{p}) = p_o\, u(r', +\vec{p})$$

cambiamos p por -p (lo cual puede implicar cambiar r por r' ≠ r; ello depende de la definición de r) + se obtiene

$$|-\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m|_{(1)}\, u(r, -\vec{p}) = p_o\, u(r, -\vec{p})$$

de donde

$$\left[\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m\right]_{(1)} \left[\gamma^o_{(1)}\, \gamma^o_{(2)}\, u(r, -\vec{p})\right] = p_o \left[\gamma^o_{(1)}\, \gamma^o_{(2)}\, u(r, -\vec{p})\right];$$

+ Con la definición A (cf. A4-2) es r = r'; con la B es r = -r'.

por lo tanto $\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\, u(r, -\vec{p})$ cumple (A6-1.3), de donde se si gue (6.14-a). Análogamente (6.14-b). Q.E.D.

c) DEMOSTRACIÓN DE FORMULAS PARA SPIN 1/2 QUE NECESITAMOS.

Para spin 1/2 hay fórmulas análogas a las (6.14):

$$\gamma^{o}\, u(r, -\vec{p}) = \sum_{r=-1}^{+1} \lambda(r, r', \vec{p})\, u(r, \vec{p})$$

$$\gamma^{o}\, v(r, -\vec{p}) = \sum_{r=-1}^{+1} \mu(r, r', \vec{p})\, u(r, \vec{p}) \;. \qquad \text{(A6-1.4)}$$

Los coeficientes λ y μ dependen de la definición elegida para r (ver A4-1).

c_1) Definición A de r.

De (4.9) y (4.7) obtenemos

$$u(r, \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_o)}}\,(m+p_o+\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\, u_+(r, 0)$$

$$v(r, \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_o)}}\,(m+p_o+\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\, u_-(r, 0) \qquad \text{(A6-1.5)}$$

Recordemos que "r" se define <u>primero</u> para $u_\varepsilon(r, 0)$ mediante (A4-1.1) y <u>luego</u> se define "r" de u(r, p) (ó v(r, p) como el "r" del u(r, 0) (ó v(r, 0)) con el cual está vinculado mediante (A6-1.5). Por lo tanto, al cambiar $\vec{p} \longrightarrow -\vec{p}$,

$$u(r, -\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_o)}}\,(m+p_o-\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\, u_+(r, 0)$$

$$v(r, -p) = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_o)}}\,(m+p_o-\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\, u_-(r, 0) \qquad \text{(A6-1.6)}$$

el "r" no cambia: Su definición (A4-1.1) es independiente de $\vec{p}$.

De (A4-1.1)

$$\gamma^0 \, u_\varepsilon(r,\, 0) = \varepsilon \, u_\varepsilon(r,\, 0); \qquad \text{(A6-1.7)}$$

por lo tanto (A6-1.6) implica,

$$\begin{aligned} \gamma^0 \, u(r,\, -\vec{p}) &= u(r,\, \vec{p}) \\ \gamma^0 \, v(r,\, -\vec{p}) &= -v(r,\, \vec{p}) \end{aligned} \qquad \text{(A6-1.8-a)}$$

o sea

$$\lambda(r,\, r') = \delta_{rr'}; \quad \mu(r,\, r') = -\,\delta_{rr'} \qquad \text{(A6-1.8-b)}$$

c_2) Definición B de r.

Como la definición (A4-1.4) es invariante ante rotaciones 3-dimensionales, no se pierde generalidad si se eligen ejes tales que $\vec{p} = (0,\, 0,\, p^3)$. Entonces de (4.9) y (A4-1.4),

$$\begin{aligned} (\mathrm{sg}\ p^3)\, \sigma^3 u(r,\, \vec{p}) &= r\, u(r,\, \vec{p}) \\ (\mathrm{sg}\ p^3)\, \sigma^3 v(r,\, \vec{p}) &= -r\, v(r,\, \vec{p}) \end{aligned} \qquad \text{(A6-1.9)}$$

donde sg indica a la función signo.

Es trivial la obtención de las $u(r,\, \vec{p})$ y $v(r,\, \vec{p})$ que satisfacen (A6-1.9) y (4.11-a) en la representación usual de (2.6) de las γ^μ.

Para $p^3 > 0$ se tienen las conocidas soluciones (no normalizadas),

$$u(+1;0,0,|p^3|) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ |p^3|/(p_0+m) \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad u(-1;0,0,|p^3|) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -|p^3|/(p_0+m) \end{pmatrix};$$

$$v(-1;0,0,|p^3|)=\begin{pmatrix}|p^3|/p_o+m)\\0\\1\\0\end{pmatrix};\quad v(+1;0,0,|p^3|)=\begin{pmatrix}0\\-|p^3|/(p_o+m)\\0\\1\end{pmatrix};$$

para $p^3 < 0$ se obtiene (cuidado con sg p^3 en (A6-1.9!),

$$u(+1;0,0,-|p^3|)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\|p^3|/(p_o+m)\end{pmatrix};\quad u(-1;0,0,-|p^3|)=\begin{pmatrix}+1\\0\\-|p^3|/(p_o+m)\\0\end{pmatrix}$$

$$v(-1;0,0,-|p^3|)=\begin{pmatrix}0\\|p^3|/(p_o+m)\\0\\1\end{pmatrix};\quad v(+1;0,0,-|p^3|)=\begin{pmatrix}-|p^3|/(p_o+m)\\0\\1\\0\end{pmatrix}. \tag{A6-1.10-b}$$

Se obtiene entonces como es sabido [16] $\gamma^o\, u(+1;0,0,|p^3|) = u(-1;0,0,-|p^3|)$ y expresiones análogas que se sintetizan en $\gamma^o u(r;0,0,-p^3) = u(-r;0,0,+p^3)$; $\gamma^o\, v(r;0,0,-p^3) = -v(-r;0,0,+p^3)$.

