

Dissertação de Mestrado

**Buracos de minhoca em modelos de  
universo eterno**

Felipe Peixoto Poulis

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Rio de Janeiro, outubro de 2007.

# Agradecimentos

Para a conclusão deste trabalho, muitas pessoas tiveram importância fundamental e indispensável, cujas participações foram tanto direta quanto indireta. Listarei aqui as de maior relevância, sendo que o sentimento de gratidão estende-se à todos os que, de alguma forma, sintam-se inseridos nos diversos grupos descritos.

Primeiramente, não poderia deixar de agradecer aos meus pais e familiares. Aqueles aos quais devo toda a educação que tive e que me deram plenas condições de chegar até aqui. Devo, também, por aceitarem sem qualquer oposição minha decisão de seguir tal carreira, o que foi bastante confortável.

Alguns, aos quais serei eternamente grato, foram de grande importância acadêmica. Não posso negar que, já nos primeiros períodos da faculdade, dois colegas, que considero grandes amigos, foram os verdadeiros responsáveis pela evolução da minha postura em relação aos estudos. Eles me serviram como excelentes exemplos a seguir e, de fato, foi com eles que aprendi a estudar com o afinho necessário para que, cada vez mais, eu tivesse condições de ir além. Estes são: Carlos Augusto Domingues Zarro e Roberto Vilela Pereira; duas pessoas com quem tive a grande honra e o privilégio de estudar junto.

Da mesma forma, deixo meu agradecimento a Luiz Gustavo Jotta Martins de Souza. Um grande amigo com quem estudei no ensino fundamental e médio e cuja facilidade com os estudos me provocava grande admiração. Esta, contribuindo de forma muito construtiva para que eu pudesse continuar em busca de minhas ambições.

Tiveram, também, outras amizades que fiz na faculdade e no CBPF que, embora também tenham tido contribuição acadêmica, é mais pelo companheirismo que devo o reconhecimento. Por vezes, os estudos mostraram-se bastante frustrantes, tediosos ou estafantes, fazendo com que a presença destas pessoas, sempre em lugares bastante oportunos, fosse um grande alívio. Entre eles, estão: Alexis Nunez, Alvaro Iribarrem, Ana Amélia, André Lemos, Bernardo Medina, Bruno Mintz, Bruno “Palhacito” Moraes, Carlos Andrés, Carlos Ospina, Carlos “Vascão” Zarro, Diego Pantoja, Diogo Soares Pinto, Érico Goulart, Felipe Tovar, Fernando “Boiúna” Nicácio, Fernando “Felu Fero” Rodrigues, Gabriel Guerrer, Gabriel Menezes, Habib Dumet, Leonardo de Souza Grigorio, Luciana Hirsch, Marcela Campista, Maria Borba, Martín Aparício, Murilo Rangel, Nilton, Nuno Crokidakis, Rafael Aranha, Rafael Serra Perez, Roberto “Le petit” Pereira, Rogério Fernandez, Rômulo Abreu, Victor Otoyá etc. Todos também contribuindo para um ambiente

bastante agradável e favorável aos estudos, chegando, alguns, a se preocupar mais com os meus do que eu mesmo.

Já outros merecem gratidão justamente pelas grandes e inestimáveis amizades que me rendem. Ao mesmo tempo que em nada se relacionavam com minhas atividades de estudo, proporcionavam-me excelentes e numerosos momentos de descontração. Momentos esses que me dão certeza de fazer parte do melhor grupo de amigos que alguém poderia desejar. E cuja intensa e admirável atividade social eram mais do que suficientes para que eu me sentisse ainda mais confortável e animado para encarar os estudos. Alguns deles são: Adriana Pereira, Alexandre e Wal Fernandes, Aline Fernandes, Augusto César Fadel, Bárbara Freitas, César “BH” Pádoa, Diego Vargas Freire, Helaine Prestes, Isabela Freitas, Joana Salles, José Roberto “Mancha” Almuiña, Júlio Silva, Leonardo Dominguez, Ludmilla Rodrigues, Luiz Monteiro, Marco Ferreira, Mariana “Maricota” Silveira, Renata Reis, Saulo da Cruz Campos, Sidália Pereira, Tadeu Freitas, Vitor Borges etc. Alguns chegando a se entusiasmar mais com minhas conquistas do que eu mesmo.

Gostaria, também, de agradecer ao CBPF pela excelente qualidade de seus pesquisadores, da qual tive o grande prazer de usufruir. Em particular, ao grupo do ICRA-BR, onde se encontram os melhores para se trabalhar em cosmologia e gravitação. Entre eles, gostaria de destacar meu orientador, José Martins Salim, que tem me acompanhado e auxiliado no estudo desta área desde minha primeira iniciação científica, em 2002, ao qual devo todo o conhecimento adquirido nela. Outros que também merecem destaque são: Mário Novello, pelo seu empenho em elevar cada vez mais o nível de pesquisa do grupo e pelo seu grandioso trabalho de divulgação, através das diversas escolas organizadas ou de publicações; e Nelson Pinto-Neto, pela valiosa contribuição dada à este trabalho.

Ao pessoal da CFC, por oferecerem condições de estudo privilegiadas aos alunos de pós-graduação do CBPF. Entre eles, Ricardo e Miriam, com quem tive mais contato e foram bastante solícitos, quando precisava.

Por fim, é indispensável o agradecimento à CAPES e, novamente, aos meus pais, pelo providencial apoio financeiro concedido durante este trabalho.

## Resumo

Após se introduzir o conceito de buraco de minhoca e estudar suas propriedades, conclui-se que somente fontes com propriedades bastante peculiares são capazes de gerar um. Propriedades, estas, que levam as fontes a violarem as, outrora tão consagradas, condições de energia, sendo, assim, denominadas exóticas. Observa-se que diversas teorias atuais levam em conta tais fontes e investiga-se a possibilidade de algumas delas resultarem num buraco de minhoca, em particular, as usadas em modelos de universo eterno. Numa primeira tentativa, verifica-se que as soluções padecem de problemas suficientes para que sejam descartadas, mostrando que a condição da fonte ser exótica não é suficiente para se obter uma geometria satisfatória. Em outros dois casos, soluções muito bem comportadas são encontradas, permitindo, inclusive, que pessoas possam fazer a travessia entre as duas regiões assintoticamente planas geradas em cada caso.

### **Abstract**

After introducing the concept of wormhole and studying its properties, we conclude that only sources with very peculiar properties are able to generate one. Those are called exotic, since their properties make them to violate the energies conditions, almost sacred in the past. Its noted that many theories today take those kind of sources in consideration and we investigate the possibility of some of them to result in a wormhole, in particular, those used in bouncing universe models. In a first attempt, we see that the solutions suffer from to much problems, so that they are discarded, showing that the condition of being exotic is not sufficient to obtain a satisfactory geometry. In two other cases, very well behaved solutions are found, allowing even that people could make a trip between the two asymptotically flat regions generated in each case.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Características de um Buraco de Minhoca</b>	<b>5</b>
2.1	A métrica . . . . .	5
2.2	Diagramas de imersão . . . . .	8
2.3	Tensores de Curvatura e de Einstein . . . . .	9
2.4	Forças de maré e tempo de percurso . . . . .	11
2.5	As equações de campo . . . . .	16
<b>3</b>	<b>As condições de energia</b>	<b>20</b>
3.1	As condições e suas utilidades . . . . .	20
3.2	Campos escalares na física . . . . .	22
3.3	Conseqüências das teorias de campos escalares . . . . .	23
3.4	Singularidades . . . . .	23
3.5	Universo com <i>bouncing</i> . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Alguns casos particulares</b>	<b>32</b>
4.1	Eletrodinâmica não-linear . . . . .	32
4.2	Campo escalar de Weyl como fonte . . . . .	37
4.3	Eletrodinâmica acoplada com a gravidade . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>O método de Runge-Kutta</b>	<b>54</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>59</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Todo este trabalho é baseado na teoria de Einstein da gravitação [1] e trata-se de considerar a possibilidade de existência de uma geometria pouco usual para o espaço-tempo. Uma vez que a teoria atribui um caráter puramente geométrico à interação gravitacional, podemos considerar situações inspiradas em diversas histórias de ficção, tais como atalhos entre duas regiões do espaço ou passagens entre universos distintos. Estas duas, que diferem uma da outra apenas na topologia, são a essência do que se chama *buraco de Minhoca*.

Em 1988, Morris e Thorne publicaram a referência [2] em que é feito, pela primeira vez, um estudo detalhado sobre essas configurações. Nela, são destacadas diversas sutilezas que impedem que se considere, para este fim, outras geometrias já conhecidas até então, como as pontes de Einstein-Rosen ou buracos negros. Entre elas, estão: a existência de horizontes, instabilidades, forças de maré etc.

Desta forma, sendo desconhecidas, à época, fontes que pudessem satisfazer tantas restrições, a abordagem adotada foi, primeiramente, modelar a geometria desejada, de modo que fosse livre dos problemas que as outras possuíam, e, com ela determinada, usar as equações de Einstein para se obter conclusões à respeito da suposta fonte responsável por ela. Delas, por sua vez, poderíamos concluir se tais situações poderiam deixar de ser fictícias ou não, baseando-se nas diversas propriedades de fontes já conhecidas.

No entanto, como veremos no capítulo a seguir, a propriedade mais geral que os buracos de minhoca devem, necessariamente, possuir, viola uma das chamadas *condições de energia*. Estas, até então, eram violadas apenas em situações muito especiais: em escalas quânticas ou em processos dissipativos muito afastados do equilíbrio. Qualquer tensor momento-energia conhecido na época satisfazia perfeitamente todas estas condições.

Elas tiveram sua importância e possuíam bastante crédito, nas décadas de 60 e 70, uma vez que não só eram demonstradas para as diversas teorias que se estudavam como também representam as condições mínimas para se ter preservadas certas propriedades tidas como válidas tanto para a interação gravitacional quanto para qualquer situação física admissível. Por exemplo, com algumas dessas condições, é possível mostrar que a

massa de qualquer sistema físico é sempre positiva para qualquer observador afastado. Outras já nos permitem concluir, através dos teoremas de singularidades, que a interação gravitacional é sempre atrativa, resultando nas singularidades do *big-bang* ou dos buracos negros.

Todavia, como será discutido mais à frente, isto já não é tão animador para os que relutavam em conceber uma geometria tão peculiar como essa. Afinal, além da já conhecida violação das condições em escalas quânticas, muitas teorias atuais supõem a existência de fontes em desacordo com todas elas. O que torna o estudo dessas configurações, novamente, algo interessante do ponto de vista teórico, pois podemos considerar, agora, a possibilidade de que fontes usadas em tais teorias resultem em buracos de minhoca.

É fato que diversas observações apontam na violação de tais condições de energia não só na fase atual da evolução cosmológica como também em algum passado não muito distante. Afinal, temos a constatação de que a expansão atual do universo sofre uma aceleração positiva, em desacordo com o caráter atrativo da gravidade, garantido pelas condições. Assim como certamente houve um período, chamado *inflacionário*, caracterizado por uma taxa de expansão anômala obtida somente através de fontes incompatíveis com as condições de energia.

Mais ainda, as diversas teorias de campos escalares existentes atualmente também mostram-se inconsistentes com todas elas. Tais teorias possuem importância fundamental na física teórica, apesar de ainda não existir nenhuma comprovação experimental ou observacional direta dos campos escalares considerados. Sua maior motivação é que eles mostram-se os modos mais naturais de se explicar uma variedade de fenômenos, entre os quais, aquelas expansões do universo citadas acima. O problema é que não há razão *a priori* para se considerar um acoplamento mínimo entre tais campos e a gravidade. E, uma vez ele sendo não-mínimo, quaisquer das teorias de campos escalares violam todas as condições de energia.

No entanto, apesar disto fornecer uma condição necessária para se obter um buraco de minhoca, não é neste contexto que buscaremos fontes capazes de gerar um. Iremos fazê-lo em modelos de universos eternos, ou com *bouncing*, existentes.

Como foi dito, uma das conseqüências das condições de energia é a garantia do caráter atrativo da interação gravitacional e a conseqüente singularidade inicial do *big-bang*. Isto é, dada a validade destas condições, mostra-se que existiu, em um tempo finito no passado, um momento em que todo o conteúdo do universo encontrava-se concentrado em um ponto. Porém, ele é péssimo como condição inicial para a evolução cosmológica subsequente, pois não só acompanha diversas divergências que impossibilitam qualquer tratamento físico de qualquer quantidade como, por ser um ponto, é desprovido de qualquer estrutura a se considerar.

Em contrapartida, os modelos de universo eterno já não apresentam os mesmos problemas. Neles, o *fator de escala* cosmológico, que, de certa forma, está relacionado com o

volume do universo, nunca se anula. Durante a evolução cosmológica ele teria se contraído e, ao atingir um valor mínimo positivo, teria passado a se expandir e resultado no cenário atual em que nos encontramos.

É de se esperar, com isso, que aconteçam violações das condições de energia, uma vez que elas garantem, justamente, que o fator de escala se contraia até se tornar zero. Afinal, um período onde se passa de uma fase de contração do universo para uma de expansão requer, ao invés de uma atração, uma repulsão gravitacional, violando, novamente, uma consequência das condições de energia. E, desta forma, teorias existentes até então deveriam ser alteradas para que pudessem fornecer fontes satisfatórias.

Entre as diversas possibilidades de se obter a propriedade característica de um *bouncing* estão a consideração de não-linearidades no eletromagnetismo, modificações na relatividade geral, acoplamentos não-mínimos entre campos escalares e a curvatura etc. Todas estas três mostraram-se bastante adequadas para modelos cosmológicos deste tipo, como pode-se verificar nas referências [3, 4, 5] e suas fontes serviram de inspiração para se obter um buraco de minhoca satisfatório. Afinal, não só temos o conhecimento de teorias que fornecem condições necessárias para sua existência como temos exemplos concretos de modelos onde são utilizadas de forma bem sucedida. Se nosso universo é eterno e o conteúdo energético dominante no período de *bouncing* é capaz de resultar em buracos de minhoca, então estes tornam-se uma possibilidade teórica bastante razoável. E é disto que trata esta dissertação: é verificado se as fontes usadas naquelas referências permitem ou não a existência de tais configurações espaço-temporais.

A primeira tentativa apresentada é baseada numa correção ao eletromagnetismo que o torna não-linear. Esta se faz necessária em situações de campos muito intensos, em que se dá o fenômeno de criação de partículas. Já era bem conhecido que o eletromagnetismo linear satisfaz as condições de energia, no entanto, acrescentando-se termos não-lineares, é possível que ocorram violações de algumas ou todas elas. E, sendo necessárias em campos intensos, como no caso do universo primordial, tais violações bastaram para a obtenção de um universo não-singular no modelo cosmológico tratado na referência [3].

Alguns poderiam imaginar que, uma vez sendo *exótica*, por violar as condições de energia<sup>1</sup>, esta fonte pudesse gerar um buraco de minhoca, como se esta fosse uma propriedade suficiente. No entanto, veremos que, neste caso, qualquer tentativa de se caracterizar tal geometria faz com que o espaço-tempo obtido seja bastante problemático para ser considerado uma solução satisfatória ou fisicamente concebível. De fato, pode-se obter a chamada *garganta*, que não passa da superfície de raio mínimo, quando se trata de soluções esfericamente simétricas. Porém, de acordo com a distância em relação a ela, a solução começa a apresentar certas características um tanto desagradáveis, fazendo com que os limites assintóticos sejam considerados inadmissíveis.

Em seguida, é tratado um caso de geometria de Weyl, em que há uma modificação

---

<sup>1</sup>Em especial a WEC, que será apresentada mais adiante.

num dos postulados da teoria de Einstein. Em [4], os autores consideram um vácuo de Minkowski como sendo a configuração do universo no infinito passado. Como esta é uma situação bastante estável, é considerada flutuações nos sistemas de medidas dos observadores para que se dê início a um processo de contração que, após se encerrar com um valor finito para o fator de escala, inicia a fase atual de expansão que temos. Nesta referência propõe-se uma forma específica para as flutuações dos sistemas de medidas e elas acabam por ser os chamados WISTs (*Weyl-Integrable Spacetimes*). A solução cosmológica obtida é bastante razoável e é considerada a possibilidade de que uma geometria de Weyl possa apresentar buracos de minhoca.

Ao se levar em conta uma dinâmica para as flutuações dos sistemas de medida, conclui-se que os termos geométricos pertinentes aos WISTs atuam como se fossem decorrentes de um campo escalar com densidade de energia negativa. Isto é, podemos interpretar as equações resultantes como se fossem dadas pela atuação de um campo escalar desta forma no contexto original da gravitação de Einstein.

Desta vez, é possível fazer a caracterização de um raio mínimo para a geometria esférico-simétrica e a solução obtida é perfeitamente aceitável. Ela é livre de horizontes e os limites assintóticos resultam num espaço-tempo plano. Já suas forças de maré podem ser tal que até mesmo humanos possam atravessar a garganta.

No último caso tratado, temos um acoplamento não-mínimo para o campo eletromagnético. Este decorre de correções à relatividade geral provenientes da eletrodinâmica quântica e pode ser a justificativa para os campos magnéticos observados em galáxias ou no meio intergalático. Com isso, novamente, aparecem não-linearidades na teoria que fornecem condições para que haja não só um *bouncing*, como se verifica em [5], como também veremos que permite a obtenção de um buraco de minhoca.

Este obtido, tal como o do caso anterior, satisfaz todas as condições desejáveis a um espaço-tempo aceitável e, da mesma forma, permite perfeitamente uma viagem tripulada através da garganta formada.

Concluiremos que, apesar de exibirmos soluções muito bem comportadas, a questão da existência ou não destas geometrias depende da consideração de casos dinâmicos, diferentemente dos tratados aqui. Muito embora estes resultados já podem ser considerados bastante animadores para se dar continuidade aos estudos destas configurações, na tentativa de se obter resultados mais conclusivos sobre os processos de formação de tais estruturas.

# Capítulo 2

## Características de um Buraco de Minhoca

Neste capítulo serão apresentadas as principais características que definem um buraco de minhoca, como suas propriedades se refletem na métrica e quais condições são impostas à fonte para que ela gere um. Também será considerado como sua geometria pode interferir na estrutura de algo que passe por ele, através das forças de maré, bem como estabelecido o tempo que levaria uma travessia entre os dois universos.

### 2.1 A métrica

Adotando, por um breve período, uma abordagem um tanto superficial, voltada mais para leigos, podemos introduzir o conceito de métrica da seguinte forma: seja o espaço euclidiano usual, isto é, aquele à três dimensões que, num sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$  dá para a distância  $\Delta s$  entre dois pontos separados por  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2,$$

que, no caso de distâncias infinitesimais, dá o *intervalo*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.1}$$

Caso estejamos trabalhando num outro sistema de coordenadas, como, por exemplo, o cilíndrico  $(z, r, \varphi)$  ou esférico  $(r, \theta, \varphi)$ , este se escreveria, respectivamente,

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2, \tag{2.2}$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2]. \tag{2.3}$$

Podemos, então, dizer que, num caso geral, num sistema  $(x^1, x^2, x^3)$ , teremos

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.4)$$

que, para os três sistemas citados, dá  $g_{ij}$ , quando escrito de forma matricial, como sendo:  $diag(1, 1, 1)$ , para  $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ ;  $diag(1, 1, r^2)$ , para  $(x^1, x^2, x^3) = (z, r, \varphi)$  e  $diag(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ , para  $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \varphi)$ . Este objeto,  $g_{ij}$ , é o que se chama de métrica.

Neste caso, estamos num espaço plano à três dimensões. Se estivéssemos no contexto da relatividade especial, em que o tempo é considerado, também, como uma coordenada, permaneceríamos num espaço plano, porém, o intervalo se escreveria

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.5)$$

e a métrica seria a de Minkowski, dada por  $\eta_{ij} = diag(-1, 1, 1, 1)$ , onde  $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  e os somatórios vão, naturalmente, de 0 à 3 em (2.4). Devido ao sinal trocado na parte temporal da métrica<sup>1</sup>, tais espaços são chamados de *pseudo-euclidianos*.

