

Tese de  
Mestrado

Energia de Casimir de férmions sem massa  
em  $D$  dimensões espaço-temporais

Robson Brito Rodrigues

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, julho de 1999.

## Resumo

A energia do vácuo de um campo fermiônico sem massa no interior de duas placas paralelas em um espaço-tempo D-dimensional é calculada. Para regularizar o modelo, são usadas as regularizações dimensional e da função zeta. É apresentada uma expressão geral para a energia de Casimir para o campo fermiônico em tal situação. É encontrado que a densidade de energia do ponto-zero regularizada é finita para qualquer dimensão do espaço-tempo.

## Abstract

The vacuum energy of a massless fermion field defined in the interior of two parallel plates in a  $D$ -dimensional space-time is calculated. In order to regularize the model, a mix between dimensional and zeta-function regularization procedure is used. It is presented a general expression for the regularized zero-point energy of fermion field. It is found that the regularized zero-point energy density is finite for any number of space-time dimensions.

*A meus pais, pelo amor com que se dedicaram a minha educação e formação como ser humano ao longo de toda a minha vida.*

## Agradecimentos

- Ao CBPF, instituição da qual me orgulho de ser aluno e à CAPES pelo apoio financeiro.
- Ao meu orientador Nami F. Svaiter.
- A meu amigo e praticamente co-orientador Raphael M. De Paola.
- À Renata, por seu amor e compreensão.
- A minha família, por seu apoio e paciência (especialmente a minha irmã Simone, por tudo que teve de ouvir de física durante esses anos!).
- À Sebastião A. Dias (Tião), professor e amigo durante toda a minha formação acadêmica.
- Aos amigos que fiz dentro e fora da melhor sala de alunos do CBPF (503A) : André Massafferri (playboy), Eduardo Tonini (chefe do chá), Gabriel Flores (Gabibi), Martin Makler (Martã), Sérgio Santini, Johana Chirinos Diaz, Gino Janampa Añaños, Javier Solano, Fernando Joel, Ricardo (cueca), Jorge Molina, Ada, Danays, Marcelo S. Neto (Marcelão), Leon, Álvaro Nogueira, Álvaro Maluco, Márcia Moutinho, Erwin (jovem).
- Aos amigos da CFC e do LAFEX : Miriam Coutinho, José Ricardo, Márcio e Sônia.
- A todos os alunos, pesquisadores e funcionários do CBPF.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>O Efeito Casimir</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução . . . . .	5
2.2	Quantização canônica do campo escalar e energia de ponto-zero divergente	11
2.3	A energia de Casimir do campo escalar sem massa . . . . .	15
2.4	Quantização canônica do campo de Dirac e energia de ponto-zero divergente	20
2.5	Energia de Casimir do campo de Dirac sem massa . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Energia de Casimir de férmions sem massa em D dimensões espaço-temporais</b>	<b>28</b>
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>40</b>

# Lista de Figuras

3.1 A energia de Casimir do campo fermiônico para D pequeno, deixando de lado o fator de multiplicidade de spin:  $e(D) = \frac{\epsilon_D(L)L^{D-1}}{c(D)}$ . . . . . 38

# Capítulo 1

## Introdução

A cromodinâmica quântica (QCD) é uma teoria de gauge não-abeliana que descreve a dinâmica dos quarks e dos glúons. Até o presente momento, não foram observados quarks livres na natureza. O fato de que somente estados sem cor são observados, fez com que os físicos introduzissem a idéia do confinamento. O mecanismo pelo qual isto ocorre é ainda desconhecido. O “bag model” é uma tentativa de conciliar o sucesso do modelo de quarks com o confinamento.

Uma maneira simplificada de aproximar o modelo de estrutura hadrônica baseada na QCD é introduzir o confinamento à mão, assumindo que os campos estão localizados dentro de regiões finitas e exigindo condições de contorno apropriadas. Isto é implementado especificando uma determinada superfície  $\partial\Omega$  e exigindo que a corrente de quarks através dela seja nula e o campo seja identicamente nulo fora da região especificada. Esta condição de contorno, a exigência de conservação de energia dentro do bag e as equações de movimento do campo livre definem o chamado “MIT bag model”.

De forma geral, o valor esperado no vácuo da densidade de energia de qualquer campo quantizado é divergente. O procedimento usual nesta situação é redefinir a expressão através do ordenamento normal, fazendo nula a energia de ponto-zero. Entretanto na

situação do “bag model”, como os campos estão confinados (a região de integração da componente  $T^{00}$  do tensor momento-energia é somente o interior do bag), este procedimento não pode mais ser adotado. Para calcular a massa dos hadrons devemos levar em conta a energia de ponto-zero do campo fermiônico. A divergência na energia de ponto-zero é removida através de um procedimento de renormalização dando origem à energia de ponto-zero renormalizada ou energia de Casimir.

Em 1948 Casimir mostrou [1] que duas placas paralelas neutras perfeitamente condutoras se atraem no vácuo. A verificação experimental desta força de atração mostrou que a energia do vácuo de campos quânticos na presença de fronteiras não pode ser corretamente definida pelo ordenamento normal. O conceito de energia de Casimir leva em consideração o fato de que em uma situação real, os campos quânticos estão sob a influência de vínculos externos, isto é, estão em interação com matéria ou outros campos externos. Uma idealização desta situação é conseguida exigindo que os campos obedeçam a certas condições de contorno clássicas, o que faz com que a energia de ponto-zero seja modificada. A energia de Casimir é definida como a diferença entre a energia de ponto-zero de uma configuração sob condições de contorno e a energia de ponto-zero de uma configuração livre. Esta definição só faz sentido quando combinada com um esquema de regularização apropriado, que garanta uma expressão finita para esta diferença.

Nos últimos vinte e cinco anos muitos autores calcularam a energia de ponto-zero renormalizada de diferentes campos quânticos no “bag model”. A energia do vácuo renormalizada devido ao campo escalar no “bag model” foi calculada por Bender e Hays [3] e mais recentemente por Romeo [4] e também Bordag *et al* [5]. O cálculo para o caso do campo de gluons foi feito por Milton [2] e também Romeo [6] e para o campo fermiônico,

Milton [2] e também Bender e Hays [3] obtiveram a energia de Casimir no “bag model”.

No problema da renormalização, onde temos de extrair quantidades físicas finitas, duas diferentes situações físicas devem ser estudadas. Na primeira, a superfície onde os campos satisfazem certas condições de contorno divide o espaço-tempo em duas partes e os campos estão presentes em ambas as regiões. Na segunda, - o caso do “bag model” - os campos estão confinados no interior de alguma região [7]. No segundo caso, como não existem modos externos, se usarmos um “cut-off” ou o método das funções de Green para regularizar a energia de ponto-zero, as divergências que irão aparecer só serão capazes de ser absorvidas por um procedimento de renormalização se introduzirmos termos de contato *ad hoc*. Usando o método das funções de Green, Milton [2] obteve uma expressão “cut-off dependent” para a energia de ponto-zero do campo fermiônico no “bag model”, após subtrair a contribuição do espaço-tempo de Minkowski. Entretanto, o “cut-off” não pode ser removido devido a presença de um termo divergente na energia regularizada proporcional a área do bag. Assim o problema só é resolvido se introduzirmos fenomenologicamente um termo à mais na Hamiltoniana proporcional à área do bag (o termo divergente proporcional ao volume pode ser eliminado pela subtração do espaço-tempo de Minkowski, que pode ser pensada como a renormalização da constante de bag  $B$  [8]). Apesar de várias tentativas de resolver este problema, esta é uma questão ainda em aberto na literatura.

Progressos nessa direção foram obtidos por Baacke e Igarashi [10]. Estes autores investigaram a estrutura das divergências da energia de ponto-zero regularizada de férmions massivos confinados em uma cavidade esférica, assumindo uma corrente nula através da superfície. Considerando um campo fermiônico sem massa dentro e fora de uma casca

esférica, Milton [2] mostrou que há um cancelamento entre as divergências. Se considerarmos férmions somente no interior da casca, claramente teremos de introduzir termos de contato para lidar com as divergências da energia de ponto-zero. A questão levantada é : usando um procedimento de regularização analítica, é possível apresentar uma configuração geométrica com campos confinados onde os termos de contato não são necessários ?

O propósito desta tese é calcular a energia de ponto-zero devido ao campo fermiônico não massivo livre confinado no interior de duas placas paralelas em qualquer número de dimensões do espaço-tempo. A mesma idéia foi usada por Chodos e Thorn [7], onde o campo de Dirac está confinado entre duas placas paralelas separadas por uma distância  $L$  na direção  $\hat{z}$ . Trataremos o número de dimensões do espaço-tempo como um parâmetro contínuo e para regularizar a energia de ponto-zero usaremos a regularização dimensional nas variáveis contínuas (relacionadas com os lados da caixa com dimensões infinitas) e em seguida estenderemos analiticamente a função zeta de Hurwitz que aparece após a regularização dimensional. Como consequência, provaremos que a densidade de energia regularizada é finita em qualquer número de dimensões do espaço-tempo. Em outras palavras, não é necessário introduzir contratermos na Lagrangiana “bare”, *i.e.*, temos uma situação com regularização sem renormalização.

# Capítulo 2

## O Efeito Casimir

### 2.1 Introdução

Quando se utiliza o formalismo canônico para quantizar um campo livre, obtém-se uma quantidade divergente para o valor esperado da Hamiltoniana no estado fundamental (energia de ponto-zero). A seguinte expressão para a energia de ponto-zero do campo escalar livre é encontrada :

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \quad (2.1)$$

Uma maneira de resolver o problema da divergência da energia de ponto-zero é redefinindo a Hamiltoniana através do chamado ordenamento normal. O argumento é que a energia do vácuo não pode ser medida e somente diferenças de energia têm relevância física. Assim, é possível somar uma constante a Hamiltoniana, mudando a escala de energia, tornando a energia de ponto-zero nula<sup>1</sup>. Formalmente se define o ordenamento normal de um produto (indicado delimitando a expressão por  $: :$ ), de tal forma que todos os operadores de aniquilação fiquem à direita. Por exemplo, para bósons :

$$\frac{1}{2} : (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger) := a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>A adição de uma constante a Hamiltoniana não afeta as equações de Heisenberg, das quais podem ser deduzidas as equações de movimento.

