

Rui Alberto Mira dos Santos Nazareth

TRATAMENTO DA DINÂMICA DA FISSÃO E FUSÃO EM DUAS DIMENSÕES

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

-1977-

AGRADECIMENTOS

Na elaboração deste trabalho foram valiosos o incentivo e a colaboração de algumas pessoas e Instituições, a quem testemunho meu reconhecimento:

- Ao Professor Takeshi Kodama, pela eficiente orientação e apoio ao longo da realização deste trabalho.

- Ao Professor Jaymes Rayford Nix, do Laboratório de Los Álamos, pela prestimosa colaboração na discussão de parte deste trabalho, quando de sua estada no Brasil.

- À Professora Solange May Cuyabano de Barros, pelas facilidades a mim concedidas para a elaboração deste trabalho.

- Ao Professor Carlos Marcio do Amaral, pelos valiosos conhecimentos adquiridos durante as constantes discussões.

- Ao Professor Helio Schechter, pela atenção dispensada à forma de apresentação deste trabalho.

- Aos demais colegas do IF-UFRJ e CBPF, pelo incentivo recebido.

- À Helena de Souza Ciccarino, pela excelente apresentação do trabalho datilográfico.

- Ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro e à FINEP, pelo apoio financeiro.

- Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, pela formação científica adquirida.

- Aos centros de computação do IF-UFRJ e do CBPF pelas facilidades proporcionadas aos cálculos deste trabalho.

R E S U M O

É estudado o problema da penetrabilidade de barreiras em duas dimensões para os fenômenos de fissão e fusão nucleares.

São deduzidas as equações das trajetórias estáticas (potencial mínimo) de fissão no formalismo de Hofmann e constatada a influência significativa que os parâmetros de inércia exercem sobre as propriedades das mesmas e por consequência na penetrabilidade. É discutida a dificuldade na determinação dessas trajetórias.

Para o caso da fusão é proposto um potencial com as características de uma dupla barreira de potencial realístico que permite realizar cálculos exatos da penetrabilidade considerando o movimento transversal ao de fusão e um cálculo unidimensional na aproximação clássica através da escolha da trajetória que torna máxima a penetrabilidade. A inclusão da energia cinética na direção perpendicular à direção de separação contribui para um acréscimo da penetrabilidade especialmente nas regiões de energias bem inferiores ao máximo da barreira de interação. Isso explica em parte as anomalias existentes entre os resultados teóricos e experimentais (supostas as barreiras unidimensionais) para as larguras das barreiras de certos sistemas de fusão.

A penetrabilidade exata é comparada à do cálculo na aproximação clássica tradicional onde se leva em conta a possibilidade do aparecimento de descontinuidade na barreira ao longo do caminho de fusão.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	viii
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO I</u> - REVISÃO TEÓRICA	5
1.1 - Barreiras de Fissão e Fusão	6
1.2 - Vales de Fissão e Fusão	13
1.3 - Propriedades do Ponto de Sela	17
1.4 - Efeitos da Partícula Independente	22
1.5 - Quantização da Hamiltoniana para a Teoria de Fissão.	24
<u>CAPÍTULO II</u> - INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE INÉRCIA NO CÁLCULO DA TRAJETÓRIA DE FISSÃO. PENETRABILIDADE	27
2.1 - Trajetórias	27
2.2 - Penetrabilidade	40
<u>CAPÍTULO III</u> - PENETRABILIDADE PARA UMA DUPLA BARREIRA DE FUSÃO....	43
3.1 - Cálculo Exato	43
3.1.1 - Hamiltoniana para o Processo	43
3.1.2 - Resolução da Equação de Schrödinger. Cálculo da Penetrabilidade	48
3.1.3 - Cálculo das Constantes do Problema. Resulta- dos das Penetrabilidades para os Sistemas : ${}^4_8\text{Vn} + {}^4_8\text{Vn} \rightarrow {}^96_46\text{Pd} ; {}^4_0\text{Ar} + {}^4_0\text{Ar} \rightarrow$ $\rightarrow {}^{23}_{80}\text{Kr} ; {}^{23}_{86}\text{Kr} + {}^{46}_{86}\text{Kr} \rightarrow {}^{18}_{72}\text{Hf} \text{ e } {}^{180}_{100}\text{Mo} +$ ${}^{100}_{36}\text{Mo} \rightarrow {}^{200}_{36}\text{Po} \dots\dots\dots$	56

	<u>Pág.</u>
3.2 - Cálculo da Trajetória de Ação Estacionária	66
<u>CAPÍTULO IV</u> - DISCUSSÃO E CONCLUSÃO DO TRABALHO	79
<u>APÊNDICE A</u> - CÁLCULO DOS COEFICIENTES C_{mn}	87
<u>APÊNDICE B</u> - CÁLCULO DO WRONSKIANO	91
<u>APÊNDICE C</u> - CÁLCULO WKB DA PROBABILIDADE DE TRANSMISSÃO PARA UMA BARREIRA COM DESCONTINUIDADE	94
<u>REFERÊNCIAS</u>	102

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
1.1.1	10
1.1.2	11
1.2.1	13
1.2.2	14
1.2.3	16
1.2.4	16
2.1.1	31
2.1.2	35
2.1.3	36
2.1.4	39
3.1.1.1	45
3.1.1.2	46
3.1.3.1	61
3.1.3.2	64
3.1.3.3	65
3.1.3.4	67
3.1.3.5	68
3.1.3.6	69
3.1.3.7	70
3.1.3.8	71
3.1.3.9	72
3.1.3.10	73
3.2.1	76
3.2.2	76

LISTA DE TABELAS

<u>Tab.</u>	<u>Pág.</u>
3.1.3.1	58

INTRODUÇÃO

Os fenômenos de fissão e fusão caracterizam-se basicamente como resultados de uma dinâmica coletiva dos núcleos. Os modelos e métodos usados no estudo desses processos invariavelmente se apoiam em duas aproximações importantes para o comportamento dinâmico de tais sistemas: a "aproximação adiabática" e a "aproximação clássica".

A primeira resume-se na hipótese de que ao longo do movimento coletivo o estado interno permanece sempre no seu estado fundamental. Isso quer dizer que a energia transferida do estado coletivo para o estado interno do núcleo é insuficiente para excitar este último durante o processo de deformação. Mesmo no caso da existência de excitações internas, se os tempos de transição correspondentes forem suficientemente pequenos o processo pode ser tratado na mesma aproximação incluindo efeitos macroscópicos de viscosidade. O conceito de potencial adiabático usado no método macro-microscópico de Strutinsky obteve sucesso em prever os estados isoméricos, verificados pela experiência.

A segunda aproximação consiste na hipótese de que, dado um sistema como uma certa densidade de probabilidade no instante inicial t_0 ela se desloca segundo as leis clássicas de movimento. Baseia-se essa hipótese no fato de o comprimento de onda de Broglie do movimento de deformação do núcleo ser usualmente muito menor que distâncias nas quais a energia potencial varia de uma quantidade apreciável. O movimento de deformação é

considerado como resultante de uma superposição de oscilações harmônicas simples de frequências diferentes, correspondentes às várias distorções esférico-harmônicas. A aproximação clássica é, por conseguinte, uma boa aproximação para deformações grandes do núcleo e em particular para deformações críticas no ponto de sela.

O capítulo I é uma introdução teórica a temas ligados ao nosso trabalho.

Um dos problemas mais importantes referente às teorias dinâmicas da fissão e fusão, é o do cálculo da "penetrabilidade". A penetrabilidade é a medida da probabilidade da realização do processo através da penetração da barreira por efeito túnel.

As maneiras mais convencionais de calcular a penetrabilidade para o processo espontâneo de fissão resumem-se, essencialmente, em aplicar a aproximação clássica WKB, reduzindo o problema à penetração da barreira em uma dimensão (a energia potencial é minimizada com respeito às coordenadas outras que a de fissão)⁽¹⁾. Outros métodos consistem em definir uma trajetória no espaço dos parâmetros de deformação de tal modo que, a penetrabilidade calculada ao longo do caminho seja máxima⁽²⁾. A penetrabilidade para esses casos não leva em conta a energia cinética dos outros graus de liberdade.

Alguns trabalhos introduziram de alguma maneira os efeitos de duas dimensões na dinâmica da fissão⁽¹⁻⁶⁾. Num deles, Hofmann⁽³⁾ propõe um método quântico dinâmico para calcular as transições de estados pertencentes a graus de liberdade perpendiculares ao caminho de fissão, aplicando o formalismo da teo -

ria do espalhamento usando a aproximação de Born. Esse é um método bastante interessante e, sem dúvida, o primeiro verdadeiro tratamento quântico para a dinâmica da fissão. Na aplicação desse método é fundamental a determinação prévia do caminho de fissão e, por conseguinte, sua validade está intimamente ligada à maior ou menor realidade física apresentada por essa trajetória.

No capítulo II, propomo-nos então estudar os efeitos multidimensionais através da influência dos parâmetros inerciais sobre a trajetória de fissão. Essa trajetória é definida no espaço dos parâmetros coletivos a partir das hipóteses do formalismo de Hofmann. São discutidas as propriedades das trajetórias para o caso do potencial de gota líquida de Brack e outros (2). É apresentado também um exemplo de potencial para o qual, dependendo dos parâmetros de inércia, a trajetória não é adequada nesse formalismo. Para potenciais mais complexos como, por exemplo, potenciais de fissão com mais que um ponto de sela, ou potenciais de fusão com duas barreiras (fissão e interação), a resolução da equação diferencial que define a trajetória torna-se bastante difícil, o que por si só torna o método inadequado para esses casos. Além disso, para o problema da fusão é particularmente importante o cálculo da penetrabilidade para energias incidentes próximas ao valor máxima da barreira, onde a aproximação WKB deixa de ser conveniente. Decidimos empregar outro tratamento que permitisse introduzir de alguma forma o efeito do movimento transversal ao movimento relacionado à coordenada de separação e pudesse ser aplicado ao problema da penetração de uma barreira dupla de fusão.

No capítulo III, apresentamos esse tratamento que consiste em propor um potencial em duas dimensões que simula as principais características de uma barreira de fusão realística com dois vales desalinhados separados por uma encosta. Consideram-se os íons oscilando harmonicamente numa direção perpendicular à coordenada de separação durante o processo de colisão. Esse potencial permite o cálculo exato da penetrabilidade para todas as energias incidentes. A idéia é de que a inclusão do movimento transverso explique certas discrepâncias existentes entre os resultados experimentais e os calculados (com potenciais unidimensionais) para as larguras das barreiras. Para o sistema $^{37}\text{Cl} + ^{56,58,60}\text{Ni}$, por exemplo, as larguras experimentais são mais estreitas ($\hbar\omega_x \sim 5$ a 8 MeV) que as calculadas ($\hbar\omega_x \sim 3$ MeV)⁽⁸⁾. O modelo proposto não leva em conta quaisquer variações da inércia durante o processo. Os cálculos são aplicados a núcleos de colisão diferentes.

Para comparar os resultados com os do problema a uma dimensão é calculada a penetrabilidade para uma trajetória no espaço dos parâmetros de deformação do mesmo potencial, por um método equivalente ao da trajetória de mínima ação⁽²⁾. Levamos em consideração a possibilidade do aparecimento de descontinuidades na região sob a barreira.

O capítulo IV constitui-se na discussão e conclusão do trabalho.

CAPÍTULO I

REVISÃO TEÓRICA

A fissão e fusão nucleares constituem um capítulo particular importante na teoria dos processos nucleares. Esses fenômenos evidenciam basicamente o comportamento coletivo dos sistemas nucleares.

Nos estudos realizados até o momento, certos conceitos marcantes da teoria alcançaram bastante sucesso como, por exemplo, os de: deformação, energia potencial de superfície (que definem barreiras e vales), trajetórias de fissão e fusão, viscosidade, etc. No entanto, a definição de cada uma dessas expressões depende essencialmente dos tipos de sistemas e modelos escolhidos e as discrepâncias e inconsistências dos resultados mostram um conhecimento incompleto das dinâmicas dos processos a que se referem.

Temos como intuito neste capítulo, fazer uma apresentação qualitativa breve de conhecimentos que consideramos de interesse à compreensão do nosso trabalho. Será dada ênfase aos aspectos nucleares macroscópicos aos quais se credita importância principal na fenomenologia dos processos de fissão e fusão. Em outras palavras, a visualização desses fenômenos é válida em termos da mecânica clássica e os aspectos clássicos são referidos como aspectos macroscópicos. Os aspectos microscópicos serão abordados de maneira complementar quando sua influência for considerada importante.

1.1 - Barreiras de Fissão e Fusão

No problema da fissão ou fusão assumimos de maneira constante como a parte predominante da Hamiltoniana, aquela descrita em termos de alguns parâmetros geométricos que definem a deformação nuclear. Referimo-nos a essa parte sempre que tratamos do movimento nuclear coletivo. A Hamiltoniana coletiva é constituída de uma energia cinética e uma energia potencial. Essas energias são determinadas normalmente dentro de certas hipóteses (adiabaticidade por exemplo) e sua principal contribuição provém das propriedades macroscópicas dos núcleos. O primeiro passo, sem dúvida, é a determinação da energia potencial sem a qual é impossível estabelecer o movimento realista dos núcleos no espaço dos parâmetros em que é determinada.

O comportamento em energia do potencial de superfície para deformações arbitrárias dos contornos nucleares é descrito em termos das chamadas barreiras de fissão ou fusão. Essas barreiras em geral apresentam valores máximos que correspondem às deformações críticas de equilíbrio instável para os processos. As energias dessas barreiras são determinadas pela diferença de energias correspondentes às duas formas estacionárias dos estados fundamental e limiar de estabilidade. A altura e largura das barreiras de fissão e fusão são quantidades importantes nas discussões e comparações entre os resultados teóricos e experimentais.

O cálculo das energias potenciais de superfície para contornos deformados dos núcleos, depende de maneira fundamental, da escolha prévia dos parâmetros que especificam as deformações. O campo de forças a que o sistema fica sujeito duran

te o processo de deformação é definido no espaço desses parâmetros coletivos e tem importância principal no estudo da dinâmica dos processos de fissão e fusão.

A escolha das coordenadas em termos das quais é descrita a deformação do núcleo é bastante arbitrária. A condição essencial é que a parametrização usada seja capaz de descrever a sequência de formas que, para o caso da fissão, vai desde a configuração inicial do núcleo até à sua divisão completa. Para o caso da fusão, vai desde a configuração dos núcleos separados no infinito até ao núcleo composto final.

As principais coordenadas usadas são:

- a) - coordenada de fissão (separação);
- b) - coordenada de alongação (estreitamento);
- c) - coordenada de assimetria.

Para deformações pequenas em relação à forma esférica, essas coordenadas são identificadas como os coeficientes $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_3$ da expansão da forma nuclear em harmônicos esféricos (1,9,10).

$$R(\theta, \phi) = \frac{R_0}{\lambda} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nm} Y_{nm}(\theta, \phi) \right] \quad (1.1.1)$$

Para formas bastante deformadas (região de pré-cisão ou pré-contato), essa expansão não é conveniente devido ao grande número de termos que seria necessário levar em conta. Por esse motivo são usadas parametrizações mais convenientes (11), onde a deformação é definida pelas três coordenadas descritas acima, da seguinte maneira: a coordenada de fissão determina a separação entre os centros de massa dos fragmentos em formação

ou a aproximação dos mesmos para o caso de colisão de íons pesados; a coordenada de alongação dá a medida de como esferoides se alongam ou estreitam de uma mesma quantidade; a coordenada de assimetria define quanto maior é a massa (volume) de um dos fragmentos em relação ao outro.

Essas são as coordenadas principais para deformações axialmente simétricas que dão origem à divisão do núcleo em apenas dois fragmentos. Se se quiser levar em conta os desvios da simetria axial e a divisão em três ou mais fragmentos, será necessário introduzir coordenadas adicionais àquelas.

Por simplicidade de cálculo, muitos dos trabalhos realizados na determinação das energias de potencial de deformação foram feitos usando apenas duas dessas coordenadas (7, 11-18).

Para o caso de deformações pequenas em torno da forma de equilíbrio esférica, a energia potencial é dada pela soma da energia de superfície E_S e da energia de Coulomb E_C . Para um núcleo deformado a sua energia potencial V relativamente à energia $V^{(0)}$ de sua forma esférica (desprezando correções microscópicas) é dada por:

$$\begin{aligned}
 V &= \left[E_S - E_S^{(0)} + E_C - E_C^{(0)} \right] \\
 &= \left[(B_S - 1) + 2\chi(B_C - 1) \right] E_S^{(0)}
 \end{aligned}
 \tag{1.1.2}$$

onde $B_S = E_S/E_S^{(0)}$, $B_C = E_C/E_C^{(0)}$ e $\chi = E_C^{(0)}/2E_S^{(0)}$.

As energias relativas B_C e B_S dependem apenas da forma da superfície nuclear. A dependência no número de prótons e neutrons aparece no parâmetro de fissionabilidade χ e na energia de superfície do núcleo esférico $E_S^{(0)}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{Z^2/A}{(2a_s/a_c)(1-kI^2)} \\ E_S^{(0)} = a_s (1-kI^2) A^{2/3} \end{array} \right. \quad (1.1.3)$$

onde a constante de assimetria de superfície k mede a diminuição da energia de superfície com o aumento do excesso de neutrons

$$I = (N-Z)/A \quad (1.1.4)$$

a_s e a_c são as constantes de superfície e de Coulomb, respectivamente, e a_s/a_c é determinado por ajuste conveniente das barreiras calculadas às experimentais, ou tiradas das fórmulas semi-empíricas de massa.

Para um sistema composto de dois fragmentos separados (1) e (2), a energia potencial é dada por,

$$V = \left[(B_S^{(1)} + B_S^{(2)} + B_{SI} - 1) + 2\chi(B_C^{(1)} + B_C^{(2)} + B_{CI} - 1) \right] E_S^{(0)} \quad (1.1.5)$$

onde B_{SI} e B_{CI} são as energias de interação de superfície e de Coulomb entre os dois fragmentos.

Até aqui tudo o mencionado se refere indistintamente, tanto ao processo de fissão quanto ao processo de fusão. A única diferença apresentada para os potenciais de superfície está simplesmente no fato de referirem-se a formas conectadas (um único núcleo deformado) e a formas não conectadas (dois núcleos separados). No entanto, dependendo do tipo de fenômeno que se quer estudar, alguns aspectos característicos importantes têm que ser

levados em conta. Tais aspectos são cruciais no sentido de que a partir deles a teoria dos dois processos toma caminhos bem diferentes.

Para o caso da fissão, o núcleo inicial é admitido de formar-se continuamente, mantendo sua densidade ρ constante, mesmo após a separação completa dos fragmentos. No caso da fusão isso pode não ser mais verdade. Na região pós contato onde os núcleos começam a superpor-se, a densidade certamente não é a mesma que a dos núcleos antes da colisão. Como aproximação razoável é possível admitir-se que ρ seja constante quanto a velocidade relativa dos núcleos é muito pequena (energias baixas de colisão).

Além disso, as configurações de deformação dos sistemas nos dois processos, para o mesmo valor da coordenada de separação, é bastante diferente, como é mostrado esquematicamente na fig. 1.1.1. Essa diferença resulta dos modos diferentes de

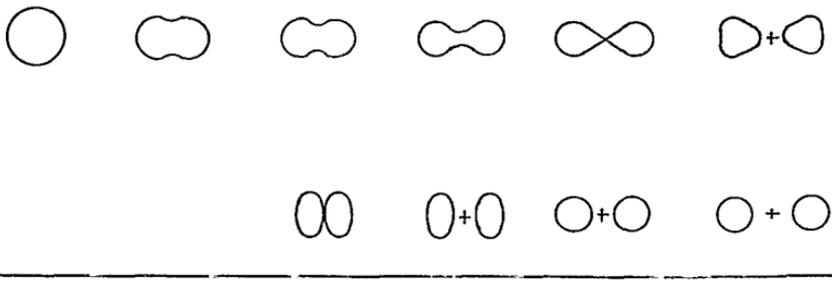


Fig. 1.1.1 - Configuração de deformação para os processos de fis são e fusão.

deformação para os dois casos. No primeiro as formas alongadas em torno do ponto de estrangulamento na região de cisão resultam da predominância das forças de repulsão eletrostática na dinâmica de separação. No segundo, a energia cinética de colisão é um termo dinâmico importante e na região pré-contato a ação das forças repulsivas tem como resultado a deformação levemente prolata dos núcleos.

Se for admitida a hipótese de densidade constante durante todo o processo de fusão, é possível ligar de maneira contínua a sequência de formas conectadas e não conectadas simplesmente considerando o preenchimento da região vazia entre as duas superfícies. Isso é feito por parametrização convenientes das deformações nucleares ⁽¹⁹⁻²⁰⁾ em que as formas são geradas considerando uma superfície quadrática de revolução ligando suavemente as superfícies dos núcleos colidores, que são mantidas esféricas com raio constante (fig. 1.1.2).

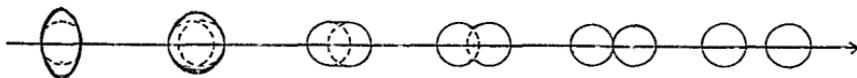


Fig. 1.1.2 - Formas geradas por ligação das superfícies externas dos núcleos por superfície quadrática de revolução.

A forma limite realizada dessa maneira é um esferoide levemente prolato e as formas à esquerda desse ponto são descritas por esferoides puros.

Um outro aspecto importante a ser levado em conta nas

situações de grandes deformações é que nesses casos a aproximação leptodérmica não serve mais. Isso decorre do fato de ser o parâmetro de curvatura da ordem de grandeza do alcance da própria força nuclear. Por esse motivo, alguns trabalhos foram realizados modificando o processo de cálculo da energia macroscópica de superfície (12,19).