Debido ante la invariancia ante rotaciones arriba mencionada, ocurre lo propio en el caso general:

$$\gamma^o\, u(r,-\vec{p}) = +u(-r,\vec{p});\quad \gamma^o\, v(r,-\vec{p}) = -v(-r,\vec{p}); \tag{A6-1.11-a}$$

o sea

$$\lambda(r,r',\vec{p}) = \delta_{r,-r'};\qquad \mu(r,r',\vec{p}) = -\delta_{r,-r'}. \tag{A6-1.11-b}$$

d) DEMOSTRACIÓN DE (6.16-a) y (6.17-a).

d_1) Definición A

De (4.30) y (A6-1.8),

$$\gamma^{o}_{(1)}\gamma^{o}_{(2)}\, u(r=r+s,-\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{|r|!\, m}}\left\{\left[\gamma^{o}\ u(r,-\vec{p})\right]_{(1)}\left[\gamma^{o}\ u(s,-\vec{p})\right]_{(2)} + \right.$$

$$\left. + \left[\gamma^{o}\ u(s,-\vec{p})\right]_{(1)}\left[\gamma^{o}\ u(r,-\vec{p})\right]_{(2)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|r|!\, m}}\left\{u_{(1)}(-r,\vec{p})u_{(2)}(-s,\vec{p}) + u_{(1)}(-s,\vec{p})u_{(2)}(-r,\vec{p})\right\} =$$

$$= u\left[-(r+s),\ \vec{p}\right] = u(-r,\ \vec{p}). \qquad \text{(A6-1.12-a)}$$

Análogamente, $\gamma^{o}_{(1)}\,\gamma^{o}_{(2)}\ v(r=r+s,\ -p) = v(-r,\ \vec{p})$ (A6-1.12-b)

o sea la (6.16-a).

d_2) Definición B.

Se obtiene análogamente (6.17-a) a partir de (4.30) y (A6-1.11). Q.E.D.

A6-2

a) DEMOSTRACIÓN DE (6.38).

Nota: Como las 16 componentes de las $\psi_{i_1 i_2} \in \mathcal{E}$ son independientes, demostrar que la dimensión del espacio $\bar{\mathcal{E}}_{sp}\ \mathcal{E}_{sp}$ de las formas bilineales

$$\bar{\psi}_{i_2 i_1}\ M_{i_1 i_2;\ j_1 j_2}\ \varphi_{j_1 j_2}$$

es 16^2, es equivalente a demostrar que la dimensión del espacio de las matrices

$$M_{i_1 i_2;\ j_1 j_2}$$

es 16^2. Haremos esto último, utilizando un método usual.

Formamos las 16^2 matrices

$$N^{(r_1,r_2;s_1,s_2)}_{i_1i_2;j_1j_2} = \delta_{r_1i_1}\delta_{r_2i_2}\delta_{s_1j_1}\delta_{s_2j_2} \; ; \quad r_u,s_u,i_u = 1,2,3,4, \; u=1,2.$$

donde la cuaterna de índices superiores distingue entre si a las matrices y los índices inferiores son los spinoriales.

$$\sum_{\substack{r_1r_2\\s_1s_2}} C_{r_1r_2;\,s_1s_2} N^{(r_1r_2;\,s_1s_2)} = 0$$

($C_{r_1r_2;\,s_1s_2}$ = números) se deduce trivialmente $C_{r_1r_2;\,s_1s_2} = 0$; por lo tanto las 16 matrices (A6-2.1) son linealmente independientes. Además, es elemental demostrar que toda matriz $M_{i_1i_2,\,j_1j_2}$ es desarrollable como combinación lineal de las matrices (A6-2.1); por lo tanto, las 16^2 matrices $N^{(r_1r_2;\,s_1s_2)}$ forman base en el espacio (vectorial) de las M; pero como hay 16^2 matrices en la base, la dimensión del espacio vectorial de las $M_{i_1i_2;\,j_1j_2}$ es 16^2. Q.E.D.

b) DEMOSTRACIÓN DE QUE SI ψ, $\varphi \in \varepsilon_{sp}$, LOS ELEMENTOS DE $\overline{\varepsilon_{sp}}\ \varepsilon_{sp}$ DADOS EN TABLA 6-1 SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

Queremos demostrar que si

$$\sum_{A,B} C_{AB}\, \psi \Gamma^A_{(1)} \; \Gamma^B_{(2)} \varphi = 0 \quad \forall\, \psi,\, \varphi \tag{A6-1.2}$$

entonces

$$C_{AB} = 0, \qquad \forall\ A,\ B. \tag{A6-1.3}$$

Como en (A6-2.2) ψ y $\varphi \in \varepsilon_{sp}$ son arbitrarias, podemos poner

$$\psi = \psi'_{(1)} \psi''_{(2)} \,, \qquad \varphi = \varphi'_{(1)} \varphi''_{(2)}$$

con $\psi' \psi''$, φ' y φ'' arbitrarias.

Entonces, se puede poner

$$\sum_A \left[C_{AB} \sum_A \psi''_{(2)} \Gamma^B \varphi''_{(2)} \right] \psi'_{(1)} \Gamma^A_{(1)} \varphi'_{(1)} = 0, \quad \forall \psi', \varphi'. \qquad \text{(A6-1.4)}$$

por la independencia lineal de las (6.27), los coeficientes [ ] se anulan:

$$\left[C_{AB} \sum_B \psi''_{(2)} \Gamma^B_{(2)} \varphi''_{(2)} \right] = 0, \qquad \forall A;$$

por el mismo motivo,

$$C_{AB} = 0 \,, \qquad \forall A, B.$$

A6-3

DEMOSTRACIÓN DE (6.45).

Por (A2-12.1) si $\psi \in \mathcal{E}$ es

$$\gamma^0_{(1)} \gamma^0_{(2)} \psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & -\psi_{13} & -\psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & -\psi_{23} & -\psi_{24} \\ -\psi_{31} & -\psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{pmatrix} \qquad \text{(A6-3.1-a)}$$

De (2.6) deducimos que si $\psi \in \mathcal{E}$ es

$$\gamma^1_{(1)} \psi = \begin{pmatrix} \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ -\psi_{21} & -\psi_{22} & -\psi_{23} & -\psi_{24} \\ -\psi_{11} & -\psi_{12} & -\psi_{13} & -\psi_{14} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2_{(1)}\psi = i\begin{pmatrix} -\psi_{41} & -\psi_{42} & -\psi_{43} & -\psi_{44} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ -\psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & -\psi_{14} \end{pmatrix} \qquad \text{(A6-3.2)}$$

$$\gamma^3_{(1)}\psi = \begin{pmatrix} \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ -\psi_{41} & -\psi_{42} & -\psi_{43} & -\psi_{44} \\ -\psi_{11} & -\psi_{12} & -\psi_{13} & -\psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \end{pmatrix}$$

