

REGINA CÉLIA ARCURI

NÚCLEOS ATRASADOS DE MATÉRIA  
NO UNIVERSO DE FRIEDMAN

Tese de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

Junho de 1982

## AGRADECIMENTOS

- A Mário Novello pela orientação segura e motivante, pelo tema proposto, pelo apoio e estímulo nos momentos de desânimo e por me haver iniciado na pesquisa científica;

- A Ivano Damião Soares, a quem devo parte da minha formação científica;

- Ao Prof. Jayme Tiomno, pelas idéias sugeridas;

- A José Martins Salim e Marcelo José Rebouças, pelas discussões relevantes;

- À Myriam pela paciência e boa vontade;

- A Zé Gordo, do Xerox, pela solicitude de sempre;

- À Helena pelo trabalho de datilografia;

- Aos amigos do CBPF;

- A Davi, Alberto, Xico, Renato, Ricardo, Nelson, Ângela, pela paciência e estímulo;

- Ao CNPq pela bolsa recebida.

- Aos meus pais, pelo carinho e apoio.

## S U M Á R I O

	<u>Pág.</u>
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	iv
LISTA DE FIGURAS .....	vii
<u>INTRODUÇÃO</u> .....	1
<u>CAPÍTULO 1</u> - MODELOS COSMOLÓGICOS INOMOGÊNEOS COM SIMETRIA ESFÉRICA....	3
1.1 - UNIVERSOS DE TOLMAN .....	3
1.2 - DEFINIÇÃO DO CONCEITO FUNÇÃO MASSA .....	10
<u>CAPÍTULO 2</u> - CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	21
2.1 - PRELIMINARES .....	21
2.2 - CURVATURA EXTRÍNSECA DE UMA SUPERFÍCIE $\Sigma$ .....	24
2.3 - EQUAÇÕES DE GAUSS-CODAZI .....	33
2.4 - UM OUTRO FORMALISMO, UTILIZANDO O TENSOR DE PROJEÇÃO $h_{\mu\nu}$ ....	38
2.5 - CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	44
2.6 - EQUIVALÊNCIA DOS CONJUNTOS DE CONDIÇÕES .....	46
2.7 - UM EXEMPLO .....	50
<u>CAPÍTULO 3</u> - UNIVERSO DE NOVIKOV (BURACOS BRANCOS) E SUA GENERALIZAÇÃO.	54
3.1 - UNIVERSO DE NOVIKOV .....	54
3.2 - CÁLCULO DE $\theta$ (COEFICIENTE DE EXPANSÃO) E DO TEMPO CRÍTICO $\tau_c$ .....	63
3.3 - VETORES DE KILLING E HORIZONTES .....	65
3.4 - HIPERSUPERFÍCIES ESPECIAIS .....	68
3.5 - BURACOS BRANCOS .....	70
3.6 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE 5 CAMADAS DO UNIVERSO DE NOVIKOV .....	79
3.7 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE $n$ CAMADAS .....	84
<u>CAPÍTULO 4</u> - GENERALIZAÇÃO DO MODELO DE NOVIKOV UTILIZANDO O MODELO DE FRIEDMANN DE SEÇÃO ABERTA ( $e = -1$ ) .....	86

	<u>Pág.</u>
4.1 - NÚCLEO DE MATÉRIA IMERSO NO VÁCUO .....	86
4.2 - CÁLCULO DE $\theta$ E DO TEMPO CRÍTICO $t_c$ .....	92
4.3 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE 3 CAMADAS .....	93
4.4 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE n CAMADAS .....	96
<u>CAPÍTULO 5</u> - UNIVERSOS SEMI-FECHADOS E A GENERALIZAÇÃO DO MODELO DE NOVIKOV COM SEÇÃO FECHADA ( $\epsilon = 1$ ) .....	101
5.1 - SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO .....	101
5.2 - UNIVERSOS SEMI-FECHADOS .....	105
5.3 - NÚCLEO DE MATÉRIA IMERSO NO VÁCUO .....	115
5.4 - CÁLCULO DE $\theta$ E DO TEMPO CRÍTICO $t_c$ .....	121
5.5 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE 3 CAMADAS .....	122
5.6 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE n CAMADAS .....	125
<u>CONCLUSÃO</u> .....	130
<u>APÊNDICE A</u> - CÁLCULO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO EM FORMALISMO DE TETRADAS....	133
<u>APÊNDICE B</u> - SISTEMAS DE COORDENADAS .....	145
B.1 - TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS DE SCHWARZSCHILD PARA O DE COORDENADAS COMOVENTES .....	145
B.2 - APLICAÇÃO .....	146
B.3 - TRANSFORMAÇÃO INVERSA .....	148
B.4 - FORMA DE EDDINGTON-FINKELSTEIN DA MÉTRICA DE SCHWARZ- SCHILD .....	150
<u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	152

## INTRODUÇÃO

O modelo cosmológico convencional proposto por Friedman<sup>(57)</sup> em 1922 contém a idéia da grande explosão inicial ("big-bang"), na qual o surgimento de todo o universo no espaço-tempo far-se-ia num único instante. Em meados da década de sessenta, Ne'Iman<sup>(54)</sup> (1965) e Novikov<sup>(25)</sup> (1964) numa tentativa de construir um modelo para os quasares, propuseram um modelo cosmológico inhomogêneo que incluía vários "big-bang", ou seja, em que um número indefinido de explosões localizadas arbitrariamente no espaço-tempo se sucedia à primeira grande explosão. Tais núcleos retardados ("lagging cores") de matéria gerados por cada uma das explosões constituíam-se em fontes de grande energia e eventuais candidatos da descrição de quasares.

As soluções que nos permitem representar tais núcleos atrasados imersos num espaço-tempo de Friedman são soluções inhomogêneas exatas das equações de Einstein encontradas por Tolman<sup>(1)</sup> em 1934. Sobre elas falaremos no Capítulo 1.

As soluções de Tolman foram generalizadas para o caso da fonte de curvatura ser o campo eletromagnético, por Markov e Frolov<sup>(55)</sup> em 1970, não tendo sido feita porém até agora, nenhuma generalização para os casos de campo de neutrino e campos escalares.

O exame destes núcleos atrasados, levou-nos a estudar as condições de contorno para o acoplamento de geometrias. Este problema foi estudado primeiramente por Darmois<sup>(10)</sup> em 1927, e

posteriormente por O'Brien e Synge<sup>(11)</sup> (1952) e por Lichnerowicz<sup>(12)</sup> (1955), tendo eles proposto diferentes condições de contorno.

Mais recentemente Israel<sup>(13)</sup> (1958), Robson<sup>(14)</sup> (1972) e Bonnor e Vickers<sup>(15)</sup> (1981), reestudaram o assunto, tendo estes dois últimos reexaminado e comparado as diferentes propostas existentes. Este problema é abordado no Capítulo 2, sendo-lhe apresentado na Seção 2.4 um novo formalismo em termos do tensor de projeção  $h_{\mu\nu}$ .

Como antes mencionado, Novikov propôs um modelo onde estariam imersos no universo, representado por uma geometria de Friedman de seção euclidiana ( $\epsilon = 0$ ), vacúolos contendo núcleos atrasados (expressos também por uma geometria de Friedman de seção euclidiana). Este modelo juntamente com a generalização feita por nós, para um modelo de vacúolos sucessivos, é apresentado no Capítulo 3. A relação entre as massas e os raios dos núcleos atrasados desta generalização, baseada nas condições de contorno de Darmois, é também obtida.

Nos capítulos seguintes, 4 e 5, fizemos um estudo análogo ao descrito no parágrafo anterior, onde tomamos os casos em que a geometria do universo e dos núcleos atrasados é representada por modelos de Friedman com seção aberta ( $\epsilon = -1$ ) e fechada ( $\epsilon = 1$ ), respectivamente. Estudamos também, as propriedades destas camadas.

LISTA DE FIGURAS

<u>Fig.</u>	<u>Pág.</u>
3.5.1 - Gráfico $(\bar{t}, R)$ e cones de luz .....	74
3.5.2 - Gráfico $(t, r)$ na região do vázio representativo de Buracos Brancos .....	75
3.5.3 - As singularidades em todas as regiões ocorrem em $R = 0$ . As superfícies $R_{  } = \text{cte}$ são tipo-espaço na região- $T_+$ e tipo-tempo na região- $R$ .....	78
3.6.1 - Esquematização do universo de Novikov generalizado para 5 camadas .....	79
3.6.2 - Gráfico $(t, r)$ .....	83
5.1.1 - Exemplo de uma figura de revolução .....	102
5.1.2 - A esfera é obtida se girarmos o semi-círculo $(x^3 = \Phi = a \cos \theta)$ em torno do eixo- $x^3$ .....	104
5.2.1 - Diagrama de imersão para a geometria da 2-superfície $(\theta = \pi/2, \tau = \text{cte})$ de Schwarzschild.....	106
5.2.2 - Dois valores de $r_\Sigma$ são assinalados ( $r_{\Sigma_1}$ e $r_{\Sigma_2}$ ). Notar que as geometrias $M_1$ e $M_2$ do vázio não são as mesmas.....	113
5.2.3 - Sequência de diagramas de imersão.....	113
5.2.4 - (a) e (b). Destes dois diagramas, apenas o diagrama (b) é considerado como universo semi-fechado.....	114
5.2.5 - Uma "bola de poeira" que se expande a partir de um volume zero até um raio máximo, voltando a se contrair até um volume zero novamente. A região à esquerda da linha pontilhada corresponde à região de matéria.....	115

## NOTAÇÃO

Assinatura da métrica: (+, -, -, -)

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\rho} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} \Gamma^{\mu}_{\beta\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}$$

$$R_{\alpha\beta} = R^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\beta,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

$$A^{\alpha}_{\beta;\gamma} = A^{\alpha}_{\beta,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\rho} A^{\rho}_{\beta} - \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} A^{\alpha}_{\rho}$$

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi k T^{\alpha\beta}$$

$$A_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})$$

$$A_{[\underline{\alpha\beta}]} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha})$$

$$\dot{\lambda} \equiv \frac{d\lambda}{d\bar{t}}$$

$$\lambda' \equiv \frac{d\lambda}{dr}$$

$$\lambda_0 \equiv \frac{d\lambda}{d\tau}$$

$$\lambda_1 \equiv \frac{d\lambda}{dR}$$

Índices gregos:  $\alpha = 0, 1, 2, 3$

Índices latinos minúsculos:  $i = 1, 2, 3$

Índices latinos maiúsculos (índices de tetradas)  $B = 0, 1, 2, 3$

$\eta_{AB} \equiv (1, -1, -1, -1)$  (os índices de tetradas são abaixados ou levantados com  $\eta_{AB}$ )



## CAPÍTULO 1

### MODELOS COSMOLÓGICOS INOMOGÊNEOS COM SIMETRIA ESFÉRICA

#### 1.1 - UNIVERSOS DE TOLMAN

Em 1934<sup>(1)</sup>, Tolman encontrou as soluções das equações de campo de Einstein para uma certa classe de modelos inomogêneos.

A matéria nesta classe é constituída de poeira, sem pressão e distribuída de maneira não uniforme, mas mantendo uma simetria esférica em torno de uma certa origem.

Para descrever a métrica deste espaço-tempo, Tolman utilizou o sistema de coordenadas comoventes que neste caso de simetria esférica, pressão nula e ausência de gradientes de pressão, pode ser reduzido à seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - e^\lambda dr^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (1.1.1)$$

onde  $\lambda$  e  $R$  são funções de  $r$  e  $t$  e  $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ .

A expressão do tensor momento-energia para a matéria deste modelo será descrita como:

$$T^\mu{}_\nu = \rho V^\mu V_\nu \quad , \quad (1.1.2)$$

onde  $\rho$  é a densidade própria da matéria, dependente apenas do tempo, e  $V^\mu$  são as componentes da velocidade do fluido em relação ao sistema de coordenadas comovientes. Com este sistema, tem-se apenas uma componente diferente de zero para o tensor momento energia:

$$T^0_0 = \rho \quad (1.1.3a)$$

$$T^\alpha_\beta = 0 \quad \text{para} \quad \alpha, \beta \neq 0 \quad (1.1.3b)$$

Para esta métrica e este tensor momento energia, temos o seguinte conjunto das equações de Einstein com constante cosmológica nula (para um cálculo mais detalhado em formalismo de tetradas, vide Apêndice A):

$$8\pi k T^0_0 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \dot{\lambda} \frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{R^2} - e^{-\lambda} \left( \frac{2R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} - \frac{\lambda' R'}{R} \right) = 8\pi k \rho \quad (1.1.4-1)$$

$$8\pi k T^1_1 = \frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} - e^{-\lambda} \frac{R'^2}{R^2} = 0 \quad (1.1.4-2)$$

$$8\pi k T^2_2 = 8\pi k T^3_3 = \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \frac{\dot{R}}{R} - e^{-\lambda} \left( \frac{R''}{R} - \frac{\lambda'}{2} \frac{R'}{R} \right) = 0 \quad (1.1.4-3)$$

$$8\pi k T^1_0 = \frac{2e^{-\lambda}}{R} \left( \dot{R}' - \frac{\dot{\lambda} R'}{2} \right) = 0 \quad (1.1.4-4)$$

Da última das equações, obtêm-se:

$$\dot{R}' - \frac{\dot{\lambda} R'}{2} = 0$$

$$\frac{2}{R'} \frac{\partial R'}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Integrando em relação ao tempo,

$$2 \ln R' - \ln (1+f(r)) = \lambda$$

onde  $f(r)$  é uma função arbitrária de  $r$  com a condição de  $1+f(r)$  ser necessariamente positiva

$$e^\lambda = \frac{R'^2}{1+f(r)} \quad . \quad (1.1.5)$$

De posse deste valor, o elemento de linha (1.1.1) se escreve como:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R'^2}{1+f(r)} dr^2 - R^2 d\Omega^2 \quad . \quad (1.1.6)$$

De (1.1.4-4) temos

$$\dot{\lambda} = \frac{2\dot{R}'}{R'}$$

$$\ddot{\lambda} = \frac{2\ddot{R}'}{R'} - \frac{2\dot{R}'^2}{R'^2}$$

$$\lambda' = \frac{2R''}{R'} - \frac{f'(r)}{1+f(r)} \quad .$$

Substituindo esses valores e a eq. (1.1.5) em (1.1.4-3)

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{R}'}{R'} - \frac{\dot{R}'^2}{R'^2} + \frac{\dot{R}'^2}{R'^2} + \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}'\dot{R}}{R'R} - (1+f(r)) \frac{R''}{RR'^2} + \\ + (1+f(r)) \frac{R''}{RR'^2} - \frac{f'(r)'}{2R'R} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Multiplicando-se toda a expressão por  $2R'R$

$$2\ddot{R}'R + 2\ddot{R}R' + 2\dot{R}'\dot{R} - f'(r) = 0 \quad .$$

Integrando em relação a  $r$ ,

$$2\ddot{R}R + \dot{R}^2 - f(r) = g(t) \quad , \quad (1.1.7)$$

onde  $g(t)$  é uma função qualquer de  $t$ .

Se agora substitui-se (1.1.5) em (1.1.4-2), tem-se:

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} - \frac{(1+f(r))}{R^2} = 0 \quad .$$

Multiplicando-se por  $R^2$ , fica-se com:

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 - f(r) = 0 \quad . \quad (1.1.8)$$

Comparando-se (1.1.7) com (1.1.8) verifica-se que a função  $g(t)$  deve necessariamente ser nula.

De (1.1.8) tem-se:

$$\begin{aligned} 2\ddot{R}\dot{R}R + \dot{R}^3 - f(r)\dot{R} &= 0 \\ (\dot{R}^2R)' - f(r)\dot{R} &= 0 \\ (\dot{R}^2R)' &= f(r)\dot{R} \end{aligned}$$

Integrando em relação ao tempo esta última expressão,

$$\begin{aligned} \dot{R}^2R &= f(r)R + F(r) \\ \dot{R}^2 &= \frac{F(r)}{R} + f(r) \quad , \quad (1.1.9) \end{aligned}$$

onde a função  $F(r)$  é uma segunda função arbitrária de integração. Ou ainda,

$$t = \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{F(r)}{R} + f(r)}} \quad (1.1.10)$$

Substituindo-se finalmente (1.1.5) em (1.1.4-1),

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2\frac{\dot{R}'}{R'} \frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{R^2} - \frac{(1+f(r))}{R'^2} 2\frac{R''}{R} +$$

$$- \frac{(1+f(r))}{R'^2} \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1+f(r)}{R'^2} \frac{R'}{R} \frac{2R''}{R'} - \frac{1+f(r)}{R'^2} \frac{R'}{R} \frac{f'(r)}{1+f(r)} = 8\pi k \rho$$

Mas de (1.1.9):

$$\dot{R}^2 = \frac{F(r)}{R} + f(r)$$

tem-se

$$2R\ddot{R}' = \frac{F'(r)}{R} - F(r) \frac{R'}{R^2} + f'(r),$$

e substituindo esses valores na expressão anterior,

$$\frac{F(r)}{R^3} + \frac{f(r)}{R^2} + \frac{F'(r)}{R^2 R'} - \frac{F(r)}{R^3} + \frac{f'(r)}{R'R} + \frac{1}{R^2} +$$

$$- \frac{1}{R^2} - \frac{f(r)}{R^2} - \frac{f'(r)}{R'R} = 8\pi k \rho,$$

ou seja

$$8\pi k \rho = \frac{F'(r)}{R^2 R'} \quad (1.1.11)$$

Da integral (1.1.10) vemos que aparecerá uma outra função de  $r$ , que juntamente com  $F(r)$  e  $f(r)$  nos daria a princípio três funções arbitrarias. Na realidade temos apenas duas funções independentes, já que estas três funções estão ainda sujeitas a uma transformação arbitrária  $r = r(r')$  <sup>(2)</sup>.

Para a integral de (1.1.10) obtêm-se três expressões diferentes correspondentes aos casos  $f(r) > 0$ ,  $f(r) < 0$  e  $f(r) = 0$  <sup>(2,9)</sup>. Estudemos, então cada caso em particular:

i)  $f(r) = 0$

Neste caso, a eq. (1.1.10) se escreve da seguinte forma:

$$t = \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{F(r)}{R}}} \quad (1.1.12)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{F(r)}} \int dR \sqrt{R}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{F(r)}} \frac{2}{3} R^{3/2} + g(r) \quad ,$$

$g(r)$  sendo uma terceira função arbitrária de integração.

$$R = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} F(r)^{1/3} (t-g(r))^{2/3} \quad . \quad (1.1.13)$$

ii)  $f > 0$

De (1.1.10) temos então:

$$t = \int \frac{R dR}{\sqrt{R^2 f(r) + RF(r)}}$$

$$t = \left[ \frac{\sqrt{R^2 f + RF}}{f} - \frac{F}{2f} \int \frac{dR}{\sqrt{R^2 f + RF}} \right]$$

$$t = \left[ \frac{\sqrt{R^2 f + RF}}{f} - \frac{F}{2f^{3/2}} \ln (2\sqrt{f} \sqrt{R^2 f + RF} + 2fR + F) + t_0(r) \right] \quad (1.1.14)$$

tal que  $t_0(r)$  é uma função arbitrária da integração.  
Esta expressão só tem solução em forma paramétrica.

Se

$$R = \frac{F}{2f} (\cosh \eta - 1) \quad (1.1.15)$$

tem-se:

$$\sqrt{R^2 f + RF} = \frac{F}{2f^{1/2}} \sinh \eta$$

Com estas expressões, a eq. (1.1.14) fica:

$$t = \frac{F}{2f^{3/2}} \left[ \sinh \eta - \ln (F \sinh \eta + F(\cosh \eta - 1) + F) + \frac{2f^{3/2}}{F} t_0(r) \right]$$

$$t = \frac{F}{2f^{3/2}} \left\{ \sinh \eta - \ln \left[ F \left( \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2} + \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2} \right) \right] + \frac{2f^{3/2}}{F} t_0(r) \right\}$$

$$t = \frac{F}{2f^{3/2}} \left\{ \sinh \eta - \eta - \ln F + \frac{2f^{3/2}}{F} t_0(r) \right\} \quad (1.1.16)$$

iii)  $f < 0$

Para este caso, a expressão da integral (1.1.10) será a mesma que no caso anterior, mas a solução será dada por:

$$t = \left[ \frac{\sqrt{R^2 f + RF}}{f} - \frac{F}{2(-f)^{3/2}} \arcsin \left( 1 + \frac{2fR}{F} \right) + t_0(r) \right] \quad (1.1.17)$$

Da mesma forma que anteriormente, se  $R = \frac{F}{-2f} [1 - \cos \eta]$  (1.1.18)

logo,

$$\sqrt{R^2 f + RF} = \frac{F}{2(-f)^{3/2}} \sqrt{\sin^2 \eta} \quad ,$$

a expressão acima se escreve:

$$t = \frac{F}{2(-f)^{3/2}} \left[ -\sqrt{\sin^2 \eta} - \arcsin \cos \eta + \frac{2(-f)^{3/2}}{F} t_0(r) \right]$$

Se  $\eta$  estiver no primeiro quadrante,

$$t = \frac{F}{2(-f)^{3/2}} \left[ -\sin \eta + \left(\eta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2(-f)^{3/2}}{F} t_0(r) \right]$$

$$t = \frac{F}{2(-f)^{3/2}} \left[ -\sin \eta + \eta + \frac{2(-f)^{3/2}}{F} t_0(r) - \frac{\pi}{2} \right] \quad . \quad (1.1.19)$$

## 1.2 - DEFINIÇÃO DO CONCEITO FUNÇÃO MASSA

Neste tópico iremos estudar de que forma podemos associar uma dada função de coordenadas à massa do corpo que gera o campo gravitacional.

Para tal será necessário introduzirmos um outro sistema de coordenadas, denominado de Coordenadas de Schwarzschild. Neste sistema, no caso de termos simetria esférica, o elemento de linha será escrito na forma:

$$ds^2 = e^\alpha d\tau^2 - e^\beta dR^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (1.2.1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são funções de  $R$  e  $\tau$ .

Escrevamos as equações de campo para esta métrica. Podemos fazer isto de uma forma direta, utilizando o Apêndice A e as seguintes modificações:

- i) identificamos  $t$  com  $\tau$  e  $r$  com  $R$ , tal que as derivadas  $(\cdot)$  e  $(\cdot)$  passem a ser denotadas por 1 e 0. Por exemplo, a derivada em relação a  $t$  da função  $R^2$   $((R^2)^\cdot)$ , escrever-se-á como



$(R^2)_0$  e será identicamente nula, já que  $R$  e  $\tau$  são independentes;

ii) a função  $\nu$  será identificada com a função  $\alpha$ , o mesmo ocorrendo com  $\lambda$  e  $\beta$ ;  $e^\mu$  e  $R^2$ .

Com as condições acima, as componentes em tetradas do tensor de Einstein  $G_{(A)(B)}$  (eqs. (A.15)) escrevem-se:

$$G_{(0)(0)} = -\left(-\frac{2}{R^2} + \frac{3}{R^2} - \frac{\beta_1}{R}\right) e^{-\beta} + \frac{1}{R^2}$$

$$G_{(1)(1)} = \left(\frac{1}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R}\right) e^{-\beta} - \frac{1}{R^2}$$

$$G_{(2)(2)} = G_{(3)(3)} = \left(\frac{\alpha_{11}}{2} + \frac{(\alpha_1)^2}{4} - \frac{\alpha_1 \beta_1}{4} - \frac{1}{R^2} - \frac{\beta_1}{2R} + \frac{\alpha_1}{2R} + \frac{1}{R^2}\right) e^{-\beta} + \\ - \left(\frac{\beta_{00}}{2} + \frac{(\beta_0)^2}{4} - \frac{\beta_0 \alpha_0}{4}\right) e^{-\alpha}$$

$$G_{(0)(1)} = \frac{\beta_0}{R} e^{-\alpha/2} e^{-\beta/2}$$

Com este tipo de métrica, vê-se que  $G^{(0)}_{(0)} = G^0_0$ ,  $G^{(1)}_{(1)} = G^1_1$ ,  $G^{(2)}_{(2)} = G^2_2$ ,  $G^{(3)}_{(3)} = G^3_3$  e  $G^{(0)}_{(1)} e^{-\alpha} = G^0_1$ . Então as equações de campo serão escritas na forma:

$$8\pi k \bar{T}^0_0 = -\left(\frac{1}{R^2} - \frac{\beta_1}{R}\right) e^{-\beta} + \frac{1}{R^2} \quad (1.2.2-1)$$

$$8\pi k \bar{T}^1_1 = -\left(\frac{1}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R}\right) e^{-\beta} + \frac{1}{R^2} \quad (1.2.2-2)$$

$$8\pi k \bar{T}^2_2 = 8\pi k \bar{T}^3_3 = -\left(\frac{\alpha_{11}}{2} + \frac{(\alpha_1)^2}{4} - \frac{\alpha_1 \beta_1}{4} - \frac{\beta_1}{2R} + \frac{\alpha_1}{2R}\right) e^{-\beta} + \\ + \left(\frac{\beta_{00}}{2} + \frac{(\beta_0)^2}{4} - \frac{\beta_0 \alpha_0}{4}\right) e^{-\alpha} \quad (1.2.2-3)$$

$$8\pi k \bar{T}^0_1 = e^{-\alpha} \frac{\beta_0}{R} \quad (1.2.2-4)$$

onde  $\bar{T}^\alpha_\beta$  é a designação do tensor momento energia quando escrito em coordenadas de Schwarzschild.

As equações acima podem ser integradas na região do vácuo ( $\bar{T}^\mu_\nu = 0$ )<sup>(3)</sup>. Então, neste caso, as eqs. (1.2.2) ficam:

$$\left(\frac{\beta_1}{R} - \frac{1}{R^2}\right)e^{-\beta} + \frac{1}{R^2} = 0 \quad (1.2.3-1)$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{R} + \frac{1}{R^2}\right)e^{-\beta} - \frac{1}{R^2} = 0 \quad (1.2.3-2)$$

$$\left(\alpha_{11} + \frac{(\alpha_1)^2}{2} - \frac{\alpha_1\beta_1}{2} - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\alpha_1}{R}\right)e^{-\beta} = \left(\beta_{00} + \frac{(\beta_0)^2}{2} - \frac{\beta_0\alpha_0}{2}\right)e^{-\alpha} \quad (1.2.3-3)$$

$$\beta_0 = 0 \quad (1.2.3-4)$$

Pode-se ver que a eq. (1.2.3-3) é o resultado das outras três. Somando as eqs. (1.2.3-1) e (1.2.3-2) encontramos:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0$$

que integrando em relação a R nos dá  $\alpha + \beta = f(\tau)$ , onde  $f(\tau)$  é uma função arbitrária da coordenada  $\tau$ . Temos porém da equação (1.2.3-4), que  $\beta$  é apenas uma função de R, tal que podemos escrever  $e^\alpha = e^{-\beta} e^{f(\tau)}$ , ou seja, como o produto de duas funções uma apenas de R e outra de  $\tau$  somente. Substituindo este valor de  $e^\alpha$  na métrica da forma (1.2.1), temos então:

$$ds^2 = e^{-\beta(R)} e^{f(\tau)} d\tau^2 - e^\beta dR^2 - R^2 d\Omega^2, \quad (1.2.4)$$

donde vemos que podemos redefinir uma outra coordenada temporal,

$d\tau' = e^{f(\tau)/2} d\tau$ . Devido a esta arbitrariedade, a função  $f(\tau)$  será escolhida como nula, sem que haja perda de qualquer generalidade. Então ficamos com:

$$\alpha + \beta = 0 \quad (1.2.5)$$

A eq. (1.2.3.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(-Re^{-\beta})_1 + 1 = 0 .$$

Integrando a equação acima,

$$e^{-\beta} = 1 + \frac{a}{R} ,$$

onde  $a$  é uma constante de integração, já que  $\beta$  é uma função de  $R$  apenas.

Então, ficamos com:

$$e^{\alpha} = e^{-\beta} = 1 + \frac{a}{R} . \quad (1.2.6)$$

Analisando o resultado acima vemos que para distâncias muito grandes das massas dos corpos ( $R \rightarrow \infty$ ), onde o campo gravitacional é fraco, o valor de  $e^{\alpha}$  e  $e^{-\beta}$  tendem a 1. Ou seja, assintoticamente o espaço-tempo é chato (Minkowskiano). Sabemos porém<sup>(4)</sup> que o tensor métrico de um campo gravitacional fraco pode ser descrito como uma perturbação do tensor métrico de Minkowski:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon\gamma_{\alpha\beta} \quad (1.2.7)$$

onde apenas os termos em primeira ordem de  $\epsilon$  serão considerados.

No caso de termos o tensor métrico independente do tempo e  $\epsilon\gamma_{\alpha\beta}$  apresentar uma perturbação independente do tempo muito pequena (oriunda do campo gravitacional de um certo corpo e que se anula a grandes distâncias), utilizando a equação da

geodésica e as equações de movimento de Newton, chega-se a <sup>(5)</sup>:

$$g_{00} = 1 + 2\phi \quad (1.2.8)$$

onde  $\phi$  é o potencial clássico, sendo igual a  $\frac{\epsilon^{\gamma}_{00}}{2}$ . No caso de um corpo esfericamente simétrico com massa total gravitacional  $m$ , o potencial produzido será <sup>(6,3)</sup>:

$$\phi = - \frac{km}{R} \quad (1.2.9)$$

E a componente  $g_{00}$  (1.2.8) será então escrita:

$$g_{00} = 1 - \frac{2km}{R} \quad (1.2.10)$$

Comparando a equação acima com a (1.2.6) vemos que a constante  $\bar{a} = -2km$  e que tem dimensões de comprimento, sendo denominada de raio gravitacional ( $R_g$ ). Deve-se observar que a identificação da constante "a" com uma grandeza proporcional à massa do corpo que cria o campo gravitacional, só foi possível porque o espaço-tempo é assintoticamente chato, podendo então ser utilizado o conceito newtoniano clássico de massa.

De que forma poderemos relacionar esta massa  $m$  com o tensor momento-energia  $\bar{T}^{\alpha}_{\beta}$  ?

Multiplicando a eq. (1.2.2-1) por  $R^2$  temos:

$$(1 - \beta_1 R) e^{-\beta} = 1 - 8\pi k \bar{T}^0_0 R^2 .$$

Integrando a equação acima, com a condição de  $\beta(R=0) = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} R e^{-\beta} \Big|_0^R &= R \Big|_0^R - 8\pi k \int_0^R \bar{T}^0_0 R^2 dR \\ e^{-\beta} &= 1 - \frac{8\pi k}{R} \int_0^R \bar{T}^0_0 R^2 dR . \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Se a massa  $m$  do corpo que produz o campo está contida num raio  $R_0$ ,  $\bar{T}^0_0 = 0$  para  $R > R_0$ . Então a equação (1.2.11), para  $R > R_0$  nos fornece:

$$e^{-\beta} = \left\{ 1 - \frac{8\pi k}{R} \int_0^{R_0} \bar{T}^0_0 R^2 dR \right\} . \quad (1.2.12)$$

Logo, para a região do vazio ( $\bar{T}^\alpha_\beta = 0$ ), comparando a eq. (1.2.12) com (1.2.6) e (1.2.10), temos <sup>(30)</sup>:

$$e^{-\beta} = 1 - \frac{2km}{R} = 1 - \frac{8\pi k}{R} \int_0^{R_0} \bar{T}^0_0 R^2 dR$$

$$m = 4\pi \int_0^{R_0} \bar{T}^0_0 R^2 dR . \quad (1.2.13)$$

Devemos observar que  $4\pi R^2 dR$  não é o elemento de volume próprio, sendo esta massa aquela medida por um observador externo, estando já incluído neste resultado o defeito de massa, ou seja, a perda de massa devido à energia de ligação gravitacional.

Podemos generalizar o resultado acima tal que a massa medida por um observador no interior do corpo situado a uma distância  $R$  ( $R < R_0$ ) do centro de simetria seria dada pela função massa:

$$m(R) = 4\pi \int_0^R \bar{T}^0_0 R^2 dR . \quad (1.2.14)$$

Esta função massa pode ser escrita em função das coordenadas comovertes  $r$  e  $t$ . Para o elemento de linha escrito de uma forma mais geral em coordenadas comovertes,

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - R^2 d\Omega^2 , \quad (A-1)$$

tendo  $e^\mu$  sido identificado com  $R^2$ ,

as componentes do tensor métrico:  $e^\lambda$ ,  $e^\nu$  e  $R^2$  estarão relacionadas com a componente do tensor métrico em coordenadas de Schwarzschild,  $e^\beta$  de (1.2.1), através da seguinte equação, via uma transformação de coordenadas (veja Apêndice B, seção B.1) <sup>(7)</sup>:

$$e^{-\beta} = e^{-\lambda} R'^2 - e^{-\nu} \dot{R}^2 \quad (B-3)$$

Como já temos visto nesta seção,

$$e^{-\beta} = 1 - \frac{2km}{R} .$$

Comparando estas duas equações <sup>(7,8)</sup> tiramos:

$$m = \frac{1}{2k} R (1 + e^{-\nu} \dot{R}^2 - e^{-\lambda} R'^2) \quad (1.2.15)$$

As derivadas em relação a  $r$  e a  $t$  desta função  $m(r,t)$  podem ser expressas em termos das componentes do tensor momento energia quando escrito em coordenadas comoventes  $(T^\alpha_\beta)$  <sup>(8)</sup>. Vejamos de que forma podemos fazê-lo. Das eqs. (A-12), a componente com índice tensorial  $R^2_{323}$  é dada pela seguinte expressão:

$$R^2_{323} = -g_{33} \frac{1}{R^2} (1 + \dot{R}^2 e^{-\nu} - R'^2 e^{-\lambda})$$

ou ainda,

$$R^3_{232} = -g_{22} \frac{1}{R^2} (1 + \dot{R}^2 e^{-\nu} - R'^2 e^{-\lambda})$$

$$R^3_{232} = (1 + \dot{R}^2 e^{-\nu} - R'^2 e^{-\lambda}) \quad . \quad (1.2.16)$$

Comparando (1.2.16) com (1.2.15), vemos que a função massa  $m$  pode ser escrita na forma:

$$km(r,t) = \frac{R}{2} R^3_{232} \quad . \quad (1.2.17)$$

Derivando esta expressão em relação a  $t$  e a  $r$ ,

$$km(r,t)_{,\rho} = \frac{1}{2} R_{,\rho} R^3_{232} + \frac{R}{2} R^3_{232,\rho}$$

onde  $\rho = 0,1$ ,

Para escrevermos de uma maneira melhor, vamos utilizar a identidade de Bianchi:

$$R^3_{232;\rho} + R^3_{22\rho;3} + R^3_{2\rho3;2} = 0$$

onde o índice  $\rho$  vale 1 ou 0. Utilizando os símbolos de Christoffel (A.12) e (A.20),

$$R^3_{232;\rho} = R^2_{232,\rho} + \cancel{\Gamma^3_{\rho\alpha} R^\alpha_{232}} - 2\Gamma^\alpha_{\rho 2} R^3_{\alpha 3 2} - \cancel{\Gamma^\alpha_{\rho 3} R^3_{2\alpha 2}}$$

$$R^3_{232;\rho} = R^3_{232,\rho} - 2\Gamma^2_{\rho 2} R^3_{232}$$

$$R^3_{22\rho;3} = \cancel{R^3_{22\rho,3}} + \Gamma^3_{3\alpha} R^\alpha_{22\rho} - \cancel{\Gamma^\alpha_{32} R^3_{\alpha 2\rho}} - \cancel{\Gamma^\alpha_{32} R^3_{2\alpha\rho}} - \Gamma^\alpha_{\rho 3} R^3_{22\alpha}$$

$$R^3_{22\rho;3} = \Gamma^3_{3\alpha} R^\alpha_{22\rho} - \Gamma^3_{3\rho} R^3_{223}$$

$$R^3_{2\rho 3;2} = \cancel{R^3_{2\rho 3,2}} + \cancel{\Gamma^3_{\alpha 2} R^\alpha_{2\rho 3}} - \Gamma^\alpha_{22} R^3_{\alpha\rho 3} - \Gamma^\alpha_{2\rho} R^3_{2\alpha 3} - \Gamma^\alpha_{23} R^3_{2\rho\alpha}$$

$$R^3_{2\rho 3;2} = -\Gamma^\alpha_{22} R^3_{\alpha\rho 3} - \Gamma^2_{2\rho} R^3_{223}$$

Substituindo estes resultados na identidade de Bianchi,

$$R^3_{232,\rho} - 2\Gamma_{\rho 2}^2 R^3_{232} + \Gamma_{3\alpha}^3 R^\alpha_{22\rho} - \Gamma_{3\rho}^3 R^3_{223} + \\ - \Gamma_{22}^\alpha R^3_{\alpha\rho 3} - \Gamma_{2\rho}^2 R^3_{223} = 0$$

$$R^3_{232,\rho} = 2\Gamma_{2\alpha}^2 R^\alpha_{2\rho 2} \quad (1.2.18)$$

jã que  $\Gamma_{2\alpha}^2 R^\alpha_{2\rho 2} = \Gamma_{22}^\alpha R^3_{\alpha\rho 3}$  e  $\Gamma_{3\rho}^3 = \Gamma_{2\rho}^2$ .

Substituindo (1.2.18) em (1.2.17), temos:

$$k_{m,\rho} = \frac{1}{2}(R_{,\rho} R^3_{232} + 2\Gamma_{2\alpha}^2 R R^\alpha_{2\rho 2})$$

ou ainda:

$$k\dot{m}(r,t) = \frac{1}{2} (\dot{R}R^3_{232} + 2\dot{R}R^0_{202} + 2R'R^1_{202})$$

$$km'(r,t) = \frac{1}{2} (R'R^3_{232} + 2\dot{R}R^0_{212} + 2R'R^1_{212})$$

Utilizando as eqs. (A-23), obtemos:

$$k\dot{m}(r,t) = \frac{R^2}{2} (\dot{R}G^1_1 - R'G^1_0)$$

$$km'(r,t) = \frac{R^2}{2} (R'G^0_0 - \dot{R}G^0_1)$$

ou expressas em termos de  $T^\alpha_\beta$ , através das equações de campo  $G^\alpha_\beta = 8\pi k T^\alpha_\beta$ ,

$$\dot{m}(r,t) = 4\pi R^2 (\dot{R}T^1_1 - R'T^1_0) \quad (1.2.19-a)$$

$$m'(r,t) = 4\pi R^2 (R'T^0_0 - \dot{R}T^0_1) \quad (1.2.19-b)$$

Das expressões acima, vemos que  $m$  é constante no espaço vazio.

