EVOLUÇÃO DO CAMPO GRAVITACIONAL ENTRE DUAS TRI-GEOMETRIAS
(CONJETURA SANDUÍCHE)

Tese de Mestrado

PENHA MARIA CARDOSO DIAS *

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

1973

* Trabalho financiado em parte pela CAPES e, em parte, pelo CNPq.

ÍNDICE

Página

RESUMO

A Conjetura Sanduīche ē proposta como um problema de condições de contorno para o formalismo canônico, em princīpio aplicāvel a qualquer sistema fīsico que possa ser posto nessa formulação, tendo particular interesse o campo gravitacional; nesse caso, ela ē formulada: o conhecimento de duas geometrias tri-dimensionais em duas hipersuperfīcies tipo-espaço deve ser suficiente para a determinação da geometria do espaço-tempo intermediārio. A Conjetura tem sido tratada no limite da "Thin Sandwich Conjecture" (TSC) quando as hipersuperfīcies coincidem e os dados se reduzem ao campo e ā derivada temporal sobre a hipersuperfīcie.

Trata-se de um assunto ainda em aberto, mas cuja solução trarā contribuição, seja a um critērio de especificação de condições de coordenadas, seja ā formulação quântica da teoria (construção da " integral sobre trajetōrias", de Feynman), alēm de outras aplicações.

Presentemente, a Conjetura Sanduīche foi aplicada ao campo gravitacional fraco e mostramos que as quantidades TT são soluções do Sanduīche; embora a condição de coordenada não tenha sido evitada, conseguiu-se associā-la ā solução de uma equação diferencial (de Laplace).

Mostramos, ainda, que, na teoria não linear, as coordenadas TT são soluções locais do Sanduīche.

Finalmente, o campo eletromagnētico formulado como um Sanduīche tem, como soluções, variāveis TT. Foi possīvel, ao menos formalmente, a construção de um Sanduīche finito, com a solução TT correta.

INTRODUÇÃO

Bergmann[1] e Komar[2 3] e, independentemente, Wheeler[4] e outros[5] formularam um problema do valor inicial para as equações de Einstein, a partir da especificação das variáveis de configuração em duas hipersuperfícies tipo-espaço, tri-dimensionais, distintas. A Conjetura Sanduíche (SC) propõe demonstrar que é possível, com esses dados iniciais, obter, via equações canônicas do campo, um único espaço-tempo entre as hipersuperfícies; de modo geral, esse problema tem sido tratado na versão simplificada em que as duas hipersuperfícies coincidem e os dados se reduzem ao campo e a sua derivada temporal sobre a hipersuperfície (TSC).

Entre outros interesses, se for possível realizar a Conjetura Sanduíche, espera-se aplicar à métrica o método de Feynman[6] para quantização, o qual está intimamente relacionado a essa hipótese. Esse método envolve:

a) a introdução, na teoria quântica, do conceito de "soma sobre trajetórias";

b) a construção de propagadores da função de onda de Schrödinger, que são expressos como integral da amplitude de transição entre dois estados, sobre possíveis trajetórias clássicas do campo entre dois instantes de tempo; a amplitude de transição é dada por $\exp \sum_{i=-\infty}^{n} \cdot \frac{i}{\hbar} S(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1})$, onde S é a ação clássica entre as posições no espaço de configuração, x_i e x_{i-1}, respectivamente, nos tempos t_i e t_{i-1} .

Se o TSC pode ser preenchido classicamente, poder-se-ia associar a essa construção uma "trajetória clássica" e uma ação não nula e proceder à construção da integral de Feynman[7]; essa integral levaria à matriz de transição entre duas dadas tri-geometrias.[1,6,7]

Na seção 1, apresentamos um sumário da formulação canônica de Dirac para teorias com vínculos e sua particularização ao campo gravitacional.

No enunciado do Problema de Cauchy para o campo de gravitação, em relatividade geral, encontra-se que as equações dinâmicas do campo propagam, apenas, componentes espaço-espaço da métrica, que estão diretamente relacionadas à geometria estabelecida sobre uma hipersuprefície tipo-espaço. Esse resultado se transporta, naturalmente, para o formalismo canônico, onde o conceito básico é o de um estado (conjunto mínimo de variáveis canônicas que descreve o sistema) num dado instante de tempo (hipersuperfície tipo-espaço, em termos relativísticos): as equações canônicas do campo mostram como esses estados variam, quando o tempo evolui. Portanto, na definição das variáveis canônicas para o campo gravitacional, são importantes variáveis inteiramente contidas numa hipersuperfície tipo-espaço, ou seja,variáveis que não se alteram por transformações de coordenadas que se reduzem à identidade sobre a hipersuperfície (quantidades D-invariantes); as equações canônicas levam D-invariantes de uma hipersuperfície tipo-espaço em outra.

A invariância da teoria sob um grupo de gauge implica em vínculos entre as variáveis canônicas. Na eliminação desses vínculos, é essencial a imposição de condições de coordenadas; como essas condições não são únicas e seu comportamento em tempos finitos posterioes à hipersuperfície inicial é completamente arbitrário, o que existe é uma classe de equivalência de solucões, cujos elementos se relacionam por transformações de coordenadas. A SC estuda a evolução no tempo de uma classe de equivalência de geometrias tri-dimensionais, obtendo um par($p^{mn}(x)$, $g_{mn}(x)$) e as condições de coordenadas, $N_m(x) \equiv g_{om}(x)$ e $N(x) \equiv [g^{oo}(x)]^{-1/2}$, a partir da especificação de duas geometrias tri-dimensionais em duas hipersuperfícies tipo-espaço distintas.