Já na relatividade geral, não necessariamente estamos lidando com um espaço plano. Podemos ter os chamados *espaços curvos* ou *pseudo-riemannianos* (analogamente ao anterior), em que o intervalo difere de seu equivalente no caso pseudo-euclidiano e cuja diferença pode variar de acordo com os pontos da variedade. Num caso geral, a métrica pode depender de cada ponto do espaço-tempo e, inclusive, deixar de ser diagonal. Isto é, podem existir “termos cruzados” no intervalo.

Dado que o conhecimento da métrica basta para se caracterizar a geometria em questão, esta passa a ser o principal objeto de interesse da gravitação de Einstein. Com ela, podemos obter as geodésicas percorridas pelos diferentes corpos, por exemplo, ou determinar as propriedades das mais variadas configurações de matéria-energia [1]. Vejamos, então, como podemos escrever a métrica para o caso específico de um buraco de minhoca.

Consideremos, por simplicidade, que o espaço-tempo gerado seja estático, de modo que a métrica não poderá depender do tempo, bem como esfericamente simétrico, seguindo o tratamento dado em [2, 6]. Podemos, desta forma, escrever a métrica como

$$ds^2 = -e^{2\phi(l)} c^2 dt^2 + dl^2 + r(l)^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (2.6)$$

onde  $l \in (-\infty, \infty)$  é a distância radial própria. Escolhendo  $l$  tal que o raio da garganta, *i.e.*, o menor valor de  $r(l)$ , seja para  $l = 0$ , teremos as duas “metades” do nosso espaço-tempo descritas uma com  $l$  positivo e outra com  $l$  negativo.

<sup>1</sup>Por vezes, o intervalo pode ser referido como métrica no decorrer do texto, dada a relação direta entre os dois.

Podemos, ainda, escrever  $l(r)$  em vez de  $r(l)$ , sendo que, neste caso, devemos ter duas funções para a distância radial própria, uma  $l_+(r)$ , correspondendo à uma daquelas metades, e outra  $l_-(r)$ , correspondendo à outra. Isso implica que também teremos  $\phi_+(r)$  e  $\phi_-(r)$  da mesma forma. A métrica fica, então:

$$ds^2 = -e^{2\phi_{\pm}(r)}c^2dt^2 + \left(\frac{\partial l_{\pm}}{\partial r}\right)^2 dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2]. \quad (2.7)$$

Escrevendo em coordenadas de Schwarzschild (que tornam muito mais simples os cálculos dos tensores de Riemann, Ricci e Einstein), ficamos com:

$$ds^2 = -e^{2\phi_{\pm}(r)}c^2dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{b_{\pm}(r)}{r}\right]} + r^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2]. \quad (2.8)$$

De onde obtemos a seguinte relação<sup>2</sup> entre  $l$  e  $r$ :

$$\frac{dl_{\pm}}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(r)}{r}}} \Rightarrow l_{\pm}(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(r')}{r'}}}, \quad (2.9)$$

onde definimos  $r_0$  como sendo o raio da garganta e este se dá para  $l_{\pm}(r_0) = 0$ .

Se quisermos que a parte espacial da geometria tenda a um limite assintoticamente plano, devemos ter  $\lim_{r \rightarrow \infty} b_{\pm}(r)/r = 0$ . E se quisermos que a geometria espaço-temporal tenda a um limite assintoticamente plano, também devemos ter  $\phi_{\pm}(r) = \phi_{\pm}$  (constantes) para  $r \rightarrow \infty$ .

Como temos um mínimo de  $r(l)$  na garganta, isso implica que  $dr/dl = 0$  e, conseqüentemente,  $dl/dr \rightarrow \infty$  nesse ponto. A partir de (2.9) vemos que isto é possível somente se  $b_{\pm}(r_0) = r_0$ . Mais ainda, o fato de  $r_0$  ser um mínimo nos dá mais uma informação útil a respeito de  $b(r)$ . Pois, assim sendo, devemos ter um  $r_*$  tal que, para qualquer  $r \in (r_0, r_*)$ , temos:

$$\frac{d^2r}{dl^2} = \frac{d}{dl} \left( \frac{dr}{dl} \right) = \frac{dr}{dl} \frac{d}{dr} \left( \frac{dr}{dl} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[ \left( \frac{dr}{dl} \right)^2 \right] > 0. \quad (2.10)$$

Tirando

$$\frac{dr}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{b_{\pm}}{r}}$$

de (2.9) e substituindo em (2.10), obtemos:

$$\frac{d^2r}{dl^2} = \frac{1}{2r} \left( \frac{b_{\pm}}{r} - b'_{\pm} \right), \quad (2.11)$$

em que, para uma função arbitrária,  $f(r)$ ,  $f'$  corresponde à sua derivada com respeito a “ $r$ ”. E concluímos que  $b'_{\pm}(r) < \frac{b_{\pm}(r)}{r}$  para todo  $r \in (r_0, r_*)$ .

---

<sup>2</sup>Note que  $l = l(r)$ , logo,  $\frac{\partial l_{\pm}}{\partial r} = \frac{dl_{\pm}}{dr}$ .

Na garganta, em particular, temos ( $b_{\pm}(r_0) = r_0$ ):

$$\left. \frac{d^2 r}{dt^2} \right|_{r_0} = \frac{1}{2r_0} [1 - b'_+(r_0)] = \frac{1}{2r_0} [1 - b'_-(r_0)] \Rightarrow b'_+(r_0) = b'_-(r_0). \quad (2.12)$$

Assim como  $b'_{\pm}(r_0) \leq 1$ .

Vemos, então, que o raio atinge um mínimo em  $r_0$  tal que  $b(r_0) = r_0$  e  $b'(r_0) \leq 1$ . Desta forma, podemos considerar este raio como sendo o maior entre aqueles que possuem esta propriedade. Isto é, dado todos os  $r_0$  com essas mesmas características, o raio da garganta será o maior dentre eles.

Isto é bastante razoável pois, sendo  $r_0$  um mínimo para a coordenada radial, a região  $[0, r_0)$  é inacessível para quem parte de  $r > r_0$ . Isto é, se o nosso universo é descrito para raios  $r > r_0$  e ele não compreende a região  $[0, r_0)$ , este raio mínimo deve ser o maior com tais propriedades. Com isso, deveremos ter  $b(r) \leq r$  para todo  $r \geq r_0$ .

## 2.2 Diagramas de imersão

De modo a melhor visualizar a geometria gerada pelo buraco de minhoca, que é algo bastante complicado de se fazer quando se tem duas regiões assintoticamente planas no mesmo espaço-tempo, é feito uso dos chamados *diagramas de imersão*. Estes possuem uma utilidade notável em casos bi-dimensionais, por exemplo.

Suponha que temos um caso em que o universo à duas dimensões em questão possui geometria esférica. Para efeitos de visualização, é muito mais prático considerar que ele, de fato, é dado por uma esfera num espaço euclidiano tridimensional. Isto é, consideramos que temos um espaço-tempo plano de dimensão superior e que a curvatura de uma dada geometria corresponde a de uma hiper-superfície nele.

No entanto, nosso buraco de minhoca é dado por um espaço-tempo à quatro dimensões, o que já não permite uma visualização no modo usual, muito menos acrescentando uma dimensão extra. Porém, duas simetrias suas permitem que nos preocupemos somente com uma superfície dele. Afinal, uma métrica estática nos dá uma simetria temporal, em que todos os instantes são equivalentes e, portanto, podemos fixar um instante  $t$  qualquer. Enquanto a simetria esférica nos permite restringir a uma superfície qualquer sem nenhuma perda de informação. Em particular, podemos escolher aquela tal que  $\theta = \pi/2$ , fazendo com que, para o instante  $t$ , o intervalo (2.8) se torna

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{b_{\pm}(r)}{r}\right]} + r^2 d\varphi^2. \quad (2.13)$$

Ficamos, assim, com um intervalo à duas dimensões que contém os dois universos. Consideramos ele, então, como sendo dado num espaço euclidiano à três dimensões, fazendo com que não só possamos visualizar sua curvatura de forma mais clara, como também

visualizemos os dois universos separadamente.

Como ainda temos preservada a simetria em relação ao ângulo  $\varphi$ , escolhemos o sistema de coordenadas cilíndricas para descrever o espaço plano. Nessas coordenadas ( $z$ ,  $r$  e  $\varphi$ ), o intervalo assume a forma

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (2.14)$$

E, como teremos simetria axial para a superfície imersa neste espaço, teremos  $z$  apenas como função de  $r$  e reescrevemos o intervalo como

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (2.15)$$

E a correspondência entre (2.13) e esta será dada somente se, além de identificarmos os dois pares de coordenadas ( $r$ ,  $\varphi$ ), tivermos  $z(r)$  tal que

$$\frac{dz}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b(r)} - 1}}. \quad (2.16)$$

Equação que mostra como a função  $b(r)$  modela a geometria espacial do buraco de minhoca.

Exemplos desses diagramas serão apresentados para as soluções particulares encontradas no capítulo 4.

## 2.3 Tensores de Curvatura e de Einstein

Sendo o intervalo escrito como<sup>3</sup>  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ , com  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \varphi$ , temos os símbolos de Christoffel,  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ , e as componentes do tensor de curvatura,  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ , dados por (ver [2]):

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\gamma g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\lambda\gamma} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma}); \quad (2.17)$$

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\lambda - \Gamma_{\lambda\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda, \quad (2.18)$$

onde  $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ .

---

<sup>3</sup>Passaremos a adotar a convenção de soma de Einstein, em que qualquer par de índices iguais na mesma expressão subentende um somatório de 0 à 3 neles.

Nossa métrica, equação (2.8), nos dá, então:

$$\begin{aligned}
 R_{101}^0 &= \frac{e^{-2\phi}}{\left(1-\frac{b}{r}\right)} R_{001}^1 &= -\phi'' + \frac{(b'r-b)}{2r(r-b)}\phi' - (\phi')^2; \\
 R_{202}^0 &= r^2 e^{-2\phi} R_{002}^2 &= -r\phi' \left(1 - \frac{b}{r}\right); \\
 R_{303}^0 &= r^2 e^{-2\phi} \text{sen}^2\theta R_{003}^3 &= -r\phi' \left(1 - \frac{b}{r}\right) \text{sen}^2\theta; \\
 R_{212}^1 &= -r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) R_{112}^2 &= \frac{(b'r-b)}{2r}; \\
 R_{313}^1 &= -r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \text{sen}^2\theta R_{113}^3 &= \frac{(b'r-b)\text{sen}^2\theta}{2r}; \\
 R_{323}^2 &= \text{sen}^2\theta R_{232}^3 &= \left(\frac{b}{r}\right) \text{sen}^2\theta.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Além daquelas que se relacionam com estas pela anti-simetria  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = -R_{\beta\delta\gamma}^\alpha$ . Todas as outras componentes são nulas.

Sendo essas as componentes do tensor na base canônica, que representaremos por  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , podemos passar para uma outra base de vetores ortonormais que se relacionam com ela da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_t &= e^{-\phi} \mathbf{e}_0, & \mathbf{e}_r &= \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \mathbf{e}_1, \\
 \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r \text{sen}\theta} \mathbf{e}_3.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Onde, impondo a condição de ortonormalidade,  $\mathbf{e}_\alpha^a \mathbf{e}_b^\alpha = \delta_b^a$  (onde  $a$  e  $b$  são quaisquer índices da nova base), obtemos seus duais:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}^t &= e^\phi \mathbf{e}^0, & \mathbf{e}^r &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b}{r}}} \mathbf{e}^1, \\
 \mathbf{e}^\theta &= r \mathbf{e}^2, & \mathbf{e}^\varphi &= r \text{sen}\theta \mathbf{e}^3.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Estas bases formam o sistema de referência dos observadores que permanecem em repouso no sistema de coordenadas [2]. Com elas, podemos obter a relação entre as componentes de um tensor nessas duas bases do seguinte modo: seja um tensor,  $T$ , com componentes, numa dada base,  $T^\alpha$ , isto é,  $T = T^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ . Numa outra base teríamos  $T = T^a \mathbf{e}_a$  e, sendo ela ortonormal,  $T^a = T \mathbf{e}^a = T^b \mathbf{e}_b \mathbf{e}^a = T^b \delta_b^a$ . Desta forma, temos a relação  $T^a = T \mathbf{e}^a = T^\alpha \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}^a = T^\alpha \mathbf{e}_\alpha^a$ , entre as componentes do tensor na base antiga e na nova. A generalização para um tensor de ordem qualquer é imediata:  $T^{abc\dots} = T^{\alpha\beta\gamma\dots} \mathbf{e}_\alpha^a \mathbf{e}_\beta^b \mathbf{e}_\gamma^c \dots$

Fazendo esta mudança, então, as componentes da métrica, na nova base, ficam:

$$g_{ab} = \eta_{ab} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

e as componentes do tensor de Riemann, equações (2.19), se tornam:

$$\begin{aligned}
R_{rtr}^t &= R_{ttr}^r &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[-\phi'' + \frac{(b'r-b)}{2r(r-b)}\phi' - (\phi')^2\right], \\
R_{\theta t\theta}^t &= R_{t\theta\theta}^\theta &= -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\phi'}{r}, \\
R_{\varphi t\varphi}^t &= R_{t\varphi\varphi}^\varphi &= -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\phi'}{r}, \\
R_{\theta r\theta}^r &= R_{r\theta r}^\theta &= \frac{(b'r-b)}{2r^3}, \\
R_{\varphi r\varphi}^r &= R_{r\varphi\varphi}^\varphi &= \frac{(b'r-b)}{2r^3}, \\
R_{\varphi\theta\varphi}^\theta &= R_{\theta\varphi\theta}^\varphi &= \frac{b}{r^3},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

mais as que se relacionam com essas por simetria.

Com elas, podemos calcular o tensor de Ricci,  $R_{ab}$ , e o escalar de curvatura,  $R$ , dados por:

$$\begin{aligned}
R_{ab} &= R_{acb}^c, \\
R &= g^{ab}R_{ab};
\end{aligned} \tag{2.24}$$

e, então, obtemos o tensor de Einstein:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}. \tag{2.25}$$

Suas componentes não nulas, verificam-se que são:

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= \frac{b'}{r^2}; \\
G_{rr} &= -\frac{b}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\phi'}{r}; \\
G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[\phi'' - \frac{(b'r-b)}{2r(r-b)}\phi' + (\phi')^2 + \frac{\phi'}{r} - \frac{(b'r-b)}{2r^2(r-b)}\right].
\end{aligned} \tag{2.26}$$

## 2.4 Forças de maré e tempo de percurso

Até agora, temos nos preocupado apenas com a caracterização de uma passagem entre dois universos distintos. Entretanto, se estamos interessados que algo além de raios luminosos seja capaz de fazer a travessia preservando sua integridade, devemos nos preocupar com as chamadas *forças de maré*, que surgem a partir das inomogeneidades do campo.

É fácil compreender a origem dessas forças considerando que, mesmo na descrição newtoniana da gravitação, um campo não-homogêneo pode gerar deformações numa dada configuração sob seu efeito. Imagine que se tem quatro massas dispostas em cruz sujeitas ao campo de uma estrela, por exemplo. Dispondo-as, inicialmente, de tal forma que duas das massas estejam há mesma distância da estrela e as outras duas na mesma vertical, elas não preservarão este arranjo durante sua queda. Afinal, o fato da intensidade do campo diminuir conforme se afasta da fonte faz com que a massa que está mais perto da estrela possua sempre uma aceleração maior do que as outras, fazendo com que a cruz se alongue na direção da estrela. E, sendo o campo direcionado para o centro dela, as que estão na mesma altura irão se aproximar uma da outra ao caírem. Ou seja, as posições

relativas das massas é alterada durante a queda, distorcendo o arranjo inicial. E isto é uma consequência somente do fato do campo gravitacional gerado possuir intensidades e direções diferentes em cada ponto do espaço.

Esta questão pode ser irrelevante quando estamos falando de campos fracos como o da Terra, por exemplo, que ainda pode ser considerado homogêneo com bastante precisão em qualquer experiência de laboratório. Mas, quando se trata de campos muito intensos e inhomogêneos, a tendência de um corpo em se deformar pode ser imensa. Podendo chegar à romper núcleos atômicos, dependendo do caso.

Para ilustrar como este ponto pode ser delicado quando se pretende que algo faça uma travessia inter-universal, vamos considerar que ela seja feita por uma nave tripulada, como no romance *Contato* de Carl Sagan, que motivou a publicação da referência [2], bastante citada em trabalhos posteriores. Assim sendo, não desejamos que as acelerações relativas entre as diversas partes dos corpos da tripulação não exceda muito os aproximados  $10m/s^2$  da superfície da Terra. O que impõe certas limitações adicionais à geometria, quando se está no contexto da relatividade geral, como será visto.

Neste caso, a inhomogeneidade é atribuída à curvatura do espaço-tempo, fazendo com que as massas simplesmente percorram geodésicas que tendem a se afastar uma da outra. Afinal, num espaço curvo, duas geodésicas, mesmo que paralelas num dado ponto, deixarão de ser como tais em outros; o que não é difícil entender porquê. E, como estamos tratando de um geometria que envolve uma parte espacial acrescida de uma dimensão temporal, a questão trata-se de saber com que taxa a posição de dois corpos tendem a variar relativamente no tempo quando percorrem suas geodésicas. Ou seja, podemos falar numa *velocidade* e *aceleração* relativas entre duas destas curvas que tendem à se aproximar ou afastar. Sendo esta última a quantidade obtida através da *equação do desvio geodético*.

Considere uma família de geodésicas,  $\gamma_s(t)$ , onde, para cada  $s$ ,  $\gamma_s$  é uma geodésica.  $s$  pode ser usado para parametrizar diferentes posições da variedade e podemos escolher  $s$  e  $t$  como coordenadas da sub-variedade gerada por  $\gamma_s(t)$ . Nela, podemos definir os campos vetoriais  $T^a = (\partial/\partial t)^a$ , tangente às geodésicas, e  $X^a = (\partial/\partial s)^a$ , representando o deslocamento infinitesimal à uma geodésica vizinha.

A taxa com que duas geodésicas vizinhas se deslocam uma em relação à outra, *i.e.*, a taxa de variação de  $X^a$ , ao longo da geodésica, cuja tangente é  $T^a$ , dá-se por  $v^a = T^b \nabla_b X^a$ . Este vetor pode ser interpretado como a velocidade relativa destas geodésicas e, de modo análogo, temos a aceleração

$$a^a = T^c \nabla_c v^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a). \quad (2.27)$$

Antes de expandir a expressão do lado direito, é conveniente observar que, sendo  $T^a$

tangente às geodésicas, temos

$$T^a \nabla_a T^b = 0, \quad (2.28)$$

assim como

$$T^b \nabla_b X^a = T^b (\partial_b X^a + \Gamma_{bc}^a X^c) = T^b \partial_b X^a + T^b \Gamma_{bc}^a X^c. \quad (2.29)$$

Sendo que  $\partial_b = \partial/\partial x^b$  já é a base canônica do sistema de coordenadas da variedade. Temos, então, desta forma,

$$\begin{aligned} T^b \partial_b X^a &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^b \frac{\partial}{\partial x^b} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^a = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^a = \left( \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \right)^a \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a = \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^b \frac{\partial}{\partial x^b} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a \\ &= X^b \partial_b T^a, \end{aligned} \quad (2.30)$$

enquanto, dada a simetria  $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$  da conexão, também temos  $T^b \Gamma_{bc}^a X^c = X^c \Gamma_{cb}^a T^b$  e concluimos que

$$\begin{aligned} T^b \nabla_b X^a &= X^b \partial_b T^a + X^b \Gamma_{bc}^a T^c = X^b (\partial_b T^a + \Gamma_{bc}^a T^c) \\ &= X^b \nabla_b T^a. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Finalmente, pode-se mostrar ainda [1] que

$$\nabla_a \nabla_b T^c - \nabla_b \nabla_a T^c = -R_{dba}^c T^d. \quad (2.32)$$

Com isso, a (2.27) se escreve como

$$\begin{aligned} a^a &= T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) \\ &= (T^c \nabla_c X^b) (\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_c \nabla_b T^a \\ &= (T^c \nabla_c X^b) (\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - R_{dbc}^a X^b T^c T^d \\ &= X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) - R_{dbc}^a X^b T^c T^d \\ &= -R_{dbc}^a X^b T^c T^d \end{aligned} \quad (2.33)$$

e temos uma relação entre a aceleração relativa de duas geodésicas separadas por um vetor infinitesimal,  $X^a$ , ao longo da tangente à curva,  $T^a$ , e o tensor de Riemann. Podemos, então, calcular a diferença entre as acelerações sofridas pelas partes do corpo de algum tripulante em termos de  $b(r)$  e  $\phi(r)$ , nos diferentes pontos de sua travessia.