Esse método consiste em trocar o termo de superfície $E_s = c_s A^{2/3} B_s$ na expressão leptodérmica de Bethe Weizsäcker por um termo de superfície equivalente da expressão para a energia,

$$E = \frac{V_0}{4\pi a^3} \int \int dr dr' \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}}}{\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{a}} \quad (1.1.6)$$

onde E é calculado analiticamente em termos de uma função de Yukawa. Nesse método aparece um termo adicional atrativo além do termo de repulsão Coulombiana que reproduz a interação nuclear entre os núcleos separados. Isso é consequência da inclusão da força nuclear que ultrapassa o limite do raio do núcleo de uma distância da ordem da interação nucleon-nucleon.

Para formas ligadas, no limite de $a \rightarrow 0$, E_s é normalizada à energia de superfície da gota líquida.

A energia de Coulomb é calculada da maneira usual por,

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{(ez)^2}{A^2} \int \int \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dr^3 dr'^3 \quad (1.1.7)$$

A barreira de interação na maior parte das vezes apre

senta um máximo que corresponde grosseiramente ao ponto de contato entre as superfícies externas dos núcleos e cresce sensivelmente para sistemas nucleares mais pesados devido ao fato de a repulsão Coulombiana aumentar mais rapidamente que a força nuclear atrativa. Para que esta última iguale ou suplante a primeira, é necessário então que as superfícies nucleares fiquem mais próximas do que no caso de núcleos leves.

1.2 - Vales de Fissão e Fusão

O contorno da energia de potencial de superfície, com relação às coordenadas de simetria α_2 e α_4 , é mostrado de maneira esquemática nas figs. 1.2.1 e 1.2.2. Pode observar-se a existência de dois vales desalinhados definidos em termos dos valores mínimos do potencial com relação a α_4 , para todo α_2 . Esses vales são denominados "vales de fissão e fusão". O primeiro, corresponde ao mínimo da energia de deformação para as formas contínuas do núcleo que vai fissionar, o segundo ao mínimo de ener

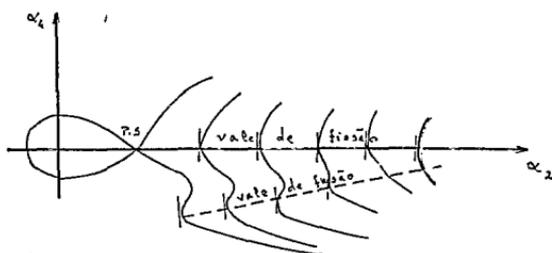


Fig.1.2.1 - Vales de fissão e fusão em termos das coordenadas α_2 e α_4

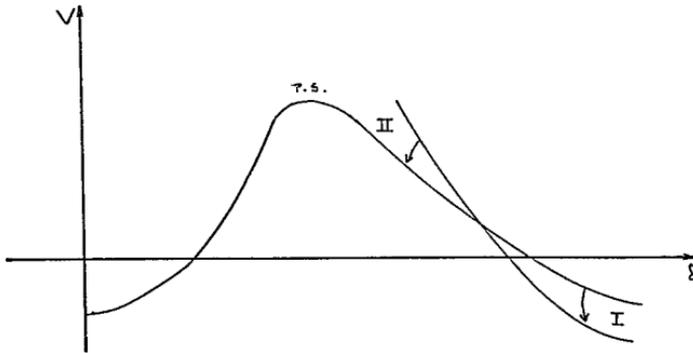


Fig. 1.2.2 -Região de transição para os vales de fissão e fusão.

gia de deformação para as formas separadas dos núcleos que vão se fundir.

As configurações de energia potencial mínima com relação a α_4 definem normalmente um modelo estático para a variação de energia com relação a α_2 . A sequência dos pontos de energia mínima no espaço desses parâmetros é tratada como uma espécie de "trajetória" para os processos. Essa é uma maneira aproximada de definir o caminho estático porque, na verdade, o congelamento do parâmetro α_2 restringe os mínimos de energia a valores que não correspondem aos valores de energia mais baixa da barreira. O modo correto de proceder é deixar livres os parâmetros α_2 e α_4 e encontrar um novo parâmetro $q = q(\alpha_2, \alpha_4)$ gerador do verdadeiro caminho estático. Para o caso particular de isotropia da inércia a direção da trajetória real corresponde ao gradiente do potencial como pode ser visto no capítulo II deste trabalho.

A fig. 1.2.2 mostra duas regiões importantes de tran-

sições entre os dois vales mencionados. Isso é decorrência da existência de pontos de queda brusca da energia de potencial quando da mudança da sequência contínua para a sequência desacomplada dos contornos das superfícies dos núcleos e vice-versa.

A região I corresponde à região em que o sistema de um núcleo muito deformado perde bruscamente o equilíbrio com relação à coordenada de alongação e divide-se em dois fragmentos. O ponto em que isso acontece é comumente chamado de ponto de cisão. A transição para separação dos fragmentos é realizada com um excesso de energia que pode ser dissipada pelos núcleos excitados, por meio de emissão de γ , neutrons ou prótons. Para distâncias grandes ($\alpha_2 \equiv \infty$) a energia do sistema é simplesmente de finida em termos das energias cinéticas dos fragmentos.

A região II corresponde à região em que o sistema dos dois núcleos de colisão perdem bruscamente o equilíbrio com relação ao aumento da excentricidade dos dois núcleos e se unem num único núcleo deformado. Essa transição do vale de fusão para o vale de fissão é feita com um excesso de energia que pode ou não ser suficiente para que o processo de fusão se complete. No caso em que a energia não é suficiente, o sistema se desexcitará retornando à configuração inicial dos núcleos separados por um processo análogo ao descrito no caso I. Esta região (II), certamente tem um interesse particular importante no estudo dos processos de fusão em que as energias cinéticas dos núcleos são consideradas pequenas no sentido de que a energia do sistema não é suficiente para ultrapassar a barreira de fusão correspondente.

Falamos de uma espécie de "trajetória" no espaço dos parâmetros para definir o caminho ao longo do potencial para o

processo de fissão. Trajetória é um conceito essencialmente clássico, e aqui ele é usado dentro do espírito da aproximação clássica que norteia as teorias dinâmicas dos processos em questão ($S/\hbar \gg 1$, onde S é a ação).

A definição da trajetória de fusão depende, fundamentalmente, da diferença de energia entre os máximos das barreiras de fusão e fissão e de suas posições relativas. Cálculos efetuados⁽¹⁹⁾ indicam aproximadamente o processo $^{110}\text{Pd} + ^{110}\text{Pd} \rightarrow ^{220}\text{U}$ como um caso limite de transição de pontos de sela perto para pontos de sela afastados do máximo da barreira de fusão. Para melhor entendimento, apresentamos um desenho esquemático nas figs. 1.2.3 e 1.2.4.

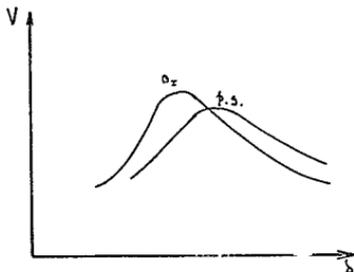


Fig.1.2.3 - Posições relativas das barreiras de fissão e interação para núcleos menos pesados que ^{110}Pd .

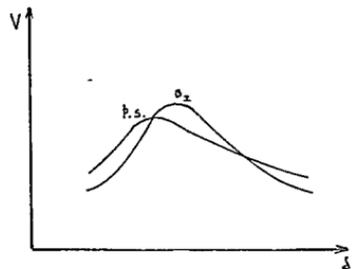


Fig.1.2.4 - Posições relativas das barreiras de fissão e interação para núcleos mais pesados que ^{110}Pd .

Para íons mais pesados que ^{110}Pd existe no vale de fusão uma região de instabilidade com relação a formas de energia potencial no vale de fissão. Por outro lado, para núcleos mais leves que ^{110}Pd as formas das superfícies nucleares são mais es

táveis com relação ao movimento na direção de fusão. As trajetórias refletem, sem dúvida, as circunstâncias em consideração e devem ser bastante diferentes dependendo da colisão que se estuda.

1.3 - Propriedades do Ponto de Sela

O ponto de sela da barreira de fissão é um ponto de equilíbrio instável para o processo da divisão do núcleo. Desse modo, as propriedades dinâmicas nessa região devem ser importantes para a determinação das probabilidades de penetração de barreira e conseqüentemente, as meias vidas de fissão. Conhecer essas propriedades é essencialmente conhecer as frequências das oscilações normais nesse ponto e as inércias correspondentes nas direções desses graus de liberdade. Para lembrar, o efeito de inércia pode tornar-se importante na decisão da trajetória estática de fissão (ver cap. II). Em particular, a frequência do grau de liberdade de fissão (separação) está associado diretamente à determinação do parâmetro de curvatura κ_{ω_f} da barreira, e por esse motivo, é um dos fatores principais de comparação com os resultados experimentais medidos das probabilidades de fissão. As frequências normais de oscilação no ponto de sela são obtidas da equação de autovalores,

$$\{ \det(k - \omega^2 m) = 0 \quad (1.3.1)$$

onde os elementos k_{mn} são obtidos da matriz elástica k obtido da derivada segunda do potencial no ponto de sela $V|_{ps}$ em relação às coordenadas coletivas α_m ,

$$k_{mn} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_m \partial \alpha_n} \right|_{ps} \quad (1.3.2)$$

e onde os elementos B_{mn} são obtidos do tensor inercial B do termo de energia cinética da Hamiltoniana clássica, na aproximação harmônica,

$$T_{ps} = \frac{1}{2} \sum_{mn} B_{mn} \dot{\alpha}_m \dot{\alpha}_n \quad (1.3.3)$$

Os elementos k_{mn} são obtidos facilmente pois a energia potencial do sistema relativa à energia potencial da esfera inicial (em unidades da energia de superfície dessa configuração inicial) é razoavelmente bem conhecida,

$$V \Big|_{ps} = (E_s - 1) + 2 (E_c - 1) \quad (1.3.4)$$

onde E_s e E_c são as energias de superfície e eletrostática, respectivamente e χ é o parâmetro de fissionabilidade que dá a medida de deformação do núcleo no ponto de sela.

Os elementos M_{mn} são mais difíceis de calcular. Enquanto que os k_{mn} são determinados univocamente conhecida a forma do contorno nuclear, o tensor inercial supõe o conhecimento adicional da natureza hidrodinâmica da matéria nuclear. As hipóteses mais simples sobre a natureza do fluido nuclear são as da incompressibilidade e irrotacionalidade. A irrotacionalidade do fluido implica na existência de um potencial de velocidades ϕ em termos do qual a velocidade do fluido numa dada posição $r(r, \theta)$ é dada $\vec{v}(\vec{r}, t) = \nabla \phi(\vec{r}, t)$. A incompressibilidade reduz a equação

da continuidade ao Laplaciano do potencial de velocidades $\nabla^2 \phi = 0$. A partir dessas propriedades a energia cinética correspondente a variações do contorno da superfície nuclear é dada simplesmente pela integral de volume

$$T = \frac{1}{2} \rho \int v^2 d\tau = \frac{1}{2} (3M/4\pi R_0^3) \int v^2 d\tau \quad (1.3.5)$$

onde ρ é a densidade nuclear constante. Este modelo simples tem dado informações relevantes para o esclarecimento de muitos aspectos da fissão nuclear ^(13,21-22) embora os resultados encontrados para as massas efetivas irrotacionais, para pequenas deformações em relação à forma esférica, sejam bastante dispares das inércias nucleares previstas pela experiência. Normalmente, são feitos ajustes semiempíricos entre elas, de modo a reproduzirem os resultados conhecidos para as meias vidas de fissão espontânea de núcleos actinídeos ⁽²³⁾. As inércias nucleares encontradas na região do ponto de sela são da ordem de 5 vezes maiores. Para deformações bem afastadas da forma esférica, digamos para formas na região de cisão, a massa efetiva na direção de fissão decresce a aproxima-se do valor de massa reduzida $\mu = M/4$. No entanto, para deformações pequenas da forma esférica ^(21,22), a massa efetiva B_{22} é muito maior que as demais (B_{33} , B_{34} ) e assume valores da ordem de $B_{22} \approx 3/10 M$.

As frequências principais definidas como $\omega_n^2 = \frac{k_{nn}}{B_{nn}}$ estão associadas aos primeiros modos normais significativos $n=2$, $n=3$ e $n=4$. ω_2 está relacionado diretamente ao parâmetro de curvatura $\hbar\omega_2$ da barreira de fissão (aproximadamente parabólica). É sempre uma quantidade imaginária refletindo a instabilidade

quanto ao movimento na direção de separação e ao seu maior ou menor valor absoluto corresponde uma barreira de largura mais ou menos fina. ω_3 está relacionado ao modo de assimetria de massa e toma valores imaginários ou reais, dependendo se o parâmetro de fissionabilidade χ é menor ou maior que um valor crítico de instabilidade na direção de assimetria — esse ponto é comumente chamado ponto de Businaro-Gallone⁽²¹⁾ χ_{BG} . ω_4 está relacionado ao modo de simetria na direção da elongação (estritamente). É sempre real e como ω_3 para $\chi > \chi_{BG}$ apresenta a frequência de oscilações para estados ligados do sistema perto do ponto de sela.

Os graus de liberdade correspondentes a estas frequências não são em geral levados em conta nos cálculos da penetrabilidade, supondo-se para tal, uma trajetória unidimensional. Contudo, o fato de ω_3 e ω_4 serem bastante diferentes no ponto de sela e no estado fundamental do sistema, é de se esperar que isso não seja verdade. Os graus de liberdade são acoplados e têm influência nos processos dinâmicos de fissão e fusão, como será visto no trabalho mais à frente. Além disso, os estados de energia de ordem zero para todas as frequências $\sum_n \hbar \omega_n^{(0)}$ devem contribuir para a energia do sistema no estado fundamental, e essa contribuição será mais um fator importante a levar em conta nos cálculos de penetrabilidade de penetração da barreira.

Outro ponto importante a analisar é quando ambas as frequências ω_2 e ω_3 são imaginárias ($\chi < \chi_{BG}$). Nesse caso, tanto as formas de equilíbrio simétricas e assimétricas, são instáveis com relação a deslocamentos na direção das respectivas coordenadas normais. Entretanto, situação diferente aparece quan-

do da análise experimental da distribuição de massas dos produtos finais de fissão. É sabido que em baixas energias os núcleos pesados ($\chi > \chi_{BG}$) tendem a dividir-se segundo fragmentos de tamanhos diferentes. É razoável pensar que a região responsável por esses aspectos deve situar-se além do ponto de sela até o ponto de separação completa dos fragmentos — o ponto de cisão. Isso é verdade, mas a explicação transcende ao modelo macroscópico. Na verdade, forças provenientes da estrutura intrínseca dos núcleos têm importância fundamental, especialmente nas regiões onde as forças repulsivas de Coulomb e as forças atrativas de tensão superficial tendem a cancelar-se. São essas forças de camadas provenientes das distribuições não uniformes dos momentos dos prótons e neutrons no espaço de fase, as responsáveis pelo aparecimento de estruturas nas barreiras de potencial. Isso foi demonstrado por Strutinsky⁽¹⁵⁾ numa teoria conciliadora dos aspectos macro-microscópicos que permitiu o esclarecimento de alguns fenômenos, não reproduzíveis pelas teorias macroscópicas. O mais importante reflete-se na existência de um segundo mínimo e um segundo ponto de equilíbrio instável na direção de fissão, na região dos núcleos pesados, e correspondendo a deformações maiores que as do primeiro ponto de sela. Esse segundo ponto de equilíbrio estável, permitiu compreender o fenômeno de isomeria nuclear. Além disso, é verificada uma instabilidade com relação a deslocamentos na direção de assimetria no segundo ponto de sela⁽¹¹⁾, o que explica a tendência assimétrica na divisão das massas dos fragmentos do processo de fissão em baixas energias. Para núcleos mais leves que envolvem maiores deformações do ponto de sela, a força macroscópica resul -

tante perto dessa região torna-se bastante grande e as forças de camada são, em geral, insuficientes para provocarem o aparecimento de um novo estado de equilíbrio ^(7,15).

1.4 - Efeitos da Partícula Independente

Até agora foram abordados apenas os aspectos coletivos da estrutura nuclear. No entanto, efeitos de partícula independente concorrem de modo importante, para a existência de certos desvios das predições do modelo da gota líquida. Essa afirmativa é baseada no sucesso obtido pelo modelo de partícula independente em explicar os desvios mais acentuados das energias de ligação nucleares na região dos números mágicos, como reflexo da estrutura de camadas.

No modelo de partícula independente as correlações entre os nucleons são consideradas fracas e incluídas num potencial médio comum sob o qual os nucleons movem-se independentemente. Qualquer acréscimo de energia do sistema é considerado em termos do preenchimento de um nível mais alto não completo na estrutura de níveis do modelo.

No modelo da gota líquida as correlações entre os nucleons são consideradas fortes e qualquer acréscimo de energia do sistema reflete a excitação do núcleo como um todo (excitação coletiva).

Para uma descrição detalhada das propriedades nucleares, contudo, ambos os modelos devem ser considerados simultaneamente.

Strutinsky ⁽¹⁵⁾ estudou o processo da fissão a partir

da síntese dos dois modelos. Nesse método macro-microscópico a energia potencial do núcleo é composta de dois termos — o termo da energia da gota líquida mais o termo de correção de camadas. O primeiro descreve o comportamento médio da energia de deformação, enquanto o segundo descreve as flutuações em torno desse valor que provêm de forças de restauração e distensão relacionadas à variação da densidade de níveis em torno da energia de Fermi. Para deformações em que a densidade de níveis é pequena junto da superfície de Fermi, o termo de correção de camada é negativo, aumentando dessa forma a energia de ligação nuclear. Para densidades maiores os sistemas ficam, ao contrário, menos ligados.

Essas correções apresentam flutuações que são funções da deformação do núcleo. Em casos favoráveis a correção de camada pode ser suficientemente grande, de modo a produzir uma segunda barreira na energia de deformação para o processo de fissão. Isso normalmente ocorre para os núcleos actinídeos que possuem pontos de sela relativos a formas pouco deformadas. Como já mencionado, também o aparecimento da segunda barreira tornou possível explicar razoavelmente a divisão assimétrica de tais núcleos.

Ênfase deve ser dada também ao fato de que, sendo a inércia função das coordenadas coletivas, deve depender também do termo de correção de camada. As inércias nucleares são comumente calculadas por meio do método Cranking adiabático. É um método microscópico que considera a Hamiltoniana do sistema de muitas partículas função de parâmetros clássicos dependentes do tempo que especificam a forma do núcleo. A aproximação adiabática

ca consiste em considerar as variações das energias de excitação coletivas muito menores que as energias de excitação internas, de modo que uma pequena variação na energia de deformação do núcleo não seja suficiente para alterar o estado interno do sistema. Na teoria os termos que contêm derivadas primeiras das coordenadas coletivas em relação ao tempo, são tratadas como termos de perturbação.

O sucesso do método de Strutinsky na explicação dos estados isoméricos através de uma teoria adiabática, permite julgar o processo de fissão como um processo quase adiabático. Perfeito do ponto de vista, a adiabática não deve mais valer devido às transições rápidas entre os vales de fissão e fusão acompanhados de variações grandes de energias de excitação coletivas.

1.5 - Quantização da Hamiltoniana para a Teoria de Fissão

O estudo do processo dinâmico de fissão resume-se basicamente ao conhecimento da sua Hamiltoniana coletiva. Classicamente, esta Hamiltoniana é composta de uma energia cinética $T(\alpha, \dot{\alpha})$ considerada bilinear nas velocidades $\dot{\alpha}$ e uma energia potencial $V(\alpha)$ função apenas das coordenadas coletivas.

$$H(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu}^N B_{\mu\nu}(\alpha) \dot{\alpha}_\mu \dot{\alpha}_\nu + V(\alpha) \quad (1.5.1)$$

onde $B_{\mu\nu}$ é o tensor de massa (tensor inercial) que sabe-se é dependente das coordenadas. É importante quantizar essa Hamiltoniana de modo a poderem ser entendidos certos aspectos quânticos, dos quais os mais importantes são a ocorrência de fissão

espontânea por processo de efeito túnel e os aspectos coletivos de vibração e rotação. No entanto, a justificativa teórica para tal quantização em termos de uma teoria puramente microscópica não está ainda bem estabelecida. O processo de quantização é, em geral, complicado e não é definido de uma maneira única. Normalmente é usada a energia cinética quantizada em coordenadas curvilíneas como (3,10,24,25),

$$T = - \frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 (\alpha_1 \dots \alpha_N) \quad (1.5.2)$$

onde se assume não haver quaisquer acoplamentos com outros graus de liberdade não coletivos.