Na seção 2, apresentamos várias formulações para o TSC:

(I) formulação de Komar[2], com o uso das variáveis canônicas de Dirac. As equações de movimento se reduzem a equações algébricas para p_{mn}; o vínculo $\mathscr{H}_L = 0$ se torna equação algébrica para N e os vínculos $H_m = 0$ constituem um sistema de equações diferenciais, parciais, de segunda ordem, não lineares, nas incógnitas N_m, e, portanto, difícil de se saber, trivialmente, a respeito de existência e unicidade de solução. Casos singulares podem ocorrer, indicando soluções não únicas.

(II) formulação de Bergmann[1], que trata o problema de estabilidade das equações do problema anterior. Esse método também não é conclusivo e indica possibilidade de soluções não estáveis.

(III) formulação de Komar[3], com a substituição das variáveis de Dirac por um outro conjunto de variáveis canônicas. As equações do TSC se tranformam num sistema de cinco equações elípticas: a determinação do espaço-tempo interior ao Sanduíche pode ser tratada como um problema de Dirichlet com dados em uma hipersuperfície bi-dimensional que limite uma região tri-dimensional tipo-espaço.

(IV) *formulação de Fourès - Bruhat*[8]. Com o abandono do conceito de D-invariância e com o emprego da densidade métrica contravariante, junto com condições de De Donder, as equações de vínculo, $G^{o\mu} = 0$, se reduzem a um sistema de quatro equações elípticas para o TSC. Pode-se demonstrar que, com condições de contorno convenientes, esse TSC modificado tem uma única solução com valores especificados num contorno bi-dimensional de um domínio tri-dimensional[3].

Na seção 3, aplicamos o TSC, (I), para a teoria de campo fraco. As soluções são obtidas com o uso da decomposição ADM para tensores simétricos, segundo o grupo de rotações tri-dimensionais. A variável N_m está associada à parte vetorial do campo sobre a "segunda" hipersuperfície; a variável N não aparece nas equações, mas foi possível, através da forma de p_{mn}, determinada pelo Sanduíche, e de sua lei de transformação pelo grupo de gauge, achar uma equação para N; p_{mn}, associado a essas soluções é um tensor do tipo transversal. Esses resultados estão em acôrdo com o método ADM para a aproximação linear.

Mostramos, ainda, que, na teoria não linear, a imposição de que o campo se propague, localmente, com traço nulo e divergência nula leva a soluções únicas para o TSC. Como a decomposição ADM usual (existe uma generalização para espaços curvos) só é válida num espaço chato, o que fizemos foi mostrar que, num sistema de coordenadas, no qual a tri-geometria seja localmente chata, pode-se "preencher" o Sanduíche com variáveis do tipo TT.

No apêndice, aplicamos (I) ao campo eletromagnético. O TSC é trivial e obtivemos as soluções transversais esperadas. Foi possível formular um SC, por meio de um desenvolvimento em série das variáveis canônicas em torno da "primeira" hipersuperfície: soluções únicas foram achadas, ao menos formalmente, em termos das componentes transversais dos dados do problema.

Empregamos a seguinte notação:

1) índices gregos: 0,1,2,3

2) índices latinos: 1,2,3

3) assinatura: -2

4) letras cursivas para tensor de Ricci e escalar de curvatura se referem à geometrias quadri-dimensional e letras de imprensa, à geometria tri-dimensional. Assim, $\mathcal{R}_{mn}$, $\mathcal{R}$ são entidades da geometria quadri-dimensional; R_{mn}, R são entidades da geometria tri-dimensional.

5) a afinidade da geometria quadri-dimensional é indicada pelo símbolo de Christoffel:

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$$

enquanto a afinidade da geometria tri-dimensional é indicada por Γ^{r}_{mn} .

6) derivadas covariantes construídas com afinidades da quadri-geome

tria são indicadas por ponto e vírgula (;) e, na tri-geometria, por barra. Por exemplo,

$$V_{m;n} = V_{m,n} - \{ {}^{\rho}_{mn} \} V_{\rho}$$

$$V_{m|n} = V_{m,n} - \Gamma^{r}_{mn} V_{r}$$

1. FORMULAÇÃO CANÔNICA PARA O CAMPO GRAVITACIONAL

Seja uma teoria de campo, cujas equações de movimento podem ser obtidas a partir de um princípio variacional. A integração das correspondentes equações de Euler-Lagrange depende do enunciado de um Problema do Valor Inicial[9]: Dados uma hipersuperfície tri-dimensional imersa numa variedade espaço-tempo, os valores das variáveis de campo e um número suficiente de suas derivadas normais, construir uma solução das equações de movimento da teoria, que se reduza a esses valores na hipersuperfície.