Teremos, então,  $X^a$  sendo, por exemplo, a distância entre a cabeça e os pés dele, e que é puramente espacial em seu sistema de referência. Isto é, a componente temporal de  $X^a$  no sistema comóvel com o tripulante e numa base ortonormal é  $X^{0'} = 0$ . Já  $T^a$  será sua velocidade, que, em seu referencial, dá-se por  $T^{a'} = c\delta_{0'}^a$ . E, assim, ficamos com

$a^{a'} = -c^2 \eta^{a'b'} R_{b'0'k'0'} X^{k'}$  que, devido à anti-simetria de  $R_{abcd}$  em relação ao primeiro par de índices faz com que  $a^{0'} = 0$ . E, como as componentes de  $\eta^{ab}$  para  $a \neq 0$  podem ser escritas como  $\delta_a^b$ , escrevemos

$$a^{a'} = -c^2 R_{a'0'k'0'} X^{k'}. \quad (2.34)$$

Para passarmos as (2.23) para o sistema comóvel com a nave, efetuamos a conhecida *transformação de Lorentz* entre as bases. Ficamos, assim, com

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= \gamma \mathbf{e}_t \pm \gamma \frac{v}{c} \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_{2'} &= \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{e}_{1'} &= \gamma \frac{v}{c} \mathbf{e}_t \pm \gamma \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_{3'} &= \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde  $v = v(r)$  é a velocidade do viajante no ponto  $r$  medido por um observador estático que se encontra no mesmo lugar,  $\gamma \equiv [1 - v/c]^2$  e os sinais  $+$  e  $-$  são para os casos em que a nave se afasta ou se aproxima da garganta, respectivamente, fazendo com que  $\mathbf{e}_{1'}$  sempre aponte na direção de percurso. Com elas, as componentes não nulas de  $R_{a'0'k'0'}$  são

$$R_{1'0'1'0'} = - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[ -\phi'' + \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)} \phi' - (\phi')^2 \right], \quad (2.36)$$

$$R_{2'0'2'0'} = R_{3'0'3'0'} = \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[ \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r - b) \phi' \right], \quad (2.37)$$

fazendo com que as acelerações (2.34) fiquem

$$a^{1'} = -c^2 R_{1'0'1'0'} X^{1'}, \quad a^{2'} = -c^2 R_{2'0'2'0'} X^{2'} \quad \text{e} \quad a^{3'} = -c^2 R_{3'0'3'0'} X^{3'}. \quad (2.38)$$

Ou seja, considerando que não desejamos  $|a|$  muito maior que  $g \sim 10 \text{ m/s}^2$  e que  $|X| \sim 2 \text{ m}$  (a altura de uma pessoa), temos as restrições

$$|R_{1'0'1'0'}| = \left| \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[ -\phi'' + \frac{(b'r - b)}{2r(r - b)} \phi' - (\phi')^2 \right] \right| \lesssim \frac{g}{c^2 \cdot 2 \text{ m}}, \quad (2.39)$$

$$|R_{2'0'2'0'}| = \left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[ \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(b' - \frac{b}{r}\right) + 2(r - b) \phi' \right] \right| \lesssim \frac{g}{c^2 \cdot 2 \text{ m}}, \quad (2.40)$$

ambos da mesma ordem ou menores que  $10^{-16} \text{ m}^{-2}$ .

Tendo satisfeitas estas condições, um problema que surge é saber se o tempo de percurso não vai ser consideravelmente longo tanto para quem observa, de longe da garganta, quanto para quem ou aquilo que a faz. Pois, como se sabe, em relatividade geral, dois observadores distintos podem não concordar com o intervalo de tempo entre dois eventos. Desta forma, no nosso caso, em que a viagem é feita por humanos, é conveniente que a travessia seja feita num tempo inferior ou da ordem de um ano tanto para a estação de onde a nave saiu quanto para a própria tripulação.

Considerando que o percurso seja feito somente na direção radial e que comece em  $l = -l_1$  e termine em  $l = l_2$ , ambos distantes o suficiente da garganta para que os efeitos gravitacionais sejam desprezíveis, e sendo  $\tau$  o tempo próprio dos viajantes, devemos ter

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\phi} c^2 dt^2 + dl^2 + r(l)^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2] = -e^{2\phi} c^2 dt^2 + dl^2 \\ &= -e^{2\phi} c^2 dt^2 \left(1 - \frac{dl^2}{e^{2\phi} c^2 dt^2}\right) = -e^{2\phi} c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Que, dada a invariância do intervalo, deverá ser igual à  $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ . Isto é,

$$-c^2 d\tau^2 = \frac{-e^{2\phi} c^2 dt^2}{\gamma^2} \Rightarrow \gamma d\tau = e^\phi dt, \quad (2.42)$$

de onde concluímos que

$$v = \frac{dl}{e^\phi dt} = \frac{dl}{\gamma d\tau}. \quad (2.43)$$

Portanto, deveremos ter a preocupação com que

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{ve^\phi} \quad \text{e} \quad \Delta\tau = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{v\gamma} \quad (2.44)$$

sejam ambos menores ou da ordem de 1 ano.

Agora, tratando-se deste caso específico, de uma viagem tripulada, uma preocupação adicional é com a aceleração,  $\mathbf{a}$ , provocada pela nave na tripulação. Sabendo-se que uma pessoa não suporta grandes acelerações, comparadas com a da superfície terrestre,  $g$ , deveremos impor a condição adicional de que  $|\mathbf{a}| \lesssim g$ .

Para descobrirmos que condições as funções presentes na métrica deverão satisfazer para termos esta restrição garantida, tomemos a velocidade decomposta na base comóvel com a nave,  $\mathbf{u} = u^{a'} \mathbf{e}_{a'} = T^{a'} \mathbf{e}_{a'} = c \mathbf{e}_{0'}$ . A aceleração sofrida pelos viajantes é dada pela quadri-aceleração  $a^{a'} = u^{\beta'} \nabla_{\beta'} u^{a'}$  e é sempre ortogonal à quadri-velocidade. Isto é,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = c \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{0'} = c a_{0'} = 0$ , e teremos  $a_{0'} = -a^{0'} = 0$ , assim como  $a_{2'} = a_{3'} = 0$  pelo fato do movimento ser radial, o que nos dá  $\mathbf{a} = a \mathbf{e}_{1'}$ .

Para o cálculo de  $a$ , consideremos  $u_\alpha$ , no sistema que resulta na (2.8), como sendo função do raio,  $r$ , e façamos o cálculo de  $a_0 = u^\alpha \nabla_\alpha u_0 = u^1 \partial_1 u_0 - u^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\beta u_\beta$ . Dadas as (2.20) e (2.35) temos

$$\mathbf{u} = c \mathbf{e}_{0'} = c \left( \gamma \mathbf{e}_t \pm \gamma \frac{v}{c} \mathbf{e}_r \right) = c \left( \gamma e^{-\phi} \mathbf{e}_0 \pm \gamma \frac{v}{c} \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \mathbf{e}_1 \right), \quad (2.45)$$

que nos dá

$$u^0 = c\gamma e^{-\phi}, \quad u^1 = \pm c\gamma \left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{1 - \frac{b}{r}}, \quad u^2 = u^3 = 0, \quad (2.46)$$

$$u_0 = -c\gamma e^\phi, \quad u_1 = \pm c\gamma \left(\frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad u_2 = u_3 = 0. \quad (2.47)$$

Com estas componentes, obtemos

$$a_0 = \mp c^2 \gamma \left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{1 - \frac{b}{r}} (\gamma e^\phi)', \quad (2.48)$$

sendo que  $a_0 = g_{00}a^0 = g_{00}ae_1^0 = (-e^{2\phi})a\gamma(v/c)e^{-\phi} = -ae^\phi\gamma(v/c)$ . E, finalmente, ficamos com a relação

$$\begin{aligned} -ae^\phi\gamma\left(\frac{v}{c}\right) &= a_0 = \mp c^2\gamma\left(\frac{v}{c}\right)\sqrt{1 - \frac{b}{r}}(\gamma e^\phi)' \\ \Rightarrow a &= \pm\sqrt{1 - \frac{b}{r}}(\gamma e^\phi)'c^2e^{-\phi} = c^2e^{-\phi}\frac{d}{dl}(\gamma e^\phi), \end{aligned} \quad (2.49)$$

a qual deveremos impor  $|a| \lesssim g$ .

De fato, esta última preocupação com a aceleração promovida pela nave pode parecer bastante desnecessária. Pois esta condição é satisfeita sem nenhum problema em qualquer lançamento real que se faça. Inclusive, tratando-se de um lançamento, teremos propulsão somente por um certo intervalo de tempo, a partir do qual a nave segue sua geodésica livremente. Afinal, seria incrivelmente dispendioso qualquer viagem em que tivéssemos uma aceleração diferente de zero durante todo seu percurso. Isto poderia exigir uma quantidade enorme de energia! E, como não teremos mais propulsão,  $a = 0$  e a condição acima também é satisfeita.

Contudo, sendo o período de lançamento, como numa situação real, muito menor do que a viagem inteira, podemos considerá-lo desprezível. Isto é, dizemos que a nave já começa a viagem com uma dada velocidade e que teremos propulsão nula durante todo seu percurso. E, com isso, a (2.49) já nos dá um resultado bastante interessante, pois teremos

$$a = c^2e^{-\phi}\frac{d}{dl}(\gamma e^\phi) = 0 \quad (2.50)$$

durante todo o trajeto, implicando que  $\gamma e^\phi$  é uma constante. Inclusive, se não fôssemos tratar de um movimento geodésico deveríamos acrescentar correções à (2.33) devidas à aceleração exercida pela nave.

## 2.5 As equações de campo

Estamos tratando de uma métrica com simetria esférica. Se estivermos no vácuo, o teorema de Birkhoff nos garante que a única solução possível é a de Schwarzschild, que

representa um buraco negro<sup>4</sup>. Desta forma, se quisermos uma solução que admita um raio  $r_0$  com aquelas propriedades mencionadas e sem horizontes, ela não poderá estar no vácuo.

Sendo a relação entre o tensor momento-energia da fonte (que é zero somente para o vácuo) e o tensor de Einstein dada pela equação de Einstein,  $G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$ , concluímos, pelas equações (2.26), que ambos os tensores são diagonais.

Seja, então,  $T_{tt} = \tilde{\rho}(r)c^2$ ,  $T_{rr} = \tilde{p}(r)$ ,  $T_{\theta\theta} = T_{\varphi\varphi} = \tilde{\tau}(r)$ , onde  $\tilde{\rho}(r)$  é a densidade total de energia e  $\tilde{p}(r)$  e  $\tilde{\tau}(r)$  as pressões nas direções radial e transversas (direções  $\theta$  e  $\varphi$ ), respectivamente. Fazendo  $\rho(r) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{tt}$ ,  $p(r) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{rr}$  e  $\tau(r) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\theta\theta}$ , temos, finalmente:

$$\rho = \frac{b'}{r^2} \quad (2.51)$$

$$p = -\frac{b}{r^3} + 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\phi'}{r} \quad (2.52)$$

$$\tau = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[ \phi'' + \phi' \left( \phi' + \frac{1}{r} \right) \right] - \frac{(b'r - b)}{2r^2} \left( \phi' + \frac{1}{r} \right) \quad (2.53)$$

Estas equações, depois de um pouco de manipulação, resultam em:

$$b' = \rho r^2, \quad (2.54)$$

$$\phi' = \frac{b + pr^3}{2r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right)} \quad (2.55)$$

$$p' = -(\rho + p) \phi' + \frac{2(\tau - p)}{r}. \quad (2.56)$$

Sendo que, para se obter a última, substitui-se  $\phi''$  pela derivada de (2.55), em (2.53). Depois, basta substituir a expressão para  $b$  que resulta de (2.55), juntamente com a (2.54).

Com elas, podemos tirar uma propriedade geral e bastante peculiar a respeito da fonte. Combinando as equações (2.51) e (2.52), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \rho + p &= \frac{1}{r^2} \left( b' - \frac{b}{r} \right) + 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\phi'}{r} = -\frac{1}{r} \left[ \left(1 - \frac{b}{r}\right)' - 2\phi' \left(1 - \frac{b}{r}\right) \right] = \\ &= -\frac{e^{2\phi}}{r} \left[ e^{-2\phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \right]'. \end{aligned} \quad (2.57)$$

No entanto, na garganta, temos a expressão entre colchetes

$$e^{-2\phi(r_0)} \underbrace{\left[ 1 - \frac{b(r_0)}{r_0} \right]}_{=0} = 0, \quad (2.58)$$

<sup>4</sup>Apesar de termos, nesse caso,  $b(r) = 2GM/c^2$  (constante), o que nos permite ter  $r_0 = 2GM/c^2$ , com  $b'(r_0) = 0 \leq 1$ , temos um horizonte para este raio.

enquanto, para qualquer  $r$  no intervalo  $(r_0, r_*)$  citado anteriormente, temos um valor positivo. Ou seja, existe um raio  $\tilde{r}_*$  tal que, para qualquer raio no intervalo  $(r_0, \tilde{r}_*)$ , esta expressão cresce. Isto é,

$$\exists \tilde{r}_* \mid \forall r \in (r_0, \tilde{r}_*), \left[ e^{-2\phi} \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \right]' > 0. \quad (2.59)$$

De onde podemos concluir que, nesse intervalo,

$$\rho + p < 0. \quad (2.60)$$

E na garganta, em particular, podemos ter, ainda, a igualdade. Pois, como devemos ter

$$b(r_0) = r_0 \quad \text{e} \quad b'_0 = b'(r_0) \leq 1, \quad (2.61)$$

temos, a partir de (2.51),

$$\rho_0 = \rho(r_0) \leq \frac{1}{r_0^2}. \quad (2.62)$$

Já a (2.52) pode ser reescrita como

$$\frac{b}{r} (2\phi' r + 1) = 2\phi' r - p r^2 \quad \therefore \quad b(r_0) = r_0 \Rightarrow p_0 = p(r_0) = -\frac{1}{r_0^2}. \quad (2.63)$$

E temos, com isto, a soma:

$$\rho_0 + p_0 \leq 0. \quad (2.64)$$

Na época dos primeiros estudos sobre o assunto estes resultados (equações (2.60) e (2.64)) eram bastante problemáticos, pois violam as chamadas *condições de energia*. Condições essas que eram tidas como verdadeiras nos anos de 1960 e início de 70 para qualquer sistema físico possível, pois eram perfeitamente válidas nos diversos casos conhecidos até então. Elas eram a base para a demonstração de uma série de teoremas, como, por exemplo, os de singularidade e da positividade da massa; que já não seriam mais garantidos com esta violação.

Na referência [2] é mostrado que a equação (2.60) permite que uma classe de observadores possam detectar uma densidade de energia negativa para a fonte que a satisfaz. Inclusive, também é observado que não só os buracos de minhoca esfericamente simétricos e estáticos, como os tratados aqui, possuem esta propriedade, mas qualquer um transponível que não seja nem esférico-simétrico e nem estático. Isto se dá, basicamente, pelo fato dos raios luminosos, que percorrem as chamadas *geodésicas nulas*, possuírem seções transversas que diminuem e aumentam ao passarem pela garganta. O que seria possível somente graças a uma repulsão gravitacional, obtida apenas com fontes que apresentam densidade negativa de energia.

Devido ao caráter altamente peculiar que isto era para a época, as fontes que satisfaziam esta propriedade foram taxadas de *exóticas*. Entretanto, como será visto no próximo capítulo, estas condições de energia já estão, há algum tempo, perdendo sua credibilidade em certos casos. Algumas já foram completamente abandonadas e o restante já está sendo confrontada com as diversas teorias de campos escalares e modelos cosmológicos. Com isso, temos preservada a possibilidade teórica de se obter um buraco de minhoca.

# Capítulo 3

## As condições de energia

Dada a relevância das condições de energia ao se considerar a possibilidade de existência dos buracos de minhoca, será feita, neste capítulo, uma discussão sucinta sobre o papel delas e como sua validade têm sido amplamente descartada ultimamente. Veremos a importância de algumas na demonstração dos teoremas de singularidade e como se dá a necessidade de suas violações em certos modelos cosmológicos.

### 3.1 As condições e suas utilidades

Considerando que o tensor momento-energia que entra na equação de Einstein não é geral, mas depende do tipo particular de matéria e interações que entram no modelo, aparentemente, fica a tarefa de se calcular cada caso independentemente, para cada lagrangiana concebível; o que resultaria numa imensa lista de casos particulares. Ou então, pode-se considerar certas características gerais que qualquer tensor momento-energia admissível deva apresentar e, com isso, tentar demonstrar teoremas gerais sobre o comportamento dos campos gravitacionais. Por exemplo, uma característica que a maioria da matéria com a qual nos deparamos parece compartilhar é que as densidades de energia sempre parecem ser positivas [7].

As condições de energia são diversas maneiras de tornar mais precisa esta noção de densidade de energia localmente positiva e dizem que várias combinações lineares das componentes do tensor momento-energia devem ser não-negativas.

Considerando-se algumas formas dessas condições, foi possível mostrar teoremas como os de singularidade, garantindo (sob certas circunstâncias) o colapso gravitacional e/ou a existência da singularidade do *big-bang*; o da energia positiva, garantindo que a massa de um sistema gravitacional complexo, vista do infinito, é sempre positiva; a censura topológica, que garante a não existência de buracos de minhoca transponíveis etc. Em contrapartida, a violação de algumas ou todas elas permitiria situações físicas bastante exóticas.

No entanto, com o passar do tempo, as opiniões têm mudado sobre o quão fundamental são algumas condições de energia. Como exemplo de uma que foi completamente abandonada, temos a TEC (*Trace Energy Condition*), que diz que o traço do tensor momento-energia deve ser sempre negativo (ou positivo, dependendo das convenções sobre a métrica). Ela foi popular durante a década de 1960 e, uma vez que se percebeu que equações de estado como as apropriadas para estrelas de nêutrons a violam, ela foi descartada.

Há também um consenso geral de que a SEC (*Strong Energy Condition*), que diz que  $\rho + 3p \geq 0$ , não vale mais. Pois: (1) as teorias mais simples de campo escalar, tanto as com acoplamento mínimo quanto não-mínimo, violam esta condição<sup>1</sup>; (2) se, de fato, nosso universo passou por um período de inflação, então a SEC tem que ter sido violada nele<sup>2</sup>; (3) se as observações realmente indicam que o universo está em expansão acelerada, então esta condição já está sendo violada atualmente; (4) a discrepância entre as idades das estrelas mais antigas e a medida atual do parâmetro de Hubble torna bastante difícil ignorar que a SEC foi violada em algum momento da história cosmológica recente [7]; (5) se, ao invés de um universo com singularidade inicial como a do *big-bang*, tivermos um universo com *bouncing*, então também temos a mesma violação no período em que o universo deixa de se comprimir e passa a se expandir, como será visto mais adiante. Ou seja, não podemos encarar a SEC como algo de importância fundamental para a física.