Aplicando $\gamma^a_{(2)}$:

$$\gamma^1_{(1)}\gamma^1_{(2)}\psi = \begin{pmatrix} \psi_{44} & \psi_{43} & -\psi_{42} & -\psi_{41} \\ \psi_{34} & \psi_{33} & -\psi_{32} & -\psi_{31} \\ -\psi_{24} & -\psi_{23} & \psi_{22} & \psi_{21} \\ -\psi_{14} & -\psi_{13} & \psi_{12} & \psi_{11} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2_{(1)}\gamma^2_{(2)} = \begin{pmatrix} \psi_{44} & \psi_{43} & -\psi_{42} & -\psi_{41} \\ \psi_{34} & \psi_{33} & -\psi_{32} & \psi_{31} \\ \psi_{24} & \psi_{23} & -\psi_{22} & \psi_{21} \\ -\psi_{14} & \psi_{13} & \psi_{12} & -\psi_{11} \end{pmatrix} \qquad \text{(A6-3.1-b)}$$

$$\gamma^3_{(1)}\gamma^3_{(2)}\psi = \begin{pmatrix} \psi_{33} & -\psi_{34} & -\psi_{31} & \psi_{32} \\ -\psi_{43} & \psi_{44} & \psi_{41} & -\psi_{42} \\ -\psi_{13} & \psi_{14} & \psi_{11} & -\psi_{12} \\ \psi_{23} & \psi_{24} & -\psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix}$$

Con $\gamma^{\mu}_{(1)}\ \gamma_{\mu(2)} = \gamma^{0}_{(1)}\gamma^{0}_{(2)} - \vec{\gamma}_{(1)}\cdot\vec{\gamma}_{(2)}$

se obtiene (6.45). Q.E.D.

A6-4

a) DEMOSTRACIÓN DE (6.67"-a).

Es bien sabido que en la representación (2.6) de las es

$$\vec{\sigma} = \left(\begin{array}{c|c} \vec{\sigma} & 0 \\ \hline 0 & \vec{\sigma} \end{array}\right) \qquad \text{(A6-4.1)}$$

reemplazando los σ^a bidimensionales por (2.6-a) se obtiene

$$\psi\epsilon\,\mathcal{E}^{sim} \Longrightarrow \vec{\sigma}_{(1)}\ \vec{\sigma}_{(2)}\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & (2\psi_{23}-\psi_{14}) \\ \psi_{12} & \psi_{22} & (2\psi_{14}-\psi_{23}) & \psi_{24} \\ \psi_{13} & (2\psi_{14}-\psi_{32}) & \psi_{33} & \psi_{34} \\ (2\psi_{23}-\psi_{14}) & \psi_{24} & \psi_{34} & \psi_{44} \end{pmatrix}$$

(A6-4.2)

Si $\psi\epsilon\ \mathcal{E}^{sim\,v}$ se pueden reemplazar las ψ_{ij} por los elementos ij del 2° miembro de (6.60); se observa que lo obtenido es nuevamente el 2° miembro de (6.60); por lo tanto,

$$\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} \, \psi^V = \psi^V \ . \qquad (A6\text{-}4.3)$$

Q.E.D.

b) DEMOSTRACIÓN DE (6.67").

Desarrollando,

$$\sigma_{(1)}^{\mu\nu} \, \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} \, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = 4(\sigma_{(1)}^{01} \, \sigma_{(2)}^{23} - \sigma_{(1)}^{02} \, \sigma_{(2)}^{13} + \sigma_{(1)}^{03} \, \sigma_{(2)}^{12} + (1) \longleftrightarrow (2));$$

usando (6.34-d),

$$\sigma^{ok} = i \, \gamma^5 \, \sigma^k \ ; \qquad (A6\text{-}4.4)$$

reemplazando,

$$\sigma_{(1)}^{\mu\nu} \, \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} \, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = 4i \, \gamma_{(1)}^5 (\vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} + (1) \longleftrightarrow (2)) =$$

$$= 8 \, i \, \gamma_{(1)}^5 \, \vec{\sigma}_{(1)} \cdot \vec{\sigma}_{(2)} \ ; \qquad (A6\text{-}4.5)$$

con (6.67"-a),

$$\sigma_{(1)}^{\mu\nu} \, \sigma_{(2)}^{\lambda\rho} \, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \underset{\varepsilon_{sp}^{sim\,v}}{=} 8i \, \gamma_{(1)}^5 \underset{\varepsilon_{sp}^{sim\,v}}{=} 8i \, \gamma_{(2)}^5 \ .$$

Q.E.D.

A8-1

DEMOSTRACIÓN DEL SEGUNDO LEMA (Secc. 8.c-2).

Demostraremos las (8.96-a) y (8.97-a); las (b) se obtienen de manera similar. En (8.96-a) la parte antisimétrica de θ^v no contribuye a $\overline{0^v \Omega^v}$ pues Ω^V es simétrico. Podemos, pues, suponer $\theta^V \in \varepsilon^{sim\,v}$.

De (6.60) y (8.35) observamos que

$$\psi^V \epsilon\, \varepsilon^{\mathrm{sim}\, V} \Rightarrow \psi^V = \begin{pmatrix} \psi^{V(1)} & \psi^{V(2)} & \psi^{V(3)} & \psi^{V(4)} \\ \psi^{V(2)} & \psi^{V(5)} & \psi^{V(4)} & \psi^{V(6)} \\ \psi^{V(3)} & \psi^{V(4)} & \psi^{V(1)} & \psi^{V(2)} \\ \psi^{V(4)} & \psi^{V(6)} & \psi^{V(2)} & \psi^{V(5)} \end{pmatrix} \qquad \text{(A8-1.1)}$$

Por una parte tenemos

$$\overline{\theta^V}\, \Omega^V = (\overline{\theta^V})_{i_2 i_1} (\Omega^V)_{i_1 i_2} \qquad \text{(A8-1.2)}$$

donde se <u>suma para todo</u> $i_1, i_2 = 1, 2, 3, 4$.