Para o universo de Tolman, seção (1.1), tñhamos as seguintes condições:



$$v = 0$$

$$T^0_0 = \rho \quad (\text{única componente não nula}) \quad (1.1.3-a)$$

$$e^\lambda = \frac{R'^2}{1+f(r)} \quad (1.1.5)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{F(r)}{R} + f(r) \quad (1.1.9)$$

$$8\pi k\rho = 8\pi kT^0_0 = \frac{F'(r)}{R^2 R'} \quad (1.1.11)$$

Substituindo estes resultados na eq. (1.2.15), encontra-se:

$$km(r,t) = \frac{R}{2} \left( 1 + \frac{F(r)}{R} + f(r) - 1 - f(r) \right)$$

ou seja,

$$F(r) = 2km(r) \quad (1.2.20)$$

Donde vemos que a função massa é apenas função da variável  $r$ . De fato, se examinarmos a eq. (1.2.19-a), vemos que o lado direito é nulo em virtude da condição (1.1.3-a). Utilizando esta condição, a eq. (1.2.19-b) nos fornece:

$$\begin{aligned} m'(r) &= 4\pi R^2 R' T^0_0 \\ m(r) &= 4\pi \int_0^r T^0_0 R^2 R' dr \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

com a condição imposta de  $m(0) = 0$ . Resultado idêntico é obtido da condição (1.1.11) juntamente com a relação (1.2.20).

Com a relação (1.2.20) podemos reescrever a equação (1.1.9):

$$\dot{R}^2 = \frac{2km(r)}{R} + f(r) \quad (1.2.22)$$

O significado da função  $f(r)$  pode ser encontrado<sup>(9)</sup> na equação acima, se notarmos que  $R(t,r)$  pode ser considerada como definin

do uma distância do ponto  $(t,r)$  ao centro de simetria. Isto é baseado no fato que a esfera de  $r, t = \text{constantes}$  tem a área  $4\pi R^2$ . Então  $\dot{R}$  é a velocidade radial da partícula no ponto  $(t,r)$ . A eq. (1.2.22) expressa agora o fato que, quando  $f = 0$ , a partícula tem velocidade  $\dot{R} = 0$  em  $R \rightarrow \infty$ . Este é o caso que na teoria Newtoniana é chamado de movimento parabólico. Se  $f(r) > 0$ , as partículas alcançam  $R \rightarrow \infty$  com uma velocidade  $\dot{R} \neq 0$ : movimento hiperbólico. Se porém  $f(r) < 0$ , a partícula pode chegar apenas até um ponto máximo de distância  $R_{\text{máx}}$  determinada pela equação:

$$\frac{2km(r)}{R_{\text{máx}}} = -f(r)$$

no qual o sinal da velocidade muda: expansão máxima seguida de contração. Este é o caso do movimento elíptico.

Podemos então associar o termo  $\dot{R}^2$  à energia cinética, o  $\frac{-2km(r)}{R}$  à energia potencial e a função  $f(r)$  à energia total.

## CAPÍTULO 2

### CONDIÇÕES DE CONTORNO

Este capítulo tem por finalidade esclarecer o problema das condições de contorno para a ligação de métricas, correspondentes a duas regiões diferentes do espaço-tempo, através da hipersuperfície que as divide. Este problema foi estudado por : Darmois<sup>(10)</sup> (1927), O'Brien e Synge<sup>(11)</sup> (1952) e Lichnerowicz<sup>(12)</sup> (1955), e posteriormente por Israel<sup>(13)</sup> (1958), Robson<sup>(14)</sup> (1972) e Bonnor e Vickers<sup>(15)</sup> (1981). Os últimos demonstraram que as condições de Darmois e Lichnerowicz são equivalentes, ao passo que as de O'Brien e Synge são mais restritivas que as outras duas, contrariamente ao resultado obtido anteriormente por Israel e Robson.

Antes de estudarmos porém, com mais detalhes este problema, iremos recordar alguns aspectos matemáticos referentes à questão.

#### 2.1 - PRELIMINARES<sup>(16, 17)</sup>

Dado o conjunto de vetores  $\{e_\alpha\}$ , tangentes e linearmente independentes, podemos escrever um deslocamento infinitesimal como:

$$d\vec{s} = e_\alpha dx^\alpha$$

tal que

$$ds^2 = e_\alpha \cdot e_\beta dx^\alpha dx^\beta ,$$

ou seja:

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta \quad (2.1.1)$$

Iremos sempre trabalhar em bases coordenadas, tal que os vetores bases  $e_\alpha$  podem ser expressos na forma:

$$e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (2.1.2)$$

ou seja,

$$[e_\alpha, e_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma = 0 \implies c_{\alpha\beta}^\gamma = 0 \quad (2.1.3)$$

As bases duais, as 1-formas  $\omega^\alpha$ , são definidas através da relação:

$$\langle \omega^\alpha, e_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta \quad (2.1.4)$$

Um vetor qualquer  $u$  é escrito em termos de suas componentes e dos vetores tangentes como:

$$u = u^\alpha e_\alpha$$

sendo  $u^\alpha = \langle \omega^\alpha, u \rangle$ .

A derivada covariante de um tensor  $\binom{1}{1}$ ,  $T = T^\alpha_\beta e_\alpha \otimes \omega^\beta$ , será:

$$\nabla_{e_\gamma} T \equiv \nabla_\gamma T = \nabla_\gamma (T^\alpha_\beta e_\alpha \otimes \omega^\beta) ,$$

tal que esta derivada contém contribuições de  $\nabla_\gamma e_\alpha$ ,  $\nabla_\gamma \omega^\beta$  assim como a de  $\nabla_\gamma T^\alpha_\beta = T^\alpha_{\beta,\gamma}$ .

Para computar as contribuições de  $\nabla_\gamma e_\alpha$  e  $\nabla_\gamma \omega^\beta$ , isto é, a expansão, contração, rotação dos vetores bases das 1-for

mas, define-se os coeficientes de conexão:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv \langle \omega^{\alpha}, \nabla_{\gamma} e_{\beta} \rangle, \quad (2.1.5a)$$

ou seja, a componente  $\alpha$  da mudança em  $e_{\beta}$  relativa ao transporte paralelo ao longo de  $e_{\gamma}$ .

Pode-se mostrar também (18), que:

$$\langle \nabla_{\gamma} \omega^{\alpha}, e_{\beta} \rangle = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}. \quad (2.1.5b)$$

Estes coeficientes de conexão em geral não são simétricos nos dois últimos índices. De fato, tem-se:

$$2\Gamma_{(\alpha\beta)\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} \quad (2.1.6)$$

$$2\Gamma_{\rho[\underline{\mu\nu}]} = c_{\mu\nu\rho}$$

onde

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\rho} \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} \quad \text{e} \quad c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\nu}^{\beta} g_{\beta\rho}.$$

Como, porém, estamos trabalhando em bases coordenadas,  $c_{\mu\nu\rho} = 0$  e pela última equação acima vemos que a parte antissimétrica de  $\Gamma_{\rho\mu\nu}$  se anula. Então, de (2.1.5a), temos que:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv \langle \omega^{\alpha}, \nabla_{\gamma} e_{\beta} \rangle = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \equiv \langle \omega^{\alpha}, \nabla_{\alpha} e_{\gamma} \rangle,$$

ou seja,

$$\nabla_{\gamma} e_{\alpha} = \nabla_{\alpha} e_{\gamma}. \quad (2.1.7)$$

Então com estes resultados, podemos escrever:

$$\nabla_{\gamma} T = (T^{\alpha}_{\beta;\gamma}) e^{\beta} \otimes \omega_{\alpha}, \quad (2.1.8)$$

onde

$$T^{\alpha}_{\beta;\gamma} = T^{\alpha}_{\beta,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma} T^{\rho}_{\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\rho} T^{\alpha}_{\rho}.$$

Também temos:

$$\nabla_u T = (T^\alpha_{\beta;\gamma} u^\gamma) e^\beta \otimes \omega_\alpha \quad (2.1.9)$$

onde o vetor  $u = u^\gamma e_\gamma$  e

$$\nabla_\gamma T^\alpha_\beta = T^\alpha_{\beta,\gamma} \quad , \quad (2.1.10)$$

juntamente com as propriedades de  $\nabla$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{au} T + \nabla_{bv} T &= a \nabla_u T + b \nabla_v T \\ \nabla_u (S+M) &= \nabla_u S + \nabla_u M \\ \nabla_u (A \otimes B) &= (\nabla_u A) \otimes B + A \otimes (\nabla_u B) \\ \nabla_u (fA) &= (\nabla_u f)A + f(\nabla_u A) \\ \nabla_u g &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

## 2.2 - CURVATURA EXTRÍNSECA DE UMA SUPERFÍCIE $\Sigma$ <sup>(16,18,19)</sup>

Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície em  $V^4$ , que divide o espaço tempo em 2 regiões, sendo  $u^{(i)}$  as coordenadas intrínsecas de  $\Sigma$  e  $x^\alpha$  as coordenadas de  $V^4$ , tal que em  $\Sigma$ ,  $x^\alpha$  e  $u^{(i)}$  estão relacionadas por:

$$x^\alpha = x^\alpha(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) \quad . \quad (2.2.1)$$

Apesar dos índices latinos irem de 1 a 3 apenas, eles não especificam o caráter espacial-temporal das coordenadas  $u^{(i)}$ , denotando apenas a existência de somente três coordenadas.

Com os 3 vetores linearmente independentes tangentes  $\bar{a}$  a  $\Sigma$ ,

$$e_{(i)} = \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} \quad (2.2.2)$$

podemos escrever para um deslocamento infinitesimal em  $\Sigma$ ,

$$ds_{\Sigma} = e_{(i)} du^{(i)}$$

ou

$$ds_{\Sigma}^2 = e_{(i)} \cdot e_{(j)} du^{(i)} du^{(j)} \quad , \quad (2.2.3)$$

onde o tensor métrico da superfície  $\bar{e}$  é dado por

$$\gamma_{(i)(j)} = e_{(i)} \cdot e_{(j)} \quad .$$

Com a ajuda de (2.2.1) os vetores  $e_{(i)}$  podem ser escritos como uma combinação linear dos vetores  $e_{\alpha}$ , definidos na seção anterior:

$$e_{(i)} = \frac{\partial}{\partial u^{(i)}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{(i)}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = e^{\alpha}_{(i)} \cdot e_{\alpha} \quad (2.2.4)$$

onde

$$e^{\alpha}_{(i)} \equiv \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{(i)}} \equiv \langle \omega^{\alpha}, e_{(i)} \rangle \quad .$$

A métrica de  $V^4$ ,

$$ds^2 = e_{\alpha} \cdot e_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \equiv g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

se reduz em  $\Sigma \bar{a}$

$$ds_{\Sigma}^2 = \gamma_{(i)(j)} du^{(i)} du^{(j)} \quad ,$$

já que em  $\Sigma$  ,

$$dx^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^{(i)}} du^{(i)} = e^{\alpha}_{(i)} du^{(i)} \quad ,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} ds_{\Sigma}^2 &= g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(i)} e^{\beta}_{(j)} du^{(i)} du^{(j)} \\ &= e_{(i)} \cdot e_{(j)} du^{(i)} du^{(j)} \quad , \end{aligned}$$

onde

$$e_{(i)} \cdot e_{(j)} = \gamma(i)(j) = g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(i)} e^{\beta}_{(j)} \quad (2.2.5)$$

Seja  $n$  o vetor unitário normal a  $\Sigma$ , onde

$$n \cdot n = \epsilon = \begin{cases} +1 & (\text{se } n \text{ é tipo-tempo}) \\ -1 & (\text{se } n \text{ é tipo-espaço}) \end{cases}$$

O vetor  $n$  pode ser expandido em termos dos vetores base  $e_{\alpha}$ ,

$$n = n^{\alpha} e_{\alpha}$$

porém

$$n \cdot e_{(i)} = 0 \implies n^{\alpha} e_{\alpha(i)} = 0 \quad (2.2.6)$$

já que,

$$n \cdot e_{(i)} = (n^{\alpha} e_{\alpha}) \cdot (e^{\beta}_{(i)} e_{\beta}) = n^{\alpha} e^{\beta}_{(i)} g_{\alpha\beta} = 0.$$

Estamos portanto, excluindo o caso em que  $\Sigma$  seja uma hipersuperfície nula.

Podemos com este vetor normal  $n$ , construir o tensor de projeção:

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \epsilon n_{\alpha} n_{\beta} \quad (2.2.7)$$

Ele é de fato um tensor de projeção, já que

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} h^{\beta}_{\nu} &= (g_{\alpha\beta} - \epsilon n_{\alpha} n_{\beta})(\delta^{\beta}_{\nu} - \epsilon n^{\beta} n_{\nu}) \\ &= g_{\alpha\nu} + \epsilon n_{\alpha} n_{\nu} - \epsilon n_{\alpha} n_{\nu} - \epsilon n_{\alpha} n_{\nu} \\ &= g_{\alpha\nu} - \epsilon n_{\alpha} n_{\nu} \\ &= h_{\alpha\nu} \end{aligned} \quad (2.2.8a)$$



Além de ser simétrico,  $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$ , ele projetará todos os objetos geométricos de  $V^4$  em  $\Sigma$ , pois

$$h_{\alpha\beta}n^\beta = g_{\alpha\beta}n^\beta - \epsilon^2 n_\alpha = 0 \quad (2.2.8b)$$

e o seu traço

$$h = h^\alpha_\alpha = \delta^\alpha_\alpha - \epsilon^2 = 3 \quad (2.2.8c)$$

O elemento de linha  $ds^2$  pode então ser reescrito da seguinte forma:

$$ds^2 = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \epsilon n_\mu n_\nu dx^\mu dx^\nu \quad (2.2.9)$$

Em  $\Sigma$  teremos então:

$$\begin{aligned} ds^2_\Sigma &= h_{\mu\nu}e^\mu_{(i)}e^\nu_{(j)}du^{(i)}du^{(j)} + \underbrace{\epsilon n_\mu n_\nu e^\mu_{(i)}e^\nu_{(j)}}_{\substack{\text{(pela eq. (2.2.6))} \\ \nearrow 0}} du^{(i)}du^{(j)} \\ &= \gamma_{(i)(j)} du^{(i)}du^{(j)} \end{aligned}$$

ou seja,

$$h_{\mu\nu}e^\mu_{(i)}e^\nu_{(j)} = \gamma_{(i)(j)} \quad (2.2.10)$$

Seja  $A$  um vetor em  $V^4$ , ou seja:

$$A = A^\alpha e_\alpha \quad (2.2.11)$$

Ele pode ser decomposto em duas componentes, uma paralela e outra ortogonal a  $\Sigma$ :

$$A = \tilde{A} + (A \cdot n)n \quad (2.2.12)$$

onde  $\tilde{A} = A^{(i)}e_i \equiv \tilde{A}^\gamma e_\gamma$ .

Temos ainda,

$$A \cdot e_i = (A^\alpha e_\alpha) \cdot (e^\beta_{(i)} e_\beta) = A^\alpha g_{\alpha\beta} e^\beta_{(i)} = A_\beta e^\beta_{(i)} = A_i \quad (2.2.13a)$$

$$\tilde{A}_\gamma = \tilde{A} \cdot e_\gamma = (A^{(i)} e_{(i)}) \cdot e_\gamma = A^{(i)} e_{(i)}^\alpha e_\alpha \cdot e_\gamma = A^{(i)} e_{\gamma(i)} \quad (2.2.13b)$$

$$\tilde{A} \cdot n = \tilde{A}^\gamma n_\gamma = 0 \quad (2.2.13c)$$

como  $\gamma_{(i)(j)} \gamma^{(j)(\ell)} = \delta_{(i)}^{(\ell)}$ , temos de (2.2.5) que

$$e_{(i)}^\alpha e_{(j)}^\beta g_{\alpha\beta} \gamma^{(j)(\ell)} = e_{(i)}^\alpha e_{\alpha}^{(\ell)} = \delta_{(i)}^{(\ell)} \quad , \quad (2.2.14)$$

pois os índices latinos são levantados ou abaixados através do tensor métrico  $\gamma_{(i)(j)}$ .

Então de (2.2.13b) juntamente com (2.2.14), tira-se que:

$$\tilde{A}_\gamma e^\gamma_{(j)} = A^{(i)} e_{(i)\gamma} e^\gamma_{(j)} = A_{(i)} e^{(i)}_{\gamma} e^\gamma_{(j)} = A_{(j)} \quad (2.2.13d)$$

Utilizando a expressão (2.2.12) e os resultados acima e calculando o produto escalar  $A \cdot A$ , obtemos:

$$\begin{aligned} A \cdot A &= A^\alpha A^\beta e_\alpha e_\beta = A^\alpha A^\beta g_{\alpha\beta} = (A^{(i)} e_{(i)}) \cdot (A^{(j)} e_{(j)}) + \\ &+ (A \cdot n)^2 (n \cdot n) = A^\alpha A^\beta e_\alpha^{(i)} e_\beta^{(j)} e_i \cdot e_j + \\ &+ \epsilon A^\alpha A^\beta n_\alpha n_\beta = (e_\alpha^{(i)} e_{\beta(i)} + \epsilon n_\alpha n_\beta) A^\alpha A^\beta \quad , \end{aligned}$$

e como  $A$  é um vetor qualquer, tem-se:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= e_\alpha^{(i)} e_{\beta(i)} + \epsilon n_\alpha n_\beta \\ e_\alpha^{(i)} e_{\beta(i)} &= g_{\alpha\beta} - \epsilon n_\alpha n_\beta = h_{\alpha\beta} \quad , \quad (2.2.15) \end{aligned}$$

Como vimos,  $\tilde{A}$  é a projeção do vetor  $A$  em  $\Sigma$ . A derivada covariante intrínseca de  $\tilde{A}$  com respeito a  $u^{(i)}$  será a pro-

jeção do vetor (não tangencial a  $\Sigma$ )  ${}^{(4)}\nabla_{e_{(i)}} \hat{A}$  em  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} A_{(j)\parallel(i)} &= e_{(j)} \cdot {}^{(4)}\nabla_{e_{(i)}} \hat{A} = A_{(j)\parallel(i)} - {}^{(3)}\Gamma_{(j)(i)}^{(\ell)} A_{(\ell)} = \\ &= e_{(j)} \cdot {}^{(3)}\nabla_{e_{(i)}} \hat{A} \quad , \quad (2.2.16) \end{aligned}$$

onde  ${}^{(3)}\Gamma_{(j)(i)}^{(\ell)}$  são calculados com o tensor métrico da hipersu-  
perfície,  $\gamma_{(i)(j)}$ , e a barra vertical distingue esta derivada co-  
variante da derivada covariante calculada em relação a 4-geome-  
tria, tal que  $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$  e  $\gamma_{(i)(j)\parallel(k)} = 0$ . Os  ${}^{(4)}\nabla$  e  ${}^{(3)}\nabla$   
são os operadores tal que (ver eqs. (2.1.5)):

$${}^{(4)}\nabla_{\alpha} e_{\beta} \equiv {}^{(4)}\nabla_{e_{\alpha}} e_{\beta} \equiv {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} e_{\rho} \quad (2.2.17a)$$

$${}^{(3)}\nabla_{(i)} e_{(j)} \equiv {}^{(3)}\nabla_{e_{(i)}} e_{(j)} \equiv {}^{(3)}\Gamma_{(i)(j)}^{(\ell)} e_{(\ell)} \quad (2.2.17b)$$

onde  ${}^{(4)}\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}$  são calculados com tensor métrico de  $V^4$ ,  $g_{\alpha\beta}$ .

Com a seleção acima, e utilizando as equações (2.1.8)  
e (2.1.9), podemos estabelecer a relação entre  ${}^{(4)}\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}$  e  ${}^{(3)}\Gamma_{ij}^{\ell}$ .

$$\begin{aligned} A_{(j)\parallel(i)} &= e_{(j)} \cdot {}^{(4)}\nabla_{(i)} \hat{A} = e_{(j)} \cdot {}^{(4)}\nabla_{(i)} (\hat{A}^{\alpha} e_{\alpha}) = \\ &= (\hat{A}^{\alpha}_{;\gamma} e^{\gamma}_{(i)}) e_{\alpha} \cdot e_{(j)} = \hat{A}^{\alpha}_{;\gamma} e^{\gamma}_{(i)} e^{\beta}_{(j)} e_{\beta} \cdot e_{\alpha} = \\ &= \hat{A}^{\alpha}_{;\gamma} e^{\gamma}_{(i)} e^{\beta}_{(j)} g_{\beta\alpha} = \hat{A}_{\alpha;\gamma} e^{\alpha}_{(j)} e^{\gamma}_{(i)} = \\ &= (\hat{A}_{\alpha,\gamma} - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} \hat{A}_{\rho}) e^{\alpha}_{(j)} e^{\gamma}_{(i)} \quad (2.2.18) \end{aligned}$$

e utilizando (2.2.13b), temos:

$$\begin{aligned}
 A_{(j)||i} &= A_{(j)|i} - {}^{(3)}\Gamma_{(j)(i)}^{(k)} A_{(k)} = \\
 &= (A_{(m)} e^{(m)}_{\alpha, \gamma} e^{\alpha}(j) e^{\gamma}(i) - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha \gamma}^{\rho} \bar{A}_{\rho} e^{\alpha}(j) e^{\gamma}(i)) \\
 &= A_{(m)|i} \delta^{(m)}_{(j)} + \left[ e^{(m)}_{\alpha|i} e^{\alpha}(j) - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha \gamma}^{\rho} e_{\rho}^{(m)} e^{\alpha}(j) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot e^{\alpha}(j) e^{\gamma}(i) \right] \cdot A_{(m)} \\
 &= A_{(j)||i} + (e^{(m)}_{\alpha|i} e^{\alpha}(j) - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha \gamma}^{\rho} e_{\rho}^{(m)} e^{\alpha}(j) e^{\gamma}(i)) \cdot A_{(m)}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$-{}^{(3)}\Gamma_{(j)(i)}^{(k)} = e^{(k)}_{\alpha|i} e^{\alpha}(j) - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha \gamma}^{\rho} e_{\rho}^{(k)} e^{\alpha}(j) e^{\gamma}(i) ,$$

e levando em conta que  $e^{(k)}_{\alpha} e^{\alpha}(j) = \delta^{(k)}_{(j)}$  e, portanto,

$$(e^{(k)}_{\alpha} e^{\alpha}(j)) |i = e^{(k)}_{\alpha|i} e^{\alpha}(j) + e^{(k)}_{\alpha} e^{\alpha}(j) |i = 0 ,$$

temos então que na superfície  $\Sigma$ :

$${}^{(3)}\Gamma_{(j)(i)}^{(k)} = e^{(k)}_{\alpha} e^{\alpha}(j) |i + {}^{(4)}\Gamma_{\alpha \gamma}^{\rho} e_{\rho}^{(k)} e^{\alpha}(j) e^{\gamma}(i) \quad (2.2.19a)$$

ou ainda

$${}^{(3)}\Gamma_{(k),(j)(i)} = e^{\alpha}(k) e_{\alpha}(j) |i - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha, \beta \gamma} e^{\beta}(k) e^{\alpha}(j) e^{\gamma}(i) \quad (2.2.19b)$$

De fato, por um cálculo direto e sabendo que  $\gamma_{(k)(i)} = g_{\alpha\beta} e^{\alpha}(i) e^{\beta}(k)$  temos:

$$\begin{aligned}
 {}^{(3)}\Gamma_{(k),(i)(j)} &= \frac{1}{2} (\gamma_{(k)(i)} |j + \gamma_{(k)(j)} |i - \gamma_{(i)(j)} |k) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ e^{\alpha}(i) e^{\beta}(k) e^{\gamma}(j) (g_{\alpha\beta, \gamma} + g_{\beta\gamma, \alpha} - g_{\alpha\gamma, \beta}) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +e_{\alpha(i)}e^{\alpha}(k)(j) + e_{\alpha(k)}e^{\alpha}(i)(j) + e_{\beta(k)}e^{\beta}(j)(i) + e_{\beta(j)}e^{\beta}(k)(i) + \\
 & -e_{\alpha(i)}e^{\alpha}(j)(k) - e_{\alpha(j)}e^{\alpha}(i)(k) \Big] = \\
 & = e_{\alpha(k)}e^{\alpha}(i)(j) + {}^{(4)}\Gamma_{\beta,\alpha\gamma}e^{\beta}(k)e^{\gamma}(j)e^{\alpha}(i) \quad ,
 \end{aligned}$$

onde foi levado em conta o fato de  $e^{\alpha}(k)(i) = e^{\alpha}(i)(k)$ , proveniente da eq. (2.2.4). Este resultado é idêntico ao da eq. (2.2.19a).

O tensor de curvatura extrínseca,  $K_{(i)(j)}$ , nos diz como o vetor normal  $n$  muda sob o transporte paralelo ao longo de um dos vetores  $e_{(i)}$ . Então, o tensor  $K_{(i)(j)}$  é definido como:

$${}^{(4)}\nabla_{(i)} n = K_{(i)}{}^{(j)} e_{(j)} \quad , \quad (2.2.20)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 e_{(l)} \cdot {}^{(4)}\nabla_{(i)} n &= K_{(i)(l)} \\
 &= e_{(l)} \cdot {}^{(4)}\nabla_{(i)} (n^{\alpha} e_{\alpha}) = n^{\alpha}{}_{;\gamma} e^{\gamma}(i) e_{\alpha} \cdot e_{(l)} \\
 &= n^{\alpha}{}_{;\gamma} e^{\gamma}(i) e_{\alpha} \cdot (e^{\beta}(l) e_{\beta}) \\
 &= n_{\beta;\gamma} e^{\gamma}(i) e^{\beta}(l)
 \end{aligned}$$

$$\text{logo, } K_{(i)(j)} = n_{\beta;\gamma} e^{\gamma}(i) e^{\beta}(j) \quad (2.2.21)$$

Levando-se em conta que  $n \cdot e_m = 0$ , podemos estabelecer a simetria de  $K_{(i)(j)}$ :

$$\begin{aligned}
 K_{(i)(j)} &= K_{(i)}^{(\ell)} \gamma_{(\ell)(j)} = K_{(i)}^{(\ell)} (e_{(\ell)} \cdot e_{(j)}) = ({}^{(4)}\nabla_{(i)} n) \cdot e_{(j)} = \\
 &= -n \cdot ({}^{(4)}\nabla_{(i)} e_{(j)}) = -n ({}^{(4)}\nabla_{(j)} e_{(i)}) = -e_{(j); \beta}^{\alpha} e_{(i)}^{\beta} n_{\alpha} = K_{(j)(i)}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.22}$$

pois

$$\begin{aligned}
 ({}^{(4)}\nabla_{(i)} e_{(j)}) &= ({}^{(4)}\nabla_{(i)} (e_{(j)}^{\alpha} e_{\alpha})) = e_{(j); \beta}^{\alpha} e_{(i)}^{\beta} e_{\alpha} = \\
 &= (e_{(j); \beta}^{\alpha} e_{(i)}^{\beta} + \Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} e_{(j)}^{\rho} e_{(i)}^{\beta}) e_{\alpha} = \\
 &= (e_{(j)| (i)}^{\alpha} + \Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} e_{(j)}^{\rho} e_{(i)}^{\beta}) e_{\alpha} = \\
 &= (e_{(i); \beta}^{\alpha} e_{(j)}^{\beta} + \Gamma_{\rho\beta}^{\alpha} e_{(j)}^{\beta} e_{(i)}^{\rho}) e_{\alpha} = \\
 &= ({}^{(4)}\nabla_{(j)} e_{(i)}) \cdot
 \end{aligned}$$

Podemos decompor  $({}^{(4)}\nabla_{(i)} e_{(j)})$  em duas componentes, uma paralela  $\tilde{a}$  superfície e outra ortogonal  $\tilde{a}$  mesma. Da eq. (2.2.22) vemos que a componente normal  $\tilde{e}$  dada por  $K_{(i)(j)}$ . A componente tangencial será dada por:

$$\begin{aligned}
 e_{(m)} \cdot ({}^{(4)}\nabla_{(i)} e_{(j)}) &= e_{(m)} ({}^{(3)}\nabla_{(i)} e_{(j)}) \\
 &= e_{(m)} ({}^{(3)}\Gamma_{(i)(j)}^{(\ell)} e_{(\ell)}) \quad ,
 \end{aligned}$$

onde empregamos a eq. (2.2.16).

Então temos:

$$({}^{(4)}\nabla_{(i)} e_{(j)}) = ({}^{(3)}\Gamma_{(i)(j)}^{(\ell)} e_{(\ell)}) - \epsilon K_{(i)(j)} n \tag{2.2.23}$$

Também, se utilizarmos as eqs. (2.2.16) e (2.2.22), temos:

$${}^{(4)}\nabla_{(i)} \hat{A} = A^{(j)} \parallel_{(i)} e_{(j)} - \varepsilon K_{(i)(j)} A^{(j)} \quad (2.2.24)$$

2.3 - EQUAÇÕES DE GAUSS-CODAZI <sup>(11,16,21)</sup>

As componentes do tensor de Riemann em bases coordenadas ( $\Rightarrow \llbracket e_\gamma, e_\alpha \rrbracket = 0$ ), são dadas por <sup>(21)</sup>:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\rho} = \langle \omega^\alpha, R(e_\gamma, e_\rho) e_\beta \rangle \quad (2.3.1)$$

onde

$$R(A, B) \equiv \llbracket \nabla_A, \nabla_B \rrbracket - \nabla_{\llbracket A, B \rrbracket} \quad (2.3.2)$$

Como  $\llbracket e_\gamma, e_\alpha \rrbracket = 0$ , a eq. (2.3.1) se escreve:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\rho} = \langle \omega^\alpha, ({}^{(4)}\nabla_\gamma ({}^{(4)}\nabla_\rho - ({}^{(4)}\nabla_\rho ({}^{(4)}\nabla_\gamma)) e_\beta \rangle \quad (2.3.3)$$

Então, utilizando as eqs. (2.2.20) e (2.2.23), encontra-se:

$$\begin{aligned} R(e_{(j)}, e_{(k)}) e_{(i)} &= ({}^{(4)}\nabla_{(j)} ({}^{(4)}\nabla_{(k)} e_{(i)} - ({}^{(4)}\nabla_{(k)} ({}^{(4)}\nabla_{(j)} e_{(i)})) = \\ &= ({}^{(4)}\nabla_{(j)} \llbracket ({}^{(3)}\Gamma_{(k)}^{(\ell)}(i) e_{(\ell)} - \varepsilon K_{(k)(i)} n \rrbracket + \\ &- ({}^{(4)}\nabla_{(k)} \llbracket ({}^{(3)}\Gamma_{(j)}^{(\ell)}(i) e_{(\ell)} - \varepsilon K_{(j)(i)} n \rrbracket) = \\ &= ({}^{(3)}\Gamma_{(k)}^{(\ell)}(i) \parallel_{(j)} e_{(\ell)} + ({}^{(3)}\Gamma_{(k)}^{(\ell)}(i) \cdot \\ &\cdot \llbracket ({}^{(3)}\Gamma_{(j)}^{(m)}(\ell) e_{(m)} - \varepsilon K_{(j)(\ell)} n \rrbracket + \\ &- \varepsilon K_{(k)(i) \parallel (j)} n - \varepsilon K_{(k)(i)} K_{(j)}^{(m)} e_{(m)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (3)_{\Gamma(j)(i)|(k)}^{(\ell)} e_{(l)} - (3)_{\Gamma(j)(i)}^{(\ell)} \cdot \\
 & \cdot \left[ (3)_{\Gamma(k)(l)}^{(m)} e_{(m)} - \varepsilon K_{(k)(l)} n \right] + \\
 & + \varepsilon K_{(j)(i)|(k)} n + \varepsilon K_{(j)(i)K(k)}^{(m)} e_{(m)} = \\
 & = \left[ (3)_{\Gamma(k)(i)|(j)}^{(m)} - (3)_{\Gamma(j)(i)|(k)}^{(m)} + \right. \\
 & + (3)_{\Gamma(j)(l)}^{(m)} (3)_{\Gamma(k)(i)}^{(\ell)} - (3)_{\Gamma(j)(i)}^{(\ell)} (3)_{\Gamma(k)(l)}^{(m)} \left. \right] \cdot \\
 & \cdot e_{(m)} + \varepsilon \left[ (3)_{\Gamma(j)(i)}^{(\ell)} K_{(k)(l)} - (3)_{\Gamma(k)(i)}^{(\ell)} K_{(j)(l)} \right] n + \\
 & + \varepsilon \left[ K_{(j)(i)|(k)} - K_{(k)(i)|(j)} \right] n + \varepsilon \left[ K_{(j)(i)K(k)}^{(m)} + \right. \\
 & \left. - K_{(k)(i)K(j)}^{(m)} \right] e_{(m)} \\
 R(e_{(j)}, e_{(k)}) e_{(i)} & = \left[ (3)_{R(i)(j)(k)}^{(m)} + \varepsilon (K_{(j)(i)K(k)}^{(m)} + \right. \\
 & \left. - K_{(k)(i)K(j)}^{(m)}) \right] e_{(m)} + \varepsilon n \left[ K_{(j)(i)|(k)} - K_{(k)(i)|(j)} \right] \\
 & \hspace{15em} (2.3.4)
 \end{aligned}$$

Iremos demonstrar agora, que  $R(e_{(j)}, e_{(k)}) e_{(i)} = R(e_{\beta}, e_{\gamma}) e_{\sigma} e^{\sigma}_{(i)} e^{\gamma}_{(k)} e^{\beta}_{(j)}$ . De fato, sabendo que:

$$\begin{aligned}
 (4)_{\nabla(i)} e_{\alpha} &= (4)_{\nabla_{\rho}} e_{\alpha} e^{\rho}_{(i)} \\
 (4)_{\nabla_{\alpha}} e^{\beta}_{(i)} &= e^{\beta}_{(i), \alpha} \\
 (4)_{\nabla_{\gamma}} \nabla_{\alpha} e^{\beta}_{(i)} &= e^{\beta}_{(i), \alpha, \gamma} \\
 (4)_{\nabla(j)} e^{\beta}_{(i)} &= (4)_{\nabla_{\alpha}} e^{\beta}_{(i)} e^{\alpha}_{(j)}
 \end{aligned}$$



$$e^\alpha(i)|(j) = e^\alpha(j)|(i) ,$$

temos, utilizando as equações (2.2.4) e (2.1.11) que:

$$\begin{aligned} (4)\nabla_{(k)} e(i) &= ((4)\nabla_\gamma e(i)) e^\gamma(k) \\ &= \left[ (4)\nabla_\gamma (e^\sigma(i) e_\sigma) \right] e^\gamma(k) \\ &= \left[ e^\sigma(i) (4)\nabla_\gamma e_\sigma + e_\sigma e^\sigma(i), \gamma \right] e^\gamma(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4)\nabla_{(j)} (4)\nabla_{(k)} e(i) &= (4)\nabla_\beta ((4)\nabla_{(k)} e(i)) e^\beta(j) \\ &= \left[ e^\sigma(i), \beta (4)\nabla_\gamma e_\sigma + e^\sigma(i) (4)\nabla_\beta \nabla_\gamma e_\sigma + \right. \\ &+ \left. (3)\nabla_\beta e_\sigma \right] e^\sigma(i), \gamma + e_\sigma e^\sigma(i), \gamma, \beta \left[ e^\gamma(k) e^\beta(j) + \right. \\ &+ \left. e^\sigma(i) (4)\nabla_\gamma e_\sigma \right] e^\gamma(k), \beta e^\beta(j) + e_\sigma e^\sigma(i), \gamma e^\gamma(k), \beta e^\beta(j) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} R(e(j), e(k)) e(i) &= e^\sigma(i), \beta e^\gamma(k) e^\beta(j) (4)\nabla_\gamma e_\sigma + e^\sigma(i) e^\gamma(k) e^\beta(j) \cdot \\ &\cdot (4)\nabla_\beta (4)\nabla_\gamma e_\sigma + e^\gamma(k) e^\beta(j) e^\sigma(i), \gamma (4)\nabla_\beta e_\sigma + e^\gamma(k) e^\beta(j) e^\sigma(i), \gamma, \beta \cdot e^\sigma + \\ &+ e^\sigma(i) e^\beta(j) e^\gamma(k), \beta (4)\nabla_\gamma e_\sigma + e_\sigma e^\sigma(i), \gamma e^\gamma(k), \beta e^\beta(j) + \\ &- e^\gamma(k) e^\beta(j) e^\sigma(i), \gamma (4)\nabla_\beta e_\sigma + e^\sigma(i) e^\beta(j) e^\gamma(k) \nabla_\gamma \nabla_\beta e_\sigma + \\ &- e^\gamma(k) e^\beta(j) e^\sigma(i), \beta (4)\nabla_\gamma e_\sigma - e^\gamma(k) e^\beta(j) e^\sigma(i), \beta, \gamma e^{\sigma-e^\sigma} e^\gamma(k) e^\beta(j), \gamma \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot (4) \nabla_{\beta} e_{\sigma} - e^{\gamma}_{(k)} e^{\beta}_{(j), \gamma} e_{\sigma} e^{\sigma}_{(i), \beta} \quad \text{c.q.d.}$$

Então, de (2.3.4),

$$\begin{aligned} \langle \omega^{\alpha}, R(e_{(j)}, e_{(k)}) e_{(i)} \rangle &= \left[ (3) R^{(m)}_{(i)(j)(k)} + \varepsilon (K_{(j)(i)} K_{(k)}^{(m)} + \right. \\ &\left. - K_{(k)(i)} K_{(j)}^{(m)}) \right] e^{\alpha}_{(m)} + \varepsilon n^{\alpha} \left[ K_{(j)(i)} \parallel (k) - K_{(k)(i)} \parallel (j) \right] = \\ &= \langle \omega^{\alpha}, e^{\sigma}_{(i)} e^{\beta}_{(j)} e^{\gamma}_{(k)} R(e_{\beta}, e_{\gamma}) e_{\sigma} \rangle = \\ &= e^{\sigma}_{(i)} e^{\beta}_{(j)} e^{\gamma}_{(k)} R^{\alpha}_{\sigma\beta\gamma} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Multiplicando o resultado acima por  $g_{\alpha\rho}$  e em seguida por  $e^{\rho}_{(l)}$ , tendo em vista a eq. (2.2.6), encontramos:

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\beta\gamma} e^{\rho}_{(l)} e^{\sigma}_{(i)} e^{\beta}_{(j)} e^{\gamma}_{(k)} &= \\ &= (3) R_{(l)(i)(j)(k)} + \varepsilon (K_{(j)(i)} K_{(k)(l)} - K_{(k)(i)} K_{(j)(l)}) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

que é a equação de Gauss.