Outras três condições de energia, a saber, NEC, WEC e DEC (*Null, Weak e Dominant*, respectivamente) também estão prestes a serem descartadas. Recentemente tem se tornado bastante claro que existem efeitos quânticos que violam todas as condições de energia mencionadas, até a mais fraca delas: NEC.

Entretanto, ignorar a mecânica quântica, esperando que a longínqua teoria quântica da gravitação porvir possa lidar com os problemas quânticos, não é uma alternativa satisfatória. Pois violações na NEC já se manifestam na gravitação semi-clássica (onde os campos materiais são quantizados e a gravidade permanece clássica) e em primeira ordem em  $\hbar$ . No entanto, para evitar que efeitos quânticos possam levar a densidades de energia locais negativas seria necessário uma mudança radical na física moderna. Em particular, teríamos que abandonar quase toda a teoria quântica de campos.

Mais ainda, considerar que, enquanto as violações quânticas das condições de energia sejam corriqueiras elas também são pequenas, e que a detecção de energia negativa em um dado lugar e instante é compensada em muito por energias positivas em qualquer outro lugar do espaço-tempo também não é a melhor alternativa para se preservar as condições de energia.

Um problema fundamental que surge é a constatação que existem sérias violações clás-

<sup>1</sup>Existem teorias quânticas de campos fermiônicos cujas interações a violam.

<sup>2</sup>E a necessidade desta violação é a razão pela qual os modelos de inflação são tipicamente descritos em termos de campos de *inflatons* escalares.

sicas destas condições. Tem se tornado clara a existência de teorias de campo de sistemas clássicos bastante razoáveis, compatíveis com todos os dados experimentais conhecidos e que são, de certo modo, bastante naturais à luz da teoria quântica de campos, que violam todas as condições. Essas violações clássicas são devido ao comportamento de campos escalares quando acoplados com a gravidade.

## 3.2 Campos escalares na física

Os campos escalares possuem uma importância um tanto quanto dúbia na física teórica moderna. Ao mesmo tempo que fornecem excelentes *toy models* e são, de um ponto de vista teórico, quase inevitáveis em qualquer modelo empírico razoável, sua evidência observacional/experimental direta é fraca.

Alguns deles em que, realmente, temos uma medida direta são os campos de mésons escalares. No entanto, nenhuma dessas partículas é fundamental, pois são todas estados ligados de quark-antiquark. Isto impõe certas limitações ao uso de uma descrição em termos de campos escalares, apesar deles, de fato, existirem.

Outro campo escalar que está bem próximo de uma verificação experimental é a partícula de Higgs, responsável pela quebra da simetria eletro-frac. Porém, enquanto no modelo padrão o Higgs é uma partícula fundamental e quase todos estão convencidos de que algum campo escalar tipo Higgs existe, há a possibilidade de que ele, assim como os mésons escalares, seja um estado ligado de partículas elementares de um nível inferior. Ou seja, apesar do tremendo sucesso do modelo padrão da física de partículas ainda não temos uma prova direta da existência de um campo escalar fundamental de Higgs.

Há também um candidato de grande interesse fenomenológico, que é o áxion. Seria extremamente difícil conceber uma física de interações fortes compatíveis com a observada falta de violação de  $CP^3$ , sem algo como um áxion para resolver o chamado *problema de CP forte*. Muito embora ele ainda não tenha sido experimentalmente observado diretamente.

Outro campo escalar de interesse fenomenológico é o inflaton. Ele é usado como mecanismo responsável pela rápida expansão anômala do universo durante o período inflacionário. Entretanto, apesar das observações indicarem de forma bastante inequívoca que algo como a inflação cosmológica deste período, realmente, ocorreu e apesar de alguns tipos de campos escalares serem os modos mais naturais de se obter inflação, é fato que a verificação observacional direta da existência de campos de inflaton (e suas variantes) ainda está longe de ser alcançada.

Mais um candidato de interesse para a relatividade geral é o chamado *escalar de Brans-Dicke*. Este talvez seja a extensão mais simples da gravitação de Einstein que não foi descartada por experimentos. Ele é bastante limitado pela observação e experimento, e não há dados experimentais que garantem sua existência, porém ele não é descartado. Ele

---

<sup>3</sup>Carga e paridade.

é visto basicamente como uma forma de testar idéias alternativas e um modo interessante de parametrizar possíveis desvios da gravitação de Einstein. Embora tanto na experiência quanto na observação a teoria de Einstein ainda sobressaia.

Finalmente, as teorias de campo inspiradas nas membranas (limites de baixas energias do que se costumava chamar teoria de cordas) estão repletas de campos escalares. Dessa forma, se a teoria de membranas realmente for fundamental, então a existência de campos escalares é automática.

Enfim, enquanto temos excelentes razões teóricas para esperar que teorias de campos escalares sejam uma parte da realidade, a verificação experimental/observacional direta ainda é uma questão em aberto. Contudo, pode-se dizer que existem bons motivos para se levar os campos escalares à sério, e bons motivos para considerar que as propriedades gravitacionais deles são de interesse cosmológico, astrofísico e que fornecem testes fundamentais à relatividade geral.

### 3.3 Conseqüências das teorias de campos escalares

O grande problema dessas teorias é que, em geral, uma vez que se acopla os campos com a gravidade eles violam todas as condições de energia mesmo no nível clássico. Isto se dá devido ao termo de acoplamento, que é da forma  $\xi\phi^2R$ , na lagrangiana do sistema, que acopla o campo escalar  $\phi$  com o escalar de curvatura  $R$ . Sendo renormalizável, ele deve ser incluído na lagrangiana de espaço curvo do campo escalar. E mesmo se este termo não estivesse presente ele surgiria através de efeitos quânticos.

Quando temos  $\xi = 0$  (acoplamento mínimo) a SEC é violada classicamente, enquanto a DEC, WEC e NEC são satisfeitas. Porém, este caso não é geral e é instável frente à correções quânticas. Quando  $\xi \neq 0$ , todas as condições de energia são violadas. Mais ainda, sob certas circunstâncias até mesmo a ANEC<sup>4</sup>, a condição de energia mais fraca atualmente, é violada. Fato, este, que invalida todos aqueles teoremas de singularidade, positividade da massa, censura etc. Ou seja, admitindo-se campos escalares no modelo tratado podemos ser levados a situações físicas bastante estranhas. Em particular, ter satisfeita a condição necessária para se obter um buraco de minhoca, equação (2.60), que viola a NEC e ANEC.

### 3.4 Singularidades

Como foi dito, as condições de energia são usadas para se demonstrar uma variedade de teoremas. Entre eles, estão os que garantem a singularidade do *big-bang* e o colapso gravitacional, resultando na singularidade em  $r = 0$  da solução de Schwarzschild. Sendo

---

<sup>4</sup>Que é a NEC intergrada numa curva tipo nula.

suas demonstrações um tanto trabalhosas [1], será feito, aqui, um esboço de como elas chegam nessas conclusões.

Primeiramente, entende-se por singularidade uma situação na qual se tem uma geodésica do tipo tempo ou nula que não pode ser extendida numa dada direção. E seja *congruência* uma família de curvas numa dada região da variedade tal que, em cada um de seus pontos, passe apenas uma delas.

Consideremos, então, uma congruência de geodésicas tipo tempo. Sem perda de generalidade, podemos parametrizá-las pelo tempo próprio,  $\tau$ , e de modo que o campo vetorial das tangentes,  $\xi^a$ , tenha módulo  $\xi^a \xi_a = -\xi < 0$  constante. Seja, agora, o tensor  $B_{ab}$  definido por

$$B_{ab} = \nabla_b \xi_a. \quad (3.1)$$

Temos que ele é ortogonal à  $\xi^a$ , pois

$$B_{ab} \xi^a = \xi^a \nabla_b \xi_a = \frac{1}{2} \nabla (\xi^a \xi_a) = 0, \quad (3.2)$$

$$B_{ab} \xi^b = \xi^b \nabla_b \xi_a = 0, \quad (3.3)$$

por ser tangente à geodésica.

Sua interpretação física pode ser obtida considerando uma sub-família de geodésicas da congruência,  $\gamma_s(\tau)$ , como foi feito na seção 2.4, e sendo  $\eta^a$  um deslocamento espacial infinitesimal de  $\gamma_0$  para uma geodésica vizinha, ambas na mesma sub-família. Temos, então, como foi visto,

$$\xi^b \nabla_b \eta^a = \eta^b \nabla_b \xi^a = B^a_b \eta^b. \quad (3.4)$$

E, desta forma,  $B^a_b$  mede o quanto  $\eta^a$  deixa de ser paralelamente transportado. Isto é, um observador em  $\gamma_0$  veria a geodésica vizinha ser esticada ou girada de acordo com o operador linear  $B^a_b$ .

Definimos, agora, o tensor de projeção  $h_{ab}$  dado por

$$h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b, \quad (3.5)$$

de modo que  $h^a_b$  projeta tensores no subespaço perpendicular à  $\xi^a$ . Assim como também definimos

$$\theta = B^{ab} h_{ab}, \quad (3.6)$$

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3} \theta h_{ab}, \quad (3.7)$$

$$\omega_{ab} = B_{[ab]}, \quad (3.8)$$

onde  $B_{(ab)}$  e  $B_{[ab]}$  são as partes simétrica e anti-simétrica de  $B_{ab}$ , respectivamente, tal que

$B_{ab} = B_{(ab)} + B_{[ab]}$ , dados por

$$B_{(ab)} = \frac{1}{2}(B_{ab} + B_{ba}), \quad (3.9)$$

$$B_{[ab]} = \frac{1}{2}(B_{ab} - B_{ba}). \quad (3.10)$$

E vemos, a partir das (3.2) e (3.3), que também temos  $\sigma_{ab}$  e  $\omega_{ab}$  ortogonais à  $\xi^b$ , *i.e.*,  $\sigma_{ab}\xi^b = \omega_{ab}\xi^b = 0$ .

Podemos, agora, decompor  $B_{ab}$  como

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \quad (3.11)$$

e a (3.4) fica

$$B^a_b \eta^b = \frac{1}{3}\theta \eta^a + \sigma^a_b \eta^b + \omega^a_b \eta^b. \quad (3.12)$$

De onde podemos concluir que, ao longo de qualquer geodésica da congruência,  $\theta$  mede a expansão isotrópica das geodésicas vizinhas,  $\omega_{ab}$ , sendo a parte anti-simétrica do operador linear  $B^a_b$ , mede a rotação delas e  $\sigma_{ab}$  mede o cisalhamento.

Para obtermos a taxa de variação desses objetos ao longo das geodésicas, façamos

$$\begin{aligned} \xi^c \nabla_c B_{ab} &= \xi^c \nabla_c \nabla_b \xi_a = \xi^c \nabla_b \nabla_c \xi_a + R^d_{abc} \xi^c \xi_d \\ &= \nabla_b (\xi^c \nabla_c \xi_a) - (\nabla_b \xi^c) (\nabla_c \xi_a) + R^d_{abc} \xi^c \xi_d \\ &= -B^c_b B_{ac} + R^d_{abc} \xi^c \xi_d, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde foram usadas as (2.32) e (3.3). Tomando, agora, o traço, obtemos

$$\xi^a \nabla_a \theta = \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{ab}\xi^a \xi^b, \quad (3.14)$$

conhecida como equação de Raychaudhuri<sup>5</sup>, fundamental para a demonstração dos teoremas de singularidade. Vejamos, agora, a positividade do último termo desta equação.

Se  $T$  o traço do tensor momento-energia e  $k = 8\pi G/c^4$ , temos, a partir da equação de Einstein, que

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = kT_{ab} \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow R = -kT \quad \therefore \quad R_{ab} = k \left( T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T \right), \quad (3.16)$$

o que nos dá

$$R_{ab}\xi^a \xi^b = k \left( T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T \right) \xi^a \xi^b = k \left( T_{ab}\xi^a \xi^b + \frac{1}{2}T\xi \right). \quad (3.17)$$

<sup>5</sup>Também obtida por Landau independentemente.

O primeiro termo entre parênteses,  $T_{ab}\xi^a\xi^b$ , dá a densidade de energia medida por um observador com quadri-velocidade  $\xi^a$ . Como foi dito no início do capítulo, acreditava-se que para toda matéria fisicamente razoável ela não fosse negativa, isto é,

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0 \quad (3.18)$$

para todo vetor  $\xi^a$  tipo tempo, resultando na WEC, cuja formulação matemática é dada, precisamente, por (3.18). Outra condição que acreditava-se ser respeitada era a SEC, que nada mais é do que a afirmação de que a (3.17) não é negativa, ou seja,

$$T_{ab}\xi^a\xi^b + \frac{1}{2}T\xi \geq 0. \quad (3.19)$$

Num caso geral, o tensor momento-energia não pode ser diagonalizado. No entanto, com exceção daquele que representa um fluido nulo, todos os outros que se acredita representar algo fisicamente concebível podem ser. Escrevendo-os, então, na forma diagonal, temos

$$T_{ab} = \rho \mathbf{e}_a^t \mathbf{e}_b^t + p_1 \mathbf{e}_a^x \mathbf{e}_b^x + p_2 \mathbf{e}_a^y \mathbf{e}_b^y + p_3 \mathbf{e}_a^z \mathbf{e}_b^z, \quad (3.20)$$

onde  $\{\mathbf{e}^t, \mathbf{e}^x, \mathbf{e}^y, \mathbf{e}^z\}$  é uma base ortonormal, com  $\mathbf{e}^t$  do tipo tempo. O valor de  $\rho$  pode ser interpretado como a energia de repouso do sistema, enquanto  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são as pressões principais. Com  $T_{ab}$  escrito desta forma, a WEC fica

$$\begin{aligned} T_{ab}\xi^a\xi^b &= \rho (\mathbf{e}_a^t \xi^a)^2 + p_1 (\mathbf{e}_a^x \xi^a)^2 + p_2 (\mathbf{e}_a^y \xi^a)^2 + p_3 (\mathbf{e}_a^z \xi^a)^2 \\ &= \rho (\xi^t)^2 + p_1 (\xi^x)^2 + p_2 (\xi^y)^2 + p_3 (\xi^z)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Enquanto

$$\xi_t \xi^t + \xi_x \xi^x + \xi_y \xi^y + \xi_z \xi^z = -\xi \quad (3.22)$$

que, sendo a métrica na base ortonormal dada por  $\eta_{ab}$ , resulta em

$$\begin{aligned} -(\xi^t)^2 + (\xi^x)^2 + (\xi^y)^2 + (\xi^z)^2 &= -\xi \\ \therefore (\xi^t)^2 &= \xi + (\xi^x)^2 + (\xi^y)^2 + (\xi^z)^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Substituindo na (3.21) nos dá

$$\rho \xi + (\rho + p_1) (\xi^x)^2 + (\rho + p_2) (\xi^y)^2 + (\rho + p_3) (\xi^z)^2 \geq 0 \quad \forall (\xi^x, \xi^y, \xi^z) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.24)$$

No caso particular em que  $(\xi^x, \xi^y, \xi^z) = (0, 0, 0)$  ela impõe que  $\rho \geq 0$  e, caso tenhamos algum  $(\rho + p_i) < 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), podemos ter seu coeficiente suficientemente grande para que a (3.24) seja violada, fazendo com que devamos ter  $(\rho + p_i) \geq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Isto é,

num caso em que  $(\xi^y, \xi^z) = (0, 0)$ , ficamos com

$$\rho\xi + (\rho + p_1)(\xi^x)^2 \geq 0 \Rightarrow (\rho + p_1) \geq -\frac{\rho\xi}{(\xi^x)^2} \quad (3.25)$$

e, escolhendo  $\xi^x$  arbitrariamente grande, concluimos que, de fato,  $(\rho + p_1) \geq 0$ , assim como nos outros casos, de modo análogo. Ou seja, a WEC pode ser escrita como

$$\rho \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho + p_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.26)$$

Já para o cálculo da SEC, temos

$$T = -\rho + p_1 + p_2 + p_3 \quad (3.27)$$

e a (3.19) dá

$$\frac{\xi}{2} \left( \rho + \sum_{i=1}^3 p_i \right) + (\rho + p_1)(\xi^x)^2 + (\rho + p_2)(\xi^y)^2 + (\rho + p_3)(\xi^z)^2 \geq 0 \quad \forall (\xi^x, \xi^y, \xi^z) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.28)$$

Que, por sua vez, equivale à

$$\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho + p_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.29)$$

Voltando à equação de Raychaudhuri, (3.14), concluimos que seu último termo deverá ser menor ou igual à zero, considerando-se a validade das condições de energia. Mais ainda, se a congruência for hiper-superfície ortogonal, teremos  $\omega_{ab} = 0$ , pelo teorema de Frobenius [1], enquanto  $-\sigma_{ab}\sigma^{ab}$  é não-positivo, pelo fato de  $\sigma_{ab}$  ser “espacial”, *i.e.*, ortogonal à  $\xi^a$ . Com isto, teremos

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0 \quad \therefore \quad -\frac{d}{d\tau}(\theta^{-1}) + \frac{1}{3} \leq 0 \quad (3.30)$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{d}{d\tau}(\theta^{-1}) \geq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta^{-1}(\tau) \geq \theta_0^{-1} + \frac{1}{3}\tau. \quad (3.31)$$

Caso tenhamos  $\theta_0 < 0$ , isto é, a congruência converge inicialmente, esta equação mostra que  $\theta^{-1}$  passará pelo zero num tempo próprio  $\tau \leq 3/|\theta_0|$ , quando teremos, então,  $\theta \rightarrow -\infty$ . O que significa que as geodésicas tipo tempo que convergem, num dado instante, irão se encontrar num tempo finito posterior. E, considerando-se a simetria das equações quanto a reversão temporal e dada a constatação por Hubble da expansão do universo, podemos concluir que, regredindo no tempo, houve um dado momento em que

ele se encontrava totalmente concentrado no ponto singular da congruência.

Muito embora não tenhamos tratado do caso de geodésicas nulas, em [1] é obtido um resultado análogo para elas. E, apesar disto se tratar apenas de uma singularidade na congruência, a mesma referência mostra que, para certos espaço-tempos, a conclusão acima implica, de fato, na existência de singularidades espaço-temporais.

Entretanto, um detalhe crucial para se chegar na (3.30) foi a consideração da SEC. O fato de termos uma hiper-superfície ortogonal, dando  $\omega_{ab} = 0$ , pode ser garantido quando fazemos certas considerações sobre a parte espacial do universo, sendo estas fortemente confirmadas por observações. Ou seja, podemos dizer que qualquer violação destas desigualdades implica na violação da SEC. Algo que seria muito pouco plausível, pois estes resultados acabam por assegurar o caráter atrativo da interação gravitacional. Daí a forte crença nesta condição.

Contudo, a recente descoberta de que o universo está em expansão acelerada, isto é, possui uma taxa de expansão,  $\theta$ , cada vez maior, viola a (3.30). Pois esta nos dá

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3}\theta^2 < 0,$$

enquanto as observações indicam que  $d\theta/d\tau > 0$ . Desta forma, por mais incrível que possa parecer, temos a violação da SEC, fazendo com que os resultados dos teoremas de singularidade percam sua generalidade. Inclusive, não há mais a garantia de que o universo tenha surgido a partir de uma singularidade inicial.

### 3.5 Universo com *bouncing*

Universos com *bouncing* são uma alternativa ao modelo cosmológico do *big-bang*, em que o espaço-tempo surge a partir de uma singularidade inicial, onde o fator de escala vale zero.

Uma singularidade deste tipo é bastante problemática do ponto de vista teórico, uma vez que as divergências inerentes à ela impossibilitam qualquer evolução determinística a partir desse instante inicial. Isto é, um ponto é demasiado vago para se concluir a evolução cosmológica como a que se deu. Com isso, a alternativa de um universo eterno, *i.e.*, livre de singularidade inicial, torna-se mais atraente. Nele, o fator de escala cosmológico nunca se anula, podendo apenas atingir um valor mínimo positivo durante a evolução do universo.