De tal forma que a Hamiltoniana renormalizada do campo escalar se escreve :

$$: H :=: \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger) := \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}) = H - \langle 0 | H | 0 \rangle \quad (2.3)$$

O ordenamento normal tem sentido se estamos trabalhando no espaço-tempo todo. Entretanto, se nos restringimos a uma região finita do espaço-tempo (bag-model) ou impusermos condições de contorno clássicas sobre os campos quantizados, o ordenamento normal não é mais justificável.

Quando o campo não está livre, os vínculos externos que agem sobre o campo são implementados ou modificando o espaço-tempo no qual o campo existe ( ex: condições de contorno periódicas ) ou através de condições de contorno que representam situações onde o campo está confinado a uma cavidade ou interage com algum objeto macroscópico. No caso da interação com um objeto macroscópico, uma idealização desta situação é conseguida tratando tais objetos como superfícies  $S$ , nas quais o campo obedece a determinadas condições de contorno. Dependendo da situação física, diferentes condições de contorno podem ser requeridas.

**Condições de Dirichlet.** O campo ou alguns de seus componentes devem se anular sobre a superfície  $S$  :

$$\Phi(\vec{r}, t) |_{S=0} \quad (2.4)$$

**Condições de Neumann.** A derivada normal do campo (normal a superfície) deve se anular em  $S$ .

$$(\hat{n} \cdot \nabla \Phi(\vec{r}, t)) |_{S=0} \quad (2.5)$$

Estas condições são análogas às chamadas condições de bag, aplicadas aos quarks confinados num hadron, em que a componente normal da corrente fermiônica (corrente de quarks) deve se anular na parede do bag.

A implementação matemática dos vínculos externos como condições de contorno modifica a energia de ponto-zero do campo. A quantidade observável é a *variação* na energia de ponto-zero que ocorre quando se impõe condições de contorno. A energia renormalizada (energia de Casimir) de uma certa configuração submetida a certas condições de contorno é definida como a diferença das energias de ponto-zero da configuração sob condições de contorno e livre. Ou seja :

$$E_{ren} [\partial\Gamma] = E_0 [\partial\Gamma] - E_0 [0] \quad (2.6)$$

onde :

$E_{ren} [\partial\Gamma]$  = energia renormalizada do campo submetido a condição de contorno  $\partial\Gamma$

$E_0 [\partial\Gamma]$  = energia de ponto-zero do campo submetido a condição de contorno  $\partial\Gamma$

$E_0 [0]$  = energia de ponto-zero do campo livre

A equação 2.6 continua indefinida e só produz um resultado finito, isto é, só produz a energia renormalizada se antes efetuarmos um procedimento de regularização que deixe a expressão finita em um passo intermediário. Quando a subtração na equação 2.6 (já regularizada) é feita, obtemos um resultado finito, isto é, obtemos a energia renormalizada. De acordo com a equação 2.6, a forma de calcular a energia renormalizada mostra que a divergência de  $E_0 [\partial\Gamma]$  vem da contribuição do campo livre no espaço vazio. Para exemplificar tal fato, considere um campo escalar sem massa em um espaço tempo 2-dimensional. Vamos supor que existam duas placas paralelas separadas por uma distância  $a$  e que o campo obedeça à condição de Dirichlet sobre elas. Pode ser mostrado [12] que a densidade de energia de ponto-zero é dada por :

$$\varepsilon = \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} \quad (2.7)$$

Que é claramente divergente. Podemos reescrever  $\varepsilon$  usando a fórmula de soma de Abel-Plana :

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(y) dy - \frac{F(0)}{2} + i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{\exp(2\pi t) - 1} dt \quad (2.8)$$

Aplicando a fórmula para  $\varepsilon$  ficamos com :

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2a^2} \int_0^{\infty} y dy - \frac{\pi}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{t}{\exp(2\pi t) - 1} dt \quad (2.9)$$

onde vemos que a divergência está na primeira integral. Entretanto pode ser mostrado que a primeira integral é justamente a contribuição do espaço vazio e é cancelada ao realizarmos a subtração dada pela equação 2.6. A densidade de energia renormalizada fica :

$$\varepsilon_{ren} = -\frac{\pi}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{t}{\exp(2\pi t) - 1} dt = \frac{\zeta(2)\Gamma(2)}{(2\pi)^2} = -\frac{\pi}{24a^2} \quad (2.10)$$

onde usamos a representação integral da função zeta de Riemann.

O procedimento usado acima para isolar a divergência e calcular a energia renormalizada foi um procedimento de regularização. Diferentes procedimentos de regularização podem ser usados no cálculo da energia de Casimir. Vamos falar sobre dois deles.

1-Regularização por frequência de corte ou “Cut-off”. Como todo procedimento de regularização, o primeiro passo da regularização por frequência de corte consiste em modificar a expressão original da energia de ponto-zero de tal forma que ela passa a ser finita. A expressão original é recuperada ao fazermos um dado limite ( $\lambda \rightarrow 0$ ). Para a energia de ponto-zero dada pela equação 2.7 por exemplo, podemos modificar os termos da soma de tal forma que ela venha a convergir. Se  $\chi(\omega_n, \lambda)$  é uma função atenuante, com a propriedade de ir a zero mais rápido que os termos da soma de tal forma que o produto  $\chi(\omega_n, \lambda) \times \omega_n \rightarrow 0$  quando  $\omega_n \rightarrow \infty$ , fazemos a substituição  $\omega_n \rightarrow \chi(\omega_n, \lambda) \times \omega_n$

na soma, que passa a convergir. A função deve ainda ter a propriedade  $\chi(\omega_n, 0) = 1$ , com a qual podemos recuperar a expressão original. Como exemplo, a função  $\exp(-\lambda\omega_n)$  tem as propriedades desejadas para a equação 2.7. A soma regularizada passa a ser :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{reg}(\lambda) &= \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} \exp\left(-\lambda \frac{n\pi}{a}\right) = -\frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\lambda \frac{n\pi}{a}\right) \\ &= -\frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[1 - \exp\left(-\lambda \frac{\pi}{a}\right)\right]^{-1} \\ &= \frac{\pi}{2a^2} \exp\left(-\lambda \frac{\pi}{a}\right) \left[1 - \exp\left(-\lambda \frac{\pi}{a}\right)\right]^{-2}\end{aligned}\quad (2.11)$$

No limite  $\lambda \rightarrow 0$  podemos expandir em série de Taylor :

$$\varepsilon_{reg}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} - \frac{\pi}{24a^2} + \frac{1}{480} \frac{\pi^3}{a^4} \lambda^2 + O(\lambda^4) + \dots \quad (2.12)$$

Os termos  $O(\lambda^2)$  em diante (que obviamente  $\rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow 0$ ) desaparecem ao removermos o regulador  $\lambda$ . A divergência no primeiro termo está novamente isolada e é cancelada ao realizarmos a subtração dada pela equação 2.6, de tal forma que o resultado é o mesmo obtido na equação 2.10. Este método será exemplificado na seção 2.5.

**Interpretação física.** As condições de contorno que idealizam por exemplo um condutor perfeito estão um pouco distante da realidade física. Na realidade a condutividade dos materiais decresce conforme a frequência das ondas eletromagnéticas aumenta e as superfícies se tornam transparentes para tais ondas. Uma condição mais próxima da realidade poderia levar em conta efeitos físicos das superfícies dos materiais.

O fato da expressão 2.6 ser indefinida, indica que devemos levar em conta a transparência da superfície [13]. Uma maneira de implementar isso é adotando um procedimento de regularização baseado nesse fato. Como os modos não são influenciados pela superfície  $S$  à partir de uma certa frequência de corte, isto é, à partir de uma certa frequência os modos são os modos livres, introduzimos um regulador que pare a soma à partir desta frequência

de corte. Após a regularização, a subtração dada pela equação 2.6 cancelará os termos que correspondem aos modos livres (divergência ultravioleta) e teremos um resultado finito. A transparência da superfície pode ser simulada por exemplo, escolhendo um regulador  $\chi(\omega)$  com a propriedade  $\chi(\omega) \simeq 1$  para  $\omega < \omega_c$  e  $\chi(\omega) \simeq 0$  para  $\omega \gg \omega_c$ . A frequência de corte  $\omega_c$  é determinada pelas propriedades do material<sup>2</sup>.

2- Regularização Analítica. É comum encontrar uma função dada em uma forma na qual é válida para somente para regiões limitadas do plano complexo. Por exemplo, uma série com um raio de convergência finito não dá nenhuma informação direta sobre a função que ela representa fora do círculo de convergência. Um outro exemplo ocorre na representação de uma função por uma integral que não converge para todos os valores de uma variável complexa. Por exemplo, a função gama :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (2.13)$$

esta integral converge somente para  $\text{Re}z > 0$ , de maneira que a integral define  $\Gamma(z)$  somente no semi-plano direito do plano complexo.

É possível no entanto definir a função gama em todo o plano complexo através do procedimento conhecido como extensão analítica. Uma “técnica” de extensão analítica emprega o uso de relações funcionais tais como fórmulas de recorrência. Para a função

---

<sup>2</sup>OBS: Certos detalhes microscópicos (a natureza quântica) dos materiais também são deixadas de lado ao se adotar tais condições de contorno. Por isso essas condições de contorno são chamadas clássicas (ou “hard”) [14]. Condições clássicas significam que o contorno que confina os campos tem uma localização espacial precisa e uma forma geométrica bem definida, o que sabemos não corresponder a natureza quântica do material. Alguns autores adotaram uma outra forma de atacar o problema, que permite lidar com situações físicas mais gerais que as condições clássicas. Eles adotaram as chamadas condições “soft” que representam uma distribuição de matéria que interage com o campo quântico. Tais condições são implementadas matematicamente por um potencial suavemente crescente. As condições clássicas podem ser reobtidas através dessas condições em dado limite.

gama, a seguinte fórmula de recorrência pode ser deduzida da equação 2.13 :

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1) \quad (2.14)$$

Podemos usar a equação 2.14 para estender  $\Gamma(z)$  para a parte do plano complexo onde  $\text{Re}z < 0$ .

De forma análoga, a função zeta de Riemann :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s) \quad (2.15)$$

só está definida para  $\text{Re}s > 1$  mas pode ser estendida analiticamente através da fórmula de reflexão :

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \quad (2.16)$$

a qual também estende analiticamente a função gama.

Para aplicar este procedimento no cálculo da energia de Casimir, tratamos o número de dimensões do espaço-tempo como uma variável contínua e complexa [11]. Esta regularização será exemplificada na seção 2.3 .