A natureza da hipersuperfície e dos dados iniciais depende, em geral, das variáveis envolvidas e de suas equações de movimento. Para teorias satisfazendo a equações do tipo hiperbólico (que é o caso do campo gravitacional, desde que a métrica é indefinida), uma superfície inicial conveniente é aquela em que as normais, ℓ_{μ}, obedecem à desigualdade $A^{\mu\nu} \ell_{\mu} \ell_{\nu} > 0$, $A^{\mu\nu}$ sendo os coeficientes dos termos da equação da teoria, com maior ordem de derivação na direção normal[9]. Para teorias em que os $A^{\mu\nu}$ coincidem com as componentes do tensor métrico, $g^{\mu\nu}$ vem $g^{\mu\nu} \ell_{\mu} \ell_{\nu} > 0$ e a hipersuperfície inicial é do tipo-espaço. Os dados iniciais para essas superfícies serão o valor do campo e de suas derivadas normais primeiras sobre a hipersuperfície, desde que as equações do campo sejam equações diferenciais de segunda ordem. Supondo que, localmente, exista um sistema de coordenadas em que $\ell^{\mu} = \delta^{\mu}_{o}(g^{oo})^{-1/2}$, as derivadas normais primeiras serão proporcionais à derivada temporal: Fica, assim, definido um Problema de Cauchy.

O teorema de Cauchy -Kowalewski estabelece que o problema do valor inicial admite solução única, desde que seja possível explicitar as equações do movimento para a derivada normal de maior ordem das variáveis de campo[9]; por exemplo, explicitar para derivadas segundas normais à hipersuperfície, no caso de equações diferenciais de segunda ordem.

Dadas as equações que descrevem algum sistema, tem-se a liberdade de fazer transformações de coordenadas,

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} , \quad Y'_{A}(x') = Y_{A}(x) + \delta Y_{A}(x)$$

onde os descritores, ξ^{μ}, são funções de pontos do espaço-tempo; ou transformações nas variáveis de campo,

$$Y_{A}(x) \to Y'_{A}(x) = Y_{A}(x) + h_{A}(x); \quad x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu}.$$

onde $h_{A}(x)$ são funções de pontos de espaço-tempo: essas transformações deixam invariante a forma das equações da teoria e relacionam descrições equivalentes do sistema. Tais grupos de transformações podem ser divididos em duas classes[10]: a primeira, $\{G_{p}\}$, onde os decritores são funções dadas de um número finito, p, de parâmetros e outra, $\{G_{\infty q}\}$, caracterizada por um conjunto de q funções. A invariância da integral de ação sob $\{ G_p \}$ dá origem à conservação de um conjunto de p funcionais das variáveis de campo (teorema de Nöether) e a invariância sob $\{ G_{\infty q} \}$, aqui chamado grupo de gauge, dá origem a um conjunto de q identidades (identidades de Bianchi), envolvendo as equações do campo. Pode-se mostrar[9], que, em conseqüência dessas identidades, os coeficientes dos termos das equações do movimento, com maior ordem de derivação na direção normal à hipersuperfície, formam uma matriz singular e, portanto, não é possível explicitar as equações para a derivada normal de maior ordem, para todas as variáveis de campo. Conseqüentemente, o Problema de Cauchy não é bem definido nas teorias gauge-invariantes.

A passagem para o formalismo canônico envolve a definição dos momenta conjugados

$$p^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_{A,0}} \equiv p^A(y_A;\, y_{A,0})$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade Lagrangeana do sistema. O sistema é descrito em termos das variáveis (Π^A, y_A), obtidas do conjunto $(y_A;\, y_{A,0})$ por uma transformação de Legendre. O Jacobiano da transformação é o determinante construído com a matriz

$$\frac{\partial p^A}{\partial y_{B,0}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_{A,0}\, \partial y_{B,0}}$$

que é, justamente, a matriz dos coeficientes dos termos em derivadas segundas no tempo (maior ordem de derivação nas teorias consideradas) nas equações de Euler-Lagrange. Portanto, se o jacobiano é nulo, o que acontece nas teorias gauge-invariantes, os momenta não são todos independentes*, o que equivale à existência de vínculos (<u>vínculos primários</u>[11]).

A Hamiltoniana não é univocamente definida, pois a adição à Hamiltoniana, de combinações lineares arbitrárias dos vínculos primários significa somar zeros (em "valor"). As equações canônicas envolverão portanto, coeficientes arbitrários[11].

A hipersuperfície do espaço de fase onde se processa o movimento está restrita pelos vínculos primários. Como o movimento gerado pela Hamiltoniana deve-se processar nessa hiperfuperfície, pois estados físicos são definidos nessa região e o movimento de estados físicos é uma coleção de tais estados, é uma condição de consistência[11] da teoria que vínculos primários se mantenham durante o movimento, isto é, tenham Parênteses de Poisson nulos com a Hamiltoniana. Nesse processo, novos vínculos podem ocorrer[11] e, caso ocorram, a condição de consistência deve ser imposta, até que se obtenha expressões identicamente nulas, por exemplo, combinação linear dos vínculos previamente achados. Aos vínculos assim introduzidos dá-se o nome de <u>vínculos secundários</u>[11]; diferem dos primários, no sentido que estes são conseqüência da definição dos momenta e aqueles envolvem as equações do movimento e, portanto as fontes do campo. Nesse processo, deve-se observar que os vínculos são <u>equações fracas</u> no sentido de Dirac[11], isto é, são expressões nulas somente so-

---

* Evidentemente, tem-se de considerar o "rank" da matriz Jacobina, que permita a pelo menos uma parte das variáveis ser independente na transformação.

bre a hipersuperfície de vínculo. Por hipersuperfície de vínculo entende-se a região do espaço de fase na qual todos os vínculos sejam simultaneamente válidos.