Por otra parte reemplazando (A8-1.1) en (A8-1.2), o sea usando

$$(\Omega^V)_{11} = \Omega^{V(1)}, \ \ldots, \ (\overline{\theta^V})_{44} = \overline{\theta^{V(5)}} \qquad \text{(A8-1.3)}$$

obtenemos

$$\overline{\theta^V}\Omega^V = 2\overline{\theta^{V(1)}}\, \Omega^{V(1)} + 4\overline{\theta^{V(2)}}\, \Omega^{V(2)} + 2\overline{\theta^{V(3)}}\, \Omega^{V(3)} + 4\overline{\theta^{V(4)}}\, \Omega^{V(4)} + \\ + 2\overline{\theta^{V(5)}}\, \Omega^{V(5)} + 2\overline{\theta^{V(6)}}\, \Omega^{V(6)} . \qquad \text{(A8-1.4)}$$

Conservando en (A8-1.2) la dependencia funcional indicada en el 2º miembro, es decir procediendo según Secc. 8.b-7, resulta

$$\left[\frac{\partial(\overline{\theta^V}\Omega^V)}{\partial \Omega^V}\right]\chi^V = \left[\frac{\partial\left(\overline{\theta^V}_{i_2 i_1}\, \Omega^V_{i_1 i_2}\right)}{\partial\, \Omega^V_{r_1 r_2}}\right] \chi^V_{r_1 r_2} = \overline{\theta^V}_{r_2 r_1}\, \chi^V_{r_1 r_2} = \overline{\theta^V}\, \chi^V \qquad \text{(A8-1.5)}$$

En cambio derivando en (A8-1.4) respecto de las $\Omega^{V(A)}$, $A = 1, 2, \ldots,$ (independientes) se obtiene

$$\sum_{A=1}^{6} \left[\frac{\partial(\overline{\theta^V}\,\Omega^V)}{\partial\, \Omega^{V(A)}}\right] \chi^{V(A)} = 2\overline{\theta^{V(1)}}\, \chi^{V(1)} + 4\overline{\theta^{V(2)}}\, \chi^{V(2)} + \ldots + 2\overline{\theta^{V(6)}}\chi^{V(6)}.$$

Comparando con (A8-1.4),

$$\sum_{A=1}^{6}\left[\frac{\partial(\overline{\theta^V}\Omega^V)}{\partial\Omega^{V(A)}}\right]\chi^{V(A)} = \overline{\theta^V}\,\chi^V. \qquad (A8\text{-}1.6)$$

Con (A8-1.5) y (A8-1.6) la demostración queda completa.

A8-2

DEMOSTRACIÓN DE (8.23)

a) Cálculos previos:

De (8.6-a) y (2.5) deducimos

$$\psi^{VI}(x) = \frac{i}{m}\,\gamma^o_{(1)}\,\partial_o\,\Lambda^I\,\psi^V + \frac{i}{2m}\left(\vec{\gamma}_{(1)}+\vec{\gamma}_{(2)}\right)\cdot\nabla\,\psi^V. \qquad (A8\text{-}2.1)$$

puesto que

$$\Lambda^I\,\gamma^o_{(1)} = \Lambda^I\,\gamma^o_{(2)} = \gamma^o_{(1)}\,\Lambda^I = \gamma^o_{(2)}\,\Lambda^{II}\ . \qquad (A8\text{-}2.2\text{-}a)$$

Además,

$$\Lambda^{II}\gamma^o_{(1)} = -\Lambda^{II}\gamma^o_{(2)} = \gamma^o_{(1)}\,\Lambda^{II} = -\gamma^o_{(2)}\Lambda^{II}; \qquad (A8\text{-}2.3\text{-}a)$$

$$\Lambda^I\,\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)} = \gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}\,\Lambda^I = \Lambda^I, \qquad (A8\text{-}2.3\text{-}a)$$

y

$$\Lambda^{II}\gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)} = \gamma^o_{(1)}\gamma^o_{(2)}\,\Lambda^{II} = -\Lambda^{II}\ . \qquad (A8\text{-}2.3\text{-}b)$$

b) Demostraremos que si

$$H_{(1)}\ \psi(\sigma_\perp) = H_{(2)}\,\psi(\sigma_\perp) \qquad (A8\text{-}2.4)$$

entonces es

$$\Lambda^{II}\,\Lambda^{IV}\,\psi^V(\sigma_\perp) = \Lambda^{II}\,\Lambda^{III}\,(m^2-\Delta-\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\partial_o)\,\psi(\sigma_\perp) = 0\ .$$

En efecto:

$$(A8\text{-}2.4) \Longrightarrow i(\vec{\alpha}_{(1)}-\vec{\alpha}_{(2)})\cdot\nabla\,\psi(\sigma_\perp) = m(\gamma^o_{(1)}-\gamma^o_{(2)})\,\psi(\sigma_\perp).$$

(A8-2.5)

Premultiplicamos esta ecuación por Λ^{III} y usamos (8.17-a); obtenemos

$$0 = \Lambda^{III}\, m(\gamma^o_{(1)} - \gamma^o_{(2)})\, \psi(\sigma_\perp) = m(\gamma^o_{(1)} - \gamma^o_{(2)})\, \Lambda^{IV}\, \psi(\sigma_\perp).$$

(A8-2.6)

Premultiplicamos esta por ^{II} y usamos (A8-2.2-b) y (8.21).

$$0 = 2m\, \gamma^o_{(1)}\, \Lambda^{II}\, \Lambda^{IV}\, \psi(\sigma_\perp)$$

de donde

$$\quad{}^{II}\quad{}^{IV}\quad (\sigma\ ) = 0\ . \qquad (A8\text{-}2.7)$$

Premultiplicamos (A8-2.7) por Λ^V y volvemos a usar (8.17-a),

$$\boxed{\Lambda^{II}\, \Lambda^{IV}\, \psi^V(\sigma_\perp) = 0} \qquad (A8\text{-}2.8)$$

con lo que queda probada una parte de la tesis.