## 2.2 Quantização canônica do campo escalar e energia de ponto-zero divergente

Vamos mostrar que a ocorrência de energias de ponto-zero divergentes são uma característica inerente da teoria quântica de campos. Para isso, vamos fazer uma breve recapitulação do esquema de quantização canônica do campo escalar livre e chegar a uma expressão divergente para a sua energia de ponto-zero.

A quantização canônica de um sistema clássico de  $3N$  coordenadas generalizadas é feita da seguinte maneira:

1- Escreve-se a lagrangiana do sistema,  $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ ,  $i=1\dots 3N$ , e calculam-se os momentos generalizados :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.17)$$

2- Faz-se uma transformação de Legendre deixando a descrição do sistema em termos de  $q_i$  e  $p_i$ .

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) \quad (2.18)$$

3- Impõe-se relações de comutação entre  $q_i$  e  $p_i$ .

$$\begin{aligned} [q_i, p_j] &= \delta_{ij} \\ [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

4- A dinâmica do sistema é dada pela equação de Heisenberg, (que pode-se mostrar ser equivalente às equações de Hamilton para  $O = q_i$  ou  $O = p_i$ ):

$$[H, O] = -i\dot{O} \quad (2.20)$$

A quantização dos campos segue um procedimento análogo [15] como veremos à seguir.

Considere um campo clássico  $\Phi$ , local, definido em um espaço-tempo de Minkowski 4-dimensional tal que  $\Phi = \Phi(x)$ , onde  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ .<sup>3</sup>

Vamos considerar que todo o sistema esteja confinado a uma caixa retangular finita de volume  $\Omega$  e ainda que  $\Phi$  satisfaça condições de contorno periódicas ( no final do cálculo fazemos  $\Omega \rightarrow \infty$  ).

Considere a lagrangiana do sistema como:

---

<sup>3</sup>Se este campo é invariante sob transformações de Lorentz, ele é chamado de campo de spin-0 ( o valor do spin do campo indexa a representação do grupo de Lorentz pela qual o campo se transforma). Se além disso ele não muda de sinal sob inversão espacial, ele é chamado de campo escalar ( caso contrário é chamado pseudoescalar).

$$L = \int_{\Omega} d^3r \left[ \left( \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - (\nabla\Phi)^2 \right) + V(\Phi) \right] \quad (2.21)$$

Vemos que  $L(\Phi, \dot{\Phi})$  é um funcional de  $\Phi(\vec{r}, t)$  e  $\dot{\Phi}(\vec{r}, t)$ .  $L(\Phi, \dot{\Phi})$  pode ser considerado o análogo de  $L(q_i, p_i)$  com a diferença de que no último caso o índice é discreto e finito, enquanto que no primeiro, o índice correspondente,  $\vec{r}$ , é contínuo e assume infinitos valores.

Vamos voltar ao caso discreto e finito para usar as regras de quantização canônica da mecânica quântica. Para isso dividimos  $\Omega$  em pequenos cubos de volume  $\tau$ . O valor do campo, ao invés de ser indexado por um índice contínuo, passa a ser indexado em cada cubo por  $\Phi(\vec{r}_i, t) = \Phi_i(t)$  onde  $\vec{r}_i$  é a coordenada de um ponto qualquer do cubo.

O próximo passo é achar os momentos generalizados. Fazendo  $q_i(t) = \tau\Phi_i(t)$ , vemos que nas integrais em cada cubo, o valor de  $\Phi_i$  é constante e podemos repor as integrais em  $\Omega$ , por uma soma nos cubos. A lagrangiana 2.21 fica:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\Phi}^2 d^3r + \text{termos independentes de } \dot{\Phi} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \dot{\Phi}_i^2 \int_{\text{cubo}} d^3r + \dots = \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\dot{q}_i}{\tau} \right)^2 \tau = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\dot{q}_i^2}{\tau} + \dots \end{aligned} \quad (2.22)$$

Os momentos 2.17 se tornam:

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\dot{q}_i}{\tau} = \dot{\Phi}_i(t) \equiv \Pi(\vec{r}_i, t) \quad (2.23)$$

Fazendo a transformação de Legendre dada pela equação 2.18 e voltando ao caso contínuo ( $\tau \rightarrow 0$ ), pode-se mostrar que a hamiltoniana se torna:

$$H = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + V(\Phi) \right) d^3r \quad (2.24)$$

Impondo as relações de comutação dadas pelas equações 2.19 :

$$[\Pi_i(t), \Phi_j(t)] = -\frac{i\delta_{ij}}{\tau} \quad (2.25)$$

Passando ao caso contínuo: ( $\tau \rightarrow 0$ )

$$[\Pi(\vec{r}, t), \Phi(\vec{r}', t)] = -i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.26)$$

$$[\Pi(\vec{r}', t), \Pi(\vec{r}, t)] = [\Phi(\vec{r}', t), \Phi(\vec{r}, t)] = 0 \quad (2.27)$$

Finalmente, a dinâmica é dada pelas equações de Heisenberg 2.20 :

$$[H, \Phi(\vec{r}, t)] = -i\dot{\Phi}(\vec{r}, t) \text{ que produz } \Pi = \dot{\Phi} \quad (2.28)$$

$$[H, \Pi(\vec{r}, t)] = -i\dot{\Pi}(\vec{r}, t) \text{ que produz (usando a eq. anterior):}$$

$$\square^2 \Phi + \frac{dV}{d\Phi} = 0 \quad (2.29)$$

Agora  $\Phi$  e  $\Pi$  são operadores. Suas expansões em séries de Fourier são :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) q_{\vec{k}}(t) \quad (2.30)$$

$$\Pi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) p_{-\vec{k}}(t) \quad (2.31)$$

onde  $k_i = \frac{2\pi n_i}{L_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e  $L_1, L_2, L_3$  são os valores dos lados da caixa  $\Omega$ . Como  $\Phi$  e  $\Pi$  são operadores, os coeficientes  $q_{\vec{k}}(t)$  e  $p_{-\vec{k}}(t)$  também o são.

Definindo:

$$a_{\vec{k}}(t) = \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} \left( q_{\vec{k}} + \frac{i}{\omega_{\vec{k}}} p_{-\vec{k}} \right), \text{ onde } \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (2.32)$$

pode-se mostrar que devido ao fato de  $\Phi$  e  $\Pi$  serem hermitianos, usando a equação 2.32, temos:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}\Omega}} \left( a_{\vec{k}}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) + a_{\vec{k}}^\dagger(t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \right) \quad (2.33)$$

$$\Pi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}\Omega}} \left( a_{\vec{k}}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) - a_{\vec{k}}^\dagger(t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \right) \quad (2.34)$$

Usando as relações 2.26 e 2.27 e as expansões 2.33 e 2.34 pode-se obter relações de comutação para  $a_{\vec{k}}(t)$  e  $a_{\vec{k}}^\dagger(t)$  :

$$[a_{\vec{k}}(t), a_{\vec{k}'}^\dagger(t)] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (2.35)$$

$$[a_{\vec{k}}(t), a_{\vec{k}'}(t)] = [a_{\vec{k}}^\dagger(t), a_{\vec{k}'}^\dagger(t)] = 0$$

**Caso Livre.** Considere  $V(\Phi) = \frac{1}{2}m^2\Phi^2$ , onde  $m$  é um parâmetro real arbitrário. Neste caso a teoria é dita livre. A Hamiltoniana 2.18 escrita usando-se as expansões 2.33 e 2.34 fica :

$$H = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega_{\vec{k}}}{2} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger) = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left( a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.36)$$

Devido às relações 2.35, os autoestados do operador  $N_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$  satisfazem a :

$$N_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle = n_{\vec{k}} |n_{\vec{k}}\rangle, \text{ onde } n_{\vec{k}} = 0, 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

A totalidade dos seus autoestados expande todo o espaço de Hilbert do sistema:

$$|0\rangle, a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle, a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}'}^\dagger |0\rangle, \dots$$

O estado fundamental ou vácuo,  $|0\rangle$  satisfaz :  $a_{\vec{k}} |0\rangle = 0 \forall \vec{k}$

Logo o valor esperado no vácuo de  $H$ , ou energia de ponto-zero, é dado por :

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \quad (2.38)$$

Vemos que a quantidade acima é claramente divergente.

## 2.3 A energia de Casimir do campo escalar sem massa

Nesta seção vamos calcular a energia de Casimir do campo escalar sem massa no interior de duas placas paralelas nas quais o campo obedece às condições de Dirichlet. Como veremos, a energia de ponto-zero desta configuração é divergente. Para calcular a energia renormalizada vamos deixar o número de dimensões do espaço-tempo variar continuamente

de tal forma que usando o procedimento de regularização analítica podemos remover as divergências que irão aparecer, extendendo analiticamente funções que anteriormente só estão definidas para valores de  $D$  sem significado físico (por exemplo  $D < 1$ ).

Considere um campo escalar clássico  $\Phi$ , local, definido em um espaço-tempo de Minkowski  $D$ -dimensional tal que  $\Phi = \Phi(x)$ , onde  $x = (x^0, x^1, \dots, x^{D-1})$ . Vamos supor que o campo é livre, tem massa nula e obedece a equação de Klein-Gordon generalizada :

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 - \sum_{j=1}^{D-1} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^2 \right] \Phi(x) = 0 \quad (2.39)$$

Vamos considerar que todo o sistema esteja confinado a uma caixa retangular de dimensões  $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_{D-2} \times a$ . O campo satisfaz às condições de Dirichlet sobre as paredes da caixa. Em um passo intermediário do cálculo, vamos supor que somente a direção do lado  $a$  da caixa permanece finito. Usando o fato do campo se anular sobre as paredes vamos expandi-lo em série de senos :

$$\Phi(x) = \sum_{\vec{k}} q_{\vec{k}}(t) [\sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \dots \times \sin(k_{D-1} x_{D-1})] \quad (2.40)$$

onde :

$$k_i = \frac{n_i \pi}{L_i} \text{ com } i = 1 \dots D-2 \text{ e } k_{D-1} = \frac{n_{D-1} \pi}{a} \text{ e } n_j = 1 \dots \infty, j = 1 \dots D-1 \quad (2.41)$$

Para quantizar o campo impomos as relações de comutação 2.26 e 2.27. Agora que o campo é um operador o coeficiente  $q_{\vec{k}}(t)$  também o é.