Os vínculos podem ser divididos em suas classes[11]:

a) Vínculos de Primeira Classe: Uma função (funcional) das variáveis canônicas que tenha Parênteses de Poisson nulos com todos os vínculos da teoria é dita de primeira classe. Demonstra-se[11] que o Parênteses de Poisson de duas grandezas de primeira classe é de primeira classe. Esses vínculos mapeiam a hipersuperfície de vínculos nela mesma e geram transformação de gauge[12]. A Hamiltoniana é um vínculo de primeira classe[12].

b) Vínculos de Segunda Classe: São os que têm Parênteses de Poisson não nulos com pelo menos um vínculo sobre a hipersuperfície de vínculos. Demonstra-se[12] que mapeiam pontos da hipersuperfície de vínculo em pontos fora da hipersuperfície de vínculos.

No formalismo canônico, a condição inicial do problema de Cauchy é um ponto $(\bar{\pi}^A, \bar{y}_A)$ no espaço de fase; uma solução das equações canônicas do campo é um ponto $(\dot{\pi}^A, \dot{y}_A)$, obtido do anterior através de variações $\delta\, \pi^A$, $\delta\, y_A$ geradas pela Hamiltoniana; o conjunto de todos os pontos assim obtidos, uns dos outros, forma uma trajetória no espaço de fase: a cada condição inicial corresponde uma trajetória e as várias trajetórias correspondentes a condições iniciais diferentes não se cruzam. Se a teoria é gauge-invariante, os vínculos primários e secundários eliminam variáveis cujos comportamentos não descrevem o sistema.

Como as equações envolvem coeficientes arbitrários, devido à não unicidade na definição da Hamiltoniana, a integração das equações depende, ainda, da escolha desses parâmetros, isto é, da fixação de uma gauge. Portanto, existe um conjunto de trajetórias que se cruzam na hipersuperfície limitada pelos vínculos primários e secundários e a restrição final ao espaço de fase é feita, impondo-se condições de gauge.

A Teoria da Relatividade Geral é invariante pelo grupo de transformações gerais de coordenadas, dependendo de quatro funções arbitrárias que contêm ∞^4 parâmetros e todos esses resultados se transportam para sua formulação canônica.

As equações de Einstein para o campo gravitacional na ausência de fonte são

$$G_{\mu\nu} \equiv \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 0 \tag{1.1}$$

onde o tensor de Ricci da geometria quadri-dimensional é definido por

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \{ {}^{\alpha}_{\mu\nu} \}_{,\nu} - \{ {}^{\alpha}_{\mu\nu} \}_{,\alpha} - \{ {}^{\alpha}_{\mu\beta} \} + \{ {}^{\alpha}_{\mu\beta} \}\{ {}^{\beta}_{\alpha\nu} \} \tag{1.2}$$

e

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu} \tag{1.3}$$

é o escalar quadri-dimensional de curvatura.

As equações (1.1) são obtidas a partir de um princípio variacional com densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, \mathcal{R} \tag{1.4}$$

ou, equivalentemente, por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left[\left\{ {\alpha \atop \mu\beta} \right\} \left\{ {\beta \atop \nu\alpha} \right\} - \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} \left\{ {\beta \atop \alpha\beta} \right\} \right] \tag{1.5}$$

que diferem por uma divergência total.

As Identidades de Bianchi do campo gravitacional são as quatro relações

$$G^{\mu\nu};\ \nu = 0$$

A Lagrangeana (1.5) pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(2) + \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(0) \tag{1.6}$$

onde $\mathcal{L}(2)$ é quadrática e homogênea nas derivadas temporais; $\mathcal{L}(1)$ é linear e homogêneas nessas derivadas e $\mathcal{L}(0)$ não contém derivadas temporais. Tem-se

$$\mathcal{L}(2) = \frac{1}{4} \sqrt{-g}\ \ g^{oo}\ g_{rs,o}\ g_{mn,o}\ (e^{rm}\ e^{sn} - e^{rs}\ e^{mn})$$

onde $e^{mn} = g^{mn} - \dfrac{g^{om}\ g^{on}}{g^{oo}}$. Observa-se que em $\mathcal{L}(2)$ não ocorrem derivadas $g_{o\mu,o}$.

Dirac[13] mostrou que se pode adicionar a (1.6) uma divergência total

$$\mathcal{D} = \left[(\sqrt{-g}\ g^{oo})_{,m}\ \frac{g^{om}}{g^{oo}} \right]_{,o} - \left[(\sqrt{-g}\ g^{oo})_{,o}\ \frac{g^{om}}{g^{oo}} \right]_{,m} \tag{1.7}$$

de forma que a nova densidade de Lagrangeana não contenha derivadas $g_{o\mu,o}$:

$$\mathcal{L}_D = \mathcal{L}(2) + (\mathcal{L}(1) + \mathfrak{D}) + \mathcal{L}(0)$$

$$\equiv \mathcal{L}(2) + \mathcal{L}^*(1) + \mathcal{L}(0) \qquad (1.8)$$

Utilizando esse fato, as correspondentes equações de Euler-Lagrange para o campo gravitacional podem-se escrever:

$$G^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{\mu\nu,o}\, \partial g_{mn,o}} g_{mn,oo} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{\mu\nu,o}\, \partial g_{\alpha\beta,i}} g_{\alpha\beta,io} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{\mu\nu,o}\, \partial g_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta,o} +$$

$$+ \frac{\delta L_D}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$$

ou

$$\begin{cases} G^{o\mu} \equiv \dfrac{\delta L_D}{\delta g_{o\mu}} = 0 \\[2ex] G^{ij} \equiv - \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{ij,o}\, \partial g_{mn,o}} g_{mn,oo} - \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{ij,o}\, \partial g_{\alpha\beta,m}} g_{\alpha\beta,mo} - \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_D}{\partial g_{ij,o}\, \partial g_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta,o} + \end{cases}$$

$$+ \frac{\delta L_D}{\delta g_{ij}} = 0$$

onde $L_D = L_D(g_{\mu\nu};\ g_{ij,o};\ g_{\mu\nu,r})$ é a Lagrangeana total e $\dfrac{\delta}{\delta g_{\alpha\beta}}$ indica derivada variacional.

Essas equações envolvem, apenas, derivadas temporais segundas das variáveis g_{mn}. Das dez equações, seis ($G^{ij} = 0$) são equações de propagação para essas variáveis, contendo parâmetros arbitrários, $g_{o\mu}$, e as quatro restantes ($G^{o\mu} \doteq 0$) são equações de vinculação entre os dados iniciais. O Problema de Cauchy se divide em duas etapas[14]:

a) Problema das Condições Iniciais: Consiste na procura dos dados de Cauchy satisfazendo,sobre a hipersuperfície inicial tipo-espaço, ao sistema $G^{o\mu} = 0$.

b) Problema da Evolução: Consiste na integração do sistema $G^{ij} = 0$ para os dados de Cauchy que satisfazem às condições do primeiro problema.

Bruhat demonstrou[15] que o Problema da Evolução tem uma única solução (a menos de transformações de coordenadas), numa vizinhança da hipersuperfície inicial.

NOTAÇÃO.

Está-se considerando os dados iniciais definidos sobre uma hipersuperfície tipo-espaço e que exista um sistema de coordenadas tal que, localmente, a equação da hipersuperfície seja x^0 = constante.

A existência de um campo vetorial tipo-tempo, ℓ_μ, local, fornece um método de construção de uma hipersuperfície tipo-espaço, normal a

ℓ_μ[10]. No sistema de coordenadas em que x^o = constante, essas normais têm expressões

$$\ell_\mu = \frac{\delta^o_\mu}{\sqrt{g^{oo}}}, \qquad \ell^\mu = \frac{g^{o\mu}}{\sqrt{g^{oo}}}, \qquad \ell_\mu \, \ell^\mu = 1; \tag{1.9}$$

x^1 classifica um ponto sobre a hipersuperfície e x^o continua o sistema de coordenadas fora da hipersuperfície.

As variáveis não dinâmicas, $g_{o\mu}$, são, por (1-9), utilizadas na fixação da hipersuperfície inicial.

D- INVARIÂNCIA[13]

D- invariante é uma função ou funcional, definida sobre uma dada hipersuperfície tipo-espaço, tri-demensional,imersa no espaço-tempo,cuja lei de transformação sob uma transformação infinitesimal de coordenadas, $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, não envolve as derivadas parciais do descritor, normais à hipersuperfície, isto é, não contém $\xi^\mu{}_{,\alpha} \, \ell^\alpha$. São objetos que independem, pois, da continuação do sistema de coordenadas imediatamente fora da hipersuperfície e permanecem invariantes por transformação de coordenadas que se reduzem à identidade sobre a hipersuperfície, embora sejam arbitrárias fora dela.

Demonstra-se[12], que as componentes espaciais de qualquer tensor covariante formam um D-invariante; as componentes espaciais de um tensor contravariante não formam um D-invariante, mas sua projeção sobre a hipersuperfície é um D-invariante. Por exemplo, são D-invariantes

$$T_{mn}(x)$$

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = B^{\mu}{}_{\alpha}\, B^{\nu}{}_{\beta}\, T^{\alpha\beta}\ (x)$$

onde $B^{\mu}{}_{\nu}$, é o operador de projeção sobre uma hipersuperfície tipo-espaço,

$$B^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \ell^{\mu}\, \ell_{\nu}$$

se $f(x)$ é um escalar, f,i e $f,\alpha\, \ell^{\alpha}$ são D-invariantes.

Agora, é possível associar uma geometria intrínseca à hipersuperfície tri-dimensional considerada. Com (1.9), o tensor métrico é o D-invariante $g_{mn}(x)$, $-\det(g_{mn}) = \rho > 0$; sua inversa é o D-invariante

$$e^{mn} = g^{mn} - \frac{g^{om}\, g^{on}}{g^{oo}}\ , \quad e^{ma}\, g_{an} = \delta^{m}_{n}$$

e g_{mn}, e^{mn} são usados para abaixar e levantar índices na geometria tri-dimensional. A métrica tri-dimensional é dada por

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^i < 0$$

onde x^i são coordenadas de pontos sobre a hipersuperfície.