A equação de Codazzi, é deduzida, bastando multiplicar (2.3.5) por  $n_{\alpha}$ :

$$R_{\alpha\sigma\beta\gamma} n^{\alpha} e^{\sigma}_{(i)} e^{\beta}_{(j)} e^{\gamma}_{(k)} = K_{(j)(i)} \parallel (k) - K_{(k)(i)} \parallel (j) \quad (2.3.7)$$

Contraindo a equação de Gauss (2.3.6) com  $\gamma^{(l)}(j)$  e  $\gamma^{(i)}(k)$ , temos:

$$R_{\rho\sigma\beta\gamma} e^{\rho}_{(l)} e^{\sigma}_{(i)} e^{\beta}_{(j)} e^{\gamma}_{(k)} e^{(l)}_{\alpha} e^{\alpha(j)} e^{(i)}_{\nu} e^{\nu(k)} =$$

$$= (3)R + \epsilon (K_{(i)(j)} K^{(i)(j)} - K^2) .$$

E, fazendo uso das eqs. (2.2.15) e (2.2.8a), obtemos:

$$R_{\rho\sigma\beta\gamma} h^\rho_\alpha h^\sigma_\nu h^{\beta\alpha} h^{\gamma\nu} = R_{\rho\sigma\beta\gamma} h^{\rho\beta} h^{\sigma\gamma} = (3)R + \epsilon (K_{(i)(j)} K^{(i)(j)} - K^2) \quad (2.3.8)$$

Podemos ainda escrever que:

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\beta\gamma} h^{\rho\beta} h^{\sigma\gamma} &= h^{\rho\beta} \left[ \bar{R}_{\rho\beta} - \epsilon R_{\rho\sigma\beta\gamma} n^\sigma n^\gamma \right] = \\ &= R - 2\epsilon R_{\sigma\gamma} n^\sigma n^\gamma + \epsilon^2 R_{\rho\sigma\beta\gamma} n^\sigma n^\gamma n^\rho n^\beta , \end{aligned}$$

onde o último termo é nulo por razões de simetria do tensor de Riemann  $R_{\rho\sigma\beta\gamma}$ .

Porém temos que:

$$G_{\sigma\gamma} = R_{\sigma\gamma} - \frac{1}{2} g_{\sigma\gamma} R$$

Logo,

$$R_{\rho\sigma\beta\gamma} h^{\rho\beta} h^{\sigma\gamma} = R - 2\epsilon R_{\sigma\gamma} n^\sigma n^\gamma = - 2\epsilon G_{\sigma\gamma} n^\sigma n^\gamma$$

E substituindo estes resultados na eq. (2.3.8), ficamos com:

$$- 2\epsilon G_{\sigma\gamma} n^\sigma n^\gamma = (3)R + \epsilon (K_{(i)(j)} K^{(i)(j)} - K^2) \quad (2.3.9)$$

Fazendo o mesmo procedimento com a eq. (2.3.7), e não esquecendo a eq. (2.2.6), obtemos como resultado que,

$$R_{\alpha\sigma\beta\gamma} n^\alpha e^\sigma_{(i)} e^\beta_{(j)} e^\gamma_{(k)} e^{(\lambda)}_{\mu} e^{\mu(j)} e^{(i)}_{\nu} e^{\nu(k)} = K^{(\lambda)(i)}_{|| (i) - K_{(j)} g^{(\lambda)(j)}$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\sigma\beta\gamma} n^{\alpha} h^{\sigma}_{\nu} h^{\beta\mu} h^{\gamma\nu} e^{(\ell)}_{\mu} &= R_{\alpha\sigma\beta\gamma} n^{\alpha} h^{\sigma\gamma} e^{\beta(\ell)} = \\ &= R_{\alpha\beta} n^{\alpha} e^{\beta(\ell)} = G_{\alpha\beta} n^{\alpha} e^{\beta(\ell)} \end{aligned}$$

jã que o termo  $-\frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} n^{\alpha} e^{\beta(\ell)} = 0$ , devido à equação (2.2.6).

Então, finalmente multiplicando o resultado por  $g^{(\ell)}(m)$ ,

$$G_{\alpha\beta} n^{\alpha} e^{\beta}(m) = \kappa_{(m)}^{(i)} \parallel (i) - \kappa_{(m)} \quad (2.3.10)$$

#### 2.4 - UM OUTRO FORMALISMO, UTILIZANDO O TENSOR DE PROJEÇÃO $h_{\mu\nu}$ <sup>(20,21)</sup>

Nesta seção iremos reescrever as equações já obtidas anteriormente, em termos do tensor de projeção  $h_{\mu\nu}$ , definido na equação (2.2.7).

A projeção de um vetor  $A$  sobre a hipersuperfície  $\Sigma$ ,  $\bar{A}$  (vide as eqs. (2.2.13)), pode ser reescrita como:

$$\bar{A}^{\alpha} = h^{\alpha}_{\beta} A^{\beta} \quad (2.4.1)$$

e também, via as eqs. (2.2.4) e (2.2.15),

$$\tilde{e}_{\alpha} = h^{\beta}_{\alpha} e_{\beta} = e_{\alpha}^{(i)} e_{(i)}^{\beta} e_{\beta} = e_{\alpha}^{(i)} e_{(i)} \quad (2.4.2)$$

Utilizando as propriedades (2.2.8) de  $h_{\mu\nu}$ , ou ainda a relação (2.4.2) juntamente com a eq. (2.2.6), temos

$$\tilde{e}_{\gamma} \cdot n = 0 \quad (2.4.3)$$

e

$$\tilde{e}_{\alpha} \cdot \tilde{e}_{\beta} = h_{\alpha\beta} \quad (2.4.4)$$

Podemos com as equações acima, escrever então:

$$\bar{A} = \bar{A}^\alpha \tilde{e}_\alpha = h^\alpha_\beta A^\beta h^\rho_\alpha e_\rho = h^\rho_\beta A^\beta e_\rho = \bar{A}^\beta e_\beta = A^\beta \tilde{e}_\beta \quad . \quad (2.4.5)$$

E os índices das componentes de  $\bar{A}^\alpha$  são abaixados ou levantados tanto através de  $h_{\alpha\beta}$  como de  $g_{\alpha\beta}$ , pois

$$\bar{A}^\alpha = g^{\alpha\beta} \bar{A}_\beta = g^{\alpha\beta} h^\rho_\beta \bar{A}_\rho = h^{\beta\rho} \bar{A}_\rho \quad . \quad (2.4.6)$$

Definindo então,

$$\begin{aligned} \tilde{e}_\rho \cdot \tilde{\nabla}_\beta \bar{A} &\equiv h^\gamma_\beta h^\alpha_\rho e_{\alpha\gamma} \bar{A} = \\ &= h^\gamma_\beta h^\alpha_\rho \bar{A}_{\alpha;\gamma} = \\ &= A_{(i)\|(j)} e^{(i)}_\rho e^{(j)}_\beta \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

jã que de (2.2.16) e (2.2.19a), tem-se:

$$\begin{aligned} A_{(i)\|(j)} &= A_{(i)|(j)} - {}^{(3)}\Gamma_{(i)(j)}^{(k)} A_{(k)} \\ &= A_{(i)|(j)} - e^{(k)}_\alpha e^\alpha_{(j)|(i)} A_{(k)} - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} e_\rho^{(k)} e^\alpha_{(j)} e^\gamma_{(i)} A_{(k)} \\ &= (A^{(k)}_{\gamma(i)(k)})_{|(j)} - \bar{A}_\alpha e^\alpha_{(j)|(i)} - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} \bar{A}_\rho e^\alpha_{(j)} e^\gamma_{(i)} \\ &= (\bar{A}_\alpha e^\alpha_{(i)})_{|(j)} - \bar{A}_\alpha e^\alpha_{(j)|(i)} - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} \bar{A}_\rho e^\alpha_{(j)} e^\gamma_{(i)} \\ &= \bar{A}_{\alpha,\beta} e^\beta_{(j)} e^\alpha_{(i)} + \bar{A}_\alpha e^\alpha_{(i)}_{|(j)} - \bar{A}_\alpha e^\alpha_{(j)|(i)} + \\ &\quad - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} \bar{A}_\rho e^\alpha_{(j)} e^\gamma_{(i)} \\ &= \bar{A}_{\alpha,\gamma} e^\gamma_{(j)} e^\alpha_{(i)} - {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} \bar{A}_\rho e^\gamma_{(j)} e^\alpha_{(i)} \\ &= \bar{A}_{\alpha;\gamma} e^\gamma_{(j)} e^\alpha_{(i)} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Então, multiplicando os dois lados da eq. (2.4.8) por  $e^{(j)}_\beta$  e  $e^{(i)}_\rho$ , sabendo a equação (2.2.15) finalmente encontramos:

$$A_{(i)\|(j)} e^{(j)}_{\beta} e^{(i)}_{\rho} = h^{\gamma}_{\beta} h^{\alpha}_{\rho} \bar{A}_{\alpha;\gamma} \quad \text{c.q.d.}$$

Utilizando as eqs. (2.2.10) e (2.2.15), temos:

$$\gamma_{(i)(j)} e^{(i)}_{\alpha} e^{(j)}_{\rho} = h_{\alpha\rho}, \quad (2.4.9)$$

e com a ajuda de (2.4.8),

$$\gamma_{(i)(j)\|(k)} = 0 = h_{\alpha\rho;\gamma} e^{\gamma}(k) e^{\alpha}(i) e^{\rho}(j),$$

ou seja,

$$\bar{e}_{\rho} \bar{e}_{\beta} \bar{\nabla}_{\gamma} h = h_{\rho}^{\alpha} h_{\beta}^{\nu} h_{\gamma}^{\sigma} h_{\alpha\nu;\sigma} = 0 \quad (2.4.10)$$

De fato,

$$\begin{aligned} h^{\alpha}_{\rho} h^{\nu}_{\beta} h^{\sigma}_{\gamma} h_{\alpha\nu;\sigma} &= h^{\alpha}_{\rho} h^{\nu}_{\beta} h^{\sigma}_{\gamma} (-\epsilon)(n_{\alpha} n_{\nu})_{;\sigma} \\ &= -\epsilon \left[ \cancel{h^{\alpha}_{\rho} n_{\alpha} h^{\nu}_{\beta} h^{\sigma}_{\gamma} n_{\nu;\sigma}} + h^{\nu}_{\beta} n_{\nu} \cancel{h^{\alpha}_{\rho} h^{\sigma}_{\gamma} n_{\alpha;\sigma}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tem-se ainda, que:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{\rho} \cdot \bar{\nabla}_{\beta} \bar{A} &= h_{\beta}^{\gamma} h_{\rho}^{\alpha} \bar{A}_{\alpha,\gamma} - (4) \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} \bar{A}_{\sigma} h_{\beta}^{\gamma} h_{\rho}^{\alpha} \\ &= h_{\beta}^{\gamma} h_{\rho}^{\alpha} \bar{A}_{\alpha,\gamma} - (4) \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} h_{\rho}^{\alpha} h_{\beta}^{\gamma} h_{\sigma}^{\lambda} \bar{A}_{\lambda} \\ &= h_{\beta}^{\gamma} h_{\rho}^{\alpha} \bar{A}_{\alpha,\gamma} - \hat{\Gamma}_{\rho\beta}^{\lambda} \bar{A}_{\lambda} \end{aligned}$$

onde

$$\hat{\Gamma}_{\rho\beta}^{\lambda} \equiv (4) \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} h_{\rho}^{\alpha} h_{\beta}^{\gamma} h_{\sigma}^{\lambda} \quad (2.4.11)$$

tal que os índices de  $\hat{\Gamma}_{\rho\beta}^{\lambda}$  são abaixados ou levantados tanto através de  $h_{\lambda\rho}$ , quanto de  $g_{\lambda\rho}$ .

Da eq. (2.2.19a) vemos que podemos expressar  $\hat{\Gamma}_{\rho\beta}^{\lambda}$  em

termos de  $(3)\Gamma_{(j)(k)}^{(i)}$  :

$$\hat{\Gamma}_{\rho\beta}^{\lambda} = (3)\Gamma_{(i)(j)}^{(k)} e^{(j)}_{\rho} e^{(i)}_{\beta} e^{\lambda}_{(k)} - h^{\lambda}_{\alpha} e^{\alpha}_{(j),\gamma} h^{\gamma}_{\beta} e^{(j)}_{\rho} \quad (2.4.12)$$

Se calculássemos as conexões apenas em função de  $h_{\mu\nu}$ , teríamos:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \left[ \bar{h}_{\alpha\beta,\gamma} + h_{\alpha\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\alpha} \right] = \\ &= (4)\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} - \frac{\varepsilon}{2} \left[ n_{\alpha,\gamma} n_{\beta} + n_{\beta,\gamma} n_{\alpha} + n_{\alpha,\beta} n_{\gamma} + n_{\gamma,\beta} n_{\alpha} + \right. \\ &\quad \left. - n_{\beta,\alpha} n_{\gamma} - n_{\gamma,\alpha} n_{\beta} \right] \end{aligned} \quad (2.4.13a)$$

onde utilizou-se o fato de  $n_{\beta,\gamma} = n_{\gamma,\beta}$ , pois  $n_{\alpha}$  é normal à hiper superfície  $\phi = \text{cte.}$  ( $n = \Phi_{,\alpha}$ ).

$$\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\beta\gamma} \equiv h^{\rho\alpha} \tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta\gamma} = h^{\rho\alpha} (4)\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} \quad (2.4.13b)$$

De (2.2.21) temos então:

$$K_{(i)(j)} e^{(i)}_{\rho} e^{(j)}_{\sigma} = n_{\beta;\gamma} h^{\beta}_{\rho} h^{\gamma}_{\sigma} = \hat{e}_{\rho} \cdot \hat{\nabla}_{\sigma} n = \hat{K}_{\rho\sigma} \quad (2.4.14)$$

e

$$\hat{K}^{\rho}_{\sigma} = h^{\rho\alpha} \hat{K}_{\alpha\sigma} = g^{\rho\alpha} \hat{K}_{\alpha\sigma} \quad ,$$

logo,

$$n^{\rho} \hat{K}_{\rho\sigma} = n^{\sigma} \hat{K}_{\rho\sigma} = 0 \quad . \quad (2.4.15)$$

A equação de Gauss (2.3.6) será então escrita,

$$\hat{R}_{\lambda\nu\mu\alpha} \equiv h^{\rho}_{\lambda} h^{\sigma}_{\nu} h^{\beta}_{\mu} h^{\gamma}_{\alpha} R_{\rho\sigma\beta\gamma} =$$

$$= {}^{(3)}R_{(l)(i)(j)(k)} e^{(l)}_{\lambda} e^{(i)}_{\nu} e^{(j)}_{\mu} e^{(k)}_{\alpha} + \epsilon (\widehat{K}_{\nu\mu} \widehat{K}_{\alpha\lambda} - \widehat{K}_{\alpha\nu} \widehat{K}_{\lambda\mu}) \quad (2.4.16)$$

Enquanto a equação (2.3.7) de Codazzi fica:

$$R_{\alpha\sigma\beta\gamma} n^{\alpha} h^{\sigma}_{\lambda} h^{\beta}_{\nu} h^{\gamma}_{\rho} = h^{\sigma}_{\lambda} h^{\beta}_{\nu} h^{\gamma}_{\rho} \left[ \widehat{K}_{\sigma\beta;\gamma} - \widehat{K}_{\sigma\gamma;\beta} \right] \quad (2.4.17)$$

Também das eqs. (2.3.8) e (2.3.9)

$$\begin{aligned} \widehat{R} \equiv R_{\rho\sigma\beta\gamma} h^{\rho\beta} h^{\sigma\gamma} &\equiv \widehat{R}^{\rho}_{\rho} = - 2\epsilon G_{\sigma\gamma} n^{\sigma} n^{\gamma} = \\ &= {}^{(3)}R + \epsilon (\widehat{K}_{\alpha\beta} \widehat{K}^{\alpha\beta} - \widehat{K}^2) \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

E para a eq. (2.3.10):

$$G_{\alpha\beta} n^{\alpha} e^{\beta}_{(m)} = \widehat{K}_{\alpha;\gamma}^{\beta} e^{\alpha}_{(m)} e^{\beta}_{(i)} e_{(i)\gamma} - \widehat{K}_{,\alpha} e^{\alpha}_{(m)}$$

logo,

$$G_{\alpha\beta} n^{\alpha} h^{\beta}_{\rho} = \widehat{K}_{\alpha;\gamma}^{\beta} h^{\alpha}_{\rho} h^{\gamma}_{\beta} - \widehat{K}_{,\alpha} h^{\alpha}_{\rho} \quad (2.4.19)$$

Todas as fórmulas obtidas se simplificariam se escolhêssemos um sistema de coordenadas no qual a equação da hipersuperfície  $\Sigma$  fosse dada por  $x^{\bar{\alpha}} = \text{cte.}$ , onde  $\bar{\alpha}$  denotaria a coordenada em questão. Então a eq. (2.2.4) seria escrita:

$$e^{\alpha}_{(i)} = \delta^{\alpha}_{i} \quad (2.4.20)$$

onde agora os índices latinos denotam apenas as 3 coordenadas diferentes de  $x^{\bar{\alpha}}$ .

$$e^{\bar{\alpha}}_{(i)} = \delta^{\bar{\alpha}}_{i} = 0 \quad (2.4.21)$$

$$e_{(i)} \equiv e_i \quad (2.4.22)$$

$$\gamma_{(i)(j)} \equiv g_{ij} \quad (2.4.23)$$



A única componente não nula do vetor normal  $n$  será  $n^{\bar{\alpha}}$ .

Como,

$$h^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \epsilon n^{\alpha} n_{\beta}$$

então,

$$h^{\bar{\alpha}}_{i} = 0 \quad (2.4.24a)$$

$$h^i_j = \delta^i_j \quad (2.4.24b)$$

$$h^{\bar{\alpha}}_{\bar{\alpha}} = 0 \quad (2.4.24c)$$

Utilizando as relações acima podemos então escrever as seguintes equações:

Da eq. (2.2.10),

$$h_{\mu\nu} \delta^{\mu}_i \delta^{\nu}_j = h_{ij} \equiv \gamma_{ij} \equiv g_{ij} \quad (2.4.25)$$

Da eq. (2.2.19a), bem como de (2.4.12),

$${}^{(3)}\Gamma_{j i}^k = {}^{(4)}\Gamma_{j i}^k = \hat{\Gamma}_{j i}^k \quad (2.4.26)$$

e de (2.2.21) e (2.4-14),

$$K_{ij} = n_{i;j} = -\Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}} = \hat{K}_{ij} \quad (2.4.27)$$

E a equação de Gauss (2.4.16):

$$\hat{R}_{ijkl} = R_{ijkl} = {}^{(3)}R_{ijkl} + \epsilon (K_{ij} K_{il} - K_{jl} K_{ik}) \quad (2.4.28)$$

Enquanto que a eq. (2.4.17)

$$R_{\bar{\alpha}ijk} = K_{ij;k} - K_{ik;j} \quad (2.4.29)$$

Também de (2.4.18):

$$\hat{R} = R^i_j = -2\epsilon G_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}} n^{\bar{\alpha}} = {}^{(3)}R + \epsilon (K_{ij} K^{ij} - K^2) \quad (2.4.30)$$

E de (2.3.10):

$$G_{\alpha i} n^{\alpha} = K_i^j{}_{;j} - K_{,i} \quad .$$

## 2.5 - CONDIÇÕES DE CONTORNO <sup>(15)</sup>

Nesta seção iremos estudar e examinar os três conjuntos de condições de ligação de métricas comumente utilizados em Relatividade Geral, devidos a Darmois; a O'Brien e Synge; e a Lichnerowicz.

Estes três conjuntos de condições serão referidos como:

D - Darmois <sup>(10)</sup>

O - O'Brien e Synge <sup>(11)</sup>

L - Lichnerowicz <sup>(12)</sup>

D e L são semelhantes, e em ambos os casos foram derivados de um tratamento matemático baseado em classes de diferenciabilidade dos coeficientes métricos  $g_{\alpha\beta}$ . O método de O é completamente diferente, e leva em consideração uma hipotética camada de fronteira cuja espessura pode tender a se anular, tratamento semelhante aquele às vezes utilizado em eletromagnetismo.

Neste trabalho, cujas linhas gerais são dadas a seguir, Bonnor e Vickers mostram que D e L são equivalentes, mas que nenhum destes dois o são em relação a O. Embora a ligação que satisfaça a O necessariamente satisfaça D e L, o inverso não é verdadeiro.

Sejam  $V$  e  $\bar{V}$  duas regiões do espaço-tempo, separadas pela hipersuperfície  $\Sigma$ . Supor-se-á que os coeficientes métricos  $g_{\alpha\beta}$

são de classe de diferenciabilidade  $C^3(^*)$ , exceto em  $\Sigma$ .

i) Condições de Darboux (D):

Sejam  $x^\alpha, \bar{x}^\alpha$  as coordenadas em  $V, \bar{V}$ , e  $g_{\alpha\beta}, \bar{g}_{\alpha\beta}$  as métricas correspondentes. A equação de hipersuperfície  $\Sigma$  é dada por:

$$f(x^\alpha) = 0 \quad \text{em } V, \quad \bar{f}(\bar{x}^\alpha) = 0 \quad \text{em } \bar{V}, \quad (2.5.1)$$

sendo que estas funções são de classe  $C^2$ .

Os vetores normais a  $\Sigma$  serão:

$$\begin{aligned} n_\alpha &= (g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)^{-1/2} \quad f, \alpha \quad \text{em } V \\ \bar{n}_\alpha &= (\bar{g}_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta)^{-1/2} \quad \bar{f}, \alpha \quad \text{em } \bar{V} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

As duas representações paramétricas de  $\Sigma$  são dadas por:

$$x^\alpha = x^\alpha(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) \quad \text{em } V \quad \text{e} \quad \bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) \quad \text{em } \bar{V} \quad (2.5.3)$$

onde agora  $x^\alpha$  e  $\bar{x}^\alpha$  são funções de classe  $C^3$ , tal que  $\Sigma$  é coberto pelo mesmo domínio de  $u^{(i)}$  ( $(i)=1,2,3$ ) em ambas as representações. Logo, em  $\Sigma$ ,  $g_{\alpha\beta}(u^{(i)})$  são da classe  $C^2$ .

Então, para que  $V$  e  $\bar{V}$  possam ser ligadas através da hipersuperfície  $\Sigma$ , é preciso que as primeira ( $\equiv \gamma_{(i)}(j)$ , equação (2.2.3)) e segunda ( $\equiv K_{(i)}(j)$ , equação (2.2.21)) formas de  $\Sigma$ , calculadas como funções de  $u^{(i)}$  através de  $g_{\alpha\beta}$  e  $\bar{g}_{\alpha\beta}$ , sejam idênticas.

---

(\*) Derivadas 1a., 2a. e 3a. de  $g_{\alpha\beta}$  são contínuas.

ii) Condições de Lichnerowicz (L):

$V$  e  $\bar{V}$  podem ser ligadas através de  $\Sigma$ , se para cada ponto  $P$  de  $\Sigma$ , existe um sistema de coordenadas (utilizado em ambos os lados de  $\Sigma$ ) tal que o seu domínio contenha  $P$  e as componentes métricas  $g_{\alpha\beta}$  e suas derivadas primeiras  $g_{\alpha\beta,\gamma}$  sejam contínuas em  $\Sigma$ . Tais coordenadas são denominadas admissíveis.

iii) Condições de O'Brien e Synge (O):

Um sistema de coordenadas  $\bar{x}$  é escolhido (e utilizado nas duas regiões  $V$  e  $\bar{V}$ ) tal que  $\Sigma$  é dada por  $x^{\bar{\alpha}} = \text{cte.}$ , onde  $\bar{\alpha}$  denota uma das quatro coordenadas, sem especificar se é tipo tempo ou não. Então, para ligarmos  $V$  e  $\bar{V}$  através de  $\Sigma$  as seguintes condições devem ser satisfeitas:  $g_{\alpha\beta}$ ,  $g_{ij,\bar{\alpha}}$  e  $T^{\bar{\alpha}}_{\beta}$  devem ser contínuas em  $\Sigma$ , sendo  $T^{\rho}_{\beta}$  o tensor momento energia e os índices latinos denotando as outras três coordenadas diferentes de  $x^{\bar{\alpha}}$ .

Kumar e Singh<sup>(23)</sup> provaram que a continuidade de  $g_{\alpha\beta}$  e  $g_{ij,\bar{\alpha}}$  implica na continuidade de  $T^{\bar{\alpha}}_{\beta}$ .

## 2.6 - EQUIVALÊNCIA DOS CONJUNTOS DE CONDIÇÕES

É apresentado aqui, a equivalência entre D e L.

Se a primeira e segunda formas fundamentais de  $\Sigma$ , quando calculadas em  $V$  e  $\bar{V}$ , se igualam em  $\Sigma$ , então tem-se, como foi demonstrado por Darboux<sup>(10)</sup>, que se o sistema de coordenadas Gaussiano é utilizado em  $V$  e em  $\bar{V}$  com  $\Sigma$  dada por  $x^{\bar{\alpha}} = 0$ ,  $\bar{x}^{\bar{\alpha}} = 0$ , então  $g_{ij} = \bar{g}_{ij}$  e  $\partial g_{ij} / \partial x^{\bar{\alpha}} = \partial \bar{g}_{ij} / \partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}$  em  $\Sigma$ .

De fato, por (2.4.23) tem-se que  $\gamma_{(i)(j)} = g_{ij}$  e de (2.4.27):

como 
$$\widehat{K}_{ij} = -\Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}}$$

$n_{\bar{\alpha}} = 1 = \bar{n}_{\bar{\alpha}}$  e em coordenadas gaussianas  $\bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} = g_{\alpha\alpha} = \pm 1$  e  $\bar{g}_{\bar{\alpha}i} = g_{\alpha i} = 0$ , tem-se:

$$\widehat{K}_{ij} = -\Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}} = -\Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} = + \frac{1}{2} g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\bar{\alpha}}} = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}$$

$$\widehat{K}_{ij} = -\Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} \bar{n}_{\bar{\alpha}} = -\Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} = + \frac{1}{2} \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} = \pm \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}}$$

e

$$\widehat{K}_{ij} = \bar{K}_{ij} \Rightarrow \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^{\bar{\alpha}}} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}$$

Vê-se então que todos  $g_{\alpha\beta}$  e  $g_{\rho\beta, \bar{\alpha}}$  são contínuos, e portanto as coordenadas gaussianas constituem um sistema de coordenadas admissíveis como dado por Lichnerowicz. Logo, se D são satisfeitas, também o são L.

Agora assumindo L, isto é, que exista um sistema de coordenadas no qual  $g_{\alpha\beta}$  e  $g_{\alpha\beta, \rho}$  sejam contínuos em  $\Sigma$ , vê-se logo que D são satisfeitas, já que a primeira e a segunda formas fundamentais de  $\Sigma$  serão contínuas em  $\Sigma$ , uma vez que essas dependem apenas de  $g_{\alpha\beta}$  e suas derivadas primeiras.

Passemos à comparação de D com 0. Seja  $\Sigma$  a hipersuperfície dada por:

$$x^{\bar{\alpha}} = \text{cte} \quad , \quad \bar{x}^{\bar{\alpha}} = \text{cte}$$

em  $V$  e  $\bar{V}$ . Suponha que as outras coordenadas e a parametrização de  $\Sigma$  são tais que, em  $\Sigma$ :

$$x^i = \bar{x}^i = u(i)$$

As primeiras formas fundamentais de  $\Sigma$ , obtidas de  $V$  e  $\bar{V}$  são:

$$ds_{\Sigma}^2 = g_{ij} du^{(i)} du^{(j)} \quad d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij} du^{(i)} du^{(j)} \quad , \quad (2.6.1)$$

e de acordo com D tem-se:

$$g_{ij} = \bar{g}_{ij} \quad (2.6.2)$$

ou seja,  $g_{ij}$  é contínuo em  $\Sigma$ , sendo uma parte de 0.

O vetor normal unitário a  $\Sigma$ , calculado em  $V$  e  $\bar{V}$  é dado por:

$$\begin{aligned} n_{\beta} &= \delta^{\bar{\alpha}}_{\beta} (\epsilon g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} \\ \bar{n}_{\beta} &= \bar{\delta}^{\bar{\alpha}}_{\beta} (\epsilon \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Utilizando a segunda condição de Darboux, que  $K_{ij} = \bar{K}_{ij}$  em  $\Sigma$ , juntamente com a eq. (2.4.27), temos que em  $\Sigma$ :

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{\bar{\alpha}} \bar{n}_{\bar{\alpha}} - \Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} n_{\bar{\alpha}} = 0 \quad (2.6.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ij} - K_{ij} &= (\epsilon \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} \bar{g}^{\bar{\alpha}\rho} \bar{\Gamma}_{\rho,ij} - (\epsilon g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} g^{\bar{\alpha}\rho} \Gamma_{\rho,ij} = \\ &= (\epsilon \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{1/2} \bar{\Gamma}_{\bar{\alpha},ij} - (\epsilon g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{1/2} \Gamma_{\bar{\alpha},ij} = \\ &= \left[ (\epsilon \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} \bar{g}^{\bar{\alpha}k} - (\epsilon g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})^{-1/2} g^{\bar{\alpha}k} \right] \Gamma_{k,ij} = 0 \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

já que devido à eq. (2.6.2),  $\Gamma_{k,ij} = \bar{\Gamma}_{k,ij}$  em  $\Sigma$ .

Então vê-se que se 0 são satisfeitas, as eqs. (2.6.2) e (2.6.5) também são satisfeitas, logo D são satisfeitas.

Porém se D são satisfeitas (as eqs. (2.6.2) e (2.6.5) são válidas) não implicará que 0 sejam satisfeitas, já que a eq. (2.6.5) não implica necessariamente em  $g^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} = \bar{g}^{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}$ , sendo esta uma das condições de 0. Em outras palavras, 0 são mais restritivas que D.

Mostra-se então, que D e L são equivalentes, mas que 0 são diferentes de D e L, e todas as ligações satisfazendo 0 tam

bem satisfazem as D e L, porém o inverso não é verdadeiro.

Ver-se-á agora qual o problema que surge nos trabalhos de Robson<sup>(14)</sup> e Israel<sup>(13)</sup>, onde estes mostraram a equivalência de O e L.

No trabalho de Bonnor e Vickers, dadas O que expressavam as condições de contorno através de uma hipersuperfície não nula  $\Sigma$  especificada por  $x^{\bar{\alpha}} = a$ , e as métricas  $g_{\alpha\beta}$  e  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  das regiões V e  $\bar{V}$ , não foi feita nenhuma transformação de coordenadas nestas métricas, contrariamente ao que fizeram Israel e Robson.

Se é permitido o uso de transformações de coordenadas, é óbvio que O e L são equivalentes no sentido em que existe um sistema de coordenadas no qual aquelas se reduzem às mesmas condições. Coordenadas Gaussianas com  $\Sigma$  dada por  $x^{\bar{\alpha}} = 0$  e  $\bar{x}^{\bar{\alpha}} = 0$  formam tal sistema. Para uma melhor visualização, note-se que as diferenças entre L e O são:

- (i) que em L  $g_{\alpha\rho, \bar{\alpha}}$  deve ser contínua enquanto que O não a requerem;
- (ii) que  $T_{\rho}^{\bar{\alpha}}$  é contínuo em O.

Observando (i), é claro que em coordenadas gaussianas  $g_{\alpha\rho, \bar{\alpha}}$  são necessariamente contínuos já que  $g_{\alpha\rho}$  são constantes; e se  $g_{\rho\beta}$  e  $g_{\rho\beta, \bar{\alpha}}$  são contínuos também o é  $T_{\rho}^{\bar{\alpha}}$  <sup>(24)</sup> tal que (ii) é satisfeita automaticamente. Então em coordenadas gaussianas L e O reduzem-se ao mesmo requisito; a continuidade de  $g_{\alpha\beta}$  e de  $g_{ik, \bar{\alpha}}$ .

Desde que O não foram estabelecidas de uma forma covariante, não é surpresa que elas sejam equivalentes às L em algum sistema de coordenadas e não o sejam em outros. A dificuldade com

O é saber se o sistema de coordenadas que está se usando é apropriado para  $O$  ou não; com  $L$  também há uma dificuldade, que é a de transformar a métrica para um sistema de coordenadas admissíveis, o que geralmente é muito complicado. Então  $D$  são as condições de contorno mais convenientes para a utilização em Relatividade Geral dos problemas em que aparecem ligações de métrica.

Segue-se um exemplo que ser-nos-á de grande utilidade.

## 2.7 - UM EXEMPLO

Para a métrica

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R'^2}{1+f(r)} dr^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (1.1.6)$$

vejamos quais as restrições impostas quando utilizam-se  $D$  e  $O$ .

Levando-se em conta as equações de campo, obtivemos:

$$\dot{R}^2 = \frac{F(r)}{R} + f(r) \quad (1.1.9)$$

$$8\pi k T^0_0 = 8\pi k \rho = \frac{F'(r)}{R^2 R'} \quad (1.1.11)$$

Assume-se que

$$R' \neq 0 \quad \text{e} \quad \dot{R} \neq 0 \quad (2.7.1)$$

Considera-se duas regiões do espaço-tempo, ambas com as métricas da forma (1.1.6), separadas pela hipersuperfície  $\Sigma$  definida por:

$$x^{\bar{\alpha}} = x^1 = r = a, \quad a = \text{cte} \quad (2.7.2)$$



e para as outras coordenadas,  $x^i$ ,

$$x^0 = t \quad , \quad x^2 = \theta \quad , \quad x^3 = \phi \quad ,$$

sendo todas as coordenadas contínuas em  $\Sigma$ .

Irã se denotar por  $C$  o conjunto de funções contínuas em  $\Sigma$ .

Apliquemos inicialmente  $D \cdot D$  vetor unitário normal a  $\Sigma$ , serã:

$$\begin{aligned} n_\beta &= \delta^1_\beta (-g_{11})^{1/2} \\ &= \delta^1_\beta \frac{R'}{(1+f)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

De (2.4.3) vemos que a primeira forma fundamental  $\gamma_{(i)(j)} \equiv g_{ij}$ , ou seja:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \\ g_{22} &= -R^2 \\ g_{33} &= -R^2 \text{sen}^2\theta \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

Então da condição de  $\gamma_{(i)(j)}$  ser contínua, vê-se que

$$R(r,t) \in C \quad (2.7.5)$$

Calculemos agora os coeficientes da segunda forma fundamental, que para este exemplo são dados pela eq. (2.4.27)

$$K_{ij} = -\Gamma_{ij}^1 n_1$$

e utilizando (A.20), as únicas componentes não nulas serã:

$$\begin{aligned} K_{22} &= \frac{R}{R'} (1+f(r)) \frac{R'}{(1+f(r))^{1/2}} \\ K_{22} &= R (1+f(r))^{1/2} \end{aligned}$$

$$K_{33} = K_{22} \operatorname{sen}^2 \theta .$$

Como  $K_{ij}$  deve ser contínuo em  $\Sigma$ , devido a D, tem-se:

$$R (1+f(r))^{1/2} \in C \quad (2.7.6)$$

Derivando (1.1.9) em relação a t e usando (2.7.1),

$$\begin{aligned} 2\dot{R}\ddot{R} &= - \frac{F(r)\dot{R}}{R^2} \\ \ddot{R} &= - \frac{F(r)}{2R^2} \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Pode-se ver de (2.7.5) que  $R$  é contínua em  $\Sigma$ , e como a coordenada t também o é, o mesmo se dará em relação a  $\ddot{R}$ .

Logo,

$$F(r) \in C \quad (2.7.8)$$

Então, reunindo (2.7.5), (2.7.6) e (2.7.8), tem-se as condições impostas por D:

$$R, F(r), f(r) \in C \quad (2.7.9)$$

Quanto as de 0, um cálculo direto nos fornece,

$$R', R, f(r) \in C \quad (2.7.10)$$

e novamente de (2.7.7), se  $\ddot{R}$  e  $R$  são contínuas,  $F(r)$  também deverá sê-lo:

$$F(r) \in C \quad (2.7.11)$$

Derivando (2.7.7) em relação a r obtêm-se:

$$(R')'' = - \frac{F'}{2R^2} + \frac{FR'}{R^3}$$

e devido a (2.7.10) e (2.7.11),

$$F' \text{ e } C \quad (2.7.12)$$

E novamente derivando (1.1.9) em relação a  $r$ , tem-se:

$$2\dot{R}(R')' = \frac{F'}{R} - \frac{FR'}{2R} + f'$$

e de (2.7.10), (2.7.11) e (2.7.12), tira-se que

$$f' \text{ e } C \quad . \quad (2.7.13)$$

Logo,  $\Theta$  nos fornece que,

$$R, R', F, F', f, f' \text{ e } C \quad (2.7.14)$$

Analisando então as duas condições, vê-se que  $D$  não requer que  $g_{11}$  seja contínua, ao passo que  $\Theta$  o exige. Além disto, observa-se de (1.1.11) que  $\Theta$  exige a continuidade da densidade de energia. Esta exigência é muito restritiva, e elimina algumas possíveis soluções físicas; de fato, se nós tentássemos ligar o universo de Friedmann com o de Schwarzschild, utilizando  $\Theta$ , a continuidade da densidade exigiria que esta se anulasse na hipersuperfície, e então, por causa da homogeneidade, através de todo o modelo de Friedmann.