A forma geral da energia cinética T é dada por:

$$T = - \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^N \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mu}} (B^{-1})_{\mu\nu} D \frac{\partial}{\partial \alpha_{\nu}} \quad (1.5.3)$$

onde $D = \sqrt{\det(B_{\mu\nu})}$ e $(B^{-1})_{\mu\nu}$ é o inverso do tensor de inércia $B_{\mu\nu}$. No caso de fissão essa quantização é bastante razoável, já que a hipótese de adiabaticidade para o processo é bastante aceitável. Se o acoplamento não é desprezado vários autores (24, 26) mostraram o aparecimento de um termo aditivo de potencial na expressão da energia cinética que não aparece na mecânica clássica. A equação de Schrödinger para o caso da energia cinética quantizada $T = - \hbar^2/2 \nabla^2$, com ∇^2 em coordenadas curvilíneas, é dada por,

$$\left[\sum_{\mu, \nu=1}^N \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mu}} (B^{-1})_{\mu\nu} D \frac{\partial}{\partial \alpha_{\nu}} + \frac{2}{\hbar^2} (E - V(\alpha)) \right] \psi(\alpha) = 0 \quad (1.5.4)$$

O elemento de volume \bar{e}

$$d\tau = |D| d\alpha_1 \dots d\alpha_N \quad (1.5.5)$$

e a normalização das funções de onda $\Psi(\alpha)$ obedece a relação,

$$\int \Psi^*(\alpha) \Psi(\alpha) |D| d\alpha_1 \dots d\alpha_N = 1 . \quad (1.5.6)$$

CAPÍTULO II

INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS DE INÉRCIA NO CÁLCULO DA TRAJETÓRIA DE FISSÃO. PENETRABILIDADE

2.1 - Trajetoórias

Hofmann propôs um método para o tratamento do processo de fissão que inclui numa mesma teoria dinâmica para o cálculo da penetrabilidade, os efeitos dos parâmetros inerciais e as transições entre os estados de oscilação do movimento segundo um grau de liberdade transversal ao de fissão⁽³⁾. A sua resolução baseia-se na definição, a priori, de uma trajetória estática (potencial mínimo) consistente com certas hipóteses básicas da teoria.

O trabalho que nos propomos realizar aqui, consiste em determinar a trajetória de fissão a partir das hipóteses do método de Hofmann e discutir os efeitos inerciais sobre suas propriedades.

Seja então, a Hamiltoniana coletiva quantizada para o processo de fissão dada por,

$$H = - \frac{\hbar^2}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (B^{-1})_{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \xi_j} + V(\xi_0, \xi_2) \quad (2.1.1)$$

onde ξ_0 e ξ_2 são as coordenadas coletivas, $(B^{-1})_{ij}$ são as componentes do tensor de inércia (B_{ij}) inverso, g é o determinante de

(B_{ij}) e V é a energia potencial.

O ponto essencial da teoria de Hofmann está na transformação das coordenadas (ξ_0, ξ_2) para um novo conjunto de coordenadas (x, y) ,

$$\begin{aligned} x &= x(\xi_0, \xi_2) \\ y &= y(\xi_0, \xi_2) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

no qual o tensor de inércia é diagonalizado e o potencial expandido harmonicamente em torno de $y = 0$. A trajetória escolhida nesse novo conjunto de coordenadas é aquela que satisfaz a condição de

$$\left. \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.1.3)$$

para todo o valor de x .

Temos, por conseguinte, as condições de

$$\begin{aligned} \text{diagonalização} \rightarrow B^{00}(\xi_0, \xi_2) \frac{\partial y}{\partial \xi_0} \frac{\partial y}{\partial \xi_0} + B^{02}(\xi_0, \xi_2) \frac{\partial x}{\partial \xi_0} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} + \\ + \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_0} + B^{22}(\xi_0, \xi_2) \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$$\begin{aligned} \text{potencial mínimo} \rightarrow \left. \frac{\partial V(\xi_0, \xi_2)}{\partial \xi_0} \right|_{\xi_2} \frac{\partial \xi_0}{\partial y} \Big|_x + \left. \frac{\partial V(\xi_0, \xi_2)}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_0} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \Big|_x \Big|_{y=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Escolhemos agora uma função $\bar{\xi}_2 = f(\xi_0)$ que defina uma trajetória nos espaços dos parâmetros (ξ_0, ξ_2) . De maneira a res

peitar a condição dada pela eq. (2.1.3) definimos uma relação para $y(\xi_0, \xi_2)$ como,

$$y(\xi_0, \xi_2) = \xi_2 - \bar{\xi}_2 \quad (2.1.6)$$

É claro então que a trajetória estática obedece à condição de

$$\xi_2 = \bar{\xi}_2 \quad (2.1.7)$$

De (2.1.6) então

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \xi_0} = - \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \xi_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = 1 \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Levando (2.1.8) em (2.1.4), obtêm-se

$$\left[-B^{00} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \xi_0} + B^{02} \right] \frac{\partial x}{\partial \xi_0} + \left[B^{22} - B^{02} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \xi_0} \right] \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = 0 \quad (2.1.9)$$

e sabendo que,

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_0}{\partial y} = - (J^{-1}) \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = \frac{\partial (\xi_0, x)}{\partial (y, x)} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = (J^{-1}) \frac{\partial x}{\partial \xi_0} \end{cases} \quad (2.1.10)$$

onde J é o Jacobiano da transformação, temos por (2.1.9) e (2.1.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \xi_0}{\partial y} = \frac{\phi_1/\phi_2}{1 - (\phi_1/\phi_2) \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \xi_0}} \quad (2.1.11) \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = \frac{1}{1 - (\phi_1/\phi_2) \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \xi_0}} \quad (2.1.12) \end{array} \right.$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = - B^{00} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \xi_0} + B^{02} \\ \phi_2 = B^{22} - B^{02} \frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \xi_0} \end{array} \right. \quad (2.1.13)$$

e

$$\phi_1/\phi_2 = \frac{\partial x/\partial \xi_2}{\partial x/\partial \xi_0} \quad (2.1.14)$$

ainda de (2.1.15), (2.1.11) e (2.1.14) obtêm-se a equação diferencial

$$\frac{d\bar{\xi}_2}{d\xi_0} = (B^{22} \frac{\partial V}{\partial \xi_2} + B^{02} \frac{\partial V}{\partial \xi_0}) / (B^{00} \frac{\partial V}{\partial \xi_0} + B^{02} \frac{\partial V}{\partial \xi_2}) \quad (2.1.15)$$

que determina a trajetória estática de fissão. Com efeito, para o caso de $B^{00} = B^{22}$ e $B^{02} = 0$, a equação para $\partial \bar{\xi}_2 / \partial \xi_0$ reduz-se

a

$$\frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \xi_0} = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi_2} \right) / \left(\frac{\partial V}{\partial \xi_0} \right) \quad (2.1.16)$$

cuja direção coincide com o gradiente do potencial. A dedução de Hofmann para o caminho (estático) de fissão é incorreta porquanto a equação por ele obtida leva a uma trajetória coincidente a uma equipotencial.

A eq. (2.1.15) mostra de maneira clara a influência do tensor de inércia na definição da trajetória (estática) de fissão. Pode constatar-se também que essa equação não apresenta qualquer liberdade para a escolha das condições iniciais do processo. A condição inicial é determinada univocamente pela necessidade física de que a trajetória de potencial mínimo passe pelo ponto de sela da fissão. Para quaisquer outras condições iniciais, a trajetória diverge naquele ponto e não atravessa a barreira na direção do vale de fissão (fig. 2.1.1).

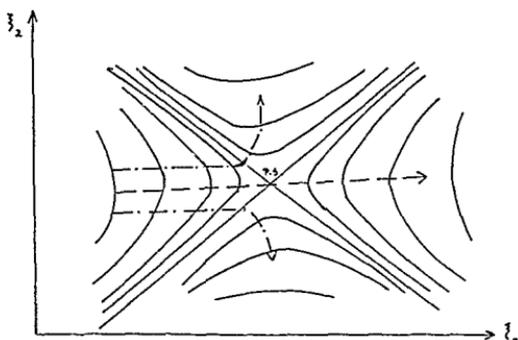


Fig. 2.1.1 - Trajetórias para condições iniciais diferentes.

Assim, a necessidade em determinar a trajetória a partir do ponto de sela para as duas regiões do vale de fissão. A instabilidade do processo nesse ponto obriga ao estudo com mais pormenor das propriedades do potencial nessa região.

É sempre possível expressar o potencial na forma,

$$V(\xi_0, \xi_2) = V_0 + f_1(\xi_0, \xi_2)(\xi_0 - \xi_{s0})^2 + 2f_2(\xi_0, \xi_2)(\xi_0 - \xi_{s0})(\xi_2 - \xi_{s2}) \\ + f_3(\xi_0, \xi_2)(\xi_2 - \xi_{s2})^2 \quad (2.1.17)$$

onde ξ_{s0} e ξ_{s2} são os valores das coordenadas no ponto de sela; f_1 , f_2 e f_3 são funções ajustáveis de (ξ_0, ξ_2) e

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \xi_0} = \frac{\partial V}{\partial \xi_2} \right|_{(\xi_{s0}, \xi_{s2})} = 0 \quad (2.1.18)$$

Introduzindo novas variáveis,

$$\eta_0 = \xi_0 - \xi_{s0}$$

$$\eta_2 = \xi_2 - \xi_{s2} \quad (2.1.19)$$

e

$$\alpha = \eta_2 / \eta_0$$

a eq. (2.1.15) vem dada por,

$$\frac{df}{d\eta_0} = \left[E\eta_0 + (F + G\alpha) \right] / \left[H\eta_0 + (J + K\alpha) \right] \quad (2.1.20)$$

onde

$$E = B^{02} \left[(\partial f_1 / \partial \xi_0) + 2(\partial f_2 / \partial \xi_0)\alpha + (\partial f_1 / \partial \xi_0)\alpha^2 \right] +$$

$$+ B^{22} \left[(\partial f_1 / \partial \xi_2) + 2(\partial f_2 / \partial \xi_2)\alpha + (\partial f_3 / \partial \xi_2)\alpha^2 \right]$$

$$H = B^{02} \left[(\partial f_1 / \partial \xi_2) + 2(\partial f_2 / \partial \xi_2)\alpha + (\partial f_3 / \partial \xi_2)\alpha^2 \right] +$$

$$+ B^{00} \left[(\partial f_1 / \partial \xi_0) + 2(\partial f_2 / \partial \xi_0) \alpha + (\partial f_3 / \partial \xi_0) \alpha^2 \right] \quad (2.1.21)$$

$$F = 2 \left[B^{02} f_1 + B^{22} f_2 \right]$$

$$G = 2 \left[B^{02} f_2 + B^{22} f_3 \right]$$

$$J = 2 \left[B^{02} f_2 + B^{00} f_1 \right]$$

$$K = 2 \left[B^{02} f_3 + B^{00} f_2 \right]$$

No limite $\eta_0 \rightarrow 0$

$$\left. \frac{df}{d\eta_0} \right|_{\eta_0 = 0} + \frac{\eta_2}{\eta_0} = \alpha_s \quad (2.1.22)$$

e nesse caso,

$$\alpha_s = \frac{B^{22}(f_2 + f_3 \alpha_s) + B^{02}(f_1 + f_2 \alpha_s)}{B^{00}(f_1 + f_2 \alpha_s) + B^{02}(f_2 + f_3 \alpha_s)} \quad (2.1.23)$$

resolvendo a eq. (3.1.23) com relação a α_s vem,

$$\alpha_{s \pm} = \frac{(G-J) \pm \left[(G-J)^2 - 4HK \right]^{1/2}}{2k} \quad (2.1.24)$$

Estas últimas expressões são equivalentes à equação de autovalores para as frequências normais no ponto de sela conforme a eq. (1.4.1). É fácil ver que com as matrizes K e M associadas respectivamente às formas bilineares do potencial e da energia cinética e a condição $M^{ji} = \alpha_{ij} / \det(M_{ij})$ (onde α_{ij} é o cofator do elemento M_{ij}), a equação de autovalores,

$$(K - \omega^2 M) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.1.25)$$

leva aos resultados das eqs. (2.1.23) e (2.1.24). Sem dúvida, o cálculo da trajetória de fissão pela eq. diferencial (2.1.15) é uma extensão do cálculo da determinação das direções próprias para as oscilações normais no ponto de sela.

De novo no caso de isotropia do tensor de inércia ($B^{00} = B^{22}$, $B^{02} = B^{20} = 0$), a direção das derivadas coincide com os eixos principais do potencial, onde o sinal positivo corresponde à trajetória que diverge no ponto de sela para regiões de energia potencial mais altas, e o sinal negativo corresponde à trajetória de interesse que liga o ponto de sela à região de potencial mínimo no vale de fissão.

Próximo à região $\eta_0 \approx 0$, a estabilidade da integração numérica da eq. (2.1.20) é equivalente à estabilidade para a resolução por método iterativo da eq.,

$$\alpha_{i+1} = \frac{F + G\alpha_i}{J + K\alpha_i} \quad (2.1.26)$$

onde $\alpha_0 = \alpha_s$ é dado pela eq. (2.1.24).

Desse modo, o processo de convergência depende das grandezas relativas entre F, G, J e K (fig. 2.i.2).

A condição necessária de convergência é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{F + G\alpha}{J + K\alpha} \right) \right|_{\alpha=\alpha_s} < 1 \\ \left| -FK + GJ \right| < (K\alpha_s + J)^2 \end{array} \right. \quad (2.1.27)$$

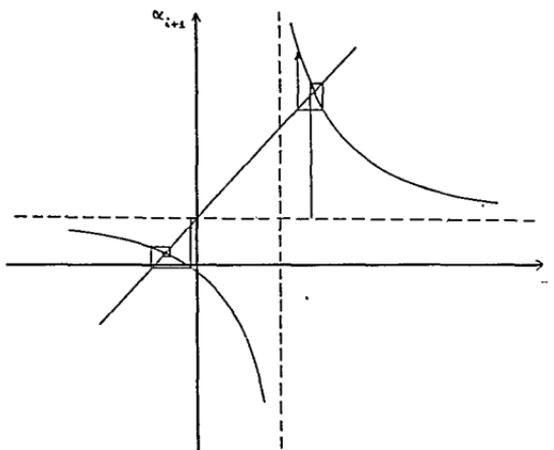


Fig. 2.1.2 - Gráfico explicativo do processo de convergência para eq. (2.1.26).

Pode-se então determinar numericamente a trajetória num dado potencial que respeite o processo de convergência e represente o caminho físico para o processo em questão.

Como primeiro exemplo, usamos o potencial da gota líquida do ^{240}Pn dado por Brack et al. (7) para calcular as trajetórias de fissão. A fig. 2.1.3 mostra dois casos particulares. Um em que o tensor de massa é isotrópico, e outro em que são dados valores arbitrários a B^{02} ,

$$\text{Caso 1} \quad \begin{cases} B^{00} = B^{22} = 1 \\ B^{02} = B^{20} = 0 \end{cases} \quad (2.1.28)$$

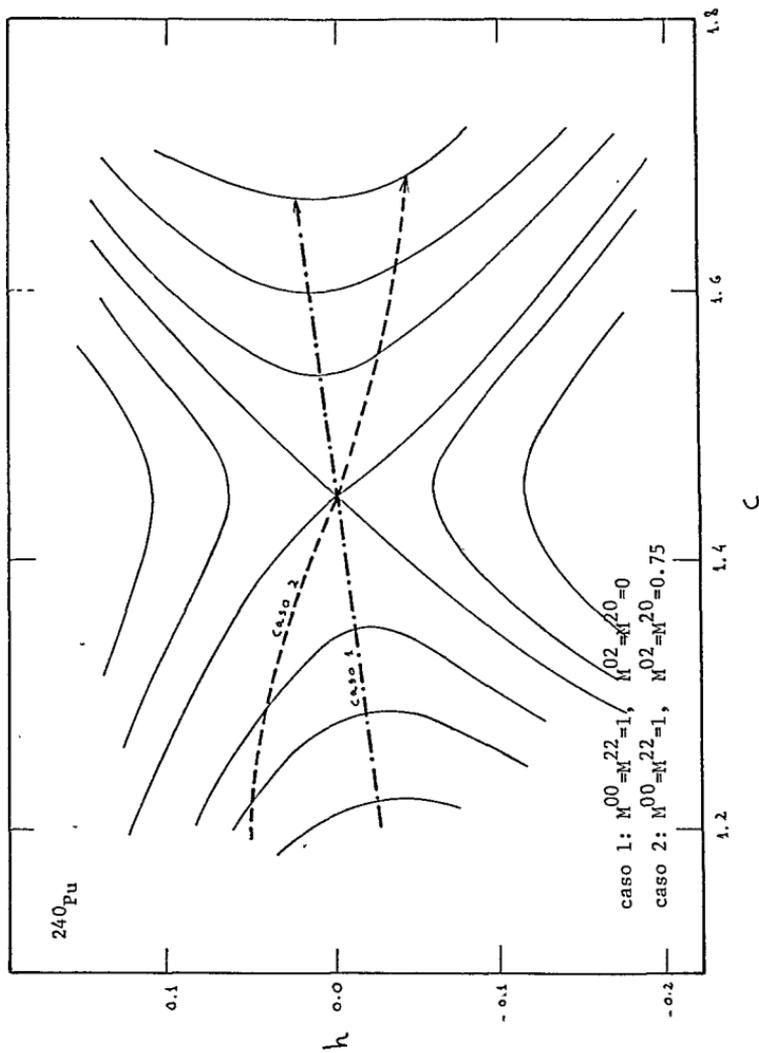


Fig. 2.1.3 - Trajetórias estáticas de fissão para o potencial de gota líquida do ^{240}Pu (tirado da ref. (7)).

$$\text{Caso 2} \quad \left\{ \begin{array}{l} B^{00} = B^{22} = 1 \\ B^{02} = B^{20} = 0.75 \end{array} \right. \quad (2.1.28)$$

Em termos das coordenadas (c,h) usadas para o potencial da referência mencionada, o potencial foi parametrizado na forma,

$$V = f_1(c,h)(h-h_0)^2 + 2f_2(c,h)(h-h_0)(c-c_0) + f_3(c,h)(c-c_0)^2 \quad (2.1.29)$$

onde f_1 , f_2 e f_3 são funções quadráticas ajustáveis de (c,h).

As trajetórias foram calculadas de maneira única invocando apenas propriedades do ponto de sela. No entanto, resta ainda saber como elas se comportam na região de equilíbrio estável do potencial no estado inicial. Em outras palavras, é necessário saber se as propriedades das trajetórias nesse ponto são consistentes com as propriedades físicas a elas creditadas na região do ponto de sela.

Isso pode ser verificado fazendo uma análise semelhante das propriedades da trajetória nesse ponto.

O potencial pode ser expandido da mesma maneira como,

$$V = \alpha(q_0 - q_{m0})^2 + 2\beta(q_0 - q_{m0})(q_2 - q_{m2}) + \gamma(q_2 - q_{m2})^2 \quad (2.1.30)$$

onde q_{m0} e q_{m2} são as coordenadas do mínimo.

Nesse caso, a forma da trajetória muda bruscamente em torno do mínimo, dependendo das grandezas relativas dos coeficiên

entes α , β e γ . Se no m̃nimo \bar{e} isotr̃opico ($\beta = 0$, $\alpha = \gamma$) e o tensor de iñercia ño \bar{e} diagonal, a trajet̃oria forma uma espiral que converge para o m̃nimo. Esse exemplo \bar{e} mostrado na fig. 2.1.4 para um potencial escolhido (por convenĩencia) como,

$$V = \frac{3}{2} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} q_0 - \frac{1}{2} q_2 \right]^2 - \left[\frac{1}{2} q_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} q_2 \right]^2 \left[\frac{1}{2} q_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} q_2 - \frac{3}{2} \right] \quad (2.1.31)$$

onde as coordenadas do m̃nimo s̃o

$$\begin{cases} q_{m0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ q_{m2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.1.32)$$

A trajet̃oria para este caso \bar{e} bastante irrealista como pode observar-se na fig. 2.1.4.

Por outro lado, se o m̃nimo ño \bar{e} isotr̃opico existem de novo, como no caso do ponto de sela, apenas duas direç̃oes possı́veis para que a trajet̃oria passe pelo m̃nimo do potencial. Contudo, h̃a infinitas trajet̃orias degeneradas para essas duas direç̃oes e, por conseguinte, ño \bar{e} adequado tentar resolver a equaç̃o diferencial (2.1.15), partindo do estado inicial.

A fig. 2.1.4 mostra duas trajet̃orias particulares, para esse potencial correspondendo aos mesmos dois casos apresentados para as trajet̃orias no ponto de sela.

Certamente as verdadeiras trajet̃orias de fiss̃o, para o m̃todo apresentado, envolveriam c̃lculos realistas para as massas nucleares efetivas. Acreditamos contudo, que a escolha

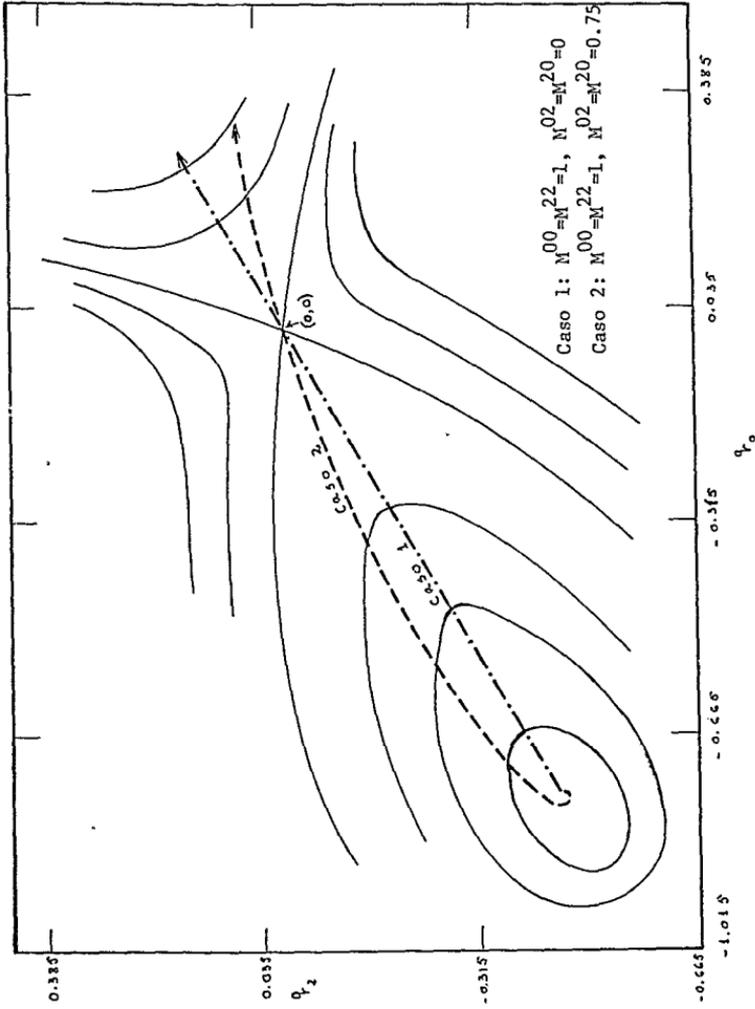


Fig. 2.1.4 - Trajetórias estáticas de fissão para um potencial apresentando o ponto de potencial e o ponto de sela.

dos parâmetros de inércia não afetam a discussão sobre as propriedades das trajetórias.

