

Geração de Emaranhamento por Mapas Quânticos

Rômulo Ferreira Abreu

11/09/07

Agradecimentos

- Aos colegas de pós-graduação pelo bom convívio apesar do inerente “carregamento”, cujo significado é conhecido e evidencia nossa cumplicidade.
- Ao CBPF como um todo constituído de pesquisadores e funcionários por oferecer a estrutura necessária e suficiente para o desenvolvimento do meu trabalho.
- Ao CNPq pelos quatro anos de bolsa.

Resumo

O mapa do padeiro quântico possui duas simetrias: uma simetria “espacial” canônica e uma simetria de reversão temporal. Mostramos que, mesmo quando essas características são levadas em conta, o poder de emaranhamento assintótico dos mapas do padeiro nem sempre concordam com as previsões da teoria de matrizes aleatórias. Verificamos que a dimensão do espaço de Hilbert é o parâmetro crucial que determina se as propriedades do padeiro são universais ou não. Para dimensões potência de dois, isto é, sistemas de qubits, um poder de emaranhamento anômalo é observado; caso contrário o comportamento do padeiro é consistente com teoria de matrizes aleatórias. Também apresentamos uma análise de matriz aleatória do poder de emaranhamento de um operador unitário como uma função do número de vezes que ele é iterado. Consideramos unitários pertencendo aos ensembles circulares de matrizes aleatórias (CUE ou COE) aplicado a estados não emaranhados aleatórios (reais ou complexos). Verificamos numericamente que o poder de emaranhamento médio é uma função estritamente decrescente do tempo. O mesmo comportamento é observado para o “emaranhamento do operador”—uma medida alternativa da capacidade de emaranhamento de um unitário. Analiticamente, calculamos o emaranhamento do operador CUE e valores assintóticos para o poder de emaranhamento.

Abstract

The quantum baker map possesses two symmetries: a canonical “spatial” symmetry, and a time-reversal symmetry. We show that, even when these features are taken into account, the asymptotic entangling power of the baker’s map does not always agree with the predictions of random matrix theory. We have verified that the dimension of the Hilbert space is the crucial parameter which determines whether the entangling properties of the baker are universal or not. For power-of-two dimensions, i.e., qubit systems, an anomalous entangling power is observed; otherwise the behavior of the baker is consistent with random matrix theories. We also present a random-matrix analysis of the entangling power of a unitary operator as a function of the number of times it is iterated. We consider unitaries belonging to the circular ensembles of random matrices (CUE or COE) applied to random (real or complex) non-entangled states. We verify numerically that the average entangling power is a monotonic decreasing function of time. The same behavior is observed for the “operator entanglement”—an alternative measure of the entangling strength of a unitary. On the analytical side we calculate the CUE operator entanglement and asymptotic values for the entangling power.

Lista de Figuras

2.1	Mapa do padeiro clássico	7
2.2	Mapa D clássico	13
2.3	Relações entre diferentes entropias.	19
2.4	Teste de fator de forma para gerador de CUE	35
2.5	Teste de distribuição de probabilidade para gerador de CUE	37
3.1	Evolução da entropia associada a aplicações sucessivas do mapa do padeiro	41
3.2	Evolução da entropia associada a aplicações sucessivas do mapa D	42
3.3	Comparação entre as distribuições de entropia geradas pelos mapas do padeiro e D (qubits)	43
3.4	Dependência da distribuição de entropias com o ensemble inicial	44
3.5	A imposição da simetria e a distribuição de entropias	46
3.6	Comparação entre as distribuições de entropias geradas pelos mapas do padeiro e D ($d \neq 2^q$)	48
4.1	Geração dinâmica de emaranhamento, caso unitário	62
4.2	Geração dinâmica de emaranhamento, COE aplicado a $oe \otimes oe$	64
4.3	Geração dinâmica de emaranhamento, COE aplicado a $cue \otimes cue$	66

4.4	Geração dinâmica de emaranhamento, emaranhamento do operador	69
4.5	Gráfico da função $\langle t_n ^4 \rangle$ por n	72
C.1	Integrais de leque	93
C.2	Integrais Z, X e mais gerais	94
C.3	Diagrama para conjunto específico de índices de linha	99
C.4	Ilustração de dinâmica de pontos num diagrama	100
C.5	Exemplos de combinações possíveis resultantes dos deslocamentos de pontos diagramáticos	101

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Cenário Conceitual	6
2.1	Mapas Quânticos	6
2.1.1	Mapa do Padeiro	7
2.1.2	Mapa D	12
2.2	Informação Quântica	14
2.2.1	Definições Básicas da Teoria de Informação Clássica	14
2.2.2	Entropia de Von Neumann	21
2.2.3	Medida de Emaranhamento e Entropia Linear	24
2.2.4	Emaranhamento de Operadores	27
2.3	Teoria de Matrizes Aleatórias	29
2.3.1	Ensemble COE	30
2.3.2	Ensemble CUE	31
2.3.3	Geração Numérica de Estados Aleatórios e de Matrizes CUE e COE.	32
2.3.4	Propriedades Estatísticas de Matrizes CUE.	34
3	Emaranhamento de Mapas Quânticos	38

3.1	Introdução e Motivações.	38
3.2	Comparação entre os Mapas B_{2q} e D_{2q}	39
3.3	A Imposição da Simetria.	45
3.4	Mapas de Dimensão Arbitrária	46
3.5	Poder de Emaranhamento Assintótico	48
4	A Geração Dinâmica de Emaranhamento	55
4.1	Introdução e Motivações	55
4.2	O Caso Unitário	58
4.3	O Conjunto de Mapas Unitários Simétricos Aplicados a Estados Iniciais Reais.	61
4.4	O Conjunto de Mapas Unitários Simétricos Aplicados a Estados Iniciais Complexos.	65
4.5	O Emaranhamento do Operador	67
4.6	Relação entre Pureza e Fator de Forma	70
5	Conclusões e Perspectivas	73
A	Cálculo da Entropia Linear Assintótica Média	78
B	Entropia Linear Média de Estados Aleatórios Reais	84
C	Poder de Emaranhamento Assintótico	87
C.1	Mapas Unitários Simétricos Aplicados a Estados Iniciais Reais.	88
C.2	O Conjunto de Mapas Unitários Simétricos Aplicados a Estados Iniciais Complexos.	97

C.3	O Conjunto de Mapas Unitários Aplicados a Estados Iniciais Complexos.	102
D	Médias de Exponenciais em Termos de Fatores de Forma Básicos	105

Capítulo 1

Introdução

No cenário tecnológico, a sociedade tem acompanhado ao longo dos últimos 70 anos a progressiva compactação dos dispositivos computacionais desde as válvulas até os processadores atuais. Esse processo de inovações tecnológicas, na direção de otimizar o processamento de informação usando dispositivos cada vez menores, não deteve seu avanço ainda. Do ponto de vista físico é oportuno lembrar a observação de Feynman (1985, [1]): *aparentemente as leis da física não se opõem à redução do tamanho dos computadores até que os bits cheguem a dimensões atômicas, região onde a mecânica quântica detém o controle.* O processamento de informação nessas escalas usa recursos físicos muito diferentes dos utilizadas nos computadores atuais; um computador quântico realiza operações descritas pela mecânica quântica. Em 1985 Deutsch [2] construiu um modelo sugerindo que computadores quânticos poderiam apresentar capacidade computacional superior às de computadores clássicos. De fato, o algoritmo de fatoração de Shor [3] (1994) e o algoritmo de busca de Grover [4] (1997) mostraram a maior eficiência da computação quântica em relação à clássica. Após essas descobertas, presenciamos na última década um notável

ímpeto de uma numerosa comunidade científica nas áreas de computação quântica e informação quântica. Diariamente, dezenas de trabalhos originados em diversas partes do mundo são divulgados [5] dentro do cenário deste vasto campo de pesquisa.

Um dos conceitos centrais das teorias de computação quântica e informação quântica é o de emaranhamento, o qual é um fenômeno puramente quântico, sem análogo clássico. Esta propriedade de alguns estados quânticos implica em efeitos de não localidade. As concepções a respeito de emaranhamento e não localidade foram, e continuam sendo, temas de discussões fundamentais e paradigmáticas em física. Entretanto, na pragmática visão da computação quântica e informação quântica, que é a de nosso interesse, o emaranhamento é um recurso quântico de grande utilidade. De fato, emaranhamento é um recurso básico para um conjunto de aplicações em computação quântica e informação quântica [27]: codificação superdensa, códigos de correção de erro quântico, criptografia quântica e teletransporte quântico.

Uma das inúmeras linhas de pesquisa em computação quântica e informação quântica está relacionada à conexão entre as propriedades de uma evolução unitária e sua capacidade de gerar emaranhamento. Mais especificamente, busca-se apontar que propriedades uma evolução unitária deve possuir de modo a ser eficiente como geradora de emaranhamento [45 - 47, 50, 51]. A proposta desta tese é contribuir nesse sentido. Neste trabalho estaremos lidando com estados puros bipartidos inicialmente não emaranhados (estados produto) evoluindo sob uma dinâmica globalmente unitária com tempo discreto. A aplicação iterativa dessas transformações (mapas) ao vetor estado inicial produz um emaranhamento crescente. Utilizaremos em nossas análises dois mapas quânticos conhecidos: O mapa do padeiro [6] e o mapa D [23], além de mapas associados a matrizes

aleatórias dos ensembles circular unitário (CUE) e circular ortogonal (COE) [53]. Nos anos 50 a teoria de matrizes aleatórias foi introduzida na física por Wigner, que aplicou ensembles gaussianos de matrizes hermitianas [53] na modelagem de propriedades de sistemas nucleares. Atualmente, os ensembles de matrizes aleatórias são utilizados como modelos para descrever propriedades estatísticas de sistemas em outras áreas da física, como sistemas mesoscópicos e caos quântico (veja, por exemplo, a introdução do livro de Mehta [53]).

Dessa forma, o cenário teórico desta tese se constitui basicamente de três conjuntos de conhecimentos: de mapas quânticos, da teoria de informação quântica, e da teoria de matrizes aleatórias. No capítulo 2 são apresentados e descritos os conceitos e ferramentas que serão utilizados nos capítulos subsequentes.

Os mapas do padeiro e D são versões quantizadas de mapas caóticos clássicos. O mapa do padeiro quântico apareceu numa variedade de problemas de informação quântica, computação quântica e sistemas quânticos abertos. Schack notou que um mapa do padeiro quântico poderia ser eficientemente realizado em termos de portas quânticas [8]. Um experimento de RMN foi proposto [9] e então implementado (com algumas simplificações) [10]. Pelo lado teórico, Schack e Caves [11] mostraram que o mapa do padeiro quântico de Balazs e Voros [7] pode ser visto como um deslocamento (*shift*) numa sequência de bits –em completa analogia com o caso clássico– e exibiu uma família de quantizações alternativas. Scott e Caves estudaram [43] a habilidade da família de padeiros para gerar emaranhamento e concluíram que os mapas do padeiro quânticos não são capazes de gerar os níveis de emaranhamento esperados em estados aleatórios. Esses autores conjecturaram que simetrias espaciais presentes no padeiro seriam responsáveis

por esse desvio. Essa conjectura é o ponto de partida para o nosso primeiro trabalho [68], o qual está contido no capítulo 3 e prova que as simetrias espaciais do mapa do padeiro não podem ser responsabilizadas por tal desvio.

Recentemente, muitas pesquisas se dedicaram à determinação de leis de crescimento de emaranhamento para estados puros bipartidos sob dinâmica globalmente unitária, com tempo contínuo [12 - 18, 46, 51] ou tempo discreto [19 - 21, 30, 43, 45, 47 - 49, 52]. Para sistemas não demasiadamente pequenos e acoplamentos fracos entre subsistemas, a imagem qualitativa geral é a seguinte: o emaranhamento (entropia do subsistema) crescendo suavemente de zero, possivelmente numa forma não monótona, até atingir um regime assintótico caracterizado por pequenas oscilações em torno de um valor de equilíbrio. Contudo, quando vamos para o nível quantitativo, uma rica fenomenologia é descoberta [12 - 21, 30, 43, 45 - 49, 51, 52]. Além de caos ou regularidade ao nível clássico, parâmetros como dimensões dos subsistemas, força de acoplamento, estado inicial, janela temporal, etc., também desempenham papéis importantes na determinação da lei de crescimento da entropia [22]. Na segunda parte da tese nos concentramos no regime de tempos muito longos, isto é, após o sistema ter relaxado para um estado de equilíbrio. Mais precisamente, estamos interessados no valor médio da entropia assintótica sobre uma distribuição apropriada de estados inicialmente não emaranhados. Isso define o poder de emaranhamento [44] assintótico da dinâmica unitária. Curiosamente, o poder de emaranhamento [44] de U^n , onde U é um unitário aleatório, decresce (em média) com aumento do tempo discreto n . Este fenômeno tem um papel central em nosso segundo trabalho [70], o qual está descrito no capítulo 4.

Vários desenvolvimentos analíticos, bem como os cálculos de natureza mais técnica,

foram relegados aos apêndices. Isso permite uma leitura mais objetiva dos capítulos 3 e 4, os quais contêm apenas os resultados essenciais que compõem as linhas de raciocínio dos trabalhos [68, 70]. Em particular, o Apêndice C é instrutivo para mostrar a utilização dos métodos diagramáticos para calcular médias de monômios dos grupos unitário e ortogonal.

Finalmente no capítulo 5 resumimos o conjunto de conclusões da tese, acompanhadas de algumas discussões. Adicionalmente comentamos algumas perspectivas, apontando direções de possíveis linhas de investigação.

Capítulo 2

Cenário Conceitual

2.1 Mapas Quânticos

Mapas quânticos são análogos quânticos de mapas que preservam área [60]: *um mapa quântico é uma transformação unitária apropriada descrevendo a evolução dos estados quânticos durante um intervalo de tempo finito*. Nesta seção descreveremos a versão quantizada da transformação do padeiro [7]. A transformação do padeiro é um modelo de sucesso como protótipo para maior parte das propriedades de sistemas caóticos clássicos. Em vista do grande sucesso desse modelo, a construção de uma versão quântica fora altamente desejada. A versão original foi construída em 1986 por Balazs e Voros [60]. Posteriormente, Saraceno fez uma pequena mas essencial modificação restaurando a simetria de reflexão do mapa clássico [6]. Julgamos desnecessário aos nossos interesses descrevermos a versão clássica e a sua quantização. Depois de apresentarmos o mapa do padeiro quântico e suas propriedades, descreveremos o mapa D , o qual resulta da remoção da simetria de reflexão do mapa do padeiro. Daremos certa ênfase às propriedades de simetria preparando

o cenário para os resultados e discussões do capítulo 3.

2.1.1 Mapa do Padeiro

Antes de descrevermos o mapa do padeiro quântico, convém definirmos o mapa do padeiro clássico. O mapa do padeiro clássico é definido no quadrado unitário ($0 \leq p, q \leq 1$) por

$$q_{t+1} = 2q_t - [2q_t] \quad (2.1)$$

$$p_{t+1} = (p_t + [2q_t])/2, \quad (2.2)$$

onde $[\]$ denota a parte inteira, e t é o tempo discreto. Esse mapa preserva a área do espaço de fase em que atua. Na figura 2.1 está ilustrada a atuação do mapa do padeiro. Numa primeira passagem, ele estica o quadrado por um fator 2 na direção q de modo que o contrai por um fator $1/2$ na direção p . Depois o mapa empilha a metade direita sobre a esquerda.

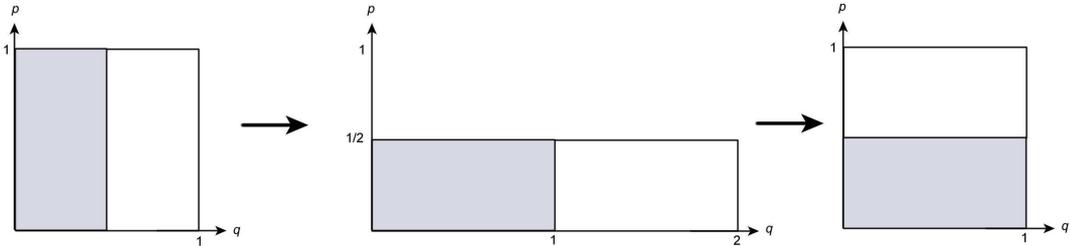


Figura 2.1: Imagem geométrica da transformação do padeiro clássica. Primeiro o quadrado é esticado por um fator 2 na direção q e contraído por um fator $1/2$ na direção p . Depois a metade direita é empilhada sobre a esquerda.

Quanto à versão quântica, o mapa do padeiro de Balazs-Voros e Saraceno atua num espaço de Hilbert d -dimensional H_d (d par), expandido pelos autoestados do operador

posição $|q_j\rangle$, com autovalores $q_j = (j + 1/2)/d$, ou pelos autoestados de momento $|p_k\rangle$, com autovalores $p_k = (k + 1/2)/d$, onde $j, k = 0, \dots, d - 1$. Os vetores de cada base são ortonormais, $\langle q_j | q_k \rangle = \langle p_j | p_k \rangle = \delta_{jk}$, e as duas bases são relacionadas via a transformada de Fourier antiperiódica finita,

$$(G_d)_{k'j'} \equiv \langle p_k | q_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} e^{-i \frac{2\pi}{d} (j+1/2)(k+1/2)}, \quad (2.3)$$

onde $k' = k + 1$ e $j' = j + 1$. Na expressão acima foi imposta a condição de espaço de fase quantizável, dada por $2\pi\hbar d = 1$. A matriz que descreve o mapa do padeiro B_d na representação posição [6, 60] é dada por

$$B_d = G_d^{-1} \begin{pmatrix} G_{d/2} & 0 \\ 0 & G_{d/2} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

A operação efetuada pelo mapa do padeiro é descrita pela aplicação de duas matrizes. A primeira matriz aplicada está dividida em quatro blocos de mesmo tamanho, sendo que os blocos diagonais têm elementos associados à matriz de Fourier $G_{d/2}$, enquanto os blocos fora da diagonal tem elementos nulos. Em seguida a matriz de Fourier inversa G_d^{-1} é aplicada. Conforme frisaram Balazs e Voros [60], a estrutura do operador B_d (Eq.2.4) sugere uma vasta variedade de generalizações. Por exemplo, fatores de fase arbitrários podem ser multiplicados aos dois blocos $G_{d/2}$. A estrutura de blocos pode ser alterada: os blocos podem ser mais numerosos, de tamanhos diferentes e deslocados para fora da diagonal.

O estudo do mapa do padeiro no cenário da informação quântica começa pela identificação dos autoestados “posição” $|q_j\rangle$ com estados da base computacional $|j\rangle$. Usaremos o ordenamento padrão para base computacional. Se $|j\rangle$ é um produto tensorial de estados

da base de um qubit individual $|\epsilon_i\rangle$, com $\epsilon_i = 0, 1$, i.e,

$$|j\rangle = |\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\epsilon_N\rangle, \quad (2.5)$$

onde $d = 2^N$, então j é dado pela expansão binária

$$j = \sum_{i=1}^N \epsilon_i 2^{N-i}, \quad (2.6)$$

onde $0 \leq j \leq d - 1$. Seguindo Schack e Caves [11], escrevemos o operador unitário para o mapa do padeiro quântico sobre N qubits como

$$\hat{B}_d = \hat{G}_d \left(\hat{I}_2 \otimes \hat{G}_{d/2}^{-1} \right), \quad (2.7)$$

assim o operador unitário \hat{I}_2 é aplicado ao primeiro qubit e a matriz do operador de Fourier $\hat{G}_{d/2}^{-1}$ é aplicada aos $N - 1$ qubits restantes¹. Em relação ao espaço de fase, o estado do primeiro qubit determina se o autoestado posição fica na metade esquerda ou direita do quadrado unitário e, conforme vimos (figura 2.1), as operações do mapa do padeiro clássico sobre as metades direita e esquerda são distintas. Dessa forma, esse aspecto da estrutura do operador do mapa do padeiro quântico reflete diretamente uma característica do mapa do padeiro clássico.

No caso especial $d = 2^N$, uma classe inteira de mapas do padeiro quânticos sobre N qubits foi proposta por Schack e Caves [11]. Esses autores conectaram a representação binária do mapa do padeiro clássico à estrutura de qubits usando a transformada de Fourier parcial, definida no caso geral como

$$\hat{H}_n \equiv \hat{I}_{2^n} \otimes \hat{G}_{2^{N-n}}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.8)$$

¹Provavelmente por razões históricas a matriz do operador de Fourier \hat{G} , na base computacional, não coincide com G mas sim com sua inversa G^{-1} .

onde \hat{I}_{2^n} opera sobre os primeiros n qubits e $\hat{G}_{2^{N-n}}$ opera sobre os $N - n$ qubits restantes. Um mapa do padeiro quântico com N qubits é definido para cada valor de $n = 1, \dots, N$ por

$$\hat{B}_{N,n} \equiv \hat{H}_{n-1} \circ \hat{S}_n \circ \hat{H}_n^{-1}, \quad (2.9)$$

onde o operador de deslocamento \hat{S}_n atua ciclicamente sobre os n primeiros qubits, i.e;

$$\hat{S}_n |x_1\rangle |x_2\rangle \dots |x_n\rangle |x_{n+1}\rangle \dots |x_N\rangle = |x_2\rangle \dots |x_n\rangle |x_1\rangle |x_{n+1}\rangle \dots |x_N\rangle. \quad (2.10)$$

No caso $n = 1$, como \hat{S}_1 é o operador unidade, $\hat{B}_{N,1} \equiv \hat{B}_d$ é o mapa de Balazs-Voros e Saraceno. Também podemos escrever $\hat{B}_{N,n}$ de outra forma, pois como \hat{S}_n comuta com \hat{G}_n^{-1} , então é fácil mostrar que

$$\hat{B}_{N,n} = \left(\hat{I}_{2^{n-1}} \otimes \hat{B}_{N-n+1,1} \right) \circ \hat{S}_n. \quad (2.11)$$

Agora nos voltaremos para as propriedades de simetria do mapa de Balazs-Voros e Saraceno (Eq. 2.7), o qual será analisado no capítulo 3. Discutiremos a simetria de reversão temporal, denominada Simetria-T, e a simetria de reflexão, denominada Simetria-R.

Consideremos a dinâmica do padeiro clássico associada a sucessivas aplicações da transformação definida pelas equações (2.1). A transformação do padeiro clássico é inversível. Entretanto, a inversão dos momentos, $p \rightarrow -p$, somente (sem mudança nas posições) não corresponde à transformação inversa, como sucederia num sistema hamiltoniano convencional. Em outros termos, a transformação do padeiro clássica não possui simetria de reversão temporal convencional. Por outro lado, o mapa clássico exhibe outra simetria que equivale a uma simetria de reversão temporal. Trata-se da transformação definida por $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$, a qual –é fácil de verificar– corresponde à transformação inversa.

Consideremos agora a versão quântica, onde um sistema tem uma evolução descrita pela aplicação sucessiva de um mapa quântico. Em geral um operador de reversão temporal é dado por $T = UK$, onde U é um operador unitário adequado e K é o operador de conjugação complexa com respeito a uma representação dada [34]. É fácil mostrar que

$$(\hat{G}_d^{-1} \hat{B}_d \hat{G}_d)^* = \hat{B}_d^{-1}, \quad (2.12)$$

de modo que o mapa do padeiro quântico tem uma simetria de reversão temporal, correspondendo ao operador \hat{G}_d seguido por conjugação complexa na base computacional. Adicionalmente, devemos comentar que a simetria de reversão temporal significa que na representação mista $p - q$ a matriz de \hat{B}_d é simétrica [23], isto é, $\langle p_i | \hat{B}_d | q_j \rangle = \langle p_j | \hat{B}_d | q_i \rangle$.

A respeito da simetria-R, definimos o operador de reflexão por

$$\hat{R}_d |j\rangle = |d - 1 - j\rangle, \quad (2.13)$$

sendo que para um sistema de qubits o operador de reflexão pode ser fatorado num produto tensorial de N reflexões de 1 qubit, i.e,

$$\hat{R}_d |j\rangle = \hat{R}_2 |\epsilon_1\rangle \otimes \hat{R}_2 |\epsilon_2\rangle \otimes \cdots \otimes \hat{R}_2 |\epsilon_N\rangle, \quad (2.14)$$

onde R_2 é exatamente o operador de negação (porta X de Pauli [27]). Usando a simetria de reflexão de \hat{G}_d , $\hat{R}_d \hat{G}_d = \hat{G}_d \hat{R}_d$, e a propriedade de fatorização $\hat{R}_d = R_2 \otimes R_{d/2}$ podemos provar que

$$\hat{B}_d \hat{R}_d = \hat{R}_d \hat{B}_d, \quad (2.15)$$

de modo que o mapa do padeiro quântico é simétrico por reflexão, concordando com seu equivalente clássico [6].

Devido à simetria \hat{R}_d , com $d/2$ autovalores $+1$ e $d/2$ autovalores -1 , o mapa do padeiro quântico pode ser levado à forma diagonal por blocos quando o representamos numa base de \hat{R}_d :

$$\hat{B}_d^R = \hat{\Lambda}^\dagger \hat{B}_d \hat{\Lambda} = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{B}_{d/2}^{(-)} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{B}_{d/2}^{(+)} , \quad (2.16)$$

onde $|0\rangle\langle 0|$ e $|1\rangle\langle 1|$ são projetores nos estados do primeiro qubit, $\hat{B}_{d/2}^{(\pm)}$ são mapas do padeiro quânticos reduzidos [23], e $\hat{\Lambda}^\dagger$ é um mapeamento da base computacional à base \hat{R}_d -simétrica:

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{I}_d + i\hat{Y} \otimes \hat{R}_d) , \quad (2.17)$$

sendo Y a segunda matriz de Pauli [27].

2.1.2 Mapa D

O procedimento de quantização “padrão” para o mapa do padeiro foi adaptado por Saraceno e Vallejos [23] para o mapa D [24]. O mapa D atua no mesmo espaço de Hilbert que o mapa do padeiro. Assim como no caso do mapa do padeiro, definiremos o mapa clássico antes de descrevermos a versão quântica. O mapa D clássico é definido no espaço de fase $(q, p \in [0, 1))$ por

$$q_{t+1} = -1^{[2q_t]} 2(q_t - [2q_t]) \quad (2.18)$$

$$p_{t+1} = -1^{[2q_t]} 2^{-1} p_t + [2q_t] . \quad (2.19)$$

Esse mapa também é conservativo. Na figura 2.2 está ilustrada a atuação do mapa D. Primeiro, identicamente ao padeiro, o mapa estica o quadrado por um fator 2 na direção q de modo que o contrai por um fator $1/2$ na direção p . Depois, diferentemente do padeiro, a metade direita é rotacionada de π e colocada sobre a esquerda.

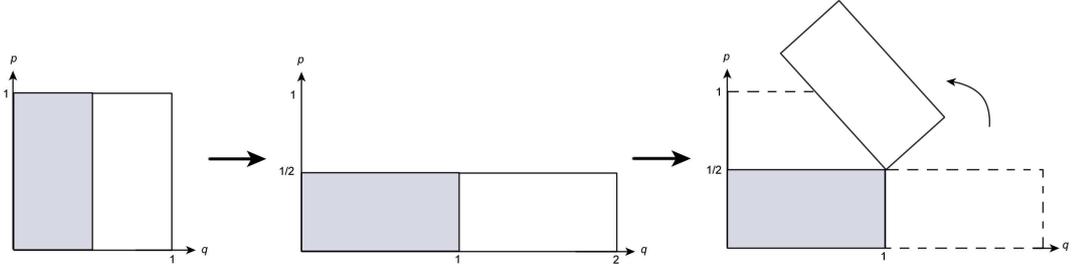


Figura 2.2: Imagem geométrica da transformação D clássica. Primeiro o quadrado é esticado por um fator 2 na direção q e contraído por um fator $1/2$ na direção p . Depois a metade direita é rotacionada de π e colocada sobre a esquerda.