Mudando de base no espaço de Fock para a base número de ocupação, a expansão do campo fica :

$$\Phi(x) = \sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \phi_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}^\dagger \quad (2.42)$$

onde :

$$\phi_{\vec{k}} = f_{\vec{k}}(x_0) [\sin(k_1 x_1) \sin(k_2 x_2) \dots \times \sin(k_{D-1} x_{D-1})] \quad (2.43)$$

onde  $\vec{k}$  obedece à equação 2.41. Os coeficientes  $a_{\vec{k}}$  e  $a_{\vec{k}}^\dagger$  tem a interpretação usual de operadores de aniquilação e criação respectivamente.

Podemos seguir o mesmo procedimento da seção anterior e chegar a mesma expressão para a energia de ponto-zero [16](com a diferença que agora  $k_i = \frac{n_i \pi}{L_i}$  e  $n_i = 1 \dots \infty$ ) :

$$E_0(L_1, L_2, \dots, L_{D-2}, a) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \left( k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{D-2}^2 + k_{D-1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.44)$$

Usando o fato de  $a \ll L_j$ , podemos transformar as somas em  $k_j$ ,  $j = 1 \dots D - 2$  em integrais através de :

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{D-2} L_i} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{1}{(\pi)^{D-2}} \int d^{D-2} k \quad (2.45)$$

Isto pode ser visto observando o fato de que na equação 2.41 o parâmetro  $n_i$  assume valores inteiros 1, 2, 3, ... com espaçamento

$$\Delta n_i = 1; \quad (2.46)$$

O espaçamento correspondente em  $k_i$  é :

$$\Delta k_i = \frac{\pi}{L_i} \Delta n_i = \frac{\pi}{L_i} \quad (2.47)$$

Usando as equações 2.46 e 2.47 podemos escrever :

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{D-2} L_i} \sum_{\vec{k}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{D-2} L_i} \sum_{\vec{k}} \prod_{j=1}^{D-2} \Delta n_j = \sum_{\vec{k}} \prod_{j=1}^{D-2} \frac{\Delta n_j}{L_i} = \sum_{\vec{k}} \prod_{j=1}^{D-2} \frac{\Delta k_j}{\pi} \quad (2.48)$$

Quando  $L_i \rightarrow \infty$ , temos  $\Delta k_i \rightarrow 0$  e a expressão 2.48 leva a expressão 2.45. A expressão 2.44 fica :

$$E_0(L_1, L_2, \dots, L_{D-2}, a) = \frac{1}{2} \left( \prod_{i=1}^{D-2} L_i \right) \frac{1}{\pi^{D-2}} \int_0^\infty dk_1 \dots \int_0^\infty dk_{D-2} \times$$

$$\times \sum_{n_{D-1}=1}^{\infty} \left[ k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{D-2}^2 + \left( \frac{n_{D-1}\pi}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.49)$$

Mudando para coordenadas “esféricas” em D-2 dimensões, a parte angular pode ser integrada, pois o integrando só depende do raio no espaço  $\vec{k}$  [18]:

$$\int dk^{D-2} = \int_0^{\infty} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \sin \theta_2 \dots \times \int_0^{\pi} d\theta_{D-3} \sin^{D-4} \theta_{D-3} = \frac{2\pi^{\frac{D-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)} \int_0^{\infty} dr r^{D-3} \quad (2.50)$$

Denotando o raio por  $r$  :

$$r^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_{D-2}^2 \quad (2.51)$$

E usando a equação 2.50, a expressão 2.49 se torna :

$$E_0(L_1, L_2, \dots, L_{D-2}, a) = \left( \prod_{i=1}^{D-2} L_i \right) \frac{1}{2^{D-2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)} \frac{1}{\pi^{\frac{D-2}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dr r^{D-3} \left( r^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.52)$$

Definindo :

$$F(D) = \frac{1}{2^{D-2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)} \frac{1}{\pi^{\frac{D-2}{2}}} \quad (2.53)$$

A energia por unidade de área pode ser escrita como :

$$\frac{E_0(L_1, L_2, \dots, L_{D-2}, a)}{\left( \prod_{i=1}^{D-2} L_i \right)} = \varepsilon_D(a) = F(D) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dr r^{D-3} \left( r^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.54)$$

A expressão 2.54 é claramente divergente.

$$\varepsilon_D(a) = F(D) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dr r^{D-3} \left( r^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.55)$$

Fazendo a mudança de variáveis :

$$\begin{aligned} t &= \left( \frac{ar}{n\pi} \right)^2 \implies dt = 2 \left( \frac{a}{n\pi} \right)^2 r dr \\ r &= \frac{n\pi}{a} t^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.56)$$

a expressão 2.55 fica :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_D(a) &= F(D) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dr r r^{D-4} \left[ \left( \frac{ar}{n\pi} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{n\pi}{a} \\
 &= F(D) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \frac{1}{2} dt \left( \frac{n\pi}{a} \right)^{D-4} t^{\frac{D-4}{2}} [t+1]^{\frac{1}{2}} \frac{n\pi}{a} \\
 &= \frac{1}{2} F(D) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^{D-1} \int_0^{\infty} dt t^{\frac{D-4}{2}} (t+1)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Fazendo uso da relação :

$$\int_0^{\infty} dt t^r (t+1)^s = B(1+r, -s-r-1) = \frac{\Gamma(1+r)\Gamma(-s-r-1)}{\Gamma(-s)} \tag{2.58}$$

para  $r = \frac{D-4}{2}$  e  $s = \frac{1}{2}$  a expressão 2.57 fica :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_D(a) &= \frac{1}{2} F(D) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^{D-1} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)\Gamma\left(-\frac{D}{2}+\frac{3}{2}-1\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{2} F(D) \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)\Gamma\left(-\frac{D}{2}+\frac{1}{2}\right)}{-2\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{D-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{D-1}
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Mas :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{D-1} = \zeta(-D+1) \tag{2.60}$$

é a função zeta de Riemann.

As funções  $\zeta(-D+1)$  e  $\Gamma\left(-\frac{D}{2}+\frac{1}{2}\right)$  na equação 2.59 só estão definidas respectivamente para  $ReD < 0$  e  $ReD < 1$ , mas podem ser extendidas analiticamente usando a fórmula de reflexão 2.16. Usando a equação 2.16 para  $s = -D+1$ , a equação 2.59 fica :

$$\varepsilon_D(a) = \frac{1}{2} F(D) \left(\frac{\pi}{a}\right)^{D-1} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)}{-2\sqrt{\pi}} \pi^{D+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \zeta(D) \tag{2.61}$$

Usando a equação 2.53 :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_D(a) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2^{D-2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)} \frac{1}{\pi^{\frac{D-2}{2}}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{D-1} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right)}{-2\sqrt{\pi}} \pi^{D+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \zeta(D) \\
 &= -(4\pi)^{-\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \zeta(D) \frac{1}{a^{D-1}}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Observamos que o resultado é finito para qualquer  $D$ , e é sempre negativo. A força por unidade de área nas placas é dada por :

$$-\frac{\partial}{\partial a}\varepsilon_{cas} = -(D-1)(4\pi)^{-\frac{D}{2}}\zeta(D)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\frac{1}{a^D} \quad (2.63)$$

e também é sempre negativa.

## 2.4 Quantização canônica do campo de Dirac e energia de ponto-zero divergente

Vamos seguir um procedimento análogo ao do campo escalar para quantizar o campo de Dirac. A Lagrangeana do campo livre é [15]:

$$L = \int_{\Omega} d^3r \left( \bar{\Psi}(\vec{r}, t) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(\vec{r}, t) \right) = \int_{\Omega} d^3r \mathcal{L} \quad (2.64)$$

onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  é o spinor de Dirac.

O momento generalizado associado ao campo é :

$$\Pi(\vec{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i\Psi^\dagger \quad (2.65)$$

E a Hamiltoniana é :

$$H = \int_{\Omega} d^3r \left( \Pi \dot{\Psi} - \mathcal{L} \right) = \int_{\Omega} d^3r \Psi^\dagger \left( -i\gamma^0 \gamma^k \partial_k + m\gamma^0 \right) \Psi \quad (2.66)$$

Como o campo descreve férmions, devemos impor relações de anti-comutação:

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_\alpha(\vec{r}, t), \Psi_\beta(\vec{r}', t) \right\} &= \left\{ \Pi_\alpha(\vec{r}, t), \Pi_\beta(\vec{r}', t) \right\} = 0 \\ \left\{ \Psi_\alpha(\vec{r}, t), \Pi_\beta(\vec{r}', t) \right\} &= i\delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \quad (2.67)$$

A dinâmica é dada pela equação de Heisenberg :

$$[H, \Psi] = -i\dot{\Psi} \quad \text{que produz} \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.68)$$

Como no caso escalar, o operador  $\Psi(\vec{r}, t)$  pode ser expandido em termos de séries de Fourier em um tempo  $t$  qualquer :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p}} S_{\vec{p}}(t) \exp(i\vec{p} \cdot \vec{r}) \quad (2.69)$$

Escolhendo apropriadamente uma base de quatro 4-vetores ortonormais para cada  $\vec{p} \rightarrow u_{\vec{p},s}$  e  $v_{-\vec{p},s}$ , onde  $s = \pm \frac{1}{2}$  podemos expandir o operador  $S_{\vec{p}}(t)$  em termos dessa base. A expansão do campo fica :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{p},s} \left( a_{\vec{p},s}(t) u_{\vec{p},s} \exp(i\vec{p} \cdot \vec{r}) + b_{\vec{p},s}^\dagger(t) v_{\vec{p},s} \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{r}) \right) \quad (2.70)$$

onde os coeficientes  $a_{\vec{p},s}(t)$  e  $b_{\vec{p},s}^\dagger(t)$  são operadores do espaço de Hilbert. Substituindo a equação 2.70 nas relações de anti-comutação 2.67, temos :

$$\begin{aligned} \{a_{\vec{p},s}(t), a_{\vec{p}',s'}^\dagger(t)\} &= \{b_{\vec{p},s}(t), b_{\vec{p}',s'}^\dagger(t)\} = \delta_{\vec{p},\vec{p}'} \delta_{s,s'} \\ \{a_{\vec{p},s}(t), a_{\vec{p}',s'}(t)\} &= \{b_{\vec{p},s}(t), b_{\vec{p}',s'}(t)\} = 0 \\ \{a_{\vec{p},s}(t), b_{\vec{p}',s'}(t)\} &= \{a_{\vec{p},s}(t), b_{\vec{p}',s'}^\dagger(t)\} = 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Substituindo a expansão do campo na Hamiltoniana 2.66, temos :

$$H = \sum_{\vec{p},s} \left( a_{\vec{p},s}^\dagger a_{\vec{p},s} + b_{\vec{p},s}^\dagger b_{\vec{p},s} - 1 \right) E_p \quad (2.72)$$

onde  $E_p = \sqrt{p^2 + m^2} > 0$ ,  $p = \frac{p}{|\vec{p}|}$

Novamente, quando calculamos a energia de ponto-zero :

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = - \sum_{s=1}^2 \sum_{\vec{p}} E_p = -2 \sum_{\vec{p}} E_p \quad (2.73)$$

Vemos que a quantidade acima é claramente divergente.