2.2 - Penetrabilidade

Determinada a trajetória para o processo de fissão, é possível, em princípio, calcular o valor da penetrabilidade na maneira comum da aproximação WKB. No capítulo IV será discutida a consistência entre a proposição do estudo dinâmico da penetrabilidade da fissão pelo método de Hofmann e a trajetória calculada, que em si mesma não é dinâmica.

No espaço transformado dos parâmetros (x,y) , a Hamiltoniana pode ser convenientemente separada numa parte adiabática e outra não adiabática ⁽³⁾,

$$H(x,y) = H^{ad} + H^{nad} \quad (2.2.1)$$

onde o termo adiabático significa um completo desacoplamento entre os graus de liberdade \underline{x} e \underline{y} , e o termo não adiabático H^{nad} é tratado como elemento perturbativo de H^{ad} , na aproximação de Born. O movimento em \underline{y} de H^{ad} é um movimento harmônico simples com autovalores correspondentes $E_y = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega(y,x)$, e a equação de movimento na direção de \underline{x} é idêntica à equação unidimensional ao longo do caminho de fissão.

Considerando o caso adiabático, a penetrabilidade vem dada pelo resultado comum da aproximação WKB ⁽³⁾,

$$P(ad) = e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} K_x dx} \quad (2.2.2)$$

onde

$$K_n = \left[\frac{2M_{xx}}{h^2} (V(x,0) + V'(x) - E) \right]^{1/2} \quad (2.2.3)$$

e $V'(x) = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega(x)$ é um termo aditivo que corrige o potencial para o movimento adiabático em x , proveniente dos estados de oscilação do movimento transversal em torno de $y = 0$ para todo o x . $V(x,0)$ é o valor do potencial para $y = 0$ e $\omega(x)$ é a frequência dada por,

$$\omega(x) = \left[\frac{1}{M_{yy}(x)} \frac{\partial^2 V(x,0)}{y^2} \right]^{1/2} \quad (2.2.4)$$

Para calcular a penetrabilidade em termos da trajetória (2.1.15) é conveniente retornar ao conjunto antigo de coordenadas. De (2.1.9) e

$$M^{xy}(x,y) = \sum_{i,j} B^{ij}(\xi_0, \xi_2) \frac{\partial y}{\partial \xi^i} \frac{\partial x}{\partial \xi^j} \quad (2.2.5)$$

vem,

$$M_{xx} = 1 / \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_0} \right)^2 \left[B^{00} + B^{22} \left(\frac{d\bar{\xi}_2}{d\xi_0} \right)^2 \right]$$

$$M_{yy} = 1 / \left[B^{00} \left(\frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \xi_0} \right) + B^{22} \right]$$

$$dx = \left[1 + \left(\frac{\partial \bar{\xi}_2}{\partial \xi_0} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{\partial x}{\partial \xi_0} d\xi_0$$

$$\omega(x) = \left[\frac{1}{M_{yy}} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right]^{1/2}$$

onde $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ é facilmente calculado com eqs. (2.1.10) e (2.1.11)

A penetrabilidade é dada finalmente por,

$$p(\text{ad}) = e^{-2 \int_{\xi_a}^{\xi_b} K_n d\xi_0} \quad (2.2.7)$$

onde K_n é calculado ao longo de $\bar{\xi}_2 = f(\xi_0)$.

Na teoria de Hofmann a penetrabilidade adiabática vem diminuída de uma quantidade correspondente à parte não adiabática da Hamiltoniana coletiva. Essa parte inclui termos como $d(\log \omega(x))/dx$ (cf. eq. (30) da ref. (3)). A dificuldade no cálculo ao longo da trajetória $\bar{\xi}_2 = f(\xi_0)$, devido à existência de derivadas com relação à coordenada x , pode ser eliminada com a ajuda da relação

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{\left[\frac{d\omega}{d\xi_0} - \frac{d\bar{\xi}_2}{d\xi_0} \frac{d\omega}{d\bar{\xi}_2} \right]}{\frac{dx}{d\xi_0} \left[1 - \frac{\phi_1}{\phi_2} \frac{d\bar{\xi}_2}{d\xi_0} \right]} \quad (2.2.8)$$

A fórmula final para a penetrabilidade total vem dada por,

$$p = p(\text{ad}) \left[1 - \frac{n^2+n+1}{8} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{[d(\log \omega(x))/dx]^2}{K_n(x)} \right]$$

$$= p(\text{ad}) \left[1 - \frac{n^2+n+1}{8} \int_{\xi_0}^{\xi_2} d\xi_0 \frac{\left[\frac{d\omega}{d\xi_0} - \frac{d\bar{\xi}_2}{d\xi_0} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\xi}_2} \right]^2 \left[1 + \left(\frac{d\bar{\xi}_2}{d\xi_0} \right)^4 \right]^{1/2}}{\left[\frac{2}{nh^2} (V + (n+\frac{1}{2})h\omega - E) \right]^{1/2} \omega(x) \left[1 - \frac{\phi_1}{\phi_2} \frac{d\bar{\xi}_2}{d\xi_0} \right]^2} \right]$$

CAPÍTULO III

PENETRABILIDADE PARA UMA DUPLA BARREIRA DE FUSÃO

3.1 - Cálculo Exato

3.1.1 - Hamiltoniana para o Processo

A Hamiltoniana coletiva do processo que queremos abordar será explícita em termos de 2 graus de liberdade: um, representado por uma coordenada que descreve a distância entre os centros de massa dos núcleos que vão colidir, e outro, representado por uma coordenada que está relacionada à soma das deformações ao longo de um eixo de simetria comum. Fazemos a restrição conveniente de que o processo é adiabático, aqui usado no sentido de um desacoplamento completo entre os dois graus de liberdade.

Desse modo, podemos escrever,

$$H(x,y) = H_x + H_y \quad (3.1.1.1)$$

com

$$\begin{aligned} H_x &= T_x + V_x \\ H_y &= T_y + V_y \end{aligned} \quad (3.1.1.2)$$

onde a energia cinética T é considerada ser bilinear nas velocidades e V é o potencial escolhido, de maneira a refletir a ca -

racterística principal do potencial realista de dois vales desalinhados e separados por uma encosta (figs. 3.1.1.1 e 3.1.1.2).

Com respeito à coordenada de separação x , o potencial apresenta uma configuração parabólica e é contínuo ao longo da trajetória definida por $y = 0$. Em relação ao grau de liberdade transversal, o potencial apresenta dois osciladores harmônicos de curvaturas diferentes. Esses osciladores representam os vales de fusão e fissão nucleares e têm posições de equilíbrio diferentes, distanciados entre si de y_0 . Suas dependências no potencial são estabelecidas em termos de um valor crítico x_1 que representa uma região de descontinuidade na confluência dos dois vales. Estabelecemos então duas regiões de definição do problema, a região correspondente ao vale de fusão para valores de $x < x_1$, e a região correspondente ao vale de fissão para valores de $x > x_1$. Por conveniência, escolhemos o ponto $x = 0$ como sendo o ponto ao longo da trajetória unidimensional $y = 0$ para o qual a energia potencial V é máxima ($V_{\max} = V_0$), e o ponto $x = x_1 < 0$.

Desse modo temos,

$$T(x,y) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{\nabla_x^2}{m_x} + \frac{\nabla_y^2}{m_y^{(1)}} \right] & , \quad x \leq x_1 \\ -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{\nabla_x^2}{m_x} + \frac{\nabla_y^2}{m_y^{(2)}} \right] & , \quad x > x_1 \end{cases} \quad (3.1.1.3)$$

onde as massas efetivas m_x , $m_y^{(1)}$ e $m_y^{(2)}$ são independentes da posição. A massa efetiva m_x é aqui considerada como sendo a massa reduzida dos núcleos de colisão e $m_y^{(1)}$ e $m_y^{(2)}$ são as massas

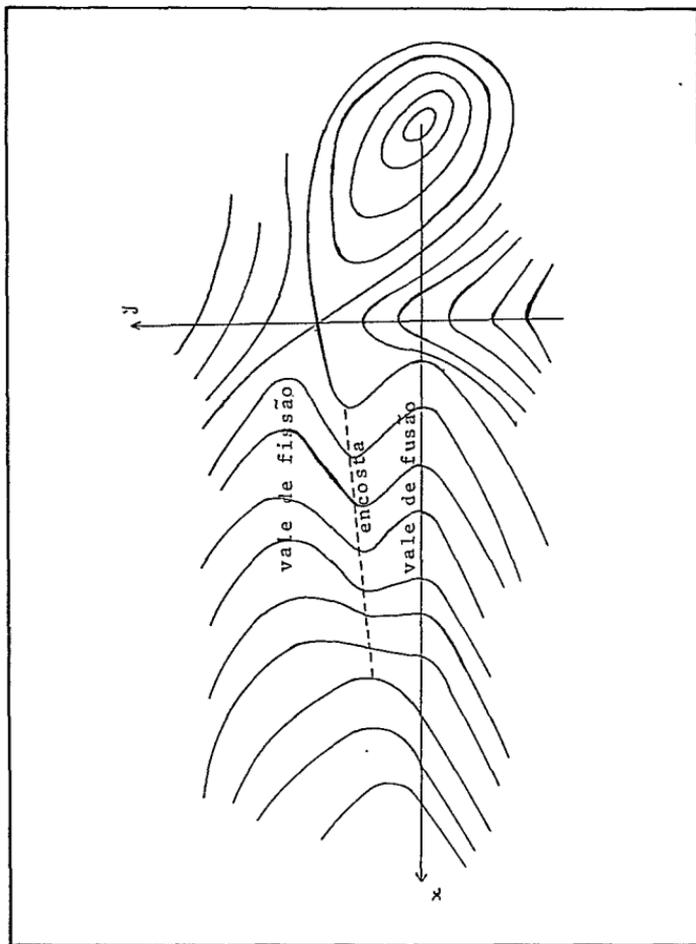


Fig. 3.1.1.1 - Barreira de fusão com dois vales desalinhados separados por uma encosta.

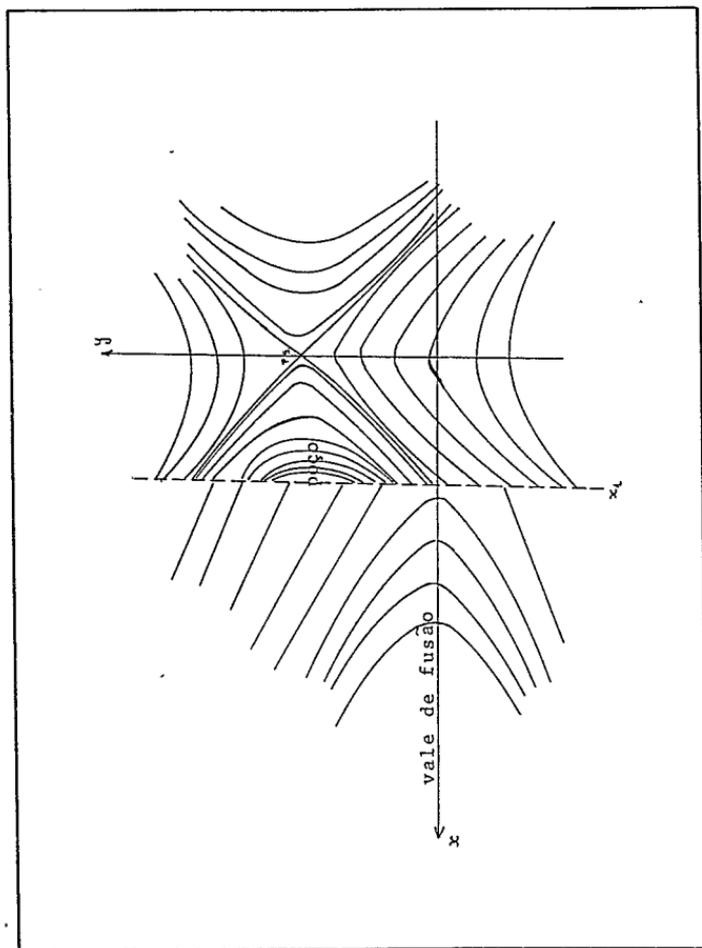


Fig. 3.1.1.2 - Barreira de fusão usada no cálculo das penetrabilidades.

efetivas obtidas através do modelo hidrodinâmico para as oscilações harmônicas transversas à coordenada \underline{x} (13),

$$\left\{ \begin{array}{l} m_x \propto \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \\ m_y \propto \frac{3}{10} (A_1 + A_2) \end{array} \right. \quad (3.1.1.4)$$

onde A_1 e A_2 são os números de nucleons do núcleo 1 e 2.

Para a energia potencial,

$$V(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} V_0 - \frac{1}{2} K_x x^2 + \frac{1}{2} K_y^{(1)} y^2 & , \quad x \leq x_1 \\ V_0 - \frac{1}{2} K_x x^2 + \frac{1}{2} K_y^{(2)} (y-y_0)^2 - \frac{1}{2} K_y^{(2)} y_0^2 & , \quad x > x_1 \end{array} \right. \quad (3.1.1.5)$$

onde K_x é o parâmetro associado à curvatura do pico da parábola na direção \underline{x} e $K_y^{(1)}$ e $K_y^{(2)}$ são os parâmetros associados às curvaturas dos vales de fusão e fissão, respectivamente.

A trajetória unidimensional definida ao longo da coordenada de separação para os valores de $y = y_0$, apresenta um máximo $V = V_0 - \frac{1}{2} K_2 Y_0^2$ no ponto $x = 0$, o qual define a energia de potencial do usualmente chamado ponto de sela de fissão. As figs. 3.1.1.1 e 3.1.1.2 mostram a energia de potencial em termos das coordenadas \underline{x} e \underline{y} . As frequências de oscilações nos vales de fusão e fissão são dadas por,

$$\omega_y^{(1)} = \left[\frac{K_y^{(1)}}{m_y^{(1)}} \right]^{1/2} \quad x < x_1 \quad (3.1.1.6)$$

$$\omega_y^{(2)} = \left[\frac{K_y^{(2)}}{m_y^{(2)}} \right]^{1/2} \quad x > x_1$$

e o parâmetro associado à curvatura do pico da parábola,

$$\omega_x = \left[\frac{K_x}{m_x} \right]^{1/2} \quad (3.1.1.7)$$

O ponto x_1 é escolhido como aquele para o qual o valor da barreira de fusão atinge exatamente o valor máximo da barreira de fissão (fig. 3.1.1.2). Nesse ponto, a influência do oscilador no vale de fissão sobre o sistema no vale de fusão deve ser máxima. Com

$$V(x) \Big|_{y=0} = V_0 - \frac{1}{2} K y_0^2 \quad , \quad (3.1.1.8)$$

vem

$$x_1 = \left[\frac{\hbar \omega_y}{\hbar \omega_x} \right]^{1/2} y_0$$

3.1.2 - Resolução da Equação de Schrödinger. Cálculo da Penetrabilidade

Definidos os potenciais e as energias cinéticas nas

duas regiões aquém e além de x_1 , o problema resume-se então, em resolver a equação de Schrödinger,

$$\left[H_x + H_y \right] \Psi(x,y) = E \Psi(x,y) \quad (3.1.2.1)$$

respeitadas as condições de contorno do problema. Essas condições de contorno correspondem a:

- 1 - uma onda incidente no estado fundamental situada no vale de fusão e caminhando de $x = -\infty$ para a região de colisão e,
- 2 - uma soma sobre todos os estados de ondas transmitidas e refletidas na barreira de potencial em $x = x_1$ e que caminha assintoticamente para $x = +\infty$ e $x = -\infty$, respectivamente, representando os diferentes estados excitados do oscilador nos vales correspondentes.

Considerando que H_y descreve um movimento oscilatório em y , conforme a equação,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_y^2 + V(y) \right] U_n(y) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_y U_n(y) \quad , \quad (3.1.2.2)$$

onde $U_n(y)$ são as autofunções correspondentes dadas por,

$$U_n(y) = \left[\frac{m_y \omega_y}{\hbar} \right]^{1/2} U(Y) \quad \text{com} \quad Y = \left[\frac{m_y \omega_y}{\hbar} \right] y \quad , \quad (3.1.2.3)$$

e onde $U(Y)$ são as autofunções normalizadas do oscilador harmônico obedecendo às relações de ortonormalidade,

$$\langle U_k(Y) | U_\rho(Y) \rangle = \delta_{k\rho} \quad (3.1.2.4)$$

e,

$$U_n(Y) = 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} (\pi)^{-1/4} e^{-Y^2/2} H_n(Y) \quad (3.1.2.5)$$

H_x e H_y são independentes, as autofunções de $H(x,y) = H_x + H_y$ são as funções produto $\Psi_n(n,y) = U_n(y) v_n(x)$ e $v(x)$ satisfaz a equação,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_x^2 + V(x) + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y \right] v_n(x) = E v_n(x) \quad , \quad (3.1.2.6)$$

que descreve o movimento unidimensional na direção x com o potencial $V(x)$ adicionado de $(n + \frac{1}{2}) \hbar\omega_y$. Este último termo corrige o potencial $V(x)$ para o movimento adiabático na direção x .

Fazendo uma mudança conveniente de variável,

$$\xi = \left[\frac{2m_x \omega_x}{\hbar} \right]^{1/2} x = \left[\frac{2K_x}{\hbar\omega_x} \right]^{1/2} x \quad , \quad (3.1.2.7)$$

obtemos a equação diferencial modificada,

$$\left[\nabla_\xi^2 + \frac{1}{4} \xi^2 - a \right] v(\xi) = 0 \quad , \quad (3.1.2.8)$$

cujas soluções particulares que se anulam para grandes valores de ξ são chamadas funções cilíndrico-parabólicas. Essas funções finitas para quaisquer ξ e de quadrado integrável, são as soluções de significado físico que nos interessam. Assim, temos para as duas regiões definidas à esquerda e à direita de x_1 ,

$$\psi^{(1)}(x,y) = v^*(a_0^{(1)}, -\xi) U_0^{(1)}(y) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n v(a_n^{(1)}, -\xi) U_n^{(1)}(y) \quad ,$$

$$x < x_1 \quad (3.1.2.9)$$

onde $\psi^{(1)}$ é a função de onda no vale de fusão,

$$\left\{ \begin{array}{l} v^*(a_0^{(1)}, -\xi) \quad \text{é a onda incidente de } x = -\infty \quad , \\ v(a_n^{(1)}, -\xi) \quad \text{é a onda refletida para } x = -\infty \quad , \end{array} \right.$$

e estas últimas são as soluções cilíndrico parabólicas obtidas de maneira padrão na análise matemática (27).

$a_n^{(1)}$ é dado por

$$a_n^{(1)} = \left[V_0 - (E - n \hbar \omega_y^{(1)}) \right] / (\hbar \omega_x) \quad (3.1.2.10)$$

que especifica em unidades de $\hbar \omega_x$ o deficit de energia relativo a V_0 para o movimento na direção de x , quando o n -ésimo estado do oscilador harmônico no vale de fusão está excitado (a energia total E do sistema já inclui a energia de ponto zero $\frac{1}{2} \hbar \omega_y^{(1)}$),

$$\psi^{(2)}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n v(a_n^{(2)}, \xi) U_n^{(2)}(y-y_0) \quad (3.1.2.11)$$

é a função de onda no vale de fissão, $v(a_n^{(2)}, \xi)$ é a onda emergente para $x = +\infty$ e

$$a_n^{(2)} = \left\{ V_0 - \frac{1}{2} K_y^{(2)} y_0^2 - \left[E + \frac{1}{2} \hbar \omega_y^{(1)} - (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_y^{(2)} \right] \right\} / (\hbar \omega_x) \quad .$$

$$(3.1.2.12)$$

As funções de onda do oscilador harmônico $U_n^{(2)}(y-y_0)$ são dadas por expressões análogas à eq. (3.1.2.5). A_n e B_n são os coeficientes de reflexão e transmissão respectivamente, e são determinados pelas imposições de continuidade em x_1 da função de onda $\Psi(x,y)$ e de sua derivada primeira $\nabla_x \Psi(x,y)$ para todos os valores de y .