Quanto à versão quântica, a matriz que descreve o mapa D quântico na representação posição [23] é dada por

$$D_{d,\phi} = G_d^{-1} \begin{pmatrix} G_{d/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} G_{d/2}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

onde podemos notar que a diferença em relação ao mapa do padeiro quântico (Eq. 2.4) é a matriz de Fourier inversa no segundo bloco, além de uma fase.

Em relação às simetrias, o mapa D satisfaz à simetria de reversão temporal

$$\hat{G}_d^{-1} \hat{D}_{d,\phi} \hat{G}_d = (\hat{D}_{d,\phi}^{-1})^*. \quad (2.21)$$

Contudo, é fácil provar que a inversão do segundo bloco de Fourier em (2.21) faz com que $\hat{D}_{d,\phi}$ não seja simétrico por reflexão,

$$\hat{D}_{d,\phi} \hat{R}_d \neq \hat{R}_d \hat{D}_{d,\phi}. \quad (2.22)$$

Essa diferença será decisiva para interpretação dos experimentos numéricos do capítulo 3, onde compararemos as habilidades para gerar emaranhamento do mapa de Balazs-Voros e Saraceno com o mapa $\hat{D}_{d,\phi=0}$.

2.2 Informação Quântica

Nesta seção apresentaremos e fundamentaremos os recursos conceituais da teoria de informação quântica considerados necessários à abordagem dos problemas tratados nesta tese. Com esse objetivo, inicialmente faremos uma breve introdução à teoria de informação clássica. Assim, ao apresentarmos os conceitos da teoria de informação quântica discutindo diferenças e semelhanças entre as teorias, teremos uma melhor compreensão da entropia de Von Neumann, a qual é o conceito central da teoria de informação quântica. Apesar das demonstrações dos teoremas serem muito úteis por proporcionarem habilidade de manipulação com as grandezas em questão, elas serão omitidas porque não são essenciais para nossos propósitos e, além disso, podem ser prontamente acompanhadas na bibliografia [27]. Mencionaremos a relação entre entropia de Von Neumann e emaranhamento entre estados puros bipartidos e depois justificaremos o uso da entropia linear, a qual será a medida de emaranhamento utilizada nas análises desta tese. Finalmente, descreveremos o emaranhamento de operadores, uma medida alternativa de emaranhamento que nos será útil no capítulo 4.

2.2.1 Definições Básicas da Teoria de Informação Clássica

O conceito de informação é muito amplo para que possa ser completamente compreendido por uma única definição. Entretanto, temos uma noção intuitiva do que deveríamos esperar de uma medida de informação. Definimos, para qualquer distribuição de probabilidade, uma quantidade chamada entropia, a qual tem muitas propriedades que concordam com tal noção intuitiva. A definição de entropia pode ser derivada axiomaticamente a partir de propriedades intuitivas que a entropia de uma variável aleatória deve satisfazer

[25]. Contudo, a razão mais profunda para essa definição de entropia é que ela pode ser usada para quantificar os recursos necessários para armazenar informação, conforme foi demonstrado no artigo clássico de Shannon [26]. Essa motivação para a definição de entropia expressa um aspecto básico da abordagem da teoria de informação, seja clássica ou quântica: *medidas fundamentais de informação surgem como as respostas a questões fundamentais a respeito da quantidade de recursos físicos requeridos para resolver algum problema de processamento de informação* [27].

Definição: Consideremos uma variável aleatória discreta X que pode assumir valores x de um espaço amostral A de acordo com uma distribuição de probabilidade $p(x) = \Pr\{X = x\}$, $x \in A$. A entropia é definida por

$$H(X) \equiv - \sum_{x \in A} p(x) \log p(x) , \quad (2.23)$$

onde usamos a convenção de que $0 \log 0 = 0$, o que pode ser justificado por continuidade como $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$. Esta convenção está intuitivamente correta, pois um evento que nunca pode ocorrer não deveria contribuir à entropia. O \log está na base 2 e a entropia então será medida em bits. A entropia é o número de bits na média requerido para descrever a variável aleatória. A entropia é uma medida da incerteza média na variável aleatória. Uma visão alternativa é que a entropia de X quantifica a informação que ganhamos, em média, quando descobrimos o valor de X . É imediato da definição que

Lema 2.2.1: $H(X) \geq 0$.

Se a base do logaritmo é b , denotaremos a entropia como $H_b(X)$. Da definição de entropia e propriedades elementares do logaritmo, temos a seguinte consequência imediata:

Lema 2.2.2: $H_b(X) = (\log_b a) H_a(X)$.

Portanto, podemos mudar a base do logaritmo na definição e a entropia será alterada

de uma base para outra por multiplicação pelo fator apropriado.

O valor esperado de uma variável aleatória $g(X)$ é escrito

$$E_p g(X) = \sum_{x \in A} g(x) p(x) . \quad (2.24)$$

Definição: A entropia conjunta $H(X, Y)$ de uma par de variáveis aleatórias discretas (X, Y) com uma distribuição conjunta $p(x, y)$ é definida como

$$H(X, Y) = - \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} p(x, y) \log p(x, y) , \quad (2.25)$$

a qual mede a incerteza total acerca do par (X, Y) e também pode ser escrita como

$$H(X, Y) = -E_p \log p(X, Y) . \quad (2.26)$$

Definimos a entropia condicional de uma variável aleatória dada outra variável como o valor esperado das entropias das distribuições condicionais, mediadas sobre a variável aleatória condicionada.

Definição: A entropia condicional $H(Y|X)$ é definida como

$$H(Y|X) = \sum_{x \in A} p(x) H(Y|X = x) \quad (2.27)$$

$$= - \sum_{x \in A} p(x) \sum_{y \in B} p(y|x) \log p(y|x) \quad (2.28)$$

$$= - \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} p(x, y) \log p(y|x) \quad (2.29)$$

$$= -E_{p(x,y)} \log p(Y|X) . \quad (2.30)$$

A entropia de um par de variáveis aleatórias é a entropia de uma adicionada à entropia condicional da outra conforme declara o teorema a seguir.

Teorema 2.2.1 (*regra da cadeia*):

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) . \quad (2.31)$$

Este teorema torna explícita a interpretação da entropia condicional. Suponha que sabemos o valor de Y , de modo que adquirimos $H(Y)$ bits de informação a respeito do par (X, Y) . A incerteza remanescente a respeito de (X, Y) está associada a nossa ausência remanescente de conhecimento acerca de X , mesmo dado que sabemos Y .

Devemos notar que $H(Y|X) \neq H(X|Y)$, entretanto como $H(X, Y) = H(Y, X)$ então $H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$.

Uma medida de distância entre duas distribuições de probabilidade $p(x)$ e $q(x)$ é a entropia relativa $H(p(x)||q(x))$. Apesar de não se tratar de uma medida legítima de distância por não ser simétrica, $H(p(x)||q(x)) \neq H(q(x)||p(x))$, e não satisfazer a desigualdade triangular, essa quantidade é útil porque outras quantidades entrópicas podem ser consideradas como casos especiais da entropia relativa conforme veremos.

Definição: Uma possível entropia relativa de $p(x)$ a $q(x)$ pode ser definida por

$$H(p(x)||q(x)) \equiv \sum_{x \in A} p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \equiv -H(X) - \sum_{x \in A} p(x) \log q(x). \quad (2.32)$$

onde usamos a convenção (baseada em argumentos de continuidade) de que $-0 \log 0 \equiv 0$ e $-p(x) \log 0 \equiv \infty$ se $p(x) > 0$.

O teorema a seguir contribui para interpretação da entropia relativa como uma espécie de medida de distância.

Teorema 2.2.2 A entropia relativa é não negativa, $H(p(x)||q(x)) \geq 0$, com igualdade se e somente se $p(x) = q(x), \forall x$.

Utilizando a definição de entropia relativa e o teorema 2.2.2, podemos provar que

Teorema 2.2.3 Seja $p(x)$ uma distribuição de probabilidade para X , sobre d resultados. Então $H(X) \leq \log d$, com igualdade se e somente se $p(x)$ é uniformemente distribuída.

Usando a definição de entropia relativa, introduziremos a informação mútua, a qual é uma medida da quantidade de informação que uma variável aleatória contém a respeito de outra variável aleatória. Dessa forma, a informação mútua é a redução na incerteza de uma variável aleatória devido ao conhecimento da outra.

Definição: Consideremos duas variáveis aleatórias X e Y com uma distribuição de probabilidade conjunta $p(x, y)$ e distribuições de probabilidade marginais $p(x)$ e $p(y)$. A *informação mútua* $H(X : Y)$ é a entropia relativa entre a distribuição conjunta e a distribuição produto $p(x)p(y)$, ou seja,

$$H(X : Y) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \quad (2.33)$$

$$= H(p(x, y) || p(x)p(y)) \quad (2.34)$$

$$= E_{p(x, y)} \log \frac{p(X, Y)}{p(X)p(Y)}. \quad (2.35)$$

Podemos reescrever a definição de informação mútua $H(X : Y)$ como

$$H(X : Y) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} p(x, y) \log \frac{p(x|y)}{p(x)} \quad (2.36)$$

$$= H(X) - H(X|Y) \quad (2.37)$$

Assim a informação mútua $H(X : Y)$ é a redução na incerteza de X devido ao conhecimento de Y . Por simetria, segue também que $H(X : Y) = H(Y) - H(Y|X)$. Como $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$, temos

$$H(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (2.38)$$

Listamos um conjunto de propriedades básicas da entropia de Shannon afim de caracterizar seu comportamento no teorema abaixo.

Teorema 2.2.4 (Propriedades Básicas de Entropia)

1. $H(X, Y) = H(Y, X)$, $H(X : Y) = H(Y : X)$
2. $H(Y|X) \geq 0$ e assim $H(X : Y) \leq H(Y)$, com igualdade se e somente se Y é uma função de X , i.e., $Y = f(X)$.
3. $H(X) \leq H(X, Y)$, com igualdade se e somente se Y é uma função de X .
4. **Subaditividade:** $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ com igualdade se e somente se X e Y são variáveis aleatórias independentes.
5. $H(Y|X) \leq H(Y)$ e assim $H(X : Y) \geq 0$, com igualdade se e somente se X e Y são variáveis aleatórias independentes.
6. **Subaditividade forte:** $H(X, Y, Z) + H(Y) \leq H(X, Y) + H(Y, Z)$.

As várias relações entre entropias são expressas num diagrama de Venn (Figura 2.1).

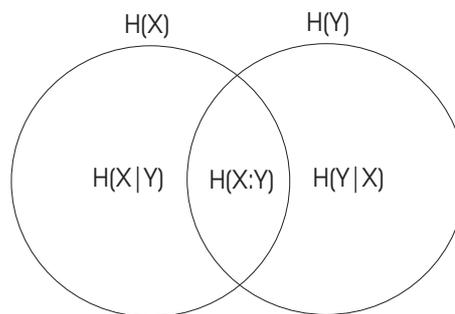


Figura 2.3: Relações entre diferentes entropias.

O próximo resultado fornece uma fórmula útil e simples para a entropia condicional.

Teorema 2.2.5 (Encadeamento para entropias condicionais.)

Sejam X_1, \dots, X_n e Y quaisquer conjunto de variáveis aleatórias. Então

$$H(X_1, \dots, X_n|Y) = \sum_{i=1}^n H(X_i|Y, X_1, \dots, X_{i-1}). \quad (2.39)$$

Uma desigualdade básica de teoria de informação, a *desigualdade de processamento de dados*, declara que a informação disponível a respeito de uma fonte de informação pode somente *diminuir com o tempo*. Os teoremas a seguir visam tornar essa declaração mais precisa e formal. Antes disso, devemos introduzir o conceito de *cadeia de Markov*.

Definição: Variáveis aleatórias X, Y, Z formam uma cadeia de Markov nesta ordem (denotada $X \rightarrow Y \rightarrow Z$) se a distribuição condicional de Z depende somente de Y e é condicionalmente independente de X . Especificamente, X, Y e Z formam uma cadeia de Markov $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ se a distribuição de probabilidade conjunta pode ser escrita como

$$p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|y) . \quad (2.40)$$

Podemos agora apresentar um teorema importante e útil declarando que nenhum processamento de Y , determinista ou aleatório, pode aumentar a informação que Y contém acerca de X .

Teorema 2.2.6 (Desigualdade de processamento de dados)

Suponha $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ ser uma cadeia de Markov. Então

$$H(X) \geq H(X : Y) \geq H(X : Z) . \quad (2.41)$$

Além disso, a primeira igualdade é saturada se e somente se, dado Y , é possível reconstruir X .

De fato, é intuitivo que se uma variável aleatória X está sujeita a ruído, produzindo Y , então futuras ações (“processamento de dados”) não podem ser usadas para aumentar a quantidade de informação mútua entre a saída do processo e a informação original X .

Da definição de cadeias de Markov, é fácil verificar que se $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ é uma cadeia de Markov, então $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ também é uma cadeia de Markov. Assim, como um simples

corolário para a desigualdade de processamento de dados, vemos que se $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ é uma cadeia de Markov, então

$$H(Z : Y) \geq H(Z : X) . \quad (2.42)$$

2.2.2 Entropia de Von Neumann

Na seção anterior, apresentamos a entropia de Shannon, a qual mede a incerteza associada a uma distribuição de probabilidade clássica. Análoga à entropia de Shannon para estados clássicos, a entropia de Von Neumann de um estado quântico é definida por

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr}(\rho \log \rho) , \quad (2.43)$$

onde ρ é o operador densidade associado ao estado quântico. Assim, o papel desempenhado por distribuições de probabilidade no cenário clássico passa a ser desempenhado por operadores densidade ao generalizarmos a entropia de Shannon para o cenário quântico.

A análise da entropia de Von Neumann e suas propriedades tendo em vista a entropia de Shannon visa dois objetivos basicamente. Em primeiro lugar, a analogia com a entropia de Shannon constitui uma guia para derivação das propriedades da entropia de Von Neumann. Por outro lado, a confrontação das diferenças conceituais revelam aspectos importantes da teoria de informação quântica em relação à clássica.

Novamente os logaritmos são tomados na base 2 e definimos $0 \log 0 = 0$. Podemos reescrever a definição da entropia de Von Neumann em termos dos autovalores de ρ

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i . \quad (2.44)$$

Assim como no caso da entropia de Shannon, é útil definir uma entropia relativa. Sejam

os operadores densidade ρ e σ , a entropia relativa de ρ a σ é definida por

$$S(\rho||\sigma) \equiv \text{Tr}(\rho \log \rho) - \text{Tr}(\rho \log \sigma) . \quad (2.45)$$

Similarmente ao caso clássico, a entropia relativa quântica é não negativa, um resultado às vezes conhecido como *desigualdade de Klein* [27].

Teorema 2.2.7 (Desigualdade de Klein) *A entropia relativa é não negativa,*

$$S(\rho||\sigma) \geq 0 . \quad (2.46)$$

com igualdade se e somente se $\rho = \sigma$.

Listamos um conjunto de propriedades básicas interessantes e úteis da entropia de Von Neumann no teorema a seguir [27].

Teorema 2.2.8

1. *A entropia é não negativa. A entropia é zero se e somente se o estado é puro.*
2. *Num espaço de Hilbert d dimensional a entropia é no máximo $\log d$. A entropia é igual a $\log d$ se e somente se o sistema está no estado completamente misturado I/d .*
3. *Suponha que um sistema composto AB esteja num estado puro. Então $S(A) = S(B)$, onde $S(A)$ e $S(B)$ são as entropias das matrizes densidade reduzidas.*
4. *Suponha que p_i são probabilidades, e ρ_i são estados com suportes mutuamente disjuntos². Então*

$$S\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i) . \quad (2.47)$$

²O espaço de estados é gerado por uma base de operadores. O conjunto de operadores para os quais a projeção de um estado é não nula não tem operador em comum com o conjunto associado a qualquer outro estado.

5. **Teorema da entropia conjunta:** *Suponha que p_i são probabilidades, $|i\rangle$ são estados ortogonais para um sistema A , e ρ_i é qualquer conjunto de operadores densidade para outro sistema, B . Então*

$$S\left(\sum_i p_i |i\rangle\langle i| \otimes \rho_i\right) = H(p_i) + \sum_i p_i S(\rho_i), \quad (2.48)$$

onde $H(p_i)$ é a entropia de Shannon da distribuição p_i .

Por analogia com a entropia de Shannon, as entropias de Von Neumann mútua e condicional são definidas por

$$S(A|B) \equiv S(A, B) - S(B) \quad (2.49)$$

$$S(A : B) = S(A) + S(B) - S(A, B) \quad (2.50)$$

$$= S(A) - S(A|B) = S(B) - S(B|A) \quad (2.51)$$

Neste momento é oportuno focarmos numa distinção conceitual fundamental entre informação quântica e clássica. Consideremos variáveis aleatórias X e Y ; encontramos no teorema 2.2.4 o resultado intuitivo $H(X) \leq H(X, Y)$. Em contrapartida, no cenário quântico, consideremos um sistema composto AB de dois qubits num estado não separável³. Podemos provar que, para certos estados não separáveis, a entropia condicional será negativa, o que significa que $S(A) > S(A, B)$. De fato, variáveis aleatórias clássicas são sempre separáveis no sentido de que não podemos ter mais incerteza a respeito do estado de X do que acerca do estado conjunto de X e Y . Em outros termos, existe uma incerteza associada à variável Y por si só que está separada da incerteza associada à variável X . Por outro lado, no cenário quântico a existência de estados não separáveis

³Um estado não separável é um estado que não pode ser escrito como produto tensorial de um estado do subsistema A por um estado do subsistema B , veja seção 2.2.3

constitui uma diferença fundamental. Dessa forma, apontamos o papel desempenhado por um dos conceitos centrais deste trabalho, o emaranhamento, ou não separabilidade, na teoria de informação.

Prosseguindo com o objetivo de apontarmos certas similaridades e diferenças entre as entropias de Shannon e Von Neumann, nos voltamos para a propriedade de subaditividade apresentada no teorema 2.2.4. Assim como $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$ com igualdade se e somente se X e Y são variáveis aleatórias independentes, é possível mostrar [27] que $S(A, B) \leq S(A) + S(B)$ com igualdade se e somente se os sistemas A e B são descorrelacionados, isto é, $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$. Da mesma forma devemos mencionar os resultados relacionados à subaditividade forte também apresentada no teorema 2.2.4. Assim como $H(X, Y, Z) + H(Y) \leq H(X, Y) + H(Y, Z)$ para variáveis aleatórias X, Y e Z , foi provado [27] através de extensa manipulação algébrica que $S(A, B, C) + S(B) \leq S(A, B) + S(B, C)$ para sistemas quânticos A, B e C .

Complementarmente, outras propriedades poderiam ser avaliadas com o intuito de compararmos as entropias de Shannon e Von Neumann e, conseqüentemente, as teorias de informação clássica e quântica. Isso proveria uma visão mais ampla e completa. Contudo, julgamos o conteúdo básico até então discutido suficiente para os nossos propósitos.

2.2.3 Medida de Emaranhamento e Entropia Linear

Em geral podemos escrever os estados puros de um sistema quântico bipartido como uma combinação linear da forma

$$|\psi\rangle = \sum_{r=1}^{d_A} \sum_{s=1}^{d_B} c_{r,s} |r\rangle \otimes |s\rangle, \quad (2.52)$$

onde o conjunto de coeficientes $c_{r,s}$ satisfaz à normalização $\sum_{r=1}^{d_A} \sum_{s=1}^{d_B} |c_{r,s}|^2 = 1$ e os estados $|r\rangle$ formam uma base para o espaço de Hilbert de dimensão d_A associado ao subsistema A , assim como os estados $|s\rangle$ o fazem para o subsistema B resultando numa base de estados produto $|r\rangle \otimes |s\rangle$. Para certos estados a expressão (2.52) pode ser reduzida à forma

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle . \quad (2.53)$$

Neste caso estamos lidando com estados produto de estados dos subsistemas A e B , também denominados estados separáveis. O fenômeno de emaranhamento está presente em estados que não podem ser escritos na forma da Eq. (2.53), ou seja, não separáveis.

Por outro lado, a definição acima não se aplica quando estamos lidando com estados misturados. Neste trabalho estaremos sempre considerando estados puros de sistemas compostos bipartidos.

Seja a matriz densidade associada a um estado $|\psi\rangle$: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Observemos que se o estado é um estado produto, efetuar o traço parcial sobre um dos subsistemas fornece um estado puro do outro subsistema:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho) = |\psi_A\rangle\langle\psi_A| , \quad (2.54)$$

ao passo que se consideramos um estado emaranhado, a matriz densidade reduzida (MDR) estará associada a um estado misturado.

A quantificação do emaranhamento entre dois subsistemas foi discutida por Popescu e Rohrlich [28], explorando uma correspondência formal entre emaranhamento e termodinâmica: *as leis da natureza são tais que é impossível criar(ou aumentar) emaranhamento entre sistemas quânticos remotos por operações locais*⁴. Esses autores concluem

⁴operações atuando separadamente em cada subsistema

que a entropia de emaranhamento é a entropia de Von Neumann (2.44) das matrizes densidade parciais, e igual a entropia de Shannon (2.23) dos quadrados dos coeficientes do estado emaranhado na decomposição de Schmidt [27].

A decomposição de Schmidt de $|\psi\rangle$ é a representação otimizada em termos de uma base produto e é dada por (assumindo que $d_A \leq d_B$)

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_A} \sqrt{p_i} |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad (2.55)$$

onde $0 \leq p_i \leq 1$ são os autovalores (não nulos) de cada matriz densidade reduzida (MDR) e $|i_A\rangle$ e $|i_B\rangle$ são os autovetores correspondentes. Assim, o emaranhamento $E(|\psi\rangle)$ é medido por

$$E(|\psi\rangle) = S_V = -\text{Tr}_k(\rho_k \ln \rho_k) = \sum_{i=1}^{d_A} p_i \ln(p_i); k = A, B. \quad (2.56)$$

A entropia de Von Neumann pode somente ser calculada nas autobases das MDRs. Consequentemente não é fácil efetuar cálculos analíticos porque tais cálculos requerem informação a respeito dos autovalores das MDRs. Por isso, uma versão linearizada da entropia de Von Neumann, denominada entropia linear, se tornou frequentemente utilizada. O emaranhamento $E(|\psi\rangle)$ medido pela entropia linear S_L é dada por

$$S_L = 1 - \text{Tr}_k \rho_k^2 = 1 - \sum_{i=1}^{d_A} p_i^2; k = A, B. \quad (2.57)$$

É fácil mostrar que $\text{Tr}_k \rho_k^2 = \sum_{x,x'=1}^{d_k} |(\rho_k)_{x,x'}|^2$, de modo que a entropia linear depende exclusivamente dos valores de todos elementos da MDR. Assim, cálculos analíticos da entropia linear não necessitam de informação a respeito dos autovalores das MDRs.

De fato todas quantidades que não aumentam sob operações locais e comunicação clássica quantificam de alguma maneira a quantidade de emaranhamento entre os subsistemas. Essas quantidades são denominadas monótonas de emaranhamento (*entanglement*

monotones [29]). Devido a maior facilidade em efetuar cálculos analíticos com a entropia linear em relação a entropia de Von Neumann, usaremos a entropia linear como medida de emaranhamento. Além disso, em vários trabalhos onde ambas entropias foram calculadas [30, 43, 47, 52] nenhuma diferença qualitativa no comportamento das duas foi encontrada. Um fato relacionado ao vínculo entre tais medidas de emaranhamento é a existência de cotas que uma impõe sobre a outra [73, 74].

2.2.4 Emaranhamento de Operadores

A dualidade entre mapas quânticos e estados quânticos foi discutida por Życzkowski e Bengtsson [31]. Devido a essa dualidade, um operador pode ser representado como um vetor no espaço de Hilbert de operadores e podemos calcular o emaranhamento associado. O emaranhamento do operador é uma medida intrínseca da habilidade de um operador em gerar emaranhamento. O caráter intrínseco se deve ao fato de que esta medida é independente de qualquer escolha específica de algum ensemble de estados iniciais sobre o qual o operador atue. No capítulo 4 utilizaremos essa medida em nossas análises.

Para uma definição formal dessa medida [64], começaremos definindo o conceito de reformatação de matriz (*matrix reshaping* [31]), que consiste na transformação de uma matriz num vetor. Uma matriz de K linhas e L colunas é transformada num vetor por alocar seus elementos colocando linha após linha num vetor de comprimento KL . A transformação de uma matriz A é definida por

$$a_m = \langle m|A \rangle = A_{ij}, m = (i-1)L + j, i = 1, \dots, K; j = 1, \dots, L. \quad (2.58)$$

O vetor $|A\rangle$ pertence ao espaço de Hilbert-Schmidt (HS). A definição para o produto escalar em HS é $\langle A|B \rangle \equiv \text{Tr}A^\dagger B$. Então, a norma HS da matriz A é dada

por $\|A\|_{HS}^2 = \langle A|A \rangle = \sum_m |a_m|^2$. Uma base ortonormal de operadores A_m satisfaz $\langle A_m|A_{m'} \rangle = \text{Tr}A_m^\dagger A_{m'} = \delta_{mm'}$.