As quantidades D-invariantes são convenientes na descrição da dinâmica do campo gravitacional, desde que não são afetadas por transformações de coordenadas fora da hipersuperfície e toda variação normal que sofrem é gerada por movimentos físicos e, em particular, pela Hamiltoniana. Assim, quantidades dinâmicas serão definidas a partir de D-invariantes e o movimento do sistema consistirá em levar D-invariantes de uma hipersuperfície tipo-espaço em outra.

Diferentes valores das variáveis $g_{o\mu}$ correspondem a diferentes escolhas da hipersuperfície $x^o = t + \varepsilon, \varepsilon$ infinitesimal, e a diferentes sistemas de coordenadas x^r na hipersuperfície $x^o = t + \varepsilon$; a cada escolha dessas variáveis corresponde uma fixação do sistema de coordenadas.

VARIÁVEIS CANÔNICAS

Além dos D-invariantes g_{mn}, variáveis de configuração, tem-se, também, os D-invariantes[13]

$$p^{mn} \equiv \frac{\partial \mathscr{L} D}{\partial g_{mn,o}} = \sqrt{\rho}\ \frac{\{\overset{o}{ab}\}}{\sqrt{g^{oo}}}\ (e^{ma}\ e^{nb} - e^{mn}\ e^{ab}) \qquad (1.10)$$

Em relação à geometria tri-dimensional, $\{\overset{o}{a\,b}\}$ se comporta como tensor de segunda ordem; g_{om}, como vetor; g^{oo}, como escalar; portanto, p^{mn} é uma densidade tensorial de peso + 1[12] .

As componentes $p^{o\mu}$ são eliminadas trivialmente (vínculos primários):

$$p^{o\mu} = \frac{\partial \mathscr{L} D}{\partial g_{o\mu,o}} \equiv 0 \qquad (1.11)$$

Os Parênteses de Poisson fundamentais são definidos por:

$$\left[p^{mn}(x^r,x^o),\quad p^{rs}(x^{r'},\ x^o)\right] = \left[g_{mn}(x^r,x^o),\ g_{rs}(x^{r'},\ x^o)\right] = 0$$

$$\left[g_{mn}(x^r,x^o),\quad p^{rs}(x^{r'},\ x^o)\right] = \frac{1}{2}\,(\delta^r_m\,\delta^s_n + \delta^s_m\,\delta^r_n)\ \delta(x^r - x^{r'})$$

HAMILTONIANA[13]

Seja uma variável dinâmica, η, na superfície $x^o = t$, tal que dependa de g_{mn}, mas não de $g_{o\mu}$; η pode ser, ou não, localizada em um ponto x^r da hipersuperfície.

Por uma transformação infinitesimal, $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + a^\mu(x^r)$, a variação de η será linear (em primeira ordem) nas funções a^μ:

$$\delta\eta = \int_{x^o} \xi_\mu\ a^\mu\ d^3x \tag{1.12}$$

onde ξ_μ são funções de x^1, x^2, x^3, independentes de a^μ. Tem-se:

$$\eta_{,o} = \int_{x^o} \xi_o\ d^3x$$

Com a definição do deslocamento normal de um vetor:

$$\xi_L = \ell^\mu\ \xi_\mu \equiv \frac{g^{o\mu}}{\sqrt{g^{oo}}}\ \xi_\mu \equiv \frac{g^{oo}\xi_o}{\sqrt{g^{oo}}} + \frac{g^{om}\ \xi_m}{\sqrt{g^{oo}}}$$

explicitando para ξ_o :

$$\xi_o = \frac{\xi_L}{\sqrt{g^{oo}}} - \frac{g^{om}\,\xi_m}{g^{oo}} = \frac{1}{\sqrt{g^{oo}}}\,\xi_L + g_{om}\,e^{mn}\,\xi_n \;,$$

onde se usou $\quad e^{mn}\,g_{on} = -\dfrac{g^{om}}{g^{oo}}$

Logo,

$$\eta_{,o} = \int_{x^o} \left[\frac{\xi_L}{\sqrt{g^{oo}}} + g_{on}\,e^{nm}\,\xi_m\right] d^3x \qquad (1.13)$$

ξ_L e ξ_m são determinados por (1.12) e se referem, respectivamente, a deslocamentos normal e tangencial à hipersuperfície, pois, por definição, para qualquer vetor, $\xi_\mu = \ell_\mu\,\xi + {}_{\parallel}\xi_\mu$, onde ${}_{\parallel}\xi_\mu = B^\alpha_\mu\,\xi_\alpha$ e ${}_{\parallel}\xi_m = \xi_m$; independem, pois, de $g_{o\mu}$. Obtêm-se, então, equações de movimento na forma (1.13), a partir de uma Hamiltoniana:

$$H = \int_{x^o} \left[\frac{\mathcal{H}_L}{\sqrt{g^{oo}}} + g_{ro}\,e^{rs}\,\mathcal{H}_s\right] d^3x \qquad (1.14)$$

onde $\mathcal{H}_L$ e $\mathcal{H}_m$ são independentes de $g_{o\mu}$, desde que

$$\delta_{\mathcal{H}_L}\eta = \left[\eta, \mathcal{H}_L\right] = \xi_L \;,\; \delta_{\mathcal{H}^r}\eta = \left[\eta, e^{rs}\,\mathcal{H}_s\right] = e^{rs}\,\xi_s \qquad (1.15)$$

De (1.15), interpreta-se $\mathcal{H}^m$ como gerador das transformações canônicas infinitesimais de coordenadas sobre a hipersuperfície e $\mathcal{H}_L$, das transformações canônicas de coordenadas fora da hipersuperfície.