Pelo que foi visto na seção anterior, esta característica requer, necessariamente, que a SEC seja violada; o que não significa que a WEC também seja. Porém, pode-se mostrar, ainda, que esta condição também é violada para casos bastante gerais. Apenas no caso em que o universo possui geometria esférica é que ainda podemos ter preservada a WEC. Para deixar mais claro como se dão essas violações, vejamos como o universo é descrito a

partir da relatividade geral, seguindo o tratamento dado na referência [1].

Primeiramente, devemos reconhecer que, em cosmologia, é bastante difícil fazer teorias baseando-se apenas em dados observacionais. Isto porque temos contato apenas com uma pequena porção do espaço-tempo. E mesmo levando em conta a contribuição de telescópios, que nos permitem observar objetos muito distantes, o conhecimento adquirido se refere apenas à uma parte do nosso cone de luz passado. Com isso, boa parte das características dos modelos com que se trabalha em cosmologia vêm de preconceitos filosóficos. As observações podem confirmá-los, porém, não se pode esperar que sejam suficientes para demonstrar que estejam corretos.

No entanto, o princípio cosmológico, que diz que nosso universo é homogêneo e isotrópico, além de ter propiciado uma considerável contribuição acerca de sua natureza, tem recebido fortes confirmações de observações. A principal delas é a descoberta da radiação cósmica de fundo que o preenche, que foi verificada como sendo isotrópica com uma boa precisão. Acredita-se que ela tenha uma origem cosmológica e seria bastante difícil explicar sua existência e isotropia se o universo não fosse homogêneo e isotrópico em grandes escalas de distância.

Na mesma referência [1] é feita a formulação matemática do princípio cosmológico e conclui-se que somente os chamados *espaços de curvatura constante* o satisfazem; que são os esféricos (*fechados*), planos e hiperbólicos (ambos *abertos*). Afinal, se estamos tratando de um universo homogêneo, qualquer curvatura que exista deverá ser a mesma em todos os pontos. E as métricas associadas a estas geometrias são, respectivamente:

$$ds^2 = \begin{cases} d\tau^2 - a^2(\tau) [d\psi^2 + \text{sen}^2\psi (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)], \\ d\tau^2 - a^2(\tau) [d\psi^2 + \psi^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)], \\ d\tau^2 - a^2(\tau) [d\psi^2 + \text{senh}^2\psi (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)], \end{cases} \quad (3.32)$$

sendo  $a(\tau)$  o fator de escala. Estas equações representam o modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker e resumem a hipótese de um universo homogêneo e isotrópico à três possibilidades para a métrica mais uma função positiva arbitrária  $a(\tau)$ . Sendo, esta, determinada pelas equações de Einstein.

Efetuando-se, então, o cálculo do tensor de Einstein a partir das métricas acima, numa base que as tornem  $\eta_{ab}$ , como foi feito no capítulo anterior, obtém-se a seguinte forma geral para suas componentes:

$$G_{\tau\tau} = 3 \frac{(\dot{a}^2 + K)}{a^2}, \quad (3.33)$$

$$G_{rr} = G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = -\frac{\dot{a}^2 + 2a\ddot{a} + K}{a^2}, \quad (3.34)$$

onde  $K = 0, 1$  ou  $-1$  dependendo se a geometria espacial for plana, esférica ou hiperbólica, respectivamente, e os pontos referem-se à derivadas em relação a  $\tau$ . Vemos que o tensor

momento-energia nessa base deverá ser diagonal e ter suas partes espaciais todas iguais. De fato, a forma mais geral de um tensor momento-energia compatível com o princípio cosmológico é dada por

$$T_{ab} = \tilde{\rho}u_a u_b - \tilde{p}(g_{ab} - u_a u_b), \quad (3.35)$$

um *fluido perfeito*, onde  $\mathbf{u}$  é sua quadri-velocidade que adotaremos como sendo a do referencial co-móvel:  $u_a = c\delta_a^0$ .

As equações de Einstein, finalmente, resultam em

$$3\frac{(\dot{a}^2 + K)}{a^2} = \rho, \quad (3.36)$$

$$-\frac{\dot{a}^2 + K}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} = p. \quad (3.37)$$

E, substituindo a primeira delas na segunda, ficamos com a seguinte expressão comum à todas as geometrias:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p). \quad (3.38)$$

Desta forma, é imediato concluir que qualquer aceleração positiva do fator de escala requer, necessariamente, que  $\rho + 3p < 0$ . E, sendo tal situação a que se tem quando  $a(\tau)$  passa por um mínimo, concluimos que modelos de universo com *bouncing* implicam na violação da SEC.

Para descobrirmos, agora, como fica a WEC neste período, somemos as (3.36) e (3.37) para obtermos

$$\rho + p = \frac{2}{a^2}(K + \dot{a}^2 - \ddot{a}a) = \frac{2}{a^2}B, \quad (3.39)$$

fazendo com que a violação desta condição de energia corresponda à  $B < 0$ . No entanto, esta expressão calculada no mínimo de  $a(\tau)$  não nos diz muita coisa, pois  $\ddot{a} \geq 0$  nele e teríamos  $B = K - \ddot{a}a$  negativo, para qualquer  $a(\tau)$  que possui um mínimo, somente no caso em que  $K = -1$  (universo hiperbólico). Poderíamos, então, considerar a vizinhança deste ponto, onde  $\dot{a} \rightarrow 0$  e  $\ddot{a} > 0$ , e concluir que, de fato, a WEC é violada também para o caso em que  $K = 0$ . Porém, para deixar mais explícito como que esta condição pode ser preservada somente no caso de um universo esférico, será feito um tratamento análogo ao que se encontra em [8].

Nesta referência, o fator de escala perto do mínimo,  $a_0$ , é escrito como

$$a(\tau) = a_0 + b\tau^{2n} + d\tau^{2n+1} + e\tau^{2n+2}, \quad (3.40)$$

em que o inteiro  $n \geq 1$ . Assim, os termos de ordem mais baixa de  $B(\tau)$  dão

$$B(\tau) = K - 2n(2n-1)a_0b\tau^{2n-2} - 2n(2n+1)a_0d\tau^{2n-1} - 2(n+1)(2n+1)a_0e\tau^{2n} + \dots \quad (3.41)$$

e vemos que, para  $\tau \rightarrow 0$ ,  $B(\tau) \sim K - 2n(2n - 1)a_0b\tau^{2n-2}$ . O que mostra que  $B$  poderá ser maior ou igual à zero somente para o caso em que  $K = 1$ .

Vemos, então, que os modelos de universo com *bouncing* não apenas violam, necessariamente, a SEC, como também implicam na violação de WEC quando estamos tratando de um universo aberto. E, de fato, serão tratados, a seguir, três casos de modelos cosmológicos deste tipo em que ambas as condições são violadas, permitindo a obtenção de um mínimo para a coordenada radial.

# Capítulo 4

## Alguns casos particulares

Baseando-se em três casos particulares de fontes provenientes de modelos de universo eterno, será feito um estudo sobre a possibilidade de se obter soluções de buracos de minhoca. No primeiro deles, mostra-se que, impondo um mínimo para a coordenada radial, a solução deixa de ser satisfatória. Enquanto nos outros dois, soluções muito bem comportadas são obtidas.

### 4.1 Eletrodinâmica não-linear

Em [3] é tratado um *toy model* em que se obtém um modelo cosmológico não singular como extensão da solução de FRW. Os autores levam em conta uma correção à eletrodinâmica de Maxwell que se mostra relevante quando os campos atingem grandes valores, como ocorre no universo primordial.

A lagrangiana considerada no modelo é dada por

$$L = -\frac{1}{4}F + mF^2 + nG^2, \quad (4.1)$$

$$F := F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$
$$G := \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}.$$

$m$  e  $n$  são constantes arbitrárias e  $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$  é um tensor totalmente anti-simétrico. O tensor momento-energia resultante da variação de  $L$  com respeito à métrica,  $g_{\mu\nu}$ , é dado por

$$T_{\mu\nu} = -4 \left( \frac{\partial L}{\partial F} \right) F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + \left( G \frac{\partial L}{\partial G} - L \right) g_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

No entanto, sendo a parte espacial da geometria de FRW isotrópica, os campos eletromagnéticos somente seriam capazes de gerar algo do tipo se eles fossem calculados na média [9]. O modo usual de se fazer isso é associar aos campos elétrico,  $\mathbf{E}$ , e magnético,

**H**, os seguintes valores médios:

$$\overline{E_i} = 0, \quad \overline{H_i} = 0, \quad \overline{E_i H_j} = 0, \quad (4.3)$$

$$\overline{E_i E_j} = -\frac{1}{3} E^2 g_{ij}, \quad (4.4)$$

$$\overline{H_i H_j} = -\frac{1}{3} H^2 g_{ij}. \quad (4.5)$$

Sendo estas médias calculadas de acordo com a definição:

$$\overline{A} \equiv \lim_{V \rightarrow V_0} \frac{1}{V} \int A \sqrt{-g} d^3 x^i; \quad (4.6)$$

para uma quantidade  $A$ , arbitrária, em que  $V = \int \sqrt{-g} d^3 x^i$  e  $V_0$  representa um tri-volume dependente do tempo suficientemente grande.

Na mesma referência, comenta-se que no período inicial do universo a matéria deve ser considerada um plasma e, com isso, somos levados a considerar somente o caso em que a média do quadrado do campo magnético,  $H^2$ , permanece. Isto é, sendo um plasma, na média, nêutro, teremos  $E^2 = 0$  em (4.4).

O tensor momento-energia médio resulta como sendo um fluido perfeito com

$$\rho = k \frac{H^2}{2} (1 - 8mH^2), \quad (4.7)$$

$$p = k \frac{H^2}{6} (1 - 40mH^2). \quad (4.8)$$

Vemos que, para  $m > 0$ , podemos ter a violação das condições de energia. E, de fato, é com  $m$  positivo que se obteve universos não-singulares na referência usada. Vejamos, então, se esta fonte pode gerar um buraco de minhoca, caso  $H$  possua uma dependência radial,  $H = H(r)$ .

Primeiramente, podemos observar que  $p(r) = \tau(r)$ , *i.e.*, temos um caso de pressão isotrópica. Para um fluido desse tipo, as equações (2.54)-(2.56) ficam:

$$b' = \rho r^2; \quad (4.9)$$

$$\phi' = \frac{b + pr^3}{2r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right)}; \quad (4.10)$$

$$p' = -(\rho + p) \phi'. \quad (4.11)$$

Onde podemos substituir  $\phi'$  em (4.11) e ficamos com o par de equações:

$$\begin{aligned} b' &= \rho r^2; \\ p' &= -(\rho + p) \frac{(b + pr^3)}{2r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

No entanto, antes de substituirmos as (4.7) e (4.8), é interessante calcularmos  $p'$  em  $r_0$ ,

primeiro.

Vemos que, substituindo (2.61) e (2.63),  $p'_0 = p'(r_0)$  possui um zero tanto no numerador quanto no denominador. Porém, pode-se obter facilmente o limite finito usando o método de l'Hôpital:

$$\begin{aligned} p' &= -\frac{(\rho + p)}{2r} \cdot \frac{(b + pr^3)}{(r - b)} \Rightarrow p'_0 = -\frac{(\rho_0 + p_0)}{2r_0} \cdot \frac{(b + pr^3)'|_{r_0}}{(r - b)'|_{r_0}} = \\ &= -\frac{(\rho_0 + p_0)}{2r_0} \cdot \frac{(b'_0 + 3p_0r_0^2 + p'_0r_0^3)}{(1 - b'_0)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Levando em conta, ainda, a equação (2.51), ficamos com

$$p'_0 = \frac{(1 - b'_0)}{2r_0^3} \cdot \frac{(b'_0 - 3 + p'_0r_0^3)}{(1 - b'_0)} = \frac{b'_0 - 3}{2r_0^3} + \frac{p'_0}{2} \Rightarrow p'_0 = \frac{b'_0 - 3}{r_0^3}. \quad (4.14)$$

Isto é, uma vez que  $b'_0 \leq 1$ , podemos concluir que  $p'_0 < 0$ . Vejamos, agora, no quê esses valores implicam na fonte.

Para simplificar os cálculos, façamos  $X(r) = kH^2(r)$  e  $\alpha = m/k$ , com  $X_0 = X(r_0)$  e  $X'_0 = X'(r_0)$ , naturalmente. As equações (2.63) e (4.8) nos dão:

$$\frac{X_0}{6} (1 - 40\alpha X_0) = -\frac{1}{r_0^2} \Rightarrow X_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + \gamma}}{80\alpha}, \quad \gamma = \frac{960\alpha}{r_0^2}, \quad (4.15)$$

pois, sendo  $X(r)$  sempre positivo, a outra raiz deve ser descartada. Já a (2.64) implica em

$$\frac{2X_0}{3} (1 - 16\alpha X_0) \leq 0 \Rightarrow X_0 \geq \frac{1}{16\alpha}. \quad (4.16)$$

Partindo, agora, para  $p'$ , obtemos que

$$p' = \frac{X'}{6} (1 - 80\alpha X). \quad (4.17)$$

E, uma vez que  $p'_0 < 0$ , ela nos dá:

$$\frac{X'_0}{6} (1 - 80\alpha X_0) < 0. \quad (4.18)$$

Sendo que, com o valor de  $X_0$  dado por (4.15), vemos que  $1 - 80\alpha X_0 = -\sqrt{1 + \gamma} < 0$ , sendo  $\gamma > 0$ . Dessa forma, concluímos que

$$X'_0 > 0. \quad (4.19)$$

Podemos concluir, agora, que  $X(r)$  tende à  $\infty$ , fazendo com que  $b(r)$ ,  $p(r)$  e  $\rho(r)$  tendam à  $-\infty$ . Para isso, primeiro, façamos a substituição de (4.8) e (4.17) em (4.12),

para ficarmos com

$$X' = \frac{X(16\alpha X - 1)(40\alpha X^2 r - Xr - 6\frac{b}{r^2})}{(1 - \frac{b}{r})(80\alpha X - 1)}. \quad (4.20)$$

Se  $X_0 \geq 1/16\alpha > 0$  e  $X'_0 > 0$ ,  $X(r)$  só irá parar de crescer, isto é, atingirá um máximo, se houver algum  $X(r_m) > X_0$  tal que  $X'(r_m) = 0$ , para  $r_m > r_0$ . Ou seja,  $X_m = X(r_m)$  deverá anular  $X'$ . E considerando que, num espaço-tempo aceitável,  $b(r)/r$  possui sempre um valor finito, pela (4.20), vemos que isso acontecerá somente se uma das seguintes expressões for verdadeira:

$$X_m = 0; \quad (4.21)$$

$$16\alpha X_m - 1 = 0; \quad (4.22)$$

$$40\alpha X_m^2 r_m - X_m r_m - 6\frac{b_m}{r_m^2} = 0. \quad (4.23)$$

Mas podemos ver de imediato que a primeira não é verdadeira, pois  $X_m = 0 \leq X_0$ , enquanto deveria ser maior que  $X_0$ . A segunda também não pode ser, por implicar em

$$X_m = \frac{1}{16\alpha} \leq X_0,$$

apresentando o mesmo problema que a anterior. Da mesma forma que apresenta a raiz positiva de (4.23), dada por

$$X_m = \frac{1 + \sqrt{1 + 960\alpha \frac{b_m}{r_m^3}}}{80\alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 + \gamma \frac{r_0^2 b_m}{r_m^3}}}{80\alpha}.$$

Pois, sendo  $r_m > r_0$  e, conseqüentemente,  $b_m = b(r_m) \leq r_m$ , ficamos com o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} r_0 < r_m \Rightarrow \frac{r_0^2}{r_m^2} < 1, \quad b_m \leq r_m \Rightarrow \frac{b_m}{r_m} \leq 1 \Rightarrow \frac{r_0^2}{r_m^2} \frac{b_m}{r_m} \leq \frac{r_0^2}{r_m^2} < 1 \therefore \\ \therefore \frac{r_0^2 b_m}{r_m^3} < 1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

O que já é suficiente para concluir que também teremos  $X_m \leq X_0$ , uma vez sendo este dado por (4.15). Afinal, teremos

$$\begin{aligned} 1 + \gamma \frac{r_0^2 b_m}{r_m^3} < 1 + \gamma \Leftrightarrow \sqrt{1 + \gamma \frac{r_0^2 b_m}{r_m^3}} < \sqrt{1 + \gamma} \\ \therefore X_m = \frac{1 + \sqrt{1 + \gamma \frac{r_0^2 b_m}{r_m^3}}}{80\alpha} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + \gamma}}{80\alpha} = X_0 \end{aligned}$$

Vemos, então, que  $X'$  somente se anula para valores de  $X \leq X_0$ . Dessa forma, esta função nunca irá parar de crescer. Nem mesmo numa situação hipotética em que  $X'(r_m) = 0$  para  $r_m \rightarrow \infty$ , pois isto implicaria que, depois de apenas crescer, teríamos  $\lim_{r \rightarrow \infty} X(r) \leq X_0$ , o que é um absurdo. Logo, tendo  $X'$  um valor finito positivo para todo raio maior que o da garganta, podemos verificar aquelas divergências citadas.

Estas, por sua vez, acabam sendo bastante desagradáveis do ponto de vista físico, pois implicam num comportamento inconcebível para as regiões assintóticas. Basta ver que não apenas temos uma solução longe de ser assintoticamente plana, uma vez que  $b(r)$  não tende à uma constante, como seu valor vai à  $-\infty$ . E fazendo uma comparação com a solução de Schwarzschild, em que  $b(r) = 2GM/c^2$ , onde  $M$  é a massa do buraco negro, vemos que  $b(r)$  dá uma medida da massa do buraco de minhoca de acordo com a distância, e que, neste caso, resulta que ela será infinitamente negativa! Mais ainda, podemos concluir que  $\phi'(r)$  também tenderá à  $-\infty$ , e igualmente para  $\phi(r)$ , de modo que teremos um horizonte no infinito!

Caso, com isso,  $|b(r)|/r \rightarrow \infty$ , violando a premissa,  $X(r)$  talvez possa tender à uma constante positiva.  $p(r)$  e  $\rho(r)$  tenderiam à constantes negativas e talvez ainda teríamos horizonte no infinito. Em todo caso, permaneceríamos com uma situação física inaceitável.

Ou seja, não podemos considerar uma solução tão patológica como esta satisfatória. Temos, sim, um claro exemplo de que violar a WEC não implica, necessariamente, que um buraco de minhoca possa ser gerado. Esta fonte pode muito bem apresentar um comportamento aceitável, como no caso da referência [3], mas que, impondo as condições de contorno que caracterizam a garganta, fazem com que ela apresente sérios problemas.

Em virtude disso, torna-se completamente desnecessário qualquer cálculo adicional com respeito a este caso, como os da força de maré e o tempo de percurso. Apenas é exibido, para ilustrar, o gráfico da figura 4.1, que representa a curva de imersão,  $z(r)$ , até o ponto em que (2.16) deixa de ser real.

Para sua obtenção, foi feito uso do método numérico descrito no apêndice. No entanto, como é observado, dadas as dificuldades impostas pela natureza do problema, não se deve esperar que o gráfico sirva como nada além de uma mera ilustração qualitativa de como uma solução do problema pode se comportar. O único ponto importante é que todas elas, em algum momento, apresentam o mesmo problema, que é uma relação complexa em (2.16).

Se não fosse este problema, juntamente com os diversos outros decorrentes das divergências, certamente, métodos numéricos mais confiáveis poderiam e deveriam ser empregados. Como não há o interesse em soluções exatas para casos particulares, uma representação qualitativa como esta mostra-se suficiente.