Consideremos um operador unitário U atuando num espaço de Hilbert bipartido $H_A \otimes H_B$, sendo $d_A \leq d_B$. Esse operador unitário pode ser expandido em termos de uma base completa de operadores ortonormais $A_m \otimes B_n$ como

$$|U\rangle = \sum_{m=1}^{d_A^2} \sum_{n=1}^{d_B^2} X_{m,n} |A_m\rangle \otimes |B_n\rangle, \quad (2.59)$$

onde $|U\rangle$, $|A_m\rangle$ e $|B_n\rangle$ são os vetores que resultam do reshaping das matrizes U , A_m e B_n . Agora $|U\rangle$ pode ser considerado como um vetor no espaço de HS composto, $H_{HS} \otimes H_{HS}$. Aplicando a decomposição de Schmidt a $|U\rangle$, obtemos

$$|U\rangle = \sum_{m=1}^{d_A^2} \sqrt{p_m} |\tilde{A}_m\rangle \otimes |\tilde{B}_m\rangle, \quad (2.60)$$

onde $\{\sqrt{p_m}\}$ são os valores singulares de X , ou seja, as raízes quadradas dos autovalores não nulos de XX^\dagger e $\{|\tilde{A}_m\rangle\}$ e $\{|\tilde{B}_m\rangle\}$ são os novos estados da base ortonormal. Também identificamos os $\{p_m\}$ como os autovalores não nulos das matrizes densidade reduzidas do operador. Como o vetor $|U\rangle$ não está normalizado, $\langle U|U \rangle = \text{Tr}(U^\dagger U) = \sum_{m=1}^{d_A^2} p_m = d_A d_B$, definimos $\tilde{p}_m = p_m/d_A d_B$ e escrevemos finalmente a expressão para entropia linear do operador U

$$S_L(U) \equiv 1 - \sum_{m=1}^{d_A^2} \tilde{p}_m^2 = 1 - \sum_{m=1}^{d_A^2} \frac{p_m^2}{d_A^2 d_B^2}. \quad (2.61)$$

É útil expressarmos a entropia linear em termos dos elementos de U . Para isso, escrevemos primeiramente a entropia linear em termos dos elementos da matriz X :

$$S_L = 1 - \frac{1}{d_A^2 d_B^2} \sum_{m,m',n,n'} X_{m,n} X_{m',n'}^* X_{m',n'} X_{m,n}^*, \quad (2.62)$$

Devido ao processo de reshaping os elementos de X correspondem a elementos de U de acordo com $X_{k_1 k_2, i_1 i_2} = U_{k_1 i_1, k_2 i_2}$, onde os índices k_1 e k_2 estão associados ao subsistema

A , assim como i_1 e i_2 a B . Assim, a entropia linear fica:

$$S_L(U) = 1 - \frac{1}{d_A^2 d_B^2} \sum_{k_1, k_2, l_1, l_2=1}^{d_A} \sum_{i_1, i_2, j_1, j_2=1}^{d_B} U_{k_1 i_1, k_2 i_2} U_{l_1 j_1, l_2 j_2} U_{l_1 i_1, l_2 i_2}^* U_{k_1 j_1, k_2 j_2}^* . \quad (2.63)$$

2.3 Teoria de Matrizes Aleatórias

Nesta seção apresentaremos os ensembles de matrizes aleatórias usados neste trabalho: o ensemble circular unitário (CUE) e o ensemble circular ortogonal (COE). Conforme veremos nos capítulos 3 e 4 estamos interessados na aplicação iterativa de uma operação unitária a um estado inicial não emaranhado. Neste caso, a modelagem apropriada da operação unitária em discussão, mapeando o estado inicial ao novo estado do sistema, é feita por um dos ensembles unitários utilizados. Estes ensembles foram introduzidos por Dyson [32] e estão associados a sistemas com simetria de reversão temporal (COE) ou não (CUE). Omitiremos as propriedades comumente discutidas para ensembles de matrizes aleatórias na bibliografia padrão [34, 35, 53] como densidade de probabilidade de autovalores e espaçamento de níveis, as quais são bem conhecidas. Nosso objetivo nesta seção é nos limitarmos ao conjunto de conceitos, propriedades e ferramentas indispensáveis às discussões dos capítulos subsequentes. De fato, apenas algumas propriedades adicionais foram utilizadas nos cálculos do Apêndice D. Após apresentação dos ensembles, mostraremos o método para geração de matrizes CUE e COE. Finalmente mostraremos os resultados referentes a dois testes numéricos aos quais submetemos o gerador numérico de matrizes CUE que construímos.

2.3.1 Ensemble COE

Consideremos um sistema bipartido descrito por um vetor estado inicial; após aplicação de uma operação unitária o sistema se encontrará em novo estado. Portanto, essa matriz unitária descreve a transformação sofrida pelo sistema após um intervalo de tempo finito e seus elementos fornecem as probabilidades de transição entre os vários estados. Seus autovalores são da forma circular: $e^{i\theta_j}$, com $\theta_j \in [0, 2\pi]$.

Uma operação unitária com simetria de reversão temporal é associada a uma matriz unitária simétrica S [32]. Seguindo Dyson [32], é fácil mostrar que toda matriz unitária simétrica S pode ser escrita como

$$S = U^T U , \quad (2.64)$$

onde U é unitária. Definimos uma pequena vizinhança de S [33] por

$$S + dS \equiv U^T (1 + idM) U , \quad (2.65)$$

onde dM é uma matriz simétrica real com elementos dM_{ij} , de modo que o volume dessa vizinhança é definido por

$$\mu_{coe}(dS) = \prod_{i \leq j} d\mu_{ij} , \quad (2.66)$$

sendo que os $d\mu_{ij}$ são os comprimentos dos pequenos intervalos em que os elementos dM_{ij} com $i \leq j$ podem variar independentemente. A probabilidade de que uma matriz do ensemble COE fique entre S e $S + dS$ é proporcional a

$$P(S)d(S) = \frac{1}{V_{coe}} \mu_{coe}(dS) , \quad (2.67)$$

onde V_{coe} é o volume total do espaço T_{coe} de matrizes unitárias simétricas de ordem $d \times d$. Evidentemente, pode ser provado [53] que $\mu_{coe}(dS)$ independe da escolha de U em (2.64).

O teorema a seguir se refere a uma propriedade fundamental do ensemble *COE*.

Teorema 2.3.1. *O ensemble ortogonal E_{coe} é unicamente definido no espaço de matrizes unitárias simétricas de ordem $d \times d$ pela propriedade de ser invariante sob toda operação*

$$S' = W^T S W , \quad (2.68)$$

onde W é qualquer matriz unitária $d \times d$.

2.3.2 Ensemble CUE

Um operação unitária sem simetria de reversão temporal é associada simplesmente a uma matriz unitária S [32] sem restrições adicionais. É fácil mostrar que toda matriz unitária S pode ser escrita como

$$S = UV , \quad (2.69)$$

onde U e V são matrizes unitárias. Definimos uma vizinhança de S por

$$S + dS = U^T(1 + idM)U , \quad (2.70)$$

onde dM é uma matriz hermitiana infinitesimal com elementos $dM_{ij} = dM_{ij}^{(0)} + idM_{ij}^{(1)}$, de modo que o volume dessa vizinhança é definido por

$$\mu_{cue}(dS) = \prod_{i \leq j} d\mu_{ij}^{(0)} \prod_{i < j} d\mu_{ij}^{(1)} , \quad (2.71)$$

sendo que os $d\mu_{ij}^{(0)}$ e $d\mu_{ij}^{(1)}$ são os comprimentos dos pequenos intervalos em que os elementos $dM_{ij}^{(0)}$ (com $i \leq j$) e $dM_{ij}^{(1)}$ (com $i < j$) podem variar independentemente, respectivamente. A probabilidade de que uma matriz do ensemble CUE fique entre S e $S + dS$ é proporcional a

$$P(S)d(S) = \frac{1}{V_{cue}} \mu_{cue}(dS) , \quad (2.72)$$

onde V_{cue} é o volume total do espaço T_{cue} de matrizes unitárias de ordem $d \times d$. O teorema a seguir estabelece a propriedade de invariância do ensemble CUE, análoga ao teorema (2.3.1), e expressa o fato de que $\mu_{cue}(dS)$ é a medida invariante do grupo unitário d -dimensional, também conhecida como medida de Haar [32].

Teorema 2.3.2. *O ensemble unitário E_{cue} é unicamente definido no espaço T_{cue} de todas as matrizes unitárias de ordem $d \times d$ pela propriedade de ser invariante sob toda operação*

$$S' = USV, \quad (2.73)$$

onde U e V são quaisquer duas matrizes unitárias $d \times d$.

2.3.3 Geração Numérica de Estados Aleatórios e de Matrizes CUE e COE.

Um método muito usado para construir matrizes CUE é baseado na parametrização de Hurwitz[50]. Começamos com transformações unitárias elementares, $E^{(i,j)}(\phi, \psi, \chi)$, com elementos de matriz não-nulos:

$$\begin{aligned} E_{kk}^{(i,j)} &= 1, \quad k = 1, \dots, N, \quad k \neq i, j \\ E_{ii}^{(i,j)} &= e^{i\psi} \cos \phi, \quad E_{ij}^{(i,j)} = e^{i\chi} \sin \phi \\ E_{ji}^{(i,j)} &= -e^{-i\chi} \sin \phi, \quad E_{jj}^{(i,j)} = e^{-i\psi} \cos \phi \end{aligned} \quad (2.74)$$

Essa transformação, aplicada a uma matriz $N \times N$, altera apenas os elementos das linhas i e j , permanecendo os elementos das demais linhas inalteradas. As transformações (2.74)

são usadas para formar $N - 1$ rotações compostas

$$\begin{aligned}
E_1 &= E^{(N-1,N)}(\phi_{01}, \psi_{01}, \chi_1) \\
E_2 &= E^{(N-2,N-1)}(\phi_{12}, \psi_{12}, 0)E^{(N-1,N)}(\phi_{02}, \psi_{02}, \chi_2) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
E_{N-1} &= E^{(1,2)}(\phi_{N-2,N-1}, \psi_{N-2,N-1}, 0) \\
&\times E^{(2,3)}(\phi_{N-3,N-1}, \psi_{N-3,N-1}, 0) \\
&\dots \times E^{(N-1,N)}(\phi_{0,N-1}, \psi_{0,N-1}, \chi_{N-1})
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Uma matriz CUE é finalmente construída por $U_{CUE} = e^{i\alpha} E_1 E_2 \cdots E_{N-1}$. Os ângulos de Euler ψ, χ , e α são tomados aleatoriamente de acordo com uma distribuição de probabilidade uniforme nos intervalos

$$0 \leq \psi_{rs} \leq 2\pi, \quad 0 \leq \chi_s \leq 2\pi, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \tag{2.77}$$

e $\phi_{rs} = \sin^{-1}(\xi_{rs}^{1/(2r+2)})$, com ξ_{rs} tomado aleatoriamente de acordo com uma distribuição de probabilidade uniforme no intervalo $[0, 1]$. Para obtermos uma matriz COE basta formarmos o produto $U_{CUE}^T U_{CUE}$.

Nas investigações do capítulo 4 lidaremos com estados aleatórios complexos e reais. Portanto, como a geração de vetores estado está intimamente relacionada à geração de matrizes é conveniente descrevermos a geração de estados aleatórios nesta subseção.

Um estado de componentes complexas normalizado pertencente a um espaço de Hilbert de dimensão d pode ser representado por um ponto numa superfície esférica de raio unitário pertencente a um espaço vetorial de dimensão $2d$. Se desejamos gerar um ensemble de estados aleatórios complexos igualmente prováveis devemos escolhê-los de acordo

com uma distribuição de probabilidade uniforme na esfera $2d$ -dimensional. Para sortear um estado deste ensemble [37, 38], escolhamos um conjunto de d números aleatórios complexos independentes Z_i , obtidos de acordo com uma distribuição normal, e fazemos a reescala $Z_i \rightarrow Z_i / (\sum_{i=1}^d |Z_i|^2)^{1/2}$ de modo a normalizar o estado. Alternativamente, existem outras maneiras de gerar um estado deste ensemble [39], dentre elas podemos usar uma matriz CUE. Devemos lembrar que as matrizes unitárias aleatórias do ensemble CUE, distribuídas de acordo com a medida invariante de Haar sobre o grupo $U(N)$, são geradas com equiprobabilidade e portanto os vetores-coluna (ou -linha) dessas matrizes também são equiprováveis. Assim, um estado aleatório complexo pode ser gerado por tomar uma coluna (ou linha) de uma matriz CUE.

Analogamente, para sortearmos um estado aleatório real basta escolhermos um conjunto de d números aleatórios reais independentes a_i , obtidos de acordo com uma distribuição normal, e fazermos a reescala das componentes reais: $a_i \rightarrow a_i / (\sum_{i=1}^d (a_i)^2)^{1/2}$ de modo a normalizar o estado. Alternativamente, poderíamos tomar colunas (ou linhas) de matrizes do ensemble HOE (ensemble de Haar ortogonal) [41], o qual é o equivalente de CUE com elementos reais.

2.3.4 Propriedades Estatísticas de Matrizes CUE.

Construímos um gerador de matrizes CUE e o submetemos a dois testes estatísticos. O propósito desses testes é confirmar que o conjunto de matrizes geradas satisfazem às propriedades esperadas para um conjunto de matrizes distribuídas de acordo com a medida invariante de Haar. O primeiro teste diz respeito ao fator de forma para matrizes CUE,

amplamente conhecido [34, 35]:

$$\langle |Tr(U^n)|^2 \rangle = \begin{cases} n & \text{para } 1 \leq n \leq N \\ N & \text{para } n \geq N, \end{cases} \quad (2.78)$$

onde N é o número de linhas (ou colunas) da matriz. Verificamos o comportamento previsto teoricamente para o fator de forma conforme podemos ver na figura (2.4). O

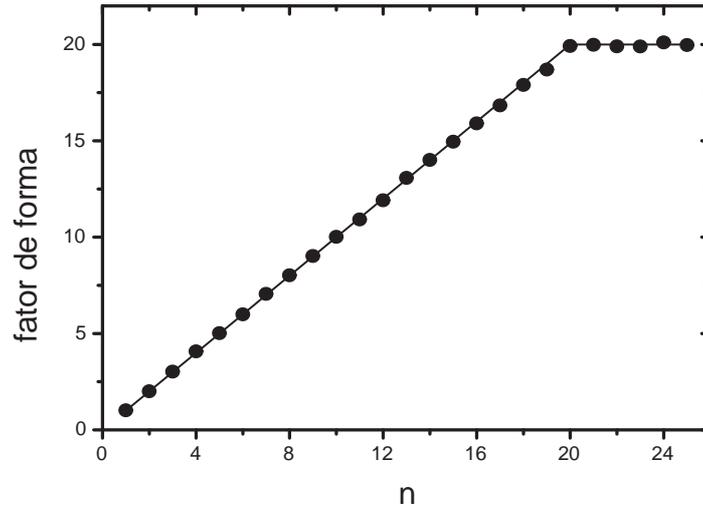


Figura 2.4: Teste de fator de forma para um conjunto de matrizes CUE geradas usando a parametrização de Hurwitz ($N = 20$). A linha contínua corresponde à previsão teórica dada pela Eq. (2.78) e os círculos cheios são resultado de uma simulação numérica de 10000 matrizes com o gerador CUE descrito no texto.

segundo teste se refere à probabilidade de encontrarmos um determinado valor para um elemento de matriz CUE. Sabemos que essa probabilidade é dada por [40]:

$$p(U) \propto (1 - |U|^2)^{N-2}. \quad (2.79)$$

É conveniente, por simplicidade, ao invés de considerarmos a variável complexa U , usarmos a variável real $x = \log_{10} |U|^2$. Essa escolha se deve a dois motivos; em primeiro lugar, consideramos uma distribuição de probabilidade em termos do módulo da variável complexa U suficiente para nossos propósitos e, além disso, a escala logarítmica para U é mais apropriada para comparação com testes numéricos. Desta forma, utilizando a lei de transformação fundamental de probabilidades e manipulações analíticas elementares é fácil mostrar que

$$p(x) \propto (1 - 10^x)^{N-2} 10^x, \quad (2.80)$$

onde $x = \log_{10} |U|^2$. Na figura (2.5) podemos constatar que o histograma associado às matrizes geradas numericamente concorda satisfatoriamente com a previsão teórica da expressão (2.80).

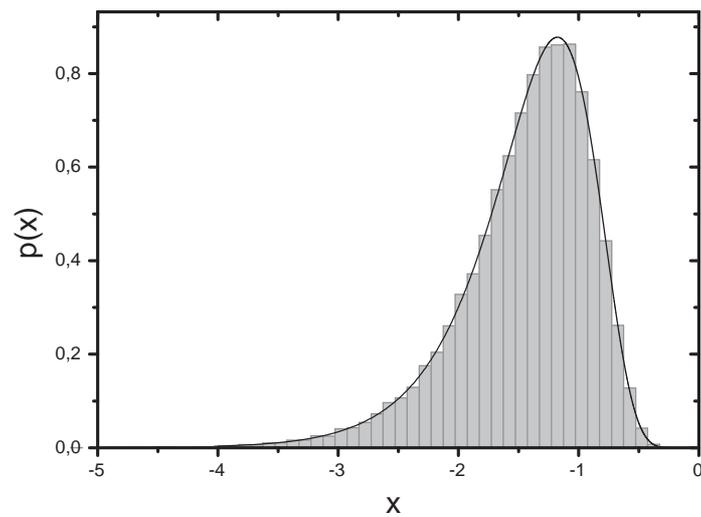


Figura 2.5: Teste de distribuição de probabilidade para o valor de um elemento de matriz CUE, $N = 16$. A linha contínua corresponde à previsão teórica dada pela Eq. (2.80) e o histograma está associado à simulação numérica de 200 matrizes com o gerador de CUE. Todos os $N \times N$ elementos de matriz foram utilizados.

Capítulo 3

Emaranhamento de Mapas Quânticos

3.1 Introdução e Motivações.

Antes de apresentarmos os resultados deste capítulo, é apropriado resumirmos brevemente o conteúdo do mesmo e comentarmos sobre aspectos motivacionais. Nas seções 3.2 e 3.3 apresentaremos duas provas numéricas complementares de que a simetria espacial não é responsável pelo poder de emaranhamento [44] reduzido de mapas do padeiro quânticos [43]. Na seção 3.4 complementaremos a análise verificando que a dimensão do espaço de Hilbert é de fato o parâmetro decisivo que determina se as propriedades de emaranhamento do mapa do padeiro quântico são universais ou não. A seção final 3.5 contém a derivação analítica duma relação geral entre o poder de emaranhamento assintótico de um mapa e certas propriedades dos seus autovetores.

A eficiência dos vários mapas do padeiro (subseção 2.1.1) para gerar emaranhamento foi estudada por Scott e Caves [43]. Eles concluíram que mapas do padeiro quânticos são, em geral, capazes de criar altos níveis de emaranhamento multipartido entre os qubits.

Entretanto, eles constataram, através de simulações numéricas, que alguns mapas do padeiro quânticos podem, em média, emaranhar melhor que outros, e que nenhum mapa do padeiro quântico é capaz de gerar os níveis de emaranhamento esperados em estados aleatórios. Esses autores propuseram a conjectura de que “isso poderia estar relacionado ao fato de que simetrias espaciais no mapa do padeiro permitem desvios das predições da teoria de matrizes aleatórias”.

As seções seguintes apresentam um conjunto de resultados de experimentos numéricos realizados com o objetivo de testar a conjectura de Scott e Caves.

A avaliação do efeito das simetrias espaciais dos mapas sobre os níveis de emaranhamento faz parte da discussão mais geral a respeito da relação entre as propriedades de uma evolução unitária e sua capacidade de emaranhamento. A questão a respeito de quais propriedades uma operação unitária deve possuir de modo a ser eficiente como geradora de emaranhamento ainda não tem uma resposta definida, embora alguns resultados parciais tenham sido obtidos [45 - 47, 50, 51].

3.2 Comparação entre os Mapas B_{2q} e D_{2q} .

A comparação entre os níveis de emaranhamento gerados pelos mapas B_{2q} , simétrico, e D_{2q} , o qual resulta de remover a simetria do padeiro, constitui um teste simples para a conjectura da simetria espacial como responsável pelo desvio da TMA.

Primeiramente, devemos conhecer o comportamento da entropia para sucessivas aplicações dos mapas a um estado produto inicial e definir os critérios para a devida comparação dos mesmos. Ao aplicarmos iterativamente o mapa B_{2q} a um estado produto

inicial verificamos que a entropia tipicamente cresce até atingir um valor de saturação, o qual depende do estado produto inicial. Após esse tempo de saturação, t_{sat} , o valor da entropia flutua com pequena amplitude em torno desse nível de emaranhamento. Esse é o comportamento observado por Scott e Caves para uma variedade de formas de particionar os qubits [43]. Na figura 3.1 temos um exemplo de tal comportamento típico associado ao mapa B_{28} aplicado a um estado produto de um sistema bipartido em dois subgrupos de 4 qubits mais/menos significativos. O estado inicial de cada subsistema foi obtido aleatoriamente de acordo com uma distribuição de probabilidade uniforme na esfera, conforme descrito na subseção 2.3.3 para geração de estados complexos aleatórios (“estados CUE”). Deste modo, temos um estado produto inicial $CUE \otimes CUE$. Nota-se que à medida que o valor da entropia se aproxima do valor de saturação as oscilações diminuem progressivamente e quando o regime de saturação é atingido restam pequenas flutuações em lugar das pronunciadas oscilações das primeiras iterações do mapa.

Conhecendo o comportamento típico da entropia associado a sucessivas aplicações dos mapas B_{2q} , devemos avaliar se experimentos numéricos para o mapa D_{2q} revelam características similares. Para o mapa D_{2q} (2.20) constatamos as mesmas características qualitativas. Como um exemplo, mostramos na Fig. 3.2 alguns gráficos de entropia vs. tempo associado a um mapa D_{28} aplicado ao mesmo sistema anterior de oito qubits bipartido em quatro qubits mais/menos significativos.

Tendo em vista os comportamentos descritos, nosso enfoque será o regime assintótico para tempos $t \gg t_{sat}$, quando o sistema já atingiu o equilíbrio. Nesse regime esperamos que as propriedades estatísticas sejam descritas por algum modelo de matrizes aleatórias. A modelagem mais simples que podemos conceber a respeito de estados puros evoluídos

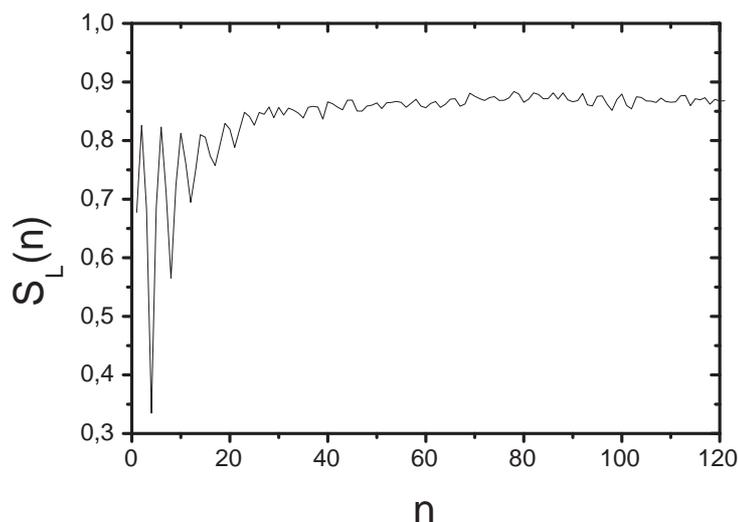


Figura 3.1: um estado produto inicial puro foi escolhido aleatoriamente de acordo com a medida CUE, e então evoluído pela aplicação do mapa B_{28} um número n de vezes. Para cada tempo n , calculamos a entropia linear, $S_L(n)$. O sistema consiste de oito qubits divididos em dois subgrupos de quatro mais/menos significativos.

associa esses estados a estados aleatórios do mesmo espaço de Hilbert, escolhidos de acordo com a medida CUE. A entropia linear média de tais estados é dada por:

$$\langle S_L \rangle_{CUE} = 1 - \frac{\mu + \nu}{\mu\nu + 1}, \quad (3.1)$$

onde μ e ν são as dimensões do espaço de Hilbert dos subsistemas [42].

Para fazermos um estudo quantitativo mais detalhado dos mapas em questão no regime assintótico devemos considerar um conjunto de entropias lineares associadas à evolução de estados produto iniciais num intervalo temporal do regime assintótico. Nossas simulações geraram conjuntos de 2×10^6 dados reunindo valores de $S_L(n)$ para $513 \leq n \leq 2512$, para 10^3 estados produto iniciais. Esses dados são mostrados na Fig. 3.3. Nitidamente os mapas

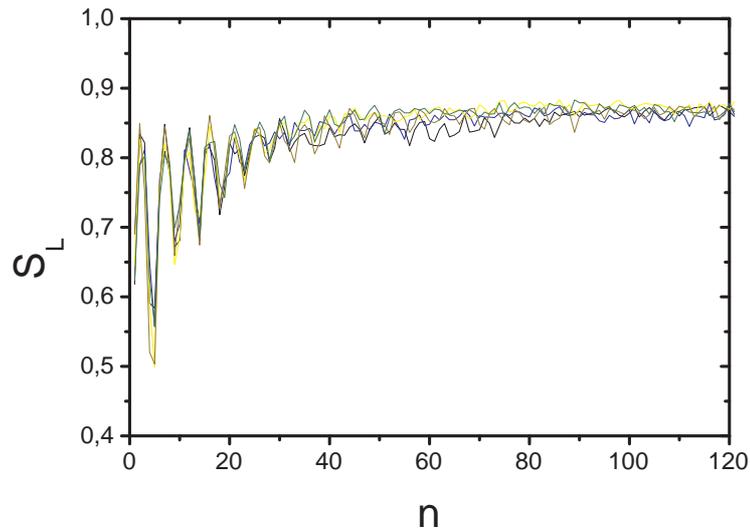


Figura 3.2: Cinco estados produto iniciais puros foram escolhidos aleatoriamente de acordo com a medida CUE, e então evoluídos pela aplicação do mapa D_{28} um número n de vezes. Para cada tempo, calculamos a entropia linear, $S_L(n)$. O sistema consiste de oito qubits divididos em dois subgrupos de quatro mais/menos significativos.

produzem distribuições de entropias similares. Podemos notar que as diferenças entre as distribuições de entropias dos mapas são muito menores que as diferenças de ambos em relação à predição da TMA para CUE (Fig. 3.3). Dessa forma, concluímos que a simetria de reflexão não é a propriedade preponderante que faz com que os estados gerados pelo mapa do padeiro sejam menos emaranhados, em média, que estados aleatórios. Contudo, a ausência de simetria pode ser a justificativa para um desvio secundário, um aumento pequeno porém perceptível na figura 3.3, do poder de emaranhamento do mapa D_{2q} quando comparado ao mapa B_{2q} . Influência semelhante de simetria num sistema de

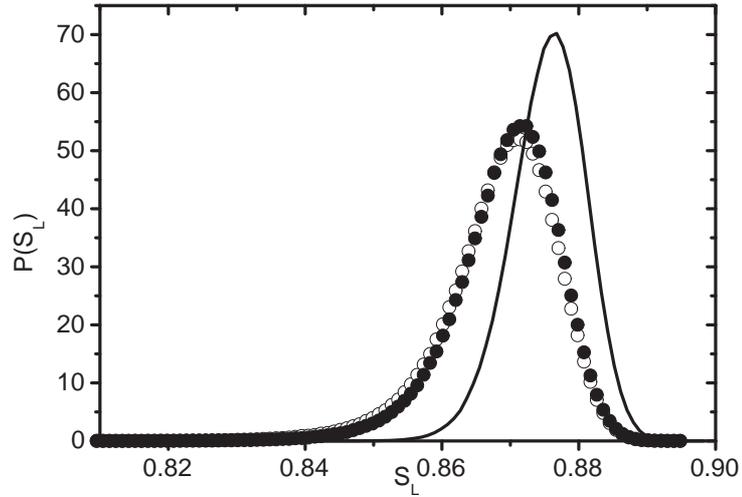


Figura 3.3: Histogramas de entropias lineares assintóticas geradas pelo mapa do padeiro (círculos abertos) e pelo mapa D (círculos cheios). A linha corresponde à distribuição de entropias para um grande conjunto de estados aleatórios CUE calculados numericamente. Em todos os casos o sistema consiste de oito qubits divididos em dois subgrupos de quatro mais/menos significativos.

rotores acoplados foi relatada por Bandyopadhyay e Lakshminarayan [52]¹.

Devemos mencionar que no trabalho de Scott e Caves [43] foi utilizado um ensemble de estados produto de 8 sistemas de 1 qubit, i.e., $CUE_2^{\otimes 8}$. Entretanto tal ensemble constitui um sub-ensemble particular de um ensemble de estados produto de 2 sistemas de 4 qubits, $CUE_{16}^{\otimes 2}$, o qual é mais geral e, portanto, mais apropriado para um sistema de 8 qubits bipartido em 4 qubits mais/menos significativos. As distribuições de entropias lineares produzidas pelos mapas apresentam uma dependência do ensemble de estados iniciais conforme podemos observar na Fig. 3.4, sendo que o desvio da TMA é maior para o

¹Foi observado que a presença de simetria de paridade resulta num emaranhamento um pouco menor.

caso $\text{CUE}_2^{\otimes 8}$. De fato, Demkowicz-Dobrzanski e Kuś [45], estudando propriedades de emaranhamento de rotores quicados acoplados, também constataram que diferentes escolhas resultam em comportamento de emaranhamento médio significativamente diferentes².