Da imposição de que os vínculos $p^{o\mu} \equiv o$ sejam mantidos no tempo, vem que:

$$\left[p^{om}(x^r, x^o), H(x^o)\right] = e^{ma}\, \mathscr{H}_a(x^r, x^o) + \frac{1}{2}\, \frac{g^{om}}{\sqrt{g^{oo}}}\, \mathscr{H}_L(x^r, x^o) = 0$$

$$\left[p^{oo}(x^r, x^o), H(x^o)\right] = -\frac{1}{2}\, \sqrt{g^{oo}}\, \mathscr{H}_L(x^r, x^o) = 0$$

e, conseqüentemente,

$$\mathscr{H}_r = 0 , \qquad \mathscr{H}_L = 0 \tag{1.16}$$

serão os vínculos secundários. Sua expressão foi obtida por Dirac[13]:

$$\mathscr{H}^m = -\,2p^{mn}{}_{|n} = 0 \tag{1.17}$$

onde $|$ é a derivada covariante calculada com a afinidade da geometria tri-dimensional;

$$\mathscr{H}_L = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,(p^{ab}\, p_{ab} - \frac{1}{2}\, p^2) + \sqrt{\rho}\, R \tag{1.18}$$

onde R é o escalar de curvatura da geometria tri-dimensional e $p = e^{mn}p_{mn}$.

Demonstra-se[12] que o Parênteses de Poisson entre $\mathscr{H}_L = 0$ e $\mathscr{H}^m = 0$ é uma combinação linear dos próprios vínculos; são, pois, de primeira classe e esgotam os vínculos da teoria.

EQUAÇÕES CANÔNICAS

Com a notação

$$g_{om} = N_m \ , \qquad \frac{1}{\sqrt{g^{oo}}} = N \tag{1.19}$$

tem-se:

$$\underset{\mathcal{H}_r}{\delta} g_{mn} = \int [\, g_{mn}, N'_r \mathcal{H}^{r'}]\, d^3 x' = N_{m|n} + N_{n|m} \tag{1.20}$$

$$\underset{\mathcal{H}_L}{\delta} g_{mn} = \int [\, g_{mn}, N' \mathcal{H}'_L \,]\, d^3 x' = \frac{2N}{\sqrt{\rho}}(p_{mn} - \frac{1}{2}\, p\, g_{mn}) \tag{1.21}$$

$$\underset{\mathcal{H}_r}{\delta} p^{mn} = \int [\, p^{mn}, N'_r \mathcal{H}^{r'}]\, d^3 x' = - N^n{}_{|r}\, p^{rm} - N^m{}_{|r}\, p^{rn} + (N^r p^{nm})_{|r} \tag{1.22}$$

$$\underset{\mathcal{H}_L}{\delta} p^{mn} = \int [\, p^{mn}, N' \mathcal{H}'_L \,]\, d^3 x' = -N \sqrt{\rho}\, R^{mn} - \frac{N}{2} \sqrt{\rho}\, e^{mn} R \, +$$

$$+ \frac{N}{2\sqrt{\rho}}\, e^{mn} (p^{ab} p_{ab} - \frac{1}{2}\, p^2) - \frac{2N}{\sqrt{\rho}}\, (p^{ma}\, p^n_a - \frac{1}{2}\, p\, p^{mn}) \, +$$

$$+ \sqrt{\rho}\, (N^{|mn} - e^{mn}\, N^{|a}{}_a) \tag{1.23}$$

e

$$g_{mn,o} = N_{m|n} + N_{n|m} + \frac{2N}{\sqrt{\rho}}\, (p^{mn} - \frac{1}{2}\, p\, g_{mn}) \tag{1.24}$$

$$p^{mn}{}_{,0} = - N^{n}{}_{|r}\, p^{rm} - N^{m}{}_{|r}\, p^{rn} + (N^{r}\, p^{mn})_{|r} - N\sqrt{\rho}\, R^{mn} - \frac{N}{2}\sqrt{\rho}\; e^{mn}R +$$

$$+ \frac{N}{2\sqrt{\rho}}\, e^{mn}\,(p^{ab}\, p_{ab} - \frac{1}{2}\, p^{2}) - \frac{2N}{\sqrt{\rho}}\,(p^{ma}\, p^{n}_{a} - \frac{1}{2}\, p\, p^{mn}) +$$

$$+ \sqrt{\rho}\,(N^{|mn} - e^{mn}\, N^{|a}{}_{a}) \qquad (1.25)$$

A gauge - invariância da teoria elimina os $g_{o\mu}$ como variáveis canônicas, desde que estão associados ao sistema de coordenadas, e os momenta correspondentes, $p^{o\mu}$, serão os vínculos primários. Das 12 variáveis restantes, (p^{mn}, g_{mn}), 4 são eliminadas pelos vínculos secundários, restando 8. As variáveis $N_m = g_{om}$ e $N = (g^{oo})^{-1/2}$ ainda são retidas nas equações do movimento, na forma de parâmetros arbitrários, que são usados para fixar a gauge. A integração das equações só é possível após a fixação do sistema de coordenadas, o que elimina mais 4 variáveis, restando somente 4 graus de liberdade para descrever o campo gravitacional.