## CAPÍTULO 3

### UNIVERSO DE NOVIKOV (BURACOS BRANCOS) E SUA GENERALIZAÇÃO

Iremos tratar agora do modelo baseado no universo de Novikov<sup>(25)</sup>, utilizando a solução de Tolman, descrita no Capítulo 1. Este modelo é constituído de camadas sucessivas de matéria que emergem no espaço-tempo em diferentes instantes de tempo  $t$ .

Inicialmente estudaremos o universo de Novikov, passando então para a sua generalização.

#### 3.1 - UNIVERSO DE NOVIKOV<sup>(25)</sup>

Novikov, em 1964, tentando explicar as fontes de radio quasiaestelares propôs um modelo no qual estas constituiriam partes do universo de Friedman cujas expansões estariam retardadas em relação à expansão de todo o universo.

Ele supôs que no instante cosmológico inicial, o instante do "big-bang", nem toda a matéria emergiu no espaço-tempo, criando-se no universo determinadas regiões de vácuo com simetria esférica, em cujos centros haveriam núcleos de matéria que só começariam a se expandir em algum tempo posterior.

É um resultado bem conhecido (Einstein e Strauss<sup>(26,31)</sup>) que, analogamente ao caso newtoniano, o campo no interior de um

vacúolo esfericamente simétrico imerso num universo em expansão com uma densidade de matéria homogênea ( $\rho = \rho(t)$ ), é devido apenas à massa ( $m$ ) concentrada em seu centro, igual a que estaria contida no vacúolo se este estivesse preenchido com a mesma densidade de matéria  $\rho$  do universo externo. Ou seja, o campo no interior do vacúolo é igual ao de Schwarzschild.

Do resultado acima vemos então, que os núcleos atrasados de Novikov expandir-se-ão da mesma forma que o universo externo. A única restrição porém, é que a massa desses núcleos seja dada por

$$m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \quad , \quad (3.1.1)$$

onde  $R$  é o raio do vacúolo em coordenadas de Schwarzschild, e  $\rho$  é a densidade de matéria do universo externo. Como veremos adiante, esta restrição irá aparecer naturalmente quando aplicarmos as condições de contorno de Darmois, estudadas na Seção 2.5.

Vamos construir então a solução descrevendo este modelo. A origem do sistema de referência será colocada no núcleo de matéria. A região externa será descrita por uma geometria de Friedman de seção espacial euclidiana ( $\epsilon = 0$ ) (região III), a região do vacúolo pela solução de Schwarzschild (região II), como visto acima <sup>(26)</sup>, e o núcleo por uma geometria de Friedman de seção espacial euclidiana (região I). O conteúdo material de ambas as regiões de Friedman é um gás sem pressão (poeira).

Como veremos a seguir, a solução de Tolman com  $f = 0$  descrita na Seção 1.1, nos dará cada caso acima. A métrica então, que descreverá cada região, será dada por (vide eq.(1.1.6)):

$$ds^2 = dt^2 - R^2 dr^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (3.1.2)$$

e a densidade  $\rho(t)$  por:

$$8\pi k \rho(t) = \frac{F'(r)}{R^2 R'} \quad (1.1.11)$$

A função  $R$  no caso  $f(r) = 0$ , é dada pela eq. (1.1.13):

$$R(r,t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} F(r)^{1/3} (t-g(r))^{2/3} \quad (1.1.13)$$

E sua derivada em relação a  $r$ ,

$$R' = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left\{ \frac{1}{3} F' F^{-2/3} [t-g(r)]^{2/3} - \frac{2}{3} g' F^{1/3} [t-g(r)]^{-1/3} \right\} .$$

Porém, na Seção 1.2, vimos que no caso do universo de Tolman,

$$F(r) = 2k m(r) \quad (1.2.20)$$

onde  $m(r)$  é a função massa.

Utilizando esta igualdade, as equações acima se reescrevem:

$$8\pi k \rho(t) = \frac{2km'}{R^2 R'} \quad (3.1.3)$$

$$R(r,t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km)^{1/3} [t-g(r)]^{2/3} \quad (3.1.4)$$

$$R'(r,t) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left\{ \frac{1}{3} 2km' [2km]^{-2/3} [t-g(r)]^{2/3} + \right. \\ \left. - \frac{2}{3} g' (2km)^{1/3} [t-g(r)]^{-1/3} \right\} \quad (3.1.5)$$

Na região do vacúolo, região II,  $\rho(t) = 0$  e da equação (3.1.3) vemos então que  $m(r) = \text{cte}$ . Porém das regiões I e III, temos que:

$$\frac{1}{8\pi k \rho(t)} = \frac{R^2 R'}{2km'} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{3} [t-g(r)]^2 + \right. \\ \left. - \frac{2}{3} g' \frac{(2km')^{1/3}}{2km'} [t-g(r)] \right\} . \quad (3.1.6)$$

Vemos que o membro esquerdo desta equação é apenas função de  $t$ . Logo, deveremos ter  $g'(r) = 0$ , ou seja,  $g(r) = \text{cte}$  nestas duas regiões.

As três regiões são separadas pelas hipersuperfícies  $r = r_1, r_2 = \text{cte}$ . Então tem-se:

Região I:  $0 \leq r \leq r_1$  (núcleo de matéria)

$$R_I = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2k m_I(r))^{1/3} [t-g_I]^2 \quad (3.1.7a)$$

$$8\pi k \rho_I = \frac{4}{3} \frac{1}{[t-g_I]^2} \quad (3.1.7b)$$

Região II:  $r_1 < r < r_2$  (vazio,  $\rho = 0$ )

$$R_{II} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km_{II})^{1/3} [t-g_{II}(r)]^2 \quad (3.1.8a)$$

$$R'_{II} = -\left(\frac{4km_{II}}{3}\right)^{1/3} g'_{II} [t-g_{II}(r)]^{-1/3} \quad (3.1.8b)$$

Região III:  $r_2 \leq r$  (universo externo)

$$R_{III} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km_{III}(r))^{1/3} [t-g_{III}]^2 \quad (3.1.9a)$$

$$8\pi k \rho_{III} = \frac{4}{3} \frac{1}{[t - g_{III}]^2} \quad , \quad (3.1.9b)$$

onde  $g_I$ ,  $g_{III}$  e  $m_{II}$  são constantes.

Aplicando as condições de Darmois, temos do resultado (2.7.9) que  $R$ ,  $F$  ( $\cong 2\text{km}$ ) e  $f$  devem ser contínuas em  $r=r_1, r_2$ . A continuidade de  $f$  é automaticamente satisfeita, já que  $f = 0$ . Analisando a eq. (3.1.4) vemos então que  $g(r)$  deverá ser contínua também. Temos pois,

$$g_I = g_{II}(r_1) \quad g_{II}(r_2) = g_{III} \quad (3.1.10a)$$

$$m_I(r_1) = m_{II} \quad m_{II} = m_{III}(r_2) \quad (3.1.10b)$$

onde  $g_I$ ,  $g_{III}$  e  $m_{II}$  são constantes.

Da eq. (1.2.21), encontra-se que:

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \rho(t) R^3 \quad (3.1.11)$$

Juntamente com as condições (3.1.10), chega-se a:

$$\begin{aligned} m_I(r_1) &= \frac{4\pi}{3} \rho_I R_I^3(r_1, t) = m_{II} = m_{III}(r_2) = \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_{III} R_{III}^3(r_2, t) \end{aligned} \quad (3.1.12a)$$

que é exatamente a condição (3.1.1).

De fato, se calcularmos a massa medida por um observador localizado na região III, utilizando a eq. (1.2.21), encontramos:

$$m_{III}(r) = 4\pi \int_0^r T^0_0 R' R^2 dr =$$



$$\begin{aligned}
 &= 4\pi \int_0^{r_1} \rho_I R_I' R_I^2 dr + 4\pi \int_{r_2}^r \rho_{III} R_{III}' R_{III}^2 dr = \\
 &= m_I(r_1) + \frac{4}{3} \pi \rho_{III} \left[ R_{III}^3(r,t) - R_{III}^3(r_2,t) \right] \\
 &= \frac{4}{3} \pi \rho_{III} R_{III}^3(r,t) \quad . \quad (3.1.12b)
 \end{aligned}$$

Ou seja, o observador mede a massa contida em todo o universo acessível a ele: a massa total da região I mais a massa referente à parte da região III sobre a qual ele tem acesso.

Dos resultados obtidos acima, vemos que a função  $R(r,t)$  nas regiões I e III pode ser escrita como:

$$R(r,t) = A(t)\sigma(r) \quad , \quad (3.1.13)$$

tal que  $R' = A(t)\sigma'(r)$ . Se substituirmos estes valores na métrica (3.1.2), obtêm-se:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[ \sigma'^2(r) dr^2 + \sigma^2(r) d\Omega^2 \right] \quad . \quad (3.1.14)$$

Se introduzirmos uma nova coordenada tal que

$$\sigma'(r) dr = d\chi \quad (3.1.15)$$

o elemento de linha passará a ser escrito como

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[ d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2 \right] \quad , \quad (3.1.16)$$

que é exatamente o elemento de linha do universo de Friedman da seção euclidiana <sup>(27)</sup>.

Vemos então que podemos fazer  $\sigma(r)$  proporcional a  $r$ , sem perda de generalização. Ou seja, fazemos  $m(r) \sim r^3$ .

Tem-se pois, que:

$$\begin{aligned} m_I(r) &= a r^3 \\ m_{III}(r) &= b r^3 \end{aligned} ,$$

onde  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  são constantes.

Aplicando as condições de contorno (3.1.10b),

$$\begin{aligned} a r_1^3 &= m_{II} \implies a = \frac{m_{II}}{r_1^3} \\ b r_2^3 &= m_{II} \implies b = \frac{m_{II}}{r_2^3} \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Logo,

$$m_I(r) = \frac{m_{II}}{r_1^3} r^3 \quad e \quad m_{III}(r) = \frac{m_{II}}{r_2^3} r^3$$

As singularidades nos universos de Friedman I e III ocorrem nos pontos onde a densidade de energia vai a infinito. De (3.1.7b) e (3.1.9b) vemos que estes pontos correspondem a:

$$t = g_n \quad , \quad n = I, III \quad .$$

Ou seja, estes tempos nos dizem em que instante cada universo explode, ou ainda, em que instante a matéria irrompe no espaço-tempo. Temos então para o universo externo (região III),  $g_{III} = D$ .

Segue do teorema de Birkhoff<sup>(28)</sup> que a métrica da região II é uma outra forma da métrica de Schwarzschild. De fato, dada a métrica na região II,

$$ds_{II}^2 = dt^2 - \frac{2km_{II}}{R} g_{II}^2 dr^2 - R^2 d\Omega^2 \quad , \quad (3.1.17a)$$

pela transformação de coordenadas<sup>(9,29)</sup> (veja Apêndice B-3):

$$g_{II}(r) = \tau - \int \frac{dR}{\left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right) \sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}} \quad (3.1.18a)$$

$$t = \tau - \int \frac{\sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}}{1 - \frac{2km_{II}}{R}} dR \quad (3.1.18b)$$

ou seja

$$g_{II}(r) = \tau - \frac{2}{3} \frac{R^{3/2}}{(2km_{II})^{1/2}} - 2 \sqrt{2km_{II}R} + 2km_{II} \ln \left| \frac{\sqrt{R} + \sqrt{2km_{II}}}{\sqrt{R} - \sqrt{2km_{II}}} \right| \quad (3.1.18c)$$

$$t = \tau - 2 \sqrt{2km_{II}R} + 2km_{II} \ln \left| \frac{\sqrt{R} + \sqrt{2km_{II}}}{\sqrt{R} - \sqrt{2km_{II}}} \right| \quad (3.1.18d)$$

$$t - g_{II}(r) = \frac{2}{3} \left[ \frac{R^3}{2km_{II}} \right]^{1/2} \quad (3.1.18e)$$

Diferenciando:

$$g_{II}' dr = d\tau - \frac{dR}{\left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right) \sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}}$$

$$dt = d\tau - \frac{\sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}}{1 - \frac{2km_{II}}{R}} dR$$

e elevando ao quadrado:

$$g_{II}'^2 dr^2 = d\tau^2 + \frac{dR^2}{\left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right)^2 \frac{2km_{II}}{R}} - \frac{2 dR d\tau}{\left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right) \sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}}$$

$$dt^2 = d\tau^2 + \frac{\frac{2km_{II}}{R}}{\left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right)^2} dR^2 - 2 \frac{\sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}}{\left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right)} dR d\tau$$

substituindo em  $ds_{II}^2$ , temos então:

$$\begin{aligned}
 ds_{II}^2 = & d\tau^2 + \frac{\frac{2km_{II}}{R}}{\left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right)^2} dR^2 - \frac{2\sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}}{1 - \frac{2km_{II}}{R}} dRd\tau + \\
 & - \frac{2km_{II}}{R} \left[ d\tau^2 + \frac{dR^2}{\left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right)^2} - \frac{2 dRd\tau}{\left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right)\sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}} \right] + \\
 & - R^2 d\Omega^2
 \end{aligned}$$

$$ds_{II}^2 = \left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right) d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left(1 - \frac{2km_{II}}{R}\right)} - R^2 d\Omega^2,$$

que é o elemento de linha de Schwarzschild.

Exige-se que  $R' > 0$ ; a área da esfera a duas dimensões  $t, r = \text{cte}$  (área =  $4\pi R^2$ ) deve aumentar com  $r$ . Então da eq. (3.1.8b) vê-se que  $g'_{II} < 0$ . Escolhe-se para  $g_{II}(r)$  a função mais simples possível:  $g_{II}(r) \sim r$ . Levando-se em conta então que  $g'_{II} < 0$ ,  $g_{III} = 0$  e as condições de contorno (3.1.10b), a função  $g_{II}(r)$  pode ser escrita da seguinte forma

$$g_{II}(r) = r_2 - r \tag{3.1.19a}$$

e também que:

$$g_I = r_2 - r_1. \tag{3.1.19b}$$

Finalmente podemos reescrever as eqs. (3.1.7), (3.1.8) e (3.1.9), utilizando os resultados acima obtidos.

Região I:  $0 \leq r \leq r_1$  (núcleo da matéria)

$$R_I = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km_{II})^{1/3} \frac{r}{r_1} \left[ t - (r_2 - r_1) \right]^{2/3} \tag{3.1.20a}$$

$$8\pi k\rho_1 = \frac{4}{3} \frac{1}{\left[ t - (r_2 - r_1) \right]^2} \quad (3.1.20b)$$

Região II:  $r_1 < r < r_2$  (vazio,  $\rho = 0$ )

$$R_{II} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km_{II})^{1/3} \left[ t - (r_2 - r) \right]^{2/3} \quad (3.1.21a)$$

$$\dot{R}_{II} = R'_{II} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km_{II})^{1/3} \frac{2}{3} \left[ t - (r_2 - r) \right]^{-1/3} \quad (3.1.21b)$$

Região III:  $r_2 \leq r$  (região externa)

$$R_{III} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km_{II})^{1/3} \frac{r}{r_2} t^{2/3} \quad (3.1.22a)$$

$$8\pi k\rho_{III} = \frac{4}{3} \frac{1}{t^2} \quad , \quad (3.1.22b)$$

onde  $m_{II}$ ,  $r_1$  e  $r_2$  são constantes.

### 3.2 - CÁLCULO DE $\theta$ (COEFICIENTE DA EXPANSÃO) E DO TEMPO CRÍTICO $t_c$

O coeficiente de expansão  $\theta$  nos é dado por <sup>(27)</sup>:

$$\theta = n^\alpha_{;\alpha} \quad ,$$

onde  $n^\alpha$  é o vetor unitário normal às hipersuperfícies de separação das regiões.

Da Seção 2.6 vemos que  $\theta$  será igual a  $K \equiv K^i_{i=n^i}; i$ .

As únicas componentes não nulas de  $K_{ij}$  calculadas naquela Seção são:

$$K_{22} = R(1+f(r))^{1/2}$$

$$K_{33} = K_{22} \text{ sen}^2 \theta \quad ,$$

tal que, com a ajuda de (1.1.6), temos:

$$K^2_2 = K^3_3 = - \frac{(1+f(r))^{1/2}}{R} \quad .$$

Logo,

$$\theta = K = -2 \frac{(1+f(r))^{1/2}}{R} \quad . \quad (3.2.1)$$

Portanto, como  $f(r)$  e  $R$  são contínuos através das hipersuperfícies de separação,  $k$  será também contínuo. No nosso caso, onde  $f = 0$ , temos então:

$$K = - \frac{2}{R} \quad . \quad (3.2.2)$$

Devemos notar pois, que o resultado (3.2.1) é geral e se aplica também para os casos  $f < 0$  e  $f > 0$ .

Vejamos agora em que instante  $t_c$  o núcleo de matéria alcança o raio gravitacional ( $= 2km_{II}$ ). Para isto basta fazermos:

$$R_I(r_1, t_c) = 2km_{II} \quad (3.2.3)$$

e com a ajuda da eq. (3.1.20a) encontramos:

$$R_I(r_1, t_c) = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km_{II})^{1/3} \left[ \overline{t_c - (r_2 - r_1)} \right]^{2/3} = 2km_{II} \quad .$$

$$t_c = \frac{2}{3} (2km_{II}) + (r_2 - r_1) \quad (3.2.4)$$

Ou seja, a explosão de matéria do núcleo se dá numa re

gião aquẽm do raio gravitacional jã que o tempo crĩtico  $t_c$  ẽ maior que  $(r_2 - r_1)$ , instante inicial para o nũcleo.

### 3.3 - VETORES DE KILLING E HORIZONTES

Como sabemos, a existẽncia de um vetor de Killing ( $\xi^\alpha$ ) ẽ a expressãõ de uma certa propriedade de simetria intrĩnseca do espaço <sup>(32)</sup>, e que satisfaz ã equaçãõ:

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 \quad (3.3.1)$$

No caso de um campo gravitacional estacionãrio pode-se mostrar <sup>(32)</sup> que o espaço contẽm um vetor de Killing tipo tempo ( $\xi^\alpha \xi_\alpha > 0$ ). Este ẽ o caso da soluçãõ de Schwarzschild. Logo, devemos ter tambẽm para a Regiãõ II, um vetor de Killing tipo tempo.

Seja  $\bar{\xi}^\alpha$  este vetor. Em coordenadas de Schwarzschild  $\bar{x}^\alpha = (\tau, R, \theta, \phi)$  as suas componentes sãõ dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^0 &= 1 \\ \bar{\xi}^i &= 0 \end{aligned} \quad \bar{\xi}_0 = 1 - \frac{2km_{II}}{R}, \quad (3.3.2)$$

e no sistema de coordenadas comoventes  $x^\alpha(t, r, \theta, \phi)$  suas componentes  $\xi^\alpha$  sãõ dadas por

$$\xi^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{\xi}^\beta .$$

Com a transformaçãõ de coordenadas dadas por (3.1.18) juntamente com a escolha (3.1.19a), temos

$$\frac{\partial x^0}{\partial \bar{x}^0} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = 1$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial x^0} = \frac{\partial r}{\partial \tau} = -1$$

Logo, (não esquecendo que na região do vázio  $R'_{II} = (\frac{2km_{II}}{R_{II}})^{1/2}$ ),

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \xi_0 = 1 & \xi_1 &= \frac{2km_{II}}{R} = R'^2 \\ \xi^1 &= -1 \end{aligned} \quad (3.3.3a)$$

tal que

$$\xi^2 \equiv \xi^\alpha \xi_\alpha = 1 - \frac{2km_{II}}{R} \quad (3.3.3b)$$

Para  $R > 2km_{II}$ , temos  $\xi^2 > 0$ , ou analogamente, que a métrica é estática. Porém para  $R < 2km_{II}$  vemos que  $\xi^2 < 0$ , e podemos esperar termos então uma métrica independente da coordenada espacial. De fato, para  $R < 2km_{II}$  podemos escrever para a região do vázio (ver Apêndice B):

$$ds^2 = \left(\frac{2km_{II}}{R} - 1\right)^{-1} dR^2 - \left(\frac{2km_{II}}{R} - 1\right) d\tau^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (B.9)$$

Se rebatizarmos as coordenadas tal que:

$$\begin{aligned} R &= \tilde{x}^0 \\ t &= \tilde{x}^1 \end{aligned} .$$

Sejam, respectivamente, agora as coordenadas temporal e espacial, a métrica (B.9) toma a forma

$$ds^2 = \left(\frac{2km_{II}}{\tilde{x}^0} - 1\right)^{-1} (d\tilde{x}^0)^2 - \left(\frac{2km_{II}}{\tilde{x}^0} - 1\right) (d\tilde{x}^1)^2 - (\tilde{x}^0)^2 d\Omega^2, \quad (3.3.4)$$

onde vemos que o tensor métrico depende apenas da coordenada temporal  $\tilde{x}^0$ . Segundo Novikov e Zel'dovich<sup>(33)</sup>, as regiões do espaço-tempo cujo elemento de linha pode ser colocado numa forma semelhante a (3.3.4) ( $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\tilde{x}^0)$ ) são denominadas regiões-T, enquanto que as regiões onde o mesmo pode ser posto da forma



(1.2.1) são chamadas de regiões-R.

Na superfície  $R = 2km_{II}$  vemos de (3.3.3b) que o vetor de Killing se anula. Isto origina um horizonte. O significado deste horizonte será melhor explicado na Seção 3.5. Então com a definição acima temos que a região  $R > 2km_{II}$  é uma região-R, enquanto que para  $R < 2km_{II}$  temos uma região-T.

Nas superfícies delimitadoras das regiões I e II ( $r = r_1, r_2$ , respectivamente),  $\xi^2$  é dado por

i) em  $r = r_1$

$$\xi^2 = 1 - \frac{2km_{II}}{R_I(r_1, t)} = 1 - \left[ \frac{2}{3} \frac{2km_{II}}{t - (r_2 - r_1)} \right]^{2/3}, \quad (3.3.5a)$$

donde para o tempo crítico  $t_c$  dado por (3.2.5), tem-se  $\xi^2 = 0$ . Então para  $t < t_c$ ,  $\xi^2 < 0$  e para  $t > t_c$ ,  $\xi^2 > 0$ .

ii) em  $r = r_2$

$$\xi^2 = 1 - \frac{2km_{II}}{R_{III}(r_2, t)} = 1 - \left[ \frac{2}{3} \frac{2km_{II}}{t} \right]^{2/3} \quad (3.3.5b)$$

vemos que para  $t_0 = \frac{2}{3} (2km_{II})$ ,  $\xi^2 = 0$  e para  $t < t_0$ ,  $\xi^2 < 0$  e  $t > t_0$ , tem-se  $\xi^2 > 0$ .

Nas regiões I e III, as componentes de  $\xi_1 = R'^2$  são dadas por:

$$\xi_1^I = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \frac{(2km_{II})^{2/3}}{r_1} \left[ t - (r_2 - r_1) \right]^{4/3}$$

$$\xi_1^{III} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \frac{(2km_{II})^{2/3}}{r_2} t^{4/3} .$$

Como  $R'$  é descontínuo nas fronteiras, também o será  $\xi_1$ .

### 3.4 - HIPERSUPERFÍCIES ESPECIAIS

Vejamos agora o caráter espaço-temporal das hipersuperfícies  $R = \text{cte}$  ( $t$  e  $r$  variáveis);  $r = \text{cte}$  ( $R$  e  $t$  variáveis);  $t = \text{cte}$  ( $R$  e  $r$  variáveis).

i) Superfícies  $R = \text{cte}$ .

O vetor  $\eta_\alpha$  normal a esta hipersuperfície é dado por:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{\partial R}{\partial t} = \dot{R} & \eta^0 &= \dot{R} \\ \eta_1 &= \frac{\partial R}{\partial r} = R' & \eta^1 &= -(R')^{-1} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

as demais componentes sendo nulas.

Utilizando a notação  $n^2 \equiv n^\alpha n_\alpha = \dot{R}^2 - 1$  onde  $n$  indica a região em questão, tem-se:

$$n^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} (2km_{II})^{2/3} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left[ t - (r_2 - r_1) \right]^{-2/3} - 1 \quad (3.4.2a)$$

$$n^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} (2km_{II})^{2/3} \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 t^{-2/3} - 1 \quad (3.4.2b)$$

$$n^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} (2km_{II})^{2/3} \left[ t - (r_2 - r) \right]^{-2/3} - 1 = \frac{2km_{II}}{R_{II}} - 1 \quad (3.4.2c)$$

as superfícies para as quais  $n^2 > 0$  são tipo espaço, ao passo que para as tipo tempo temos  $n^2 < 0$ .

Vemos que apesar de  $\eta_1$  ser descontínuo através de  $r = r_1, r_2$ , o mesmo não se dá com o seu módulo.

De (3.4.2c) temos que na região-T as superfícies  $R_{II} =$  = cte são tipo espaço ao passo que na região-R elas são tipo -tempo. A superfície nula se dá em  $t = \frac{2}{3} (2km_{II} + r_2 - r)$ , sendo denominada de superfície característica<sup>(28)</sup>.

ii) Superfícies  $r =$  cte.

Temos então, que  $\eta_\alpha = (0, 1, 0, 0)$  e portanto  $\eta^\alpha = (0,$   $-(R')^{-2}, 0, 0)$

$$\eta^2 \equiv \eta^\alpha \eta_\alpha = - \frac{1}{(R')^2}$$

$${}^I \eta^2 = - \left(\frac{2}{3}\right)^{4/3} (2km_{II})^{-2/3} r_1^2 \left[ t - (r_2 - r_1) \right]^{-4/3}$$

$${}^{III} \eta^2 = - \left(\frac{2}{3}\right)^{4/3} (2km_{II})^{-2/3} r_2^2 t^{-4/3}$$

$${}^{II} \eta^2 = - \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km_{II})^{-2/3} \left[ t - (r_2 - r) \right]^{2/3} .$$

Vemos que neste caso tanto as componentes de  $\eta_\alpha$  como o seu módulo são descontínuos através das superfícies delimitadoras.

Também verifica-se que as superfícies são sempre tipo tempo.

iii) Superfícies  $t =$  cte.

Para este caso tem-se  $\eta_\alpha = (1, 0, 0, 0) = \eta^\alpha$  e as superfícies são sempre tipo-espaço.

### 3.5 - BURACOS BRANCOS

Como já foi citado antes, o fato de em  $R_{II} = 2km_{II}$  o vetor de Killing se anular implica em termos apenas um horizonte de eventos e não uma singularidade no espaço-tempo. De fato, se calcularmos o invariante  $I = R_{\alpha\beta\gamma\rho} R^{\alpha\beta\gamma\rho}$  encontra-se<sup>(\*)</sup> para a região II que:

$$I = \frac{12(2km_{II})^2}{R_{II}^6} = \frac{12}{\left[\frac{3}{2}(t-(r_2-r))\right]^4} \quad (3.5.1)$$

Vemos portanto que não há singularidade essencial em  $R_{II} = 2km_{II}$ , pois aí  $I$  é finito. O mesmo acontece com os outros invariantes:

$$\eta^{BD} \delta_A^C R^A{}_{BCD} \quad ; \quad R_{ABCD} {}^*R^{ABCD} \quad ; \quad {}^*R_{ABCD} {}^*R^{ABCD}$$

onde  ${}^*R_{ABCD} = \frac{1}{4} \eta^{ABEF} R_{EFGH} \eta^{GHCD}$  é o duplo dual de  $R_{ABCD}$  e  $\eta^{ABCD} = 1/\sqrt{-g} \epsilon^{ABCD}$  onde  $\epsilon^{ABCD}$  é o símbolo de Levi-Civita.

Para melhor entendermos o significado deste horizonte vamos transformar a métrica na região II dada em coordenadas comoventes:

$$ds_{II}^2 = dt^2 - 2k \frac{m_{II}}{R} g'_{II}{}^2 dr^2 - R^2 d\Omega^2 \quad ,$$

onde  $R = R_{II}$  por simplificação, e utilizamos  $g_{II}(r)$  para uma maior generalização, para a forma de Eddington-Finkelstein em coordenadas avançadas<sup>(28,35,36)</sup>. O conjunto de transformações é dado

(\*) Ernesto von Ruckert - "Buracos Negros" - CBPF (1980) - Notas de aula do curso "Tópicos de Gravitação".

$$t = \bar{t} - \int \frac{\sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}}{1 + \sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}} dR \quad (3.5.2a)$$

$$g_{II}(r) = \bar{t} - \int \left( \sqrt{\frac{R}{2km_{II}}} + \frac{\sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}}{1 + \sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}} \right) dR \quad (3.5.2b)$$

$$t - g_{II}(r) = \int \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2km_{II}}} dR = \frac{2}{3} \left( \frac{R^3}{2km_{II}} \right)^{1/2} \quad (3.5.2c)$$

onde esta última  $\bar{t}$  decorrente das outras duas.

Integrando, e utilizando a substituição  $x^2 = \frac{2km_{II}}{R}$ , ob-  
têm-se:

$$\begin{aligned} t &= \bar{t} - 4km_{II} \frac{1 + \sqrt{2km_{II}/R}}{\sqrt{2km_{II}/R}} + 4km_{II} \ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{2km_{II}/R}}{\sqrt{2km_{II}/R}} \right\} = \\ &= \bar{t} - 2 \sqrt{2km_{II}R} - 2 \sqrt{2km_{II}} + 4km_{II} \ln \left\{ \frac{\sqrt{R} + \sqrt{2km_{II}}}{\sqrt{2km_{II}}} \right\} \end{aligned} \quad (3.5.3a)$$

$$\begin{aligned} g_{II}(r) &= \bar{t} - 4km_{II} \ln \left\{ \frac{\sqrt{R} + \sqrt{2km_{II}}}{\sqrt{2km_{II}}} \right\} - 2 \sqrt{2km_{II}R} - 2 \sqrt{2km_{II}} + \\ &\quad - \frac{2}{3} \left( \frac{R^3}{2km_{II}} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.5.3b)$$

Diferenciando as eqs. (3.5.2),

$$dt = d\bar{t} - \frac{\alpha}{1+\alpha} dR$$

$$g'_{II} dr = d\bar{t} - \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \right) dR \quad \text{onde} \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{2km_{II}}{R}}.$$

Elevando ao quadrado,

$$dt^2 = (d\bar{t})^2 + \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} (dR)^2 - \frac{2\alpha}{1+\alpha} dR dt$$

$$g'_{II}{}^2 dr^2 = (d\bar{t})^2 + \left[ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} + \frac{2}{1+\alpha} \right] (dR)^2 - 2 \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \right) dR d\bar{t}$$

Podemos ainda escrever que:

$$g_{II} = - \frac{2km_{II}}{R} g'_{II}{}^2 = -\alpha^2 g'_{II}{}^2 \quad (3.5.4)$$

Substituindo este valor em  $ds_{II}^2$ ,

$$ds_{II}^2 = (1-\alpha^2)d\bar{t}^2 + \left[ \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} - \alpha^2 \left( \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} + \frac{2}{1+\alpha} \right) \right] dR^2 +$$

$$+ 2 \left[ \alpha^2 \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \right) - \frac{\alpha}{1+\alpha} \right] dR d\bar{t} - R^2 d\Omega^2$$

$$ds_{II}^2 = \left( 1 - \frac{2km_{II}}{R} \right) d\bar{t}^2 - \left( 1 + \frac{2km_{II}}{R} \right) dR^2 + 2 \frac{2km_{II}}{R} dR d\bar{t} + R^2 d\Omega^2 \quad (3.5.5)$$

Para a transformação deste elemento de linha na forma de Schwarzschild vide Apêndice B.4.

As direções radiais nulas ( $\theta, \phi = cte$ ) são determinadas pela equação:

$$ds_{II}^2 = \left( 1 - \frac{2km_{II}}{R} \right) d\bar{t}^2 - \left( 1 + \frac{2km_{II}}{R} \right) dR^2 + \frac{4km_{II}}{R} dR d\bar{t} = 0$$

ou ainda,

$$(d\bar{t} - dR) \left[ \left( 1 - \frac{2km_{II}}{R} \right) d\bar{t} + \left( 1 + \frac{2km_{II}}{R} \right) dR \right] = 0$$

E as duas direções nulas são dadas por:

$$\frac{dR}{d\bar{t}} = 1 \quad e \quad \frac{dR}{d\bar{t}} = - \frac{(R - 2km_{II})}{R + 2km_{II}} \quad (3.5.6)$$

As linhas tangentes a qualquer uma das direções (3.5.6) são as geodésicas nulas radiais. A primeira família das geodésicas tem uma equação muito simples:

$$\bar{t} - R = \text{cte.} \quad , \quad (3.5.7a)$$

enquanto que para a segunda família tem-se:

$$\bar{t} = -R - 4\text{km}_{\text{II}} \ln |2\text{km}_{\text{II}} - R| + \text{cte} \quad (3.5.7b)$$

Porém a tangente a esta última família de geodésicas possui as seguintes propriedades:

- 1ª)  $\frac{dR}{d\bar{t}} \rightarrow -1$  quando  $R \rightarrow \infty$  ;
- 2ª)  $\frac{dR}{d\bar{t}} \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow 2\text{km}_{\text{II}}$  ;
- 3ª)  $\frac{dR}{d\bar{t}} \rightarrow 1$  quando  $R \rightarrow 0$

Da segunda propriedade vemos que as geodésicas não atravessam a superfície  $R = 2\text{km}_{\text{II}}$ . Isto pode ser visto com maior clareza se traçarmos o gráfico  $(\bar{t}, R)$ , com os cones de luz (ver Fig.3.5.1).

As linhas retas paralelas correspondem à família de geodésicas nulas (3.5.7a).

Partículas físicas movem-se em linhas de universo tipo tempo ou nulas, isto é, em linhas que estão no interior ou na superfície dos cones de luz. Vemos então que nenhuma partícula pode atravessar a hipersuperfície  $R = 2\text{km}_{\text{II}}$  vinda da região-R, e que qualquer partícula situada em algum instante na região-T irá necessariamente se movimentar na direção do horizonte, alcançando-o num tempo próprio finito. Esta seria a descrição em coordenadas avançadas, de um buraco branco.

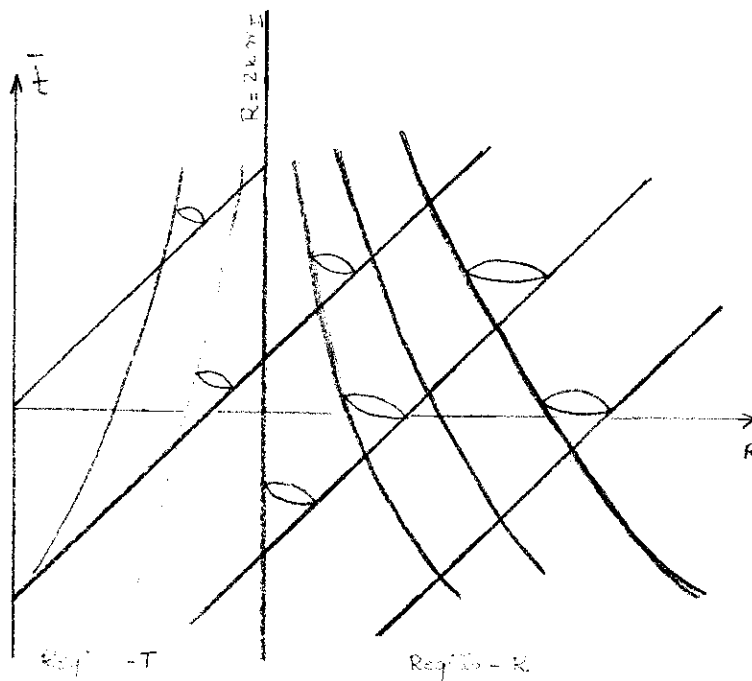


Figura 3.5.1 - Gráfico  $(\bar{t}, R)$  e cones de luz.

Vejamos como ficaria este gráfico, na região do vazio, utilizando coordenadas comoventes <sup>(37)</sup>; da mesma forma que anteriormente,  $\theta$  e  $\phi$  são fixos (vide Fig. 3.5.2).