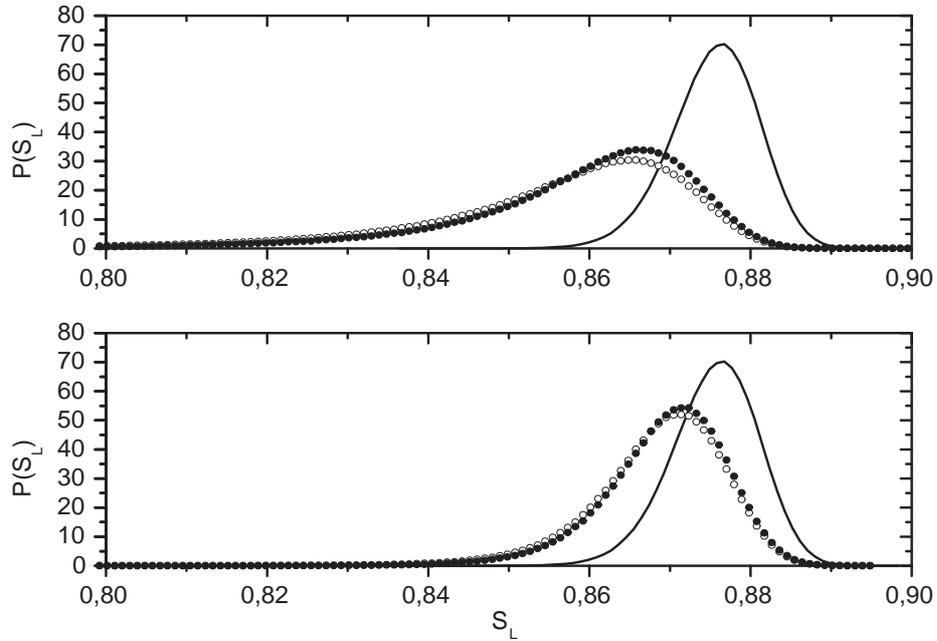


Figura 3.4: Histogramas de entropias lineares assintóticas geradas pelos mapas B_{2s} (círculos abertos) e D_{2s} (círculos cheios) aplicados ao ensemble de condições iniciais $\text{CUE}_2^{\otimes 8}$ (figura superior) e ao ensemble de condições iniciais $\text{CUE}_{16}^{\otimes 2}$ (figura inferior), a qual repetimos (figura 3.3) para uma melhor comparação. A linha contínua corresponde à distribuição de entropias para um grande conjunto de estados aleatórios CUE_{256} calculados numericamente. Em todos os casos o sistema consiste de oito qubits divididos em dois subgrupos de quatro mais/menos significativos.

²Ensemble de estados produto de estados aleatórios ou ensembles de estados coerentes de spins independentes.

3.3 A Imposição da Simetria.

De acordo com os resultados da seção anterior, a simetria espacial não justifica o poder de emaranhamento reduzido do B_{2q} . Com o intuito de fornecermos uma prova adicional, de que a simetria não reduz significativamente o poder de emaranhamento de um mapa, avaliaremos o poder de emaranhamento de um conjunto de operadores unitários aleatórios e “espacialmente simétricos”. Compararemos com o conjunto CUE [53] de operadores aleatórios sem simetrias.

Antes de apresentarmos os resultados, descreveremos a introdução de simetrias num modelo de matrizes aleatórias. O método é bem conhecido [54 - 57] e consiste em levar a matriz unitária à forma diagonal em blocos pela escolha de uma base com simetria bem definida. Depois cada bloco diagonal é escolhido aleatoriamente. Usando este procedimento para o B_{2q} chegamos a um ensemble de matrizes aleatórias \mathcal{B} com a estrutura:

$$\mathcal{B} = \Lambda (|0\rangle\langle 0| \otimes W^{(1)} + |1\rangle\langle 1| \otimes W^{(2)}) \Lambda^\dagger, \quad (3.2)$$

onde $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ são membros independentes do ensemble COE, apropriado para mapas unitários com simetria de reversão temporal [53]. Os operadores $|0\rangle\langle 0|$ e $|1\rangle\langle 1|$ projetam na base computacional do primeiro qubit, e Λ é definido em (2.17). Matrizes CUE foram geradas com base na parametrização de Hurwitz [58, 59] conforme descrito na subseção 2.3.3. Matrizes COE foram obtidas fazendo produtos VV^T , com V pertencente a CUE.

Devemos notar que no caso CUE não é necessário gerarmos um conjunto de mapas e um conjunto de estados produto iniciais. Pois, devido a propriedades de invariância (veja seção 4.2), é suficiente considerarmos um ensemble de mapas e apenas um estado da base computacional. Portanto, devemos tomar linhas de matrizes CUE e por isso usaremos os

dados gerados para estados CUE das figuras anteriores.

Definida a modelagem dos mapas aleatórios simétricos, na figura 3.5 comparamos o poder de emaranhamento do ensemble destes mapas com o ensemble CUE e comprovamos que não há diferenças significativas entre as distribuições de entropias, conforme esperávamos.

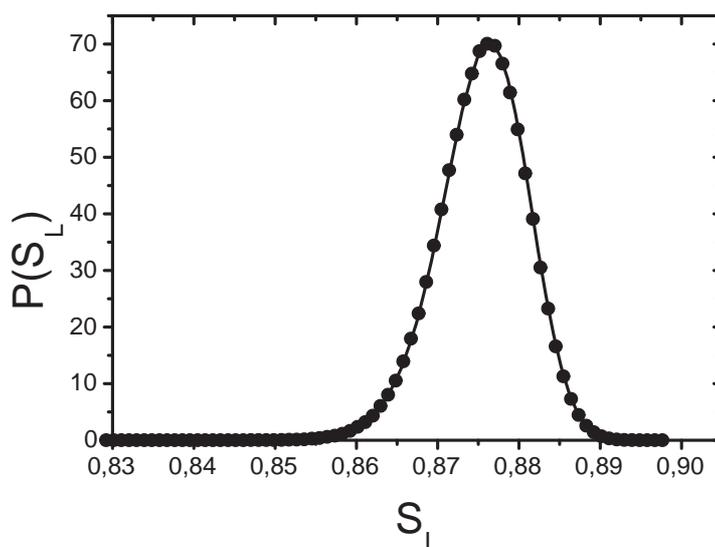


Figura 3.5: Histogramas de entropias lineares geradas por uma aplicação de mapas aleatórios pertencendo ao ensemble simétrico da Eq.(3.2) (círculos), ou ao ensemble CUE (linha). No primeiro caso aplicamos 1000 mapas simétricos a 1000 estados puros aleatórios. O conjunto de dados para o caso CUE é o mesmo que foi utilizado nas figuras anteriores.

3.4 Mapas de Dimensão Arbitrária

Diante dos resultados que demonstraram que os desvios da TMA não poderiam ser atribuídos às simetrias espaciais, passamos a avaliar outra propriedade dos mapas que

poderia ter um efeito predominante sobre tais desvios. É sabido que mapas do padeiro em espaços de Hilbert de dimensão potência de 2 exibem propriedades peculiares. A estatística espectral de padeiros de dimensão 256 e 1024, por exemplo, apresenta comportamento completamente distante do comportamento universal [60, 61]. De fato, a distribuição de espaçamento de níveis concorda bem com a distribuição de Wigner [7, 60] apenas para $d \neq 2^q$, mas para o caso $d = 2^q$ a degenerescência accidental de quasi-energias é observada. Sano [61] também mostra uma anomalia no fator de forma espectral (definido na Eq. (2.78)) para $d = 2^q$. Com base nessas informações, passamos a considerar a possibilidade de que a dimensão dos padeiros considerados até agora, potência de 2, seria a causa dos desvios da TMA. Para testar tal hipótese fizemos simulações análogas aos dos mapas de qubits para o caso de mapas de dimensão arbitrária, i.e., $d \neq 2^q$.

Os mapas do padeiro quânticos são definidos para qualquer dimensão d par (subseção 2.1.1). Consideramos, como exemplo, um sistema com dimensão $d = 238$, com subsistemas de dimensão 14 e 17, e outro sistema de dimensão $d = 162$, com subsistemas de dimensão 9 e 18, sendo que este último caso nos permite avaliar o efeito de um fator potência de 3 na dimensão do espaço de Hilbert. Os resultados dos experimentos numéricos são mostrados na Fig. 3.6 e provam o comportamento universal dos padeiros de dimensão $d \neq 2^q$, os quais atingem níveis de emaranhamento muito próximos aos previstos pela TMA. Sem mostrarmos uma figura, comentamos apenas que também testamos o mapa D com dimensão $d = 238$, o qual produziu uma distribuição de entropias ainda mais próxima da prevista pela TMA.

Concluimos portanto que, evitando dimensões potência de 2, recuperamos o comportamento universal. Esses resultados sugerem que talvez mapas do padeiro de qubits (e

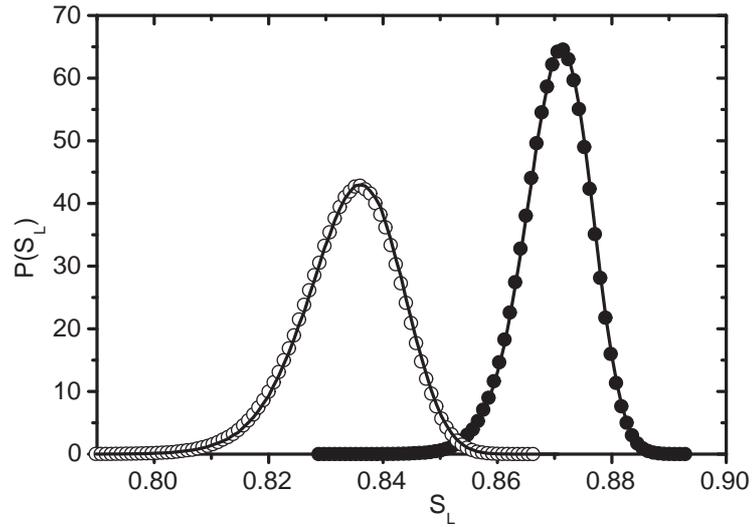


Figura 3.6: Histogramas de entropias lineares assintóticas geradas por dois mapas do padeiro de dimensão $d \neq 2^q$ com: (círculos cheios) $d = 238$, $d_A = 14$, $d_B = 17$; (círculos abertos) $d = 162$, $d_A = 9$, $d_B = 18$. Os dados foram colecionados com o mesmo procedimento usado para o caso de qubits. As linhas contínuas são as predições CUE correspondentes.

mapas D) possuam simetrias ocultas. Complementarmente, o resultado $d = 162$ mostra que um fator potência de 3 na dimensão do espaço de Hilbert não ocasiona comportamento anômalo para o padeiro.

3.5 Poder de Emaranhamento Assintótico

Nas seções anteriores analisamos um conjunto de resultados obtidos numericamente. Esses resultados consistiam em distribuições de entropias lineares no regime assintótico.

O poder de emaranhamento dos mapas era obtido simplesmente por calcular a média de tais distribuições. Nesta seção realizaremos desenvolvimentos analíticos que nos permitirão obter uma expressão para o poder de emaranhamento assintótico em termos dos autovetores dos mapas. Dessa forma pretendemos obter o valor médio de nossas distribuições por outro método com o objetivo de verificar que os resultados estejam consistentes e, portanto, que ambos procedimentos estejam corretos.

Primeiramente apresentaremos uma expressão analítica para a entropia linear de um sistema bipartido em função do número de iterações n de um operador unitário U atuando num estado produto $|\psi\rangle$. Partimos da relação entre o estado emaranhado evoluído $|\psi(n)\rangle$ e o estado produto inicial $|\psi\rangle$:

$$|\psi(n)\rangle = U^n |\psi\rangle. \quad (3.3)$$

Os estados pertencem ao espaço de Hilbert $H_A \otimes H_B$, onde as dimensões de H_A e H_B são respectivamente d_A e d_B . Poderíamos expandir $|\psi\rangle$ em qualquer base ortogonal do espaço de Hilbert ao qual esse estado pertence, contudo a escolha de uma base na qual a atuação do operador U possa ser descrita com maior simplicidade é mais apropriada. Dessa forma é natural expressarmos $|\psi\rangle$ em termos dos autovetores de U ,

$$|\psi\rangle = \sum_j \langle e_j | \psi \rangle |e_j\rangle, \quad (3.4)$$

sendo $U|e_j\rangle = e^{i\phi_j}|e_j\rangle$, $j = 1, \dots, d_A d_B$. Então,

$$|\psi(n)\rangle = \sum_j e^{in\phi_j} \langle e_j | \psi \rangle |e_j\rangle. \quad (3.5)$$

Essa escolha não reflete meramente um critério de conveniência operacional, pois também nos permitirá relacionar o poder de emaranhamento do mapa U com propriedades estatísticas de seus autovetores. A matriz densidade total é o produto direto associado ao

estado $|\psi(n)\rangle$: $\rho(n) = |\psi(n)\rangle\langle\psi(n)|$. Agora, efetuando o traço sobre o subsistema B , obtemos a matriz densidade reduzida do subsistema A :

$$\rho_A(n) = \sum_{ij} e^{in(\phi_i - \phi_j)} \langle e_i | \psi \rangle \langle \psi | e_j \rangle \rho_A^{ij}, \quad (3.6)$$

onde ρ_A^{ij} é o operador reduzido

$$\rho_A^{ij} \equiv \text{Tr}_B |e_i\rangle\langle e_j|. \quad (3.7)$$

Usando a definição de entropia linear chegamos a:

$$\begin{aligned} S_L(n, |\psi\rangle) &= 1 - \text{Tr}_A [\rho_A(n)^2], \\ &= 1 - \text{Tr}_A \left(\sum_{ijkl} e^{in(\phi_i - \phi_j + \phi_k - \phi_l)} \langle e_i | \psi \rangle \langle \psi | e_j \rangle \langle e_k | \psi \rangle \langle \psi | e_l \rangle \rho_A^{ij} \rho_A^{kl} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

A expressão no lado direito da equação acima deve reproduzir o comportamento típico da entropia linear verificado numericamente no capítulo anterior (figuras 3.1 e 3.2). Analisando a expressão reconhecemos duas características explicitamente. Em primeiro lugar, o caráter oscilatório próprio de soma de exponenciais pesadas com determinadas quantidades. Em nosso caso essas quantidades dependem do estado inicial e dos autovetores. Em segundo lugar, a inevitável evolução para um valor de saturação com flutuações conforme n aumenta, pois para valores de n grandes temos uma distribuição aleatória de exponenciais no círculo unitário. Inicialmente os autovalores são distribuídos no círculo com certa correlação, mas para valores de n grandes o espectro foi esticado muitas vezes ao longo do círculo unitário a ponto das exponenciais ficarem descorrelacionadas.

A definição de Zanardi et al. [44] do poder de emaranhamento de um operador unitário U atuando sobre um conjunto de estados inicialmente não emaranhados, utilizando a

entropia linear como medida de emaranhamento, é dada por:

$$e_p(U) = \langle S_L(U|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle) \rangle_{|\psi_A\rangle, |\psi_B\rangle} . \quad (3.9)$$

Com a intenção de derivarmos uma expressão para o poder de emaranhamento assintótico em termos dos autovetores da evolução unitária U , devemos lembrar que uma distribuição de entropias depende (fracamente) do número de iterações mesmo no regime assintótico e, por essa razão, os histogramas que apresentamos (figuras 3.3 a 3.6) incluíam dados correspondentes a tempos diferentes. Então é natural considerarmos uma média da entropia linear sobre ambos estados iniciais e tempo. Numa primeira passagem faremos a média temporal e posteriormente a média sobre o ensemble de estados produto iniciais.

A entropia linear é a medida de emaranhamento utilizada e sua dependência do número de aplicações do operador unitário U é dada por (3.8). Conforme observaram Demkowicz-Dobrzanski e Kuś [45], para o comportamento assintótico da entropia linear os termos importantes em (3.8) são os que sobrevivem após realizarmos média temporal sobre a entropia linear,

$$S_L^\infty(|\psi\rangle) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_L(k, |\psi\rangle) . \quad (3.10)$$

Devemos mencionar que é diretamente visível dos comportamentos típicos da entropia linear (figuras 3.1 e 3.2) que o emaranhamento assintótico é igual a média temporal do emaranhamento. Para os termos que sobrevivem os fatores de fase desaparecem,

$$\phi_k - \phi_l + \phi_m - \phi_n = 0 , \quad (3.11)$$

ao passo que os outros termos oscilam e então se anulam quando mediados sobre o tempo.

A condição acima é satisfeita para os dois casos $k = l$ e $m = n$, ou $k = n$ e $l = m$. Essa condição é mais geral do que meramente requerer ausência de degenerescências, já que poderíamos em princípio ter relações de comensurabilidade do tipo $\phi_k - \phi_l + \phi_m = \phi_n$. No entanto, os dois casos mencionados são os únicos a serem considerados já que verificamos numericamente que os autovalores dos mapas estudados nesse trabalho, ainda que anômalos em outro sentido (estatística espectral, seção 3.4), não são comensuráveis. Assim, a entropia linear assintótica fica:

$$S_L^\infty(|\psi\rangle) = 1 - \sum_i |\langle e_i|\psi\rangle|^4 \text{Tr}_A(\rho_A^{ii})^2 - \sum_{i \neq j} |\langle e_i|\psi\rangle|^2 |\langle e_j|\psi\rangle|^2 [\text{Tr}_A(\rho_A^{ii}\rho_A^{jj}) + \text{Tr}_A(\rho_A^{ij}\rho_A^{ji})] . \quad (3.12)$$

Dessa forma, a entropia linear assintótica é somente função dos autovetores do operador unitário U e do estado produto inicial $|\psi\rangle$. Realizando a média sobre o ensemble de estados produto iniciais chegaremos a uma quantidade que caracteriza o poder de emaranhamento assintótico de uma evolução unitária, $e_p^\infty(U)$:

$$e_p^\infty(U) = \langle S_L^\infty(|\psi\rangle) \rangle_{|\psi\rangle} , \quad (3.13)$$

sendo $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$, onde $|\psi_A\rangle$ e $|\psi_B\rangle$ são estados CUE. Portanto, a média no ensemble de estados produto iniciais consistirá em médias CUE sobre ambos subsistemas.

Realizamos o cálculo da média, o qual, apesar de simples, é relativamente extenso de modo que optamos por descrevê-lo no apêndice A. Aqui escrevemos diretamente a expressão para o poder de emaranhamento assintótico em termos dos autovetores:

$$e_p^\infty(U) = \frac{d_A d_B + 1}{(d_A + 1)(d_B + 1)} - \frac{1}{d_A d_B (d_A + 1)(d_B + 1)} \left\{ \sum_{i \neq j} [\text{Tr}_A(\hat{\rho}_i^A \hat{\rho}_j^A) + \text{Tr}_B(\hat{\rho}_i^B \hat{\rho}_j^B)]^2 + 2 \sum_i [\text{Tr}_A(\hat{\rho}_i^A)]^2 \right\} \quad (3.14)$$

Basta tomarmos os autovetores de um mapa e os introduzirmos na expressão acima para obtermos o poder de emaranhamento assintótico. Fizemos isso numericamente para alguns casos (método 2) e comparamos com os resultados obtidos anteriormente, isto é, efetuando as médias no tempo e ensemble diretamente (método 1). A comparação pode ser vista na tabela 3.1.

Mapa	Método 1	Método 2
$B_{16 \otimes 16}$	0.868592(6)	0.868766
$B_{14 \otimes 17}$	0.878528(4)	0.878519
$D_{16 \otimes 16}$	0.869339(6)	0.869472
$D_{14 \otimes 17}$	0.878584(4)	0.878585

Tabela 3.1: Poder de Emaranhamento Assintótico. O método 1 consiste em efetuar a média diretamente de um conjunto de entropias lineares reunidas de um ensemble de estados iniciais tomadas numa janela temporal do regime assintótico. O método 2 consiste em obter os autovetores dos mapas numericamente e calcular o poder de emaranhamento assintótico através da fórmula (3.14).

Devemos observar que há uma pequeníssima diferença entre os valores obtidos pelos dois métodos e mencionar que o comprimento da barra de erro nos valores do método 1 (calculado através de $2\sqrt{var/N}$, onde var é a variância das entropias e N é o número de dados independentes) está subestimado. Pois, como tomamos uma janela temporal, há correlações temporais de forma que em $2\sqrt{var/N}$ o valor de N deveria ser efetivamente menor. Contudo a diferença entre os valores fornecidos pelos dois métodos é irrelevante, pois é muito menor que a diferença entre qualquer um deles e o valor predito pela TMA. Como nossas análises estavam baseadas nas diferenças entre o emaranhamento gerado por

um mapa e o emaranhamento predito pela TMA, as diferenças entre os valores fornecidos pelos dois métodos não constituem um problema.

A utilidade da expressão (3.14) não se restringe à comparação que apresentamos, pois tal expressão será utilizada como ponto de partida nos estudos do capítulo 4, onde calcularemos analiticamente o poder de emaranhamento médio de certos ensembles de operadores unitários.

Capítulo 4

A Geração Dinâmica de Emaranhamento

4.1 Introdução e Motivações

No capítulo anterior comparamos a distribuição de entropias lineares de estados gerados pela aplicação iterativa de um mapa (padeiro ou mapa D) com a distribuição de entropias para estados complexos aleatórios. Neste capítulo apresentaremos um conjunto de resultados numéricos e analíticos relativos à aplicação iterativa de *mapas aleatórios* a ensembles de estados produto aleatórios. Conforme mostramos (veja figuras 3.1 e 3.2), ao aplicarmos iterativamente um mapa a um estado produto observamos que a entropia tipicamente cresce até atingir um valor de saturação, o qual depende do estado inicial. Após esse tempo de saturação, t_{sat} , o valor da entropia flutua com pequena amplitude em torno desse valor de equilíbrio. Este é o regime de nosso interesse, isto é, o regime de tempos muito longos, ou seja, após o sistema ter relaxado para um estado de quase-

equilíbrio. Mais precisamente, estamos interessados no valor médio da entropia assintótica sobre uma distribuição apropriada de estados inicialmente não emaranhados. Isso define o poder de emaranhamento assintótico [44] da dinâmica unitária.

Há uma abordagem estatística baseada na suposição de que um estado inicial típico submetido à dinâmica “caótica” deve eventualmente evoluir para um estado aleatório, uniformemente distribuído na esfera. Por outro lado, se a dinâmica clássica é caótica no espaço de fase completo, então, de acordo com a conjectura de Bohigas-Giannoni-Schmit [34, 36], deveríamos esperar que a teoria de matrizes aleatórias obtenha sucesso na descrição das características estatísticas da dinâmica de tempo longo, em particular, a distribuição de entropias assintóticas. A proposta a seguir é comparar as previsões de teoria de matrizes aleatórias e a “teoria de estados aleatórios” para o emaranhamento assintótico médio gerado por um mapa globalmente unitário. Em teoria de matrizes aleatórias a dinâmica é explicitamente introduzida no modelo: um estado assintótico é gerado pela aplicação repetida de um mapa unitário aleatório a um estado inicial não emaranhado [46]. Mostraremos que o ensemble de estados gerado nesta maneira não coincide em geral com uma distribuição uniforme na esfera. Conforme veremos o poder de emaranhamento [44] de U^n , onde U é um unitário aleatório, decresce (em média) com aumento do tempo discreto n . A declaração continua válida se substituirmos “poder de emaranhamento” por “emaranhamento do operador” [64, 65], o qual é outra medida da habilidade de um unitário gerar emaranhamento.

Formalizando o problema, consideremos um ensemble de mapas de dimensão N e um ensemble de estados produto de dois subsistemas A e B , cujas dimensões são N_A e N_B , respectivamente, sendo $N = N_A N_B$. Para uma determinada combinação de ensembles, de

mapas e estados produto, discutiremos o comportamento da entropia linear média para sucessivas aplicações do ensemble de mapas ao ensemble de estados produto. Em outros termos, discutiremos a geração de emaranhamento por uma dinâmica aleatória de tempo discreto. Especificamente, abordaremos os seguintes casos:

Caso	Mapas	Estados Iniciais
1	CUE	CUE \otimes CUE
2	COE	OE \otimes OE
3	COE	CUE \otimes CUE

Tabela 4.1: Combinações de ensembles

Os ensembles de mapas utilizados, CUE e COE, são associados aos sistemas físicos que possuem as mínimas restrições, ou seja, simetrias. Em particular, dos operadores do ensemble CUE é apenas exigido que preservem a norma. Dos operadores do ensemble COE é adicionalmente requerido simetria de reversão temporal conforme descrevemos na seção 2.3. Os resultados numéricos a seguir devem concordar com resultados analíticos obtidos a partir das médias nos ensembles correspondentes. Os cálculos para os valores assintóticos são descritos no Apêndice C. Em todos os casos partimos da expressão (veja seção 3.5):

$$ep^\infty(U) = 1 - \left\langle \left\langle \sum_{\alpha} |\langle e_{\alpha} | \psi \rangle|^4 \text{Tr}_A (\rho_A^{\alpha})^2 - \sum_{\alpha \neq j} |\langle e_{\alpha} | \psi \rangle|^2 |\langle e_{\beta} | \psi \rangle|^2 \left[\text{Tr}_A (\rho_A^{\alpha} \rho_A^{\beta}) + \text{Tr}_B (\rho_B^{\alpha} \rho_B^{\beta}) \right] \right\rangle \right\rangle, \quad (4.1)$$

a qual envolve média sobre os autovetores $|e_{\alpha}\rangle, |e_{\beta}\rangle$ e, a princípio, média sobre os estados

iniciais $|\psi\rangle$. Contudo, conforme veremos, para certos casos a média sobre estados iniciais é redundante.

Seria possível o estudo de um quarto caso: o ensemble de mapas HOE (ensemble de Haar ortogonal) aplicado a estados iniciais $OE \otimes OE$. Este caso, porém, é de pouco interesse, pois tipicamente sistemas físicos são descritos por operadores de elementos complexos. Entretanto, efetuamos o cálculo de entropia linear média para a primeira aplicação desse mapa no Apêndice B.