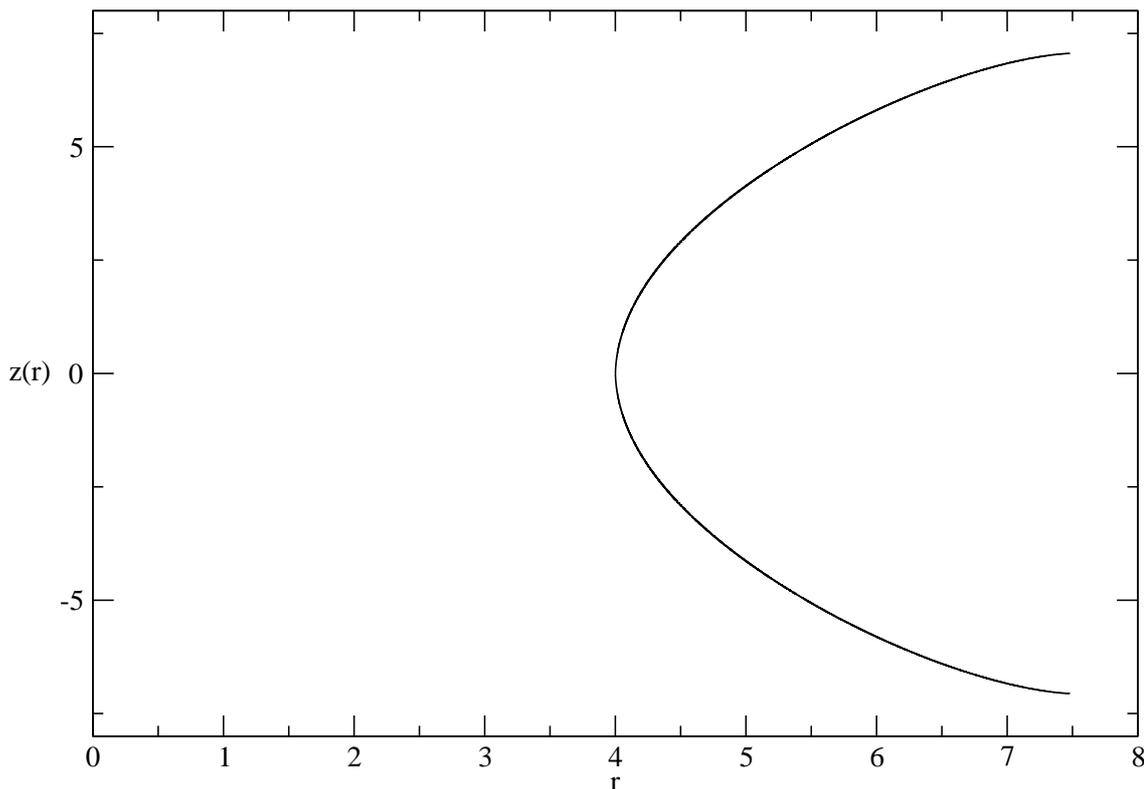


Figura 4.1: Curva de imersão  $z(r) \times r$  para  $r_0 = 4 m$ . A relação entre  $z$  e  $r$  já deixa de ser real para distâncias acima de  $7,5 m$ .

## 4.2 Campo escalar de Weyl como fonte

Outro modelo de universo eterno é apresentado em [4], onde os autores consideram instabilidades num vácuo de Minkowski, no passado remoto, que resultam em sua contração até que um raio mínimo seja atingido. O universo, então, passaria por um *bouncing* e resultaria no cenário atual que temos, sendo, este modelo, livre dos muitos problemas da cosmologia padrão.

Uma vez que o espaço de Minkowski não apresenta qualquer vestígio de um suposto processo que levasse a ele, podemos considerá-lo um bom candidato para a configuração a partir da qual a história cósmica se desenvolve. Contudo, uma vez que ele é estável frente à perturbações, as instabilidades são atribuídas aos sistemas de medidas, caracterizados pelos conjuntos de réguas e relógios ideais dos observadores.

A forma específica das flutuações na estrutura do vácuo usada leva às chamadas *geometrias de Weyl*, em particular aos WISTs (*Weyl-Integrable Spacetimes*). Neles, há uma modificação na relatividade geral em que a derivada covariante da métrica deixa de ser nula e passa a ser

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \omega_{\lambda} g_{\mu\nu}, \quad (4.25)$$

onde  $\omega_{\lambda} = \omega_{\lambda}(x)$  é um vetor de *gauge*. Com isto, os comprimentos dos vetores podem

variar ao serem transportados ou, de modo equivalente, as unidades de medida podem variar localmente. Entretanto, argumentos físicos lavam-nos a considerar somente os WISTs, em que  $\omega_\lambda = \partial_\lambda \omega(x)$ .

Esta mudança provoca alterações na conexão,  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , e nos outros tensores que entram na definição do tensor de Einstein. Vejamos, primeiramente, como fica a conexão em Weyl. Temos

$$\nabla_\nu g_{\lambda\mu} = \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\beta g_{\beta\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\beta g_{\lambda\beta} = \omega_\nu g_{\lambda\mu}, \quad (4.26)$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\beta g_{\nu\beta} = \omega_\mu g_{\nu\lambda}, \quad (4.27)$$

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\beta g_{\beta\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\beta g_{\mu\beta} = \omega_\lambda g_{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

Somando as duas primeiras e subtraindo a terceira, resulta em

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\lambda} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\omega_\mu g_{\lambda\nu} + \omega_\nu g_{\lambda\mu} - \omega_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (4.29)$$

que, contraindo com  $g^{\lambda\alpha}$  nos dá, finalmente,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\omega_\mu \delta_\nu^\alpha + \omega_\nu \delta_\mu^\alpha - g_{\mu\nu} \omega^\alpha) \\ &= \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - \frac{1}{2} (\omega_\mu \delta_\nu^\alpha + \omega_\nu \delta_\mu^\alpha - g_{\mu\nu} \omega^\alpha). \end{aligned} \quad (4.30)$$

No contexto das geometrias de Weyl, qualquer símbolo com circunflexo refere-se ao seu equivalente no caso Riemanniano, em que a (4.25) é zero.

Podemos, agora, calcular o tensor de Ricci a partir da (2.24) e obter

$$R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \hat{\nabla}_\nu \omega_\mu - \frac{1}{2} \hat{\nabla}_\mu \omega_\nu + \frac{1}{2} \omega_\mu \omega_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\alpha \omega^\alpha - \omega_\alpha \omega^\alpha). \quad (4.31)$$

Sendo que, no caso de WIST, temos

$$\omega_\mu = \partial_\mu \omega = \hat{\nabla}_\mu \omega, \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_\nu \hat{\nabla}_\mu \omega &= \hat{\nabla}_\nu (\partial_\mu \omega) = \partial_\nu \partial_\mu \omega - \hat{\Gamma}_{\nu\mu}^\alpha \partial_\alpha \omega \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \omega - \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha \omega = \hat{\nabla}_\mu (\partial_\nu \omega) \\ &= \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \omega, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\hat{\nabla}_\alpha \omega^\alpha = \hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}^\alpha \omega = \hat{\square} \omega, \quad (4.34)$$

e a (4.31) se reduz a

$$R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} + \hat{\nabla}_\nu \omega_\mu + \frac{1}{2} \omega_\mu \omega_\nu + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\hat{\square} \omega - \omega_\alpha \omega^\alpha).$$

O escalar de curvatura, por sua vez, torna-se

$$\begin{aligned} R &= \hat{R} + \hat{\square}\omega + \frac{1}{2}\omega_\alpha\omega^\alpha + 2\left(\hat{\square}\omega - \omega_\alpha\omega^\alpha\right) \\ &= \hat{R} + 3\hat{\square}\omega - \frac{3}{2}\omega_\alpha\omega^\alpha. \end{aligned}$$

Passando, agora, para a dinâmica deste campo de *gauge*, a ação utilizada na referência [4] é dada por

$$S = \int \sqrt{-g} (R + \xi \nabla_\alpha \omega^\alpha),$$

onde  $\xi$  é um parâmetro adimensional. Estando em WIST, temos o par de variáveis independentes  $(g_{\mu\nu}, \omega)$  e, ao fazermos a variação da ação com respeito a eles, ficamos com as equações

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \hat{\nabla}_\nu\omega_\mu + 2(\xi - 1)\omega_\mu\omega_\nu - \left(\xi - \frac{1}{2}\right)\omega_\alpha\omega^\alpha g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.35)$$

$$\hat{\square}\omega = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\omega) = 0, \quad (4.36)$$

sendo  $g$  o determinante da métrica. Substituindo  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  calculados anteriormente resulta em

$$\hat{G}_{\mu\nu} + \lambda^2\omega_\mu\omega_\nu - \frac{\lambda^2}{2}\omega_\alpha\omega^\alpha g_{\mu\nu} = 0, \quad (4.37)$$

$$\hat{\square}\omega = 0, \quad (4.38)$$

em que  $\lambda^2 = (4\xi - 3)/2$ .

Vemos que estas equações para o vácuo de Minkowski perturbado por um campo de *gauge* pode ser interpretado como resultante da atuação de um campo escalar,  $\omega(x)$ , com tensor momento-energia dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{\lambda^2}{k} \left( \frac{1}{2}\omega_\alpha\omega^\alpha g_{\mu\nu} - \omega_\mu\omega_\nu \right), \quad (4.39)$$

no contexto da relatividade geral, onde  $k$  é o mesmo que aparece em (3.15).

Porém, é importante salientar que tal interpretação é lícita tão somente porque estamos no contexto de WISTs, onde os termos que aparecem no tensor acima são provenientes da própria geometria. Como veremos adiante, tal “fonte” apresenta densidade de energia negativa, o que não seria aceitável no contexto usual da gravitação.

Para o nosso caso, o campo  $\omega$  possui dependência apenas radial, isto é,  $\omega = \omega(r)$ , fazendo com que

$$\omega_\alpha = \partial_\alpha\omega(r) = \omega'\delta_\alpha^1, \quad \omega^\alpha = g^{\alpha\beta}\omega_\beta = g^{\alpha 1}\omega' = g^{11}\omega'\delta_1^\alpha,$$

onde a última igualdade se deve ao fato da métrica ser diagonal, e

$$\omega_\alpha \omega^\alpha = (\omega')^2 g^{11} \delta_\alpha^1 \delta_1^\alpha = \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2.$$

Assim, (4.39) fica

$$T_{\mu\nu} = \frac{\lambda^2}{k} \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 g_{\mu\nu} - (\omega')^2 \delta_\mu^1 \delta_\nu^1 \right], \quad (4.40)$$

que é diagonal e com componentes

$$T_{00} = -\frac{\lambda^2}{2k} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 e^{2\phi}, \quad T_{11} = -\frac{\lambda^2}{2k} (\omega')^2, \quad (4.41)$$

$$T_{22} = \frac{\lambda^2}{2k} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 r^2, \quad T_{33} = \frac{\lambda^2}{2k} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 r^2 \text{sen}^2\theta. \quad (4.42)$$

Reescrevendo-as na base ortonormal definida em (2.20), encontramos

$$T_{tt} = T_{rr} = -T_{\theta\theta} = -T_{\varphi\varphi} = -\frac{\lambda^2}{2k} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2, \quad (4.43)$$

ou

$$\rho = p = -\tau = -\frac{\lambda^2}{2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2. \quad (4.44)$$

Substituindo nas (2.54)-(2.56), ficamos com

$$b' = -\frac{\lambda^2}{2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 r^2, \quad (4.45)$$

$$\phi' = \frac{b - \frac{r^3 \lambda^2}{2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2}{2r(r-b)}, \quad (4.46)$$

$$\left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 \right]' = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 \phi' - \frac{2}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2. \quad (4.47)$$

E, reescrevendo esta última como

$$\begin{aligned} \left[ \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 \right]' &= 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 \left( -\phi' - \frac{2}{r} \right) = 2r^2 e^\phi \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 \left( -\frac{\phi'}{r^2 e^\phi} - \frac{2}{r^3 e^\phi} \right) \\ &= 2r^2 e^\phi \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 \left( \frac{1}{r^2 e^\phi} \right)' = -\frac{2r^2 e^\phi (r^2 e^\phi)'}{(r^2 e^\phi)^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 \\ &= -\frac{[(r^2 e^\phi)^2]'}{(r^2 e^\phi)^2} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2, \end{aligned}$$

passamos tudo para o mesmo lado e obtemos

$$(r^2 e^\phi)^2 \left[ \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 \right]' + \left[ (r^2 e^\phi)^2 \right]' \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 = \left[ (r^2 e^\phi)^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 \right]' = 0$$

$$\therefore r^4 e^{2\phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega')^2 = \frac{A^2}{\lambda^2}, \quad (4.48)$$

uma constante, concordando com a (4.36). Com isto, as (4.45) e (4.46) ficam

$$b' = -\frac{A^2}{2r^2 e^{2\phi}}, \quad (4.49)$$

$$\phi' = \frac{1}{2r(r-b)} \left[ b - \frac{A^2}{2re^{2\phi}} \right]. \quad (4.50)$$

Em [10] foi apresentada uma solução analítica para este sistema que gera um buraco de minhoca estático e esfericamente simétrico satisfazendo todas as condições desejadas nos limites assintóticos. Sendo que, para obtê-lo, os autores não consideraram qualquer modificação na relatividade geral. Apenas levaram em conta o tensor momento-energia de um campo escalar com densidade negativa de energia, diferentemente do nosso, que trata-se de termos geométricos.

A solução consiste em fazer a expressão em colchetes igual à zero, em (4.50). Teremos  $\phi' = 0 \Rightarrow \phi(r) = \phi_0$ , uma constante, e

$$b(r) = \frac{A^2}{2re^{2\phi_0}}, \quad (4.51)$$

satisfazendo a (4.49).

Impondo, agora, que  $b(r_0) = r_0$ , encontramos  $A = r_0 e^{\phi_0} \sqrt{2}$ , e, conseqüentemente,  $b'(r_0) = -1$ . Já a (4.48) nos dá

$$\omega' = \frac{r_0 \sqrt{2}}{r \sqrt{r^2 - r_0^2}} \Rightarrow \omega(r) = \sqrt{2} \cot^{-1} \left( \frac{r_0}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \right) + \omega(r_0). \quad (4.52)$$

Finalmente, a solução se dá por

$$\rho(r) = p(r) = -\tau(r) = -\frac{r_0^2}{r^4}, \quad (4.53)$$

$$b(r) = \frac{r_0^2}{r} \quad \text{e} \quad \phi(r) = \phi_0. \quad (4.54)$$

E a métrica fica

$$ds^2 = -e^{2\phi_0} dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)} + r^2 d\Omega^2, \quad (4.55)$$

onde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2$ . Ou, então, podemos calcular (2.9), que dá

$$l(r) = \pm\sqrt{r^2 - r_0^2} \Rightarrow r^2(l) = l^2 + r_0^2, \quad (4.56)$$

e a (2.6) se escreve

$$ds^2 = -e^{2\phi_0} dt^2 + dl^2 + (l^2 + r_0^2) d\Omega^2. \quad (4.57)$$

Este espaço-tempo gerado é livre de horizontes, uma vez que  $\phi$  é uma constante, e é claramente plano nos limites assintóticos, pois  $b(r)$  tende a um valor fixo. Podemos nos preocupar, agora, com as forças de maré e o tempo de percurso aos quais serão submetidos os viajantes.

Primeiramente, devemos ter posicionadas as estações de lançamento e chegada onde os efeitos gravitacionais do buraco sejam pequenos. Ou seja, num raio tal que  $g_{11}$  ou  $(1 - b/r)$  seja próximo de um. E, dada a simetria entre os dois universos, podemos ter  $l_1 = l_+(r_1) = l_2 = -l_-(r_2) = l$  e, com isto,  $r_1 = r_2 = r$ . Consideremos, então, que

$$d = \frac{b(r)}{r} = \frac{r_0^2}{r^2} \lesssim 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{d} \lesssim 10^{-1} \quad (4.58)$$

e a (4.56) dá

$$l \approx r. \quad (4.59)$$

Como foi dito, a viagem é feita respeitando a (2.50). Teremos, então,  $\gamma$  constante, uma vez que  $\phi$  também é, o que implica que  $v(r)$  também será. No entanto, como foi dito, esta é a velocidade medida por quem está em repouso no mesmo lugar da nave. Um observador distante não iria medir uma velocidade constante.

Já a condição (2.39) é satisfeita sem nenhuma restrição adicional, enquanto a (2.40) impõe que

$$\frac{\gamma^2}{2r^2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left| \left(b' - \frac{b}{r}\right) \right| = \gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{r_0^2}{r^4} \lesssim \frac{1}{10^{16}} m^{-2}. \quad (4.60)$$

Sendo que o maior valor para o lado esquerdo da desigualdade é dado em  $r_0$ . Supondo, ademais, que o movimento não seja relativístico, teremos  $\gamma \approx 1$  e

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{1}{r_0^2} \lesssim \frac{1}{10^{16}} m^{-2} \quad \therefore \quad v \lesssim 3r_0 s^{-1}. \quad (4.61)$$

Consideremos, então,

$$v = 3r_0\alpha s^{-1} \quad (4.62)$$

com  $\alpha \lesssim 1$  e de modo que preserve o caráter não-relativístico do movimento.

Para o cálculo do tempo de percurso, temos, a partir da (2.44),

$$\Delta\tau \approx e^{\phi_0} \Delta t \approx \frac{1}{v} \int_{-l_1}^{l_2} dl \approx \frac{2r}{v} \lesssim T, \quad (4.63)$$

em que  $T$  vale um ano. Deveremos ter, conseqüentemente,

$$r \lesssim \frac{vT}{2}, \quad (4.64)$$

possibilitando maiores valores de  $r$  quanto maior for  $v$ . Caso, por exemplo, a nave possa atingir velocidades da ordem de  $10^4 m/s$ , que já seria uma ordem de grandeza maior do que as atuais, devemos ter  $r \lesssim 1,6 \cdot 10^{11} m$  para que a viagem não demore muito mais do que um ano.

Substituindo (4.62) na (4.64), ficamos com

$$r \lesssim \frac{3r_0\alpha T}{2} s^{-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha \gtrsim \frac{2r}{3r_0T} s = \frac{2}{3T\sqrt{d}} s,$$

sendo que  $\alpha \lesssim 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3T\sqrt{d}} s \lesssim 1 &\quad \Rightarrow \quad \sqrt{d} \gtrsim \frac{2}{3T} s \approx 2,1 \cdot 10^{-8} \\ \therefore 2,1 \cdot 10^{-8} \lesssim \sqrt{d} \lesssim 10^{-1} &\quad (4.65) \end{aligned}$$

ou, de forma equivalente, uma vez que  $r_0 = r\sqrt{d}$ ,

$$2,1 \cdot 10^{-8} r \lesssim r_0 \lesssim 10^{-1} r. \quad (4.66)$$

Garantimos, assim, que as estações de onde a nave parte e chega possam estar posicionadas numa distância em que os efeitos gravitacionais do buraco de minhoca sejam desprezíveis e que, para velocidades de até  $10^4 m/s$ , a travessia seja feita num tempo próprio menor ou da ordem de um ano. É fácil concluir, também, que, para qualquer  $\phi_0 \gtrsim 0$ , o tempo medido pelas estações será da mesma ordem de grandeza ou menor, e que, dependendo do caso, poderemos ter, inclusive,  $\phi_0$  negativo. Quanto às forças de maré, estas estão perfeitamente dentro do limite imposto para qualquer  $r_0 \gtrsim v/3$ .

Dadas diversas possibilidades satisfatórias para a solução encontrada, vamos considerar, por exemplo, um caso em que o raio da garganta seja aproximadamente o mesmo do sol,  $r_0 = 7 \cdot 10^8 m$ , e que as estações estejam tão distantes dela quanto a Terra está do sol, isto é,  $r = 1,5 \cdot 10^{11} m$ . Teremos  $d = 2,5 \cdot 10^{-5}$  e vemos que todos estes valores respeitam os limites impostos. Inclusive, a viagem poderá ser feita de acordo com o limite de tempo estipulado desde que a velocidade seja, a partir de (4.64),

$$v \gtrsim \frac{2r}{T} \approx 10^4 m/s,$$

que é justamente a velocidade máxima suposta para a nave. Desta forma,  $\Delta\tau$  será aproximadamente um ano e  $\phi_0$  deverá ser, de fato, maior ou igual à zero.