## 2.5 Energia de Casimir do campo de Dirac sem massa

Nesta seção vamos calcular a energia de Casimir do campo de Dirac sem massa confinado no interior de duas placas paralelas [19]. O procedimento de regularização que vamos empregar é a regularização por frequência de corte, apresentado na seção 2.1 .

Considere o número de dimensões do espaço-tempo  $D=4$ . Vamos supor que existam duas placas localizadas em  $z = 0$  e  $z = a$ . Nas outras direções o campo permanece livre.

As condições de contorno que vamos usar são as chamadas condições de bag, isto é, não há fluxo de partículas através das placas [7]:

$$\hat{n} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = 0 \quad \text{em } z = 0 \text{ e } z = a \quad (2.74)$$

onde  $\hat{n} = \hat{z}$  em  $z = 0$  e  $\hat{n} = -\hat{z}$  em  $z = a$ . Fora das placas ( $z < 0$  e  $z > a$ ) o campo é identicamente nulo :  $\Psi = 0$

Na forma covariante de Lorentz :

$$n^\mu j_\mu = \bar{\Psi} n_\mu \gamma^\mu \Psi = 0 \quad \text{em } z = 0 \text{ e } z = a \quad (2.75)$$

Vamos achar uma relação pela qual a equação 2.75 possa ser derivada e usaremos esta relação como condição de contorno ao invés da equação 2.75.

Considere agora a seguinte quantidade :

$$\begin{aligned} (in_\mu \gamma^\mu)^2 &= -n_\mu n_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = -\frac{1}{2} n_\mu n_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \\ &= -\left[(n^0)^2 - \hat{n}^2\right] = 1 \end{aligned} \quad (2.76)$$

pois  $(n^0)^2 - \hat{n}^2 = -1$  no referencial de repouso e é invariante de Lorentz. Logo  $(in_\mu \gamma^\mu)$  tem autovalores  $\pm 1$ .

Vamos supor que :

$$in_\mu \gamma^\mu \Psi(x) = \Psi(x) \quad \text{em } z=0 \text{ e } z=a \quad (2.77)$$

Multiplicando a equação 2.77 por  $\bar{\Psi}$ , chegamos a :

$$\begin{aligned} in_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi &= \bar{\Psi} \Psi \\ in_\mu j^\mu &= \bar{\Psi} \Psi \quad \text{em } z=0 \text{ e } z=a \end{aligned} \quad (2.78)$$

Tomando o complexo conjugado da equação 2.77 :

$$\Psi^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger n_\mu = i \Psi^\dagger \quad (2.79)$$

Como  $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$  e  $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ , multiplicando a equação 2.79 por  $\gamma^0$ , temos :

$$\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 n_0 - \Psi^\dagger \gamma^i \gamma^0 n_i = i \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.80)$$

Mas  $\gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0$ , logo :

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \gamma^0 n_0 + \bar{\Psi} \gamma^i n_i &= i \bar{\Psi} \\ i \bar{\Psi} \gamma^\mu n_\mu &= -\bar{\Psi} \end{aligned} \quad (2.81)$$

Multiplicando a equação 2.81 por  $\Psi$  :

$$\begin{aligned} in_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi &= -\bar{\Psi} \Psi \\ in_\mu j^\mu &= -\bar{\Psi} \Psi \quad \text{em } z=0 \text{ e } z=a \end{aligned} \quad (2.82)$$

Juntando as equações 2.78 e 2.82 temos :

$$in_\mu j^\mu = \bar{\Psi} \Psi = -\bar{\Psi} \Psi = 0 \quad \text{em } z=0 \text{ e } z=a \quad (2.83)$$

Que é a condição de contorno do problema. Partindo da equação 2.77 chegamos a equação 2.75, ou em outras palavras, para obedecer a equação 2.75 é suficiente considerar a condição dada pela equação 2.77.

Considere uma função de onda de energia positiva da forma [7]:

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t) &= \exp(-iEt) \exp(p_1x + p_2y) \left[ \exp(ip_3z) + i\gamma^3 \exp(-ip_3z) \right] u(p) \\ &= \exp(-iEt) \phi(\vec{x})\end{aligned}\quad (2.84)$$

onde  $E = |\vec{p}|$  e  $u(p) = \text{spinor de energia positiva da equação } i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = 0$

Devido à condição de contorno :

$$\begin{aligned}in_\mu \gamma^\mu \Psi(x) &= \Psi(x) \quad , \quad \text{ou :} \\ in_\mu \gamma^\mu \phi(x) &= \phi(x) \quad \text{em } z = 0 \text{ e } z = a\end{aligned}\quad (2.85)$$

Teremos :

Em  $z = 0$  ,  $\hat{n} = \hat{z}$  :

$$i\gamma^3 \phi(0) = \phi(0)\quad (2.86)$$

Em  $z = a$  ,  $\hat{n} = -\hat{z}$  :

$$i\gamma^3 \phi(a) = -\phi(a)\quad (2.87)$$

A condição dada pela equação 2.86 é uma relação de consistência (produz  $1 + i\gamma^3 = 1 + i\gamma^3$ ). A condição dada pela equação 2.87 imposta sobre a função de onda dada pela equação 2.84 produz :

$$\begin{aligned}&i\gamma^3 \exp(p_1x + p_2y) \left[ \exp(ip_3a) + i\gamma^3 \exp(-ip_3a) \right] u(p) \\ &= \exp(p_1x + p_2y) \left[ \exp(ip_3a) + i\gamma^3 \exp(-ip_3a) \right] u(p)\end{aligned}\quad (2.88)$$

Como  $(\gamma^3)^2 = -1$  ficamos com :

$$(\exp(ip_3a) + \exp(-ip_3a))(1 + i\gamma^3) = 0 \quad (2.89)$$

Ou :

$$2i \cos(p_3a) = 0 \implies p_3a = \frac{\pi}{2}(2n + 1) \text{ onde } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.90)$$

Ou :

$$p_3 = \frac{\pi n}{2a} \text{ onde } n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.91)$$

Observamos que diferentemente do campo escalar, no qual a condições de Dirichelet produziram uma soma sobre todos os inteiros para o momento paralelo às placas, no caso fermiônico a condição dada pela equação 2.77 produziu uma soma de inteiros ímpares.

Vamos agora calcular a energia de ponto-zero do campo no interior das placas. De acordo com a equação 2.73 a energia de ponto-zero de férmions sem massa é dada por :

$$E_0(a) = - \sum_{s=1}^2 \sum_{\vec{p}} E_p = -2 \sum_{\vec{p}} E_p = -2 \sum_{\vec{p}_\perp} \sum_{n \text{ ímpar}} \left( (\vec{p}_\perp)^2 + \left( \frac{n\pi}{2a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.92)$$

onde  $(\vec{p}_\perp)^2 = (p_1)^2 + (p_2)^2$

Como o campo está livre na direção de  $p_1$  e  $p_2$  as somas nessas variáveis se transformam em integrais na equação 2.73 através de :

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^2 L_i} \sum_{\vec{p}_\perp} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d^2 p_\perp \quad (2.93)$$

De tal forma que a energia por unidade de área fica :

$$\frac{E_0}{\prod_{i=1}^2 L_i} = \varepsilon_0(a) = -2 \sum_{n \text{ ímpar}} \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^2} \left( (\vec{p}_\perp)^2 + \left( \frac{n\pi}{2a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.94)$$

Mudando para coordenadas esféricas e integrando sobre a parte angular :

$$\varepsilon_0(a) = -2 \sum_{n \text{ ímpar}} \int_0^\infty \frac{2\pi r dr}{(2\pi)^2} \left( r^2 + \left( \frac{n\pi}{2a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.95)$$

Fazendo a mudança de variáveis :

$$\begin{aligned} X &= \left( r^2 + \left( \frac{n\pi}{2a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ dX &= \frac{r dr}{\left( r^2 + \left( \frac{n\pi}{2a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r dr}{X} \implies X dX = r dr \end{aligned} \quad (2.96)$$

Substituindo a equação 2.96 na equação 2.95, ficamos com :

$$\varepsilon_0(a) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \text{ ímpar}} \int_{\frac{n\pi}{2a}}^{\infty} X^2 dX \quad (2.97)$$

Vemos claramente que a equação 2.97 produz um resultado divergente. Vamos inserir um “cut-off” exponencial :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(a) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \sum_{n \text{ ímpar}} \int_{\frac{n\pi}{2a}}^{\infty} \exp(-\alpha X) dX \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \sum_{n \text{ ímpar}} \left[ -\frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha X) \right]_{\frac{n\pi}{2a}}^{\infty} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \frac{1}{\alpha} \sum_{n \text{ ímpar}} \exp\left(-\alpha \frac{n\pi}{2a}\right) \end{aligned} \quad (2.98)$$

Mas :

$$\begin{aligned} \sum_{n \text{ ímpar}} \exp\left(-\alpha \frac{n\pi}{2a}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{\alpha\pi}{2a} (2n+1)\right] = \exp\left[-\frac{\alpha\pi}{2a}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{\alpha\pi}{a} n\right] \\ &= \exp\left[-\frac{\alpha\pi}{2a}\right] \frac{1}{1 - \exp\left[-\frac{\alpha\pi}{a}\right]} = \frac{2}{\sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2a}\right)} \end{aligned} \quad (2.99)$$

Expandindo a expressão 2.99 em série de Taylor, ficamos com :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{\sinh\left(\frac{\alpha\pi}{2a}\right)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2a}{\alpha\pi} - \frac{1}{6} \left( \frac{\alpha\pi}{2a} \right) + \frac{7}{360} \left( \frac{\alpha\pi}{2a} \right)^3 + o(\alpha^4) \right] \quad (2.100)$$

Substituindo a equação 2.100 na equação 2.98 ficamos com :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(a) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2} \left[ \frac{2a}{\alpha\pi} - \frac{1}{6} \left( \frac{\alpha\pi}{2a} \right) + \frac{7}{360} \left( \frac{\alpha\pi}{2a} \right)^3 + o(\alpha^4) \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{12a}{\pi\alpha^4} + \frac{7\pi^3}{360} \frac{2}{8a^3} \right] \end{aligned} \quad (2.101)$$

O primeiro termo é uma quantidade extensiva, a “energia de volume” e pode ser ignorado no cálculo da pressão entre as placas [8], [19].