4.2 O Caso Unitário

Em princípio deveríamos considerar um conjunto de mapas e um conjunto de estados produto iniciais, entretanto as propriedades de invariância podem ser utilizadas para demonstrar que isso é redundante. Antes de apresentarmos os resultados numéricos demonstraremos que é suficiente considerarmos um ensemble de mapas e apenas um estado produto inicial qualquer. Seja U um operador CUE e $|\psi\rangle$ um estado produto $CUE \otimes CUE$. Então,

$$\{|\psi(n)\rangle\rangle\} = \{U^n\}\{|\psi\rangle\rangle\}, \quad (4.2)$$

onde $\{\dots\}$ denota ensemble. Por exemplo, $\{U^n\}$ é o ensemble formado tomando a potência n -ésima de cada um dos mapas do ensemble CUE ¹. O ensemble de estados produto pode ser construído utilizando um ensemble de operadores unitários V tais que:

$$\{|\psi\rangle\rangle\} = \{V\}|\psi_0\rangle = \{V_A \otimes V_B\}|\psi_0\rangle, \quad (4.3)$$

¹Supomos que uma amostragem finita, mas suficientemente grande, seja representativa do ensemble

sendo $|\psi_0\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ um estado produto qualquer e V_A e V_B são operadores independentes e pertencentes ao ensemble CUE. Dessa forma, temos:

$$\{S_L\} = S_L(\{|\psi(n)\rangle\}) = S_L(\{U^n\}\{V\}|\psi_0\rangle). \quad (4.4)$$

A entropia linear média do conjunto de estados é

$$\langle S_L \rangle = \sum_{i=1}^K \frac{1}{K} S_L(|\psi_i(n)\rangle), \quad (4.5)$$

com K denotando o número de estados contabilizados no ensemble. Podemos explicitar S_L em termos dos operadores que constroem o ensemble:

$$\langle S_L \rangle = \sum_{j=1}^{K_1} \sum_{k=1}^{K_2} \frac{1}{K_1 K_2} S_L(U_j^n V_k |\psi_0\rangle), \quad (4.6)$$

onde $K = K_1 K_2$. Introduzindo n identidades $I = VV^\dagger$ podemos expressar:

$$U^n V |\psi_0\rangle = \underbrace{VV^\dagger UVV^\dagger U \dots VV^\dagger U}_{n \text{ vezes}} V |\psi_0\rangle = V(V^\dagger UV)^n |\psi_0\rangle, \quad (4.7)$$

substituindo em (4.6) fica:

$$\langle S_L \rangle = \sum_{j=1}^{K_1} \sum_{k=1}^{K_2} \frac{1}{K_1 K_2} S_L(V_k (V_k^\dagger U_j V_k)^n |\psi_0\rangle). \quad (4.8)$$

Motivados a usar a propriedade de invariância do ensemble CUE reescreveremos a expressão acima em termos de $\{U\}$:

$$\langle S_L \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{K_2} \frac{1}{K_2} S_L(V_k (V_k^\dagger \{U\} V_k)^n |\psi_0\rangle) \right\rangle_{\{U\}}. \quad (4.9)$$

De acordo com a propriedade de invariância do ensemble CUE, o ensemble $V_k^\dagger \{U\} V_k$ é equivalente ao ensemble U , consequentemente:

$$\langle S_L \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{K_2} \frac{1}{K_2} S_L(V_k \{U^n\} |\psi_0\rangle) \right\rangle_{\{U\}}, \quad (4.10)$$

Como $S_L(V_k\{U^n\}|\psi_0) = S_L(\{U^n\}|\psi_0)$ por ser V_k uma operação local, obtemos finalmente:

$$\langle S_L \rangle = \langle S_L(\{U^n\}|\psi_0) \rangle_{\{U\}} . \quad (4.11)$$

Portanto basta para o experimento numérico contar com um conjunto suficientemente grande de mapas aplicados e apenas um estado produto inicial qualquer. Escolhemos um sistema bipartido $N = 4 \otimes 5$ baseados no seguinte critério: um sistema desta dimensão permite-nos reunir um grande conjunto de valores de entropia num intervalo de tempo relativamente curto. Sistemas com dimensões de ordem superior demandam tempo computacional consideravelmente maior e não possuem diferenças conceituais de interesse para o presente foco do trabalho.

Os mapas CUE foram gerados com base na parametrização de Hurwitz conforme descrito na subseção 2.3.3. O resultado do experimento numérico pode ser visto na figura 4.1. O poder de emaranhamento médio é estritamente decrescente (concavidade voltada para baixo) com o número de iterações desde uma iteração até $n = N$, após isso o poder de emaranhamento permanece constante. Devemos lembrar que o valor teórico esperado para a entropia linear média, ou seja, para o poder de emaranhamento para $n = 1$, é dado por [43]

$$e_p^{n=1}(CUE - cue) = \frac{(N_A - 1)(N_B - 1)}{N_A N_B + 1} . \quad (4.12)$$

O cálculo do valor teórico para o regime assintótico está descrito no apêndice C.3. Devido à invariância podemos considerar apenas um estado inicial, que escolhemos ser o primeiro

estado da base computacional, assim a expressão da qual partimos para este caso fica

$$\begin{aligned}
e_p^\infty(CUE - cue) = 1 & - \left\langle \sum_i \sum_{r,r',s,s'} |U_{11,i}|^4 U_{rs,i} U_{r's,i}^* U_{r's',i} U_{rs',i}^* \right. \\
& - \sum_{i \neq j} \sum_{r,r',s,s'} |U_{11,i}|^2 |U_{11,j}|^2 U_{rs,i} U_{r's,i}^* U_{r's',j} U_{rs',j}^* \\
& \left. - \sum_{i \neq j} \sum_{r,r',s,s'} |U_{11,i}|^2 |U_{11,j}|^2 U_{rs,i} U_{r's',i}^* U_{r's',j} U_{rs',j}^* \right\rangle
\end{aligned} \tag{4.13}$$

e, após efetuarmos a média sobre os elementos do grupo unitário, obtemos:

$$e_p^\infty(CUE - cue) = \frac{N^3 - (N_A + N_B - 4)N^2 - [3(N_A + N_B) - 1]N + 2(N_A + N_B - 1)}{N(N+1)(N+3)} . \tag{4.14}$$

Notamos diretamente a concordância entre teoria e experimento numérico para $n = 1$ assim como para o regime assintótico. Quanto à evolução do emaranhamento, o que de fato ocorre não é uma geração adicional de emaranhamento, mas sim sua diminuição desde as primeiras aplicações até $n = N$. Notamos que o resultado apresenta uma semelhança com o fator de forma para CUE [63] (Eq. 2.78) . Analisaremos a conexão entre as duas quantidades na seção 4.6. Entretanto, devemos antecipar a relação qualitativa: o mecanismo que produz o crescimento e posterior saturação do fator de forma assim como da pureza é a aleatoriedade (Poissonização) do espectro de U^n .

4.3 O Conjunto de Mapas Unitários Simétricos Aplicados a Estados Iniciais Reais.

Analogamente ao caso unitário, antes de apresentarmos os resultados numéricos demonstraremos que é suficiente considerarmos um ensemble de mapas e apenas um estado

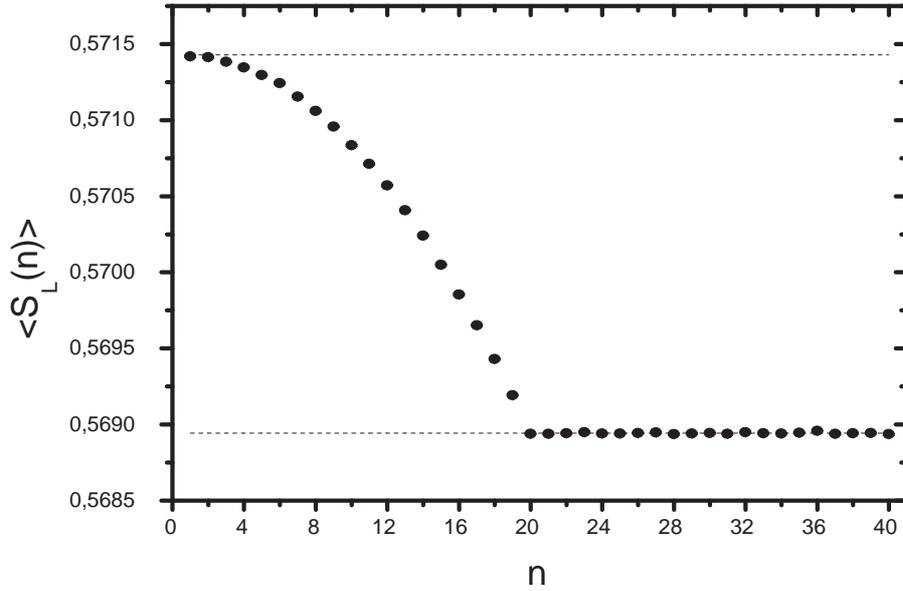


Figura 4.1: Um estado produto inicial foi escolhido aleatoriamente e então evoluído pela aplicação de um ensemble de 10^8 mapas CUE n vezes. Para cada tempo, calculamos a entropia linear média do ensemble, $S_L(n)$ (círculos cheios). O sistema consiste de dois subsistemas de dimensões 4 e 5, respectivamente. A linha tracejada superior corresponde ao valor calculado analiticamente para $n=1$ [43]. A linha tracejada inferior corresponde ao valor calculado através da expressão (C.35) obtida no apêndice C.3 para entropia linear assintótica. As barras de erro têm comprimento igual a $2\sqrt{\text{var}/K}$, onde var é a variância das entropias lineares. As barras de erro não são visíveis porque são menores que o tamanho utilizado para os pontos do gráfico.

produto inicial aleatório. Seja Y um operador COE e $|\psi\rangle$ um estado produto $oe\otimes oe$.

Então,

$$\{|\psi(n)\rangle\} = \{Y^n\}\{|\psi\rangle\}, \quad (4.15)$$

Neste caso o ensemble de estados produto pode ser construído utilizando um ensemble ortogonal O tal que:

$$\{|\psi\rangle\} = \{O\}|\psi_0\rangle = \{O_A \otimes O_B\}|\psi_0\rangle, \quad (4.16)$$

sendo $|\psi_0\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ um estado produto real qualquer. Como $I = OO^T$ e devido à invariância do ensemble COE por transformações $O^T Y O$, efetuando passagens análogas às do caso unitário provamos que:

$$\{S_L\} = S_L(\{Y^n\}|\psi_0\rangle), \quad (4.17)$$

O resultado analítico para $\langle S_L \rangle$ com $n = 1$ é conhecido [46] e idêntico à expressão que calculamos na seção anterior (C.35):

$$e_p^{n=1}(COE - oe) = e_p^\infty(CUE - cue) \quad (4.18)$$

Assim, observamos que a expressão que obtivemos para o poder de emaranhamento assintótico (C.35) é a mesma que a derivada para o poder de emaranhamento da primeira aplicação do conjunto de mapas unitários simétricos [46]. O resultado para $n = \infty$ foi obtido no Apêndice C.1, também neste caso devido à invariância podemos considerar apenas um estado inicial, que escolhemos ser o primeiro estado da base computacional, de modo que partimos de:

$$\begin{aligned} e_p^\infty(COE - oe) = 1 & - \left\langle \sum_i \sum_{r,r',s,s'} O_{11,i}^4 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',i} O_{rs',i} \right. \\ & - \sum_{i \neq j} \sum_{r,r',s,s'} O_{11,i}^2 O_{11,j}^2 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',j} O_{rs',j} \\ & \left. - \sum_{i \neq j} \sum_{r,r',s,s'} O_{11,i}^2 O_{11,j}^2 O_{rs,i} O_{rs',i} O_{r's',j} O_{r's,j} \right\rangle, \quad (4.19) \end{aligned}$$

e por efetuarmos a média sobre os elementos do grupo ortogonal chegamos a

$$e_p^\infty(\text{COE-oe}) = \frac{N^4 - (N_A + N_B - 13)N^3 - [12(N_A + N_B) - 47]N^2 - 35(N_A + N_B - 1)N}{(N + 1)(N + 2)(N + 4)(N + 6)} \quad (4.20)$$

Na figura 4.2 podemos ver a comparação dos resultados numéricos com os resultados analíticos citados. Os mapas COE foram gerados formando os produtos $U^T U$, onde U são matrizes CUE geradas conforme descrevemos anteriormente.

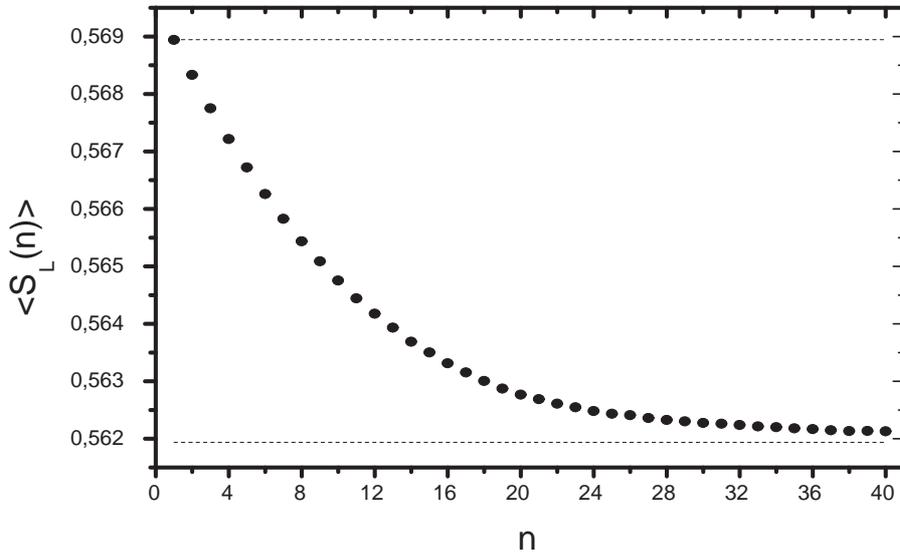


Figura 4.2: Um estado produto inicial $oe \otimes oe$ foi escolhido aleatoriamente e então evoluído pela aplicação de um ensemble de 10^8 mapas COE n vezes. Para cada tempo, calculamos a entropia linear média do ensemble, $S_L(n)$ (círculos cheios). O sistema consiste de dois subsistemas de dimensões 4 e 5, respectivamente. As linhas tracejadas superior e inferior correspondem aos valores calculados analiticamente [46] para $n = 1$ e $n = \infty$, respectivamente. As barras de erro correspondentes são menores que o diâmetro dos círculos.

Verificamos diretamente a concordância entre teoria e simulação numérica para $n = 1$

assim como para o regime assintótico. Além disso, assim como no caso unitário, reconhecemos similaridade entre a pureza e o fator de forma para COE [63]. Neste caso, diferentemente do caso unitário, a convergência ao valor de saturação é assintótica e não abrupta.

4.4 O Conjunto de Mapas Unitários Simétricos Aplicados a Estados Iniciais Complexos.

Este caso se distingue dos anteriores pelo fato de que não é redundante considerarmos ensembles de mapas e estados iniciais. O ensemble COE de mapas não é invariante por transformações unitárias associadas à geração do ensemble de estados $CUE \otimes CUE$. Nos casos anteriores o número de variáveis livres necessárias para definir um operador do ensemble de estados não é superior ao número de variáveis livres necessárias para definir um operador do ensemble de mapas. Neste caso isso não ocorre e portanto não é possível incorporar o ensemble de operadores que geram os estados ao ensemble de mapas. (Tal fato se manifesta operacionalmente quando ao inserirmos a identidade $I = WW^\dagger$ a esquerda do operador COE, sendo W um operador associado a geração do ensemble de estados, não obtemos a transformação sob a qual o ensemble COE é invariante.).

O experimento numérico para este caso é mostrado na figura 4.3. O valor teórico para $n = 1$ é o mesmo da seção anterior, calculado pela expressão (C.35). Para este caso,

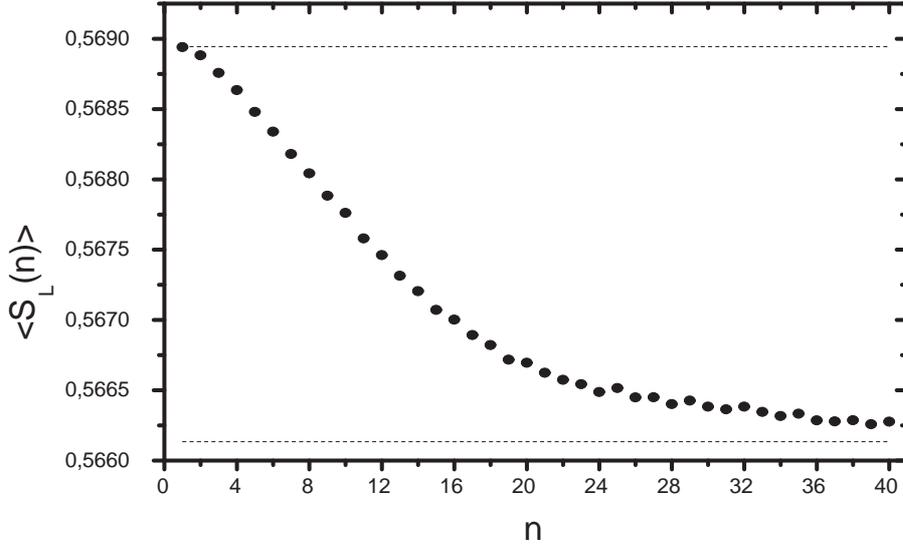


Figura 4.3: Um ensemble de 10^3 estados produto iniciais $\text{cue} \otimes \text{cue}$ foi escolhido aleatoriamente e então evoluído pela aplicação de um ensemble de 10^5 mapas COE n vezes. Para cada tempo, calculamos a entropia linear do ensemble, $S_L(n)$ (círculos cheios). O sistema consiste de dois subsistemas de dimensões 4 e 5, respectivamente. A linha tracejada superior corresponde à predição teórica. A linha inferior corresponde ao valor previsto pela expressão (C.25). As barras de erro são menores que o tamanho dos pontos.

partimos da seguinte expressão para $n = \infty$:

$$\begin{aligned}
e_p^\infty(\text{COE} - \text{cue}) &= \frac{N_A N_B + 1}{(N_A + 1)(N_B + 1)} \\
&- \frac{1}{N_A N_B (N_A + 1)(N_B + 1)} \\
&\times \left\langle \left\{ \sum_i \sum_{r1,r2,r3,r4} \sum_{s1,s2,s3,s4} O_{r1s1,i} O_{r2s1,i} O_{r2s2,i} O_{r1s2,i} O_{r3s3,i} O_{r4s3,i} O_{r4s4,i} O_{r3s4,i} \right. \right. \\
&- \sum_{i \neq j} \sum_{r1,r2,r3,r4} \sum_{s1,s2,s3,s4} O_{r1s1,i} O_{r2s1,i} O_{r2s2,j} O_{r1s2,j} O_{r3s3,i} O_{r4s3,i} O_{r4s4,j} O_{r3s4,j} \\
&+ O_{r1s1,i} O_{r1s2,i} O_{r2s2,j} O_{r2s1,j} O_{r3s3,i} O_{r3s4,i} O_{r4s4,j} O_{r4s3,j} \\
&\left. \left. + O_{r1s1,i} O_{r2s1,i} O_{r2s2,j} O_{r1s2,j} O_{r3s3,i} O_{r3s4,i} O_{r4s4,j} O_{r4s3,j} \right\} \right\rangle. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Após afetuarmos a média sobre os elementos do grupo ortogonal chegamos a seguinte expressão, obtida no Apêndice C.2,

$$e_p^\infty(COE - cue) = \frac{N^5 + 12N^4 - (N_A^2 + N_B^2 - 41)N^3 - [12(N_A^2 + N_B^2) + 2(N_A + N_B) - 30]N^2}{(N_A + 1)(N_B + 1)(N + 1)(N + 2)(N + 4)(N + 6)} + \frac{-[38(N_A^2 + N_B^2) + 18]N - 16(N_A^2 + N_B^2) + 56(N_A + N_B) - 40}{(N_A + 1)(N_B + 1)(N + 1)(N + 2)(N + 4)(N + 6)}. \quad (4.22)$$

Constatamos a concordância entre os resultados teóricos e experimentais para uma aplicação e para o regime assintótico. A evolução do emaranhamento combina as propriedades dos dois ensembles envolvidos: nas primeiras aplicações do mapa, a dependência do emaranhamento com o número de iterações caracteriza uma curva de concavidade voltada para baixo, similar ao caso dos mapas CUE. Para um número maior de iterações, a concavidade passa a ser voltada para cima, o que é característico de mapas COE. Aliás, o emaranhamento atinge o valor assintótico para $n > N$ assim como ocorre para mapas COE.

4.5 O Emaranhamento do Operador

Até agora fizemos nossas análises com base no *poder de emaranhamento*. Através desta medida, comparamos a habilidade de certos mapas, quando aplicados a um ensemble de estados não emaranhados, para gerar emaranhamento. No entanto, desejamos que nossas avaliações tenham um caráter mais geral possível. Desta forma, devemos ter a convicção de que nossas conclusões a respeito da conexão entre propriedades de ensembles e suas capacidades de gerar emaranhamento independam da medida de emaranhamento utilizada. Além disso, esperamos que eventuais diferenças devido à utilização de medidas de

emaranhamento diferentes revelem propriedades das próprias medidas. Nesse contexto, realizamos um conjunto de experimentos numéricos usando como medida o *emaranhamento do operador* [64, 65], descrito na subseção 2.2.4, visando confrontar os resultados obtidos com os resultados do poder de emaranhamento das seções anteriores. É importante ressaltar que o emaranhamento do operador é uma medida intrínseca do operador e independente do ensemble de estados ao qual aplicamos o operador. Portanto, os resultados numéricos a seguir, além de se prestarem ao estudo dos ensembles em discussão, contribuem para tornar a compreensão das medidas e da relação entre elas mais intuitiva. Na figura 4.4 apresentamos a evolução do emaranhamento do operador para o ensemble de mapas CUE e COE. É diretamente visível que nos dois casos o emaranhamento do operador evolui de forma qualitativamente idêntica ao poder de emaranhamento. Devemos lembrar que, tanto no caso de mapas CUE aplicados a estados $CUE \otimes CUE$ como no caso de mapas COE aplicados a estados $OE \otimes COE$, devido à invariância tínhamos um ensemble de mapas e apenas um estado. Portanto, ainda que as medidas sejam diferentes, elas devem expressar as propriedades estatísticas dos mapas exclusivamente. Outro aspecto que devemos notar é o fato de que o emaranhamento do operador assintótico do ensemble CUE é igual o emaranhamento do operador da primeira iteração do ensemble COE, analogamente ao que verificamos para o poder de emaranhamento na seção anterior². Através do método diagramático descrito no Apêndice C.3, calculamos o emaranhamento do operador para a primeira aplicação do ensemble de mapas CUE:

$$\langle S_L(U) \rangle_{CUE} = \frac{d^2 - (d_A^2 + d_B^2) + 1}{d^2 - 1}, \quad (4.23)$$

²Não temos no presente uma explicação para esta coincidência

sendo que tal cálculo envolveu médias de produtos de quatro elementos do grupo unitário. Seria possível calcular os demais valores de emaranhamento do operador a exemplo do que fizemos para o poder de emaranhamento, i.e, a primeira aplicação para o caso COE e os valores assintóticos para os dois casos. Todavia tais cálculos seriam extensos e as similaridades qualitativas observadas são consideradas satisfatórias para os nossos objetivos.

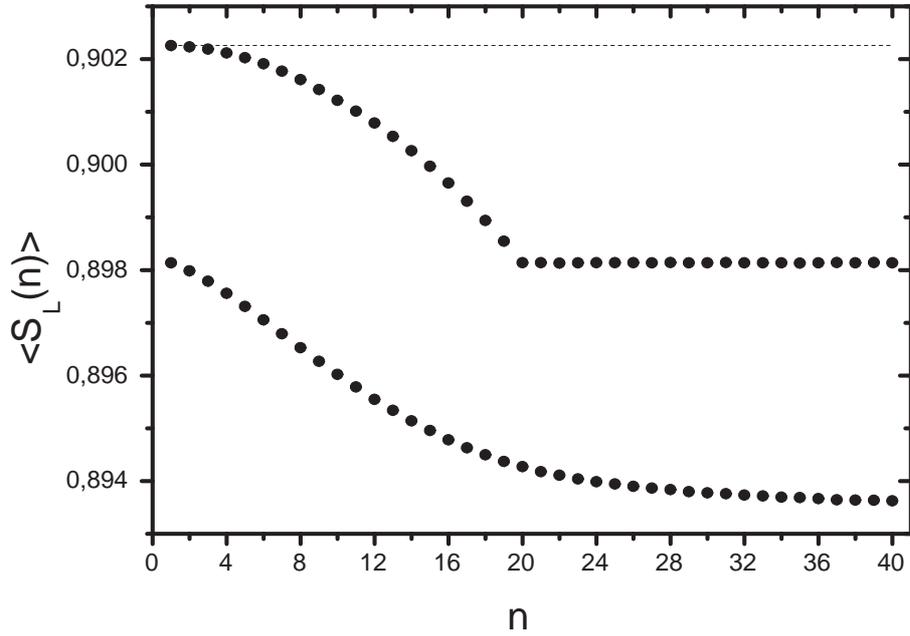


Figura 4.4: Evolução do emaranhamento do operador. Para cada ensemble, CUE (superior) e COE (inferior), geramos 10^7 mapas e para cada número de aplicações, n , calculamos o valor médio de emaranhamento do operador U^n de cada mapa e fizemos a média. A linha horizontal corresponde à predição analítica para $n = 1$.

4.6 Relação entre Pureza e Fator de Forma

Todas as funções mostradas nas seções anteriores, tanto para o poder de emaranhamento como para emaranhamento do operador, compartilham a propriedade de serem estritamente decrescentes e chegarem à saturação em torno do tempo de Heisenberg³. Em outros termos, podemos dizer que a pureza (um menos a entropia linear) cresce e então satura. Devemos ressaltar o caso CUE, por causa da saturação abrupta em $n = n_H$. Esse comportamento é similar àquele do *fator de forma* dos ensembles circulares [34], definido como

$$\langle |Tr(U^n)|^2 \rangle \equiv \langle |t_n|^2 \rangle = \sum_{\alpha, \beta=1}^d \langle e^{in(\phi_\alpha - \phi_\beta)} \rangle, \quad (4.24)$$

onde a média é efetuada sobre CUE ou COE. Para CUE o fator de forma é dado por (2.78):

$$\langle |Tr(U^n)|^2 \rangle = \begin{cases} n & \text{para } 1 \leq n \leq d, \\ d & \text{para } n \geq d. \end{cases} \quad (4.25)$$

O fator de forma é uma função somente dos autovalores de U^n . Se $n = 1$ temos o bem conhecido espectro de matriz aleatória que mostra fortes correlações, isto é, repulsão de níveis. Para $n > 1$ o espectro foi esticado n vezes sobre o círculo unitário, e, a partir de $n \approx d$, o espectro está quase completamente descorrelacionado [34]. Evidentemente, o mesmo mecanismo é responsável pela saturação das medidas de emaranhamento.