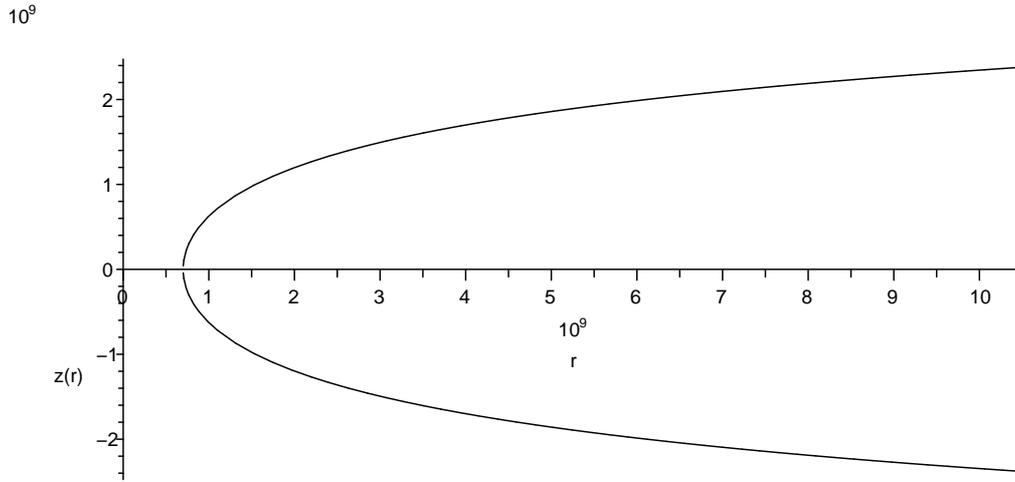


Figura 4.2: Curva de imersão  $z(r) \times r$  para  $r_0 = 7 \cdot 10^8 m$ . As estações estão posicionadas muito distantes da origem para que pudessem ser incluídas no gráfico.

A curva de imersão,  $z(r)$ , obtida através de (2.16) com  $z(r_0) = 0$ , encontra-se como sendo

$$z(r) = \pm r_0 \ln \left( \frac{r}{r_0} + \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} \right) \quad (4.67)$$

que, para o valor de  $r_0$  usado no exemplo, dá as figuras 4.2 e 4.3.

### 4.3 Eletrodinâmica acoplada com a gravidade

Outro modelo cosmológico que dá origem a um universo eterno encontra-se em [5], que se baseia num acoplamento entre os campos eletromagnético e gravitacional. É bem conhecido que correções vindas da eletrodinâmica quântica levam à modificações na gravitação de Einstein quando se tem espaço-tempos curvos através destes termos de acoplamento. E estes, por sua vez, levam à não-linearidades na teoria além de quebrar a invariância de *gauge*.

Entretanto, uma forte razão para se considerar tal modelo é a crescente evidência de que campos magnéticos permeiam o meio intergalático, além dos já observados nos braços espirais de galáxias [11, 12]. Em [13] é argumentado que a quebra da invariância durante a inflação pode ser responsável pela criação de campos magnéticos em grandes escalas que poderiam ser observados. Entre os modelos tratados, os que consideram acoplamentos da forma  $RW_\mu W_\nu g^{\mu\nu}$  e  $R^{\mu\nu} W_\mu W_\nu$  foram os únicos que tiveram resultados conclusivos e compatíveis com as observações, onde  $W_\mu$  é o potencial eletromagnético. E destes,

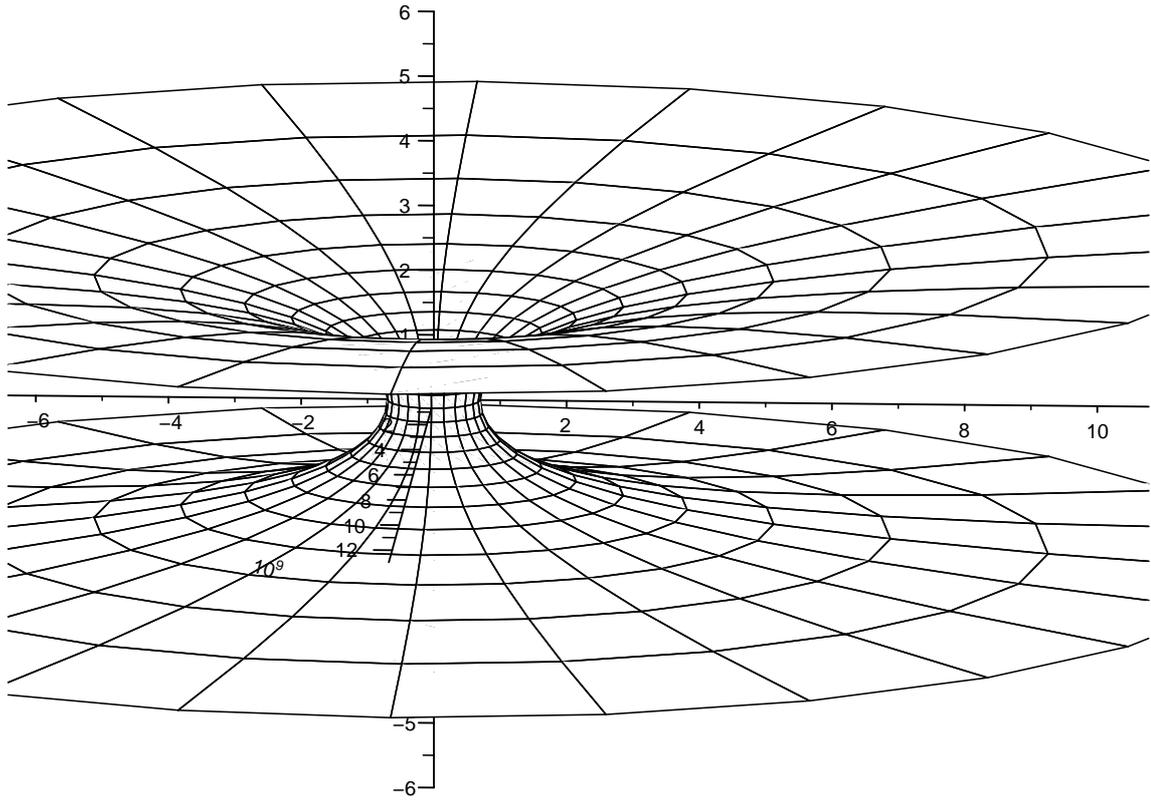


Figura 4.3: Diagrama de imersão para  $r_0 = 7 \cdot 10^8 m$ . Como na figura 4.2, as posições das estações não estão incluídas no gráfico.

somente o primeiro é compatível com um universo de Friedmann, como observado em [5].

Sendo, então, o termo de acoplamento da forma

$$L_{acop.} = \sqrt{-g} R W_\mu W_\nu g^{\mu\nu},$$

a lagrangiana total é dada por

$$L = L_A + L_B + L_C, \quad (4.68)$$

com

$$L_A = \frac{1}{k} \sqrt{-g} (1 + \lambda W_\mu W^\mu) R,$$

$$L_B = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

e  $L_C$  sendo a lagrangiana da matéria.  $F_{\mu\nu} = \nabla_\nu W_\mu - \nabla_\mu W_\nu$ ,  $\lambda$  tem a mesma dimensão que a constante de Einstein  $k$  e  $R$  é o escalar de curvatura. Variando (4.68) em relação à

$g_{\mu\nu}$  obtemos

$$(1 + \lambda W^2) G_{\mu\nu} + \lambda \square W^2 g_{\mu\nu} - \lambda \nabla_\nu \partial_\mu W^2 + \lambda R W_\mu W_\nu = k E_{\mu\nu} + k T_{\mu\nu}, \quad (4.69)$$

em que  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia da matéria, obtido a partir da variação de  $L_C$ ,  $W^2 = W_\mu W^\mu$  e  $E_{\mu\nu}$  é o tensor de Maxwell,

$$E_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (4.70)$$

Tomando o traço de (4.69) ficamos com

$$R = -kT + 3\lambda \square W^2, \quad (4.71)$$

em que  $T$  é o traço de  $T_{\mu\nu}$ .

Variando (4.68), agora, em relação à  $W^\mu$  obtemos

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{\lambda}{k} R W^\mu + J^\mu, \quad (4.72)$$

em que um corrente extra,  $J^\mu$ , foi adicionada. Tomando a divergência desta expressão ficamos com a lei de conservação de carga modificada

$$\nabla_\mu J^\mu - \frac{\lambda}{k} \nabla_\mu (R W^\mu) = 0. \quad (4.73)$$

Para o modelo cosmológico tratado na referência [5], é considerado apenas o campo eletro-magnético, acoplado com a curvatura. No entanto, dada a isotropia do modelo, estes campos não poderiam apontar em nenhuma direção. Desta forma, ambos os campos elétrico e magnético deveriam ser nulos e, no vácuo ( $J^\mu = 0$ ), a (4.72) implica em

$$R = 0, \quad (4.74)$$

garantindo a conservação de carga. Ou, a partir da (4.71), temos, de modo equivalente,

$$\square W^2 = 0. \quad (4.75)$$

E, definindo  $\Omega \equiv 1 + \lambda W^2$ , ficamos com o par de equações:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\nabla_\nu \partial_\mu \Omega}{\Omega} \quad (4.76)$$

$$\square \Omega = 0. \quad (4.77)$$

Para o nosso caso, devemos procurar soluções em que  $\Omega = \Omega(r)$ , de modo que  $\partial_\mu \Omega =$

$\Omega' \delta_\mu^1$ . Com isto, teremos

$$\begin{aligned}\nabla_\nu \partial_\mu \Omega &= \partial_\nu \partial_\mu \Omega - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \partial_\alpha \Omega \\ &= \Omega'' \delta_\mu^1 \delta_\nu^1 - \Gamma_{\mu\nu}^1 \Omega'\end{aligned}\quad (4.78)$$

que, sendo a métrica  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r)$  e diagonal, dá

$$\Gamma_{\mu\nu}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (g'_{1\mu} \delta_\nu^1 + g'_{1\nu} \delta_\mu^1 - g'_{\mu\nu}), \quad (4.79)$$

também diagonal. As componentes não nulas de (4.78) são, então,

$$\begin{aligned}\nabla_0 \partial_0 \Omega &= -e^{2\phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \phi' \Omega', & \nabla_1 \partial_1 \Omega &= \Omega'' + \frac{(b - rb')}{2r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right)} \Omega', \\ \nabla_2 \partial_2 \Omega &= r \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Omega', & \nabla_3 \partial_3 \Omega &= r \operatorname{sen}^2 \theta \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Omega'.\end{aligned}\quad (4.80)$$

Escrevendo-as na base ortonormal, teremos

$$\begin{aligned}\nabla_i \partial_i \Omega &= - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \phi' \Omega', & \nabla_r \partial_r \Omega &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Omega'' + \frac{(b - rb')}{2r^2} \Omega', \\ \nabla_\theta \partial_\theta \Omega &= \nabla_\varphi \partial_\varphi \Omega = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Omega'}{r}.\end{aligned}\quad (4.81)$$

Para o cálculo de  $\square \Omega$ , temos

$$\begin{aligned}\square \Omega &= \nabla^A \partial_A \Omega = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \phi' \Omega' + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \Omega'' + \frac{(b - rb')}{2r^2} \Omega' + 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Omega'}{r} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \frac{b}{r}}}{r^2 e^\phi} \left\{ \sqrt{1 - \frac{b}{r}} [r^2 e^\phi \phi' \Omega' + r^2 e^\phi \Omega'' + 2r e^\phi \Omega'] + \frac{r^2 e^\phi}{2\sqrt{1 - \frac{b}{r}}} \left(\frac{b}{r^2} - \frac{b'}{r}\right) \Omega' \right\} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \frac{b}{r}}}{r^2 e^\phi} \left\{ \sqrt{1 - \frac{b}{r}} [r^2 (e^\phi)' \Omega' + r^2 e^\phi (\Omega')' + (r^2)' e^\phi \Omega'] + r^2 e^\phi \left(\sqrt{1 - \frac{b}{r}}\right)' \Omega' \right\} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \frac{b}{r}}}{r^2 e^\phi} \left( r^2 e^\phi \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \Omega' \right)' = 0,\end{aligned}\quad (4.82)$$

de acordo com (4.77), e, com isto,

$$r^2 e^\phi \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \Omega' = A, \quad (4.83)$$

uma constante. Podemos, ainda, reescrever

$$\begin{aligned}
\nabla_r \partial_r \Omega &= \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \left[ \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \Omega'' + \left( \frac{b}{r^2} - \frac{b'}{r} \right) \frac{\Omega'}{2\sqrt{1 - \frac{b}{r}}} \right] \\
&= \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \left( \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \Omega' \right)' \\
&= A \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \left( \frac{1}{r^2 e^\phi} \right)', \tag{4.84}
\end{aligned}$$

onde a última igualdade deve-se à (4.83).

Finalmente, a fonte

$$T_{ab} = \frac{1}{k} \frac{\nabla_b \partial_a \Omega}{\Omega} \tag{4.85}$$

nos dá

$$\rho = - \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\phi' \Omega'}{\Omega}, \tag{4.86}$$

$$p = \frac{A}{\Omega} \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \left( \frac{1}{r^2 e^\phi} \right)', \tag{4.87}$$

$$\tau = \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Omega'}{r\Omega}, \tag{4.88}$$

e o sistema (2.51)-(2.53) escreve-se como

$$- \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\phi' \Omega'}{\Omega} = \frac{b'}{r^2}, \tag{4.89}$$

$$\frac{A}{\Omega} \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \left( \frac{1}{r^2 e^\phi} \right)' = -\frac{b}{r^3} + 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\phi'}{r}, \tag{4.90}$$

$$\left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Omega'}{r\Omega} = \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \left[ \phi'' + \phi' \left( \phi' + \frac{1}{r} \right) \right] - \frac{(b'r - b)}{2r^2} \left( \phi' + \frac{1}{r} \right). \tag{4.91}$$

Uma solução para este sistema é dada por

$$b(r) = r_0, \tag{4.92}$$

$$\phi(r) = \phi_0, \tag{4.93}$$

$$\Omega(r) = \frac{2A}{r_0 e^{\phi_0}} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}. \tag{4.94}$$

A (4.83) é satisfeita e as componentes do tensor momento-energia ficam

$$\rho = 0, \quad (4.95)$$

$$p = -\frac{r_0}{r^3}, \quad (4.96)$$

$$\tau = \frac{r_0}{2r^3}. \quad (4.97)$$

A métrica, por sua vez, escreve-se

$$ds^2 = -e^{2\phi_0} c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{r_0}{r}\right]} + r^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2]. \quad (4.98)$$

O comprimento próprio obtido a partir de (2.9) encontra-se como sendo

$$l(r) = \pm r \left\{ \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} + \frac{r_0}{2r} \ln \left[ \frac{2r}{r_0} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (4.99)$$

cuja inversa,  $r(l)$ , não é algo trivial de se obter, impossibilitando que possamos escrever a métrica como em (2.6). Porém, sendo  $b(r)$  e  $\phi(r)$  ambos constantes, podemos concluir que o espaço-tempo gerado é assintoticamente plano e podemos, agora, calcular as forças de maré e o tempo de percurso imposto à tripulação da nave, novamente, como foi feito na seção anterior.

De modo análogo, teremos, então,  $l_1 = l_+(r_1) = l_2 = -l_-(r_2) = l$  e, conseqüentemente,  $r_1 = r_2 = r$ . Queremos que

$$d = \frac{b(r)}{r} = \frac{r_0}{r} \lesssim 10^{-2} \quad (4.100)$$

e a (4.99) também dá

$$l \approx r. \quad (4.101)$$

Dado que a viagem é feita sem propulsão a (2.50) nos garante que  $\gamma e^\phi$  é constante e, com isto,  $\gamma$  também será, uma vez que  $\phi$  também é. Considerando, novamente, que o movimento não seja relativístico, teremos, ainda,  $\gamma \approx 1$  e as restrições (2.39) e (2.40) resumem-se a

$$\frac{r_0}{2r^3} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \lesssim \frac{1}{10^{16}} m^{-2}, \quad (4.102)$$

o que é assegurado impondo-se que

$$\frac{1}{2r_0^2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \lesssim \frac{1}{10^{16}} m^{-2} \quad \therefore \quad v \lesssim 3\sqrt{2}r_0 s^{-1}. \quad (4.103)$$

Façamos, então,

$$v = 3\sqrt{2}r_0\alpha s^{-1}, \quad \alpha \lesssim 1 \text{ e } v \ll c. \quad (4.104)$$

Os tempos de percurso para os referenciais das estações e da nave deverão ser

$$\Delta\tau \approx e^{\phi_0} \Delta t \approx \frac{1}{v} \int_{-l_1}^{l_2} dl \approx \frac{2r}{v} \lesssim T \quad (4.105)$$

e a (4.64) permanece válida, de modo que  $r \lesssim 1,6 \cdot 10^{11} m$ , novamente, para o caso em que a velocidade da nave não ultrapasse  $10^4 m/s$ , se quisermos que o tempo próprio de percurso seja em torno de um ano ou menos.

Substituindo (4.104) em (4.105), podemos concluir que

$$\alpha \gtrsim \frac{\sqrt{2}}{3Td} s \quad \therefore \quad d \gtrsim \frac{\sqrt{2}}{3T} s$$

pelo fato de  $\alpha \lesssim 1$ . Teremos, então,

$$1,5 \cdot 10^{-8} \lesssim d \lesssim 10^{-2} \quad (4.106)$$

$$\therefore \quad 1,5 \cdot 10^{-8} r \lesssim r_0 \lesssim 10^{-2} r. \quad (4.107)$$

Outra vez, podemos ter garantidas as condições de se ter as estações onde a curvatura seja desprezível e que a viagem seja feita num tempo inferior ou da ordem de um ano, para uma nave que se desloca com uma velocidade de até  $10^4 m/s$ . Qualquer  $\phi_0 \gtrsim 0$  também será satisfatório para o tempo medido nas estações e as forças de maré sofridas pela tripulação serão perfeitamente toleráveis uma vez que se tenha  $r_0 \gtrsim v/(3\sqrt{2})$ .

Tomando, como exemplo, o mesmo caso que o anterior, em que  $r_0 = 7 \cdot 10^8 m$  e  $r = 1,5 \cdot 10^{11} m$ , teremos, desta vez,  $d = 0,5 \cdot 10^{-2}$  e todos os valores permanecem de acordo com as restrições. A velocidade deverá ser, novamente, de  $10^4 m/s$  implicando num intervalo de tempo próprio para a travessia de aproximadamente um ano, fazendo com que  $\phi_0 \gtrsim 0$ .

A curva de imersão para esta solução encontra-se como sendo

$$z(r) = \pm 2r_0 \sqrt{\frac{r}{r_0} - 1} \quad (4.108)$$

e, no caso do exemplo, fornece as figuras 4.4 e 4.5.

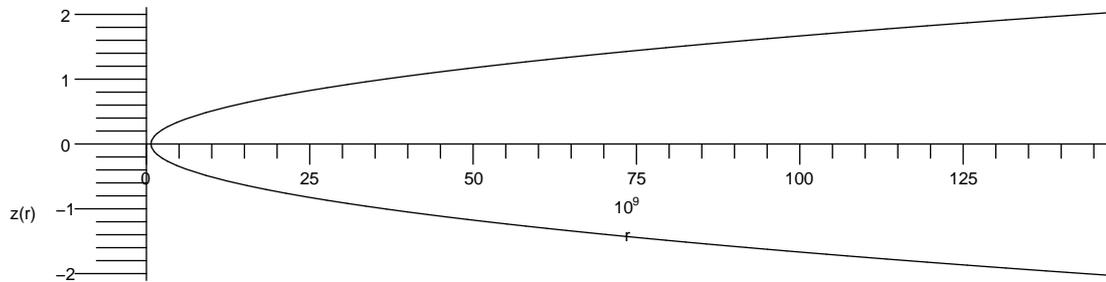


Figura 4.4: Curva de imersão  $z(r) \times r$  para  $r_0 = 7 \cdot 10^8 m$ . Pode-se perceber que as estações se encontram em regiões planas com boa aproximação.