Do invariante dado por (3.5.1) vemos que a singularidade do espaço-tempo ocorre em  $R_{II} = 0$ , ou seja, ela seria representada no gráfico pela reta  $t = r_2 - r$ . As superfícies  $R_{II} = cte$ , são representadas por  $t = -r + cte$ , sendo do tipo tempo na região  $R$ . Com a métrica dada por (3.1.17a) as geodésicas nulas radiais são dadas por:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left( \frac{2km_{II}}{R_{II}} \right)^{1/2} .$$

Na região externa à esfera de Schwarzschild (região-R) as linhas  $R_{II} = cte$  estão dentro dos cones de luz (tipo-tempo) e na região-T elas estão fora dos mesmos. Vemos também que os



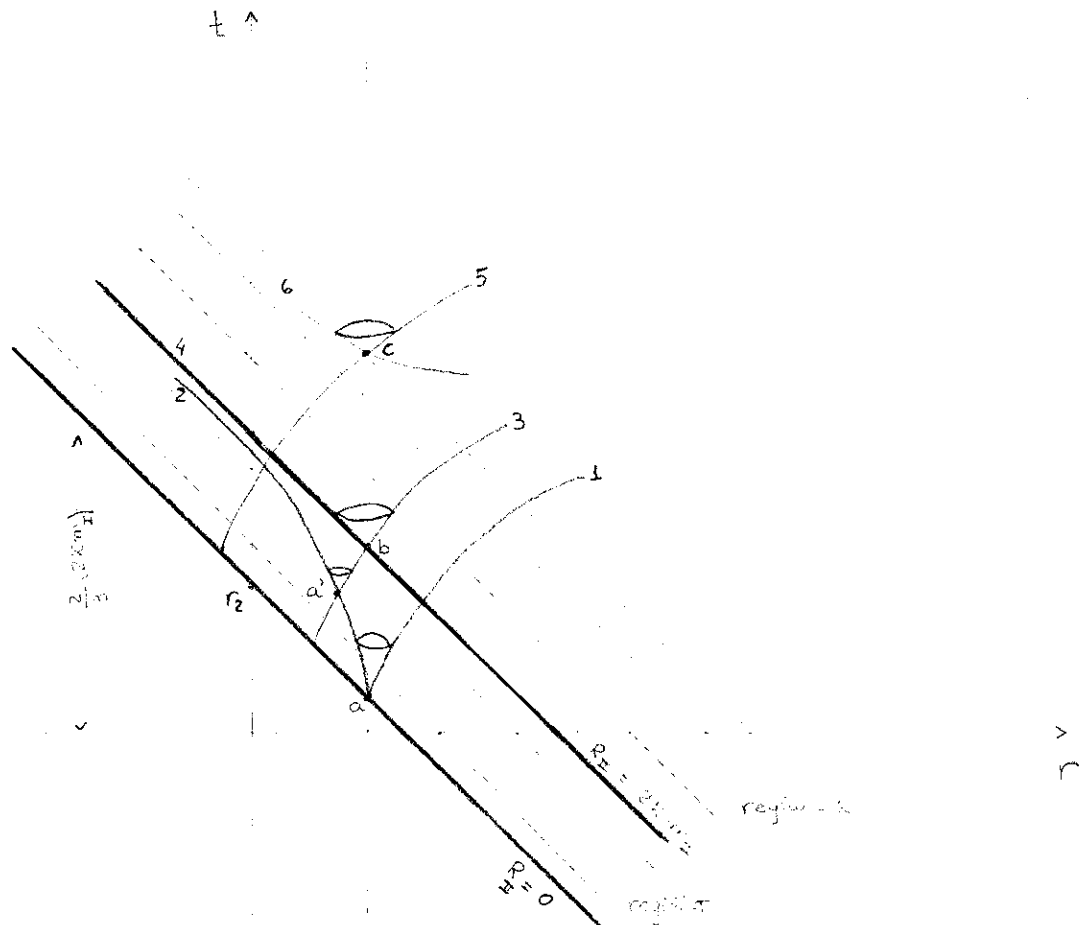


Figura 3.5.2 - Dos dois raios radiais de luz que passam através do evento  $a$ , um se propaga para o infinito (1), enquanto que o outro (2) tende assintoticamente à reta  $R = 2km_{II}$  (2). Para o evento  $b$ , localizado no horizonte, um dos raios se propaga para o infinito (3), enquanto que o outro segue a linha do universo do raio gravitacional (4). Para o evento  $C$ , ambos os raios se dirigem para o infinito. Para qualquer evento situado na região-I ( $a'$  por exemplo) os dois raios de luz que passam através daquele, são originários necessariamente do centro (3) e (2). Para o situado no horizonte ( $b$ ) um é propagado do centro (3) enquanto que o outro segue a linha do universo do horizonte (4). Para o evento  $C$ , um é originário do centro (5) ao passo que o outro é originário do infinito (6).

raios de luz que escapam da superfície de um corpo após  $R_{II} = 2km_{II}$  nunca atingem a região-T (as regiões são separadas por um horizonte de eventos). Ou seja, para um observador externo na região-R, ele pode sempre ter informações provenientes da região-T, porém não pode enviar nenhuma para a mesma.

Esta situação em que nenhum raio de luz vindo da região-R pode penetrar na região-T é a de um buraco branco, indicando uma situação reversa àquela do buraco negro, onde nenhum raio de luz pode penetrar na região-R proveniente da região-T. Ela é obtida simplesmente por uma reversão do tempo. Deve-se notar porém, que buracos brancos e negros são mutuamente exclusivos, ou seja, embora a extensão analítica do espaço-tempo de Schwarzschild produza estas duas situações, elas são desconectadas e portanto impossíveis de coexistirem.

Vemos então que como a extensão física do espaço-tempo externo de Schwarzschild para a região interna à esfera de Schwarzschild tem duas soluções, devemos tomar cuidado com a escolha da extensão ao fazermos a ligação da solução interna de uma esfera massiva com a região do vazio. Iremos denominar de região- $T_+$ , a extensão que produz o buraco branco, e de  $T_-$  a que produz o buraco negro. Se temos uma esfera colapsando, a superfície da esfera quando esta atravessa o raio gravitacional tem a direção de seu movimento orientada para o centro, e por continuidade, as partículas testes próximas à superfície também têm a mesma direção, característica da região- $T_-$ . Porém, se no início tivermos que a velocidade das partículas que constituem a esfera estão orientadas no sentido contrário ao do centro, sendo o raio da esfera menor que  $2km_{II}$ , devemos fazer a ligação da solução interna com a região do vazio  $T_+$ .

Consideremos agora como a expansão de uma esfera através do raio gravitacional aparecerá para um observador externo. A primeira idéia que nos vem à cabeça é que já que temos inversão temporal, o observador só veria a esfera quando ela irrompesse através do raio gravitacional. Tal não acontece porém; em ambos os casos (expansão e colapso gravitacional) o observador vê o corpo através dos raios luminosos que emergem da sua superfície, ao passo que a inversão temporal muda apenas o sentido dos raios, passando-os de emergentes para incidentes e vice-versa. Então o observador externo vê todo o processo de expansão, a partir de sua erupção singular no espaço-tempo.

Façamos agora um gráfico reunindo as 3 regiões do universo de Novikov, descritas pelas eqs. (3.1.20), (3.1.21) e (3.1.22), juntamente com a métrica (3.1.2) <sup>(25,38)</sup>. Ver Figura 3.5.3 na próxima página.

Consideremos agora como a expansão de uma esfera através do raio gravitacional aparecerá para um observador externo. A primeira idéia que nos vem à cabeça é que já que temos inversão temporal, o observador só veria a esfera quando ela irrompesse através do raio gravitacional. Tal não acontece porém; em ambos os casos (expansão e colapso gravitacional) o observador vê o corpo através dos raios luminosos que emergem da sua superfície, ao passo que a inversão temporal muda apenas o sentido dos raios, passando-os de emergentes para incidentes e vice-versa. Então o observador externo vê todo o processo de expansão, a partir de sua erupção singular no espaço-tempo.

Façamos agora um gráfico reunindo as 3 regiões do universo de Novikov, descritas pelas eqs. (3.1.20), (3.1.21) e (3.1.22), juntamente com a métrica (3.1.2) <sup>(25,38)</sup>. Ver Figura 3.5.3 na próxima página.



Figura 3.5.3 - As singularidades em todas as regiões ocorrem em  $R = 0$ . As superfícies  $R_{II} = \text{cte}$  são tipo-espaço na região- $T_+$  e tipo-tempo na região-R.

### 3.6 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE 5 CAMADAS DO UNIVERSO DE NOVIKOV

Antes de fazermos a generalização para um modelo de  $n$  camadas, façamos primeiramente o de cinco camadas, para uma melhor visualização.

Teremos agora duas camadas de massas atrasadas em relação ao universo externo, o qual é novamente tomado como Friedman de seção euclidiana ( $\epsilon = 0$ ), intercaladas por camadas de vácuo. Podemos fazer o seguinte esquema:

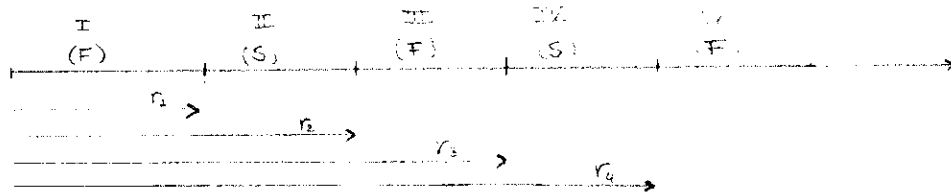


Figura 3.6.1 - Esquemática do universo de Novikov generalizado para 5 camadas.

As regiões II e IV são as camadas de vácuo, denominadas por S (de Schwarzschild). As geometrias I e III são as camadas de matéria atrasadas em relação ao universo externo  $V$ ; a letra F designa estas três geometrias de Friedman com seção euclidiana. Em relação às superfícies delimitadoras temos:

$$\text{Região I} : 0 \leq r \leq r_1$$

$$\text{Região II} : r_1 < r < r_2$$

$$\text{Região III} : r_2 \leq r \leq r_3$$

$$\text{Região IV} : r_3 < r < r_4$$

$$\text{Região V} : r_4 \leq r$$

Todas as regiões são descritas pelo elemento de linha

(3.1.2), a densidade de matéria  $\rho_n$  é dada por (1.1.11) em cada uma delas,  $n = I, II, III, IV$  e  $V$ , e também a forma de  $R_n$  é a mesma que a anterior (1.1.13).

Aplicando as condições de contorno de Darmois, encontramos condições semelhantes às relações (3.1.10):

$$\left. \begin{aligned} g_I &= g_{II}(r_1) \\ g_{II}(r_2) &= g_{III} \\ g_{III} &= g_{IV}(r_3) \\ g_{IV}(r_4) &= g_V = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6.1a)$$

$$\left. \begin{aligned} m_I(r_1) &= m_{II} \\ m_{II} &= m_{III}(r_2) \\ m_{III}(r_3) &= m_{IV} \\ m_{IV} &= m_V(r_4) \end{aligned} \right\} \quad (3.6.1b)$$

onde  $g_I, g_{III}, g_V, m_{II}$  e  $m_{IV}$  são constantes.

Da forma funcional de  $g(r)$  dada por (3.1.19) temos então:

$$\begin{aligned} g_V &= 0 & ; & & g_{IV} &= r_4 - r & ; & & g_{III} &= r_4 - r_3 & ; \\ g_{II} &= r_4 - r_3 + r_2 - r & ; & & g_I &= r_4 - r_3 + r_2 - r_1 \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Da Seção 3.1 vimos que podíamos escrever:

$$\begin{aligned} m_I(r) &= a_I r^3 \\ m_{III}(r) &= a_{III} r^3 \\ m_V(r) &= a_V r^3 \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

onde  $a_I, a_{III}$  e  $a_V$  são constantes. Com as condições dadas por (3.6.1b) temos então:

$$a_I = \frac{m_{II}}{r_1^3} \quad ; \quad a_{III} = \frac{m_{IV}}{r_3^3} \quad ; \quad a_V = \frac{m_{IV}}{r_4^3} \quad (3.6.4a)$$

ou ainda

$$m_I(r) = m_{II} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 \quad ; \quad m_{III}(r) = m_{IV} \left(\frac{r}{r_3}\right)^3 \quad ; \quad m_V = m_{IV} \left(\frac{r}{r_4}\right)^3 \quad . \quad (3.6.4b)$$

As equações (3.6.1b) também nos fornecem uma relação entre as massas  $m_n(r)$ :

$$m_{IV} = \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^3 = m_{II} \quad , \quad (3.6.4c)$$

e substituindo esta relação nas eqs. (3.6.4b) e (3.6.4a), obtêm-se:

$$\left. \begin{aligned} m_I(r) &= m_{II} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 \\ m_{III}(r) &= m_{II} \left(\frac{r}{r_2}\right)^3 \\ m_V(r) &= \left(\frac{r_3 r}{r_4 r_2}\right)^3 m_{II} \end{aligned} \right\} \quad (3.6.5a)$$

$$\left. \begin{aligned} a_I &= \frac{m_{II}}{r_1^3} \\ a_{III} &= \frac{m_{II}}{r_2^3} = a_I \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \\ a_V &= \left(\frac{r_3}{r_2 r_4}\right)^3 m_{II} = \left(\frac{r_3 r_1}{r_4 r_2}\right)^3 a_I \end{aligned} \right\} \quad (3.6.5b)$$

Para a relação (3.1..12a) temos:

$$m_I(r_1) = \frac{4}{3} \pi \rho_I R_I^3(r_1, t) = m_{II} = m_{III}(r_2) = \frac{4}{3} \pi \rho_{III} R_{III}^3(r_2, t) \quad (3.6.6)$$

$$m_{III}(r_3) = \frac{4}{3} \pi \rho_{III} R_{III}^3(r_3, t) = m_{IV} = \frac{4}{3} \pi \rho_V R_V^3(r_4, t)$$

Das relações (3.6.2) podemos ver que:



$$\begin{aligned}g_V &= 0 \\g_{III} &= g_V + r_4 - r_3 \\g_I &= g_{III} + r_2 - r_1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}g_{IV} &= g_V + r_4 - r \\g_{II} &= g_{III} + r_2 - r\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

De (3.2.2):

$$\begin{aligned}\theta_I &= -\frac{2}{R_I}, \quad \theta_{II} = -\frac{2}{R_{II}}; \quad \theta_{III} = -\frac{2}{R_{III}}; \quad \theta_{IV} = -\frac{2}{R_{IV}}; \\ \theta_V &= -\frac{2}{R_V}.\end{aligned} \tag{3.6.8}$$

Como agora temos 2 regiões atrasadas (I e III), teremos, também, dois  $t_c$ , respectivos aos instantes em que:

$$R_I = (r_1, t_{c_I}) = 2km_{II} \tag{3.6.9}$$

$$R_{III} = (r_3, t_{c_{III}}) = 2km_{IV}$$

$$t_{c_I} = \frac{2}{3} 2km_{II} + g_I \tag{3.6.10}$$

$$t_{c_{III}} = \frac{2}{3} 2km_{IV} + g_{III}$$

Finalmente, podemos fazer um gráfico semelhante ao da Fig. 3.5.3 (ver Fig. 3.6.2, pág. seguinte).

t A

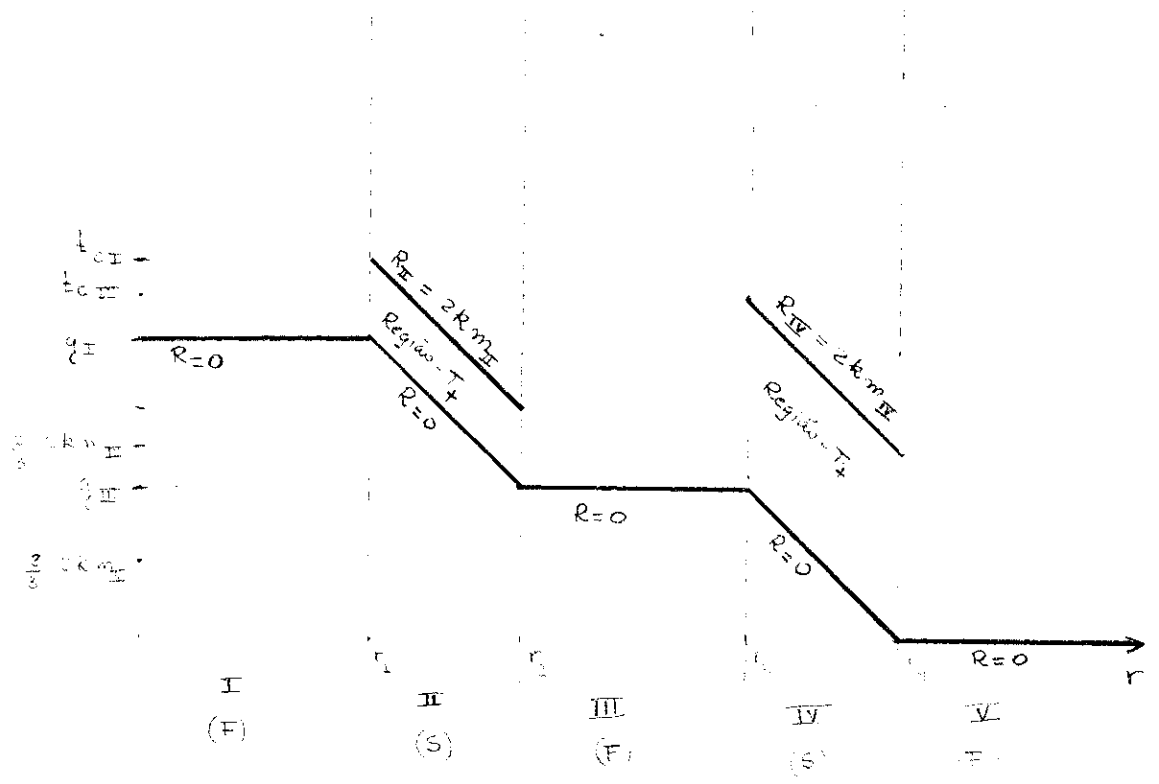


Figura 3.6.2 - Gráfico (t,r).

3.7 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE n CAMADAS

Este modelo é a generalização do universo de Novikov, composto de camadas de matéria, cada uma sendo uma geometria de Friedmann de seção euclidiana ( $\epsilon = 0$ ), intercaladas por regiões de vazio.

O universo de Friedmann externo será denotado por  $K$ , sendo que as regiões de matéria são aquelas em que  $n = I, III, V, \dots$ , e as do vazio  $n+1 = II, IV, VI, \dots$ . Então obtemos as seguintes fórmulas, para  $n$  ímpar:

$$\left. \begin{aligned} R_n(r,t) &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km_n(r))^{1/3} (t-g_n)^{2/3} \\ R_{n+1}(r,t) &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} (2km_{n+1})^{1/3} (t-g_{n+1}(r))^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (3.7.1)$$

$$8\pi k \rho_n(t) = \frac{4}{3} \frac{1}{(t-g_n)^2} \quad . \quad (3.7.2)$$

A generalização das eqs. (3.6.5) nos fornece:

$$a_n = \left[ \frac{\bar{r}_{n-2} \ r_{n-4} \ r_{n-6} \ \dots \ r_1}{r_{n-1} \ r_{n-3} \ r_{n-5} \ \dots \ r_2} \right]^3 a_I \quad , \quad (a_I = \frac{m_{II}}{r_1}) \quad ; \quad (3.7.3)$$

$$m_n(r_n) = \left[ \frac{\bar{r}_n \ r_{n-2} \ r_{n-4} \ \dots \ r_3}{r_{n-1} \ r_{n-3} \ r_{n-5} \ \dots \ r_2} \right]^3 m_{II} \quad , \quad m_I(r_1) = m_{II} \quad ; \quad (3.7.4)$$

$$m_n(r) = \frac{4}{3} \pi \rho_n R_n^3(r,t) = a_n r^3 \quad . \quad (3.7.5)$$

E para as eqs. (3.6.7):

$$\begin{aligned}g_n &= g_{n+2} + r_{n+1} - r_n \\g_{n+1} &= g_n + r_n - r \\g_k &= 0\end{aligned}\tag{3.7.6}$$

Das equações (3.6.8)

$$\theta_n = \frac{-2}{R_n} \quad ; \quad \theta_{n+1} = \frac{-2}{R_{n+1}} \quad .\tag{3.7.7}$$

E para as equações (3.6.10):

$$t_{c_n} = \frac{2}{3} 2 km_{n+1} + g_n\tag{3.7.8}$$

Da mesma forma pode-se traçar também um gráfico como o da Figura 3.6.2.

## CAPÍTULO 4

### GENERALIZAÇÃO DO MODELO DE NOVIKOV UTILIZANDO O MODELO DE FRIEDMANN DE SEÇÃO ABERTA ( $\epsilon = -1$ )

A construção deste modelo é idêntica ao anterior, são que agora as regiões de matéria são representadas por geometrias de Friedmann com seção aberta ( $\epsilon = -1$ ). Veremos porém, que algumas dificuldades aparecem; portanto, iremos tratar primeiramente de um modelo constituído de um núcleo de matéria localizado no vácuo, para depois construirmos o modelo de três camadas e, em seguida, a sua generalização.

#### 4.1 - NÚCLEO DE MATÉRIA IMERSO NO VÁCUO

Da mesma forma que no Capítulo anterior, iremos utilizar também a solução de Tolman, mas são que agora teremos  $f > 0$ . A métrica então, para cada região, é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R'^2}{1+f(r)} dr^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (1.1.6)$$

com a densidade de matéria  $\rho(t)$ :

$$8\pi k\rho(t) = \frac{F'(r)}{R^2 R'} \quad (1.1.11)$$

A função  $R(r,t)$  é dada agora como função do tempo  $t$

através das equações paramétricas (1.1.15) e (1.1.16):

$$R = \frac{F}{2f} (\cosh \eta - 1) \quad (1.1.15)$$

$$t = \frac{F}{2f^{3/2}} \left[ \sinh \eta - \eta \right] + g(r) \quad (1.1.16)$$

onde

$$g(r) \equiv t_0(r) - \frac{F}{2f^{3/2}} \ln F \quad (4.1.1)$$

Mas de (1.2.20),  $F(r) = 2km(r)$ , tal que para cada região as equações acima são descritas:

Região I:  $0 \leq r \leq r_1$  (núcleo de matéria)

$$R_I = \frac{km_I(r)}{f_I} (\cosh \eta_I - 1) \quad (4.1.2a)$$

$$t = \frac{km_I(r)}{f_I^{3/2}} \left[ \sinh \eta_I - \eta_I \right] + g_I(r) \quad (4.1.2b)$$

$$8\pi k \rho_I = 2km'_I / R_I^2 R'_I \quad (4.1.2c)$$

Região II:  $r_1 < r$  (vazio)

$$R_{II} = \frac{km_{II}}{f_{II}} (\cosh \eta_{II} - 1) \quad (4.1.3a)$$

$$t = \frac{km_{II}}{f_{II}^{3/2}} \left[ \sinh \eta_{II} - \eta_{II} \right] + g_{II}(r) \quad (4.1.3b)$$

onde  $m_{II} = \text{cte.}$

A derivada de R em relação a r é dada por:

$$R' = \left( \frac{km'}{f} - \frac{kmf'}{f^2} \right) (\cosh \eta - 1) + \frac{km}{f} \sinh \eta \frac{\partial \eta}{\partial r} .$$

A derivada parcial  $\partial \eta / \partial r$  pode ser calculada a partir de (1.1.16). Reescrevendo esta equação da forma:

$$\sinh \eta - \eta = \frac{f^{3/2}}{km} \left[ t - g(r) \right] ,$$

temos

$$(\cosh \eta - 1) d\eta = \left[ \left( \frac{3}{2} \frac{f^{1/2} f'}{km} - \frac{f^{3/2} km'}{(km)^2} \right) (t - g) - \frac{g'(r) f^{3/2}}{km} \right] dr + \frac{f^{3/2}}{km} dt$$

tal que:

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{(\cosh \eta - 1)} \frac{f^{3/2}}{km} \left\{ \left[ \frac{3}{2} \frac{f'}{f} - \frac{m'}{m} \right] (t - g) - g'(r) \right\} \quad (4.1.4a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{f^{3/2}}{km(\cosh \eta - 1)} \quad (4.1.4b)$$

Substituindo então o valor de (4.1.4a) em  $R'$ , obtemos:

$$R' = \frac{km}{f} \left\{ \left( \frac{m'}{m} - \frac{f'}{f} \right) (\cosh \eta - 1) + \frac{\sinh \eta}{(\cosh \eta - 1)} \frac{f^{3/2}}{km} \left[ \left( \frac{3}{2} \frac{f'}{f} - \frac{m'}{m} \right) \cdot (t - g) - g'(r) \right] \right\} \quad (4.1.5)$$

Na Seção 3.1 nós substituímos o valor de  $R'$  na expressão da densidade  $\rho$ , uma vez que esta é apenas função do tempo, para encontrarmos um possível valor de  $g(r)$ . Vemos porém, que para o caso aqui tratado, este método se torna extremamente complicado. Mas com a escolha de

$$\frac{m_I}{f_I^{3/2}} = a \quad (4.1.6a)$$

, a, b = cte

$$g_I(r) = b \quad (4.1.6b)$$

$R_I$  e  $t$  passam a ser escritos como:

$$R_I = ka f_I^{1/2} (\cosh \eta_I - 1) \quad (4.1.7a)$$

$$t = ka \left[ \sinh \eta_I - \eta_I \right] + b \quad (4.1.7b)$$

ou seja, o parâmetro  $\eta_I$  passa a ser apenas uma função de  $t$  e as eqs. (4.1.4) se tornam:

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial r} = 0 \quad (4.1.8a)$$

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial t} = \frac{1}{ka(\cosh \eta_I - 1)} \quad (4.1.8b)$$

Então para estes valores temos que:

$$\begin{aligned} 8\pi k \rho_I &= \frac{2km'_I}{R'_I R_I^2} = \frac{3a f'_I f_I^{1/2} k}{\frac{ka}{2} f'_I f_I^{-1/2} (\cosh \eta_I - 1) k^2 a^2 f_I (\cosh \eta_I - 1)^2} = \\ &= \frac{6}{k^2 a^2 (\cosh \eta_I - 1)^3} \quad (4.1.9) \end{aligned}$$

E vemos que  $\rho_I$  será apenas função de  $t$  (implicitamente) como esperávamos.

A região I quando descrita pelas eqs. (4.1.7) representa um universo de Friedman com seção aberta ( $\epsilon = -1$ ). De fato, escrevendo a métrica deste universo <sup>(27)</sup>,

$$ds^2 = dt^2 - a^2 k^2 (\cosh \eta - 1)^2 \left[ dx^2 + (\sinh \chi)^2 d\Omega^2 \right] \quad (4.1.10)$$



juntamente com a métrica da região I ((1.1.6) e (4.1.7a)):

$$ds^2_I = dt^2 - a^2 k^2 (\cosh \eta_I - 1)^2 \left[ \frac{f_I'^2}{4f_I(1+f_I)} dr^2 + f_I d\Omega^2 \right] . \quad (4.1.11)$$

Podemos passar da métrica (4.1.11) para a métrica (4.1.10) através da transformação de coordenadas  $f_I^{1/2} = \sinh \chi$ , já que

$$\begin{aligned} \cosh \chi d\chi &= \frac{1}{2} \frac{f_I'}{f_I^{1/2}} dr \\ d\chi &= \left( \frac{1}{2} \frac{f_I'}{f_I^{1/2}} \frac{1}{\cosh \chi} \right) dr = \frac{1}{2} \frac{f_I'}{f_I^{1/2}} \frac{dr}{(1+f_I)^{1/2}} . \end{aligned}$$

Podemos então escrever

$$f_I(r) = (\sinh r)^2 , \quad (4.1.12)$$

e a métrica (4.1.11) passa a ser escrita

$$ds^2_I = dt^2 - k^2 a^2 (\cosh \eta_I - 1)^2 \left[ dr^2 + \sinh^2 r d\Omega^2 \right] . \quad (4.1.13)$$

Com este valor de  $f_I$  vemos que as condições  $R_I' > 0$  e  $f_I > 0$  são satisfeitas.

Devemos ainda determinar a função  $m_I(r)$ . Iremos utilizar, para tal, as condições de contorno de Darmois. Do resultado (2.7.9) tem-se que  $m(r)$  deve ser contínua em  $r = r_1$ . Ou seja,

$$m_I(r_1) = m_{II} . \quad (4.1.14)$$

Mas de (4.1.6a) e de (4.1.12),

$$\frac{m_I(r)}{f_I^{3/2}} = \frac{m_I(r)}{\sinh^3 r} = a \quad \therefore \quad m_I(r) = a \sinh^3 r .$$

A equação acima quando calculada em  $r = r_1$  nos fornece, via (4.1.14),

$$m_I(r_1) = m_{II} = a \operatorname{senh}^3 r_1 \quad \therefore \quad a = \frac{m_{II}}{\operatorname{senh}^3 r_1} \quad (4.1.15)$$

Logo,

$$m_I(r) = \frac{m_{II}}{\operatorname{senh}^3 r_1} \operatorname{senh}^3 r \quad (4.1.16)$$

Reunindo estes resultados, podemos escrever para a região I ( $0 \leq r \leq r_1$ ):

$$R_I = \frac{km_{II}}{\operatorname{senh}^3 r_1} \operatorname{senh} r (\cosh \eta_I - 1) \quad (4.1.17a)$$

$$t = \frac{km_{II}}{\operatorname{senh}^3 r_1} (\operatorname{senh} \eta_I - \eta_I) \quad (4.1.17b)$$

$$8\pi k \rho_I = \frac{6 \operatorname{senh}^6 r_1}{(km_{II})^2 (\cosh \eta_I - 1)^3} \quad (4.1.17c)$$

$$m_I(r) = \frac{4}{3} \pi \rho_I R_I^3 \quad (4.1.17d)$$

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial t} = \frac{\operatorname{senh}^3 r_1}{km_{II}} \frac{1}{(\cosh \eta_I - 1)} \quad , \quad (4.1.17e)$$

onde temos feito  $b = 0$ , para que a singularidade essencial  $\eta_I = 0$  ocorra no instante  $t = 0$ .

Das condições de Darboux, temos que  $R$  e  $f$  devem ser também contínuas em  $r = r_1$ . Comparando as eqs. (4.1.3a) e (4.1.17a) vemos que a continuidade destas duas funções implica na continuidade do parâmetro  $\eta$ . Por outro lado, como o sistema de coordenadas comovientes  $(t, r, \theta, \phi)$  não possui singularidades e cobre toda a variedade, temos que devido à continuidade de  $\eta$ ,  $g_{II}(r)$  deve se anular em  $r = r_1$ . Estas condições restringem os possíveis valores

para as funções  $f_{II}$ ,  $g_{II}$  e o parâmetro  $\eta_{II}$ , porém não é possível explicitar de um modo simples as suas equações. Elas devem ser tais que obedecem à seguinte equação (proveniente das igualdades dos tempos dados por (4.1.3b) e (4.1.17b)):

$$\frac{km_{II}}{f_{II}^{3/2}} \left[ \sinh \eta_{II} - \eta_{II} \right] + g_{II}(r) = \frac{km_{II}}{\sinh^3 r_1} (\sinh \eta_I - \eta_I) \quad (4.1.18)$$

Além de:

$$\begin{aligned} g_{II}(r_1) &= 0 \\ \eta_{II}(r_1) &= \eta_I \end{aligned} \quad ; \quad f_{II}(r_1) = \sinh^2 r_1 \quad (4.1.19)$$

Devemos ainda ter  $R'_{II} > 0$ , ou seja, de (4.1.5) onde  $m'_{II} = 0$  encontramos:

$$\begin{aligned} R'_{II} &= \frac{km_{II}}{f_{II}} \left[ -\frac{f'_{II}}{f_{II}} (\cosh \eta_{II} - 1) + \frac{\sinh \eta_{II}}{\cosh \eta_{II} - 1} \frac{f_{II}^{3/2}}{km_{II}} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \frac{3}{2} \frac{f'_{II}}{f_{II}} (t - g_{II}) - g'_{II} \right) \right] > 0 \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

#### 4.2 - CÁLCULO DE $\theta$ E DO TEMPO CRÍTICO $t_c$

De (3.2.1) e de (4.1.12) temos para a região I,

$$\theta_I = -2 \frac{(1 + \sinh^2 r)^{1/2}}{R_I} = -\frac{2 \cosh r}{R_I}, \quad (4.2.1a)$$

e para a região II,

$$\theta_{II} = -\frac{2(1 + f_{II})^{1/2}}{R_{II}}. \quad (4.2.1b)$$

Calculemos agora o instante  $t_c$  para o qual tem-se  $R_I(r_1, t_c) = 2km_{II}$ . (De (4.1.17a) ,

$$R_I(r_1, t_c) = \frac{km_{II}}{\sinh^2 r_1} (\cosh \eta_{cI} - 1) = 2km_{II}$$

$$\cosh \eta_{cI} - 1 = 2 \sinh^2 r_1 = 2 \sinh^2 \frac{\eta_{cI}}{2}$$

logo,

$$2r_1 = \eta_{cI} \quad (4.2.2)$$

Substituindo este valor na expressão do tempo dada por (4.1.17b)

$$t_c = \frac{km_{II}}{\sinh^3 r_1} (\sinh 2r_1 - 2r_1) \quad , \quad (4.2.3)$$

encontramos o valor desejado.

#### 4.3 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE 3 CAMADAS

Temos agora o caso análogo ao estudado na Seção 3.1. As equações na região I serão idênticas às deduzidas na Seção 4.1 (eqs. (4.1.17)), com apenas uma modificação: a constante  $b$  será agora diferente de zero, pois queremos que esta região represente um núcleo de matéria atrasado em relação ao universo exterior (região III), ou seja, queremos que a singularidade  $\eta_I = 0$  ocorra num instante  $t$  maior que zero. Reescrevamos então a equação (4.1.17b),

$$t = \frac{km_{II}}{\sinh^3 r_1} (\sinh \eta_I - \eta_I) + g_I \quad , \quad (4.3.1)$$

onde  $g_I \equiv b = \text{cte} > 0$  .

As equações para as regiões II e III serão dadas por:

Região II ( $r_1 < r < r_2$ ) (vácuo):

$$R_{II} = \frac{km_{II}}{f_{II}} (\cosh \eta_{II} - 1) \quad (4.1.3a)$$

$$t = \frac{km_{II}}{f_{II}^{3/2}} (\sinh \eta_{II} - \eta_{II}) + g_{II}(r) \quad (4.1.3b)$$

onde  $m_{II} = \text{cte.}$

Região III ( $r \geq r_2$ ) (universo externo):

$$R_{III} = \frac{km_{III}}{\sinh^2 r} (\cosh \eta_{III} - 1) \quad (4.3.2a)$$

$$t = \frac{km_{III}(r)}{\sinh^3 r} (\sinh \eta_{III} - \eta_{III}) \quad (4.3.2b)$$

onde  $f_{III} = \sinh^2 r$  (vide eq. (4.1.12)) e  $g_{III} = 0$ , já que esta região representa o universo de Friedman ( $\epsilon = -1$ ) externo.

Analogamente à Seção 4.1, a função  $m_{III}(r)$  é determinada através das condições de Darmois. Ou seja,

$$m_{III}(r_2) = m_{II}$$

e como

$$\frac{m_{III}(r)}{\sinh^3 r} = \text{cte}$$

(vide eq. (4.1.6a)), temos então

$$m_{III}(r) = \frac{m_{II}}{\sinh^3 r_2} \sinh^3 r \quad (4.3.3)$$

sendo então que a densidade de matéria na região III é expressa

por (similar a eq. (4.1.17c)):

$$8\pi k\rho_{III} = 6 \frac{\sinh^6 r_2}{(km_{II})^2 (\cosh \eta_{III} - 1)^3} . \quad (4.3.4)$$

Novamente a condição (3.1.1) é satisfeita já que também temos aqui (vide eq. (3.1.12a))

$$m_I(r_1) = \frac{4}{3} \pi \rho_I R_I^3(r_1, t) = m_{II} = m_{III}(r_2) = \frac{4}{3} \pi \rho_{III} R_{III}^2(r_1, t) \quad (4.3.5)$$

E as equações na região III, juntamente com o resultado (4.3.3), podem ser escritas como:

$$R_{III} = \frac{km_{II}}{\sinh^3 r_2} \sinh r (\cosh \eta_{III} - 1) \quad (4.3.6a)$$

$$t = \frac{km_{II}}{\sinh^3 r_2} (\sinh \eta_{III} - \eta_{III}) \quad (4.3.6b)$$

Com base nos mesmos argumentos que utilizamos para escrevermos a eq. (4.1.18) e as condições (4.1.19), teremos então que as equações na região II deverão satisfazer além de  $R'_{II} > 0$  (vide eq. (4.1.20)) às seguintes condições:

$$\begin{aligned} \frac{km_{II}}{\sinh^3 r_1} (\sinh \eta_I - \eta_I) + g_I &= \frac{km_{II}}{f_{II}^{3/2}} (\sinh \eta_{III} - \eta_{III}) + g_{III}(r) = \\ &= \frac{km_{II}}{\sinh^3 r_2} (\sinh \eta_{III} - \eta_{III}) = t \end{aligned} \quad (4.3.7a)$$

onde

$$g_I = \frac{-(\sinh \eta_{I0} - \eta_{I0}) km_{II}}{\sinh^3 r_1} , \quad (4.3.7b)$$

tal que quando  $\eta_I = \eta_{I0} < 0$  tenhamos  $\eta_{III} = 0 \implies t = 0$ .

e

$$\begin{aligned}
 \eta_{II}(r_1) &= \eta_I \\
 \eta_{II}(r_2) &= \eta_{III} \\
 g_{II}(r_1) &= g_I \\
 g_{II}(r_2) &= 0 \\
 f_{II}(r_1) &= \sinh^2 r_1 \\
 f_{II}(r_2) &= \sinh^2 r_2
 \end{aligned}
 \tag{4.3.8}$$

Os resultados de  $\theta_I$ ,  $\theta_{II}$  e  $\eta_{cI}$  serão iguais respectivamente, aos obtidos anteriormente em (4.2.1a), (4.2.1b) e (4.2.2). Para  $III$  e o tempo crítico  $t_c$ , temos porém:

$$\theta_{III} = - \frac{2 \cosh r}{R_{III}} \tag{4.3.9}$$

$$t_c = \frac{km_{II}}{3 \sinh^3 r_1} (\sinh 2r_1 - 2r_1) + g_I \tag{4.3.10}$$

#### 4.4 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE n CAMADAS

Primeiramente tratemos rapidamente do modelo de 5 camadas. Teremos um esquema idêntico ao da Fig. 3.6.1 onde  $F$  designa agora um universo de Friedman de seção aberta. As condições de contorno para  $g(r)$  e  $m(r)$  são dadas também por (3.6.1a) e (3.6.1b), porém as relações (3.6.3) são escritas agora como (vide eqs. (4.1.15) e (4.3.3)):

$$\begin{aligned}
 m_I(r) &= a_I \sinh^3 r \\
 m_{III}(r) &= a_{III} \sinh^3 r \\
 m_V(r) &= a_V \sinh^3 r \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{4.4.1}$$

onde

$$a_I = \frac{m_{II}}{\sinh^3 r_1} \quad ; \quad a_{III} = \frac{m_{IV}}{\sinh^3 r_3} \quad ; \quad a_V = \frac{m_{IV}}{\sinh^3 r_4} \quad , \quad (4.4.2)$$

$$m_{IV} \left( \frac{\sinh r_2}{\sinh r_3} \right)^2 = m_{II} \quad (4.4.3)$$

e

$$a_I = \frac{m_{II}}{\sinh^3 r_1} \quad ; \quad a_{III} = \frac{m_{II}}{\sinh^3 r_2} = a_I \left( \frac{\sinh r_1}{\sinh r_2} \right)^3 \quad ;$$

$$a_V = \left( \frac{\sinh r_3}{\sinh r_2 \sinh r_4} \right)^3 m_{II} = \left( \frac{\sinh r_3 \sinh r_1}{\sinh r_4 \sinh r_2} \right)^3 a_I \quad (4.4.4)$$

Substituam agora as eqs. (3.6.4a), (3.6.4c) e (3.6.5 b), tendo sido obtidas destas substituindo-se os  $r$  pelos  $\sinh r$ .