A similaridade já foi notada por Gorin e Seligman [46] que consideraram um sistema hamiltoniano de tempo contínuo. Esse caso é descrito pelo ensemble GOE (ensemble ortogonal gaussiano), o qual é análogo ao caso COE na fig.(4.3). Agora mostraremos que

³O tempo de Heisenberg n_H é o tempo necessário para que a separação média entre níveis vizinhos seja de 2π e corresponde a um número de aplicações igual à dimensão do espaço de Hilbert em questão.

a conexão entre pureza e fator de forma pode ser estabelecida rigorosamente para mapas CUE. Consideremos o poder de emaranhamento ou o emaranhamento do operador, Eqs. (3.8) e (2.63), respectivamente; inserimos a decomposição espectral para os unitários correspondentes. Lembramos que autovetores e autovalores são estatisticamente independentes nos ensembles circulares. Em todos os casos o resultado pode ser escrito como:

$$S(n) = 1 - \sum_{\alpha, \beta, \delta, \gamma=1}^d C_{\alpha\beta\delta\gamma} \langle e^{in(\phi_\alpha + \phi_\beta - \phi_\delta - \phi_\gamma)} \rangle. \quad (4.26)$$

Na esquerda, $S(n)$ representa quaisquer das entropias médias consideradas. Os coeficientes $C_{\alpha\beta\delta\gamma}$ contém as médias sobre autovetores e (onde aplicável) estados iniciais. A dependência temporal vem da média sobre quatro autofases ϕ . Devido às propriedades de invariância de CUE e COE, as médias acima não dependem dos valores particulares dos índices $\alpha, \beta, \delta, \gamma$, mas somente de eles serem iguais ou diferentes. Dessa forma, ficamos com o problema de calcular algumas médias não triviais [46]:

$$\langle e^{in(\phi_\alpha + \phi_\beta - \phi_\delta - \phi_\gamma)} \rangle, \quad (4.27)$$

$$\langle e^{in(2\phi_\alpha - \phi_\delta - \phi_\gamma)} \rangle, \quad (4.28)$$

$$\langle e^{2in(\phi_\alpha - \phi_\delta)} \rangle, \quad (4.29)$$

$$\langle e^{in(\phi_\alpha - \phi_\delta)} \rangle. \quad (4.30)$$

Para CUE podemos mostrar que todas essas quatro médias podem ser expressas em termos dos fatores de forma básicos (Apêndice D)

$$\langle |t_n|^2 \rangle^2, \langle |t_{2n}|^2 \rangle, \langle |t_n|^2 \rangle. \quad (4.31)$$

A informação que reunimos é suficiente para a conclusão de que no caso CUE devemos ter

$$S(n) = c_1 + c_2 \langle |t_n|^2 \rangle^2 + c_3 \langle |t_{2n}|^2 \rangle + c_4 \langle |t_n|^2 \rangle, \quad (4.32)$$

onde c_k são certos coeficientes independentes do tempo. Esse resultado não é inesperado, pois as mesmas três funções básicas acima também aparecem na média CUE de $\langle |t_n|^4 \rangle$, calculada por Haake e colaboradores alguns anos atrás [34, 63],

$$\langle |t_n|^4 \rangle = 2\langle |t_n|^2 \rangle^2 + \langle |t_{2n}|^2 \rangle - 2\langle |t_n|^2 \rangle ; \quad (4.33)$$

e $\langle |t_n|^4 \rangle$ é estruturalmente muito similar às medidas de emaranhamento que estamos considerando:

$$\langle |t_n|^4 \rangle = \sum_{\alpha, \beta, \delta, \gamma=1}^d \langle e^{in(\phi_\alpha + \phi_\beta - \phi_\delta - \phi_\gamma)} \rangle . \quad (4.34)$$

Quaisquer que sejam os valores exatos de c_k na Eq. (4.32), a análise precedente prova que para CUE ambos poder de emaranhamento e emaranhamento do operador decaem quadraticamente e então saturam abruptamente. Estritamente falando o decaimento é quadrático por partes; contudo este efeito não é perceptível nas simulações, nem num gráfico de $\langle |t_n|^4 \rangle$ por n conforme podemos ver na figura 4.5. Escolhemos um sistema de baixa dimensão propositalmente ($N = 6$), pois para tais sistemas este efeito, caso fosse perceptível, deveria ser mais pronunciado.

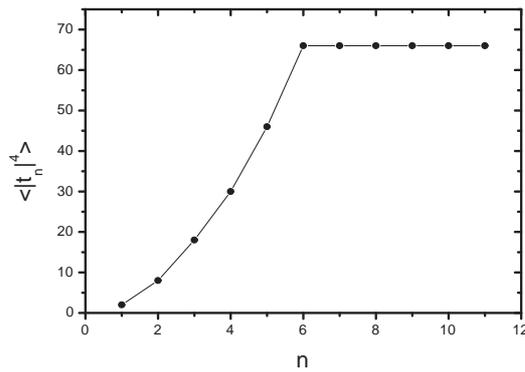


Figura 4.5: Gráfico da função $\langle |t_n|^4 \rangle$ por n (círculos cheios), sendo a dimensão do sistema $N = 6$.

A linha unindo os pontos é uma guia para os olhos.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

O foco desta tese foi investigar as relações entre as propriedades de certos mapas quânticos e os níveis de emaranhamento assintóticos atingidos pela aplicação iterativa desses mapas.

No capítulo 3 mostramos que o desvio do comportamento universal apresentado por mapas do padeiro e mapas D de qubits não podem ser atribuídos a simetrias espaciais dos mesmos. Complementarmente, provamos numericamente que a dimensão do espaço de Hilbert é o parâmetro decisivo para universalidade ou não dos níveis de emaranhamento atingidos no regime assintótico. Diante de tais fatos, podemos presumir que mapas do padeiro de qubits possuem simetrias desconhecidas, sem análogos clássicos (“pseudo-simetrias” [71]).

Uma vez que determinados mapas não apresentam um comportamento universal, devemos buscar um ensemble apropriado, com as mesmas simetrias que os mapas em avaliação, de modo que o ensemble seja capaz de modelar tais mapas. Dessa forma, a perspectiva é adquirir habilidade de construir ensembles de mapas aleatórios com as simetrias apropri-

adas. A prática padrão para a construção de ensembles consiste num princípio de mínima informação conjuntamente com a imposição de simetrias. A questão é quais simetrias devem ser impostas, isto é, devemos saber com quais operadores o mapa comuta. Certas simetrias, como as espaciais por exemplo, são óbvias para o sistema físico considerado. Entretanto, existem simetrias que não são óbvias. Além disso, as simetrias podem ser exatas ou não. Conforme comentamos no capítulo 3, a introdução de simetrias num modelo de matrizes aleatórias consiste em levar a matriz unitária a uma estrutura de blocos usando uma base de autovetores do operador com o qual o mapa comuta. Finalmente, cada bloco é modelado pelo ensemble de matrizes aleatórias apropriado (CUE ou COE).

Em nossas análises está subentendida a associação: mais simetria, menos emaranhamento. Além disso, podemos especular que certas simetrias são preponderantes sobre outras. Do enfoque do emaranhamento como recurso para processamento de informação é intuitivo relacionar simetria à redução de emaranhamento, o que equivale a dizer simetria à redução de recurso para processamento de informação. De fato, é esperado que simetrias introduzam vínculos e/ou correlações que diminuam os graus de liberdade do sistema e, portanto, diminuam os recursos para armazenamento e processamento de informação. Embora intuitiva, a associação de mais simetria com menos emaranhamento carece de uma formalização precisa, o que constitui uma possível perspectiva de trabalho.

Uma outra questão digna de discussão é que, conforme constatamos no capítulo 4, a inclusão da dinâmica na modelagem estatística é equivalente a impor simetria de reversão temporal já que

$$e_p^{n=1}(COE - oe) = e_p^\infty(CUE - cue) . \quad (5.1)$$

Tal verificação deve ser analisada por teoria de matrizes aleatórias.

Os resultados do capítulo 4 contém uma advertência a interpretações excessivamente fortes da conjectura de Bohigas-Giannoni-Schmit, a qual associa caos clássico à aleatoriedade quântica. Ingenuamente, somos levados a acreditar que mais caos sempre leva a mais emaranhamento. Contudo, se U é classicamente caótico, então U^n é mais caótico, ao menos no sentido de uma taxa maior de mixing do espaço de fase. Entretanto, vimos que potências de U podem ser menos emaranhadoras que o próprio U .

Justificamos a dependência temporal das medidas de emaranhamento (poder de emaranhamento e emaranhamento do operador) relacionando-as com o fator de forma para CUE. A possível conexão entre medidas de emaranhamento e fator de forma no caso COE requer cálculos mais difíceis. No entanto, é possível em princípio e, sendo assim, tal conexão é um problema em aberto.

As análises realizadas no capítulo 4 dizem respeito a propriedades de ensemble, ou seja, médias com certa flutuação. Gostaríamos entretanto de fazer análises mais refinadas dentro do ensemble de operadores ou estados iniciais, relacionando subensembles a propriedades de geração de emaranhamento distintas dentro daquelas flutuações. Devemos lembrar do capítulo 4 que para o mesmo ensemble de operadores COE, a consideração de estados iniciais complexos ou reais estabelece emaranhamento médio maior ou menor, respectivamente, para cada número de aplicações, o que é intuitivo já que estados complexos tem maior número de graus de liberdade. Adicionalmente, atestamos no capítulo 3 que se, ao invés de considerarmos um ensemble de estados produto $CUE_{16}^{\otimes 2}$, consideramos um subensemble $CUE_2^{\otimes 8}$ teremos um poder de emaranhamento assintótico reduzido para o mapa do padeiro quântico. Novamente, surge a motivação acerca de investigações em termos de subensembles. Idealmente gostaríamos de, dado um operador e um estado inicial,

predizer que nível de emaranhamento assintótico será atingido. Nesse sentido, distinguir propriedades de subensembles constituiria uma evolução na direção dessa idealização.

Todo o trabalho foi desenvolvido no cenário de estados puros bipartidos. Em busca de maior generalidade, seria interessante pesquisar sob que aspectos os resultados obtidos são também válidos para situações mais gerais como por exemplo estados misturados bipartidos ou multipartidos puros.

Outro aspecto da tese que deve ser observado é o fato de termos nos concentrado no regime de tempos longos. Dessa forma, o estudo da evolução da entropia e o regime de tempos curtos possui caráter complementar ao trabalho desenvolvido e também serve de motivação para trabalhos futuros.

Finalmente, não devemos nos omitir de uma reflexão a respeito de alguma realização experimental, envolvendo os conceitos discutidos nessa tese. Para isso, é extremamente proveitoso citar um interessante trabalho de alguns anos atrás sobre o uso de operadores unitários aleatórios para processamento de informação quântica [72]. É sabido que operadores aleatórios são de grande utilidade para informação quântica, sendo usados, por exemplo, para permitir codificação superdensa de estados quânticos arbitrários e também para diminuir o custo de comunicação clássica (em bits) para preparação de estados remotos. Entretanto, os autores do trabalho mencionado enfatizam que a implementação de operadores unitários aleatórios num processador quântico é exponencialmente difícil, devido à grande demanda de portas lógicas operando de acordo com parâmetros aleatórios. Por isso, introduzem um método para geração de operadores unitários pseudo-aleatórios que pode reproduzir *as propriedades estatísticas de operadores unitários aleatórios mais relevantes para tarefas de informação quântica*. Nesse cenário, a elaboração de métodos

de geração de operadores unitários aleatórios envolve uma redução de custo operacional e conhecimento de propriedades estatísticas que devem ser preservadas. Como este trabalho e possíveis desdobramentos contribuem à relação entre propriedades de operadores e suas capacidades de gerar emaranhamento, acreditamos que esse trabalho possa, a princípio, dar alguma contribuição ao cenário experimental descrito.

Apêndice A

Cálculo da Entropia Linear

Assintótica Média

Neste apêndice mostramos a derivação de uma fórmula que expressa o poder de emaranhamento assintótico de um operador apenas em função de seus autovetores. Partindo da fórmula

$$S_L^\infty(|\psi\rangle) = 1 - \sum_i |\langle e_i|\psi\rangle|^4 \text{Tr}_A(\rho_A^{ii})^2 - \sum_{i \neq j} |\langle e_i|\psi\rangle|^2 |\langle e_j|\psi\rangle|^2 [\text{Tr}_A(\rho_A^{ii}\rho_A^{jj}) + \text{Tr}_A(\rho_A^{ij}\rho_A^{ji})] , \quad (\text{A.1})$$

deveremos calcular $\langle |\langle e_i|\psi\rangle|^2 |\langle e_j|\psi\rangle|^2 \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle}$.

Primeiro faremos a média sobre o estado do subsistema B e posteriormente sobre o estado do subsistema A. Para isso, exploraremos o fato de que a aplicação de um *bra* do espaço de Hilbert do subsistema A a um vetor do espaço de Hilbert completo resulta num *ket* do espaço de Hilbert do subsistema B. Descrevendo isso algebricamente, seja a decomposição de Schmidt do autovetor $|e_i\rangle$:

$$|e_i\rangle = \sum_{k=1}^{d_A} \sqrt{p_k^i} |\phi_A^i\rangle_k |\phi_B^i\rangle_k . \quad (\text{A.2})$$

Aplicando em cada lado da igualdade $\langle\phi_A|$ obtemos

$$|\varphi'_B\rangle = \sum_{k=1}^{d_A} \sqrt{p_k^i} \langle\psi_A|\phi_A^i\rangle_k |\phi_B^i\rangle_k , \quad (\text{A.3})$$

Este vetor não é normalizado, sendo sua norma quadrada:

$$c_\varphi^2 \equiv \langle\varphi'_B|\varphi'_B\rangle = \sum_{k=1}^{d_A} p_k^i |\langle\psi_A|\phi_A^i\rangle_k|^2 . \quad (\text{A.4})$$

Assim o vetor normalizado será dado por

$$|\varphi_B\rangle = \frac{1}{c_\varphi} |\varphi'_B\rangle . \quad (\text{A.5})$$

Deste modo, podemos reescrever as médias como

$$\langle |(\langle e_i|\psi_A\rangle)|\psi_B\rangle|^2 |(\langle e_j|\psi_A\rangle)|\psi_B\rangle|^2 \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle} = \langle |c_\varphi \langle\varphi_B|\psi_B\rangle|^2 |c_\chi \langle\chi_B|\psi_B\rangle|^2 \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle} , \quad (\text{A.6})$$

onde, analogamente a c_φ , $c_\chi = \sqrt{\langle\chi'_B|\chi'_B\rangle}$ resulta da normalização do estado $|\chi'_B\rangle = \langle\psi_A|e_j\rangle$.

Agora nosso objetivo será escrever a expressão acima em termos de médias sobre elementos CUE associados às amplitudes de probabilidade de um vetor aleatório do subsistema B. Para isso devemos utilizar uma base ortonormal. Então, decompos o vetor $|\chi_B\rangle$ em termos de $|\varphi_B\rangle$ e de um vetor ortogonal, $|\varphi_B^{ort}\rangle$:

$$|\chi_B\rangle = c_{par} |\varphi_B\rangle + c_{ort} |\varphi_B^{ort}\rangle , \quad (\text{A.7})$$

com coeficientes $c_{par} = \langle \varphi_B | \chi_B \rangle$ e $c_{ort} = \langle \varphi_B^{ort} | \chi_B \rangle$. Substituindo (A.7) em (A.6) fica:

$$\begin{aligned}
\langle c_\varphi^2 c_\chi^2 | \langle \varphi_B | \psi_B \rangle|^2 | \langle \chi_B | \psi_B \rangle|^2 \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle} &= \langle f | \langle \varphi_B | \psi_B \rangle|^4 | c_{par} |^2 \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle} \\
&+ \langle f | \langle \varphi_B | \psi_B \rangle|^2 \langle \varphi_B | \psi_B \rangle \langle \psi_B | \varphi_B^{ort} \rangle c_{par}^* c_{ort} \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle} \\
&+ \langle f | \langle \varphi_B | \psi_B \rangle|^2 \langle \varphi_B^{ort} | \psi_B \rangle \langle \psi_B | \varphi_B \rangle c_{par} c_{ort}^* \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle}, \\
&+ \langle f | \langle \varphi_B | \psi_B \rangle|^2 | \langle \varphi_B^{ort} | \psi_B \rangle|^2 | c_{ort} |^2 \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle},
\end{aligned} \tag{A.8}$$

onde o fator $f = c_\varphi^2 c_\chi^2$. Em cada termo no LDI da equação acima encontramos médias que são integrais 1-vetor de grau 2 sobre o grupo unitário $U(d_B)$. Usando a notação de Mello [62] a equação fica:

$$\begin{aligned}
\langle | \langle e_i | \psi_A \rangle \rangle | \psi_B \rangle|^2 | \langle e_j | \psi_A \rangle \rangle | \psi_B \rangle|^2 \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle} &= Q_{a\alpha, a\alpha}^{a\alpha, a\alpha} \langle f | c_{par} |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} + Q_{a\alpha, a\alpha}^{a\alpha, b\alpha} \langle f c_{par}^* c_{ort} \rangle_{|\psi_A\rangle} \\
&+ Q_{a\alpha, b\alpha}^{a\alpha, a\alpha} \langle f c_{par} c_{ort}^* \rangle_{|\psi_A\rangle} + Q_{a\alpha, b\alpha}^{a\alpha, b\alpha} \langle f | c_{ort} |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Os valores das integrais acima são $Q_{a\alpha, a\alpha}^{a\alpha, b\alpha} = Q_{a\alpha, b\alpha}^{a\alpha, a\alpha} = 0$ e $Q_{a\alpha, a\alpha}^{a\alpha, a\alpha} = 2Q_{a\alpha, b\alpha}^{a\alpha, b\alpha} = \frac{1}{d_B(d_B+1)}$ [62]

e, substituindo $|c_{ort}|^2 = 1 - |c_{par}|^2$:

$$\langle | \langle e_i | \psi_A \rangle \rangle | \psi_B \rangle|^2 | \langle e_j | \psi_A \rangle \rangle | \psi_B \rangle|^2 \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle} = \frac{1}{d_B(d_B+1)} (\langle f | c_{par} |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} + \langle f \rangle_{|\psi_A\rangle}). \tag{A.10}$$

Passaremos a seguir a efetuar a média sobre o estado do subsistema A, o que consiste em calcular separadamente $\langle f \rangle_{|\psi_A\rangle}$ e $\langle f | c_{par} |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle}$, para o qual temos:

$$\begin{aligned}
\langle f | c_{par} |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} &= \langle c_\varphi^2 c_\chi^2 | \langle \varphi_B | \chi_B \rangle|^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} = \langle | \langle e_i | \psi_A \rangle \rangle \langle \psi_A | e_j \rangle|^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} \\
&= \langle | Tr_A [Tr_B (| e_j \rangle \langle e_i |) | \psi_A \rangle \langle \psi_A |] |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} \\
&= \langle | Tr_A (\hat{\rho}_{ji}^A | \psi_A \rangle \langle \psi_A |) |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} = \langle | \langle \psi_A | \hat{\rho}_{ji}^A | \psi_A \rangle |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

sendo $\hat{\rho}_{ji}^A$ uma matriz complexa arbitrária. Podemos expandí-la numa base de matrizes,

$\hat{\rho}_{ji}^A = \sum_{k,l=1}^{d_A} c_{kl} |\xi_k\rangle \langle \xi_l|$, assim (A.11) fica:

$$\begin{aligned} \langle f | c_{par} |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} &= \langle | \sum_{k,l} c_{k,l} \langle \psi_A | \xi_k \rangle \langle \xi_l | \psi_A \rangle |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} \\ &= \sum_{k,l} \sum_{k',l'} c_{k,l} c_{k',l'} Q_{k'\beta,l\beta}^{k\beta,l'\beta}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde novamente usamos a notação de Mello [62] para médias de produtos de quatro elementos CUE. Substituindo os valores das médias em (A.12), vem:

$$\langle f | c_{par} |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} = \frac{1}{d_A(d_A + 1)} \left[2 \sum_k |c_{k,k}|^2 + \sum_{k \neq l} c_{k,l} c_{k,l}^* + \sum_{k \neq k'} c_{k,k} c_{k',k'}^* \right]. \quad (\text{A.13})$$

Reagrupando os termos com a motivação de reconhecer certas quantidades:

$$\langle f | c_{par} |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} = \frac{1}{d_A(d_A + 1)} \left[\sum_{k,l} c_{k,l} c_{k,l}^* + \left| \sum_k c_{k,k} \right|^2 \right]. \quad (\text{A.14})$$

É fácil mostrar que

$$\sum_{k,l} c_{k,l} c_{k,l}^* = \text{Tr}_A(\hat{\rho}_{ji}^A \hat{\rho}_{ji}^{A\dagger}) = \text{Tr}_B(\hat{\rho}_i^B \hat{\rho}_j^B), \quad (\text{A.15})$$

e

$$\sum_k c_{k,k} = \text{Tr}(|e_i\rangle \langle e_j|) = \delta_{ij}. \quad (\text{A.16})$$

Portanto, a expressão final para $\langle f | c_{par} |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle}$ será:

$$\langle f | c_{par} |^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} = \frac{1}{d_A(d_A + 1)} \left[|\delta_{ij}|^2 + \text{Tr}_B(\hat{\rho}_i^B \hat{\rho}_j^B) \right]. \quad (\text{A.17})$$

Com um procedimento análogo ao que descrevemos para efetuar a média sobre o estado do subsistema B, obtivemos $\langle f \rangle_{|\psi_A\rangle}$:

$$\langle f |c_{par}|^2 \rangle_{|\psi_A\rangle} = \frac{1}{d_A(d_A + 1)} [(\sum_k \sum_{k'} p_k^i p_{k'}^j |{}_k\langle \phi_i^A | \phi_j^A \rangle_{k'}|^2) + 1] . \quad (\text{A.18})$$

Reconhecemos o termo:

$$\sum_k \sum_{k'} p_k^i p_{k'}^j |{}_k\langle \phi_i^A | \phi_j^A \rangle_{k'}|^2 = Tr_A(\hat{\rho}_i^A \hat{\rho}_j^A) . \quad (\text{A.19})$$

E substituindo (A.18) e (A.17) em (A.10):

$$\begin{aligned} \langle |(\langle e_i | \psi_A \rangle) | \psi_B \rangle|^2 |(\langle e_j | \psi_A \rangle) | \psi_B \rangle|^2 \rangle_{|\psi_B\rangle, |\psi_A\rangle} &= \frac{1}{d_A d_B (d_A + 1)(d_B + 1)} \{ |\delta_{ij}|^2 \\ &+ Tr_B(\hat{\rho}_i^B \hat{\rho}_j^B) + Tr_A(\hat{\rho}_i^A \hat{\rho}_j^A) + 1 \} . \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Com a média acima podemos escrever o poder de emaranhamento assintótico:

$$\begin{aligned} e_p^\infty(U) &= 1 - \frac{1}{d_A d_B (d_A + 1)(d_B + 1)} \{ \sum_{i \neq j} [Tr_A(\hat{\rho}_i^A \hat{\rho}_j^A) + Tr_B(\hat{\rho}_i^B \hat{\rho}_j^B)]^2 \\ &+ 2 \sum_i [Tr_A(\hat{\rho}_i^A)^2]^2 + \sum_{ij} Tr_A(\hat{\rho}_i^A \hat{\rho}_j^A) + \sum_{ij} Tr_B(\hat{\rho}_i^B \hat{\rho}_j^B) \} . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Finalmente, faremos simplificações adicionais por substituição de identidades. Especificamente,

$$\begin{aligned} \sum_{ij} Tr_A(\hat{\rho}_i^A \hat{\rho}_j^A) &= Tr_A(\sum_i \hat{\rho}_i^A)^2 \\ &= Tr_A(Tr_B \sum_i |e_i\rangle \langle e_i|)^2 = Tr_A(Tr_B(I_A \otimes I_B))^2 = d_A d_B^2 , \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

e, analogamente,

$$\sum_{ij} Tr_B(\hat{\rho}_i^B \hat{\rho}_j^B) = d_A^2 d_B . \quad (\text{A.23})$$

Consequentemente, a expressão final para o poder de emaranhamento assintótico fica:

$$\begin{aligned} e_p^\infty(U) &= \frac{d_A d_B + 1}{(d_A + 1)(d_B + 1)} \\ &- \frac{1}{d_A d_B (d_A + 1)(d_B + 1)} \left\{ \sum_{i \neq j} [Tr_A(\hat{\rho}_i^A \hat{\rho}_j^A) + Tr_B(\hat{\rho}_i^B \hat{\rho}_j^B)]^2 + 2 \sum_i [Tr_A(\hat{\rho}_i^A)]^2 \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Apêndice B

Entropia Linear Média de Estados Aleatórios Reais

Seja um estado aleatório de N componentes reais expandido na base computacional:

$$|\psi\rangle = \sum_{m=1}^N c_m |m\rangle, \quad (\text{B.1})$$

com norma 1, isto é, $\sum_m c_m^2 = 1$. Em termos dos estados de uma base produto dos subsistemas A e B, temos:

$$|\psi\rangle = \sum_{r=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{\nu} c_{r,s} |r\rangle |s\rangle, \quad (\text{B.2})$$

onde $\mu = \dim A$ e $\nu = \dim B$. A matriz densidade reduzida do subsistema A será:

$$\rho_A = \sum_{r,r'=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{\nu} c_{r,s} c_{r',s} |r\rangle \langle r'|. \quad (\text{B.3})$$

Obtemos então a entropia linear, $S_L = 1 - \text{Tr}(\rho_A)^2$:

$$S_L = 1 - \sum_{r,r',s,s'} c_{r,s} c_{r',s} c_{r',s'} c_{r,s'}. \quad (\text{B.4})$$

O valor médio da entropia linear para estados aleatórios reais será:

$$\langle S_L \rangle = 1 - \sum_{r,r',s,s'} \langle c_{r,s} c_{r',s} c_{r',s'} c_{r,s'} \rangle, \quad (\text{B.5})$$

onde $\langle \dots \rangle$ indica média no grupo ortogonal. De acordo com Bandy temos monômios não nulos para os seguintes casos:

i) $r = r', s \neq s'$:

$$\langle c_{r,s}^2 c_{r,s'}^2 \rangle = \frac{1}{\mu\nu(\mu\nu + 2)}, \quad (\text{B.6})$$

os quais encontramos em $\mu\nu(\nu - 1)$ combinações de índices.

ii) $r \neq r', s = s'$:

$$\langle c_{r,s}^2 c_{r',s}^2 \rangle = \frac{1}{\mu\nu(\mu\nu + 2)}, \quad (\text{B.7})$$

os quais encontramos em $\nu\mu(\mu - 1)$ combinações de índices.

iii) $r = r', s = s'$:

$$\langle c_{r,s}^4 \rangle = \frac{3}{\mu\nu(\mu\nu + 2)}, \quad (\text{B.8})$$

os quais encontramos em $\mu\nu$ combinações de índices.

Então, a expressão (B.5) fica:

$$\langle S_L \rangle = 1 - \frac{(\mu + \nu + 1)}{(\mu\nu + 2)}. \quad (\text{B.9})$$

Realizamos um experimento numérico afim de verificarmos a expressão (B.9), o qual consistiu em considerarmos um sistema bipartido de dimensões $\mu = 4$ e $\nu = 5$. Reunimos

2×10^6 entropias lineares obtidas pela aplicação de 2×10^6 matrizes aleatórias do ensemble de Haar ortogonal a um único estado produto inicial real escolhido aleatoriamente. Os valores abaixo mostram a concordância entre o resultado numérico e a expressão analítica.

Tabela B.1: Entropia Linear Média

Expressão Analítica	0.54545
Resultado Numérico	0.54549(6)

Apêndice C

Poder de Emaranhamento

Assintótico

Com o intuito de descrevermos alguns detalhes do cálculo do poder de emaranhamento assintótico devemos lembrar da expressão para a entropia linear assintótica [Eq. (3.12)] derivada por Demkowicz-Dobrzanski e Kuś [45]:

$$S_L^\infty(M, |\psi\rangle) = 1 - \sum_i |\langle e_i | \psi \rangle|^4 \text{Tr}_A(\rho_A^{ii})^2 - \sum_{i \neq j} |\langle e_i | \psi \rangle|^2 |\langle e_j | \psi \rangle|^2 [\text{Tr}_A(\rho_A^{ii} \rho_A^{jj}) + \text{Tr}_A(\rho_A^{ij} \rho_A^{ji})] . \quad (\text{C.1})$$

Salientamos que esta expressão é função dos autovetores $\{|e_i\rangle\}$ do mapa M e também do estado produto inicial $|\psi\rangle$. A matriz densidade reduzida ρ_A^{ii} é obtida por efetuar o traço parcial sobre a matriz densidade associada ao autovetor $|e_i\rangle$:

$$\rho_A^{ii} = \text{Tr}_B(|e_i\rangle\langle e_i|) . \quad (\text{C.2})$$

O operador ρ_A^{ij} não é uma matriz densidade, mas corresponde também a um traço parcial:

$$\rho_A^{ij} = \text{Tr}_B(|e_i\rangle\langle e_j|) . \quad (\text{C.3})$$

A seguir examinaremos a forma que a expressão acima assume para cada caso analisado e descreveremos as passagens principais para a derivação do poder de emaranhamento assintótico. A derivação do poder de emaranhamento assintótico envolve, a princípio, efetuar a média da expressão acima sobre o ensemble de mapas M e sobre o ensemble de estados produto. Da observação da expressão (C.1) notamos que a média sobre o ensemble de mapas consiste na média sobre o conjunto de autovetores do mesmo. Conforme veremos, propriedades de invariância serão utilizadas e o trabalho se reduzirá a médias sobre produtos de elementos dos grupos ortogonal e unitário para os mapas COE e CUE, respectivamente.