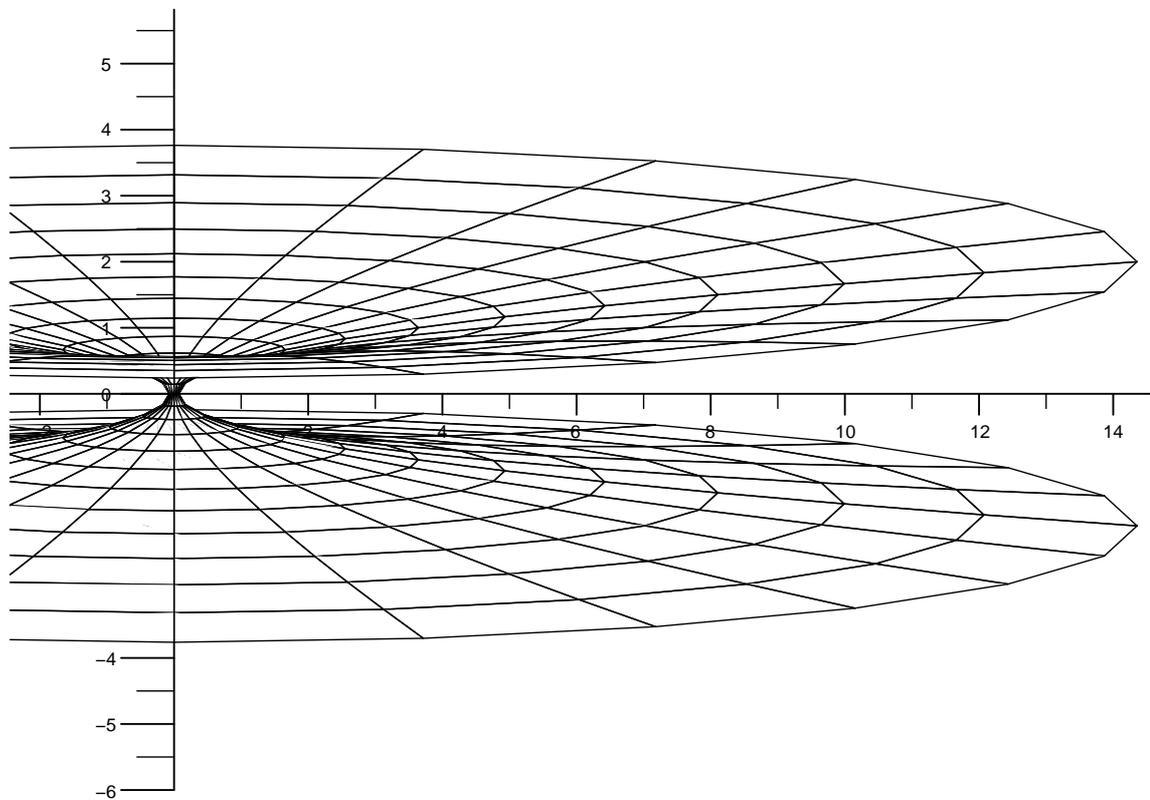


Figura 4.5: Diagrama de imersão para  $r_0 = 7 \cdot 10^8 m$ . As estações encontram-se próximo à borda deste diagrama.

# Capítulo 5

## Conclusões

Vimos que a propriedade exótica necessária à fonte para que gere um buraco de minhoca, que antes era quase inadmissível para situações em regime clássico e praticamente descartavam qualquer possibilidade de que tais configurações pudessem surgir, são perfeitamente razoáveis atualmente. Em particular, as diversas teorias de campos escalares, praticamente essenciais para a descrição de vários fenômenos, colocam em xeque todas as crenças nas quais se baseavam a rejeição aos buracos de minhoca, que são as condições de energia.

Mais ainda, observações cosmológicas apontam que violações nestas condições não só acontecem no presente, como também, necessariamente, ocorreram em algum momento da evolução do universo. Especialmente se um modelo cosmológico com singularidades, como o do *big-bang*, é descartado em troca de um eterno, caracterizado por um *bouncing* no fator de escala. Foi mostrado que estes tipos de modelos violam não só a SEC, como também a WEC, em parte dos casos.

Ou seja, se há a pretensão de se descrever toda esta variedade de fenômenos em conformidade com as teorias atuais já bastante consolidadas, é necessário que se leve em conta a existência de fontes exóticas, violando quaisquer das condições de energia. De fato, estas podem ter tido sua utilidade e, com certeza, não se deve esperar qualquer violação delas em situações cotidianas. No entanto, torna-se bastante claro que elas já não podem mais desempenhar o papel fundamental que se atribuía a elas. Por mais razoáveis que elas sejam, uma vez que asseguram propriedades bastante desejáveis às configurações de matéria e energia, deve ser reconhecido que existem situações em que pode-se esperar fenômenos dos mais inusitados.

Uma destas situações, das mais peculiares, é a que caracteriza um buraco de minhoca. Isto é, dada a existência de duas regiões assintoticamente planas unidas, resultando num mínimo para a coordenada radial que descreve a geometria do espaço-tempo, temos que, num deslocamento radial em direção ao centro da fonte, haverá um dado momento em que deixa-se de se aproximar e passa-se a se afastar, novamente, porém, sem que se percorra o caminho inverso e mantendo-se, sempre, a mesma direção. Foi mostrado que

tal configuração, extremamente difícil de se conceber, requer, necessariamente, que a fonte apresente as mesmas propriedades exóticas que os campos escalares citados e a matéria-energia que contribui para aquelas características do universo.

Contudo, vimos, também, que não basta satisfazer esta condição, como foi o caso da eletrodinâmica não-linear da seção 4.1. Nele, qualquer tentativa de se caracterizar um mínimo para a coordenada radial acaba por implicar num comportamento categoricamente inadmissível. Mesmo que a própria idéia de um buraco de minhoca possa ser considerada em desacordo com o bom senso, as anomalias presentes nas soluções deste caso simplesmente impossibilitam a concepção do próprio universo onde ele se encontra.

Por outro lado, os outros dois casos tratados, que também representam modelos de universo eterno, permitem soluções perfeitamente bem comportadas ainda que se imponha a propriedade especial dos buracos de minhoca. Tanto que, em ambos os casos, foi possível, até mesmo, considerar uma viagem tripulada em que as estações de partida e chegada encontravam-se em regiões razoavelmente planas e com um tempo total de percurso não muito superior a um ano, e tudo isso sem que as forças de maré pusessem em risco a nave e os viajantes. Ou seja, constatamos que uma fonte apropriada para se descrever um universo eterno e que, por conseguinte, viola as condições de energia tal como devem aquelas que geram os buracos de minhoca, podem muito bem dar origem a tais geometrias.

No entanto, isto não é suficiente para que se considere a possibilidade real de existência dessas configurações. O que foi mostrado é que uma fonte exibindo propriedades exóticas pode caracterizar um buraco de minhoca, mas, isto, sem considerar seu processo de formação. Isto é, a fonte que o gera, assim como a própria geometria em si, é considerada estática, como se sempre fosse assim. Ou, como se os buracos de minhoca obtidos sempre tivessem existido.

Para se concluir que algo desse tipo pode surgir ou não, é necessário que consideremos uma geometria dinâmica. As equações, que ficariam mais trabalhosas, devido aos novos termos que apareceriam, poderiam dizer se uma dada configuração inicial, sem qualquer propriedade exótica, pode evolir para um buraco de minhoca e se, uma vez sendo dinâmico, ele seria estável ou não. Poderíamos, ainda, considerar o tempo de formação dessas estruturas e se, durante o período de *bouncing*, em que as condições para a existência de um são satisfeitas, haveria tempo suficiente para que eles surgissem. Preocupação, esta, que caberia somente após o conhecimento da existência de fontes capazes de dar origem à geometrias como as obtidas, ficando o estudo dos processos de formação dos buracos de minhoca como consequência deste trabalho.

Em suma, vimos que a existência destas configurações é uma possibilidade teórica perfeitamente plausível, embora sua existência em algum período da história do universo dependa de estudos posteriores sobre os processos que levam à sua formação.

# Apêndice A

## O método de Runge-Kutta

A função  $z(r)$  da figura 4.1 encontra-se como sendo a solução de (2.16), dada por

$$z(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{r'}{b(r')} - 1}} dr'. \quad (\text{A.1})$$

No entanto, a função  $b(r)$  que aparece no integrando é dada pela solução do sistema

$$b' = \frac{r^2 X}{2} (1 - 8\alpha X), \quad (\text{A.2})$$

$$X' = \frac{X (16\alpha X - 1) (40\alpha X^2 r^3 - X r^3 - 6b)}{r (r - b) (80\alpha X - 1)}, \quad (\text{A.3})$$

cuja solução analítica não é facilmente obtida, sendo necessário recorrer, portanto, a métodos numéricos para que algum gráfico destas funções possa ser obtido. Existe uma certa variedade destes métodos, uns mais apropriados do que outros, dependendo do caso. No entanto, o escolhido foi o de Runge-Kutta, que é bastante utilizado para se resolver sistemas de equações diferenciais em geral, devido ao equilíbrio entre precisão, estabilidade e esforço computacional.

Para compreender seu funcionamento, consideremos uma equação diferencial do tipo

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y(x)). \quad (\text{A.4})$$

A partir da expansão em Taylor,

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + O(h^3), \quad (\text{A.5})$$

podemos escrever

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + f(x_0, y(x_0))h + \frac{1}{2}f'(x_0, y(x_0))h^2 + O(h^3) \quad (\text{A.6})$$

e temos o valor de  $y$  em  $x_0 + h$  com precisão de  $h^3$ . O que o método de Runge-Kutta faz é substituir  $f'$  por valores de  $f$  calculados em outros pontos, mantendo a precisão ao passar de  $x_0$  para  $x_0 + h$ .

Escrevamos a solução como

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) + O(h^3), \quad (\text{A.7})$$

onde

$$k_1 \equiv f(x_0, y(x_0)) \equiv f_0, \quad (\text{A.8})$$

$$k_2 \equiv f(x_0 + b_2 h, y(x_0) + c_2 k_1 h). \quad (\text{A.9})$$

Fazendo a expansão

$$k_2 = f_0 + b_2 h \frac{\partial f_0}{\partial x} + c_2 f_0 h \frac{\partial f_0}{\partial y} + O(h^2), \quad (\text{A.10})$$

onde o fator  $k_1$  multiplicando  $c_2$  foi substituído por  $f_0$  e foram mantidos somente os termos de ordem  $h$  pelo fato desta expressão já estar multiplicada por  $h$ , em (A.7), dando termos em  $h^2$ , como se pretende. Substituindo, então, (A.8) e (A.10) em (A.7), encontramos

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h(a_1 + a_2) f_0 + h^2 a_2 \left( b_2 \frac{\partial f_0}{\partial x} + c_2 f_0 \frac{\partial f_0}{\partial y} \right) + O(h^3). \quad (\text{A.11})$$

Sendo que também temos

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (\text{A.12})$$

de modo que a (A.6) fica

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h f_0 + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial f_0}{\partial x} + f_0 \frac{\partial f_0}{\partial y} \right) + O(h^3). \quad (\text{A.13})$$

E vemos que, para a (A.11) ser igual à esta, devemos ter satisfeitas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1, \\ a_2 b_2 &= a_2 c_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Escolhendo  $a_1 = 0$ , teremos  $a_2 = 1$  e  $b_2 = c_2 = \frac{1}{2}$ , levando-nos ao método de Runge-Kutta

de segunda ordem, em que as (A.7), (A.8) e (A.9) ficam:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hk_2 + O(h^3), \quad (\text{A.14})$$

$$k_1 = f(x_0, y(x_0)), \quad (\text{A.15})$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y(x_0) + \frac{h}{2}k_1\right). \quad (\text{A.16})$$

Com isto, obtemos o valor de  $y$  em  $x_0 + h$  a partir de seu valor em  $x_0$  com um erro da ordem de  $h^3$ . Poderíamos, agora, obter  $y(x_0 + 2h)$  a partir deste valor calculado e, assim, sucessivamente, de modo que, após  $n$  iterações deste processo, temos um valor aproximado de  $y(x_0 + nh)$ .

De forma análoga, poderíamos aumentar a precisão indo até termos em  $h^4$ , o que nos daria o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Neste caso, a passagem de  $x_0$  para  $x_0 + h$  se dá por

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5), \quad (\text{A.17})$$

com

$$k_1 = f(x_0, y(x_0)),$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y(x_0) + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y(x_0) + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y(x_0) + hk_3).$$

Outros métodos ainda mais evoluídos, como o Runge-Kutta de passo variável, encontram-se implementados em programas de cálculo numérico bastante conhecidos, como o *Maple*, por exemplo.

No entanto, no nosso caso, temos uma divisão por zero em (A.3) e, apesar de termos um limite finito, uma vez que o numerador também se anula, estes programas não são capazes de evoluir a solução além do ponto inicial. Ao efetuarem o cálculo de  $k_1$ , que é o lado direito de (A.3) calculado em  $r_0$ , eles constatam a presença de um zero no denominador e simplesmente interrompem o processo. Ou seja, para o nosso sistema em particular, os programas de cálculo numérico mostram-se completamente inúteis, sem obter nenhum outro ponto além do inicial.

Uma forma disto não acontecer seria através de uma mudança de variáveis, de modo que nos livrássemos daquela divisão por zero. No entanto, ao voltarmos às variáveis originais, recairíamos no mesmo problema. Ou, então, poderíamos considerar a expansão da (A.3) para valores próximos do inicial e, uma vez o denominador diferindo o sufici-

ente de zero a ponto desta expressão não divergir, voltariamos a considerar sua forma exata. Neste caso, a precisão dependeria, claramente, da quantidade de termos usados na expansão para os valores iniciais.

Este foi, de fato, o método usado para se contornar o problema e, para isso, os programas de cálculo numérico foram dispensados. O que se fez foi implementar um algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem para a linguagem computacional “C”. Este e outros, como o de passo variável, encontram-se bem descritos e discutidos em [14].

Entretando, a obtenção dos coeficientes da série de Taylor para a segunda equação do sistema acabou por ser uma tarefa incrivelmente dispendiosa para termos já a partir do terceiro. Algo que seria justificado somente caso realmente estivéssemos interessados em alguma solução particular com boa precisão. Como nosso sistema não apresenta qualquer solução digna de maiores considerações, podemos nos contentar apenas com seus aspectos qualitativos. E, muito embora estejamos reduzindo a precisão dos primeiros passos da evolução, isto não significa que o resultado final vá ser consideravelmente diferente do exato, ao menos qualitativamente.

Agora, outro problema surge para se resolver a (A.1). Pois a expressão analítica de seu integrando é desconhecida, sendo dada numericamente para valores discretos. Mais ainda, seu valor diverge no ponto inicial, de modo que não podemos, como no caso da (A.3), fazer qualquer tipo de expansão em torno dele.

Porém, como é esperado que  $z(r)$  possua sempre valores finitos para qualquer  $r \geq r_0$ , podemos reescrever

$$z(r) = \int_{r_0}^{r_0+\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\frac{r'}{b(r')} - 1}} dr' + \int_{r_0+\epsilon}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{r'}{b(r')} - 1}} dr' = \delta + \int_{r_0+\epsilon}^r \frac{1}{\sqrt{\frac{r'}{b(r')} - 1}} dr'$$

e resolver o problema para  $z_-(r) = z(r) - \delta$ . Esta, sendo nada mais do que um pequeno deslocamento vertical da função  $z(r)$ , no gráfico de  $z(r) \times r$ , sendo menor quanto menor for  $\epsilon$ . Temos, como condição inicial,  $z_-(r_0+\epsilon) = 0$  e, uma vez que o integrando permanece o mesmo, incluímos sua equação diferencial, igual a de  $z(r)$ , no sistema. Este, fica, então,

$$b' = \frac{r^2 X}{2} (1 - 8\alpha X), \quad (\text{A.18})$$

$$r - r_0 < d \quad \Rightarrow X' = X'_0 + X''_0(r - r_0), \quad (\text{A.19})$$

$$r - r_0 \geq d \quad \Rightarrow X' = \frac{X(16\alpha X - 1)(40\alpha X^2 r^3 - Xr^3 - 6b)}{r(r - b)(80\alpha X - 1)}, \quad (\text{A.20})$$

$$r - r_0 < \epsilon \quad \Rightarrow z'_- = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$r - r_0 \geq \epsilon \quad \Rightarrow z'_- = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b(r)} - 1}}, \quad (\text{A.22})$$

em que  $d$  é suficientemente pequeno, de modo que  $[r - b(r)]^{-1}$  não seja considerado, numericamente, infinito, tal como para  $\epsilon$  em relação à equação para  $z'_-$ .

Depois de verificar que, para diversos valores de  $\alpha$  e  $r_0$ , as soluções apresentam o mesmo comportamento, escolheu-se arbitrariamente para a solução específica exibida na figura 4.1,  $\alpha = 1 \text{ m}^2$  e  $r_0 = 4 \text{ m}$ . A (4.16) é satisfeita e temos para a expansão em (A.19):

$$X'_0 = 0.1042565109,$$

$$X''_0 = 0.399292709.$$

E, pelo comportamento inicial do gráfico, vemos que, de fato,  $z_-(r) \approx z(r)$ . Caso contrário, teríamos, visivelmente, um “bico” em  $z_-(r_0 + \epsilon)$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Robert M. Wald, 1984, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago and London).
- [2] Michael S. Morris and Kip S. Thorne, “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching General Relativity”, *American Journal of Physics*. Vol. 56, No. 5, 395 (1988).
- [3] V. A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello and J. M. Salim, “Nonlinear electrodynamics and FRW cosmology”, *Physical Review D*, Vol. 65 (2002).
- [4] M. Novello, L. A. R. Oliveira, J. M. Salim and E. Albaz, “Geometrized instantons and the creation of the universe”, *International Journal of Modern Physics D*, Vol. 1, Nos. 3 & 4, 641 (1993).
- [5] M. Novello and J. M. Salim, “Nonlinear photons in the universe”, *Physical Review D*, Vol. 20, No. 2, 377 (1979).
- [6] Matt Visser, 1995, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking* (American Institute of Physics, New York).
- [7] Carlos Barceló and Matt Visser, “Twilight for the energy conditions?”, *International Journal of Modern Physics D*, Vol. 11, 1553 (2002).
- [8] Patrick Peter and Nelson Pinto-Neto, “Has the Universe always expanded?”, *Physical Review D*, Vol. 65, No. 2, 023513 (2002).
- [9] Richard C. Tolman and Paul Ehrenfest, “Temperature Equilibrium in a Static Gravitational Field”, *Physical Review*, Vol. 36, 1791 (1930).
- [10] Diego Chaves Savelli, “Análise quantitativa de um wormhole atravessável.”, trabalho sob orientação de Nelson Pinto-Neto apresentado na XI Semana de Iniciação Científica do CBPF, dias 21 e 22 de outubro de 2004.
- [11] Tomislav Prokopec, “Cosmological magnetic fields from photon coupling to fermions and bosons in inflation”, [astro-ph/0106247](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0106247).

- [12] Tomislav Prokopec and Ewald Puchwein, “Nearly Minimal Magnetogenesis”, *Physical Review D*, Vol. 70, 043004 (2004).
- [13] Michael S. Turner and Lawrence M. Widrow, “Inflation-produced, large-scale magnetic fields”, *Physical Review D*, Vol. 37, 2743 (1988).
- [14] William H. Press et al., 1992, *Numerical recipes in c: the art of scientific computing* (Cambridge University Press, England).