Vemos também, que a relação (3.6.6) permanece válida. As densidades de matéria são dadas por (vide eqs.(4.1.17c) e (4.3.4)):

$$8\pi k \rho_I = \frac{6 \sinh^6 r_1}{(k m_{II})^2 (\cosh \eta_I - 1)^3}$$

$$8\pi k \rho_{III} = \frac{6 \sinh^6 r_3}{(k m_{IV})^2 (\cosh \eta_{III} - 1)^3} \quad (4.4.5)$$

$$8\pi k \rho_V = \frac{6 \sinh^6 r_4}{(k m_{IV})^2 (\cosh \eta_V - 1)^3}$$

Nas três regiões I, III e V temos agora  $f(r) = \sinh^2 r$ . Para as regiões I e III tem-se (vide eq. (4.3.7b)):

$$g_I = \frac{-(\sinh \eta_{I0} - \eta_{I0})}{\sinh^3 r_1} m_{II} k$$

$$g_{III} = \frac{-(\sinh \eta_{III0} - \eta_{III0})}{\sinh^3 r_2} m_{II} k \quad , \quad (4.4.6)$$



tal que quando  $\eta_I = \eta_{I0}$  e  $\eta_{III} = \eta_{III0}$ ,  $\eta_V = 0$  e  $t = 0$ . Ambos  $\eta_{I0}$  e  $\eta_{III0}$  são negativos.

O conjunto de condições similar ao (4.3.8) é dado por:

$$\begin{aligned}\eta_I &= \eta_{II}(r_1) \\ \eta_{II}(r_2) &= \eta_{III} \\ \eta_{III} &= \eta_{IV}(r_3) \\ \eta_{IV}(r_4) &= \eta_V\end{aligned}\tag{4.4.7a}$$

$$\begin{aligned}f_{II}(r_1) &= \sinh^2 r_1 \\ f_{II}(r_2) &= \sinh^2 r_2 \\ f_{IV}(r_3) &= \sinh^2 r_3 \\ f_{IV}(r_4) &= \sinh^2 r_4\end{aligned}\tag{4.4.7b}$$

Para as duas regiões II e IV temos também a condição (4.1.20), onde o índice II seria II ou IV, respectivamente.

Os dois instantes  $t_c$  são dados pelas relações:

$$\begin{aligned}t_{cI} &= \frac{km_{II}}{\sinh^3 r_1} (\sinh(2r_1) - 2r_1) + g_I \\ t_{cIII} &= \frac{km_{IV}}{\sinh^3 r_3} (\sinh(2r_3) - 2r_3) + g_{III}\end{aligned}\tag{4.4.8}$$

Podemos agora escrever as fórmulas genéricas para um modelo de  $n$  camadas. O universo externo será denotado por  $k$ , enquanto que as camadas  $n = I, III, V, VII, \dots$ , representam geometrias de Friedman ( $\epsilon = -1$ ) atrasadas e as  $n+1 = II, IV, VI, \dots$ , regiões de vazio. Então temos, de (4.4.1), (4.1.2a) e (4.3.2a):

$$\begin{aligned}R_n &= a_n k \sinh r (\cosh \eta_n - 1) \\ t &= k a_n (\sinh \eta_n - \eta_n) + g_n\end{aligned}\tag{4.4.9a}$$

$$R_{n+1} = \frac{k m_{n+1}}{f_{n+1}(r)} (\cosh \eta_{n+1} - 1) \quad (4.4.9b)$$

$$t = \frac{k m_{n+1}}{f_{n+1}^{3/2}(r)} (\sinh \eta_{n+1} - \eta_{n+1}) + g_{n+1}(r)$$

$$8\pi k \rho_n = \frac{6}{k^2 a_n^2 (\cosh \eta_n - 1)^3} \quad (4.4.10)$$

A generalização das eqs. (4.4.4) nos fornece:

$$a_n = \left[ \frac{\sinh r_{n-2} \sinh r_{n-4} \sinh r_{n-6} \dots \sinh r_1}{\sinh r_{n-1} \sinh r_{n-3} \sinh r_{n-5} \dots \sinh r_2} \right]^3 a_I \quad (n > I) \quad (4.4.11a)$$

$$a_I = \frac{m_{II}}{\sinh^3 r_1} \quad (4.4.11b)$$

$$m_n(r_n) = \left[ \frac{\sinh r_n \sinh r_{n-2} \sinh r_{n-4} \dots \sinh r_3}{\sinh r_{n-1} \sinh r_{n-3} \sinh r_{n-5} \dots \sinh r_2} \right]^3 m_{II} \quad (n > I) \quad (4.4.12a)$$

$$m_I(r_1) = m_{II} \quad (4.4.12b)$$

$$m_n(r) = \frac{4}{3} \pi \rho_n R_n^3(r, t) = a_n \sinh^3 r \quad (4.4.13)$$

$$\frac{m_{n+3}}{\sinh^3 r_{n+2}} = \frac{m_{n+1}}{\sinh^3 r_{n+1}} \quad (4.4.14)$$

Das eqs. (4.4.6) ,

$$g_n = -a_n (\sinh \eta_{n0} - \eta_{n0}) \quad (4.4.15a)$$

quando  $\eta_n = \eta_{n0}$  ,  $\eta_k = 0 \implies t = 0$

$$g_{n+1}(r_n) = g_n \quad (4.4.15b)$$

$$g_{n+1}(r_{n+1}) = g_{n+2} \quad .$$

Para as equações (4.4.7),

$$\eta_{n+1}(r_n) = \eta_n \quad (4.4.16a)$$

$$\eta_{n+1}(r_{n+1}) = \eta_{n+2}$$

$$f_{n+1}(r_n) = \sinh^2 r_n \quad (4.4.16b)$$

$$f_{n+1}(r_{n+1}) = \sinh^2 r_{n+1} \quad .$$

Devemos igualar também as expressões de  $t$  de todas as regiões, analogamente à relação (4.3.7a). Nas regiões do vázio, temos ainda a restrição imposta por  $R'_{n+1} > 0$ , dada pela equação (4.1.20) onde o índice II é substituído por  $n+1$ . A generalização dos coeficientes de expansão  $\theta$  nos fornece:

$$\theta_n = \frac{-2 \cosh r}{R_n} \quad (4.4.17a)$$

$$\theta_{n+1} = -2 (1 + f_{n+1})^{1/2} / R_{n+1} \quad (4.4.17b)$$

E para os tempos críticos (4.4.8):

$$t_{cn} = k a_n (\sinh 2r_n - 2r_n) + g_n \quad . \quad (4.4.18)$$

## CAPÍTULO 5

### UNIVERSOS SEMI-FECHADOS E A GENERALIZAÇÃO DO MODELO DE NOVIKOV COM SEÇÃO FECHADA ( $\epsilon = 1$ )

A construção do modelo de  $n$  camadas com a geometria de Friedmann de seção fechada, é análoga a do Capítulo precedente. Podemos porém, ter uma melhor visão geométrica deste modelo com a ajuda dos universos semi-fechados, propostos por Zel'dovich em 1962<sup>(39)</sup>.

Iremos portanto introduzir inicialmente alguns preliminares matemáticos necessários ao estudo posterior dos universos semi-fechados, para em seguida fazermos a generalização do modelo.

#### 5.1 - SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Nesta Seção, iremos fazer uma pequena revisão sobre superfícies de revolução.

O elemento de linha no espaço euclidiano de três dimensões é dado por:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad . \quad (5.1.1)$$

Uma superfície de revolução que tenha o eixo- $x^3$  como eixo de rotação é definida pelas equações (veja Fig. 5.1.1):

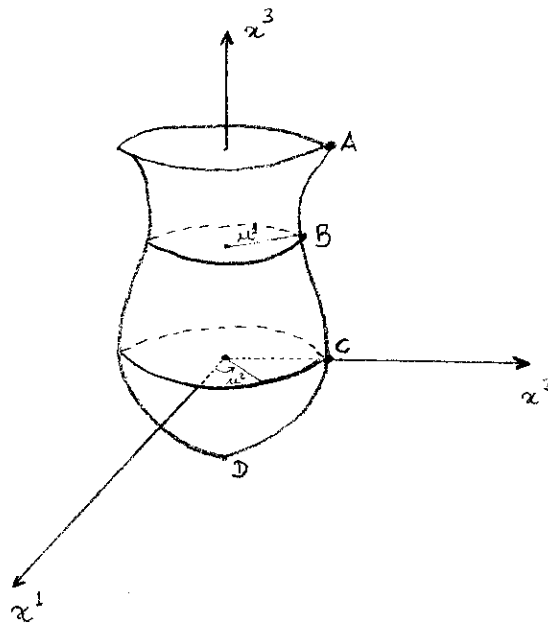


Figura 5.1.1 - Exemplo de uma figura de revolução: a curva ABCD é girada em torno do eixo  $x^3$ .

$$\begin{aligned} x^1 &= u^1 \cos u^2 \\ x^2 &= u^1 \operatorname{sen} u^2 \\ x^3 &= \Phi(u^1) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

onde  $u^1$  e  $u^2$  são as coordenadas intrínsecas da superfície.

Diferenciando as equações acima:

$$\begin{aligned} dx^1 &= \cos u^2 du^1 - u^1 \operatorname{sen} u^2 du^2 \\ dx^2 &= \operatorname{sen} u^2 du^1 + u^1 \cos u^2 du^2 \\ dx^3 &= \Phi' du^1 \end{aligned}$$

onde aqui  $\Phi' \equiv d\Phi/du^1$ .

Substituindo em (5.1.1), obtemos o elemento de linha da superfície:

$$ds_{\Sigma}^2 = \left[ 1 + (\Phi')^2 \right] (du^1)^2 + (u^1)^2 (du^2)^2 \quad (5.1.3)$$

ou ainda,

$$ds_{\Sigma}^2 = (u^1)^2 \left\{ \frac{1+(\Phi')^2}{(u^1)^2} (du^1)^2 + (du^2)^2 \right\}$$

e com a ajuda da transformação de coordenadas

$$z = \left\{ \frac{\sqrt{1+(\Phi')^2}}{u^1} du^1 \quad ; \quad u^2 \equiv v \quad , \quad (5.1.4) \right.$$

temos:

$$ds^2 = \lambda(z) \left[ dz^2 + dv^2 \right] . \quad (5.1.5)$$

Então, se o elemento de linha de uma superfície pode ser colocado na forma (5.1.5), ela é uma superfície de revolução<sup>(43)</sup>. Devemos notar ainda, que toda variedade bidimensional  $V_2$  é conformalmente plana, isto é, o seu elemento de linha pode sempre ser colocado na forma

$$ds^2 = \Omega(z, v) \left[ dz^2 + dv^2 \right]$$

(pois o tensor de Weyl dado por

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu}) + \\ + \frac{1}{6} R (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \quad ,$$

onde  $\alpha = 1, 2$ , se anula). Portanto, a condição para  $V_2$  ser uma superfície de revolução é que  $\Omega$  só dependa de uma variável.

Como exemplo, peguemos uma esfera de raio  $a$ . O elemento de linha da sua superfície em coordenadas esféricas é dado por:

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \\ = a^2 \text{sen}^2 \theta \left[ \left( \frac{d\theta}{\text{sen} \theta} \right)^2 + d\phi^2 \right] \quad (5.1.6) \\ = a^2 \text{sen}^2 \theta \left[ dz^2 + d\phi^2 \right] \quad ,$$

onde  $dz \equiv d\theta/\text{sen}\theta$ .

Comparando esta forma a (5.1.5) vemos que a esfera é uma superfície de revolução ( $\phi \equiv v; \lambda = a^2 \text{sen}^2\theta$ ). A curva  $\phi(\theta)$  que gera esta superfície é dada através de (5.1.14):

$$z = \int \frac{d\theta}{\text{sen}\theta} = \ln \text{tg} \frac{z}{\theta} \quad \dots \quad e^z = \text{tg} \frac{z}{\theta}$$

e

$$du^1 = \frac{du^1}{d\theta} = \frac{u^1}{\sqrt{1+\phi'^2}} d\theta = \frac{\text{sen}\theta}{d\theta}$$

Fazendo  $u^1 \equiv a \text{sen}\theta$ , temos:

$$du^1 = a \cos\theta \, d\theta,$$

tal que,

$$\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{du^1}{du^1} \frac{d\phi}{d\theta} = \phi' a \cos\theta \quad \dots \quad \phi' = \frac{a \cos\theta}{\dot{\phi}}$$

Logo,

$$dz = \frac{d\theta}{\text{sen}\theta} = \frac{\sqrt{1 + \frac{a^2 \cos^2\theta}{\dot{\phi}^2}}}{a \cos\theta \, d\theta} \dots \quad 1 + \frac{a^2 \cos^2\theta}{\dot{\phi}^2} = \frac{\cos^2\theta}{1}$$

$$\frac{\dot{\phi}^2}{a^2} = 1 - \cos^2\theta = \text{sen}^2\theta \quad \dots \quad \dot{\phi} = -a \text{sen}\theta \quad \dots \quad \phi = a \cos\theta \quad (5.1.7)$$

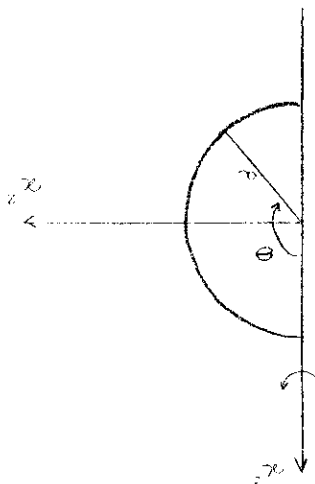


Figura 5.1.2 - A esfera é obtida se girarmos o semi-círculo ( $x^2 = a^2 \cos^2\theta$ ) em torno do eixo-z.

## 5.2 - UNIVERSOS SEMI-FECHADOS

Em 1962, Zel'dovich publicou um artigo<sup>(39)</sup> onde a união da solução de Schwarzschild com a porção do modelo de Friedmann, cujo volume é maior que a metade do da totalidade do universo fechada, foi considerada. Ele denominou esta porção de Friedmann de universo semi-fechado, tal que quanto maior for essa porção, mais próxima estará esta de um universo fechado, e menor será a área da esfera através da qual a parte de Friedmann é ligada ao espaço vazio que a circunda. Esta ligação foi feita através de diagramas de imersão no espaço euclidiano. Estudemos pois, inicialmente, a imersão da 3-geometria de Schwarzschild no espaço euclidiano. A métrica de Schwarzschild é dada por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2km}{R}\right) d\tau^2 - d\ell^2 \quad (5.2.1)$$

onde

$$d\ell^2 = \left(1 - \frac{2km}{R}\right)^{-1} dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \quad (5.2.2)$$

Num sistema estático<sup>(34)</sup> como o da métrica acima, o espaço em qualquer instante tem sempre a mesma 3-geometria ( $d\ell^2$ ). Vamos então, representar o 3-espaço somente num dado instante  $\tau = \text{constante}$ . Além do mais, em qualquer momento o espaço tem simetria esférica. Consequentemente, um plano através do centro,  $R=0$ , que divida o espaço simetricamente em duas metades (por exemplo, o plano equatorial,  $\theta = \pi/2$ ) tem a mesma 2-geometria que qualquer outro plano do mesmo tipo através do centro. Iremos pois, limitar a nossa atenção à 2-geometria do plano equatorial, cuja geometria é descrita pelo elemento de linha:

$$d\sigma^2 = \left(1 - \frac{2km}{R}\right)^{-1} dR^2 + R^2 d\phi^2 \quad (5.2.3)$$



Podemos imergir a geometria desta superfície numa geometria plana de uma variedade tridimensional euclidiana<sup>(42)</sup>. Comparando (5.2.3) com (5.1.3) vemos que essa é uma superfície de revolução ( $u^1 \equiv R$ ;  $u^2 \equiv \phi$ ) onde

$$1 + \left(\frac{d\phi}{dR}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2km}{R}}$$

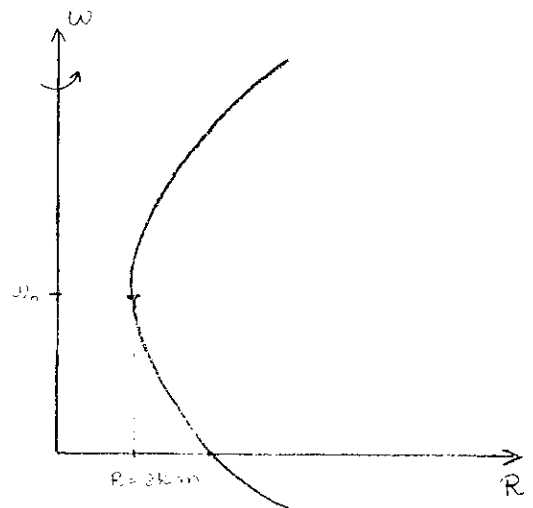
$$\left(\frac{d\phi}{dR}\right) = \pm \left(\frac{2km}{R-2km}\right)^{1/2} \quad (5.2.4)$$

Integrando, temos:

$$\phi(R) = \omega = \pm \left[ 8km (R-2km) \right]^{1/2} + \omega_0 \quad (5.2.5)$$

onde  $\omega_0 = \text{cte}$ . Estas curvas representam parábolas, com tangente vertical em  $R = 2km$ , no plano  $\omega$ - $R$  do espaço euclidiano, que quando giradas em torno do eixo- $\omega$  produzem como superfície de revolução, um parabolóide<sup>(44,45)</sup>.

Figura 5.2.1 - Diagrama de imersão para a geometria da 2-superfície ( $\theta = \pi/2$ ,  $\tau = \text{cte}$ ) de Schwarzschild.



A trajetória de uma partícula teste, que segue uma geodésica radial na métrica de Schwarzschild (5.2.1), tal que sendo ejetada da singularidade  $R = 0$ , desloca-se radialmente até um raio  $R_{\text{máx}}$  (topo da órbita),  $R_{\text{máx}} > 2km$ , e retorna para  $R = 0$ , é dada pelas equações paramétricas<sup>(46,47)</sup> (onde o parâmetro  $\eta$  vai de 0 a  $2\pi$ ):

$$R = \frac{R_{\text{máx}}}{2} (1 - \cos\eta) \quad (5.2.6a)$$

$$\tau = \left(\frac{R_{\max}}{2km} - 1\right)^{1/2} \left(2km + \frac{R_{\max}}{2}\right) (\eta - \pi) - \left(\frac{R_{\max}}{2km} - 1\right)^{1/2} \frac{R_{\max}}{2} \operatorname{sen} \eta +$$

$$+ 2km \ln \left| \frac{\left[\frac{R_{\max}}{2km} - 1\right]^{1/2} - \operatorname{cotg} \eta/2}{\left[\frac{R_{\max}}{2km} - 1\right]^{1/2} + \operatorname{cotg} \eta/2} \right| + \left(\frac{R_{\max}^3}{8km}\right)^{1/2} \pi \quad (5.2.6b)$$

Diferenciando ambas as equações encontra-se:

$$dR = R \left(\frac{R_{\max}}{R} - 1\right)^{1/2} d\eta \quad (5.2.7a)$$

$$d\tau = \left(\frac{R_{\max}}{2km} - 1\right)^{1/2} \frac{R}{\left(1 - \frac{2km}{R}\right)} d\eta, \quad (5.2.7b)$$

e vemos que, de fato, estas equações satisfazem a equação diferencial <sup>(48)</sup> :

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{2km}{R_{\max} - 2km}\right) \left(\frac{R_{\max}}{R} - 1\right) \left(1 - \frac{2km}{R}\right)^2. \quad (5.2.8)$$

O tempo coordenado,  $\tau$ , não é o tempo próprio,  $t$ , que seria medido por um relógio comovendo-se com a partícula. Este tempo próprio é dado por <sup>(48)</sup> :

$$t = \int_0^{\tau} \left[ \left(1 - \frac{2km}{R}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{2km}{R}\right)^{-1} dR^2 \right]^{1/2} \quad (5.2.9)$$

Substituindo as diferenciais (5.2.7) na integral acima,

$$t = \left(\frac{R_{\max}}{2km}\right)^{1/2} \int_0^{\eta} R d\eta$$

e com a ajuda de (5.2.6a) obtêm-se:

$$t = \left(\frac{R_{\max}^3}{8km}\right)^{1/2} (\eta - \operatorname{senn}\eta) \quad (5.2.10)$$

Suponhamos agora, que se tenha uma estrela de densidade uniforme ( $\rho = \rho(t)$ ) e com pressão nula, imersa no vácuo. Sabemos que a região interna desta "bola de poeira" pode ser descrita pela geometria de Friedmann<sup>(49)</sup>. Qual dos três modelos ( $\epsilon = -1$ ,  $\epsilon = 0$ ,  $\epsilon = 1$ ) devemos utilizar? Façamos este estudo através dos diagramas de imersão. Seja  $R_\Sigma$  o raio da esfera. Para  $R > R_\Sigma$  temos a 3-geometria de Schwarzschild, cuja imersão no espaço euclidiano forneceu-nos as curvas (5.2.5) e a Figura 5.2.1. Devemos então, procurar uma geometria que quando imersa no espaço euclidiano forneça-nos uma curva  $\psi(R)$  que se una a curva  $\phi(R)$  de maneira suave<sup>(42,44)</sup>. Ou seja,

$$\psi(R_\Sigma) = \phi(R_\Sigma) \quad (5.2.11a)$$

$$\left. \frac{d\psi}{dR} \right|_{R=R_\Sigma} = \left. \frac{d\phi}{dR} \right|_{R=R_\Sigma} \quad (5.2.11b)$$

Começemos pelo modelo  $\epsilon = -1$ . A métrica para a hipersuperfície  $\eta = \text{cte}$  é dada por

$$d\ell^2 = A^2(\eta) \left[ dr^2 + \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (5.2.12)$$

Esta 3-geometria não pode ser imersa num espaço euclidiano quadridimensional<sup>(44,50)</sup>. Porém pode ser imersa no espaço chato de Minkowski:

$$d\sigma^2 = -d\omega^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

através do conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \omega &= A \cosh r & x &= A \sinh r \sin\theta \cos\phi \\ z &= A \sinh r \cos\theta & y &= A \sinh r \sin\theta \sin\phi \end{aligned} ,$$

tal que:

$$\omega^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2 \quad ,$$

ou seja, a superfície é um hiperbolóide tridimensional no espaço de Minkowski quadridimensional.

Vemos portanto, que este modelo não nos serve, uma vez que não pode ser imerso no espaço euclidiano.

Para o caso  $\epsilon = 0$ , a métrica da hipersuperfície  $\eta = \text{cte}$  é dada por:

$$d\ell^2 = A^2(\eta) \left[ dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad . \quad (5.2.13)$$

Esta métrica é a mesma do espaço chato euclidiano tridimensional quando expressa em coordenadas esféricas. De fato, dada a métrica

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + d\omega^2$$

com a transformação de coordenadas

$$\omega = A r \cos\theta$$

$$y = A r \text{sen}\theta \text{sen}\phi$$

$$x = A r \text{sen}\theta \cos\phi$$

obtêm-se a expressão (5.2.13).

Aplicando o raciocínio já utilizado para deduzir a expressão (5.2.3), temos agora que

$$d\sigma^2 = A^2 dr^2 + A^2 r^2 d\phi^2 \quad , \quad (5.2.14)$$

e comparando com (5.1.3) vemos que esta é uma superfície de revolução ( $u^1 \equiv a r$ ;  $u^2 \equiv \phi$ ). Fazendo a identificação de  $R$  com  $Ar$ , a curva que nos dará esta superfície de revolução é:

$$\psi(R) = b \quad ,$$

onde  $b$  é uma cte, já que  $\psi' = 0$ . Este resultado juntamente com a condição (5.2.11b) e a eq. (5.2.4), implica em  $m = 0$ , ou seja ,

a massa da estrela medida por um observador na região do vázio seria nula (não haveria estrela !). Vemos então, que este caso é também eliminado<sup>(44)</sup>.

Finalmente temos o caso  $e = 1$ . A métrica deste modelo é dada por<sup>(27)</sup>:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(\eta) dr^2 - A^2(\eta) \sin^2 r \left[ d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (5.2.15)$$

onde

$$A = A_0 (1 - \cos \eta) \quad (5.2.16a)$$

$$t = A_0 (\eta - \text{senn}) \quad (5.2.16b)$$

e  $A d\eta = dt$  .

A métrica (5.2.15) pode ser também escrita em termos de coordenadas de Schwarzschild como:

$$ds^2 = e^\alpha d\tau^2 - e^\beta dR^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (1.2.4)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são função de  $\tau$  e  $R$ . Comparando (5.2.15) com (1.2.4), encontramos<sup>(39,44)</sup>:

$$R = A \sin r \quad \cdot \cdot \quad r = \text{arc sen } \frac{R}{A} \quad (5.2.17a)$$

tal que:

$$dr = \left(1 - \frac{R^2}{A^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{dR}{A} - \frac{R}{A^2} \frac{dA}{d\eta} d\eta\right) \quad (5.2.17b)$$

No sistema de coordenadas comoventes a superfície da esfera é designada por  $r = r_\Sigma$  para qualquer tempo  $t$ . Com a relação (5.2.17a) temos então:

$$R_\Sigma = A \sin r_\Sigma \quad (5.2.18)$$

O tempo próprio medido na superfície da estrela, deve ser dado pela equação (5.2.16b) como pela equação (5.2.10). Igualando as duas<sup>(49,51)</sup> ,

$$\left(\frac{R_{\text{m\bar{a}x}}^3}{8\text{km}}\right)^{1/2} (\eta - \text{sen } \eta) = A_0(\eta - \text{sen } \eta) \quad \dots$$

O valor m\bar{a}ximo para o raio da estrela  $R_{\Sigma}$  ocorre em  $\eta = \pi$  quando  $A(\eta)$  alcan\c{c}a seu m\bar{a}ximo igual a  $2A_0$ . Logo ( $R_{\text{m\bar{a}x}} = 2A_0 \text{ sen } r_{\Sigma}$ ),

$$\left(\frac{2^3 A_0^3 \text{ sen}^3 r_{\Sigma}}{8\text{km}}\right)^{1/2} = A_0$$

$$\frac{A_0^3 \text{ sen}^3 r_{\Sigma}}{\text{km}} = A_0^2 \quad \dots \quad \text{km} = A_0 \text{ sen}^3 r_{\Sigma} \quad (5.2.19)$$

Substituindo (5.2.17b) em (5.2.15),

$$ds^2 = \left[ A^2 - \frac{R^2}{A^2 - R^2} \left(\frac{dA}{d\eta}\right)^2 \right] d\eta^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{R^2}{A^2}} - R^2 d\Omega^2 + \frac{2R}{A} \frac{dA}{d\eta} dR d\eta, \quad (5.2.20)$$

tal que somente em  $\eta = \pi$  (quando  $dA/d\eta = 0$ ) as hipersuperf\i{c}ies  $\eta = \text{cte}$  e  $\tau = \text{cte}$  (vide (5.2.6b)) coincidem, permitindo a constru\c{c}\~{a}o do diagrama de imers\~{a}o (39,44). A hipersuperf\i{c}ie  $\eta = \pi$  \e{e} escrita como:

$$d\ell^2 = \frac{4 A_0^2 dR^2}{4 A_0^2 - R^2} + R^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2)$$

Tomando ent\~{a}o a superf\i{c}ie do plano equatorial  $\theta = \pi/2$ , como feito anteriormente, e imergindo-a no espa\c{c}o euclidiano, temos:

$$d\sigma^2 = \frac{4 A_0^2 dR^2}{4 A_0^2 - R^2} + R^2 d\phi^2 \quad (5.2.21)$$

Comparando com (5.1.3) vemos que esta \e{e} uma superf\i{c}ie de revolu\c{c}\~{a}o ( $u^1 \equiv R$ ;  $u^2 \equiv \phi$ ), tal que:

$$1 + (\psi')^2 = \frac{4 A_0^2}{4 A_0^2 - R^2}$$

$$\left(\frac{d\psi}{dR}\right)^2 = \frac{R^2}{4A_0^2 - R^2}$$

$$\frac{d\psi}{dR} = \pm \frac{R}{(4A_0^2 - R^2)^{1/2}} \quad (5.2.22a)$$

$$\omega = \psi = \mp (4A_0^2 - R^2)^{1/2} + b, \quad b = \text{cte} \quad (5.2.22b)$$

onde  $\psi$  é a curva que gera a superfície. Aplicando as condições de contorno (5.2.11), juntamente com as equações (5.2.4) e (5.2.5), obtemos:

$$\pm \left[ 8km(R_\Sigma - 2km) \right]^{1/2} + \omega_0 = \mp (4A_0^2 - R_\Sigma^2)^{1/2} + b \quad (5.2.23a)$$

$$\left(\frac{2km}{R_\Sigma - 2km}\right)^{1/2} = \frac{R_\Sigma}{(4A_0^2 - R_\Sigma^2)^{1/2}} \quad (5.2.23b)$$

Da última equação, tira-se que:

$$(4A_0^2 - R_\Sigma^2)^{1/2} = R_\Sigma \left(\frac{R_\Sigma}{2km} - 1\right)^{1/2} \quad (5.2.24)$$

Substituindo em (5.2.23a),

$$\omega_0 = \mp \left[ 8km(R_\Sigma - 2km) \right]^{1/2} \mp R_\Sigma \left(\frac{R_\Sigma}{2km} - 1\right)^{1/2} + b \quad (5.2.25)$$

e  $R_\Sigma = 2A_0 \operatorname{sen} r_\Sigma$ . O sinal menos é tomado quando  $\Phi'(R_\Sigma) > 0$ , e o positivo quando  $\Phi'(R_\Sigma) < 0$ .

Da equação (5.2.22b) temos:

$$(\omega - b)^2 + R^2 = 4A_0^2 \quad (5.2.26)$$

Correspondendo a círculos de raio  $2A_0$ , centrados em  $\omega = b$ ;  $R = 0$  no plano  $\omega$ - $R$ . Para facilitar a construção do diagrama, podemos fazer  $b = \pm 2A_0$ . Devemos notar também, que apenas a região- $R$  (definida na Seção 3.3) do espaço vazio é representada. Iremos associar<sup>(44)</sup> o ramo superior da parábola à região- $R(I)$  e

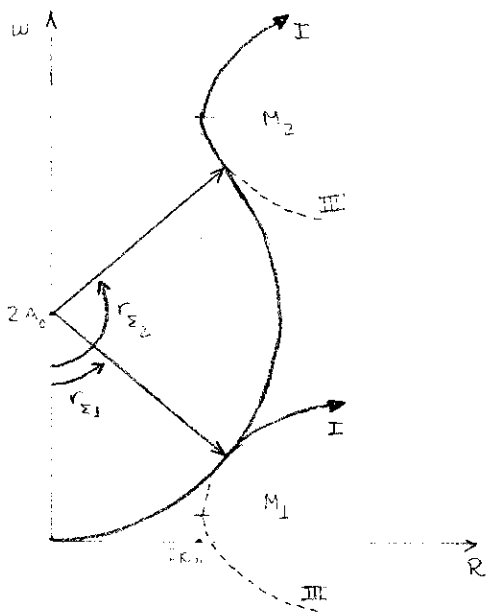


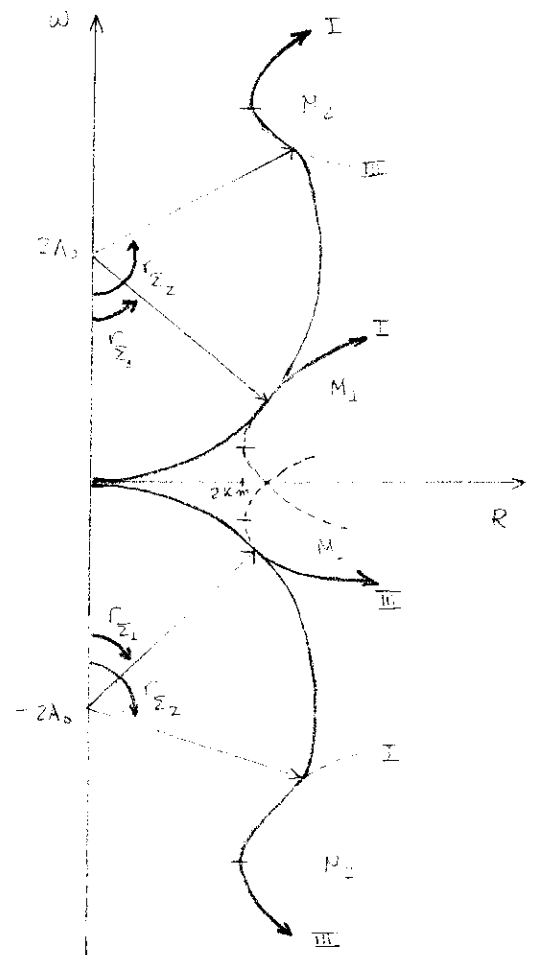
Figura 5.2.2 - Dois valores de  $r_{\Sigma}$  assinados ( $r_{\Sigma 1}$  e  $r_{\Sigma 2}$ ). Notar que as geometrias  $M_1$  e  $M_2$  do vázio não são as mesmas <sup>(44)</sup>.

o ramo inferior à região-R(III) da extensão de Kruskal (ou vice-versa). Peguemos apenas a solução  $b = 2A_0$ , tal que uma sequência de diagramas de imersão é mostrado na Fig. 5.2.2, onde  $\theta$  e  $\phi$  são fixos, e  $r_{\Sigma}$  variando. As configurações com  $r_{\Sigma} < \pi/2$  devem ser unidas às regiões-R(I), ao passo que as com  $r_{\Sigma} > \pi/2$  unidas às regiões-R(III).

Na Fig. 5.2.3, foram utilizadas as soluções  $b = \pm 2A_0$ .

Figura 5.2.3 - Sequência de diagramas de imersão <sup>(44)</sup>.

Se agora permitimos que a superfície da estrela deixe o seu estado estático momentâneo (em  $\eta = \pi$ ) e colapse, como irão a sua geometria e densidade evoluir no tempo? De acordo <sup>(39,51,52)</sup> com os cálculos de Oppenheimer e Snyder, a região interna, parte de um modelo de Friedmann, e a região externa, parte da geometria de Schwarzschild, evoluem como se elas nunca tives





sem sido truncadas e unidas. Na região interna a geometria é descrita pelas equações (5.2.16). A superfície da estrela,  $r = r_{\Sigma}$ , através da qual a ligação com a geometria externa é feita, desloca-se no espaço-tempo de Schwarzschild ao longo da geodésica (5.2.6).

Zel'dovich<sup>(39)</sup> porém, denominou de universos semi-fechados apenas aqueles em que  $r_{\Sigma} > \pi/2$ . Para melhor entendermos o seu argumento para esta denominação, vamos desmembrar a Figura 5.2.2 em duas, como mostra a Fig. 5.2.4. No diagrama b, entre a superfície da estrela (ponto A) e um ponto distante B na região do vácuo, ocorre uma singularidade de Schwarzschild (ponto C). Então, a troca de informação entre a região de Friedmann OA e o espaço externo AB não é possível. Isto justifica o nome de universo semi-fechado para este caso. Para o diagrama (a), não ocorre tal fato.

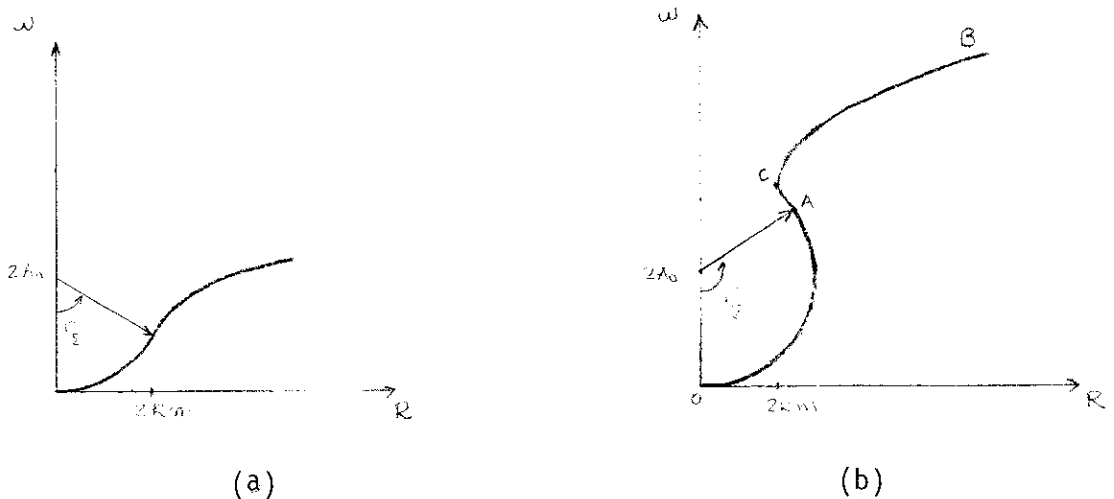
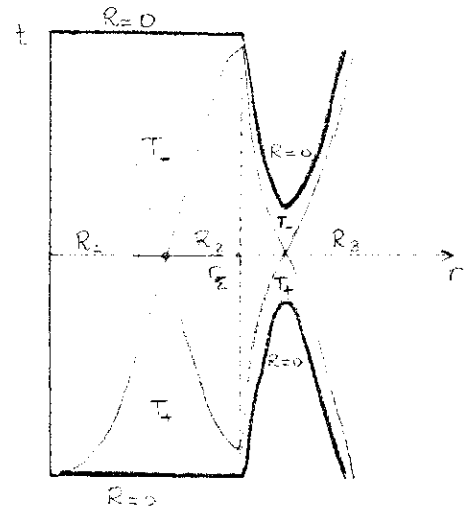


Figura 5.2.4<sup>(39)</sup> - Destes dois diagramas, apenas o diagrama (b) é considerado universo semi-fechado.

Novikov<sup>(53)</sup> argumentou que a análise feita por Zel'dovich não é exaustiva, já que o sistema de referência de Schwarzschild não engloba a região-T (definida na Seção 3.3) no vácuo.