C.1 Mapas Unitários Simétricos Aplicados a Estados Iniciais Reais.

Para um ensemble de mapas COE aplicados ao ensemble de estados $OE \otimes OE$ [46], exploramos a invariância do ensemble COE por transformações ortogonais (seção 4.3), a qual nos permite considerar o ensemble de mapas e apenas um estado inicial arbitrário da base computacional.

Expandindo o autovetor $|e_i\rangle$ na base produto, temos:

$$|e_i\rangle = \sum_{r=1}^{N_A} \sum_{s=1}^{N_B} O_{rs,i} |r\rangle \otimes |s\rangle, \quad (\text{C.4})$$

onde os $O_{rs,i}$ são elementos da matriz que diagonaliza o mapa M . É importante observar que as linhas dos elementos de matriz são especificadas por um par ordenado de índices, associado à base de estados produto do sistema bipartido, e as colunas especificam o autovetor ao qual o elemento de matriz pertence. Então, escolhendo o estado produto

inicial $|\psi\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$, tem-se

$$|\langle e_i|\psi\rangle|^2 = O_{11,i}^2. \quad (\text{C.5})$$

Com a finalidade de que (C.1) fique somente em termos dos elementos da matriz O , resta-nos expressar os operadores reduzidos em termos de tais elementos. Assim,

$$\text{Tr}_A(\rho_A^{ii}\rho_A^{jj}) = \sum_{r,r',s,s'} O_{rs,i}O_{r's,i}O_{r's',j}O_{rs',j}, \quad (\text{C.6})$$

$$\text{Tr}_A(\rho_A^{ij}\rho_A^{ji}) = \text{Tr}_B(\rho_B^{ii}\rho_B^{jj}) = \sum_{r,r',s,s'} O_{rs,i}O_{rs',i}O_{r's',j}O_{r's,j}. \quad (\text{C.7})$$

A respeito da relação entre operadores em (C.7), podemos utilizar a decomposição de Schmidt para os autovetores $\{|e_i\rangle\}$ e $\{|e_j\rangle\}$, assim teremos para o operador ρ_A^{ij} :

$$\rho_A^{ij} = \sum_{k,k'} \sqrt{p_k^i p_{k'}^j} |\phi_A^i\rangle_k \langle \phi_A^j|_{k'} (k' \langle \phi_B^j | \phi_B^i \rangle_k). \quad (\text{C.8})$$

Com esta igualdade é fácil mostrar que $\text{Tr}_A(\rho_A^{ij}\rho_A^{ji}) = \text{Tr}_B(\rho_B^{ii}\rho_B^{jj})$.

De acordo com (C.5), (C.6) e (C.7), a expressão (C.1) ficará escrita para este caso como:

$$\begin{aligned} S_L^\infty = 1 & - \sum_i \sum_{r,r',s,s'} O_{11,i}^4 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',i} O_{rs',i} \\ & - \sum_{i \neq j} \sum_{r,r',s,s'} O_{11,i}^2 O_{11,j}^2 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',j} O_{rs',j} \\ & - \sum_{i \neq j} \sum_{r,r',s,s'} O_{11,i}^2 O_{11,j}^2 O_{rs,i} O_{rs',i} O_{r's',j} O_{r's,j}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Deste modo, obter o poder de emaranhamento assintótico, o que consiste em efetuar a média da expressão acima, envolve médias de produtos de oito elementos pertencentes a uma ou duas colunas de matrizes do grupo de Haar ortogonal. Para o cálculo de tais médias recorreremos a um método diagramático [66] que se baseia exclusivamente no vínculo de ortogonalidade e nas propriedades de invariância.

É apropriado fazermos alguns comentários a respeito de métodos para o cálculo de médias de produtos de elementos dos grupos $U(N)$ e $O(N)$. Para o caso $U(N)$, desta-

camos o trabalho de Mello [62], em que médias sobre o grupo unitário são aplicadas ao problema de transporte em condutores desordenados. Nesse trabalho são derivadas relações para monômios de até oito elementos. As relações são obtidas explorando a unitariedade e algumas propriedades de invariância. Apesar de ser recurso suficiente para nossos propósitos (pois as médias que faremos sobre o grupo unitário envolverão até oito elementos, conforme veremos no apêndice C.3) as expressões que resultam são demasiadamente extensas e por isso não as utilizamos para este fim. No entanto, utilizamos previamente o trabalho de Mello para efetuar médias de produtos de quatro elementos necessárias à derivação da expressão de autovetores (C.23) usada no apêndice C.2.

Um trabalho recente de S. Aubert e C. S. Lam [69] introduz uma representação diagramática que torna o cálculo mais intuitivo e obtém expressões explícitas e relações de recorrência para apenas três grandes classes de integrais. Basicamente, o método se utiliza dos mesmos recursos que o trabalho de Mello para obter as integrais, isto é, unitariedade e invariância. Entretanto, a introdução de uma representação gráfica provê uma esquematização eficiente para os cálculos. Por isso, utilizamos este trabalho como referência para nossos cálculos no apêndice C.3.

Para o caso $O(N)$, o método de de T. Gorin [67] seria suficiente para os cálculos deste apêndice. Contudo, uma adaptação recente feita por D. Braun [66] do método de S. Aubert e C. S. Lam para o caso ortogonal nos pareceu mais apropriada. Sobretudo, uma vez conhecido um dos métodos, a compreensão do outro método é um tanto quanto natural e direta.

A seguir apresentaremos explicitamente as relações de ortogonalidade e invariância. Consideremos matrizes O ortogonais reais de $N \times N$ com elementos de matriz $O_{\alpha\beta}$, $1 \leq$

$\alpha, \beta \leq N$, e $N = N_A N_B$. Estamos interessados em integrais do tipo

$$I_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_p \beta_p} = \int (dO) O_{\alpha_1 \beta_1} \dots O_{\alpha_p \beta_p}, \quad (\text{C.10})$$

onde a ordem p da integral é um inteiro positivo, (dO) é a medida invariante de Haar do grupo ortogonal $O(N)$ normalizada a $\int (dO) = 1$. As médias (C.10) podem ser calculadas utilizando:

- A relação de ortogonalidade:

$$\sum_{\alpha=1}^N O_{\alpha\beta} O_{\alpha\kappa} = \delta_{\beta\kappa} = \sum_{\alpha=1}^N O_{\beta\alpha} O_{\kappa\alpha}. \quad (\text{C.11})$$

- A invariância da medida de Haar, significando que para qualquer função $f(O)$ e uma matriz V ortogonal real $N \times N$ arbitrária,

$$\int (dO) f(O) = \int (dO) f(VO) = \int (dO) f(OV), \quad (\text{C.12})$$

sendo $f(O)$ o monômio

$$f(O) = \prod_{\lambda=1}^p O_{\alpha_\lambda \beta_\lambda}. \quad (\text{C.13})$$

O método explora escolhas apropriadas de matrizes ortogonais explícitas V , sob as quais a integral (C.10) é invariante, de modo a extrair um conjunto de relações [66]. Podemos citar como exemplo a aplicação de uma transformação ortogonal $V = -I$ para a qual a equação (C.12) implica $f(O) = (-1)^p f(O)$. Então p deve ser par, caso contrário a integral será nula. Outra transformação ortogonal essencial é a transformação definida por $V_{\alpha\beta} = (-1)^{S_\alpha} \delta_{\alpha\beta}$, onde $S_\alpha \in \{0, 1\}$. Para esta transformação, a invariância (C.12) impõe que cada índice de linha deve aparecer um número par de vezes no monômio. O mesmo raciocínio aplicado a multiplicação de V pela direita estabelece que cada índice de

coluna deve também aparecer um número par de vezes, caso contrário a integral também será nula.

Podemos também aplicar permutações, as quais podem sempre ser representadas como matrizes ortogonais reais V . Através da aplicação de permutações é possível concluir que o valor particular dos índices não importa e o que realmente conta é a multiplicidade dos índices diferentes. Nesse contexto, é conveniente introduzir uma representação gráfica das integrais (C.10). Os índices linha são representados por um ponto numa coluna à esquerda (um ponto para cada índice diferente) e todos os índices de coluna diferentes são representados por um ponto numa coluna à direita. Os pontos da esquerda são unidos aos pontos da direita por linhas, onde cada linha representa um fator $O_{\alpha\lambda\beta\lambda}$. Se um fator aparece à potência m_λ , denotamos a potência próxima à linha.

O método diagramático alia as propriedades extraídas da invariância ao vínculo de ortogonalidade e obtém fórmulas explícitas para vários tipos de diagramas além de derivar relações de recorrência para casos mais complicados [66]. Na figura (C.1) mostramos uma classe de diagramas que contribuem às integrais da Eq. (C.9). Trata-se das *integrais de leque* [66], para as quais existem fórmulas explícitas. Além das integrais de leque, encontramos outras classes de integrais na Eq. (C.9), as quais mostramos na figura C.2. Para as integrais $Z(m_1, m_2, m_3)$ temos fórmulas explícitas que evidentemente dependem das multiplicidades m_1 , m_2 e m_3 . As integrais $X(r, s, t, u)$, que dependem das multiplicidades das quatro linhas, são calculadas via relação de recorrência. As integrais $I1$ e $I2$ da figura C.2 não pertencem às classes básicas de diagramas (*integrais de leque*, *integrais Z* e *integrais X*). Para estas integrais podemos utilizar a relação de ortogonalidade (C.11) e expressá-las em termos de diagramas pertencentes às classes básicas. Assim, ao somarmos

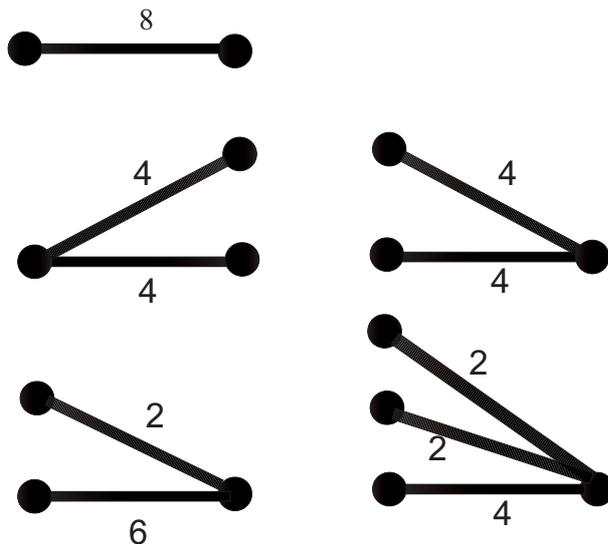


Figura C.1: *Integrais de leque* $F_t(m_1, \dots, m_t)$, onde t denota o número de linhas e $m_i, i = 1 \dots t$, a multiplicidade da linha correspondente. Da esquerda pra direita e de cima pra baixo temos as *integrais de leque* $F_1(8)$, $F_2(4, 4)$, $F_2(4, 4)$, $F_2(6, 2)$ e $F_3(4, 2, 2)$.

sobre os índices dos pontos com uma seta, temos:

$$I1 = \frac{-1}{(N_A N_B - 2)} (X(1, 3, 3, 1) + X(2, 2, 2, 2)) , \quad (C.14)$$

$$I2 = \frac{1}{(N_A N_B - 2)} (Z(2, 2, 2) - X(2, 2, 2, 2) - Z(4, 2, 2)) . \quad (C.15)$$

De posse dos recursos providos pelo método diagramático, podemos desmembrar os termos da expressão (C.9) de modo a distinguir todos os tipos de monômios presentes, calcularmos as médias e contabilizarmos o número de vezes que cada monômio apareceu para finalmente obtermos a expressão para o poder de emaranhamento assintótico. Portanto, o procedimento para cada termo consiste em três etapas:

1. Desmembramento das fórmulas e identificação dos diagramas topologicamente diferentes.
2. Cálculo das médias (integrais).

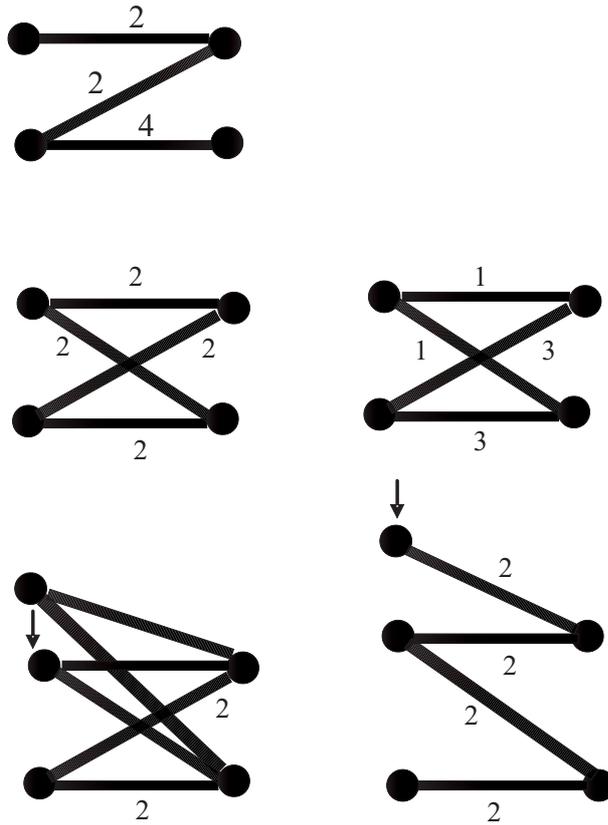


Figura C.2: Diagramas que contribuem às integrais da Eq. (C.9). Diagrama na parte superior: Integral $Z(4,2,2)$. Diagramas centrais: *Integrais X*; $X(2,2,2,2)$ e $X(1,3,3,1)$. Diagramas na parte inferior: diagramas que podem ser obtidos por somar sobre os índices dos pontos com uma seta, as quais chamaremos $I1$ (esquerda) e $I2$ (direita).

3. Contagem.

Mostraremos apenas o procedimento para o primeiro termo afim de exemplificarmos as etapas citadas. Os cálculos para os outros dois termos são semelhantes e não serão explicitados. O primeiro termo de (C.9) é:

$$\sum_i \sum_{r,r',s,s'} O_{11,i}^4 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',i} O_{rs',i} . \quad (C.16)$$

1. Desmembramento dos termos pela análise das combinações de valores que os índices

assumem. Temos duas situações possíveis para os índices do subsistema A ($r = r'$ ou $r \neq r'$) e evidentemente duas para o subsistema B ($s = s'$ ou $s \neq s'$). Consequentemente (C.16) pode ser inicialmente desmembrada em quatro partes:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{r,r',s,s'} O_{11,i}^4 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',i} O_{rs',i} &= \sum_i \left\{ \sum_{r,s} O_{11,i}^4 O_{rs,i}^4 \right. \\ &+ \sum_{r,s \neq s'} O_{11,i}^4 O_{rs,i}^2 O_{rs',i}^2 \\ &+ \sum_{r \neq r',s} O_{11,i}^4 O_{rs,i}^2 O_{r's,i}^2 \\ &\left. + \sum_{r \neq r',s \neq s'} O_{11,i}^4 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',i} O_{rs',i} \right\}. \quad (\text{C.17}) \end{aligned}$$

Uma observação a respeito da estrutura do último termo que nos poupará trabalho: sabemos que o monômio deve ter todos índices de linha aparecendo um número par de vezes, caso contrário sua média será nula. O último termo contém índices de linha aparecendo uma única vez e portanto terá média nula. Com respeito aos termos restantes devemos ainda fazer um desmembramento adicional observando se os índices são iguais ou diferentes de 1. Então,

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{r,r',s,s'} O_{11,i}^4 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',i} O_{rs',i} &= \sum_i \left\{ O_{11,i}^8 + \sum_{r \neq 1 \text{ ou } s \neq 1} O_{11,i}^4 O_{rs,i}^4 \right. \\ &+ \sum_{r \neq 1, s \neq s'} O_{11,i}^4 O_{rs,i}^2 O_{rs',i}^2 + \sum_{s \neq 1} O_{11,i}^6 O_{1s,i}^2 + \sum_{s' \neq 1} O_{11,i}^6 O_{1s',i}^2 \\ &+ \sum_{1 \neq s \neq s' \neq 1} O_{11,i}^4 O_{1s,i}^2 O_{1s',i}^2 + \sum_{r \neq r', s \neq 1} O_{11,i}^4 O_{rs,i}^2 O_{r's,i}^2 \\ &\left. + \sum_{r \neq 1} O_{11,i}^6 O_{r1,i}^2 + \sum_{r' \neq 1} O_{11,i}^6 O_{r'1,i}^2 + \sum_{1 \neq r \neq r' \neq 1} O_{11,i}^4 O_{r1,i}^2 O_{r'1,i}^2 \right\}. \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

2. Cálculo das médias (integrais). As médias dos monômios presentes na expressão anterior correspondem a integrais de leque, as quais possuem apenas uma linha ou apenas uma coluna. O método diagramático obtém expressões explícitas para esse tipo de integral. Utilizaremos a notação usada em [66] sem explicitarmos o valor das integrais em termos

das dimensões dos subsistemas, o que tornaria a expressão inadequadamente extensa.

Identificadas as integrais de leque, a expressão fica:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \sum_{r,r',s,s'} \langle O_{11,i}^4 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',i} O_{rs',i} \rangle = \sum_i \left\{ F_1(8) + \sum_{r \neq 1 \text{ ou } s \neq 1} F_2(4,4) \right. \\
& + \sum_{r \neq 1, s \neq s'} F_3(4,2,2) + \sum_{s \neq 1} F_2(6,2) + \sum_{s' \neq 1} F_2(6,2) \\
& + \sum_{1 \neq s \neq s' \neq 1} F_3(4,2,2) + \sum_{r \neq r', s \neq 1} F_3(4,2,2) \\
& \left. + \sum_{r \neq 1} F_2(6,2) + \sum_{r' \neq 1} F_2(6,2) + \sum_{1 \neq r \neq r' \neq 1} F_3(4,2,2) \right\}. \tag{C.19}
\end{aligned}$$

3. *Contagem.* A contagem do número de vezes que os monômios ocorrem resulta:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \sum_{r,r',s,s'} \langle O_{11,i}^4 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',i} O_{rs',i} \rangle = N_A N_B \{ F_1(8) + (N_A N_B - 1) F_2(4,4) \\
& + (N_A - 1) N_B (N_B - 1) F_3(4,2,2) + 2(N_B - 1) F_2(6,2) \\
& + (N_B - 1)(N_B - 2) F_3(4,2,2) \\
& + (N_A - 1) N_A (N_B - 1) F_3(4,2,2) + 2(N_A - 1) F_2(6,2) \\
& + (N_A - 1)(N_A - 2) F_3(4,2,2) \}. \tag{C.20}
\end{aligned}$$

Assim completamos a exemplificação do procedimento para efetuar a média do primeiro termo da entropia linear assintótica. Adicionalmente, simplificando a expressão acima e substituindo os valores das integrais:

$$\sum_i \sum_{r,r',s,s'} \langle O_{11,i}^4 O_{rs,i} O_{r's,i} O_{r's',i} O_{rs',i} \rangle = \frac{3 \times [8 + (N + 8)(N_A + N_B + 1)]}{(N + 2)(N + 4)(N + 6)}, \tag{C.21}$$

onde $N = N_A N_B$ é a dimensão total do sistema bipartido.

Calculamos as médias dos outros dois termos da entropia linear assintótica de modo análogo, envolvendo outros tipos de integrais solúveis pelo método diagramático, e che-

gamos finalmente à expressão para o poder de emaranhamento assintótico:

$$e_{COE-oe}^\infty \equiv \frac{N^4 - (N_A + N_B - 13)N^3 - [12(N_A + N_B) - 47]N^2 - 35(N_A + N_B - 1)N}{(N + 1)(N + 2)(N + 4)(N + 6)}. \quad (C.22)$$

De fato essa expressão está de acordo com aquela obtida por Gorin e Seligman [46] utilizando outro método [67] para calcular a média de monômios sobre o grupo ortogonal.

C.2 O Conjunto de Mapas Unitários Simétricos Aplicados a Estados Iniciais Complexos.

Para um ensemble de mapas COE aplicados ao ensemble $CUE \otimes CUE$ temos que efetuar médias sobre o ensemble de estados e sobre o ensemble de mapas, pois não há a propriedade de invariância que no caso anterior nos permitiu fixar o estado inicial. Observando a expressão (C.1) notamos que a média sobre o ensemble de estados consiste em calcular a média do objeto $|\langle e_i | \psi \rangle|^2 |\langle e_j | \psi \rangle|^2$, onde $|\psi\rangle \in CUE \otimes CUE$. Esse cálculo é extenso, porém simples. Ele envolve médias de monômios de quatro elementos pertencentes ao grupo unitário [62]. O resultado do cálculo é conhecido [68] e origina uma expressão do poder de emaranhamento assintótico em termos dos operadores reduzidos dos autovetores do mapa e das dimensões dos subsistemas:

$$e_p^\infty(COE_2) = \frac{N_A N_B + 1}{(N_A + 1)(N_B + 1)} - \frac{1}{N_A N_B (N_A + 1)(N_B + 1)} \times \left\{ \sum_i [Tr_A(\rho_A^i)]^2 - \sum_{i \neq j} [Tr_A(\rho_A^i \rho_A^j) + Tr_B(\rho_B^i \rho_B^j)]^2 \right\} \quad (C.23)$$

Assim como no caso anterior podemos escrever os operadores reduzidos em termos dos

elementos de uma matriz ortogonal O . A expressão (C.23) assume a forma:

$$\begin{aligned}
e_p^\infty(COE_2) &= \frac{N_A N_B + 1}{(N_A + 1)(N_B + 1)} \\
&- \frac{1}{N_A N_B (N_A + 1)(N_B + 1)} \\
&\times \left\{ \sum_i \sum_{r1,r2,r3,r4} \sum_{s1,s2,s3,s4} O_{r1s1,i} O_{r2s1,i} O_{r2s2,i} O_{r1s2,i} O_{r3s3,i} O_{r4s3,i} O_{r4s4,i} O_{r3s4,i} \right. \\
&- \sum_{i \neq j} \sum_{r1,r2,r3,r4} \sum_{s1,s2,s3,s4} O_{r1s1,i} O_{r2s1,i} O_{r2s2,j} O_{r1s2,j} O_{r3s3,i} O_{r4s3,i} O_{r4s4,j} O_{r3s4,j} \\
&+ O_{r1s1,i} O_{r1s2,i} O_{r2s2,j} O_{r2s1,j} O_{r3s3,i} O_{r3s4,i} O_{r4s4,j} O_{r4s3,j} \\
&\left. + O_{r1s1,i} O_{r2s1,i} O_{r2s2,j} O_{r1s2,j} O_{r3s3,i} O_{r3s4,i} O_{r4s4,j} O_{r4s3,j} \right\}. \tag{C.24}
\end{aligned}$$

Similarmente ao caso anterior, obter o poder de emaranhamento assintótico consistirá em efetuar a média da expressão acima envolvendo médias de produtos de oito elementos pertencentes a uma ou duas colunas de matrizes do grupo de Haar ortogonal. Para este fim também recorreremos ao método diagramático sobre o qual comentamos. Entretanto, os termos da expressão (C.24) envolvem quatro índices para cada subsistema. Isso significa que desmembrar os termos dessa expressão de modo a distinguir todos os tipos de monômios presentes é uma manipulação consideravelmente mais complexa que no caso anterior em que tínhamos apenas dois índices para cada subsistema.

Inspirados no método diagramático utilizado para calcular as médias dos monômios, elaboramos um método diagramático para distinguir os monômios, o qual descreveremos. Conforme podemos notar os monômios presentes possuem sempre oito elementos de uma mesma coluna ou quatro elementos de uma coluna e outros quatro elementos de outra coluna e isso está explícito na expressão. Diferentemente, os índices de linha são especificados por dois índices, associados aos subsistemas, e uma variedade de combinações ocorre. Por

isso, este método é proposto para discriminar as combinações possíveis de índices de linha nos monômios. Representamos os índices do subsistema A por um ponto numa coluna à esquerda (um ponto para cada diferente índice) e todos diferentes índices do subsistema B são representados por um ponto numa coluna à direita. Esses pontos são unidos por linhas, onde cada linha representa um índice de linha. De acordo com essa representação gráfica os índices de linha de todos termos da (C.24) possuem o seguinte diagrama:

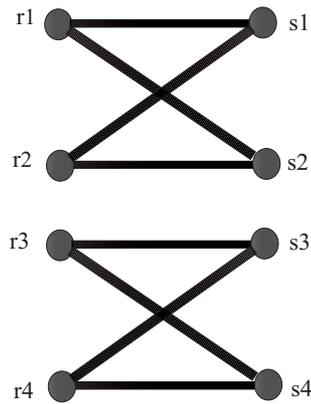


Figura C.3: Diagrama para o conjunto de índices de linha de (C.24).

Podemos deslocar os pontos em cada coluna desde que os mantenhamos ligados aos pontos da outra coluna. Considerar dois índices de um subsistema iguais significa, em termos diagramáticos, sobrepor os pontos que os representam. Sabemos que os monômios de média não nula são aqueles em que cada índice de linha aparece um número par de vezes. Para os oito índices de linha presentes nos monômios ao deslocarmos os pontos encontramos cinco combinações possíveis que satisfazem a condição de integral não nula:

- I) 1 índice de linha aparecendo 8 vezes.
- II) 2 índices de linha, 1 aparecendo 2 vezes e o outro 6 vezes.
- III) 2 índices de linha, cada um aparecendo 4 vezes.

IV) 3 índices de linha, 1 um aparecendo 4 vezes e os outros 2 vezes cada.

V) 4 índices de linha, cada um aparecendo 4 vezes.

Ilustramos na figura C.4 uma sequência de deslocamentos de pontos que leva a combinações II afim de caracterizarmos a dinâmica do método.