De

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^{(1)}(x,y) = \Psi^{(2)}(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} \Psi^{(1)}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \Psi^{(2)}(x,y) \end{array} \right. \quad (3.1.2.13)$$

e da relação

$$C_{mn} = \langle U_m^{(2)}(y-y_0) | U_n^{(1)}(y) \rangle \quad (3.1.2.14)$$

obtemos, multiplicando (3.1.2.13) por $U_m^{(2)}(y)$ e integrando em y ,

$$\left\{ \begin{array}{l} v^*(a_0^{(1)}, -\xi) C_{m0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} v(a_n^{(1)}, -\xi) A_n = v(a_m^{(2)}, \xi) B_m \\ \left[\nabla_{\xi} v^*(a_0^{(1)}, -\xi) \right] C_{m0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \left[\nabla_{\xi} v(a_n^{(1)}, -\xi) \right] A_n = \left[\nabla_{\xi} v(a_m^{(2)}, \xi) \right] B_m \end{array} \right. \quad (3.1.2.15)$$

Multiplicando por $C_{m\rho}^*$ e somando em m ,

$$\left\{ \begin{array}{l} v^*(a_0^{(1)}, -\xi) \sum_{m=0}^{\infty} C_{m\rho}^* C_{m0} + v(a_{\rho}^{(1)}, -\xi) A_{\rho} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m\rho}^* v(a_m^{(2)}, \xi) B_m \\ \left[\nabla_{\xi} v^*(a_0^{(1)}, -\xi) \right] \sum_{m=0}^{\infty} C_{m\rho}^* C_{m0} + \left[\nabla_{\xi} v(a_{\rho}^{(1)}, -\xi) \right] A_{\rho} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m\rho}^* \left[\nabla_{\xi} v(a_m^{(2)}, \xi) \right] B_m \end{array} \right. \quad (3.1.2.16)$$

multiplicando ainda a primeira equação de (3.1.2.16) por $\left[\nabla_{\xi} v(a_{\rho}^{(1)}, -\xi) \right]$ e a segunda equação por $v(a_{\rho}^{(1)}, -\xi)$ e subtraindo membro a membro as equações resultantes, conseguimos eliminar A_n do sistema de equações, obtendo,

$$\begin{aligned} & \left[\nabla_{\xi} v(a_{\rho}^{(1)}, -\xi) v^*(a_0^{(1)}, -\xi) - v(a^{(1)}, -\xi) \nabla_{\xi} v^*(a_0^{(1)}, -\xi) \right] \sum_m C_{m\rho}^* C_{m0} = \\ & = \sum_m \left\{ \left[\nabla_{\xi} v(a_{\rho}^{(1)}, -\xi) \right] v(a_m^{(2)}, \xi) - v(a_{\rho}^{(1)}, -\xi) \left[\nabla_{\xi} v(a_m^{(2)}, \xi) \right] \right\} C_{m\rho}^* B_m, \end{aligned} \quad (3.1.2.17)$$

que pode ser escrita na notação Wronskiana como,

$$W \left[v^*(a_0^{(1)}, -\xi), v(a_{\rho}^{(1)}, -\xi) \right] \delta_{\rho 0} = \sum_m W \left[v(a_m^{(2)}, \xi), v(a_{\rho}^{(1)}, -\xi) \right] C_{m\rho}^* B_m, \quad (3.1.2.18)$$

onde foi usada a relação,

$$\sum_m C_{m\rho}^* C_{mn} = \delta_{\rho n}. \quad (3.1.2.19)$$

A penetrabilidade \tilde{e} é definida em termos do coeficiente de transmissão B_n como,

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} |B_n|^2; \quad (3.1.2.20)$$

das propriedades do Wronskiano ⁽²⁷⁾,

$$W \left[v(a, \xi), v^*(a, \xi) \right] = -2i \quad , \quad (3.1.2.21)$$

e definindo a matriz M a partir de,

$$M_{\rho m} = \frac{1}{2i} W \left[v(a_m^{(2)}, \xi), v(a^{(1)}, -\xi) \right] C_{m\rho}^* \quad ; \quad (3.1.2.22)$$

obtemos o sistema de equações:

$$\sum_{m=0}^{\infty} M_{\rho m} B_m = \delta_{\rho 0} \quad , \quad (3.1.2.23)$$

Finalmente, a penetrabilidade \underline{P} é obtida simplesmente calculando a razão entre o fluxo transmitido e o fluxo incidente, e integrando para todos os valores de y . Por conseguinte,

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} |B_m|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |(M^{-1})_{m0}|^2 \quad (3.1.2.24)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} P &= \sum_{m=0}^{\infty} \left| \langle m | M^{-1} | 0 \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \langle 0 | (M^{-1})^+ | m \rangle \langle m | M^{-1} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | (M^{-1})^+ M^{-1} | 0 \rangle \\ \therefore &= \langle 0 | (MM^+)^{-1} | 0 \rangle \\ &= \left[(MM^+)^{-1} \right]_{00} \end{aligned} \quad (3.1.2.25)$$

onde M^+ é a matriz complexa conjugada de M . Vemos assim, que o cálculo da penetrabilidade se resume num problema de inversão da matriz M . Para determinar M , precisam ser calculados os coeficientes C_{mn} e as funções de onda cilíndrico-parabólicas $v(x)$.

Podemos observar que no caso particular em que os vales de fissão e fusão estejam alinhados, e que os osciladores representativos desses vales tenham parâmetros coincidentes,

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ K_y^{(1)} = K_y^{(2)} \\ m_y^{(1)} = m_y^{(2)} \end{cases} \quad (3.1.2.25)$$

então,

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \left[\frac{m_y \omega_y}{\hbar} \right]^{1/2} \\ a_n^{(1)} = a_n^{(2)} = \left[V_0 - (E - n\hbar\omega_y) \right] / (\hbar\omega_x) \\ C_{mn} = \delta_{mn} \end{cases} \quad (3.1.2.26)$$

o que significa que o sistema permanece no mesmo estado excitado de energia do oscilador harmônico, antes e após o processo de penetração. Neste caso, e com uma pequena manipulação das propriedades do Wronskiano,

$$\begin{cases} E(a, \xi) = K^{-1/2} W(a, \xi) + i K^{1/2} W(a, -\xi) \\ E(a, -\xi) = K^{-1/2} W(a, -\xi) + i K^{1/2} W(a, \xi) \end{cases}$$

metros para os demais sistemas, determinados do mesmo modo, são encontrados na tab. 3.1.3.1.

A $-\hbar\omega_y^{(1)}$ (const. associada à curvatura do oscilador no vale de fusão; $x < x_1$).

O cálculo de $\hbar\omega_y^{(1)}$ é deduzido a partir dos resultados da literatura⁽²⁰⁾ para as energias eletrostática e de superfície de uma gota deformada assumindo formas axialmente simétricas. O método convencional para representar tais formas, é expandir o raio vetor da gota em polinômios de Legendre. Como estamos interessados em pequenas deformações em torno da forma esférica de equilíbrio, apenas um número reduzido de termos dessa expansão são necessários. Por simplicidade de cálculo, usaremos apenas a expansão até o termo de segunda ordem. As energias eletrostática \underline{V}_C e de superfície \underline{V}_S são dadas respectivamente por,

$$\left\{ \begin{array}{l} V_S \equiv \frac{E_S}{E_S^{(0)}} = 1 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 + \dots \\ V_C \equiv \frac{E_C}{E_C^{(0)}} = 1 - \frac{1}{5} \alpha_2^2 + \dots \end{array} \right. \quad (3.1.3.1)$$

onde $E_S^{(0)}$ e $E_C^{(0)}$ são os valores dessas energias para a forma esférica, e $\underline{\alpha}_2$ é o coeficiente de 2ª ordem da expansão dada pela eq. (1.2.1).

A energia de deformação (energia de superfície mais energia eletrostática) em unidades de $E_S^{(0)}$ é dada pela eq. (1.2.2).

Temos então,

metros para os demais sistemas, determinados do mesmo modo, são encontrados na tab. 3.1.3.1.

A $-\hbar\omega_y^{(1)}$ (const. associada à curvatura do oscilador no vale de fusão; $x < x_1$).

O cálculo de $\hbar\omega_y^{(1)}$ é deduzido a partir dos resultados da literatura⁽²⁰⁾ para as energias eletrostática e de superfície de uma gota deformada assumindo formas axialmente simétricas. O método convencional para representar tais formas, é expandir o raio vetor da gota em polinômios de Legendre. Como estamos interessados em pequenas deformações em torno da forma esférica de equilíbrio, apenas um número reduzido de termos dessa expansão são necessários. Por simplicidade de cálculo, usaremos apenas a expansão até o termo de segunda ordem. As energias eletrostática \underline{V}_C e de superfície \underline{V}_S são dadas respectivamente por,

$$\left\{ \begin{array}{l} V_S \equiv \frac{E_S}{E_S^{(0)}} = 1 + \frac{2}{5} \alpha_2^2 + \dots \\ V_C \equiv \frac{E_C}{E_C^{(0)}} = 1 - \frac{1}{5} \alpha_2^2 + \dots \end{array} \right. \quad (3.1.3.1)$$

onde $E_S^{(0)}$ e $E_C^{(0)}$ são os valores dessas energias para a forma esférica, e $\underline{\alpha}_2$ é o coeficiente de 2ª ordem da expansão dada pela eq. (1.2.1).

A energia de deformação (energia de superfície mais energia eletrostática) em unidades de $E_S^{(0)}$ é dada dada eq. (1.2.2).

Temos então,

TABELA 3.1.3.1

Valores dos Parâmetros Característicos das Barreiras
de Fusão para Vários Sistemas

Sistemas de Fusão	$\hbar\omega_y^{(1)}$ (MeV)	$\hbar\omega_y^{(2)}$ (MeV)	$\hbar\omega_x$ (MeV)	E_{pS} (MeV)	E_I (MeV)	ΔV (MeV)	y_0 (fm)	x_1 (fm)
$48V_{23} + 48V_{23} \rightarrow 96Pd_{46}$	3.29	1.8	2.9	42.0	45.1	3.8	1.2	-0.7
$40Ar_{18} + 40Ar_{18} \rightarrow 80Kr_{36}$	6.5	4.7	2.3	41.0	42.7	1.3	0.5	-1.0
$86Kr_{36} + 86Kr_{36} \rightarrow 127Hf_{72}$	2.3	1.6	4.6	25.5	42.3	17.5	3.87	-1.35
$100Mo + 100Mo \rightarrow 200Po$	3.3	4.24	2.6	12.8	35.6	22.1	1.45	-1.56

$$V = \frac{2}{5} (1 - \chi) E_S^{(0)} \alpha_2^2, \quad (3.1.3.2)$$

e de (20)

$$\left\{ \begin{array}{l} E_S^{(0)} = a_s \{1 - K [(N-Z)/A]^2\} A^{2/3}, \\ a_s = 17.9439 \text{ MeV}, \\ K = 1.7826, \\ E_C^{(0)} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_0} = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \\ a_c = 0.7053 \\ \chi = \frac{Z^2/A}{50.88 \{1 - 1.7826 [(N-Z)/A]^2\}}, \end{array} \right. \quad (3.1.3.3)$$

podemos calcular,

$$h\omega_y^{(1)} = \left[\frac{\hbar^2 K}{m_y} \right]^{1/2} = \left[\frac{\hbar^2}{m_0} \frac{K}{A^{(1)}} \right]^{1/2} = \left[41.797 \frac{K}{A^{(1)}} \right]^{1/2}, \quad (3.1.3.4)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 = 1.66 \times 10^{-24} \text{ g} \\ m_y^{(1)} = m_0 A_y^{(1)} \quad (A_y^{(1)} \text{ determinado em } \underline{B}) \end{array} \right. \quad (3.1.3.5)$$

e

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{\partial^2}{\partial(\alpha_2 R)} V(\alpha_2 R) \\
 &= \frac{4}{5} (1 - \chi) \frac{E_S^{(0)}}{R}
 \end{aligned}
 \tag{3.1.3.6}$$

com

$$\begin{cases}
 R = r_0 \cdot A^{1/3} \\
 r_0 = 1.2249 \text{ fm}
 \end{cases}
 \tag{3.1.3.7}$$

de eqs. (3.1.3.3), (3.1.3.4) e (3.1.3.6) ,

$$\hbar\omega_y^{(1)} = 3.2916 \text{ MeV}
 \tag{3.1.3.8}$$

B - $m_y^{(1)} = m_y^{(2)}$ (massas efetivas relacionadas à deformação α_2)

$$m_y^{(2)} = m_y^{(1)} = \frac{3}{10} (A_1 + A_2) m_0
 \tag{3.1.3.9}$$

C - $\hbar\omega_y^{(2)}$ (const. associada à curvatura do oscilador no vale de fissão; $x > x_1$)

$\hbar\omega_y^{(2)}$ é obtido diretamente, dos cálculos para as frequências das oscilações em torno das formas simétricas do ponto de sela, da ref. (20) e reproduzidas na fig. 3.1.3.1.

Para o valor de $\chi \approx 0.43$,

$$\hbar\omega_y^{(2)} \approx 1.8 \text{ MeV}
 \tag{3.1.3.10}$$

D - m_x (massa efetiva relacionada à coordenada de separação x)

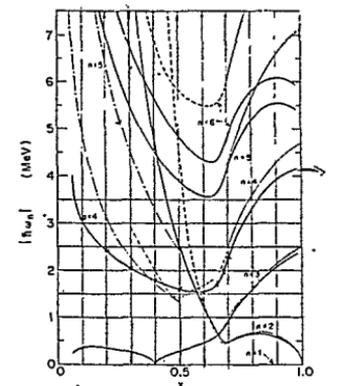


Fig. 3.1.3.1 - Frequências das oscilações normais no ponto de sela. Fig. tirada da ref. (20).

m_x é dada, para o movimento na direção x , pela massa reduzida

$$m_x = m_0 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \quad (3.1.3.11)$$

$$= 24 m_0$$

E -- $\hbar\omega_x$ (constante associada à curvatura do pico da parábola)

$\hbar\omega_x$ é calculado com base no trabalho da ref. (12), onde o modelo da gota líquida é generalizado de modo a poder calcular a energia de deformação para formas bastante deformadas na região do ponto de sela.

Segundo esse trabalho, a energia de interação nuclear de duas esferas não superpostas de raios R_1 e R_2 , e com a distância entre os centros de massa $x \geq R_1 + R_2$, é dada por,

$$E_{int} = -4 \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 C_s \left(\frac{R_1}{a} \cosh \frac{R_1}{a} - \sinh \frac{R_1}{a}\right) \left(\frac{R_2}{a} \cosh \frac{R_2}{a} - \sinh \frac{R_2}{a}\right) \frac{e^{-x/a}}{\frac{x}{a}} \quad (3.1.3.12)$$

e

$$K_x = \frac{\partial^2 E_{int}}{\partial x^2} \Big|_{x_{max} = r_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) + d} \quad (3.1.3.13)$$

com

$$\begin{aligned} a &= 1.4 \text{ fm} \\ d &= 1.0 \\ r_0 &= 1.16 \text{ fm} \end{aligned} \quad (3.1.3.14)$$

onde \underline{d} é a distância entre as duas superfícies nucleares para a qual a energia de interação total é máxima. Então,

$$\hbar\omega_x = \left[41.797 \frac{K_x}{m_x} \right]^{1/2} = 2.92 \text{ MeV} \quad (3.1.3.15)$$

$F - y_0$ (distância $y = y_0$ que define a separação dos vales desalinhados de fissão e fusão).

$\underline{y_0}$ é calculado a partir da diferença entre a energia de interação máxima dos dois núcleos E_{int} e a energia do ponto de sela E_{ps} ,

$$\Delta E = E_{\text{int}} \Big|_{\text{max}} - E_{\text{ps}} = \frac{1}{2} K_y^{(2)} y_0^2 \quad (3.1.3.16)$$

A eq. (3.1.3.16) pode ser modificada como,

$$\Delta E = (E_{\text{int}} - E_{\infty}) - (E_{\text{ps}} - E_0) + (E_{\infty} - E_0) \quad (3.1.3.17)$$

onde a ref. (12)

$$E_{\text{int}} \Big|_{\text{max}} = \frac{Z_1 A_2 e^2}{R_1 + R_2 + a + d} = E_{\text{int}} - E_{\infty} \quad (3.1.3.18)$$

e d é tirado diretamente da fig. 3.1.3.2 da mesma referência.

$$(E_0 - E_{\infty}) = (E_{96}^{(0)} - 2E_{48}^{(0)}) + E_C \quad (3.1.3.19)$$

é determinado da ref. (19), onde $E_{96}^{(0)}$ e $E_{48}^{(0)}$ correspondem às energias de superfície do núcleo esférico composto ($A=96$) e do núcleo ($A=48$) e E_C é a diferença de energia Coulombiana entre os mesmos núcleos esféricos após e antes da fusão, respectivamente.

$(E_{\text{ps}} - E_0)$ pode ser determinado diretamente da fig. 3.1.3.3⁽¹²⁾, extrapolando a curva para valores do parâmetro de fissionabilidade $\chi = 0.335$ para o núcleo fundido $A = 96$, $Z = 46$ e $N = 50$. Dos resultados acima,

$$\Delta E = 1.7 \text{ MeV} = \frac{1}{2} K_y^{(2)} y_0^2 = \frac{m \omega_y^{(2)2} y_0^2}{2} \quad (3.1.3.20)$$

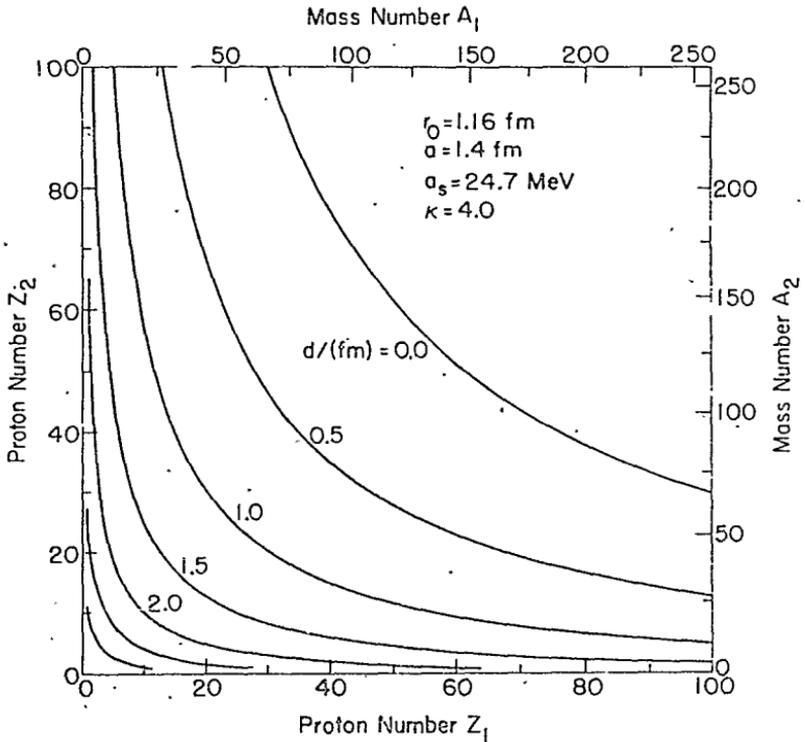


Fig. 3.1.3.2 - Distância d /(fm) entre as superfícies externas dos núcleos para a qual a barreira de interação é máxima.

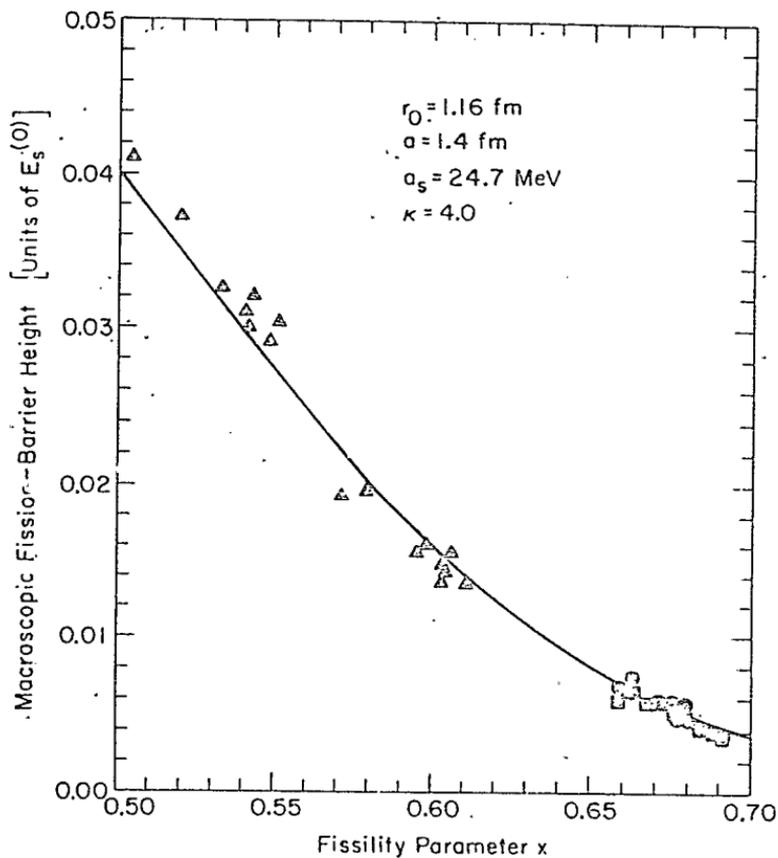


Fig. 3.1.3.3 - Alturas máximas da barreira de fissão em função do parâmetro de fissionabilidade x (tirado da ref. (12)).

donde,

$$y_0 = 1.2 \text{ fm} \quad (3.1.3.21)$$

G - cálculo de x_1 (valor da coordenada x para o qual $V|_{int} = V|_{ps}$)

$$x_1 = \left[\frac{\hbar \omega_y(2)}{\hbar \omega_y(1)} \right]^{1/2} y_0 = -0.7 \text{ fm}$$

A tab. 3.1.3.1 mostra os valores dos parâmetros para todos os sistemas calculados. Nas figs. 3.1.3.4, 3.1.3.5, 3.1.3.6 e 3.1.3.7 são apresentados os resultados para as penetrabilidades exatas em função da energia ($E - V_0$). Os potenciais realísticos correspondentes a esses sistemas de colisão são mostrados nas figs. 3.1.3.8, 3.1.3.9 e 3.1.3.10 (figs. tiradas da ref.(28)). A discussão dos resultados será feita no capítulo seguinte.