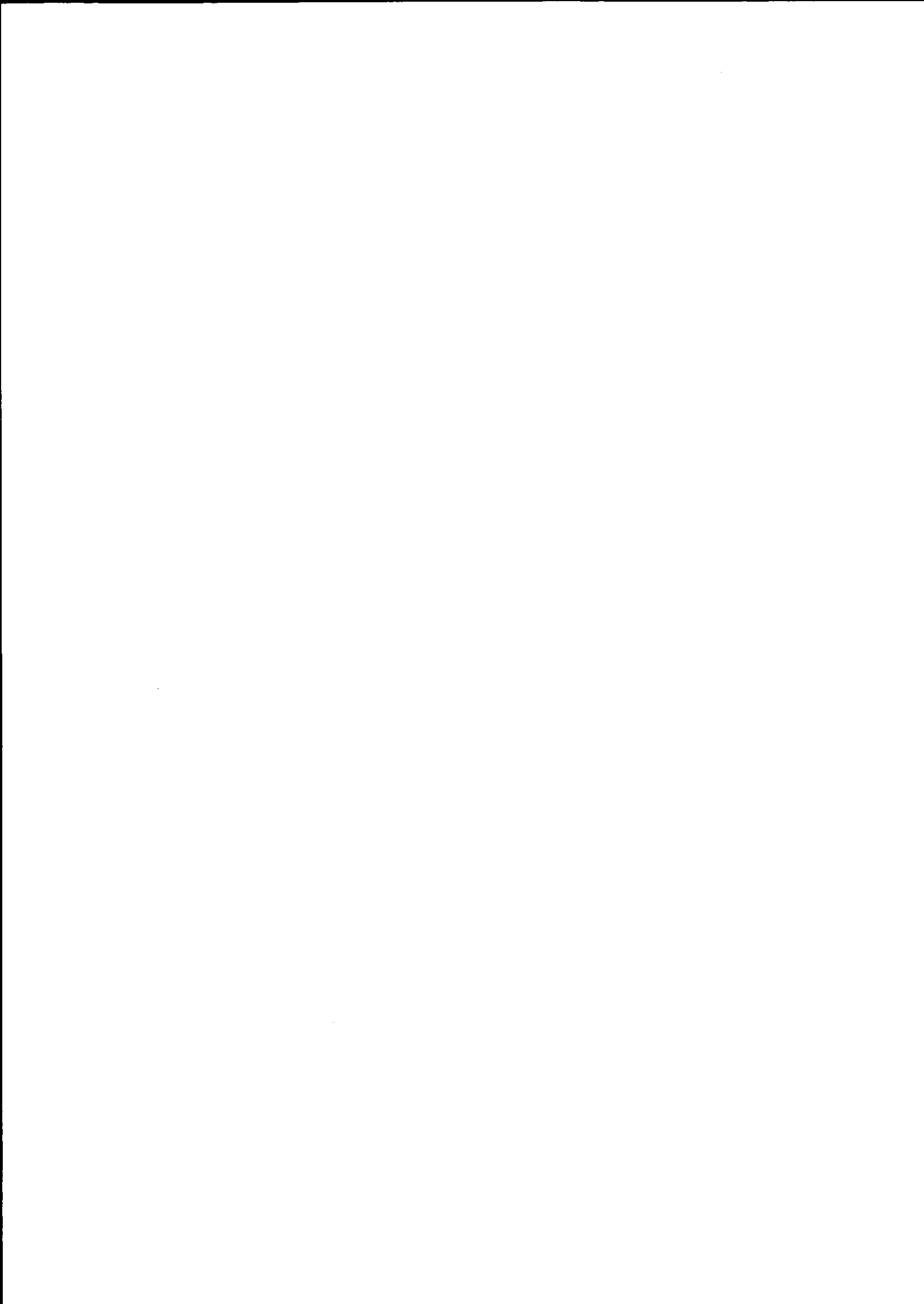
Salientou ainda, que deveria ser utilizado um sistema de coordenadas comoventes, de forma que seria possível a troca da informação entre um universo semi-fechado e um observador externo. De fato, observando-se a Fig. 5.2.5<sup>(53)</sup> vê-se que um raio de luz emitido da superfície, quando esta se localiza na região- $T_+$  (ou seja, quando se expande), penetra na região-R onde o sistema de Schwarzschild  $\bar{e}$  aplicado. Procedente de  $R_3$ , um raio de luz pode alcançar a superfície da estrela quando esta se encontra na região- $T_-$  (a estrela está se contraindo). Então, um observador interno pode receber resposta do sinal que ela emitiu para um observador externo, o mesmo não ocorrendo com o observador externo, que não pode receber resposta do sinal enviado para um universo semi-fechado.

Figura 5.2.5 - Uma "bola de poeira" que se expande a partir de um volume zero até um raio máximo, voltando a se contrair até um volume zero novamente. A região à esquerda da linha pontilhada corresponde à região da matéria.



### 5.3 - NÚCLEO DE MATÉRIA IMERSO NO VÁCUO

Iremos utilizar a solução de Tolman com  $f(r) < 0$ . Tanto para a região da matéria como para a região do vácuo, a métrica será dada por:



$$ds^2 = dt^2 - \frac{R'^2}{1+f(r)} dr^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (1.1.6)$$

A densidade da matéria,  $\rho(t)$ , será:

$$8\pi k\rho(t) = \frac{F'(r)}{R^2 R'} \quad (1.1.11)$$

A função  $R(r,t)$  será dada em função do tempo  $t$  através das equações paramétricas:

$$R = \frac{F}{-2f} [1 - \cos\eta] \quad (1.1.18)$$

$$t = \frac{F}{2(-f)^{3/2}} [\eta - \text{senn}\eta] + g(r) \quad (1.1.19)$$

onde

$$g(r) \equiv t_0(r) - \frac{\pi}{2} \frac{F}{2(-f)^{3/2}} \quad (5.3.1)$$

De (1.2.20),  $F(r) = 2km(r)$ , de maneira que as equações acima para cada região passam a ser escritas da seguinte forma:

Região I:  $0 \leq r \leq r_1$  (núcleo de matéria)

$$R_I = - \frac{km_I(r)}{f_I} (1 - \cos\eta_I) \quad (5.3.2a)$$

$$t = \frac{km_I(r)}{(-f_I)^{3/2}} (\eta_I - \text{senn}\eta_I) + g_I(r) \quad (5.3.2b)$$

$$8\pi k\rho_I = \frac{2km'_I(r)}{R_I^2 R'_I} \quad (5.3.2c)$$

Região II:  $r_1 < r$  (vácuo)

$$R_{II} = \frac{-km_{II}}{f_{II}} (1 - \cos\eta_{II}) \quad (5.3.3a)$$

$$t = \frac{k m_{II}}{(-f_{II})^{3/2}} (\eta_{II} - \text{senn}\eta_{II}) + g_{II}(r) \quad (5.3.3b)$$

e

$$m_{II} = \text{cte}$$

A derivada de R em relação a r é dada por:

$$R' = (km \frac{f'}{f^2} - k \frac{m'}{f})(1 - \text{cos}\eta) - k \frac{m}{f} \text{senn}\eta \frac{\partial \eta}{\partial r}$$

A derivada parcial  $\partial \eta / \partial r$  pode ser calculada a partir de (1.1.19). Reescrevendo esta equação como:

$$\eta - \text{senn}\eta = \frac{(-f)^{3/2}}{km} [t - g(r)]$$

e diferenciando,

$$(1 - \text{cos}\eta)d\eta = \left[ \left( \frac{3}{2} \frac{(-f)^{1/2} f'}{km} + (-f)^{3/2} \frac{km'}{(km)^2} \right) (t - g(r)) + \right. \\ \left. - \frac{(-f)^{3/2}}{km} g'(r) \right] dr + \frac{(-f)^{3/2}}{km} dt$$

Temos então:

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{+1}{(1 - \text{cos}\eta)} \frac{(-f)^{3/2}}{km} \left[ \left( \frac{3}{2} \frac{f'}{f} - \frac{m'}{m} \right) (t - g) - g'(r) \right] \quad (5.3.4a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{(-f)^{3/2}}{km(1 - \text{cos}\eta)} \quad (5.3.4b)$$

Substituindo o valor de (5.3.4a) em R', obtemos:

$$R' = \frac{km}{f} \left\{ \left( \frac{f'}{f} - \frac{m'}{m} \right) (1 - \text{cos}\eta) - \frac{\text{senn}\eta}{(1 - \text{cos}\eta)} \frac{(-f)^{3/2}}{km} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ \left( \frac{3}{2} \frac{f'}{f} - \frac{m'}{m} \right) (t - g) - g'(r) \right] \right\} \quad (5.3.5)$$

Vemos que se formos substituir esta expressão de  $R'$  na da densidade  $\rho(t)$ , para encontrarmos um possível valor de  $g(r)$  (vide Seção 3.1), obteremos uma expressão muito complicada. Iremos escolher então

$$\frac{m_I}{(-f_I)^{3/2}} = a \quad a, b = \text{cte} \quad (5.3.6a)$$

$$g_I(r) = b \quad (5.3.6b)$$

e as expressões (5.3.2a) e (5.3.2b) passam a ser escritas:

$$R_I = ka(-f_I)^{1/2} (1 - \cos \eta_I) \quad (5.3.7a)$$

$$t = ka (\eta_I - \text{senn} \eta_I) + b \quad (5.3.7b)$$

de forma que o parâmetro  $\eta_I$  passa a ser apenas função de  $t$ , e de (5.3.4) temos então:

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial r} = 0 \quad (5.3.8a)$$

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial t} = \frac{1}{ka(1 - \cos \eta)} \quad (5.3.8b)$$

De maneira que  $\rho_I(t)$  será dada por

$$\begin{aligned} 8\pi k \rho_I &= \frac{2k m'_I}{R'_I R_I^2} = \frac{-3ka f'_I (-f_I)^{1/2}}{-k \frac{a}{2} f'_I (-f_I)^{-1/2} (1 - \cos \eta_I) k^2 a^2 (-f_I) (1 - \cos \eta_I)^2} \\ &= \frac{6}{k^2 a^2 (1 - \cos \eta_I)^3} \quad , \quad (5.3.9) \end{aligned}$$

sendo portanto apenas função de  $t$ , como era de se esperar..

A região I quando descrita pelas eqs. (5.3.7) representa um universo de Friedmann com seção fechada ( $e = 1$ ). De fato, escrevendo a métrica deste universo <sup>(27)</sup>

$$ds^2 = dt^2 - k^2 a^2 (1 - \cos \eta)^2 \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 \right] \quad (5.3.10)$$

juntamente com a métrica da região I ((1.1.6) e (5.3.7a)).

$$ds_I^2 = dt^2 - a^2 k^2 (1 - \cos \eta_I)^2 \left[ \frac{(-f'_I)^2}{-4f_I(1+f_I)} dr^2 + (-f_I) d\Omega^2 \right] \quad (5.3.11)$$

vemos que podemos passar da métrica (5.3.11) para a métrica (5.3.10) através da transformação de coordenadas  $(-f_I)^{1/2} = \sin \chi$ , já que

$$\cos \chi d\chi = -\frac{1}{2} \frac{f'_I}{(-f_I)^{1/2}} dr$$

$$d\chi = \left( -\frac{1}{2} \frac{f'_I}{(-f_I)^{1/2}} \frac{1}{\cos \chi} \right) dr = -\frac{1}{2} \frac{f'_I}{(-f_I)^{1/2}} \frac{dr}{(1+f_I)^{1/2}}$$

Podemos então escrever

$$f_I(r) = -\sin^2 r \quad (5.3.12)$$

e a métrica (5.3.11) passa a ser escrita como

$$ds_I^2 = dt^2 - k^2 a^2 (1 - \cos \eta_I)^2 \left[ dr^2 + \sin^2 r d\Omega^2 \right] \quad (5.3.13)$$

Com este valor de  $f_I$  vemos que a condição  $-1 < f_I < 0$  é satisfeita (a assinatura da métrica deve ser sempre a mesma).

Devemos ainda determinar a função  $m_I(r)$ . Iremos utilizar, para tal, as condições de contorno de Darmois. Do resultado (2.6.9),  $m(r)$  deve ser contínua em  $r = r_1$ . Ou seja,

$$m_I(r_1) = m_{II} \quad (5.3.14)$$

Mas de (5.3.6a) e de (5.3.12),

$$\frac{m_I(r)}{(-f_I)^{3/2}} = \frac{m_I(r)}{(\text{sen } r)^3} = a \quad \therefore \quad m_I(r) = a(\text{sen } r)^3 .$$

A equação acima quando calculada em  $r = r_1$  nos fornece, via (5.3.14),

$$m_I(r_1) = m_{II} = a(\text{sen } r_1)^3 \quad \therefore \quad a = \frac{m_{II}}{(\text{sen } r_1)^3} \quad (5.3.15)$$

Logo,

$$m_I(r) = \frac{m_{II}}{\text{sen}^3 r_1} \text{sen}^3 r \quad (5.3.16)$$

Reunindo esses resultados, podemos escrever para a região I ( $0 \leq r \leq r_1$ ):

$$R_I = \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_1} \text{sen } r (1 - \cos \eta_I) \quad (5.3.17a)$$

$$t = \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_1} (\eta_I - \text{sen} \eta_I) \quad (5.3.17b)$$

$$8\pi k \rho_I = \frac{6 \text{sen}^6 r_1}{(km_{II})^2 (1 - \cos \eta_I)^3} \quad (5.3.17c)$$

$$m_I(r) = \frac{4}{3} \pi \rho_I R_I^3 \quad (5.3.17d)$$

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial t} = \frac{\text{sen}^3 r_1}{k m_{II}} \frac{1}{(1 - \cos \eta_I)} \quad , \quad (5.3.17e)$$

onde fizemos  $b = 0$ , para que a singularidade essencial  $\eta_I = 0$  ocorra no instante  $t = 0$ .

Das condições de Darboux,  $R$  e  $f$  devem também ser contínuas em  $r = r_1$ . Comparando as equações (5.3.3a) e (5.3.17a) vemos que a continuidade destas duas funções implica na continuidade do parâmetro  $\eta$ . Por outro lado, o tempo  $t$  medido em qualquer



região deve ser o mesmo, e como temos  $\eta$  contínuo,  $g_{II}(r)$  deve se anular em  $r = r_1$ . Estas são as condições de contorno para  $f_{II}$ ,  $g_{II}$  e  $\eta_{II}$ , porém não é possível explicitar de um modo simples as suas equações. Elas devem ser tais que abedeçam a equação (proveniente das igualdades dos tempos dados por (5.3.3b) e (5.3.17b)):

$$\frac{k m_{II}}{(-f_{II})^{3/2}} (\eta_{II} - \text{sen} \eta_{II}) + g_{II}(r) = \frac{k m_{II}}{\text{sen}^3 r_1} (\eta_I - \text{sen} \eta_I) \quad . \quad (5.3.18)$$

Além de

$$\begin{aligned} g_{II}(r_1) &= 0 \\ \eta_{II}(r_1) &= \eta_I \\ f_{II}(r_1) &= -\text{sen}^2 r_1 \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

A função  $f_{II}(r)$  deve satisfazer ainda às condições (B.13):

$$\begin{aligned} f_{II}(r) &\geq -\frac{2km_{II}}{R_{II}} && \text{para } R_{II} > 2km_{II} \\ f_{II}(r) &> -1 && \text{para } R_{II} < 2km_{II} \end{aligned}$$

#### 5.4 - CÁLCULO DE $\theta$ E DO TEMPO CRÍTICO $t_c$

De (3.2.1) e de (5.3.12), temos para a região I:

$$\theta_I = -2 \frac{(1 - \text{sen}^2 r)^{1/2}}{R_I} = -2 \frac{\text{cos} r}{R_I} \quad (5.4.1a)$$

e para a região II:

$$\theta_{II} = -2 \frac{(1 + f_{II})^{1/2}}{R_{II}} \quad (5.4.1b)$$

Calculemos agora o tempo  $t_c$  para o qual tem-se

$$R_I(r_1, t_c) = 2km_{II} \quad .$$

De (5.3.17a),

$$R_I(r_1, t_c) = \frac{km_{II}}{\text{sen}^2 r_1} (1 - \cos \eta_{cI}) = 2km_{II}$$

$$1 - \cos \eta_{cI} = 2 \text{sen}^2 r_1$$

$$\cos \eta_{cI} = \cos 2r_1 \quad \therefore \quad \eta_{cI} = \begin{cases} 2r_1 & \text{se } r_1 < \pi/2 \quad (5.4.2a) \\ 2\pi - 2r_1 & \text{se } r_1 > \pi/2 \quad (5.4.2b) \end{cases}$$

O fato de termos dois valores para  $\eta_{cI}$  corresponde aos dois instantes em que a superfície  $r_1$  passa através do raio gravitacional  $R = 2km$ : um acontece quando ela se expande, e outro, quando ela contrai. O valor  $\eta_{cI}$  é tomado para o instante em que ela ao se expandir ultrapassa a esfera de Schwarzschild.

Substituindo este valor na expressão do tempo (5.3.17b),

$$t_c = \begin{cases} \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_1} (2r_1 - \text{sen} 2r_1) & \text{para } r_1 < \pi/2 \quad (5.4.3a) \\ \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_1} (2\pi - 2r_1 - \text{sen} 2r_1) & \text{para } r_1 > \pi/2 \quad (5.4.3b) \end{cases}$$

encontramos o valor desejado.

### 5.5 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE 3 CAMADAS

Temos agora o caso análogo ao estudado na Seção 4.3. As equações na região I serão idênticas às deduzidas na Seção 5.3 (eqs. (5.3.17)), com apenas uma modificação: a constante  $b$  será diferente de zero, pois queremos que esta região represente um núcleo de matéria atrasado em relação ao universo exterior (região III), ou seja, queremos que a singularidade  $\eta_I = 0$  ocorra num instante  $t$  maior que zero. Por outro lado,  $r$  estará compreen

dido entre 0 e  $\pi$ .

Reescrevamos pois, a eq. (5.3.17b),

$$t = \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_1} (\eta_I - \text{senn}_I) + g_I \quad (5.5.1)$$

onde  $g_I \equiv b = \text{cte} > 0$ .

As equações para as regiões II e III serão dadas por:

Região II: ( $r_1 < r < r_2$ ) (v\u00e1cuo)

$$R_{II} = \frac{km_{II}}{(-f_{II})} (1 - \cos\eta_{II}) \quad (5.3.3a)$$

$$t = \frac{km_{II}}{(-f_{II})^{3/2}} (\eta_{II} - \text{senn}_{II}) + g_{II}(r) \quad (5.3.3b)$$

onde  $m_{II} = \text{cte}$ .

Região III:  $r_2 \leq r < \pi$  (universo externo)

$$R_{III} = \frac{km_{III}(r)}{\text{sen}^2 r} (1 - \cos\eta_{III}) \quad (5.5.2a)$$

$$t = \frac{km_{III}(r)}{\text{sen}^3 r} (\eta_{III} - \text{senn}_{III}) \quad (5.5.2b)$$

onde  $f_{III} = -\text{sen}^2 r$  (vide eq. (5.3.12)) e  $g_{III} = 0$ , j\u00e1 que esta regi\u00e3o representa o universo externo de Friedmann ( $e = 1$ ).

Analogamente \u00e0 se\u00e7\u00e3o 5.3, a fun\u00e7\u00e3o  $m_{III}(r)$  \u00e9 determina da atrav\u00eas das condi\u00e7\u00f5es de Darmois. Isto \u00e9:

$$m_{III}(r_2) = m_{II}$$

e como

$$\frac{m_{III}(r)}{-\text{sen}^3 r} = \text{cte} \quad (\text{vide eq. (5.3.6a)}),$$

temos então

$$m_{III}(r) = \frac{m_{II}}{\text{sen}^3 r_2} \text{sen}^3 r \quad (5.5.3)$$

E a densidade de matéria na região III é dada por (similar à eq. (5.3.17c)):

$$8\pi k \rho_{III} = \frac{6 \text{sen}^6 r_2}{(km_{II})^2 (1 - \cos \eta_{III})^3} \quad (5.5.4)$$

Novamente a condição (3.1.1) é satisfeita, já que também temos (vide eq. (3.1.12a)):

$$m_I(r_1) = \frac{4}{3} \pi \rho_I R_I^3(r_1, t) = m_{II} = m_{II}(r_2) = \frac{4}{3} \pi \rho_{III} R_{III}^2(r_2, t) \quad (5.5.5)$$

E as equações na região III, juntamente com o resultado (5.5.3), podem ser escritas como:

$$R_{III} = \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_2} \text{sen} r (1 - \cos \eta_{III}) \quad (5.5.6a)$$

$$t = \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_2} (\eta_{III} - \text{sen} \eta_{III}) \quad (5.5.6b)$$

Com base nos mesmos argumentos, que utilizamos para es crevermos a eq. (5.3.18) e as condições (5.3.19), teremos então que as equações na região II deverão satisfazer às seguintes co ndições:

$$\begin{aligned} \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_1} (\eta_I - \text{sen} \eta_I) + g_I &= \frac{km_{II}}{(-f_{II})^{3/2}} (\eta_{II} - \text{sen} \eta_{II}) + g_{II}(r) = \\ &= \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_2} (\eta_{III} - \text{sen} \eta_{III}) = t \end{aligned} \quad (5.5.7a)$$

onde

$$g_I = - \frac{(\eta_{I0} - \text{sen} \eta_{I0}) km_{II}}{\text{sen}^3 r_1}, \quad (5.5.7b)$$

tal que quando  $\eta_I = \eta_{I0} < 0$  tenhamos  $\eta_{III} = 0 \Rightarrow t = 0$ , e

$$\begin{aligned}
 \eta_{II}(r_1) &= \eta_I \\
 \eta_{II}(r_2) &= \eta_{III} \\
 f_{II}(r_1) &= -\text{sen}^2 r_1 \\
 f_{II}(r_2) &= -\text{sen}^2 r_2 \\
 g_{II}(r_1) &= g_I \\
 g_{II}(r_2) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.5.8}$$

Os resultados de  $\theta_I$ ,  $\theta_{II}$  e  $\eta_{cI}$  serão iguais, respectivamente, aos obtidos anteriormente em (5.4.1a), (5.4.1b) e (5.4.2). Para  $\theta_{III}$  e o tempo crítico  $t_c$ , temos porém:

$$\theta_{III} = -2 \frac{\text{cos} r}{R_{III}}
 \tag{5.5.9}$$

$$t_c = \begin{cases} \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_1} (2r_1 - \text{sen} 2r_1) + g_I & \text{para } r_1 < \pi/2 \\ \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_1} (2\pi - 2r_1 - \text{sen} 2r_1) + g_I & \text{para } r_1 > \pi/2 \end{cases}$$

$$\tag{5.5.10a}$$

$$\tag{5.5.10b}$$

## 5.6 - GENERALIZAÇÃO PARA UM MODELO DE n CAMADAS

Trataremos inicialmente do modelo de 5 camadas. Teremos um esquema idêntico ao da Fig. 3.6.1 onde agora F designa uma geometria de Friedmann de seção fechada. As condições de contorno para  $g(r)$  e  $m(r)$  são dadas também por (3.6.1a) e (3.6.1b), ao passo que as relações (4.4.1) serão substituídas por (vide equações (5.3.15) e (5.5.3)):

$$\begin{aligned}
 m_I(r) &= a_I \text{sen}^3 r \\
 m_{III}(r) &= a_{III} \text{sen}^3 r \\
 m_V(r) &= a_V \text{sen}^3 r
 \end{aligned}
 \tag{5.6.1}$$

onde

$$a_I = \frac{m_{II}}{\text{sen}^3 r_1} ; a_{III} = \frac{m_{IV}}{\text{sen}^3 r_3} ; a_V = \frac{m_{IV}}{\text{sen}^3 r_4} \quad (5.6.2)$$

$$m_{IV} \left( \frac{\text{sen } r_2}{\text{sen } r_3} \right)^2 = m_{II} \quad (5.6.3)$$

e

$$a_I = \frac{m_{II}}{\text{sen}^3 r_1} ; a_{III} = \frac{m_{II}}{\text{sen}^3 r_2} = a_I \left( \frac{\text{sen } r_1}{\text{sen } r_2} \right)^3 ;$$

$$a_V = \left( \frac{\text{sen } r_3}{\text{sen } r_2} \frac{\text{sen } r_1}{\text{sen } r_4} \right)^3 m_{II} = \left( \frac{\text{sen } r_3}{\text{sen } r_4} \frac{\text{sen } r_1}{\text{sen } r_2} \right)^3 a_I \quad (5.6.4)$$

substituam agora as eqs. (4.4.2), (4.4.3) e (4.4.4), tendo aquelas sido obtidas destas pela substituição de  $\text{senhr}$  por  $\text{senr}$ .

Vemos também, que a relação (3.6.11) permanece válida. As densidades de matéria são dadas por (vide eqs. (5.3.17c) e (5.5.4)):

$$8\pi k \rho_I = \frac{6 \text{sen}^6 r_1}{(km_{II})^2 (1 - \cos \eta_I)^3}$$

$$8\pi k \rho_{III} = \frac{6 \text{sen}^6 r_3}{(km_{IV})^2 (1 - \cos \eta_{III})^3} \quad (5.6.5)$$

$$8\pi k \rho_V = \frac{6 \text{sen}^6 r_4}{(km_{IV})^2 (1 - \cos \eta_V)^3}$$

Nas três regiões I, III e V temos agora  $f(r) = -\text{sen}^2 r$ . Para as regiões I e III tem-se (vide eq. (5.5.7b)):

$$g_I = - \frac{(\eta_{I0} - \text{sen} \eta_{I0})}{\text{sen}^3 r_1} k m_{II} \quad (5.6.6)$$

$$g_{III} = - \frac{(\eta_{III0} - \text{sen} \eta_{III0})}{\text{sen}^3 r_2} k m_{II}$$

tal que quando  $n_I = n_{I0}$  e  $n_{III} = n_{III0}$ ,  $n_V = 0$  e  $t = 0$ . Ambos  $n_{I0}$  e  $n_{III0}$  são negativos.

O conjunto de condições similar ao (5.5.8) é dado por:

$$\begin{aligned} n_I &= n_{II}(r_1) \\ n_{II}(r_2) &= n_{III} \\ n_{III} &= n_{IV}(r_3) \\ n_{IV}(r_4) &= n_V \end{aligned} \quad (5.6.7a)$$

$$\begin{aligned} f_{II}(r_1) &= -\text{sen}^2 r_1 \\ f_{II}(r_2) &= -\text{sen}^2 r_2 \\ f_{IV}(r_3) &= -\text{sen}^2 r_3 \\ f_{IV}(r_4) &= -\text{sen}^2 r_4 \end{aligned} \quad (5.6.7b)$$

Os dois instantes  $t_c$  são dados pelas equações:

$$t_{cI} = \begin{cases} \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_1} (2r_1 - \text{sen}2r_1) + g_I & \text{para } r_1 < \pi/2 & (5.6.8a) \\ \frac{km_{II}}{\text{sen}^3 r_1} (2\pi - 2r_1 - \text{sen}2r_1) + g_I & \text{para } r_1 > \pi/2 & (5.6.8b) \end{cases}$$

$$t_{cIII} = \begin{cases} \frac{km_{IV}}{\text{sen}^3 r_3} (2r_3 - \text{sen}2r_3) + g_{III} & \text{para } r_3 < \pi/2 & (5.6.8c) \\ \frac{km_{IV}}{\text{sen}^3 r_3} (2\pi - 2r_3 - \text{sen}2r_3) + g_{III} & \text{para } r_3 > \pi/2 & (5.6.8d) \end{cases}$$

Podemos agora escrever as fórmulas genéricas para um modelo de  $n$  camadas. O universo externo será denotado por  $k$ , enquanto que as camadas  $n = I, III, V, VII, \dots$  representam geometrias de Friedmann ( $\epsilon = 1$ ) atrasadas, e as  $n+1 = II, IV, VI, \dots$ , regiões de vazio. Então temos, de (5.6.1), (5.3.2a) e (5.5.2a):

$$R_n = k a_n \text{sen } r (1 - \cos \eta_n) \quad (5.6.9a)$$

$$t = k a_n (\eta_n - \text{senn}_n) + g_n$$

$$R_{n+1} = k \frac{m_{n+1}}{-f_{n+1}(r)} (1 - \cos \eta_{n+1}) \quad (5.6.9b)$$

$$t = k \frac{m_{n+1}}{(-f_{n+1}(r))^{3/2}} (\eta_{n+1} - \text{senn}_{n+1}) + g_{n+1}(r)$$

$$8\pi k \rho_n = \frac{6}{k^2 a_n^2 (1 - \cos \eta_n)^3} \quad (5.6.10)$$

A generalização das equações (5.6.4) nos fornece:

$$a_n = \left[ \frac{\text{sen } r_{n-2} \cdot \text{sen } r_{n-4} \cdot \text{sen } r_{n-6} \dots \text{sen } r_3 \cdot \text{sen } r_1}{\text{sen } r_{n-1} \cdot \text{sen } r_{n-3} \cdot \text{sen } r_{n-5} \dots \text{sen } r_4 \cdot \text{sen } r_2} \right]^3 a_I \quad (5.6.11a)$$

(n>I)

$$a_I = \frac{m_{II}}{\text{sen}^3 r_1} \quad (5.6.11b)$$

$$m_n(r_n) = \left[ \frac{\text{sen } r_n \cdot \text{sen } r_{n-2} \cdot \text{sen } r_{n-4} \dots \text{sen } r_5 \cdot \text{sen } r_3}{\text{sen } r_{n-1} \cdot \text{sen } r_{n-3} \cdot \text{sen } r_{n-5} \dots \text{sen } r_4 \cdot \text{sen } r_2} \right]^3 m_{II} \quad (5.6.12a)$$

(n>I)

$$m_I(r_1) = m_{II} \quad (5.6.12b)$$

$$m_n(r) = \frac{4}{3} \pi \rho_n R_n^3(r, t) = a_n \text{sen}^3 r \quad (5.6.13)$$

$$\frac{m_{n+3}}{\text{sen}^3 r_{n+2}} = \frac{m_{n+1}}{\text{sen}^3 r_{n+1}} \quad (5.6.14)$$

Das equações (5.6.6), tiramos:

$$g_n = -a_n (\eta_{n0} - \text{sen } \eta_{n0}) \quad (5.6.15a)$$



quando

$$n_n = n_{n0}, \quad n_k = 0 \implies t = 0$$

e

$$g_{n+1}(r_n) = g_n \tag{5.6.15b}$$

$$g_{n+1}(r_{n+1}) = g_{n+2}$$

Para as equações (5.6.7),

$$n_{n+1}(r_n) = n_n \tag{5.6.16a}$$

$$n_{n+1}(r_{n+1}) = n_{n+2}$$

$$f_{n+1}(r_n) = -\text{sen}^2 r_n \tag{5.6.16b}$$

$$f_{n+1}(r_{n+1}) = -\text{sen}^2 r_{n+1}$$

Devemos igualar também as expressões de  $t$  de todas as regiões, analogamente à relação (5.5.7a).

A generalização dos coeficientes de expansão  $\theta$  nos fornece:

$$\theta_n = \frac{-2 \cos r}{R_n} \tag{5.6.17a}$$

$$\theta_{n+1} = \frac{-2(1+f_{n+1})^{1/2}}{R_{n+1}} \tag{5.6.17b}$$

e para os tempos críticos (5.6.8):

$$t_{c_n} = \begin{cases} k a_n (2r_n - \text{sen} 2r_n) + g_n & \text{para } r_n < \pi/2 \tag{5.6.18a} \\ k a_n (2\pi - 2r_n - \text{sen} 2r_n) + g_n & \text{para } r_n > \pi/2 \tag{5.6.18b} \end{cases}$$

## CONCLUSÃO

Partindo da solução de Tolman<sup>(1)</sup>, Novikov<sup>(25)</sup> em 1964 construiu um modelo onde partes do universo não emergiram juntamente com o resto do universo no instante da grande explosão ("big-bang"), criando-se assim regiões atrasadas (buracos brancos). Estes núcleos atrasados estão separados do resto do universo por uma camada de vácuo cuja métrica é a solução de Schwarzschild expressa em coordenadas comoventes. Tanto o núcleo atrasado como o universo estão em expansão. Temos portanto a ligação de uma métrica estática (região do vácuo) com uma dependente do tempo. À primeira vista poderia parecer que tal ligação não seria possível, mas como foi mostrado por Einstein e Strauss<sup>(26)</sup> já em 1945, a expansão da matéria não torna a métrica do vácuo dependente do tempo. O que se torna dependente do tempo é a hipersuperfície de limitadora das duas regiões.

Devemos notar ainda que a construção de um modelo, onde as métricas do núcleo atrasado e do universo sejam dadas por geometrias de Friedman com seções espaciais diferentes, é impossível de ser construído, uma vez que estaríamos ligando topologias diferentes. Esta impossibilidade torna-se mais evidente se analisarmos as equações (1.1.13), (1.1.15) e (1.1.18) e lembrarmos das condições de contorno de Darboux, que exigem a continuidade de  $R$ .

Novikov construiu um modelo onde duas regiões de densidades ( $\rho$ ) diferentes são separadas por uma camada de vácuo. Uma pergunta poderia surgir de imediato: seria possível a construção

de um modelo onde a camada de vácuo fosse substituída por uma outra com densidade diferente das anteriores? Por simplicidade podemos, sem perda de generalização, considerar o modelo de seção euclidiana ( $\epsilon = 0$ ). Do Capítulo 3, vemos que a densidade é inversamente proporcional a  $[t-g_n]^2$ , onde  $g_n$  é uma constante arbitrária e diferente para cada região. Mostramos nesse capítulo que  $g_n$  deve ser contínuo nas hipersuperfícies de separação, de maneira a satisfazer às condições de Darmois. Vemos portanto que  $g_n$  terá o mesmo valor em qualquer região, ou seja, não teremos então três regiões diferentes, e sim um único universo com essa dada densidade. Logo, não existe solução de camadas com densidades ( $\rho$ ) distintas, se não forem separadas por uma região de vácuo. Este resultado é análogo ao obtido por Eisenstaedt<sup>(56)</sup> em 1977.

Obtivemos nos três casos ( $\epsilon = 0, \pm 1$ ), a relação entre as massas e os raios de cada camada. Devemos observar também, que é possível a construção de um modelo de várias camadas onde a região mais externa seja vazia, extensão do resultado de Zel'dovich<sup>(39)</sup>.

A idéia original era estudar criação de partículas através desses núcleos atrasados. Esta idéia surgiu do fato de não existir uma unanimidade quanto aos resultados do estudo da Teoria Quântica de Campos nestes universos. Na prática desse exame, fomos levados a uma melhor caracterização dos núcleos atrasados e de suas eventuais extensões (modelo de  $n$  camadas para seções euclidianas e não-euclidianas). Esta monografia representa este estudo. A continuação deste é bastante clara; por um lado deveríamos examinar o problema da criação de partículas nas diferentes regiões ( $n$  camadas), uma vez que esse já foi estudado separadamente em métricas estáticas e não estáticas. De outro mo-

do um estudo sobre o comportamento de geodésicas nas hipersuperfícies de separação seria desejável a fim de conhecermos as propriedades óticas destes núcleos atrasados-quasares. A teoria dos núcleos atrasados com carga foi estudada por Markov e Frolov<sup>(55)</sup>. Seria possível construir um núcleo atrasado tendo neutrinos como fonte de curvatura ?

Essas são algumas questões que o presente trabalho permite encaminhar.