Descomponemos ahora $\psi(\sigma_\perp)$ en sus partes I y II, y cada una de estas en sus partes III y IV; teniendo en cuenta (A8-2.7), resulta

$$\psi(\sigma_\perp) = \Lambda^{III}\, \Lambda^{I}\, \psi(\sigma_\perp) + \Lambda^{IV}\, \Lambda^{I}\, \psi(\sigma_\perp) + \Lambda^{III}\, \Lambda^{II}\, \psi(\sigma_\perp) \qquad (A8\text{-}2.9)$$

que reemplazamos en (A8-2.5). Teniendo en cuenta (8.18) y (A8-2.2) obtenemos

$$m\, \gamma^o_{(1)}\, \Lambda^{II}\, \Lambda^{III}\quad (\sigma_\perp) = i\, \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \Lambda^{I}\, \Lambda^{IV}\, \psi(\sigma_\perp). \qquad (A8\text{-}2.10)$$

Premultiplicamos por Λ^{VI},

$$m\, \gamma^o_{(1)}\, \Lambda^{II}\, \Lambda^{III}\, \psi^V(\sigma_\perp) = i\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla}\, \Lambda^{I}\, \Lambda^{IV}\, \psi^{VI}\, (\sigma_\perp), \qquad (A8\text{-}2.11)$$

y usamos (A8-2.1):

$$m\, \gamma^o_{(1)}\, \Lambda^{II} \Lambda^{III} \psi^V(\sigma_\perp) = -\frac{1}{m}\, \vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla}\, \Lambda^{I}\, \Lambda^{IV}\, \gamma^o_{(1)}\, \partial_o\, \psi^V -$$

$$- \frac{1}{m} \left(\vec{\alpha}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \right) \Lambda^{I} \Lambda^{IV} \left(\vec{\gamma}_{(1)} \cdot \vec{\nabla} \right) \psi^V -$$

$$- \frac{1}{2m}\left(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\right)\Lambda^{I}\,\Lambda^{IV}\left(\vec{\gamma}_{(2)}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi^{V}. \tag{A8-2.12}$$

Reemplazamos

$$\vec{\gamma}_{(1)}\cdot\vec{\nabla} = \gamma^{o}_{(1)}\,\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\;; \qquad \vec{\gamma}_{(2)}\cdot\vec{\nabla} = -\,\vec{\alpha}_{(2)}\cdot\vec{\nabla}\,\gamma^{o}_{(2)} \tag{A8-2.13}$$

en (A8-2.12) y empleamos (8.18) y (A8-2.2) para sustituir las matrice tipo (2) por matrices tipo (1); como

$$(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla})^2 = \Delta \tag{A8-2.14}$$

el resultado es

$$m\,\gamma^{o}_{(1)}\,\Lambda^{II}\Lambda^{III}\psi^{V}(\sigma_{\perp}) = -\frac{1}{m}\,\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\Lambda^{I}\,\Lambda^{IV}\,\gamma^{o}_{(1)}\,\partial_{o}\,\psi^{V}(\sigma_{\perp}) +$$

$$+\frac{1}{m}\,\Lambda^{II}\,\Lambda^{IV}\,\gamma^{o}_{(1)}\,\Delta\,\psi^{V}(\sigma_{\perp}) \tag{A8-2.15}$$

de donde

$$\boxed{\Lambda^{II}\Lambda^{III}(m^2 - \Delta - \vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\partial_{o})\,\psi^{V}(\sigma_{\perp}) = 0\;.} \tag{A8-2.16}$$

(A8-2.8) y (A8-2.16) prueban la tesis de (b).

c) DEMOSTRAREMOS QUE

$$\left\{\begin{matrix}(A8\text{-}2.8)\\(A8\text{-}2.16)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow H_{(1)}\,\psi(\sigma_{\perp}) = H_{(2)}\,\psi(\sigma_{\perp}). \tag{A8-2.17}$$

En efecto, definimos

$$\chi = (H_{(1)} - H_{(2)})\,\psi(\sigma_{\perp}) =$$

$$= -i(\vec{\alpha}_{(1)} - \vec{\alpha}_{(2)})\cdot\nabla\,\psi(\sigma_{\perp}) + m(\gamma^{o}_{(1)} - \gamma^{o}_{(2)})\,\psi(\sigma_{\perp}). \tag{A8-2.18}$$

Bastará probar $\chi = 0$.

Descomponemos en (A8-2.18) Ψ en sus partes V y VI y luego cada una de estas en

I III, I IV, II III y II IV;

usando (A8-2.8), (A8-2.2) y (8.18) obtenemos

$$\frac{1}{2}\chi = -i\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\Lambda^{II}\Lambda^{I}\psi^{V}(\sigma_\perp) + m\,\gamma^{o}_{(1)}\,\Lambda^{II}\,\Lambda^{III}\,\psi^{V} -$$

$$-i\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\Lambda^{IV}(\Lambda^{I}+\Lambda^{II})\,\psi^{VI}(\sigma_\perp) + m\,\gamma^{o}_{(1)}\,\Lambda^{II}\,(\Lambda^{III}+\Lambda^{II})\,\psi^{VI}\,(\sigma_\perp). \tag{A8-2.19}$$

Despues reemplazamos ψ^{VI} por su expresión (A8-2.1). Usando adecuadamente (A8-2.13), (8.18), (A8-2.2) y las hipótesis (A8-2.8) y (A8-2.16) se obtiene mediante cálculos algo engorrosos pero similares a los anteriores,

$$\frac{1}{2}\chi = -i\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\Lambda^{IV}\Lambda^{I}\psi^{V}(\sigma_\perp) + m\,\gamma^{o}_{(1)}\,\Lambda^{II}\,\Lambda^{III}\,\psi^{V}(\sigma_\perp) +$$

$$+\frac{1}{m}\,\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\Lambda^{IV}\,\gamma^{o}_{(1)}\,\partial_o\,\Lambda^{I}\psi^{V}(\sigma_\perp) + \frac{1}{2m}\left(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\right)\Lambda^{IV}\left(\vec{\gamma}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\right)\psi^{V}(\sigma_\perp) +$$

$$+\frac{1}{2m}\left(\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\right)\,\Lambda^{IV}\left(\vec{\gamma}_{(2)}\cdot\vec{\nabla}\right)\,\psi^{V}(\sigma_\perp) + \frac{1}{2}\,\Lambda^{II}\,\vec{\gamma}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\psi^{V}(\sigma_\perp) +$$

$$+\frac{1}{2}\,\gamma^{o}_{(1)}\,\Lambda^{II}\,\vec{\gamma}_{(2)}\cdot\vec{\nabla}\,\psi^{V}(\sigma_\perp) =$$

$$= -i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\Lambda^{IV}\Lambda^{I}\psi^{V}(\sigma_\perp) + m\,\gamma^{o}_{(1)}\,\Lambda^{II}\Lambda^{III}\psi^{V}(\sigma_\perp) -$$

$$-\frac{1}{m}\,\gamma^{o}_{(1)}\,\Lambda^{III}\Lambda^{II}(m^2-\Delta)\,\psi^{V}(\sigma_\perp) - \frac{1}{m}\Delta\,\Lambda^{IV}\gamma^{o}_{(1)}\,\Lambda^{II}\,\psi^{V}\,(\sigma_\perp) +$$

$$+\,i\,\Lambda^{II}\,\vec{\alpha}_{(1)}\cdot\vec{\nabla}\,\Lambda^{IV}\,\psi^{V}(\sigma_\perp) =$$

$$= 0$$

con lo que queda probada la tesis (c).