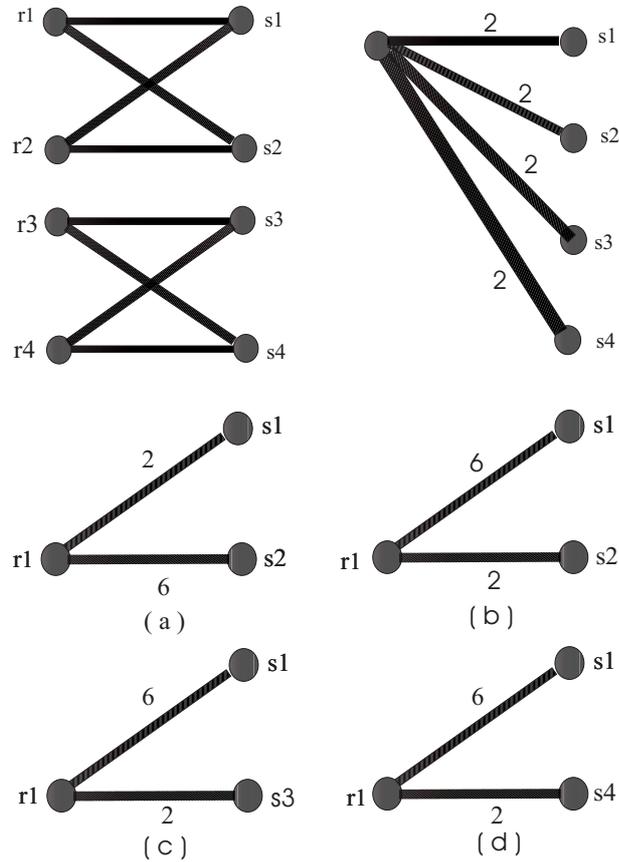


Figura C.4: Sequência de diagramas: situação inicial(superior esquerda), obtido por sobrepor r_2, r_3 e r_4 a r_1 (superior direita) e então , sobrepondo três dos índices do subsistema B, quatro combinações II: (a) $s_1 \neq s_2 = s_3 = s_4$, (b) $s_2 \neq s_1 = s_3 = s_4$, (c) $s_3 \neq s_1 = s_2 = s_4$ e (d) $s_4 \neq s_1 = s_2 = s_3$.

As combinações de II a V se subdividem em vários tipos dependendo do número de índices envolvidos de cada subsistema, nos diagramas da figura C.5 mostramos alguns

exemplos.

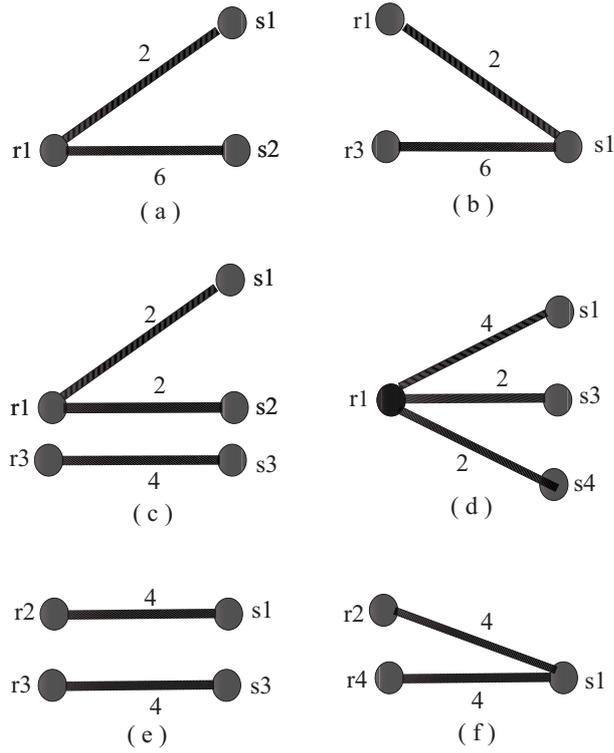


Figura C.5: Exemplos de tipos de combinações II (a,b), IV (c,d) e III (e,f).

A lista completa de tipos de combinações é extensa e não a apresentaremos. Avaliamos que os exemplos são suficientes para caracterizar a manipulação que realizamos com o objetivo de discernir as combinações possíveis de índices de linha nos monômios. Cumprida essa etapa, analisamos para todos os termos da (C.24) os monômios que surgem para os vários tipos de combinações possíveis. E então procedemos com o cálculo das médias e a contagem conforme descrevemos no caso anterior. Após esse conjunto de manipulações

metódicas chegamos à expressão para o poder de emaranhamento assintótico:

$$e_p^\infty(COE_2) = \frac{N^5 + 12N^4 - (N_A^2 + N_B^2 - 41)N^3 - [12(N_A^2 + N_B^2) + 2(N_A + N_B) - 30]N^2}{(N_A + 1)(N_B + 1)(N + 1)(N + 2)(N + 4)(N + 6)} + \frac{-[38(N_A^2 + N_B^2) + 18]N - 16(N_A^2 + N_B^2) + 56(N_A + N_B) - 40}{(N_A + 1)(N_B + 1)(N + 1)(N + 2)(N + 4)(N + 6)}. \quad (C.25)$$

C.3 O Conjunto de Mapas Unitários Aplicados a Estados Iniciais Complexos.

Para um ensemble de mapas CUE aplicados ao ensemble $CUE \otimes CUE$, exploramos a invariância do ensemble CUE por transformações unitárias (seção 4.2), a qual nos permitiu considerar o ensemble de mapas e apenas um estado inicial da base computacional.

As passagens para obter o poder de emaranhamento assintótico são análogas às do primeiro caso. Assim, expandindo o autovetor $|e_i\rangle$ na base produto, temos:

$$|e_i\rangle = \sum_{r=1}^{N_A} \sum_{s=1}^{N_B} U_{rs,i} |r\rangle \otimes |s\rangle, \quad (C.26)$$

onde os $U_{rs,i}$ são elementos da matriz U , da qual as colunas são autovetores do mapa CUE. Então, escolhendo o estado produto inicial $|\psi\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$, temos:

$$|\langle e_i | \psi \rangle|^2 |\langle e_j | \psi \rangle|^2 = |U_{11,i}|^2 |U_{11,j}|^2. \quad (C.27)$$

Com a finalidade de que (C.1) fique somente em termos dos elementos da matriz U , resta-nos expressar os operadores reduzidos em termos de tais elementos. Assim,

$$Tr_A(\rho_A^{ii} \rho_A^{jj}) = \sum_{r,r',s,s'} U_{rs,i} U_{r's,i}^* U_{r's',j} U_{rs',j}^*, \quad (C.28)$$

$$Tr_A(\rho_A^{ij}\rho_A^{ji}) = Tr_B(\rho_B^{ii}\rho_B^{jj}) = \sum_{r,r',s,s'} U_{rs,i}U_{rs',i}^*U_{r's',j}U_{r's,j}^* . \quad (C.29)$$

De acordo com (C.27), (C.28) e (C.29), a expressão (C.1) ficará escrita para este caso como:

$$\begin{aligned} S_L^\infty(CUE) = 1 & - \sum_i \sum_{r,r',s,s'} |U_{11,i}|^4 U_{rs,i}U_{rs',i}^*U_{r's',i}U_{r's,i}^* \\ & - \sum_{i \neq j} \sum_{r,r',s,s'} |U_{11,i}|^2 |U_{11,j}|^2 U_{rs,i}U_{rs',i}^*U_{r's',j}U_{r's,j}^* \\ & - \sum_{i \neq j} \sum_{r,r',s,s'} |U_{11,i}|^2 |U_{11,j}|^2 U_{rs,i}U_{rs',i}^*U_{r's',j}U_{r's,j}^* . \end{aligned} \quad (C.30)$$

Neste caso obter o poder de emaranhamento assintótico envolve médias de produtos de oito elementos pertencentes a uma ou duas colunas de matrizes do grupo de Haar unitário. Analogamente ao caso ortogonal, para o cálculo de tais médias recorreremos a um método diagramático [69] que se baseia exclusivamente no vínculo de unitariedade e em invariância. As integrais a serem calculadas são da forma:

$$I = \int (dU) U_{\alpha_1\beta_1}^* \cdots U_{\alpha_p\beta_p}^* U_{\chi_1\epsilon_1} \cdots U_{\chi_p\epsilon_p} , \quad (C.31)$$

onde p , denominado grau da integral, é um inteiro positivo, (dU) é a medida invariante de Haar do grupo unitário $U(N)$ normalizada a $\int (dU) = 1$. As médias (C.31) podem ser calculadas utilizando:

- a relação de unitariedade:

$$\sum_{\beta=1}^N U_{\alpha\beta}U_{\chi\beta}^* = \delta_{\alpha\chi} = \sum_{\beta=1}^N U_{\beta\alpha}U_{\beta\chi}^* , \quad (C.32)$$

- e a invariância da medida de Haar, significando que para qualquer função $f(U, U^*)$ e uma matriz V unitária $N \times N$ arbitrária,

$$\int (dU) f(U, U^*) = \int (dU) f(V^*U, VU^*) = \int (dU) f(UV, U^*V^*), \quad (\text{C.33})$$

sendo $f(U, U^*)$ o monômio

$$f(U, U^*) = \prod_{\lambda=1}^p \prod_{\kappa=1}^q U_{\alpha_\lambda \beta_\lambda}^* U_{\chi_\kappa \epsilon_\kappa}. \quad (\text{C.34})$$

Evidentemente, assim como no caso ortogonal, a habilidade de extrair relações para as integrais a partir da invariância está associada a escolhas apropriadas das matrizes V . O método diagramático [69] explora várias transformações unitárias e, combinado as relações que são derivadas ao vínculo de unitariedade, provê um conjunto de fórmulas explícitas e relações de recorrências para vários tipos de integrais. Esses recursos foram suficientes para o cálculo das médias dos termos de (C.30), o qual efetuamos de forma similar ao procedimento descrito no primeiro caso. Embora existam diferenças essenciais entre integrais sobre o grupo unitário e integrais sobre o grupo ortogonal, os métodos diagramáticos para os dois casos são muito similares. Inclusive, o método [66] foi uma adaptação recente de [69] para o caso ortogonal. Dessa forma não há necessidade de detalharmos [69] e o emprego do mesmo. Mostraremos diretamente a expressão para o poder de emaranhamento assintótico:

$$e_p^\infty(CUE) = \frac{N^3 - (N_A + N_B - 4)N^2 - [3(N_A + N_B) - 1]N + 2(N_A + N_B - 1)}{N(N+1)(N+3)}. \quad (\text{C.35})$$

Apêndice D

Médias de Exponenciais em Termos de Fatores de Forma Básicos

Considerando o ensemble CUE, demonstraremos que as médias

$$\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)} \rangle, \quad (\text{D.1})$$

$$\langle e^{in(2\phi_1-\phi_2-\phi_3)} \rangle, \quad (\text{D.2})$$

$$\langle e^{2in(\phi_1-\phi_2)} \rangle, \quad (\text{D.3})$$

$$\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \rangle, \quad (\text{D.4})$$

podem ser expressas em termos dos fatores de forma básicos

$$\langle |t_n|^2 \rangle^2, \langle |t_{2n}|^2 \rangle, \langle |t_n|^2 \rangle. \quad (\text{D.5})$$

Neste contexto, é útil mostrarmos o cálculo do fator de forma para CUE, dado por (2.78),

$$\langle |t_n|^2 \rangle = \begin{cases} n & \text{para } 1 \leq n < N \\ N & \text{para } n \geq N. \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

Para isso, devemos lembrar que (4.24)

$$\langle |t_n|^2 \rangle = \sum_{\alpha, \beta=1}^d \langle e^{in(\phi_\alpha - \phi_\beta)} \rangle = N + N(N-1) \langle e^{in(\phi_1 - \phi_2)} \rangle, \quad (\text{D.7})$$

onde relacionamos o fator de forma à média (D.4). Analogamente, temos:

$$\langle |t_{2n}|^2 \rangle = N + N(N-1) \langle e^{2in(\phi_1 - \phi_2)} \rangle, \quad (\text{D.8})$$

e assim relacionamos o fator de forma básico $\langle |t_{2n}|^2 \rangle$ à média (D.3). Resta-nos agora escrevermos (D.1) e (D.2) em termos dos fatores de forma básicos. A discussão que segue usa vários resultados e definições do livro de Mehta [53]. Primeiramente, continuaremos com o cálculo do fator de forma para CUE. Com este intuito, devemos calcular $\langle e^{in(\phi_1 - \phi_2)} \rangle$ e substituir o valor em (D.7). Da definição:

$$\begin{aligned} \langle e^{in(\phi_1 - \phi_2)} \rangle &= \int d\phi_1 \dots d\phi_N e^{in(\phi_1 - \phi_2)} P(\phi_1 \dots \phi_N) \\ &= \int d\phi_1 d\phi_2 e^{in(\phi_1 - \phi_2)} \int d\phi_3 \dots d\phi_N P(\phi_1 \dots \phi_N), \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

sendo $P(\phi_1 \dots \phi_N)$ a função de densidade de probabilidade conjunta dos autovalores.

Sabemos que a função de correlação de n-pontos é dada por [53]:

$$R_n(\phi_1, \dots, \phi_N) = \frac{N!}{(N-n)!} \int \dots \int P(\phi_1 \dots \phi_N) d\phi_3 \dots d\phi_N, \quad (\text{D.10})$$

então podemos escrever (D.9) como

$$\langle e^{in(\phi_1 - \phi_2)} \rangle = \frac{(N-2)!}{N!} \int_0^{2\pi} d\phi_1 d\phi_2 e^{in(\phi_1 - \phi_2)} R_2(\phi_1, \phi_2). \quad (\text{D.11})$$

Mas $R_2(\phi_1, \phi_2) = (S_N(0))^2 - (S_N(\phi_1, \phi_2))^2$, onde

$$S_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_p e^{ip\theta}, \quad (\text{D.12})$$

com $p = \frac{1}{2}(1 - N), \frac{1}{2}(3 - N), \dots, \frac{1}{2}(N - 3), \frac{1}{2}(N - 1)$. Fazendo as substituições na equação (D.11) e reescrevendo-a, chegamos a:

$$\langle e^{in(\phi_1 - \phi_2)} \rangle = -\frac{1}{N(N-1)} \sum_{p,p'} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n+p+p')\phi} \right|^2, \quad (\text{D.13})$$

A integral em (D.13) será não nula quando $n = -(p + p')$. Somando sobre todas as possíveis combinações de valores assumidos por p e p' , temos:

$$\langle e^{in(\phi_1 - \phi_2)} \rangle = \begin{cases} -\frac{N-n}{N(N-1)} & \text{para } 1 \leq n < N \\ 0 & \text{para } n \geq N \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

Finalmente, substituindo (D.14) em (D.7), demonstramos (D.6). Para o cálculo de $\langle e^{i2n(\phi_1 - \phi_2)} \rangle$ temos $2n$ ao invés de n na integral em (D.13) resultando

$$\langle e^{i2n(\phi_1 - \phi_2)} \rangle = \begin{cases} -\frac{N-2n}{N(N-1)} & \text{para } 1 \leq n < \frac{N}{2} \\ 0 & \text{para } n \geq \frac{N}{2} \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

Substituindo (D.15) em (D.8), conferimos a expressão esperada para um dos fatores de forma básicos:

$$\langle |t_{2n}|^2 \rangle = \begin{cases} 2n & \text{para } 1 \leq n < \frac{N}{2} \\ N & \text{para } n \geq \frac{N}{2}. \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

Para obtermos (D.2) em termos dos fatores de forma básicos partimos da seguinte expressão, análoga a (D.11);

$$\langle e^{in(2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \rangle = \frac{(N-3)!}{N!} \int_0^{2\pi} d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3 e^{in(2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} R_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3). \quad (\text{D.17})$$

Devemos introduzir na expressão acima o valor da função de correlação de 3-níveis [53],

$$R_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \det[S_N(\phi_j - \phi_k)]_{j,k=1,2,3}. \quad (\text{D.18})$$

Porém, antes disso reescreveremos essa função de correlação usando a expansão do determinante, introduzindo o valor de $S_N(\theta)$, Eq. (D.12):

$$R_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{p_1, p_2, p_3} \sum_{\sigma} f(\sigma) e^{i[\phi_1(p_1 - p_{\sigma(1)}) + \phi_2(p_2 - p_{\sigma(2)}) + \phi_3(p_3 - p_{\sigma(3)})]}, \quad (\text{D.19})$$

onde σ denota as permutações de três índices e a função $f(\sigma)$ tem valor $+1$ para as permutações pares e -1 para as permutações ímpares. Substituindo (D.19) em (D.17) e reagrupando exponenciais temos

$$\langle e^{in(2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \rangle = \frac{(N-3)!}{N!} \sum_{p_1, p_2, p_3} \sum_{\sigma} f(\sigma) \delta(p_1 - p_{\sigma(1)} + 2n) \delta(p_2 - p_{\sigma(2)} - n) \delta(p_3 - p_{\sigma(3)} - n). \quad (\text{D.20})$$

Como estamos considerando apenas $n > 0$, as permutações com algum ponto fixo são eliminadas, restando apenas as permutações cíclicas de 123 (312 e 231), para as quais $f(\sigma) = +1$. Então,

$$\langle e^{in(2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \rangle = 2 \frac{(N-3)!}{N!} \sum_{p_1, p_2, p_3} \delta(p_1 - p_3 + 2n) \delta(p_2 - p_1 - n) \delta(p_3 - p_2 - n). \quad (\text{D.21})$$

Portanto, devemos resolver o sistemas de equações lineares

$$\begin{aligned} p_1 - p_3 &= -2n \\ p_2 - p_1 &= n \\ p_3 - p_2 &= n, \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

lembrando que $p_1, p_2, p_3 = \frac{1}{2}(1-N), \frac{1}{2}(3-N), \dots, \frac{1}{2}(N-3), \frac{1}{2}(N-1)$. A solução é $N-2n$, para $n < \frac{N}{2}$, e 0, para $n \geq \frac{N}{2}$. Consequentemente

$$\langle e^{in(2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \rangle = \begin{cases} 2 \frac{(N-3)!}{N!} (N-2n) & \text{para } 1 \leq n < \frac{N}{2} \\ 0 & \text{para } n \geq \frac{N}{2}. \end{cases} \quad (\text{D.23})$$

Finalmente podemos escrever a média (D.2) em termos do fator de forma básico $\langle |t_{2n}|^2 \rangle$:

$$\langle e^{in(2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)} \rangle = -2 \frac{(N-3)!}{N!} \langle |t_{2n}|^2 \rangle + 2(N-3)(N-2) \quad (\text{D.24})$$

Para última média a ser calculada, (D.1), realizamos passagens análogas às que acabamos de mostrar para (D.2) e chegamos a:

$$\begin{aligned} \langle e^{in(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4)} \rangle &= \frac{(N-4)!}{N!} \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4} \sum_{\sigma} f(\sigma) \\ &\times \delta(p_1 - p_{\sigma(1)} + n) \delta(p_2 - p_{\sigma(2)} + n) \delta(p_3 - p_{\sigma(3)} - n) \delta(p_4 - p_{\sigma(4)} - n). \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Novamente devemos ter $n > 0$ e as permutações sem pontos fixos são 2143, 4123, 3412 e 2341. Estas permutações são pares. Assim como no caso anterior, para cada permutação devemos resolver um sistema de equações lineares. Omitimos a resolução dos sistemas de equações lineares elementares e apresentamos diretamente o resultado:

$$\langle e^{in(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4)} \rangle = \begin{cases} \frac{(N-4)!}{N!} [(N-n)^2 + 2(N-2n)] & \text{para } 1 \leq n < \frac{N}{2} \\ \frac{(N-4)!}{N!} (N-n)^2 & \text{para } \frac{N}{2} \leq n < N. \\ 0 & \text{para } n \geq N. \end{cases} \quad (\text{D.26})$$

Podemos reescrever a expressão acima em termos dos fatores de forma básicos:

$$\langle e^{in(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4)} \rangle = \frac{(N-4)!}{N!} [\langle |t_n|^2 \rangle^2 - 2\langle |t_{2n}|^2 \rangle - 2N\langle |t_n|^2 \rangle + N^2 + 2N]. \quad (\text{D.27})$$

Bibliografia

- [1] R. Feynman, *Opt. News* **11**, 11 (1985).
- [2] D. Deutsch, *Proc. R. Soc. Lond. A* **400**, 97 (1985).
- [3] P. W. Shor, *Proc. 35th Annual Symp. Found. Comput. Sci.* (IEEE Press, Los Alamitos, 1994).
- [4] L. K. Grover, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325 (1997).
- [5] Arquivos do lanl (<http://xxx.lanl.gov/archive/quant-ph>)
- [6] M. Saraceno, *Ann. Phys.* **199**, 37-60 (1990).
- [7] N. L. Balazs and A. Voros, *Europhys. Lett.* **4**, 1089 (1987).
- [8] R. Schack, *Phys. Rev. A* **57**, 1634 (1998).
- [9] T. A. Brun e R. Schack, *Phys. Rev. A* **59**, 2649 (1999).
- [10] J. Emerson, Y. S. Weinstein, S. Lloyd, e D. G. Cory, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 284102 (2002).
- [11] R. Schack and C. M. Caves, *Appl. Algebra Eng. Commun.* **10**, 305 (2000).

- [12] F. Bartolucci, R. Franchy, J. S. Barnard, e R. E. Palmer Phys. Rev. Lett. **80**, 5224 (1998).
- [13] J. Gong e P. Brumer, Phys. Rev. A **68**, 022101 (2003).
- [14] M. Znidaric e T. Prosen, Phys. Rev. A **71**, 032103 (2005).
- [15] R. M. Angelo e K. Furuya, Phys. Rev. A **71**, 042321 (2005).
- [16] H. Kubotani, M. Toda, e S. Adachi, Phys. Rev. A **74**, 032314 (2006).
- [17] C. Petijean and Ph. Jaccquod, Phys. Rev. Lett. **97**, 194103 (2006).
- [18] C. Pineda e T. H. Seligman, Phys. Rev. A. **75**, 012106 (2007).
- [19] P. A. Miller e S. Sarkar, Nonlinearity **12**, 419 (1998).
- [20] P. A. Miller e S. Sarkar, Phys. Rev. E. **60**, 1542 (1999).
- [21] A. Lakshminarayanan, Phys. Rev. Lett. **64**, 036207 (2001).
- [22] M. Pogorzelska and R. Alicki, J. Phys. A . **40**, 3379 (2007).
- [23] M. Saraceno e R. O. Vallejos, Chaos **6**, 2 (1996).
- [24] P. Cvitanović, G. H. Gunaratne e I. Procaccia, Phys. Rev. A, **38** 1503-1520 (1988).
- [25] T. M. Cover and J. A. Thomas, Elements of Information Theory (New York : John Wiley & Sons, Inc., 1991).
- [26] C. E. Shannon, Bell System Tech. J. **27**, 379-423,623-656 (1948).
- [27] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press, 2000).

- [28] S. Popescu e D. Rohrlich, Phys. Rev. A, **56** R3319 (1997).
- [29] G. Vidal, J. Mod. opt., **47** 355 (2000).
- [30] H. Fujizaki, T. Miyadera, e A. Tanaka, Phys. Rev. E, **66** 045201(R) (2002) ; **67** 066201 (2003).
- [31] K. Życzkowski e I. Bengtsson, Open Sys. & Information Dyn., **11** 3 (2004).
- [32] F. J. Dyson, J. Math. Phys., **3**, 140, (1962); **3**, 157 (1962); **3**, 166 (1962).
- [33] A. Edelman, The Mathematics of Finite Random Matrices (<http://web.mit.edu/~18.325/www/>)
- [34] F. Haake, Quantum Signatures of Chaos (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001).
- [35] H.-J. Stöckmann, Quantum Chaos: An Introduction (Cambridge University Press, 1999).
- [36] O. Bohigas, M. J. Giannoni e C. Schmit Phys. Rev. Lett., **52** 1 (1984).
- [37] W. K. Wothers, Foundations of Phys. **20**, 1365 (1990).
- [38] K. Życzkowski e H.-J. Sommers, J. Phys. A **34**, 7111 (2001).
- [39] I. Bengtsson e K. Życzkowski Geometry of Quantum States - An Introduction to Quantum Entanglement (Cambridge University Press, 2006).
- [40] P. Pereyra and P. A. Mello, J. Phys. A **16**, 237 (1983).
- [41] M. Poźniak, K. Życzkowski e M. Kuś J. Phys. A **31**, 1059 (1998).

- [42] E Lubkin, J. Math. Phys. **19**, 1028 (1978).
- [43] A. J. Scott and C. M. Caves, J. Phys. A **36**, 9553 (2003).
- [44] P. Zanardi, C. Zalka e L. Faoro Phys. Rev. A **62**, 030301(R) (2000).
- [45] R. Demkowicz-Dobrzanski and M. Kuś, Phys. Rev. E **70**, 066216 (2004).
- [46] T. Gorin and T. H. Seligman, Phys. Lett. A **309**, 61 (2003).
- [47] J. N. Bandyopadhyay and A. Lakshminarayan, Phys. Rev. E **69**, 016201 (2004).
- [48] S. Ghose and B. C. Sanders, Phys. Rev. A **70**, 062315 (2004).
- [49] D. Rossini, G. Benenti, and G. Casati, Phys. Rev. E **74**, 036209 (2006).
- [50] Y. S. Weinstein and C. S. Hellberg, Phys. Rev. A **69**, 062301 (2004); **72**, 022331 (2005); **95** 030501 (2005).
- [51] Ph. Jacquod, Phys. Rev. Lett. **92**, 150403 (2004); C. PetiJean e Ph. Jacquod **97**, 194103 (2006).
- [52] J. N. Bandyopadhyay and A. Lakshminarayan, Phys. Rev. Lett. **89**, 060402 (2002).
- [53] M. L. Mehta, Random Matrices (Academic Press, New York, 2004).
- [54] V. A. Gopar, M. Martinez, P. A. Mello, and H. U. Baranger, J. Phys. A **29**, 881 (1996).
- [55] H. U. Baranger and P. A. Mello, Phys. Rev. B **54**, 14297 (1996).
- [56] K. Życzkowski, Phys. Rev. E **56**, 2257 (1997).

- [57] I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, and A. Kamenev, Phys. Rev. B **62**, 10373 (2000).
- [58] M. Pozniak, K. Życzkowski, M. Kuś, J. Phys. A **31**, 1059 (1998).
- [59] P. Forrester, *Log-gases and Random Matrices* (não publicado, veja <http://www.ms.unimelb.edu.au/matpjf/matpjf.html>).
- [60] N. L. Balazs and A. Voros, Ann. Phys. **190**, 1 (1989).
- [61] M. M. Sano, CHAOS **10**, 195 (2000).
- [62] P. A. Mello, J. Phys. A **23**, 4061 (1990).
- [63] F. Haake, M. Kuś, H. Sommers, H. Schomerus, K. Życzkowski, J. Phys. A **29**, 3641 (1996).
- [64] J. N. Bandyopadhyay and A. Lakshminarayan, arXiv:quant-ph/0504052 v1, (2005).
- [65] X. Wang and P. Zanardi, Phys. Rev. A **66**, 044303 (2002).
- [66] D. Braun, J. Phys. A **39**, 14581 (2006).
- [67] T. Gorin, J. Math. Phys. **43**, 3342 (2002).
- [68] R. F. Abreu and R. O. Vallejos, Phys. Rev. A. **73**, 052327 (2006).
- [69] S. Aubert and C. S. Lam J. Math. Phys. **44**, 6112 (2003).
- [70] R. F. Abreu and R. O. Vallejos, Phys. Rev. A. **75**, 062335 (2007).
- [71] E. B. Bogomolny, B. Georget, M.-J. Giannoni, e C. Schmit, Phys. Rep. **291**, 219 (1997).

- [72] J. Emerson, Y. S. Weinstein, M. Sarraceno, S. Lloyd, D. G. Cory, *Science* **302**, 2098 (2003).
- [73] G. Adesso, F. Illuminati and S. De Siena, *Phys. Rev. A*. **68**, 062318 (2003).
- [74] K. Życzkowski, *Open Sys. & Information Dyn.*, **10** 297 (2003).