A energia de Casimir fica :

$$\varepsilon_0(a) = -\frac{1}{2\pi} \frac{7\pi^2}{360} \frac{2}{8a^3} = -\frac{7\pi^2}{2880a^3} \quad (2.102)$$

A pressão que o vácuo exerce sobre as placas é :

$$-\frac{\partial}{\partial a} \varepsilon_{cas}(a) = -\frac{7\pi^2}{960a^4} \quad (2.103)$$

e é sempre negativa, o que faz com que as placas se atraiam.

Uma forma de cancelar a divergência do primeiro termo da equação 2.101 consiste em considerar os modos do campo exteriores às placas, o que está fisicamente incorreto. Considerando os modos externos, ao realizar a subtração dada pela equação 2.6, a divergência do primeiro termo é cancelada e obtemos um resultado finito.

## Capítulo 3

# Energia de Casimir de férmions sem massa em D dimensões espaço-temporais

Vamos calcular a energia de Casimir do campo de Dirac confinado dentro de placas paralelas em D dimensões espaço-temporais (a configuração do “slab-bag”). Seguiremos aqui o procedimento adotado em [20]. Considere as placas localizadas em  $x_{D-1} = 0$  e  $x_{D-1} = a$ . A condição de contorno que vamos empregar é a condição de bag, agora generalizada para D dimensões espaço-temporais. Na forma covariante :

$$n^\mu j_\mu = \bar{\Psi} n_\mu \gamma^\mu \Psi = 0 \quad \text{em} \quad x^{D-1} = 0 \text{ e } x^{D-1} = a \quad (3.1)$$

fora da região do interior das placas o campo é identicamente nulo :  $\Psi = 0$  .

Procedendo analogamente ao que foi feito no capítulo anterior para achar uma condição pela qual a relação 3.1 possa ser derivada, a equação 2.76 se mantém inalterada pois a relação de anti-comutação das matrizes  $\gamma$  não se modifica em D dimensões espaço-temporais. Novamente  $(in_\mu \gamma^\mu)^2 = 1$  e  $in_\mu \gamma^\mu$  tem autovalores  $\pm 1$  . Assumindo que :

$$in_\mu \gamma^\mu \Psi(x) = \Psi(x) \quad \text{em} \quad x^{D-1} = 0 \text{ e } x^{D-1} = a \quad (3.2)$$

Chegamos novamente a :

$$in_{\mu}j^{\mu} = \bar{\Psi}\Psi = -\bar{\Psi}\Psi = 0 \quad em \quad x^{D-1} = 0 \quad e \quad x^{D-1} = a \quad (3.3)$$

Ou seja, é suficiente considerar a condição dada pela equação 3.2.

Obs : Na dedução acima, usamos o fato de que em  $D$  dimensões espaço-temporais  $(\gamma^i)^{\dagger} = -\gamma^i$  e  $(\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0$  onde  $i = 1 \dots D$  [21].

Considere uma função de onda de energia positiva da forma :

$$\Psi(\vec{x}, t) = \exp(-iEt) \exp\left(\sum_{i=1}^{D-2} p_i x_i\right) \left[\exp(ip_{D-1}x_{D-1}) + i\gamma^{D-1} \exp(-ip_{D-1}x_{D-1})\right] u(p) \quad (3.4)$$

Impondo a condição dada pela equação 3.2 sobre a função de onda dada pela equação 3.4 e seguindo os mesmos passos do capítulo anterior, levando em conta as relações de anti-comutação entre as matrizes  $\gamma$ , temos :

$$p_{D-1} = \frac{\pi n}{2a} \quad onde \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.5)$$

Para calcular a energia de ponto-zero devemos levar em conta o número de componentes do spinor  $\Psi$  em  $D$  dimensões espaço-temporais na equação 2.73. Para  $D$  par, o número de componentes é  $c(D) = 2^{\frac{D-2}{2}}$  e para  $D$  ímpar,  $c(D) = 2^{\frac{D-3}{2}}$ . Em  $D$  dimensões, a equação 2.73 fica :

$$E_0 = -c(D) \sum_{\vec{p}} E_p = -c(D) \sum_{\vec{p}_{\perp}} \sum_{n \text{ ímpar}} \left( (\vec{p}_{\perp})^2 + \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

Como o campo está livre na direção de  $\vec{p}_{\perp}$ , as somas nessas variáveis se transformam em integrais na equação 2.73 através de :

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{D-2} L_i} \sum_{\vec{p}_{\perp}} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{D-2}} \int_0^{\infty} d^{D-2} p_{\perp} \quad (3.7)$$

De tal forma que a energia de ponto-zero por unidade de área fica :

$$\frac{E_0}{\prod_{i=1}^{D-2} L_i} = \varepsilon_D(a) = -c(D) \sum_{n \text{ ímpar}} \int \frac{d^{D-2} p_{\perp}}{(2\pi)^{D-2}} \left( (\vec{p}_{\perp})^2 + \left( \frac{n\pi}{2a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Novamente, chegamos a uma expressão divergente. Desta vez vamos regularizar a expressão acima usando a chamada regularização dimensional :

$$\int \frac{d^d u}{(u^2 + b^2)^s} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(s)} \Gamma\left(s - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{(b^2)^{s - \frac{d}{2}}} \quad (3.9)$$

Usando a equação 3.9 para  $d = D - 2$ ,  $u = p_{\perp}$ ,  $b = \left(\frac{n\pi}{2a}\right)$  e  $s = -\frac{1}{2}$ , a expressão 3.8 fica :

$$\begin{aligned} \varepsilon_D(a) &= -\frac{c(D)}{(2\pi)^{D-2}} \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{\pi^{\frac{D-2}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^{1-D}} \\ &= \frac{c(D) \pi^{\frac{D-1}{2}}}{(2)^{2D-2} (a)^{D-1}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \sum_{n \text{ ímpar}} n^{D-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Mas :

$$\sum_{n \text{ ímpar}} n^{D-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{D-1} = 2^{D-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{D-1} \quad (3.11)$$

Substituindo a equação 3.11 na equação 3.10, ficamos com :

$$\varepsilon_D(a) = \frac{c(D) \pi^{\frac{D-1}{2}}}{(2)^{D-1} (a)^{D-1}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{D-1} \quad (3.12)$$

A soma acima é conhecida como a função zeta de Hurwitz :

$$\zeta(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^z}, \quad q \neq 0, -1, -2, -3, \dots \quad (3.13)$$

que é analítica para  $\text{Re}z > 1$ .

Definindo  $f(D) = \frac{c(D) \pi^{\frac{D-1}{2}}}{2^{D-1}}$  e usando a equação 3.13 com  $z = 1 - D$  e  $q = \frac{1}{2}$  na equação 3.12, temos :

$$\varepsilon_D(a) = \frac{f(D)}{a^{D-1}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \zeta\left(1-D, \frac{1}{2}\right) \quad (3.14)$$

Vamos analisar separadamente os casos em que  $D$  é par ou ímpar.

$D$  par. A função  $\Gamma(z)$  apresenta polos quando  $z$  é um inteiro negativo. Portanto quando  $D$  é par, a função  $\Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right)$  não apresenta pólos.

A função  $\zeta(-m, v)$  não é analítica quando  $m$  é um inteiro positivo mas pode ser estendida analiticamente, de tal forma que podemos escrever [22]:

$$\zeta(-m, v) = -\frac{B_{m+1}(v)}{m+1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

Desse modo, a função zeta de Hurwitz presente na equação 3.14 pode ser escrita como

:

$$\zeta\left(1-D, \frac{1}{2}\right) = -\frac{B_D\left(\frac{1}{2}\right)}{D} \quad (3.16)$$

Usando a relação entre os polinômios de Bernoulli e os números de Bernoulli :

$$B_D\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1-2^{1-D}\right) B_D \quad (3.17)$$

A expressão 3.14 fica :

$$\varepsilon_D(a) = -\frac{f(D)}{a^{D-1}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \frac{\left(2^{1-D}-1\right) B_D}{D} \quad (3.18)$$

que vemos ser finita para  $D$  par. Em particular para  $D=4$ , como  $f(4) = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{2^3}$ ,  $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$  e  $B_4 = -\frac{1}{30}$  temos :

$$\begin{aligned} \varepsilon_4(a) &= -\frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{2^3} \left(-\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\right) \left(2^{-3}-1\right) \left(-\frac{1}{30}\right) \frac{1}{4} \\ &= -\frac{7\pi^2}{2880a^3} \end{aligned} \quad (3.19)$$

o que concorda com o resultado dado pela equação 2.102.

$D$  ímpar. Partindo da expressão 3.14, vamos usar a fórmula de duplicação :

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \frac{\Gamma(s) \pi^{\frac{1}{2}} 2^{1-s}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \quad (3.20)$$

para  $s = 1 - D$  :

$$\Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) = \frac{\Gamma(1-D) \pi^{\frac{1}{2}} 2^D}{\Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right)} \quad (3.21)$$

De forma que a equação 3.14 fica :

$$\varepsilon_D(a) = \frac{f(D) \Gamma(1-D) \pi^{\frac{1}{2}} 2^D}{a^{D-1} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right)} \zeta\left(1-D, \frac{1}{2}\right) \quad (3.22)$$

Definindo a função analítica (para  $D$  ímpar) :

$$g(D) = \frac{f(D) \pi^{\frac{1}{2}} 2^D}{\Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right)} \quad (3.23)$$

Temos :

$$\varepsilon_D(a) = \frac{g(D)}{a^{D-1}} \Gamma(1-D) \zeta\left(1-D, \frac{1}{2}\right) \quad (3.24)$$

Vamos mostrar agora que o produto da função zeta pela função gama na equação acima é uma função meromórfica em todo o plano complexo. Primeiro, vamos escrever a representação integral da função zeta de Hurwitz :

$$\zeta(z, q) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \frac{\exp[t(1-q)]}{\exp(t) - 1} \quad (3.25)$$

Vamos separar o intervalo de integração em duas partes :  $[0, 1) + [1, \infty)$  . Na primeira parte podemos usar a expansão :

$$\frac{t \exp(xt)}{\exp(t) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n, \quad 0 < |t| < 2\pi \quad (3.26)$$

De tal forma que a integral no intervalo  $[0, 1)$  , com  $x = 1 - q$ , fica :