(b) y (c) demuestran (8.23).

A8-3

DEMUESTRASE LA (8.122-b) +

Por (8.121), (8.122-a) y (2.2),

$$p^{(\frac{1}{2})\nu} = \frac{1}{2}\int d^3x \left[\psi^+ \gamma^o_{(2)}\, \partial^\nu \psi - (\partial\psi)^+ \gamma^o_{(2)}\psi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3x \left[(\psi, \partial^\nu\psi)_{sp} - (\partial^\nu\psi, \psi)_{sp}\right] . \qquad \text{(A8-3.1)}$$

a) $= 0$.

Por la ecuación de continuidad (8.103), deducimos

$$(\partial_o\psi, \psi) + (\psi, \partial_o \psi) = \partial_o(\psi,\psi) =$$

$$= \partial_o(\bar\psi\, \gamma^o_{(1)}\, \psi) =$$

$$= -\vec\nabla\cdot(\bar\psi\, \vec\gamma_{(1)}\, \psi)$$

y, por lo tanto las condiciones de contorno en el infinito espacial implican

$$\int d^3x\ (\partial_o\, \psi, \psi)_{sp} = -\int d^3x\ (\psi, \partial_o\, \psi)_{sp}. \qquad \text{(A8-3.2-a)}$$

b) $= a = 1, 2, 3$.

Por una trivial integración por partes,

$$\int d^3x\ (\partial_a\, \psi, \psi)_{sp} = -\int d^3x\ (\psi, \partial_a\, \psi) . \qquad \text{(A8-3.2-b)}$$

+ **Esta demostración es muy similar a una ya conocida para spin 1/2.**

c) Conclusión:

(De (A8-3.1) y (A8-3.2) obtenemos

$$P^{(\frac{1}{2})\nu} = i \int d^3x \, (\psi, \partial^\nu \psi)_{sp}$$

que es la (8.122-b). Q.E.D.

A8-4

DEMOSTRACIÓN DE (8.132).

De (8.122-b) y (8.92') con k = 2,

$$P^{(\frac{1}{2})\nu} = \int d^3x \left[\bar{\psi}^V \gamma^o_{(2)} \, i\partial^\nu \psi^{VI} + \bar{\psi}^{VI} \gamma^o_{(2)} \, i \, \partial^\nu \psi^V \right] =$$

$$= \frac{1}{m} \int d^3x \left[-\bar{\psi}^V \partial^\nu \partial_o \psi^V - \bar{\psi}^V \vec{\alpha}_{(2)} \partial^\nu \cdot \vec{\nabla} \psi^V + \right.$$

$$\left. + (\partial_o \bar{\psi}^V) \, \partial^V \psi^V + (\vec{\nabla} \bar{\psi}^V) \cdot (-\vec{\alpha}_{(2)}) \, \partial^V \psi^V \right].$$

El 2° término cancela al 4° mediante una integración por partes:

$$P^{(\frac{1}{2})\nu} = \frac{1}{m} \int d^3x \left[-\bar{\psi}^V \partial^\nu \partial_o \psi^V + (\partial_o \bar{\psi}^V) \, \partial^\nu \psi^V \right] . \qquad (A8\text{-}4.1)$$

Con la ecuación de Klein-Gordon cumplida por ψ^V (A8-4.1)

$$P^{(\frac{1}{2})o} = \frac{1}{m} \int d^3x \left[m^2 \bar{\psi}^V \psi^V - \bar{\psi}^V \Delta \psi^V + (\partial_o \bar{\psi}^V) \, (\partial^o \psi^V) \right. . \qquad (A8\text{-}4.2)$$

Basta reemplazar $\bar{\psi}^V \Delta \psi^V$ por $\bar{\psi}^V \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi^V$ e integrar por partes para obtener $P^{(o)o}$ en la forma (8.130).

b) = a = 1, 2, 3.

Basta integrar por partes en el 1er. sumando de (A8-4.1) para obtener $P^{(\frac{1}{2})a}$ en la forma (8.131). Q.E.D.

A8-5

DEMOSTRACIÓN DE (8.160').

Por Secc. 2.f-4 (ecuación (2.64)), la parte ψ^I de una $\psi(0, \vec{x}) \in \mathcal{W}$ es arbitraria (salvo la convergencia de (ψ,ψ)); elegimos, pues

$$\psi^I = \begin{pmatrix} f(\vec{x}) & g(\vec{x}) & 0 & 0 \\ g(\vec{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A8-5.1}$$

con f y g reales, tales que

$$p^2 f = p^2 g = p^3 f = p^3 g = 0 \ . \tag{A8-5.2}$$

Las (A8-5.2) tomadas al pié de la letra implicarían (ψ,ψ) divergentes. Esto se puede envitar usando autodiferenciales, cosa que no haremos; pero omitiendo las integraciones respecto de dx^2 y dx^3 llegaremos al mismo resultado a que se arribaría usando autodiferenciales.