3.2 - Cálculo da Trajetória de Ação Estacionária

A penetrabilidade para o processo de fissão espontânea pode ser dada na aproximação WKB⁽³⁰⁾ por,

$$P = e^{-2 \frac{S}{\hbar}} \quad \text{para } S \gg \hbar \quad (3.2.1)$$

onde S é a ação.

Para o caso em que a Hamiltoniana do sistema é considerada como constante de movimento $H(q,p) = E = \text{cte}$, pode-se

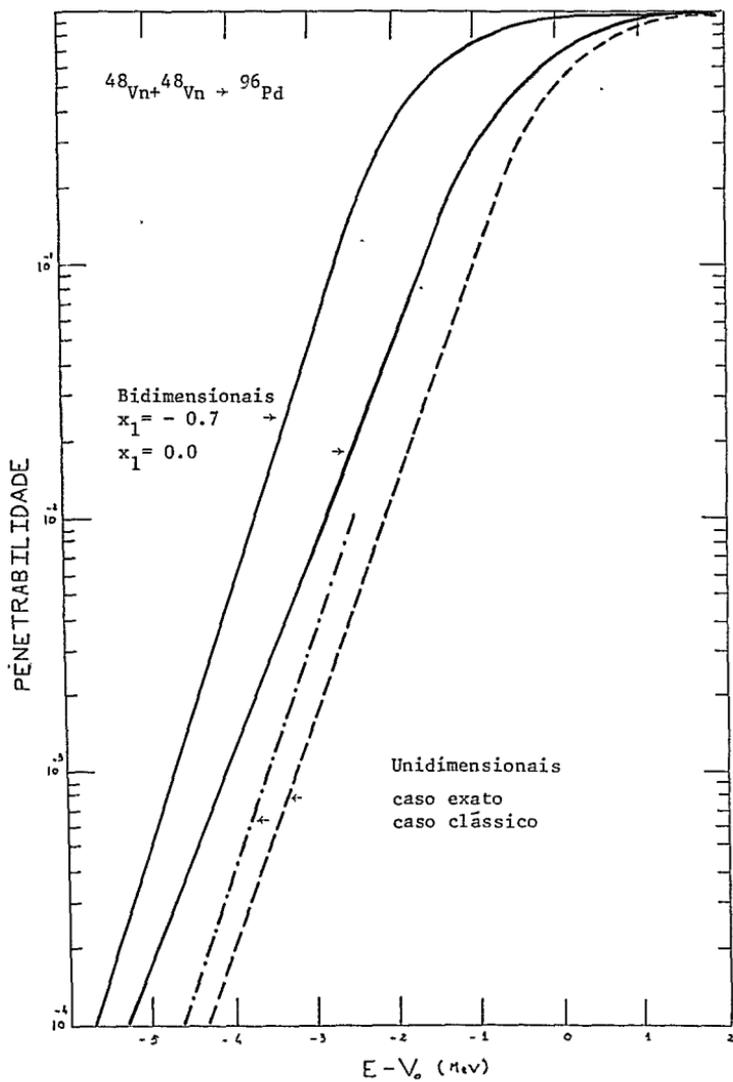


Fig. 3.1.3.4 - Penetrabilidades para o sistema
 $48_{Vn} + 48_{Vn} \rightarrow 96_{Pd}$.

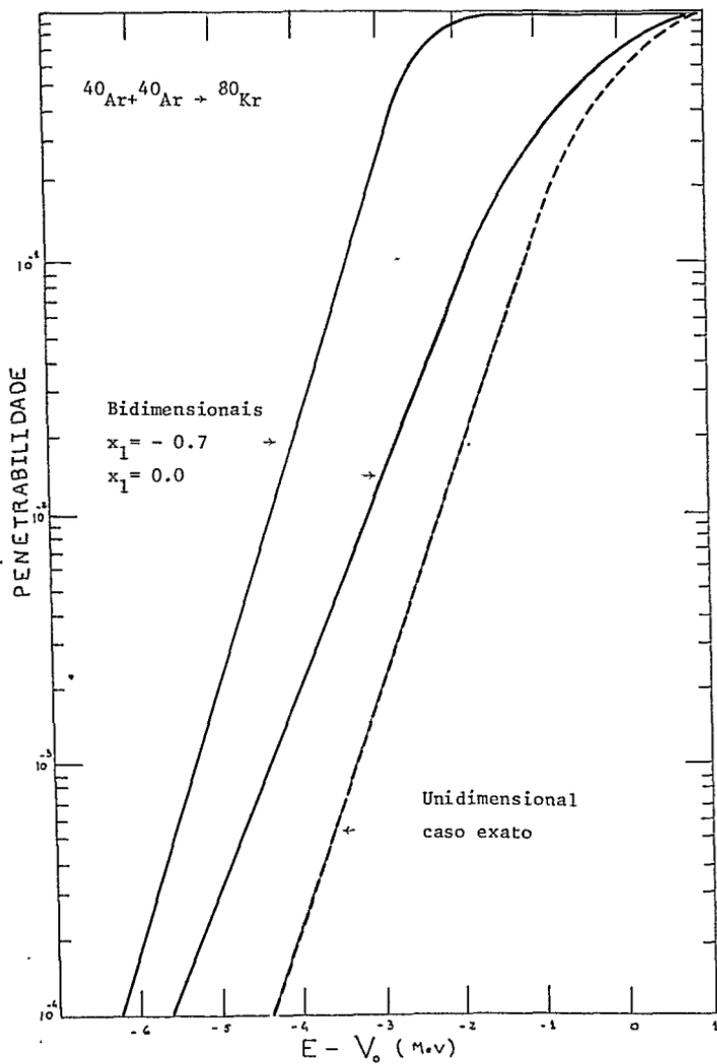


Fig. 3.1.3.5 - Penetrabilidades para o sistema
 $40_{\text{Ar}} + 40_{\text{Ar}} \rightarrow 80_{\text{Kr}}$.

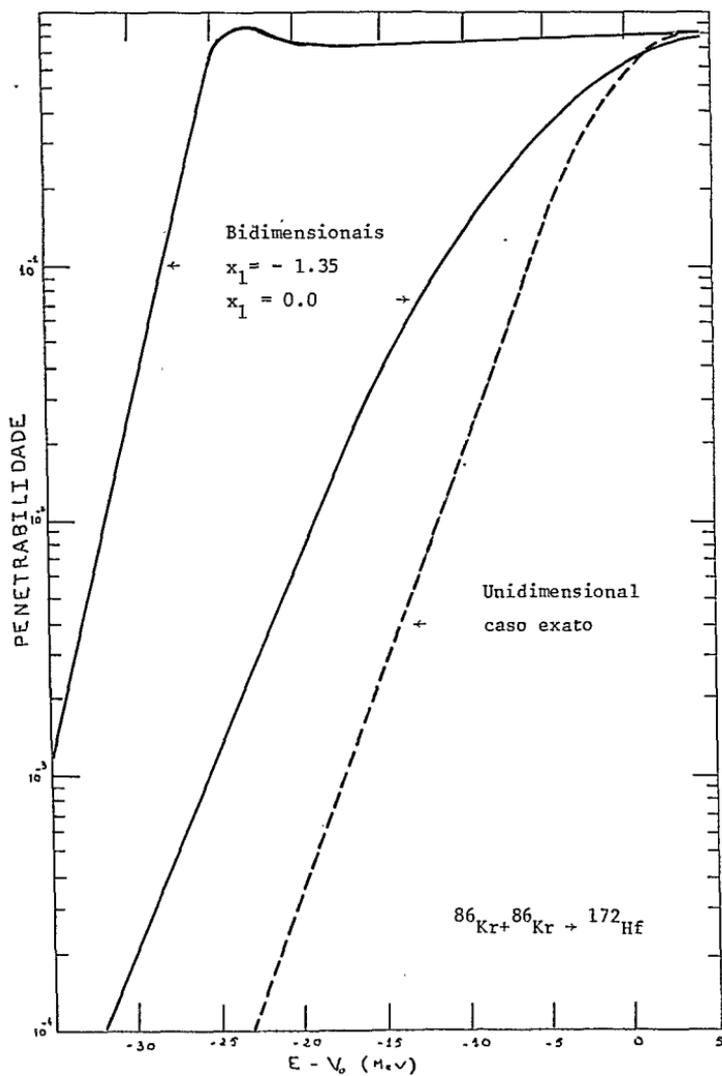


Fig. 3.1.3.6 - Penetrabilidades para o sistema $^{86}\text{Kr} + ^{86}\text{Kr} + ^{172}\text{Hf}$.

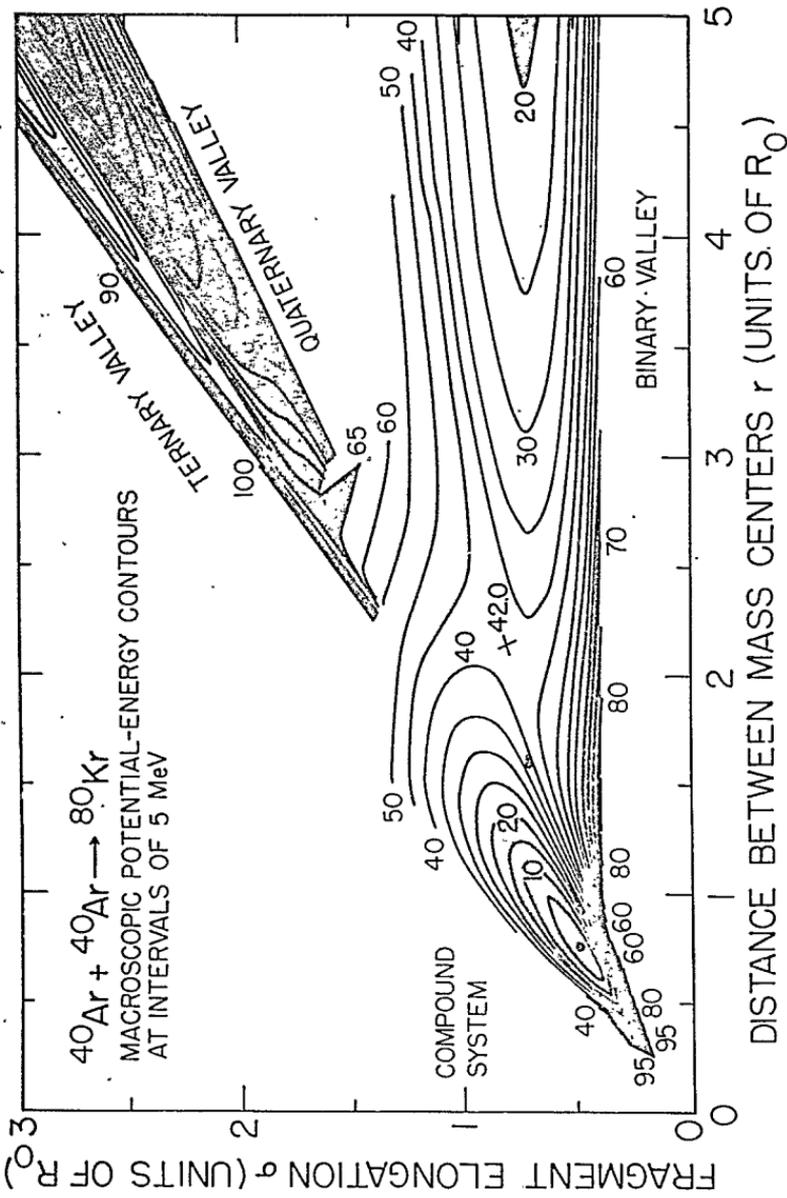


Fig. 3.1.3.8

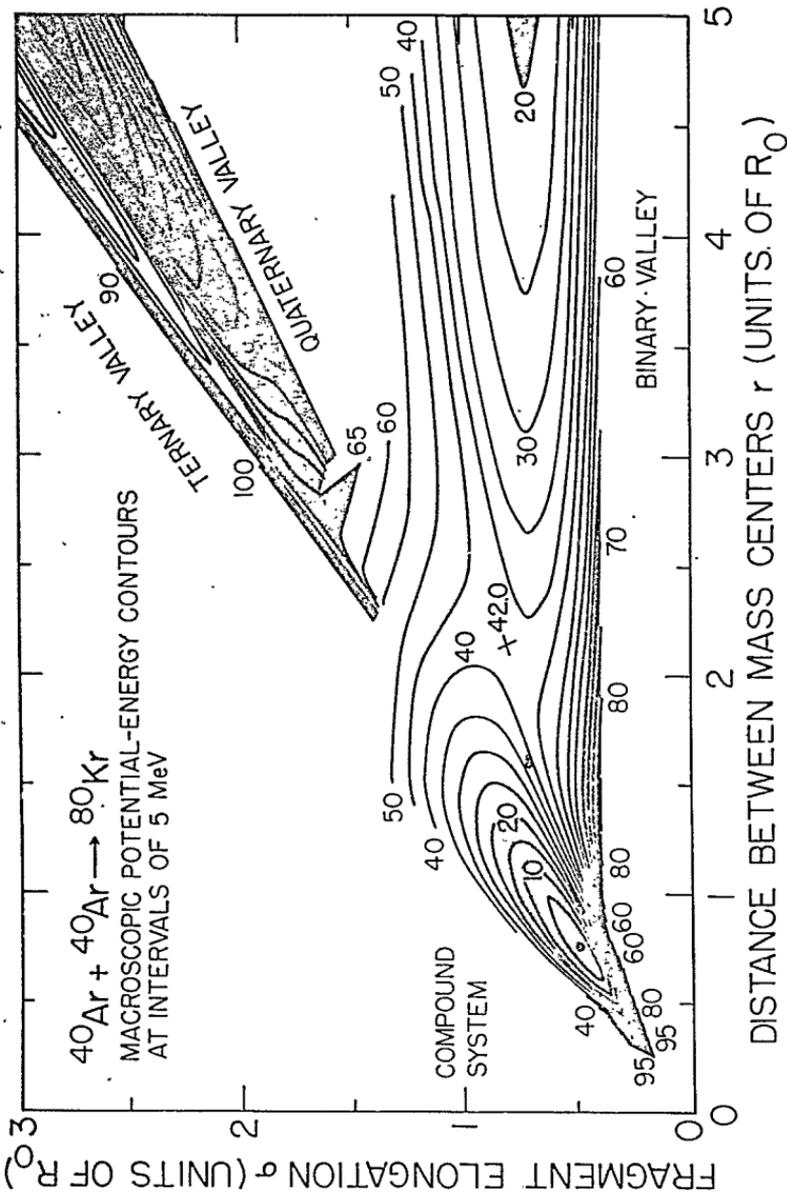


Fig. 3.1.3.8

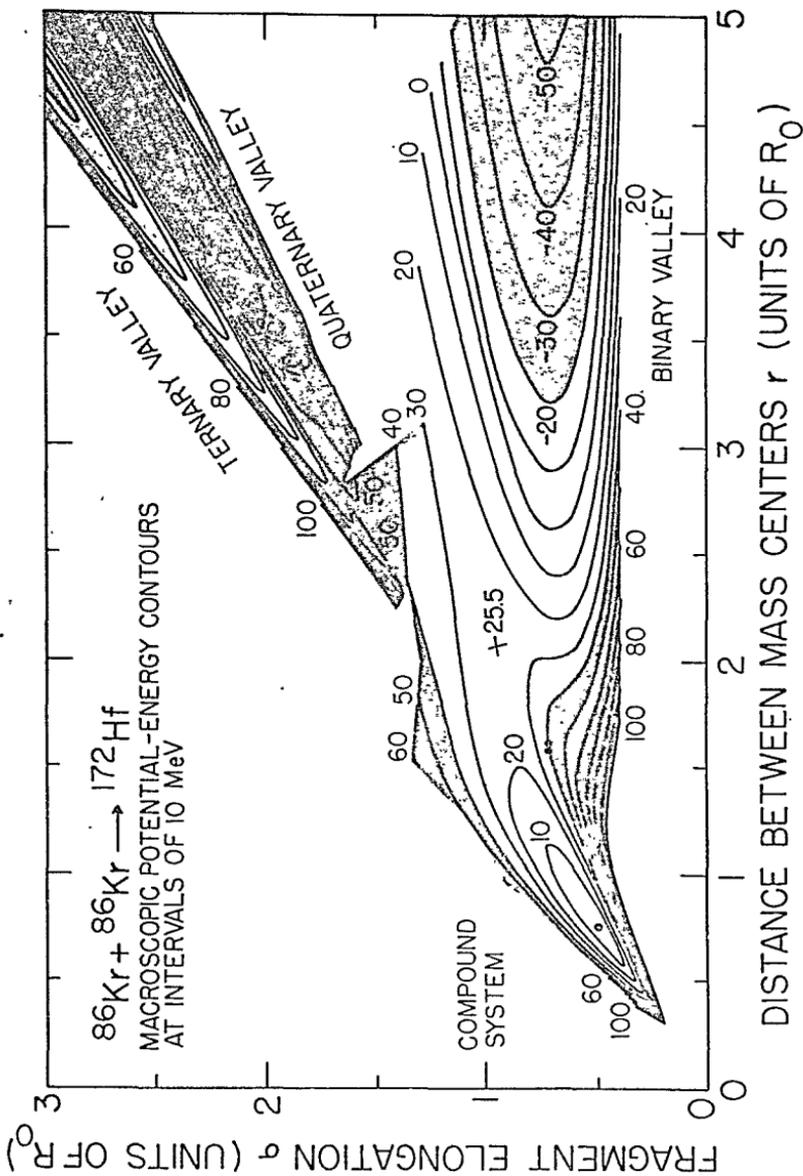


Fig. 3.1.3.9

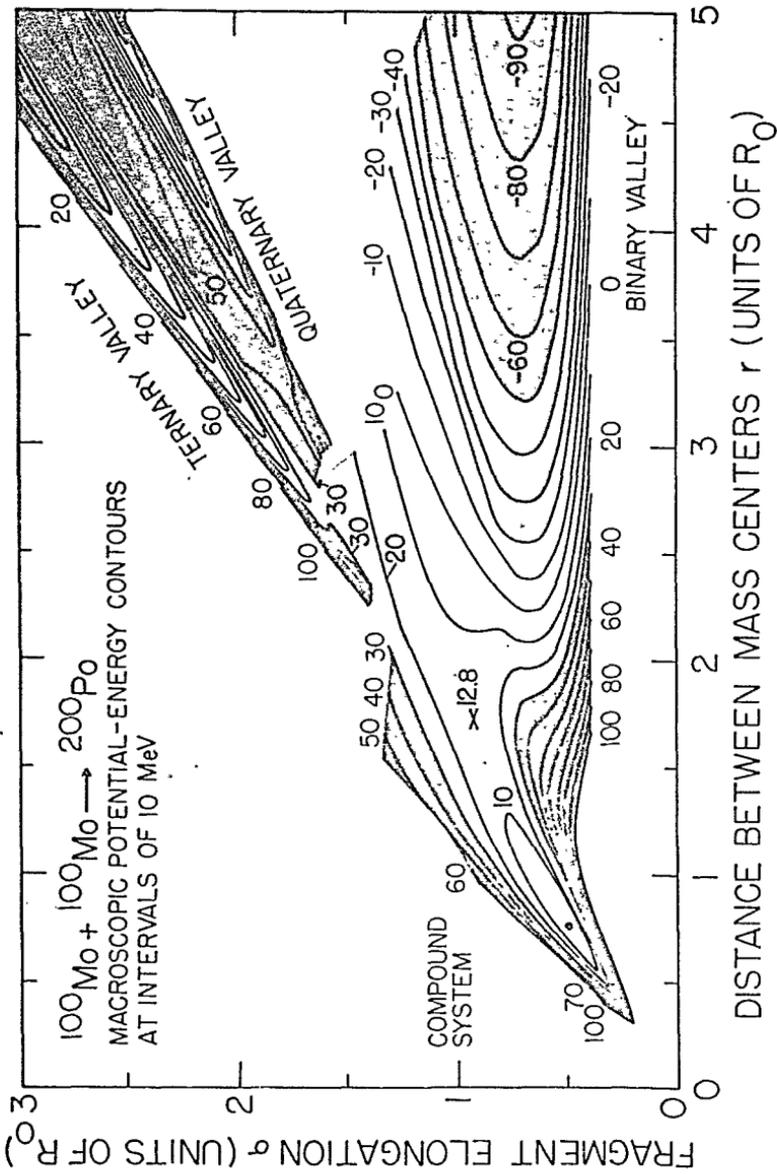


Fig. 3.1.3.10

encontrar a trajetória para o processo pelo princípio de ação mínima (29), do qual

$$\delta S = 0 \quad (3.2.2)$$

Da mecânica clássica,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt = \int_{q_1}^{q_2} \sum_i p_i dq_i \quad (3.2.3)$$

onde $\{q_i\}$ são as coordenadas que descrevem o sistema e $\{p_i\}$ são os momentos canonicamente conjugados. Das relações,

$$\left\{ \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\sum_{i,j} B_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V \right] = \sum_j B_{ij}(q) \frac{dq_j}{dt} \\ H = E &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij}(q) \frac{dq_j}{dt} \frac{dq_i}{dt} + V \end{aligned} \right. \quad (3.2.4)$$

e considerando uma trajetória tal que,

$$\{q_i\} = \{q_i(\xi)\}$$

onde ξ é um parâmetro que no nosso caso especifica as configurações das formas do núcleo durante o processo no intervalo q_1 e q_2 , temos

$$S = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{2(E-V) \sum_{i,j} B_{ij}(q) \frac{dq_i}{d\xi} \frac{dq_j}{d\xi}} d\xi \quad (3.2.5)$$

A trajetória para a qual $\delta S = 0$ pode ser encontrada numericamente forçando-a a passar através de vários pontos entre ξ_1 e ξ_2 . Esses pontos intermediários são modificados até se obter $|S|$ mínimo.