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt t^{z-1} \frac{\exp[t(1-q)]}{\exp(t) - 1} &= \int_0^1 dt t^{z-2} \frac{t \exp[t(1-q)]}{\exp(t) - 1} = \int_0^1 dt t^{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-q)}{n!} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-q)}{n!} \int_0^1 dt t^{z-2+n} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1-q)}{n!} \frac{1}{z+n-1} \quad (3.28)$$

Usando o fato de :

$$B_n(1-q) = (-1)^n B_n(q) \quad (3.29)$$

a integral fica :

$$\int_0^1 dt t^{z-1} \frac{\exp[t(1-q)]}{\exp(t) - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n(q)}{n!} \frac{1}{z+n-1} \quad (3.30)$$

A integral da segunda parte, no intervalo  $[1, \infty)$ , é uma função regular de  $z$ , pois o integrando diverge somente para  $t$  pequeno. Vamos chamar a integral deste intervalo de  $h_1(z, q)$ , que fica :

$$h_1(z, q) = \int_1^{\infty} dt t^{z-1} \frac{\exp[t(1-q)]}{\exp(t) - 1} \quad (3.31)$$

A função zeta de Hurwitz fica :

$$\zeta(z, q) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n(q)}{n!} \frac{1}{z+n-1} + h_1(z, q) \right] \quad (3.32)$$

Usando a expressão 3.32 para a função zeta da equação 3.24 para  $z = 1 - D$  e  $q = \frac{1}{2}$ , a energia por unidade de área fica :

$$\varepsilon_D(a) = \frac{g(D)}{a^{D-1}} \Gamma(1-D) \frac{1}{\Gamma(1-D)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n\left(\frac{1}{2}\right)}{n!} \frac{1}{n-D} + h_1\left(1-D, \frac{1}{2}\right) \right] \quad (3.33)$$

Mas :

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1 - 2^{1-n}\right) B_n \quad (3.34)$$

$$\varepsilon_D(a) = \frac{g(D)}{a^{D-1}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2^{1-n} - 1) B_n}{n! (n-D)} + h_1\left(1-D, \frac{1}{2}\right) \right] \quad (3.35)$$

Vemos da equação 3.35, que a soma em  $n$  contém um polo em  $n = D$ , com resíduo :

$$Res[\varepsilon_D(a)] = \frac{g(D) (-1)^D (2^{1-D} - 1) B_D}{a^{D-1} D!} \quad (3.36)$$

Entretanto, quando  $D$  é ímpar e  $D \neq 1$ ,  $B_D = 0$ . Conseqüentemente o resíduo da energia do vácuo se anula para o caso em que  $D$  é ímpar. Mesmo para  $B_1 = -\frac{1}{2}$ , quando substituímos  $D = 1$  na equação 3.36, ela se anula.

A equação 3.35 é geral e também é válida para o caso em  $D$  é par. Vamos ver como os pólos que aparecem para  $D$  par na equação 3.35 são cancelados pela função  $\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)$  que existe no denominador de  $g(D)$ .

Primeiro, notamos que a soma na equação 3.35 se reduz aos termos em que  $n$  é par, pois  $B_{ímpar} = 0$  e o termo  $n = 1$  é nulo pela razão já mencionada. A equação 3.35 fica :

$$\varepsilon_D(a) = \frac{g(D)}{a^{D-1}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2n!} \frac{(2^{1-2n} - 1) B_{2n}}{2n - D} + h_1\left(1 - D, \frac{1}{2}\right) \right] \quad (3.37)$$

Agora, escrevemos a representação integral da função  $\Gamma(z)$  :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \quad \text{Re}z > 0 \quad (3.38)$$

Vamos novamente separar o intervalo de integração em duas partes :  $[0, 1) + [1, \infty)$ . Na primeira parte, podemos expandir a exponencial em série de Taylor. A segunda parte é uma função analítica de  $z$ . Assim :

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} dt + \int_1^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1} dt + f_1(z) \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde a função analítica  $f_1(z)$  é :

$$f_1(z) = \int_1^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (3.40)$$

Integrando termo a termo :

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + f_1(z) \quad (3.41)$$

vemos que  $\Gamma(z)$  tem pólos em  $z = -1, -2, -3, \dots$

Para a função gama no denominador de  $g(D)$ , a equação 3.41 fica :

$$\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{2}{2 + 2n - D} + f_1\left(1 - \frac{D}{2}\right) \quad (3.42)$$

Substituindo a equação 3.42 na equação 3.37 :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_D(a) &= \frac{f(D) \pi^{\frac{1}{2}} 2^D}{\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)} \frac{1}{a^{D-1}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} (2^{1-2n} - 1) B_{2n}}{2n! (2n - D)} + h_1 \left(1 - D, \frac{1}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{f(D) \pi^{\frac{1}{2}} 2^D}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{2}{2+2m-D} + f_1\left(1 - \frac{D}{2}\right)} \frac{1}{a^{D-1}} \times \\
 &\quad \times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} (2^{1-2n} - 1) B_{2n}}{2n! (2n - D)} + h_1 \left(1 - D, \frac{1}{2}\right) \right] \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Podemos reescrever a segunda soma como :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} (2^{1-2n} - 1) B_{2n}}{2n! (2n - D)} = -\frac{1}{D} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+2} (2^{-1-2n} - 1) B_{2n+2}}{(2n+2)! (2+2n-D)} \quad (3.44)$$

O pólo em  $m = \frac{D-2}{2}$  na primeira soma da equação 3.43 irá cancelar a contribuição de  $h_1$  e de todos os termos da segunda soma, com exceção do pólo em  $n = \frac{D-2}{2}$ . O termo que sobra fica :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_D(a) &= \frac{f(D) \pi^{\frac{1}{2}} 2^D}{\frac{2(-1)^{\frac{D-2}{2}}}{\left(\frac{D-2}{2}\right)!}} \frac{1}{a^{D-1}} \times \frac{(-1)^D}{(D)!} (2^{1-D} - 1) B_D \\
 &= f(D) \pi^{\frac{1}{2}} 2^{D-1} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D)} \frac{1}{a^{D-1}} (-1)^{\frac{D}{2}+1} (2^{1-D} - 1) \frac{B_D}{D} \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

Mas :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D)} = \frac{2^{1-D} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\right)} \quad (3.46)$$

Substituindo :

$$\varepsilon_D(a) = f(D) \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{a^{D-1}} (-1)^{\frac{D}{2}+1} (2^{1-D} - 1) \frac{B_D}{D} \quad (3.47)$$

Vamos reescrever a equação 3.47, notando que para  $D$  par, podemos reescrever a quantidade  $\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right)$  extendendo-a analiticamente através de :

$$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1) \quad (3.48)$$

O que produz :

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{D}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2} - \frac{D}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{D}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2} - \frac{D}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{D}{2}\right)\left(\frac{5}{2} - \frac{D}{2}\right)} = \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2} - \frac{D}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{D}{2}\right)\dots\left(\frac{D-1}{2} - \frac{D}{2}\right)} \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{D}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}\right)} \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

Notamos que o denominador da equação 3.49 contém  $\left(\frac{D-1}{2} + \frac{1}{2}\right)$  termos. Multiplicando todos esses termos por  $(-2)$ , a equação 3.49 fica :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{D}{2}} (D-1)(D-3)(D-5)\dots(1)} = \frac{2^{\frac{D}{2}}}{(-1)^{\frac{D}{2}} (D-1)(D-3)(D-5)\dots(1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \tag{3.50}$$

Ou ainda :

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{D}{2}\right) &= \frac{2^{\frac{D}{2}} \sqrt{\pi}}{(-1)^{\frac{D}{2}} (D-1)!!} \\
 &= \frac{2^{\frac{D}{2}} \sqrt{\pi} D!}{(-1)^{\frac{D}{2}} D! (D-1)!!} \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

onde :

$$(D-1)!! = (D-1)(D-3)\dots(1) \tag{3.52}$$

Mas :

$$\frac{D!}{(D-1)!!} = \frac{D(D-1)(D-2)(D-3)\dots(1)}{(D-1)(D-3)(D-5)\dots(1)} = D(D-2)(D-4)\dots(2) = D!! \tag{3.53}$$

Ainda :

$$(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \dots (2n) = 2^n (n)! \tag{3.54}$$

Logo :

$$\frac{D!}{(D-1)!!} = 2^{\frac{D}{2}} \left(\frac{D}{2}\right)! = 2^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right) = 2^{\frac{D}{2}} \frac{D}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \tag{3.55}$$

Substituindo a equação 3.55 na equação 3.51 temos :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{2}\right) &= \frac{2^{\frac{D}{2}}}{(-1)^{\frac{D}{2}}} \frac{\sqrt{\pi}}{D\Gamma(D)} \times 2^{\frac{D}{2}} \frac{D}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \\ &= \frac{2^{D-1}}{(-1)^{\frac{D}{2}}} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(D)}\end{aligned}\quad (3.56)$$

Mas, usando a equação 3.46,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{2}\right)$  fica :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{2}\right) = \frac{\pi}{(-1)^{\frac{D}{2}} \Gamma\left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2}\right)} \quad (3.57)$$

Reescrevendo a equação 3.47 usando a equação 3.57, ficamos com :

$$\begin{aligned}\varepsilon_D(a) &= f(D) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{2}\right) \frac{1}{a^{D-1}} (-1)^{D+1} (2^{1-D} - 1) \frac{B_D}{D} \\ &= -f(D) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{2}\right) \frac{1}{a^{D-1}} (2^{1-D} - 1) \frac{B_D}{D}\end{aligned}\quad (3.58)$$

o que concorda com a equação 3.18.