De (2.63),

$$\psi(0, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f & g & \frac{-i}{2m}\partial_1 g & \frac{-i}{2m}\partial_1 f \\ g & 0 & 0 & \frac{-i}{2m}\partial_1 g \\ \frac{-i}{2m}\partial_1 g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-i}{2m}\ {}_1 f & \frac{-i}{2m}\ {}_1 g & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A8-5.3}$$

de donde

$$\gamma^3_{(1)}\psi = \begin{pmatrix} \frac{-i}{2m}\partial_1 g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{2m}\partial_1 f & \frac{i}{2m}\partial_1 g & 0 & 0 \\ -f & -g & \frac{i}{2m}\partial_1 g & \frac{i}{2m}\partial_1 f \\ g & 0 & 0 & \frac{-i}{2m}\partial_1 g \end{pmatrix} \tag{A8-5.4}$$

Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx^1\, \psi^+ \gamma^3_{(1)}\psi = \int \psi^+_{i_2 i_1}\left(\gamma^3_{(1)}\,\psi\right)_{i_1 i_2} dx' =$$

$$= \int \psi^*_{i_1 i_2}\left(\gamma^3_{(1)}\,\psi\right)_{i_1 i_2} dx' =$$

$$= \frac{i}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\left[-f\partial_1 g + (\partial_1 f)g\right] dx^1 .$$

Reemplazando en (8.159) e integrando por partes obtenemos

$$\mathcal{J}^{(\frac{1}{2})03}_{spin}\Big|_{t=0} = \frac{2}{m}\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_1 f)\, g\, dx^1 . \tag{A8-5.5}$$

Eligiendo f y g tales que

$$sg(\ _1 f) = sg(g)$$

se obtiene un integrando definido positivo, de donde <u>al menos para esta ψ</u>, y al menos en $t=0$ es

$$\mathcal{J}^{(\frac{1}{2})03} \neq 0 \tag{A8-5.6}$$

+ En la representación (2.6) de las γ^μ.

lo que basta para probar (8.160').

A8-6

DEMOSTRACIÓN DE (8.173) Y (8.174).

Elegimos como $\psi(0, x) \in \mathcal{W}$ la dada por (A8-5.3) con g = 0

$$\psi(0, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \frac{-i}{2m}\partial_1 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-i}{2m}\partial_1 f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(A8-6.1)}$$

donde $f(\vec{x})$ es real y cumple (A8-5.2).

Entonces,

$$\sigma^3_{(2)}\psi = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \frac{+i}{2m}\partial_1 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-i}{2m}\partial_1 f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad \text{(A8-6.2)}$$

$$\left(\frac{\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}}{2}\right)\psi = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad \text{(A8-6.3)}$$

$$\gamma^{o}_{(2)}\,\sigma^{3}_{(2)}\psi = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & \frac{-i}{2m}\partial_1 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-i\partial_1 f}{2m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(A8-6.4)}$$

$$\gamma^{o}_{(2)}\,\frac{\sigma^{3}_{(1)}+\sigma^{3}_{(2)}}{2}\psi = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(A8-6.5)}$$

$$\therefore\ (\psi,\ \sigma^{3}_{(2)}\psi)_{sp} = \psi^{+}\gamma^{o}_{(2)}\sigma^{3}_{(2)}\psi = |f|^2 + \frac{1}{2m^2}\,|\partial_1\ f|^2 \qquad \text{(A8-6.6)}$$

y

$$\left(\psi,\ \left[\frac{\sigma^{3}_{(1)}+\sigma^{3}_{(2)}}{2}\right]\psi\right)_{sp} = |f|^2\ . \qquad \text{(A8-6.7)}$$

Integrando, y reemplazando (A8-6.6) en (8.169) y (A8-6.7) en (8.155) resulta que para la ψ usada es

$$\mathcal{J}^{(o)3}_{spin}\Big|_{t=0} - \mathcal{J}^{(\frac{1}{2})3}_{spin}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2m^2}\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_1 f|^2\, dx^1 > 0 \qquad \text{(A8-6.8)}$$

con lo que queda probada (8.174), y que

$$\mathcal{J}^{(o)3}_{spin}\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(|f|^2 + \frac{1}{2m^2}\,|\ _1\ f|^2\right) dx^1 > 0 \qquad \text{(A8-6.9)}$$

con lo que queda probada la (8.173). Q.E.D.

A8-7

DEMOSTRACIÓN DE (8.177)

Como en la teoría de una carga (Secc. 3.g), se cumple que

$$(8.155) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\, \mathcal{S}^{(\frac{1}{2})3}_{spin} = i\left(\psi, \left[H_{(1)}, \frac{\sigma^3_{(1)} + \sigma^3_{(2)}}{2}\right]\psi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\psi, \left\{\partial_2\, \alpha^1 - \partial_1\, \alpha^2\right\}_{(1)}\psi\right) = \qquad (A8\text{-}7.1)$$

$$y\ (8.169) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\, \mathcal{S}^{(e)3}_{spin} = i\left(\psi, \left[H_{(1)}, \sigma^3_{(2)}\right]\psi\right) =$$

$$= 0\ ; \qquad (A8\text{-}7.2)$$

Sea ψ tal que

$$p^2\psi = p^3\psi = 0\ . \qquad (A8\text{-}7.3)$$

(Vale análoga observación sobre convergencia a la hecha sobre (A8-5.2)).

Si esta ψ cumple además que (al menos) para $t = 0$ sea

$$(\psi,\ p^1\alpha^2_{(1)}\psi) = (\psi,\ -i\,\partial_1\alpha^2_{(1)}\,\psi) \neq 0 \qquad (A8\text{-}7.4)$$

entonces será

$$\frac{d}{dt}\, \mathcal{S}^{(\frac{1}{2})3}_{spin} \neq 0 \qquad (A8\text{-}7.5)$$

y quedará probada la (8.177).

Tal ψ existe; construimos (en la representación (2.6) de las γ^{μ}) su parte ψ^{I} (arbitraria):

$$\psi^{I} = \begin{pmatrix} f(\vec{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & if(\vec{x}) \end{pmatrix} \qquad \text{(A8-7.6)}$$

Usando (2.63) construímos $\Psi(0, \vec{x}) \in \mathcal{W}$:

$$\Psi(0, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & -(1+i)f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1+i)f & 0 & 0 & if \end{pmatrix} \qquad \text{(A8-7.7)}$$

Entonces,

$$\gamma^{o}_{(2)}\left(-i\partial_1 \alpha^{2}_{(1)}\right)\Psi =$$

$$= \begin{pmatrix} (1+i)(\partial_1)^2 f & 0 & 0 & i\partial_1 f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 f & 0 & 0 & (1+i)(\partial_1)^2 f \end{pmatrix} \qquad \text{(A8-7.8)}$$

de donde

$$\left(\Psi,\ p^1 \alpha^2_{(1)} \Psi\right) = \int \Psi^{+}(-i\partial_1 \alpha^2_{(1)})\Psi\, dx^1 =$$

$$= \int dx^1 \left\{ \left[f^*(\partial_1)^2 f - 2(\partial_1 f^*)(\partial_1 f) + f^*(\partial_1)^2 f \right. \right.$$

Mediante integraciones por partes,

$$(\Psi,\ p^1 \alpha^2_{(1)}\Psi) = -4 \int |\partial_1 f|^2\, dx^1 \leqslant 0 \qquad \text{(A8-7.9)}$$

lo que prueba (A8-7.4), o sea la (8.177).