## APÊNDICE A

### CÁLCULO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO EM FORMALISMO DE TETRAOAS

Dada a métrica:

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - e^{\mu} d\Omega^2 \quad (\text{A.1})$$

onde  $\nu$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  são funções de  $r$  e  $t$ , podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2, \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\begin{aligned} \theta^0 &= e^{\nu/2} dt \\ \theta^1 &= e^{\lambda/2} dr \\ \theta^2 &= e^{\mu/2} d\theta \\ \theta^3 &= e^{\mu/2} \sin\theta d\phi \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Derivando,

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu/2} dr \wedge dt \\ d\theta^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda/2} dt \wedge dr \\ d\theta^2 &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{\mu/2} dt \wedge d\theta + \frac{\mu'}{2} e^{\mu/2} dr \wedge d\theta \\ d\theta^3 &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{\mu/2} \sin\theta dt \wedge d\phi + \frac{\mu'}{2} e^{\mu/2} \sin\theta dr \wedge d\phi + \\ &\quad + e^{\mu/2} \cos\theta d\theta \wedge d\phi \end{aligned}$$

Substituindo as equações (A.3) nas acima, temos:

$$\begin{aligned}
 d\theta^0 &= -\frac{v'}{2} e^{-\lambda/2} \theta^0 \wedge \theta^1 \\
 d\theta^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-v/2} \theta^0 \wedge \theta^1 \\
 d\theta^2 &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{-v/2} \theta^0 \wedge \theta^2 + \frac{\mu'}{2} e^{-\lambda/2} \theta^1 \wedge \theta^2 \\
 d\theta^3 &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{-v/2} \theta^0 \wedge \theta^3 + \frac{\mu'}{2} e^{-\lambda/2} \theta^1 \wedge \theta^3 + \\
 &\quad + \cotg\theta e^{-\mu/2} \theta^2 \wedge \theta^3 .
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Sabendo que:

$$\begin{aligned}
 d\theta^A &= \frac{1}{2} C^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \\
 C^A_{BC} &= -C^A_{CB}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

podemos ler diretamente das eqs. (A.4) os coeficientes  $C^A_{BC}$  não nulos:

$$\begin{aligned}
 C^0_{01} &= \frac{-v'}{2} e^{-\lambda/2} \\
 C^1_{01} &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-v/2} \\
 C^2_{02} &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{-v/2} \\
 C^2_{12} &= \frac{\mu'}{2} e^{-\lambda/2} \\
 C^3_{03} &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{-v/2} \\
 C^3_{13} &= \frac{\mu'}{2} e^{-\lambda/2} \\
 C^3_{23} &= e^{-\mu/2} \cotg\theta
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Os coeficientes de rotação de Ricci são dados pela expressão

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ABC} &= \frac{1}{2} (C_{ABC} - C_{BAC} - C_{CAB}) \\
 \gamma_{ABC} &= -\gamma_{BAC}
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Substituindo os valores encontrados em (A.6), temos:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{100} &= \frac{-v'}{2} e^{-\lambda/2} \\
 \gamma_{101} &= \frac{-\dot{\lambda}}{2} e^{-v/2} \\
 \gamma_{202} &= \gamma_{303} = \frac{-\dot{\mu}}{2} e^{-v/2} \\
 \gamma_{212} &= \gamma_{313} = \frac{-\mu'}{2} e^{-\lambda/2} \\
 \gamma_{323} &= -e^{-\mu/2} \cotg\theta
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Com  $\omega^A_B = \gamma^A_{BC} \theta^C$  e os resultados acima encontramos para  $\omega^A_B$ :

$$\begin{aligned}
 \omega^0_1 &= \frac{v'}{2} e^{-\lambda/2} \theta^0 + \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-v/2} \theta^1 \\
 \omega^0_2 &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{-v/2} \theta^2 \\
 \omega^0_3 &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{-v/2} \theta^3 \\
 \omega^1_2 &= \frac{-\mu'}{2} e^{-\lambda/2} \theta^2 \\
 \omega^1_3 &= \frac{-\mu'}{2} e^{-\lambda/2} \theta^3 \\
 \omega^2_3 &= -\cotg\theta e^{-\mu/2} \theta^3
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Substituindo (A.3) nos  $\omega^A_B$ ,

$$\begin{aligned}
 \omega^0_1 &= \frac{v'}{2} e^{-\lambda/2} e^{v/2} dt + \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-v/2} e^{\lambda/2} dr \\
 \omega^0_2 &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{-v/2} e^{\mu/2} d\theta \\
 \omega^0_3 &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{-v/2} e^{\mu/2} \text{sen}\theta d\phi \\
 \omega^1_2 &= \frac{-\mu'}{2} e^{-\lambda/2} e^{\mu/2} d\theta \\
 \omega^1_3 &= \frac{-\mu'}{2} e^{-\lambda/2} e^{\mu/2} \text{sen}\theta d\phi \\
 \omega^2_3 &= -\cos\theta d\phi .
 \end{aligned}$$

Derivando exteriormente estas expressões, e substituindo

do novamente as eqs. (A.3), encontramos:

$$d\omega^0_1 = - \left( \frac{\ddot{\nu}''}{2} + \frac{\dot{\nu}'^2}{4} - \frac{\dot{\nu}'\dot{\lambda}'}{4} \right) e^{-\lambda} \theta^0 \wedge \theta^1 +$$

$$+ \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \right) e^{-\nu} \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$d\omega^0_2 = \left( \frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} - \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{4} \right) e^{-\nu} \theta^0 \wedge \theta^2 +$$

$$+ \left( \frac{\dot{\mu}'}{2} + \frac{\dot{\mu}\mu'}{4} - \frac{\dot{\mu}\nu'}{4} \right) e^{-\nu/2} e^{-\lambda/2} \theta^1 \wedge \theta^2$$

$$d\omega^0_3 = \left( \frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} - \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{4} \right) e^{-\nu} \theta^0 \wedge \theta^3 +$$

$$+ \left( \frac{\dot{\mu}'}{2} + \frac{\dot{\mu}\mu'}{4} - \frac{\dot{\mu}\nu'}{4} \right) e^{-\nu/2} e^{-\lambda/2} \theta^1 \wedge \theta^3 +$$

$$+ \frac{\dot{\mu}}{2} \cotg\theta e^{-\nu/2} e^{-\mu/2} \theta^2 \wedge \theta^3 .$$

$$d\omega^1_2 = - \left( \frac{\dot{\mu}'}{2} - \frac{\mu'\dot{\mu}}{4} + \frac{\mu'\dot{\lambda}}{4} \right) e^{-\nu/2} e^{-\lambda/2} \theta^0 \wedge \theta^2 +$$

$$+ \left( - \frac{\mu''}{2} - \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'\lambda'}{4} \right) e^{-\lambda} \theta^1 \wedge \theta^2 \quad (A.10)$$

$$d\omega^1_3 = \left( - \frac{\dot{\mu}'}{2} - \frac{\mu'\dot{\mu}}{4} + \frac{\mu'\dot{\lambda}}{4} \right) e^{-\lambda/2} e^{-\nu/2} \theta^0 \wedge \theta^3 +$$

$$+ \left( - \frac{\mu''}{2} - \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'\lambda'}{4} \right) e^{-\lambda} \theta^1 \wedge \theta^3 - \frac{\mu'}{2} \cotg\theta e^{-\lambda/2} e^{-\mu/2} .$$

$$. \theta^2 \wedge \theta^3$$

$$d\omega^2_3 = e^{-\mu} \theta^2 \wedge \theta^3 .$$

Então para a 2-forma de curvatura



$$\Omega_B^A = d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C$$

temos:

$$\Omega_1^0 = d\omega_1^0 + \omega_1^0 \wedge \omega_1^1 + \omega_2^0 \wedge \omega_1^2 + \omega_3^0 \wedge \omega_1^3$$

$$\Omega_2^0 = d\omega_2^0 + \omega_1^0 \wedge \omega_2^1 + \omega_3^0 \wedge \omega_2^3$$

$$\Omega_3^0 = d\omega_3^0 + \omega_1^0 \wedge \omega_3^1 + \omega_2^0 \wedge \omega_3^2$$

$$\Omega_2^1 = d\omega_2^1 + \omega_0^1 \wedge \omega_2^0 + \omega_3^1 \wedge \omega_2^3$$

$$\Omega_3^1 = d\omega_3^1 + \omega_0^1 \wedge \omega_3^0 + \omega_2^1 \wedge \omega_3^2$$

$$\Omega_3^2 = d\omega_3^2 + \omega_0^2 \wedge \omega_3^0 + \omega_1^2 \wedge \omega_3^1$$

Substituindo as expressões acima pelas das (A.9) e (A.10),

$$\Omega_1^0 = \left[ \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \right) e^{-\nu} - \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} \right) e^{-\lambda} \right] \theta^0 \wedge \theta^1$$

$$\begin{aligned} \Omega_2^0 = & \left[ \left( \frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} - \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{4} \right) e^{-\nu} - \frac{\nu'\mu'}{4} e^{-\lambda} \right] \theta^0 \wedge \theta^2 + \\ & + \left( \frac{\dot{\mu}'}{2} + \frac{\dot{\mu}\mu'}{4} - \frac{\dot{\mu}\nu'}{4} - \frac{\mu'\dot{\lambda}}{4} \right) e^{-\nu/2} e^{-\lambda/2} \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_3^0 = & \left[ \left( \frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} - \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{4} \right) e^{-\nu} - \frac{\nu'\mu'}{4} e^{-\lambda} \right] \theta^0 \wedge \theta^3 + \\ & + \left( \frac{\dot{\mu}'}{2} + \frac{\dot{\mu}\mu'}{4} - \frac{\dot{\mu}\nu'}{4} - \frac{\mu'\dot{\lambda}}{4} \right) e^{-\nu/2} e^{-\lambda/2} \theta^1 \wedge \theta^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega^1_2 &= \left( -\frac{\dot{\mu}'}{2} - \frac{\mu' \dot{\mu}}{4} + \frac{\mu' \dot{\lambda}}{4} + \frac{\dot{\mu} v'}{4} \right) e^{-v/2} e^{-\lambda/2} \theta^0 \wedge \theta^2 + \\
 &+ \left[ \left( -\frac{\mu''}{2} - \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu' \lambda'}{4} \right) e^{-\lambda} + \frac{\dot{\mu} \dot{\lambda}}{4} e^{-v} \right] \theta^1 \wedge \theta^2 \\
 \Omega^1_3 &= \left( -\frac{\dot{\mu}'}{2} - \frac{\mu' \dot{\mu}}{4} + \frac{\mu' \dot{\lambda}}{4} + \frac{v' \dot{\mu}}{4} \right) e^{-\lambda/2} e^{-v/2} \theta^0 \wedge \theta^3 + \quad (A.11) \\
 &+ \left[ \left( -\frac{\mu''}{2} - \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu' \lambda'}{4} \right) e^{-\lambda} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\mu}}{4} e^{-v} \right] \theta^1 \wedge \theta^3 \\
 \Omega^2_3 &= \left( e^{-\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} e^{-v} - \frac{\mu'^2}{4} e^{-\lambda} \right) \theta^2 \wedge \theta^3
 \end{aligned}$$

Obtidas estas formas, podemos calcular as componentes de tetrada do tensor de Riemann pela fórmula  $\Omega^A_B = \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D$

$$\begin{aligned}
 R^0_{101} &= \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda} \dot{v}}{4} \right) e^{-v} - \left( \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} - \frac{v' \lambda'}{4} \right) e^{-\lambda} \\
 R^0_{202} &= R^0_{303} = \left( \frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} - \frac{\dot{\mu} \dot{v}}{4} \right) e^{-v} - \frac{v' \mu'}{4} e^{-\lambda} \\
 R^0_{212} &= R^0_{313} = \left( \frac{\dot{\mu}'}{2} + \frac{\dot{\mu} \mu'}{4} - \frac{\dot{\mu} v'}{4} - \frac{\mu' \dot{\lambda}}{4} \right) e^{-v/2} e^{-\lambda/2} \quad (A.12) \\
 R^1_{212} &= R^1_{313} = \left( -\frac{\mu''}{2} - \frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu' \lambda'}{4} \right) e^{-\lambda} + \frac{\dot{\mu} \dot{\lambda}}{4} e^{-v} \\
 R^2_{323} &= e^{-\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} e^{-v} - \frac{\mu'^2}{4} e^{-\lambda}
 \end{aligned}$$

As outras são nulas.

De posse desses valores obtemos  $R_{AB} = R^C_{ACB}$ .

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030} \\
 &= R^1_{010} + 2R^2_{020}
 \end{aligned}$$

$$R_{11} = R^0_{101} + 2 R^2_{121}$$

$$R_{22} = R_{33} = R^0_{202} + R^1_{212} + R^3_{232}$$

$$R_{01} = 2 R^2_{021}$$

Mas como pelas propriedades de simetria do tensor de Riemann,

$$R^1_{010} = -R_{1010} = -R_{0101} = -R^0_{101}$$

$$R^2_{020} = -R^0_{202}$$

$$R^2_{121} = -R_{2121} = -R_{1212} = R^1_{212}$$

$$R^2_{021} = -R_{2021} = -R_{0212} = -R^0_{212}$$

$$R^3_{232} = R^2_{323}$$

Com estas relações de simetria e as eqs. (A.12), temos como resultado,

$$R_{00} = \left( \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} - \frac{v'\lambda'}{4} - \frac{v'\mu'}{2} \right) e^{-\lambda} - \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{4} + \ddot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} + \right. \\ \left. - \frac{\dot{\mu}\dot{v}}{2} \right) e^{-\nu}$$

$$R_{11} = \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{4} + \frac{\dot{\mu}\dot{\lambda}}{2} \right) e^{-\nu} - \left( \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} - \frac{v'\lambda'}{4} + \right. \\ \left. + \mu'' + \frac{\mu'^2}{2} - \frac{\mu'\lambda'}{2} \right) e^{-\lambda} \quad (A.13)$$

$$R_{22} = R_{33} = \left( \frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} - \frac{\dot{\mu}\dot{v}}{4} + \frac{\dot{\mu}\dot{\lambda}}{4} \right) e^{-\nu} - \left( \frac{\mu''}{2} + \frac{\mu'^2}{2} - \frac{\mu'\lambda'}{4} + \frac{v'\mu'}{4} \right) \cdot \\ \cdot e^{-\lambda} + e^{-\mu}$$

$$R_{01} = -\left( \dot{\mu}' + \frac{\dot{\mu}\mu'}{2} - \frac{\dot{\mu}v'}{2} - \frac{\mu'\dot{\lambda}}{2} \right) e^{-\nu/2} e^{-\lambda/2}$$

O escalar de curvatura  $R$  é dado por:

$$R = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3 = R_{00} - R_{11} - 2 R_{22}$$

$$R = \left( v'' + \frac{v'^2}{2} - \frac{v'\lambda'}{2} + 2\mu'' + \frac{3\mu'^2}{2} - \mu'\lambda' + v'\mu' \right) e^{-\lambda} +$$

$$- \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{2} + 2\ddot{\mu} + \frac{3}{2} \dot{\mu}^2 - \dot{\mu}\dot{v} + \dot{\mu}\dot{\lambda} \right) e^{-v} - 2e^{-\mu} \quad (\text{A.14})$$

As componentes em tetradas do tensor de Einstein  $G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2} R \eta_{AB}$ , serão escritas <sup>(3)</sup>

$$G_{00} = \left( \frac{\dot{\mu}^2}{4} + \frac{\dot{\mu}\dot{\lambda}}{2} \right) e^{-v} - \left( \mu'' + \frac{3\mu'^2}{4} - \frac{\mu'\lambda'}{2} \right) e^{-\lambda} + e^{-\mu}$$

$$G_{11} = \left( \frac{\mu'^2}{4} + \frac{v'\mu'}{2} \right) e^{-\lambda} - \left( \ddot{\mu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 - \frac{\dot{\mu}\dot{v}}{2} \right) e^{-v} - e^{-\mu} \quad (\text{A.15})$$

$$G_{22} = G_{33} = \left( \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} - \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{\mu''}{2} + \frac{\mu'^2}{4} - \frac{\mu'\lambda'}{4} + \frac{v'\mu'}{4} \right) e^{-\lambda} +$$

$$- \left( \frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} - \frac{\dot{\mu}\dot{v}}{4} + \frac{\dot{\mu}\dot{\lambda}}{4} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{4} \right) e^{-v}$$

$$G_{01} = R_{01}$$

Para obtermos as equações de campo (1.1.4) será necessário primeiramente escrever o tensor  $G_{AB}$  em termos de  $G_{\alpha\beta}$ . Esta transformação é feita através das tetradas da seguinte maneira: as componentes de um tensor qualquer,  $H_{\alpha\gamma}^{\beta}$  por exemplo, estão relacionadas com as componentes em tetradas do mesmo tensor ( $H_{AC}^B$ ) da forma  $H_{\alpha\gamma}^{\beta} = e_{\alpha}^{(A)} e_{(B)}^{\beta} e_{\gamma}^{(C)} H_{AC}^B$ , onde a tetrada  $e_{\alpha}^{(A)}$  é obtida da expressão  $\theta^A = e_{\alpha}^{(A)} dx^{\alpha}$ .

Observando então, as eqs. (A.3) vemos que podemos ler as tetradas diretamente:

$$\begin{aligned}
 e^{(0)}_0 &= e^{\nu/2} \\
 e^{(1)}_1 &= e^{\lambda/2} \\
 e^{(2)}_2 &= e^{\mu/2} \\
 e^{(3)}_3 &= e^{\mu/2} \operatorname{sen} \theta
 \end{aligned}
 \tag{A.16}$$

E as componentes  $G_{\alpha\beta} = e^{(A)}_{\alpha} e^{(B)}_{\beta} G_{(A)(B)}$  serão dadas por:

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= e^{\nu} G_{(0)(0)} \\
 G_{11} &= e^{\lambda} G_{(1)(1)} \\
 G_{22} &= e^{\mu} G_{(2)(2)} \\
 G_{33} &= e^{\mu} \operatorname{sen}^2 \theta G_{(2)(2)} \\
 G_{01} &= e^{\nu/2} e^{\lambda/2} G_{(0)(1)}
 \end{aligned}
 \tag{A.17}$$

onde agora os  $G_{(A)(B)}$  são aqueles calculados nas eqs. (A.15).

As equações de campo (1.1.4) foram obtidas de uma métrica com  $\nu = 0$  e  $e^{\mu} \equiv R^2$ . As derivadas  $\dot{\mu}$ ,  $\ddot{\mu}$ ,  $\mu'$ ,  $\mu''$ , deverão ser substituídas em função de  $\dot{R}$ ,  $\ddot{R}$ ,  $R'$ ,  $R''$ ,  $R$

$$\begin{aligned}
 (e^{\mu})' &= 2R\dot{R} \\
 \dot{\mu} &= 2R\dot{R} e^{-\mu} = \frac{2\dot{R}}{R} \\
 \dot{\mu}' &= \frac{2\dot{R}'}{R} - \frac{2\dot{R}R'}{R^2} \\
 \ddot{\mu} &= \frac{2\ddot{R}}{R} - \frac{2\dot{R}^2}{R^2}
 \end{aligned}
 \tag{A.18}$$

Então, substituindo as condições (A.18), as eqs. (A.15) em (A.17) obtemos:

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\ddot{R}\lambda}{R} + \frac{1}{R^2} + \left( \frac{R'}{R} \lambda' - \frac{2R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} \right) e^{-\lambda} \\
 G_{11} &= \frac{R'^2}{R^2} - \left( \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} + \frac{2\ddot{R}}{R} \right) e^{\lambda} \\
 G_{22} &= \frac{R''}{R} - \frac{\lambda'}{2} \frac{R'}{R} - e^{\lambda} \left( \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \frac{\dot{R}}{R} \right)
 \end{aligned}
 \tag{A.19}$$

$$G_{33} = \text{sen}^2 \theta G_{22}$$

$$G_{01} = \frac{R' \dot{\lambda}}{R} - \frac{2\dot{R}'}{R} .$$

Utilizando o tensor métrico de (1.1.1) para levantar - mos os índices de (A.19), obtemos o lado direito das equações de campo (1.1.4).

Os símbolos de Christoffel não nulos são dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1 \ 0}^0 &= \frac{\nu'}{2} & \Gamma_{0 \ 0}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu} e^{-\lambda} \\ \Gamma_{0 \ 0}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2} & \Gamma_{0 \ 1}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} \\ \Gamma_{1 \ 1}^0 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda} e^{-\nu} & \Gamma_{1 \ 1}^1 &= \frac{\lambda'}{2} \\ \Gamma_{2 \ 2}^0 &= \frac{\dot{\mu}}{2} e^{\mu} e^{-\nu} & \Gamma_{2 \ 2}^1 &= -\frac{\mu'}{2} e^{\mu} e^{-\lambda} \\ \Gamma_{3 \ 3}^0 &= \text{sen}^2 \theta \Gamma_{2 \ 2}^0 & \Gamma_{3 \ 3}^1 &= \text{sen}^2 \theta \Gamma_{2 \ 2}^1 \\ \Gamma_{1 \ 2}^2 &= \frac{\mu'}{2} & \Gamma_{1 \ 3}^3 &= \frac{\mu'}{2} \\ \Gamma_{3 \ 3}^2 &= -\text{sen} \theta \cos \theta & \Gamma_{3 \ 2}^3 &= \text{cotg} \theta \\ \Gamma_{2 \ 0}^2 &= \frac{\dot{\mu}}{2} & \Gamma_{3 \ 0}^3 &= \frac{\dot{\mu}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Podemos expressar ainda, o tensor  $G^A_B$  em termos das componentes do tensor de Riemann  $(R^A_{BCD})^{(8)}$ . Como sabemos, as componentes não nulas de  $R_{AB}$  são:

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^1_{010} + 2 R^2_{020} \\ R_{11} &= R^0_{101} + 2 R^2_{121} \\ R_{22} &= R_{33} = R^0_{202} + R^1_{212} + R^3_{232} \\ R_{01} &= 2 R^2_{021} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

E o escalar de curvatura, R:

$$R = R_{00} - R_{11} - 2 R_{22}$$

$$R = 2 R^1_{010} + 4 R^2_{020} - 4 R^2_{121} - 2 R^3_{232} \quad (\text{A.22})$$

Já que  $G^A_B = R^A_B - \frac{1}{2} \delta^A_B R$ , as componentes de  $G^A_B$ , utilizando as eqs. (A.21) e (A.22), serão

$$\begin{aligned} G^0_0 &= R^0_0 - \frac{1}{2} \delta^0_0 R \\ &= R^1_{010} + 2 R^2_{020} - (R^1_{010} + 2 R^2_{020} - 2 R^2_{121} - R^3_{232}) \end{aligned}$$

$$G^0_0 = + 2 R^2_{121} + R^3_{232}$$

$$G^1_1 = -R^0_{101} - 2 R^2_{121} - (R^1_{010} + 2 R^2_{020} - 2 R^2_{121} - R^3_{232})$$

$$G^1_1 = -2 R^2_{020} + R^3_{232}$$

$$G^2_2 = -R^0_{202} - R^1_{212} - R^3_{232} - (R^1_{010} + 2 R^2_{020} - 2 R^2_{121} - R^3_{232})$$

$$G^2_2 = -R^1_{010} - R^2_{020} + R^2_{121} = G^3_3$$

$$G^0_1 = R^0_1 = 2 R^2_{021}$$

Devemos observar que nas expressões acima, tanto  $G^A_B$  como  $R^A_{BCD}$  estão na forma de tetradas. É preciso então passá-los para índices tensoriais:

$$G^{(0)}_{(0)} = G^0_0$$

$$G^{(1)}_{(1)} = G^1_1$$

$$G^{(2)}_{(2)} = G^2_2$$

$$G^{(0)}_{(1)} = e^{\nu/2} e^{-\lambda/2} G^0_1$$

$$R^{(2)}_{(1)(2)(1)} = -g^{11} R^2_{121} = -g^{22} R^1_{212}$$

$$R^{(3)}_{(2)(3)(2)} = -g^{22} R^3_{232}$$

$$R^{(2)}_{(0)(2)(0)} = g^{00} R^2_{020} = g^{22} R^0_{202}$$

$$R^{(1)}_{(0)(1)(0)} = g^{00} R^1_{010}$$

$$R^{(2)}_{(0)(2)(1)} = e^{-\nu/2} e^{-\lambda/2} R^2_{021}$$

Substituindo estas relações nas expressões anteriores, encontramos as componentes de  $G^\alpha_\beta$  expressas em termos das componentes  $R^\alpha_{\beta\gamma\rho}$  :

$$G^0_0 = -g^{22} (2 R^1_{212} + R^3_{232})$$

$$G^1_1 = -g^{22} (2 R^0_{202} + R^3_{232})$$

$$G^2_2 = +g^{00} (-R^1_{010} + R^2_{020}) - g^{22} R^1_{212}$$

$$e^{\nu/2} e^{-\lambda/2} G^0_1 = 2 e^{-\nu/2} e^{-\lambda/2} R^2_{021}$$

$$G^0_1 = 2 g^{00} R^2_{021}$$

(A.23)



## APÊNDICE B

### SISTEMAS DE COORDENADAS

#### B.1 - TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS DE SCHWARZSCHILD PARA O DE COORDENADAS COMOVENTES <sup>(7)</sup>

O elemento de linha em coordenadas de Schwarzschild,

$$ds^2 = e^\alpha d\tau^2 - e^\beta dR^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (1.2.1)$$

pode ser expresso através de coordenadas comoventes,

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - R^2 d\Omega^2 \quad , \quad (A.1)$$

onde  $R^2$  foi identificado com  $e^\mu$  em (A.1), através das equações:

$$dR = e^{-\beta/2} (e^{\nu/2} \sinh\omega dt + e^{\lambda/2} \cosh\omega dr) \quad (B.1a)$$

$$d\tau = e^{-\alpha/2} (e^{\nu/2} \cosh\omega dt + e^{\lambda/2} \sinh\omega dr) \quad (B.1b)$$

$$\dot{R} = e^{-\beta/2} e^{\nu/2} \sinh\omega$$

$$R' = e^{-\beta/2} e^{\lambda/2} \cosh\omega \quad ,$$

ou seja,

$$\tanh\omega = e^{\lambda/2} e^{-\nu/2} \frac{\dot{R}}{R'} \quad (B.2)$$

e

$$\dot{R}^2 = e^{-\beta} e^\nu \sinh^2\omega$$

$$R'^2 = e^{-\beta} e^\lambda \cosh^2\omega \quad .$$

Com as duas equações acima, obtêm-se :

$$e^{-\beta} = e^{-\lambda} R'^2 - e^{-\nu} \dot{R}^2 \quad (B.3)$$

e  $v$  é tal que o lado direito das eqs. (B.1) é uma diferencial exata.

## B.2 - APLICAÇÃO

A região do vazio no universo de Tolman pode ser descrita tanto através da métrica de Tolman (em coordenadas comoventes),

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R'^2}{1+f(r)} dr^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (1.1.6)$$

como através da métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2km}{R}\right) d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left(1 - \frac{2km}{R}\right)} - R^2 d\Omega^2 \quad (B.4)$$

Antes de escrevermos as equações de transformação, devemos atentar para o detalhe do corpo estar dentro ou fora do raio gravitacional ( $R = 2km$ ). Dividamos pois, o problema em duas etapas:

a) A superfície do corpo é exterior ao raio gravitacional (Região no vazio, tal que  $R > 2km$ ).

Para este caso, as equações (B.1) são reescritas da seguinte forma:

$$dR = \left(1 - \frac{2km}{R}\right)^{1/2} \left[ \sinh\omega dt + \frac{R'}{\left[1+f(r)\right]^{1/2}} \cosh\omega dr \right]$$

$$d\tau = \left(1 - \frac{2km}{R}\right)^{-1/2} \left[ \cosh\omega dt + \frac{R'}{\left[1+f(r)\right]^{1/2}} \sinh\omega dr \right]$$

$$\dot{R} = \left(1 - \frac{2km}{R}\right)^{1/2} \sinh\omega$$

$$R' = R' \left(1 - \frac{2km}{R}\right)^{1/2} \frac{\cosh \omega}{\left[1 + f(r)\right]^{1/2}}$$

tal que:

$$\cosh \omega = \frac{(1 + f(r))^{1/2}}{\left(1 - \frac{2km}{R}\right)^{1/2}} \quad (\text{B.5})$$

$$\sinh \omega = \frac{\dot{R}}{\left(1 - \frac{2km}{R}\right)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2 \omega - \sinh^2 \omega &= 1 \\ &= \frac{1 + f(r) - \dot{R}^2}{1 - \frac{2km}{R}} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\dot{R}^2 = f(r) + \frac{2km}{R} \quad (\text{B.6})$$

e  $\sinh \omega$  se escreve:

$$\sinh \omega = \frac{\left[ f(r) + \frac{2km}{R} \right]^{1/2}}{\left(1 - \frac{2km}{R}\right)^{1/2}} \quad (\text{B.7})$$

$$\text{tgh} \omega = \left[ \frac{f(r) + \frac{2km}{R}}{1 - \frac{2km}{R}} \right]^{1/2} \quad (\text{B.8})$$

b) A superfície do corpo  $\bar{e}$  interna ao raio gravitacional (Região no vazio para  $R < 2km$ )

Neste caso, inicialmente, devemos reescrever o elemento de linha (B.4):

$$ds^2 = \left(\frac{2km}{R} - 1\right)^{-1} dR^2 - \left(\frac{2km}{R} - 1\right) d\tau^2 - R^2 d\Omega^2 \quad (\text{B.9})$$

As equações (B.1) nos serão dadas por:

$$dR = \left(\frac{2km}{R} - 1\right)^{1/2} \left[ \cosh\omega dt + \frac{R'}{(1+f(r))^{1/2}} \sinh\omega dr \right]$$

$$d\tau = -\left(\frac{2km}{R} - 1\right)^{-1/2} \left[ \sinh\omega dt + \frac{R'}{(1+f(r))^{1/2}} \cosh\omega dr \right]$$

e de forma análoga ao caso anterior, obtemos:

$$\sinh\omega = \frac{[1 + f(r)]^{1/2}}{[\frac{2km}{R} - 1]^{1/2}} \quad (B.10)$$

$$\cosh\omega = \left[ \frac{-\frac{2km}{R} + f(r)}{\frac{2km}{R} - 1} \right]^{1/2} \quad (B.11)$$

$$\operatorname{tgh}\omega = \left( \frac{1+f(r)}{\frac{2km}{R} + f(r)} \right)^{1/2} \quad (B.12)$$

Devido à manutenção da assinatura da métrica, e de  $\dot{R}^2$  ser sempre positivo ou nulo, a função  $f(r)$  deverá satisfazer às seguintes restrições:

- a)  $f(r) \geq -\frac{2km}{R}$  para a região  $R > 2km$
- b)  $f(r) > -1$  para a região  $R < 2km$
- (B.13)

### B.3 - TRANSFORMAÇÃO INVERSA

Para o caso (a) da seção precedente, substituindo os valores de  $\cosh\omega$ ,  $\sinh\omega$  obtemos:

$$dR = [f(r) + 2km/R]^{1/2} dt + R' dr \quad (B.14a)$$

$$d\tau = \frac{(1+f(r))^{1/2}}{1 - \frac{2km}{R}} dt + \frac{R' [f(r) + 2km/R]^{1/2}}{(1 - \frac{2km}{R}) [1+f(r)]^{1/2}} dr \quad (B.14b)$$

Após um cálculo simples, tem-se:

$$R' dr = -(1+f)^{1/2} \left(f + \frac{2km}{R}\right)^{1/2} d\tau + \frac{(1+f)}{1 - \frac{2km}{R}} dR \quad (B.15a)$$

$$dt = (1+f)^{1/2} d\tau - \left(f + \frac{2km}{R}\right)^{1/2} \frac{dR}{1 - \frac{2km}{R}} \quad (B.15b)$$

No caso estudado na Seção 3.1,  $f=0$  e as equações acima são reescrita como

$$R' dr = - \sqrt{\frac{2km}{R}} d\tau + \frac{1}{1 - \frac{2km}{R}} dR \quad (B.16a)$$

$$dt = d\tau - \sqrt{\frac{2km}{R}} \frac{dR}{\left(1 - \frac{2km}{R}\right)} \quad (B.16b)$$

Para a região II,  $R' = - \sqrt{2km/R'} g'$  (vide equações (3.1.8)), tal que:

$$g' dr = d\tau - \frac{dR}{\left(1 - \frac{2km}{R}\right) \sqrt{\frac{2km}{R}}} \quad (B.17a)$$

$$dt = d\tau - \sqrt{\frac{2km}{R}} \frac{dR}{\left(1 - \frac{2km}{R}\right)} \quad (B.17b)$$

Integrando as equações acima encontramos as equações (3.1.18).

Para as regiões de Friedman, temos que  $R' = R/r$  (vide eqs. (3.1.20) e (3.1.22)). Então substituindo este valor nas transformadas inversas,

$$\frac{dr}{r} = - (2km)^{1/2} R^{-3/2} d\tau + \frac{dR}{R-2km}$$

$$dt = d\tau - \sqrt{\frac{2km}{R}} \frac{dR}{(1-2km/R)}$$

Integrando,

$$\ln r = -(2km)^{1/2} R^{-3/2} \tau - \ln (R-2km)$$

$$r = -(R-2km) e^{-(2km/R^3)^{1/2} \tau} \quad (B.18a)$$

$$t = \tau - 2 \sqrt{2kmR} + 2km \ln \left| \frac{\sqrt{R} + \sqrt{2km}}{\sqrt{R} - \sqrt{2km}} \right| \quad (B.18b)$$

#### B.4 - FORMA DE EDDINGTON-FINKELSTEIN DA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD <sup>(28)</sup>

A forma do elemento de linha em coordenadas avançadas (+) ou retardadas (-)  $\bar{t}$  é dada por:

$$ds_{\pm}^2 = \left(1 - \frac{2km}{R}\right) d\bar{t}^2 - \left(1 + \frac{2km}{R}\right) dR^2 \pm \frac{4km}{R} d\bar{t}dR - R^2 d\Omega^2 \quad (B.19)$$

Pela transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \tau \mp 2km \ln \left| \frac{R}{2km} - 1 \right| \\ \bar{r} &= R \end{aligned} \quad (B.20)$$

Temos, para  $R > 2km$ ,

$$\begin{aligned} d\bar{t} &= d\tau \mp \frac{2km/R}{1 - \frac{2km}{R}} dR \\ d\bar{t}^2 &= d\tau^2 + \frac{(2km/R)^2}{\left(1 - \frac{2km}{R}\right)^2} dR^2 \mp \frac{4km/R}{1 - \frac{2km}{R}} d\tau dR \end{aligned}$$

Substituindo na métrica acima,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2km}{R}\right) d\tau^2 + \frac{(2km/R)^2}{1 - \frac{2km}{R}} dR^2 \mp \frac{4km}{R} d\tau dR +$$

$$- \left(1 + \frac{2km}{R}\right) dR^2 \pm \frac{4km}{R} d\tau dR - \frac{2(2km/R)^2}{1 - \frac{2km}{R}} dR^2 - R^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2km}{R}\right) d\tau^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{2km}{R}} - R^2 d\Omega^2 .$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) - Tolman, R.C. - "Effect of Inhomogeneity on Cosmological Models" - Proc. N.A.S., 20 (1934) 169.
- (2) - Landau, L.D. e Lifshitz, E.M. - "The Classical Theory of Fields", 6a. Edição, Pergamon Press (1980), § 103.
- (3) - Ver ref. (2), § 100.
- (4) - Adler, R., Bazin, M., Schiffer M. - "Introduction to General Relativity", 2a. Edição, McGraw-Hill Kogabusha LTD, (1975), seção 9.1.
- (5) - Ver ref. (4), Seção 4.3.
- (6) - Ver ref. (4), Seção 6.1.
- (7) - Cahill, M.E. e Taub, A.H. - "Spherically Symmetric Similarity Solutions of the Einstein Field Equations for a Perfect Fluid" - Commun. math. Phys., 21 (1971) 1.
- (8) - Cahill, M.E. e MacVittie, G.C. - "Spherical Symmetry and Mass-Energy in General Relativity. I. General Theory" - Jour. Math. Phys., 11 (1970) 1382.
- (9) - Papapetrou, A. - "Lectures on General Relativity", 1<sup>a</sup> edição, D. Reidel Publishing Company (1974), Cap. VI.
- (10) - Darmois, G. - "Mémorial des Sciences Mathématiques" - Gauthier-Villars, Paris (1927). Fasc. 25.
- (11) - O'Brien, S. e Synge, J.L. - "Jump Conditions at Discontinuities in General Relativity" - Commun. of the Dublin Institute for Advanced Studies (1952) Series A, nº 9.
- (12) - Lichnerowicz, A. - "Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme" - Masson, Paris (1955) pág. 61.
- (13) - Israel, W. - "Discontinuities in Spherically Symmetric Gravitational Fields and Shells of Radiation". Proc. R. Soc. London Ser. A, 248 (1958) 404.



- (14) - Robson, E.H. - "Junction Conditions in General Relativity Theory" - Ann.Inst.Henri Poincaré, 16 (1972) 41.
- (15) - Bonnor, W.B. e Vickers, P.A. - "Junction Conditions in General Relativity" - G.R.G., 13 (1981) 29.
- (16) - Israel, W. - "Singular Hypersurfaces and thin Shells in General Relativity" - Nuovo Cimento, 44 (1966) 1.
- (17) - Misner, C.W., Thorne, K.S. e Wheeler, J.A. - "Gravitation" - 3a. edição, W.H. Freeman and Company (1973), cap.8.
- (18) - Eisenhart, L.P. - "An Introduction to Differential Geometry", 2a. edição - Princeton University Press (1947).
- (19) - Ver ref. (17), Cap. 21.
- (20) - Salim, J.M. - "Monopolos Gravitacionais" - Tese de Mestrado - CBPF (1976) - pág. 21.
- (21) - Novello, M. - "Cosmologia Relativista" - II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF (1980) - Editado por M. Novello (CBPF) - Vol. I, pág. 203.
- (22) - Ver ref. (17), Cap. 11.
- (23) - Kumar, M.M. e Singh, B.P. - "A Note of the Boundary Condition of O'Brien and Synge" - Prog. Theor. Phys., 52(1974), 1068.
- (24) - Synge, J.L. - "Relativity: The General Theory" - 1a. edição - North-Holland Publishing Company (1960) - pág. 39.
- (25) - Novikov, I.D. - "Delayed Explosion of a Part of the Friedman Universe, and Quasars" - Sov.Astron. -AJ, 8 (1965), 857.
- (26) - Einstein, A. e Strauss, E.G. - "The Influence of the Expansion of Space on the Gravitation Fields Surrounding the Individual Stars" - Rev.Mod.Phys., 17 (1945) 120.
- (27) - Ver ref. (21), Vol. I, pág. 281.
- (28) - Ver ref. (9), pág. 70.
- (29) - Ver ref. (2), § 102.
- (30) - Zel'dovich, Ya.B. e Novikov, I.D. - "Relativistic Astrophysics Volume 1: Stars and Relativity" - 3a. edição - The

University of Chicago Press (1978), Seção 3.3.

- (31) - Ver ref. (30), Seção 3.13.
- (32) - Ver ref. (9), Seção 16, Cap. III.
- (33) - Ver ref. (30), Seção 3.1.
- (34) - Ver ref. (17), § 23-8
- (35) - Hawking, S.W. e Ellis, G.F.R. - "The Large Scale Structure of Space-Time" - 4a. edição - Cambridge University Press (1977).
- (36) - Finkelstein, D. - "Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle" - Phys.Rev. D,110 (1958) 965.
- (37) - Ver ref. (30), Seção 3.12.
- (38) - Miller, B.D. - "Negative-Mass Lagging Cores of the Big-Bang" Astrophys.Jour., 208 (1976) 275.
- (39) - Zel'dovich, Ya.B. - "Semiclosed Worlds in the General Theory of Relativity" - Sov.Phys. JETP - 16 (1963) 732.
- (40) - Ver ref. (18), § 49.
- (41) - Eisenhart, L.P. - "Coordinate Geometry" - Dover(1960)Cap.4.
- (42) - Thorne, K.S. - "High Energy Astrophysics", Vol. III - Les Houches (1966) § 3.5.1.
- (43) - Eisenhart, L.P. - "A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces" - § 46.
- (44) - Lake, K. e Roeder, R.C. - "Some Remarks on Surfaces of Discontinuity in General Relativity" - Phys. Rev. D,17 (1978) 1935.
- (45) - Ver ref. (17), § 31-6.
- (46) - Ver ref. (17), § 25-5.
- (47) - Ver ref. (17), § 31-3.
- (48) - Ver ref. (42), § 8.3.2.
- (49) - Ver ref. (17), § 32-4.
- (50) - Ver ref. (17), Box 27-2.

- (51) - Ver ref. (42), § 8.3.6.
- (52) - Ver ref. (17), Box 32-1.
- (53) - Novikov, I.D. - "On the Evolution of a Semiclosed World".  
Astron.Zhur., 40 (1963) 772.
- (54) - Ne'eman, Y. - "Expansion as an Energy Source in Quasi-Stellar Radio Sources" - Astrophys.Jour., 141(1965) 1303.
- (55) - Markov, M.A. e Frolov, V.P. - "Metric of a Closed Friedman World Perturbed by an Electric Charge" -Teoret.Matem. Fiz. 3 (1970) 3.
- (56) - Eisenstaedt, J. - Phys. Rev. D, 16 (1977).
- (57) - Friedmann, A. - "On the Curvature of Space" - Zeit. Phys. 10 (1922) 377.