Vamos admitir a mesma coisa para o caso da fusão e tentar resolver o problema unidimensional na mesma aproximação. O modelo usado será o mesmo que o do parágrafo 3.1, e por conseguinte, a inércia é considerada constante. A diferença principal entre este problema e o da fissão é que a trajetória agora tem de ser definida através de um potencial com duas barreiras para o qual podem aparecer regiões com alguma descontinuidade (figs. 3.2.1 e 3.2.2).

Suponhamos que um dos caminhos prováveis comece no vale de fusão em algum ponto $x = a < 0$ para o qual $V = E$, seja desviado para o vale de fissão onde é energeticamente mais favorável e termine nesse mesmo vale para algum valor $x = b > 0$, com $V = E$. O potencial correspondente a essa trajetória, projetado no eixo dos x , tem a forma esquemática aproximada da fig. 3.2.1. O problema consiste então no cálculo do coeficiente de transmissão para tal barreira incluindo a possibilidade de reflexões internas no ponto de descontinuidade. No apêndice A é feito um cálculo WKB geral para a penetrabilidade de uma barreira com uma descontinuidade interna.

O coeficiente de transmissão T definido como,

$$T = \frac{1}{|M_{11}|^2} \quad (3.2.6)$$

onde M_{11} é um elemento da matriz de transição total, resulta

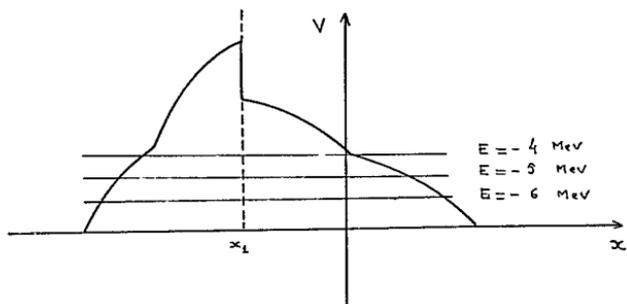


Fig. 3.2.1 - Barreira unidimensional com descontinuidade, correspondente a uma das trajetórias de fusão.

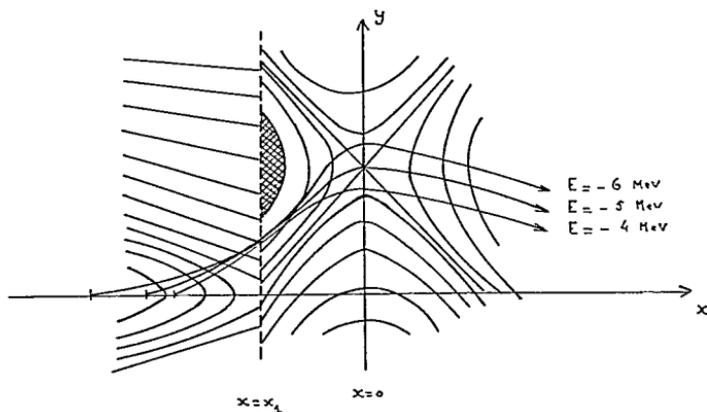


Fig. 3.2.2 - Trajetórias clássicas de fusão para o mesmo potencial usado no cálculo das penetrabilidades exatas.

com a seguinte forma,

$$T = 4 / \left\{ \left[\frac{M'_{11}}{2\theta} + 2 M'_{22} \theta \right]^2 + \left[\frac{M'_{21}}{\theta} - M'_{12} \theta \right]^2 \right\} \quad (3.2.7)$$

onde $\{M'_{ij}\}$ são os elementos da matriz de transição interna e θ é dado por,

$$\theta = e^{\int_a^b K dx}$$

No caso em que $M'_{11} = M'_{22} = 1$, $M'_{12} = M'_{21} = 0$ e θ grande, o resultado acima dá o valor,

$$T = 4 / \left[\frac{1}{2\theta} + 2\theta \right]^2 \sim e^{-2 \int_a^b K dx}$$

que é o coeficiente de transmissão para o caso simples da barreira usual.

A penetrabilidade é então encontrada para a trajetória de T_{\max} . Escolheu-se uma função $y = f(x, \alpha_i)$ como,

$$f(x, \alpha_i) = \begin{cases} \alpha_1 (x-x_1)(x-b) + (x-x_1)(y_0 - \alpha_2) / (b-x_1) - \alpha_2; & x > x_1 \\ \alpha_2 (x-a)^2 / (x_1-a)^2 & ; x < x_1 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

onde $\{\alpha_i\}$ e x_1 são parâmetros convenientes e a e b são os pontos clássicos de retorno.

As trajetórias encontradas são mostradas na fig. 3.2.2 e a variação da penetrabilidade com a energia pode ser vis

ta na fig. 3.1.3.4, juntamente com as penetrabilidades multidimensionais.

CAPÍTULO IV

DISCUSSÃO E CONCLUSÃO DO TRABALHO

Vimos nos capítulos anteriores como uma descrição multidimensional da dinâmica da fissão e fusão altera de modo significativo os resultados das penetrabilidades unidimensionais para esses processos. Sem dúvida, os cálculos são realizados em várias aproximações devido à dificuldade do problema realístico exato. Para o caso da fissão, o cálculo da trajetória equivale a aceitar a aproximação clássica para o problema. As propriedades das trajetórias, estudadas no cap. II, mostram que dependendo do potencial e dos parâmetros de inércia, nem sempre é fácil a sua determinação. Em alguns casos apresentam mesmo características não adequadas a um problema real. Hofmann⁽³⁾ mostrou que o movimento perpendicular ao caminho de fissão diminui a penetrabilidade, quando comparada à do cálculo unidimensional, devido em parte ao aumento do potencial efetivo na direção de separação e em parte às transições entre estados pertencentes ao grau de liberdade transversal. Em adição a isso deve incluir-se também, um decréscimo da penetrabilidade devido ao efeito dos parâmetros de inércia sobre as trajetórias⁽³²⁾. Como pode ser visto pelas figs. 2.1.3 e 2.1.4, as eqs. (2.1.4) e (2.1.5) definem, em geral, caminhos mais longos que o caminho usual de potencial mínimo e desse modo, as penetrabilidades para as primeiras devem ser menores.

Um aspecto importante a considerar está ligado à validade do conceito de trajetória estática de Hofmann quando são levadas em conta transições entre estados do movimento oscilatório transverso. Segundo sua teoria, a densidade de corrente $j(x)$ na direção de fissão x é calculada a partir de uma integração em y para a densidade de corrente total $j(x,y)$. A penetrabilidade total resulta basicamente da razão entre as densidades médias de corrente transmitida e incidente calculadas em termos das amplitudes de transição, entre os estados assintóticos do problema, na aproximação de Born. Dessa maneira, ao calcular a penetrabilidade para as trajetórias adiabáticas não se está levando em conta qualquer possibilidade de que o fluxo correspondente ao movimento em y altere esses caminhos. O fato de que a trajetória nem sempre coincide com o mínimo de potencial, leva a admitir que hajam componentes dos estados excitados do movimento perpendicular que favoreçam o deslocamento gradual da trajetória ao longo do potencial. Nesse caso, ficaria difícil encontrar a trajetória real para o processo pela dificuldade em determinar localmente tais desvios. A perda do conceito de trajetória certamente acontece quando o acoplamento para a inércia é muito forte embora se espere neste caso uma diminuição grande da penetrabilidade com relação ao cálculo unidimensional.

Outro problema está relacionada à estabilidade da equação diferencial, que define a trajetória, perto do ponto de sela. Foi mostrado que a única maneira de atravessar a barreira através do vale de fissão é passando pelo próprio ponto de equilíbrio, podendo apenas variar a direção da trajetória nesse ponto. Entretanto, dependendo dos parâmetros de inércia é possível

que o processo prefira deslocar-se para regiões de potencial mais alto, como foi mostrado em alguns trabalhos^(2,7). Certamente, deve ser mais correto determinar as trajetórias dinâmicas para o modo de fissão através da escolha do caminho de ação estacionária e introduzir o efeito do movimento para o grau de liberdade transversal no formalismo de Hofmann. Contudo, pelas mesmas razões de antes, em certos casos o método não deve valer. Por outro lado, quando o acoplamento para a inércia é fraco, a inclusão da dinâmica transversal tem como grande vantagem a correção das barreiras de fissão unidimensionais (estáticas - Hofmann⁽³⁾ ou dinâmicas - Pauli⁽²⁾).

Para o caso da fusão, o potencial é mais complexo e a trajetória estática fica difícil de determinar a partir da eq. (2.1.15). As trajetórias de fusão foram calculadas através de um método numérico que consistiu basicamente em descrever uma trajetória em termos de parâmetros que eram variados até encontrar-se aquela correspondente ao valor máximo da penetrabilidade, para uma dada energia incidente. A inércia foi mantida constante neste caso porque o objetivo era encontrar a penetrabilidade em uma dimensão para o mesmo potencial do cálculo exato. As trajetórias mostradas na fig. 3.2.2 nem sempre passam através do ponto de sela. Isso provém essencialmente do compromisso entre a altura da barreira e o caminho mais curto, para o máximo da penetrabilidade. Na verdade, a transição brusca do vale de fusão para o vale de fissão aumenta a energia cinética na direção deste último, a altura da barreira resulta efetivamente menor devido à mudança do caminho, mas em compensação o caminho fica mais longo. Na fig. 3.1.3.4, são mostradas

as penetrabilidades unidimensionais na aproximação clássica juntamente com as penetrabilidades bidimensionais e unidimensionais exatas para o sistema $^{48}\text{Vn}_{23} + ^{48}\text{Vn}_{23} \rightarrow ^{96}\text{Pd}_{46}$. A penetrabilidade unidimensional exata foi calculada considerando a situação limite dos dois vales superpostos, com curvaturas e mínimos iguais, numa única barreira de interação. Entre os resultados unidimensionais a maior penetrabilidade para o caso clássico mostra a preferência do processo para caminhos na direção do vale de fissão. Os resultados multidimensionais, ao contrário, mostram um acréscimo relativo ao problema em uma dimensão. Isso pode ser explicado devido ao fato de que uma onda incidente, que está localizada no vale de fusão, ao encontrar a encosta que separa os vales é parcialmente transmitida e refletida em ondas que correspondem a diferentes estados excitados do movimento transversal e, por conseguinte, a quantidades diferentes de energia na direção de fusão. A presença dessa encosta e do vale de fissão aumentam a penetrabilidade para todas as energias incidentes mas, o aumento relativo é maior para energias incidentes baixas, como pode ser visto nas figs. 3.1.3.4 - 3.1.3.7. Nessa mesma região de energias a penetrabilidade unidimensional varia mais rapidamente com a energia do que a penetrabilidade bidimensional para a mesma barreira. Esse efeito corrige as larguras das barreiras em uma dimensão tornando-as mais estreitas. Essa correção explica em parte a discrepância entre os valores dos parâmetros de curvatura $\hbar\omega_x$ calculados e os experimentais, obtidos analisando as seções de choque em baixas energias em termos de uma barreira unidimensional, os primeiros substancialmente menores que os últimos (8). Com

efeito, para o mesmo range de energias ($E \sim 1. - 1.5 \text{ MeV}$) em que Gutbrod⁽⁸⁾ encontrou uma diferença de $\sim 5 \text{ MeV}$ entre as barreiras calculadas e experimentais para os sistemas $^{35}\text{Cl} + ^{58,60,62,64}\text{Ni}$, um cálculo aproximado para as larguras das barreiras mostra um acréscimo de energia para o parâmetro de curvatura $\hbar\omega_x$ da barreira bidimensional de cerca de 5 MeV , com relação à barreira em uma dimensão.

Para energias muito baixas a dependência da penetrabilidade com a energia é qualitativamente semelhante à calculada para uma barreira em uma dimensão com uma altura mais alta de ΔV e a mesma largura das barreiras de interação e fissão. Isso pode ser visto nas figs. 3.1.3.4-3.1.3.7, onde as curvas das penetrabilidades tendem a ficar paralelas para energias ($E - V_0$) muito baixas, com uma distância entre elas de

$$\Delta V = \frac{1}{2} K_y^{(2)} y_0^2 + \frac{1}{2} (\hbar\omega_y^{(1)} - \hbar\omega_y^{(2)}) \quad (4.1)$$

que corresponde à diferença das energias entre os estados fundamentais nos dois vales da barreira de fusão. A assintota para a qual tendem as penetrabilidades bidimensionais corresponde, desse modo, à curva da penetrabilidade unidimensional exata para a barreira de fissão. É razoável pensar que esse seja o caso limite para os processos em energias muito baixas, já que nesse caso a diferença de energia ΔV é muito pequena em relação à energia ($V_0 - E$). Em outras palavras, a diferença de energia ΔV de transição entre os dois vales torna-se bastante importante e a dinâmica do processo de fusão realiza-se quase unicamente através do vale de fissão.

Um efeito adicional encontrado é o aparecimento de ressonâncias nas penetrabilidades bidimensionais para sistemas que possuem grandes valores de x_1 . Isso começa a observar-se já no sistema $^{86}\text{Kr} + ^{86}\text{Kr} \rightarrow ^{172}\text{Hf}$ (fig. 3.1.3.6) e de maneira bastante nítida no sistema $^{100}\text{Mo} + ^{100}\text{Mo} \rightarrow ^{200}\text{Po}$ (fig. 3.1.3.7). Essas ressonâncias provêm da existência de reflexões nos bordos de um poço de potencial entre o ponto de sela de fissão e o vale de fusão, o qual é tanto mais longo quanto mais afastado o parâmetro característico x_1 . Na verdade, esse poço de potencial é apenas uma característica particular do nosso modelo para a barreira de fusão e, desse modo, nenhum significado físico mais amplo deve ser invocado para as ressonâncias que aparecem. Contudo, de um modo puramente indutivo, podemos supor que para o caso em que a barreira de fissão possua um segundo mínimo de instabilidade a penetrabilidade apresente um comportamento análogo com ressonâncias.

Ainda para este último sistema, em que o máximo da barreira de fissão é muito mais baixo que o máximo da barreira de interação (tab. 3.1.3.1), podemos observar que a penetrabilidade em duas dimensões é muito diferente que aquela em uma dimensão. Em particular, para o valor de energia 7 MeV inferior ao máximo da barreira de fusão unidimensional, a primeira é aproximadamente 10^7 vezes maior que a segunda. Também um cálculo para as larguras das barreiras no intervalo de energias entre 3 e 6,5 MeV resulta numa correção da ordem de 45 MeV para o parâmetro de curvatura $\hbar\omega_x$ da barreira de interação. Em relação aos sistemas mais leves, como por exemplo o $^{48}\text{Vn} + ^{48}\text{Vn} \rightarrow ^{96}\text{Kr}$, as diferenças mais acentuadas neste caso são devidas

principalmente ao maior afastamento do parâmetro característico x_1 que determina uma influência maior do vale de fissão para a dinâmica do processo. A variação de x_1 em relação ao valor da coordenada x do máximo da barreira de interação simula no nosso modelo a influência das distâncias relativas entre o ponto de sela e o máximo da barreira de fusão unidimensional (ver discussão no cap. I).

Pelas informações significativas do nosso potencial, achamos que um estudo posterior deve ser feito de modo a torná-lo mais completo e realista. Devemos, por exemplo, evitar de algum modo a descontinuidade introduzida que concorre para efeitos espúrios ao problema. Também nosso problema admite unicamente a probabilidade de fusão para um certo sistema sem levar em conta a possibilidade de sua posterior desexcitação por processo de fissão. Nesse sentido, de acordo com um trabalho de Nemes, Piza e Perazzo⁽⁴⁾, a existência de uma barreira de potencial finita na região das ondas de fusão deve permitir a simulação desse processo de decaimento. Além disso, a inclusão de efeitos dissipativos por algum termo de potencial dependente das velocidades coletivas, refletindo o grau de acoplamento entre os estados interno e coletivo do sistema, deve ser considerado.

Um outro aspecto que achamos importante está relacionado às trajetórias prováveis de fusão. As barreiras de potencial de fusão de Müller e Nix⁽²⁹⁾ foram calculadas na aproximação de densidade constante para o processo, parametrizando as formas deformadas dos núcleos em termos de duas coordenadas de simetria (separação e alongação). Alguns trabalhos^(33,34), contudo, admitem barreiras de interação calculadas no caso extremo

de densidade dupla para a região de superposição dos núcleos durante a colisão. Os dois casos podem ser considerados como extremos para o problema. Certamente a dinâmica do processo de fusão deve realizar-se de alguma maneira em que a densidade entre como um parâmetro adicional importante ao longo de todo o processo. Esse parâmetro poderia corresponder, por exemplo, a um grau de liberdade para a expansão do volume inicial de um núcleo de densidade ρ até um volume final para o qual a densidade cairia da metade. A trajetória de fusão nesse caso deve ser bem diferente daquela no espaço a duas dimensões usado.

Essas as discussões, conclusões e sugestões do nosso trabalho que julgamos tenha contribuído um pouco à compreensão da dinâmica dos processos de fissão e fusão nucleares.

APÊNDICE A

CÁLCULO DOS COEFICIENTES C_{mn}

Temos da eq. (3.1.2.14)

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \int_{-\infty}^{\infty} U_m^{(2)}(y-y_0) U_n^{(1)}(y) dy \\ &= \sqrt{N_m N_n^{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha_2^2}{2}(y-y_0)^2\right) \exp\left(-\frac{\alpha_1^2}{2}y^2\right) H_m((y-y_0)\alpha_2) H_n(\alpha_1 y) dy \\ &= \sqrt{N_m N_n^{-1}} I_{mn} \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left[\frac{m_y^{(1)} \omega_y^{(1)}}{\hbar} \right]^{1/2} \\ \alpha_2 &= \left[\frac{m_y^{(2)} \omega_y^{(2)}}{\hbar} \right]^{1/2} \end{aligned} \tag{A.2}$$

usando as funções geradoras,

$$\left\{ \begin{aligned} F(h_1, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} h_1^n = e^{-h_1^2 + 2h_1 y} \\ F(h_2, (y-y_0)) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(y-y_0)}{m!} h_2^m = e^{-h_2^2 + 2h_2(y-y_0)} \end{aligned} \right. \tag{A.3}$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{m,n} I_{mn} \frac{h_1^m}{n!} \frac{h_2^m}{m!} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)y^2 + (\alpha_2^2 y_0 + 2\alpha_2 h_2 + 2\alpha_1 h_1)y \right] \times \\
 &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \alpha_2^2 y_0^2 - h_1^2 - h_2^2 - 2\alpha_2 y_0 h_2 \right] dy \quad , \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

rearranjando os termos em (A.4) e integrando em y ,

$$\begin{aligned}
 J &= \left[\frac{2\pi}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} y_0^2 \right] \exp \left[\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} h_1^2 + \frac{2\alpha_1 \alpha_2^2 y_0}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} h_1 \right] \times \\
 &\times \exp \left[-\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} h_2^2 - \frac{2\alpha_1^2 \alpha_2 y_0}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} h_2 \right] \exp \left[\frac{4\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} h_1 h_2 \right] \quad , \quad (A.5)
 \end{aligned}$$

por eq. (A.3) vem,

$$\begin{aligned}
 J &= \left[\frac{2\pi}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} y_0^2 \right] \sum_n i^{n/2} \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right)^{n/2} \frac{h_1^n}{n!} H_n(+ih_1) \times \\
 &\times \sum_m \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right)^{m/2} \frac{h_2^m}{m!} H_m(+h_2) \sum_k \left(\frac{2\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right)^k \frac{h_1^k h_2^k}{k!} \quad , \quad (A.6)
 \end{aligned}$$

com,

$$\left\{ \begin{aligned} h_1 &= \frac{\alpha_1 \alpha_2^2 y_0}{(\alpha_1^4 - \alpha_2^4)^{1/2}} \\ h_2 &= \frac{\alpha_1^2 \alpha_2 y_0}{(\alpha_1^4 - \alpha_2^4)^{1/2}} \end{aligned} \right. \quad (A.7)$$

A eq. (A.6) pode ainda ser modificada para,

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{2\pi}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right]^{1/2} \exp \left[- \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 y_0^2}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \right] \sum_{(n-K)} \sum_{(m-K)} \sum_K \frac{i}{K! (n-K)! (m-K)!} h_1^n h_2^m x \\ &\times \left[\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right]^{\frac{m+n}{2} - K} \left[\frac{2\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right]^K H_{n-K} (+i h_1) H_{m-K} (+h_2) = \\ &= \sum_m \sum_n I_{mn} \frac{h_1^n}{n!} \frac{h_2^m}{m!} \quad , \quad (A.8) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \left[\frac{2\pi}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right]^{1/2} \exp \left[- \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 y_0^2}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \right] \sum_K^{\min(n,m)} \frac{m! n! (-1)^{n-K}}{K! (n-K)! (m-K)!} x \\ &\times \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right)^{\frac{m+n}{2} - K} \left(\frac{2\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right)^K H_{m-K} (+h_2) H_{n-K} (+h_1) \quad (A.9) \end{aligned}$$

onde,

$$\bar{H}_{n-K}(+h_1) = (-i)^{n-K} H_{n-K}(ih_1) \quad . \quad (A.10)$$

Finalmente, determinado I_{mn} podemos calcular o coeficiente C_{mn} , levando em conta os fatores de normalização N_m e N_n dados por,

$$N_\rho = \left[\frac{\alpha}{\pi^{1/2} 2^\rho \rho!} \right]^{1/2}, \quad \rho = m, n \quad (A.11)$$

$$C_{mn} = N_m N_n I_{mn} = \left[\frac{2\alpha_1\alpha_2}{2^{m+n} m!n! (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1 - \alpha_2} \right)^{\frac{m+n}{2}} \exp - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 y_0^2}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \sum_{K=0}^{\min(m,n)} \frac{(-1)^{n-K}}{K!(n-K)!(m-K)!} \times$$

$$\times \left(\frac{4\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \right)^K H_{m-K}(h_2) \bar{H}_{n-K}(h_1) \quad . \quad (A.12)$$