A10-1

LOS CALCULOS DE BELINFANTE QUE PRUEBAN "(10.2) $\Longrightarrow$ (10.3-a) y (b)" (SECC. 10-b).

Premultiplicamos (10.2) por $\pi_\nu(\gamma^\nu_{(1)} - \gamma^\nu_{(2)})$:

$$\pi_\nu \ \pi_\mu\left(\gamma^0_{(1)} - \gamma^0_{(2)}\right)\left(\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)}\right)\psi = 2m \ \pi \ (\gamma^\nu_{(1)} - \gamma^\nu_{(2)})\psi . \tag{A10-1.1}$$

En el primer miembro intercambio $\mu \longleftrightarrow \nu$ y sumo la nueva ecuación con la primitiva (A10-1.1). Después tengo en cuenta que

$$\left[\pi_\mu \, , \, \pi_\nu\right] = i \ e \ F_{\mu\nu} . \tag{A10-1.2}$$

El resultado es

$$\pi_\nu \ \pi_\mu \left\{\left(\gamma^\nu_{(1)} - \gamma^\nu_{(2)}\right)\left(\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)}\right) + \left(\gamma^\mu_{(1)} - \gamma^\mu_{(2)}\right)\left(\gamma^\nu_{(1)} + \gamma^\nu_{(2)}\right) + \right.$$

$$\left. + \ ieF_{\nu\mu}\left(\gamma^\mu_{(1)} - \gamma^\mu_{(2)}\right)\left(\gamma^\nu_{(1)} + \gamma^\nu_{(2)}\right)\right\}\psi = 4m \ \pi_\nu\left(\gamma^\nu_{(1)} - \gamma^\nu_{(2)}\right)\psi . \tag{A10-1.3}$$

de donde

$$\pi_\mu \left(\gamma^\mu_{(1)} - \gamma^\mu_{(2)}\right)\psi = - \frac{ie}{4m} F_{\mu\nu}\left(\gamma^\mu_{(1)} - \gamma^\mu_{(2)}\right)\left(\gamma^\nu_{(1)} + \gamma^\nu_{(2)}\right)\psi . \tag{A10-1.4}$$

Semisumando esta última con la (A10-1.1) obtenemos la (10.3-a) y semirestando, la (10.3-b).

Q.E.D.

AGRADECIMIENTOS

Deseo dejar constancia de mi reconocimiento a las siguientes personas y entidades:

- Al Dr. José Leite Lopes, que sugirió el tema y apadrinó la tesis, por sus enseñanzas, su dirección, y por el trato hondamente humano que otorgó a quien fue en busca de su guía.
- Al Dr. C. G. Bollini, que tuvo a su cargo la dirección local (en Bs. As.) de la tesis desde mi retorno a la Argentina, por sus apreciadas observaciones y por el tiempo que cordialmente dedicó a esa tarea.
- A los Dres. J. J. Giambiagi, C. G. Bollini y S. Schiminovich por su participación y discusión en un seminario interno de la F.C.E.N. en el cual expuse una parte de este trabajo.
- Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por una beca gracias a la cual fuí enviado al C.B.P.F., donde inicié esta tesis.

- Al Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires y al Instituto de Matemática, Astronomia y Física de la Universidad Nacional de Córdoba por la hospitalidad sucesivamente otorgada.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1) V. Bargmann and E. P. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci., 34, 221 (1948).
2) J. F. Belinfante, Physica, 6, 849 (1939).
3) J. F. Belinfante, Physica, 6, 870 (1939).
4) J. F. Belinfante, Physica, 6, 887 (1939).
5) N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, Introduction to the theory of quantized fields, Interscience Phublishers Inc. (1959).
6) C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Nuovo Cimento, 21, 107 (1961).
7) F. Booth and A. H. Wilson, Proc. of the Royal Soc. (London) A 175, 483 (1940).
8) K. M. Case, Phys. Rev. 95, 1323 (1954).
9) L. de Broglie, Theorie Genérale des Particles a Spin (Methode de fusion), Gauthier-Villars (1943).
10) H. Feshbach and F. Villars, Rev. of Mod. Phys., 30, 24 (1958).
11) L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. 78, 29 (1950).
12) J. J. Giambiagi and J. Tiomno, Notas de Física (C.B.P.F.) 14, 1 (1954).
13) J. J. Giambiagi, Nuovo Cimento 16, 202 (1960).
14) W. Heitler, Proc. Roy. Irish Acad., 49, 1 (1943).
15) N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. A 173, 91 (1939).
16) J. Leite Lopes, Inversion Operations in Quantum Field Theory, Univ. de Bs. As., F.C.E.N., Contribuciones Científicas, Serie Física, 1, 147 (1960).
17) J. Leite Lopes, Lectures on Relativistic Wave Equations, Monografias de Física, 9 (1961), C.B.P.F.
18) A. Messiah, Mécanique Quantique, Tomo 2, Secc. XX-5, Dunod (1960).
19) N. Shôno and N. Oda, Progress of Theor. Phys. 4, 358 (1949).
20) W. Pauli, Ann. Inst. Henri Poincaré, 6, 109 (1936).
21) W. Pauli, Rev. of the Mod. Phys., 13, 203 (1941).
22) W. Pauli, Rev. of the Mod. Phys., 15, 175 (1943).
23) A. L. Proca, J. Phys. et Radium, 7, 347 (1936).
24) A. L. Proca, J. Phys. et Radium, 9, 61 (1938).
25) Sakata and Taketani, Proc. Phys. Mat. Soc. (Japan) 22, 757 (1940).
26) Sakata and Taketani, Scient. Papers of the Inst. of Phys. and Chem. Research, Tokyo, 38, 1 (1940). Ver la exposicion de Heitler [14].
27) S. Tani, Soryuschiron Kenkyu, 1, 15 (1949).
28) S. Tani, Progress of Theor. Phys., 6, 267 (1951).
29) W. E. Thirring, Principles of Quantum Electrodynamics, Academic Press (1958).
30) G. Wentzel, Quantum Theory of Fields, Interscience Publisers Inc. (1949).