Poderíamos ter seguido outro caminho à partir da equação 3.14 usando  $\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1) \zeta(s)$  para  $s = 1 - D$ , e a fórmula de reflexão :

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \quad (3.59)$$

válida para todo  $s$ . A equação 3.14 fica :

$$\begin{aligned}\varepsilon_D(a) &= \frac{f(D)}{a^{D-1}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \zeta(1-D) (2^{1-D} - 1) \\ &= -\frac{c(D) (1 - 2^{1-D})}{2^{D-1} \pi^{\frac{D}{2}} a^{D-1}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \zeta(D)\end{aligned}\quad (3.60)$$

O resultado acima é finito para qualquer  $D$  positivo e é sempre negativo como é mostrado na figura 3.1. (Na plotagem do gráfico da energia, deixamos de lado o fator do número de componentes do spinor  $c(D)$ ). A energia tende a  $-\infty$  quando  $D \rightarrow 0$  e quando  $D \rightarrow \infty$ , tomando o valor máximo de  $-4.9 \times 10^{-6}$  em  $D \approx 26.1$ . A energia de

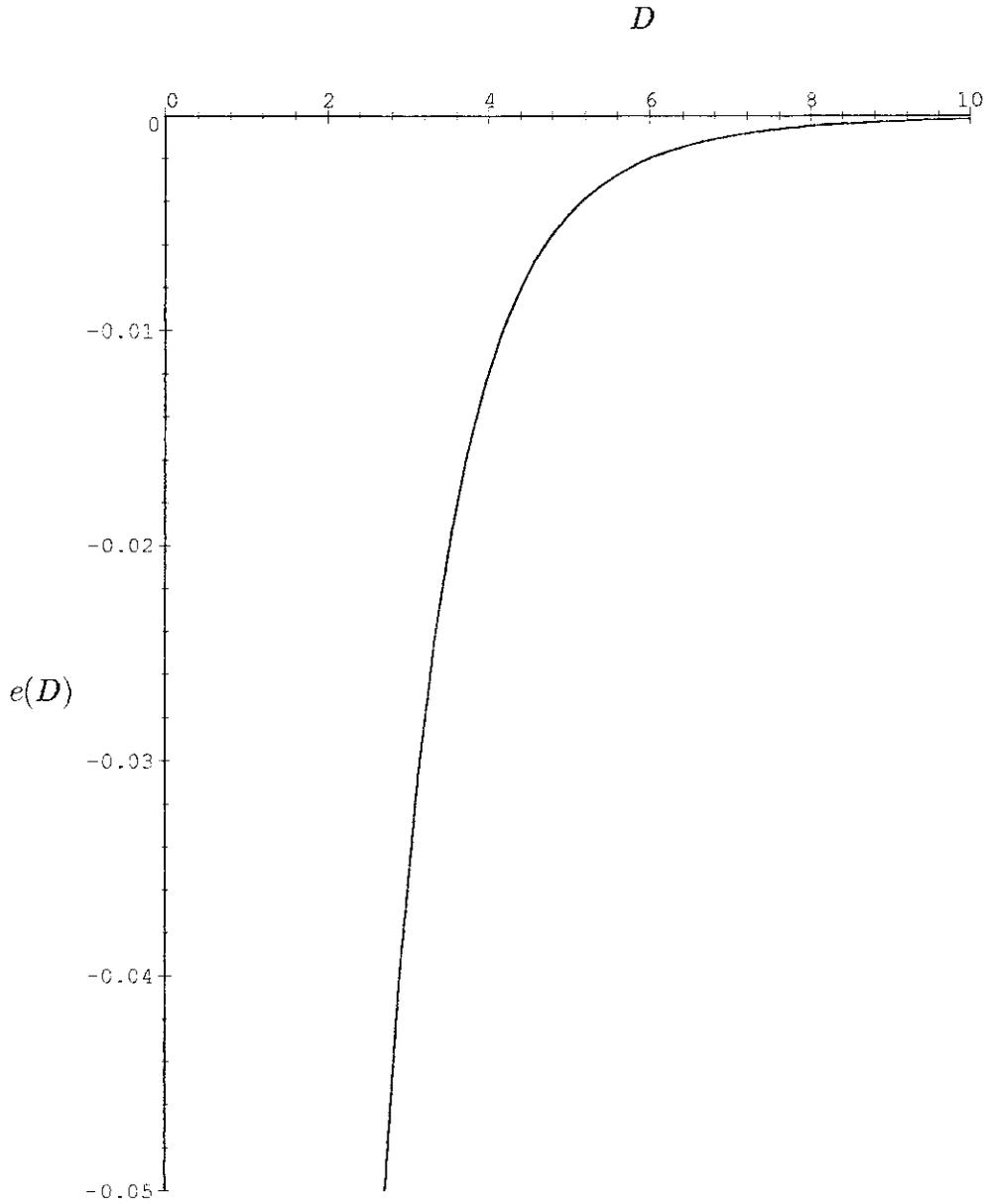


Figura 3.1: A energia de Casimir do campo fermiônico para  $D$  pequeno, deixando de lado o fator de multiplicidade de spin:  $e(D) = \frac{\epsilon_D(L)L^{D-1}}{c(D)}$ .

Casimir do campo escalar sem massa sujeito à condições de contorno de Dirichlet como função do número de dimensões espaço-temporais calculada no capítulo anterior também é sempre negativa e seu máximo ocorre exatamente para o mesmo valor de  $D$ .

A pressão que o vácuo exerce nas placas é também negativa, ou seja, faz com que as placas se atraiam. Ela é dada por :

$$-\frac{\partial}{\partial a}\varepsilon_D(a) = -\frac{c(D)(D-1)(1-2^{1-D})}{2^{D-1}\pi^{\frac{D}{2}}a^D}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\zeta(D) \quad (3.61)$$

É interessante notar que apesar da energia de ponto-zero de férmions e bósons tenham o sinal trocado, após um procedimento de regularização a energia de Casimir de um campo fermiônico tem o mesmo sinal da energia de Casimir do campo bosônico.

# Capítulo 4

## Conclusões

Nesta tese mostramos que a energia de ponto-zero regularizada de férmions sem massa no interior de duas placas paralelas é finita em qualquer número de dimensões do espaço-tempo. Para isso, usamos a regularização dimensional nos momentos nas  $d - 1$  direções transversais das placas, nas quais suas dimensões são infinitas, tornando os momentos variáveis contínuas. Depois, extendemos analiticamente a função zeta de Hurwitz obtida. Para o caso em que o número de dimensões do espaço-tempo é par, a energia de ponto-zero é finita, sem necessidade de renormalização; no caso em que o número de dimensões do espaço-tempo é ímpar, mostramos que o resíduo da parte polar é indenticamente nulo e a subtração usual da parte polar de uma quantidade divergente também é desnecessária.

A razão pela qual o procedimento de regularização analítica produz um resultado finito para campos fermiônicos confinados em um volume finito parece estar relacionada com o trabalho de Svaiter e Svaiter [16], [17]. Os autores provaram que o método da função zeta é equivalente ao método de regularização por “cut-off” com a subtração de termos polares, no caso do campo escalar neutro sem massa. A idéia básica usada por Casimir [1], (que introduziu o método de regularização por “cut-off”), é que embora a energia de ponto-zero seja divergente, a variação na energia de ponto-zero devido a mudanças na configuração

produz um resultado finito. No caso do “cut-off” exponencial, para calcular essa variação, a energia de ponto-zero é regularizada antes da subtração da energia de ponto-zero da configuração de “referência”. Essa energia renormalizada é obtida somando a energia de ponto-zero do campo dentro e fora da cavidade. Este procedimento parece ser natural quando lidamos com sistemas em que o campo existe dentro e fora da cavidade. Entretanto na configuração do “bag model”, onde o campo supostamente só existe dentro de uma região, este procedimento não é natural. Entretanto, de acordo com [16], a energia de Casimir calculada usando a extensão analítica da função zeta, se torna livre desses termos divergentes.

Uma extensão natural deste trabalho é calcular a energia de ponto-zero do campo fermiônico para outras geometrias onde assumimos o confinamento, tais como um cilindro ou uma esfera, usando o procedimento de regularização analítica.

Um projeto de mais longa duração é investigar modelos de férmions e bósons interagindo (como por exemplo o modelo de Yukawa) ainda supondo que os campos estão definidos apenas numa região finita do espaço-tempo. Nesse caso a perda da invariância translacional torna o procedimento de renormalização mais difícil do que no caso de campos definidos no espaço-tempo todo. A renormalização de campos com auto-interação nesta situação de perda da invariância translacional merece um estudo mais cuidadoso.

# Referências

- [1] H.B.G. Casimir, Proc. Kon. Ned Akad. Wet. 51 (1948) 793.
- [2] K. A. Milton, Phys. Rev. **D22**, 1441 (1980); Phys. Rev. **D22**, 1444 (1980); Ann. Phys. **150**, 432 (1983).
- [3] C. M. Bender and Hays, Phys. Rev. **D14**, 2622 (1976).
- [4] A. Romeo, Phys. Rev. **D52**, 7308 (1995).
- [5] M. Bordag, E. Elizalde, K. Kirsten and S. Leseduarte, Phys. Rev. **D56**, 4896 (1997).
- [6] A. Romeo, Phys. Rev. **D53**, 3392 (1996).
- [7] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **D9** 3471 (1974); A. Chodos and C. B. Thorn, Phys. Lett. **53B**, 359 (1974).
- [8] K. Johnson, Acta Phys. Pol. **B6**, 865 (1975).
- [9] R. Balian and C. Bloch, Ann. Phys. **60**, 401 (1970); D. Deutsch and P. Candelas, Phys. Rev. **D20**, 3063 (1979).
- [10] J. Baacke and Y. Igarashi, Phys. Rev. **D27**, 460 (1983).
- [11] J. Ambjorn and S. Wolfram, Ann. Phys. **147**, 1 (1983).
- [12] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov, Sov. Phys. Usp. **31**, 965 (1988).

- [13] G. Plunien, B. Müller, and W. Greiner, *Phys. Rep. C* **134**, 87 (1986).
- [14] F. Caruso, R. De Paola and N. F. Svaiter, *Int. J. Mod. Phys. A* **14**, 2077 (1999).
- [15] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory* (Harwood, New York, 1981).
- [16] N. F. Svaiter and B. F. Svaiter, *J. Math Phys.* **32**, 175(1991).
- [17] N. F. Svaiter and B. F. Svaiter, *J. Phys. A* **25**, 979(1992); B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, *Phys. Rev.* **D47**, 4581 (1993).
- [18] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer 2nd edition*, 1989.
- [19] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum: an Introduction to Quantum Electrodynamics*, Academic Press, San Diego, California, 1994.
- [20] R. D. M. De Paola, R. B. Rodrigues and N. F. Svaiter, “Casimir Energy of Massless Fermions in the Slab-bag”, hep-th/9905039.
- [21] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford Science Publications).
- [22] M. Abramowitz and I. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover, 1965.

# “ENERGIA DE CASIMIR DE FÉRMIONS SEM MASSA EM D DIMENSÕES ESPAÇO-TEMPORAIS”

ROBSON BRITO RODRIGUES

Tese de mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes Professores:

Nami Fux Svaiter - Presidente-CBPF

Bernard Fux Svaiter-IMPA

Sérgio Joffily-CBPF

Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson-CBPF

Rio de Janeiro 09 de setembro de 1999