APÊNDICE B

CÁLCULO DO WRONSKIANO

As soluções cilíndrico parabólicas são dadas por (27),

$$\begin{aligned} v(a, \pm \xi) &= \frac{[\cosh \pi a]^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} \left[G_1 v_1(\xi) \mp \sqrt{2} G_3 v_2(\xi) \right] = \\ &= 2^{-3/4} \left[\sqrt{\frac{G_1}{G_3}} v_1(\xi) \mp \sqrt{\frac{2G_3}{G_1}} v_2(\xi) \right], \end{aligned} \quad (B.1)$$

onde $v_1(\xi)$ e $v_2(\xi)$ são as séries par e ímpar de ξ ,

$$\begin{cases} v_1(\xi) = 1 + a \frac{\xi^2}{2!} + (a^2 - \frac{1}{2}) \frac{\xi^4}{4!} + (a^3 - \frac{7}{2}a) \frac{\xi^6}{6!} + \dots \\ v_2(\xi) = a \frac{\xi^3}{3!} + (a^2 - \frac{3}{2}) \frac{\xi^5}{5!} + \dots \end{cases}, \quad (B.2)$$

os coeficientes a_n de $\frac{\xi^n}{n!}$ obedecem à relação de recorrência

$$a_{n+2} = a \cdot a_n - \frac{1}{4} n(n-1) a_{n-2}, \quad (B.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 = \left[\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} i a\right) \right] \quad G_3 = \left[\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} i a\right) \right] \\ v(a, 0) = \frac{1}{2^{1/2}} \sqrt{\frac{G_1}{G_3}} \frac{dv}{d\xi}(a, 0) = -\frac{1}{2^{1/2}} \sqrt{\frac{G_3}{G_1}} \end{array} \right. , \quad (B.4)$$

e com

$$\left[\frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x)} \right]^2 = \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{y^2}{(x+n)^2} \right]^{-1} , \quad (B.5)$$

podemos obter uma solução conveniente para o Wronskiano como se gue:

$$\frac{d}{d\xi} W_{ij} \left[v_i(a_1), v_j(a_2) \right] = (a_2 - a_1) v_i(a_1) v_j(a_2) , \quad (B.6)$$

onde foi usada a equação diferencial (3.1.2.8). Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{ij} = W(0) - (a_1 - a_2) \int_0^\xi v_i(a_1) v_j(a_2) d\xi \\ \text{com } W(0) = W_{ij} \Big|_{\xi=0} = 1 - \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (B.7)$$

e da eq. (3.1.4.3) e $a_m = C_m m!$,

$$C_{m+2} = \left[a C_m - \frac{1}{4} C_{m-2} \right] / \left[(m+1)(m+2) \right] \quad (B.8)$$

fazendo $m+2 = K$, vem,

$$c_K = a \left[c_{K-2} - \frac{1}{4} c_{m-4} \right] / \left[K(K-1) \right] \quad (\text{B.9})$$

e

$$\int_0^\xi v_i v_j d = \sum_K \sum_\rho c_K^{(1)} c_K^{(2)} \int_0^\xi \xi^{K+\rho} d\xi$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \frac{m+1}{m+1} \left[\sum_{n=0}^m c_{m-n}^{(i)} c_n^{(j)} \right] \quad (\text{B.10})$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \frac{\xi^{m+1}}{m+1} G_m, \quad \text{para } m = K + \rho.$$

E, finalmente,

$$W \left[v(a_2, \xi), v(a_1, -\xi) \right] =$$

$$= 2^{-3/4} W \left\{ \left[\sqrt{\frac{G_1}{G_3}}^{(2)} v_1(a_2) - \sqrt{\frac{2G_3}{G_1}}^{(2)} v_2(a_2) \right], \left[\sqrt{\frac{G_1}{G_3}}^{(1)} v_1(a_1) + \sqrt{\frac{2G_3}{G_1}}^{(1)} v_2(a_1) \right] \right\} =$$

$$= 2^{-3/4} \left\{ W \left[g^{(2)} v_1(a_2), g^{(1)} v_1(a_1) \right] + W \left[g^{(2)} v_1(a_2), h^{(1)} v_2(a_1) \right] - \right.$$

$$\left. - W \left[h^{(2)} v_2(a_2), g^{(1)} v_1(a_1) \right] - W \left[h^{(2)} v_2(a_2), h^{(1)} v_2(a_1) \right] \right\}$$

$$= - 2^{3/4} \left\{ g^{(1)} g^{(2)} W_{11} + g^{(2)} h^{(1)} W_{12} - h^{(2)} g^{(1)} W_{21} - h^{(2)} h^{(1)} W_{22} \right\} \quad (\text{B.11})$$

APÊNDICE C

CÁLCULO WKB DA PROBABILIDADE DE TRANSMISSÃO PARA UMA BARREIRA COM DESCONTINUIDADE

Seja a barreira dada pela fig. 3.2.1. A conexão entre as funções de onda à esquerda e direita dos pontos de retorno a e b é dada por (37) ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{K}} e^{-\int_x^b K dx} &\longleftrightarrow \frac{2}{\sqrt{K}} \cos \left[\int_b^x K dx - \frac{\pi}{4} \right] \\ -\frac{1}{\sqrt{K}} e^{\int_x^b K dx} &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{sen} \left[\int_b^x K dx - \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

para ponto de retorno a esquerda da região clássica, e

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{K}} \cos \left[\int_x^a K dx - \frac{\pi}{4} \right] &\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{K}} e^{\int_a^x K dx} \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{sen} \left[\int_x^a K dx - \frac{\pi}{4} \right] &\longleftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{K}} e^{\int_a^x K dx} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

para ponto de retorno a direita da região clássica, e

$$K(x) = \begin{cases} \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} \right]^{1/2} \alpha^{1/2} & \alpha = E - V(x) \quad ; \quad E > V \\ -i \left[\frac{2}{\hbar^2} \right]^{1/2} \alpha^{1/2} & \alpha = V(x) - E \quad ; \quad E < V \end{cases} \quad (C.3)$$

Para a região da barreira com descontinuidade, é usada a aproximação até segunda ordem em \hbar na expansão da ação mecânica em potências de \hbar , o que dá para a função de onda ⁽³⁸⁾,

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{\sqrt{K}} \left[1 + \frac{K'}{4K^2} + \frac{1}{8} \int \frac{K'^2}{K^3} dx \right] e^{\int K dx} \Big|_{\text{esquerda}} + \\ &+ \frac{B^F}{\sqrt{K}} \left[1 + \frac{K'}{4K^2} - \frac{1}{8} \int \frac{K'}{K^3} dx \right] e^{\int K dx} \Big|_{\text{esquerda}} \end{aligned} \quad (C.4)$$

e sua derivada primeira,

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{A^*}{\sqrt{K}} \left[1 - \frac{K'}{4K^2} + \frac{1}{8} \int \frac{K'}{K^3} dx \right] e^{\int K dx} \Big|_{\text{esquerda}} - \\ &- \frac{B^E}{\sqrt{K}} \left[1 + \frac{K'}{4K^2} - \frac{1}{8} \int \frac{K'}{K^3} dx \right] e^{\int K dx} \Big|_{\text{esquerda}} \end{aligned} \quad (C.5)$$

Definindo,

$$X = \frac{K'_1}{K_1^2} \quad ; \quad Y = \frac{K'_2}{K_2^2} \quad ; \quad W = \frac{1}{8} \int_{x_2}^{x_1} \frac{K_2'^2}{K_2^3} dx \quad (C.6)$$

e da condição de contorno no ponto x_1 onde a barreira apresenta descontinuidade,

$$\begin{cases} \Psi_I = \Psi_{II} \\ \Psi'_I = \Psi'_{II} \end{cases} \quad (C.7)$$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{K_1}} \left\{ \left[1 + \frac{1}{4} X \right] + \left[1 - \frac{1}{4} X \right] \right\} &= \frac{A}{\sqrt{K_2}} \left[1 + \frac{1}{4} Y + W \right] e^{\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx} + \\ &+ \frac{B}{\sqrt{K_2}} \left[1 - \frac{1}{4} Y - W \right] e^{\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx} \quad (C.8) \\ \sqrt{K_1} \left\{ \left[1 - \frac{1}{4} X \right] - \left[1 + \frac{1}{4} X \right] \right\} &= A \sqrt{K_2} \left[1 - \frac{1}{4} Y + W \right] e^{\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx} - B \sqrt{K_2} \left[1 + \frac{1}{4} Y - W \right] e^{\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx} \end{aligned}$$

onde foram omitidos os demais termos da derivação por serem de ordem mais alta que a da aproximação usada.

Sabendo que cada componente da função de onda à esquerda é dado como combinação linear das componentes à direita, podemos resolver o problema para cada componente separadamente.

Para a componente $e^{-f} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vem:

$$\frac{K_2}{\sqrt{K_1}} \left[1 - \frac{1}{4} X \right] = A \left[1 + \frac{1}{4} Y + W \right] e^{\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx} + B \left[1 - \frac{1}{4} Y - W \right] e^{\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx}$$

$$-\frac{K_1}{\sqrt{K_2}} \left[1 + \frac{1}{4}X \right] = A \left[1 - Y + W \right] e^{\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx} - B \left[1 + \frac{1}{4}Y - W \right] e^{-\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx} \quad (C.9)$$

definindo

$$a = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} + \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \quad (C.10)$$

$$b = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} - \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$$

Obtemos,

$$A^{(-)} = \left[\frac{1}{8} (Y-X) a - \frac{1}{2} (1-W) b \right] e^{-\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx} \quad (C.11)$$

$$B^{(-)} = \left[\frac{1}{2} (1+W) a - \frac{1}{8} (Y+X) b \right] e^{\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx}$$

normalizando as funções de onda de modo a que no ponto x_1

$$\psi_{IN}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{K_1}} e^{-\int K dx} \quad (C.12)$$

então,

$$\psi_{IN}^{(-)} = \frac{\psi_I^{(-)}}{\left[1 - \frac{1}{4}X \right]} \quad (C.13)$$

e

$$\begin{aligned} \Psi_{IN} &= \Psi_{IIN}^{(+)} + \Psi_{IIN}^{(-)} = \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{K_2}} e^{\int_{x_2}^x K_2 dx} + \frac{\beta}{\sqrt{K_2}} e^{-\int_{x_2}^x K_2 dx} \end{aligned} \quad (C.14)$$

onde

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \left[\frac{1 + \frac{1}{4} Y_N}{1 - \frac{1}{4} X_N} \right] A \\ \beta &= \left[\frac{1 - \frac{1}{4} Y_N}{1 - \frac{1}{4} X_N} \right] B \\ Y_N &= Y \Big|_{x=x_2} \\ X_N &= X \Big|_{x=x_1} \end{aligned} \right. \quad (C.15)$$

Por conseguinte, as eqs. (3.2.17) vêm dadas por,

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha^- &= \left[\frac{1}{8}(Y-X)a - \frac{1}{2}(1-W)b \right] [\alpha] e^{\int_{x_1}^x K_2 dx} \\ \beta^- &= \left[\frac{1}{8}(Y+X)b + \frac{1}{2}(1+W)a \right] [\beta] e^{\int_{x_2}^x K_2 dx} \end{aligned} \right. \quad (C.16)$$

Fazendo os mesmos cálculos para a componente $e^{+f} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^+ = \left[-\frac{1}{8}(Y+X)b + \frac{1}{2}(1-W)a \right] [\alpha^+] e^{\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx} \\ \beta^+ = \left[-\frac{1}{8}(Y-X)a - \frac{1}{2}(1+W)b \right] [\beta^+] e^{\int_{x_2}^{x_1} K_2 dx} \end{array} \right. \quad (C.17)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' = \frac{\left[1 + \frac{1}{4} Y_N \right]}{\left[1 + \frac{1}{4} X_N \right]} \\ \beta' = \frac{\left[1 - \frac{1}{4} Y_N \right]}{\left[1 + \frac{1}{4} X_N \right]} \end{array} \right. \quad (C.18)$$

e, finalmente, a matriz J que conecta as regiões I e II é dada por,

$$J = \begin{vmatrix} \alpha^+ & \beta^- \\ \beta^+ & \alpha^- \end{vmatrix} \quad (C.19)$$

As matrizes |I| e |F| que ligam respectivamente as regiões (I, II) e (I, F) são encontradas do mesmo modo que no caso comum da barreira contínua. Tem-se para este caso a matriz de transição total |M| dado por ⁽³⁷⁾ ,

$$|M| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2\theta} + 2\theta & i(2\theta - \frac{1}{2\theta}) \\ -i(2\theta - \frac{1}{2\theta}) & \frac{1}{2\theta} + 2\theta \end{vmatrix} \quad (C.20)$$

onde $\theta = e^{\int_a^b K dx}$. Isso corresponde a escrever ,

$$|M| = |I| \quad |\theta| \quad |F| \quad (C.21)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} |I| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2i & \\ i & 2 \end{vmatrix} \\ |F| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -i & \\ -2i & 2 \end{vmatrix} \\ |\theta| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & \theta \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (C.22)$$

No nosso caso de maneira análoga,

$$\left\{ \begin{array}{l} |M| = |I| \quad |M'| \quad |F| \\ |M'| = |\theta_I| \quad |J| \quad |\theta_{II}| \end{array} \right. \quad (C.23)$$

onde, para os elementos de $|\theta_I|$ e $|\theta_{II}|$ as integrações são feitas nas regiões I e II respectivamente.

Sabendo que o coeficiente de transmissão \bar{e} é definido como,

$$T = \frac{1}{|M_{11}|^2} \quad (C.24)$$

obtemos finalmente,

$$T = 4 / \left[\frac{1}{2\theta_I\theta_{II}} J_{II} + 2\theta_I\theta_{II} J_{22} + i \left(\frac{\theta_I}{\theta_{II}} J_{21} - \frac{i\theta_{II}}{\theta_I} \right) \right]^2 \quad (C.25)$$

que para o caso em que $J_{11} = J_{22} = 1$ e $J_{21} = J_{12} = 0$ dá o resultado usual,

$$T = 4 / \left(\frac{1}{2\theta} + 2\theta \right)^2 \quad (2.26)$$

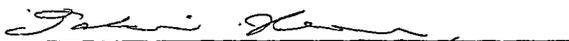
REFERÊNCIAS

- 1 - D.L. Hill and J.A. Wheeler - "Nuclear Constitution and the Interpretation of Fission Phenomena", Phys.Rev. 89 (1953), 1102.
- 2 - H.C. Pauli and T. Ledergerber - "The Dynamics of Fission in the Subbarrier Region of Deformation", IAEA SM-174/206, (1974), 463-499.
- 3 - H. Hofmann - "Quantum Mechanical Treatment of the Penetration Through a Two-Dimensional Fission Barrier", Nucl.Phys. A224 (1976), 116-139.
- 4 - M.C. Nemes, A.F.R.T. Piza and R.P.J. Perazzo - "Scattering by a Schematic Potencial Landscape", IFUSP P-65 (1975).
- 5 - T. Kodama, R.A.M.S. Nazareth and J.R. Nix - "Exact Calculation of the Penetrability for a Very Simple Two-Dimensional Barrier", Proc.Int. Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations III, Hirschegg, Austria(1975).
- 6 - W.H. Miller - "Semiclassical Theory of Inelastic and Reaction Collisions", Proc.Int. Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations III, Hirschegg, Austria (1975), 1-7.
- 7 - M. Brack, J. Damgaard, A. Jensen, H.C. Pauli, V.M. Strutinsky and C.Y. Wong - "Funny Hills: The Shell-Correction Approach to Nuclear Shell Effects and its Applications to the Fission Process", Rev. Mod. Phys. 44 (1972) 320.
- 8 - H.H. Gutbrod - "The Fusion Barrier in Heavy Ion Reactions: its Height, Radius and Curvature", Proc. Int. Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations III, Hirschegg, Austria (1975) 105-111.
- 9 - W.J. Swiatecki - "Deformation Energy of a Charged Drop. Sy

- mmetric Saddle Point Shapes", Phys. Rev. 104 (1956) 993.
- 10 - J.M. Eisenberg and W. Greiner - "Nuclear Theory I - Nuclear Models", North-Holland.
 - 11 - J.R. Nix - "Calculation of Fission Barriers for Heavy and Superheavy Nuclei", Ann. Rev. Nucl. Sci. 22 (1972) 65.
 - 12 - H.J. Krappe and J.R. Nix - "Modified Definition of the Surface Energy in the Liquid Drop Formula", Proc. Third IAEA Symp. on Physics and Chemistry of Fission, Rochester, New York, vol. I (1974), 159.
 - 13 - J.R. Nix and W.J. Swiatecki - "Studies in the Liquid Drop Theory of Nuclear Fission", Nucl. Phys. 71 (1965) 1.
 - 14 - P. Müller and J.R. Nix - "Calculation of Fission Barriers", Proc. Third IAEA Symp. on the Physics and Chemistry of Fission, Rochester, New York (1973).
 - 15 - V.M. Strutinsky - "Shell Effects in Nuclear Masses and Deformation Energies", Nucl. Phys. A95 (1967) 420-442.
 - 16 - W.J. Swiatecki - "Deformation Energy of a Charged Drop. Qualitative Features", Phys. Rev. 101 (1956) 651.
 - 17 - W.M. Howard, S.E. Koonin, P. Müller, S.G. Nilsson, J.R. Nix, A.J. Sierk, H.J. Krappe, W.D. Myers and W.J. Swiatecki - "Calculation of Potential-Energy Surfaces for Fission and Heavy-Ion Reactions", Int. Conf. on Nuclear Physics, Munich, Germany (1973).
 - 18 - P. Müller and J.R. Nix - "Calculation of Fission Barriers with the Droplet Model and Folded Yukawa Single-Particle Potential", Preprint LA-UR-74 (1974) 417.
 - 19 - J.R. Nix and A.J. Sierk - "Potential-Energy Surfaces for Heavy-Ion Collisions", Nobel Symp. on Superheavy Elements, Ronneby, Sweden (1974).
 - 20 - J.R. Nix - "Further Studies in the Liquid-Drop Theory of Nuclear Fission", Nucl. Phys. A130 (1969) 241-292.
 - 21 - J.R. Nix - "The Normal Modes of Oscillation of a Uniformly Charged Drop About its Saddle-Point Shape", Annals of Phy-

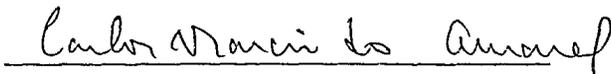
- sics 41 (1967) 52-107.
- 22 - R.W. Hasse, R. Ebert and G. Süssmann - "Effective Masses for Nuclear Fission", Nucl. Phys. A106 (1968) 117.
 - 23 - E.O. Fiset and J.R. Nix - "Calculation of Half-Lives for Superheavy Nuclei", Nucl. Phys. A193 (1972) 647.
 - 24 - H.Hofmann - "On the Quantization of a Kinetic Energy with Variable Inertia", Z. Physik 250 (1972) 14-26.
 - 25 - H.Hofmann and K. Dietrich - "Effects of Variable Inertia on Collective Dynamics", Nucl. Phys. A165 (1971) 1-18.
 - 26 - W. Nörenberg - "Particle Motion in Guide Potentials and the Collective Nuclear Motion", Z.Physik 260(1973)165-178.
 - 27 - Handbook of Mathematical Functions, Ed. by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, pag. 685.
 - 28 - P. Müller and J.R. Nix - "Macroscopic Potential-Energy Surfaces for Symmetric Fission and Heavy-Ion Reactions", Preprint LA-UR-74-416 (1976).
 - 29 - H. Goldstein - "Classical Mechanics", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1950).
 - 30 - N. Bohr and J.A. Wheeler - "The Mechanism of Nuclear Fission", Phys. Rev. 56 (1939) 426.
 - 31 - E. Merzbacher - "Quantum Mechanics", John Wiley & Sons , Inc. (1970).
 - 32 - R.A.M.S. Nazareth and T. Kodama - "Effect of Inertia Parameters on Static Fission Path", Preprint A0029/76-CBPF . Submetido a Physics Letters.
 - 33 - J. Galin. D. Guerrea, M. Lefort and X. Tarrago - "Limitation to Complete Fusion During a Collision Between two Complex Nuclei", Phys. Rev. C, vol. 9 n° 3 (1973) 1018.
 - 34 - R. Bass - "Threshold and Angular Momentum Limit in the Complete Fusion of Heavy Ions" - Phys. Lett. 47B (1973) 139.

Tese apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tec-
nológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes
professores:


Takeshi Kodama


Anna Maria Freire Endler


Antonio Fernando Ribeiro de Toledo Piza


Carlos Marcio do Amaral


Luiz Felio Alvahydo de Uthôa Canto

Rio de Janeiro, 04 de julho de 1977