Uma vez fixado o sistema de coordenadas, o que não é de forma alguma feito de modo único, desde que a escolha de coordenadas é arbitrária, poder-se-ia, em princípio, passar à integração das equações. Entretanto, para tempos finitos posteriores, não é claro que o sistema de coordenadas inicialmente fixado deva-se manter; pelo contrário, supõe-se que o campo gravitacional determina o comportamento de réguas e relógios e isso de tal forma que qualquer comportamento é admissível (com a restrição de determinarem uma geometria Riemanniana)*. Portanto, define-se

CLASSE DE EQUIVALÊNCIA[16]

Dadas as condições iniciais em uma hipersuperfície tipo-espaço, uma solução das equações do campo é um par (p^{mn}, g_{mn}), obtido a partir dos dados iniciais via a Hamiltoniana D-variante $H = \int (N_m \mathcal{H}^m + N \mathcal{H}_L) d^3x$; o conjunto de todas as soluções que podem ser transformadas umas nas outras por simples reescolha dos descritores N_m, N é chamado <u>classe de equivalência de soluções</u>[16].

Os membros da classe de equivalência são diferentes descrições da mesma situação física (no sentido de que correspondem a diferentes escolhas da gauge): no espaço de fase, a classe de equivalência é formada por um conjunto de trajetórias que se interceptam (na superfície de vínculo $p^{\mu o} \equiv 0, \mathcal{H}^m = 0$, $\mathcal{H}_L = 0$) e é, portanto, uma trajetória no espaço de fase reduzido pelas condições de coordenadas. A classe é, pois, <u>univocamente</u> determinada pelas condições iniciais e pelas equações do campo e, por isso, é dita <u>causal</u>[16] com as condições iniciais. Obviamente, diferentes classes de equivalência não se interceptam.

A identificação da classe de equivalência permitiria, pois, definir univocamente a dinâmica do campo gravitacional. Métodos associados a essa idéia são os "observáveis - constantes do movimento"[16] de

---

(*) Observa-se que, a rigor, isso só é válido para campos gravitacionais fortes.

Bergmann e o formalismo Hamilton-Jacobi[17, 18, 19, 20, 21]

De particular interesse são as subclasses de equivalência, formadas pelas geometrias tri-dimensionais: chama-se <u>tri-geometria</u>, e se indica $^3\mathcal{G}$, ao conjunto dos $g_{mn}(x)$ (D-invariantes) relacionados por transformações geradas por $\mathcal{H}_m$ (transformações de coordenadas tri-dimensionais).

2. CONJETURA SANDUÍCHE

A Conjetura Sanduíche (SC) é uma alternativa de formulação de um problema do valor inicial, canônico, para o campo gravitacional. Ela propõe que do conhecimento de duas tri-geometrias seja possível determinar, via equações canônicas do campo, a classe de equivalência à qual pertencem e que essa classe seja única.

FORMULAÇÃO GERAL[1]

Seja uma teoria de campo, descrita pelas variáveis canônicas $(p^A(x),\ Y_A(x))$, $1 \leq A \leq N$, com $M \leq N$ vínculos de primeira classe, $C_a(p^A(x),\ Y_A(x)) = 0$, $1 \leq a \leq M$:

$$[\ C_a,\ C_b\ ] \tag{2.1}$$

Esses vínculos geram transformações de gauge e, a partir de um $Y_A(x)$, são utilizados para construir uma classe de equivalência de Y_A's, o análogo à $^3\mathcal{G}$.

CONJETURA SANDUÍCHE (SC):

Dados $Y_A(x^r,\ x^o = t') \equiv Y_A'(\vec{x})$ e $Y_A(x^r,\ x^o = t'') \equiv Y_A''(\vec{x})$, assumindo valores, respectivamente, em duas hipersuperfícies tipo-espaço diferentes, $x^o = t'$ e $x^o = t''$ (Y_A' e Y_A'' são dois pontos no espaço de configuração), existe uma classe de equivalência contendo os dois pontos e, se existe, é única?

A classe de equivalência é, por definição, determinada pelo conjunto dos $(p^A(x), Y_A(x))$, soluções das equações da teoria, e das possíveis condições de gauge que relacionam soluções equivalentes. Assim,

a) equações do Sanduíche:

$$\left.\begin{aligned} C_a &= 0 \\ \mathcal{H} &= C_a\, N^a = 0 \\ Y_{A,o} &= \frac{\delta H}{\delta p_A} \\ p^A{}_{,o} &= -\frac{\delta H}{\delta Y_A} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

onde os N^a são funções arbitrárias dos (p^A, y_A).

b) dados iniciais: $y_A'(\vec{x})$, $y_A''(\vec{x})$ em $x^o = t'$ e $x^o = t''(t'<t'')$, respectivamente.

b) incógnitas: $Y_A(\vec{x}, x^o)$

$p^A\ (\vec{x}, x^o)$

$N^a\ (p^A(x), Y_A(x)),\qquad t' \leq x \leq t''$

Conjetura Sanduíche no limite em que as hipersuperfícies coincidem (TSC):

O problema é simplificado, se se supoẽ

$$Y_A(x^r,t) = Y_A(x^r,t') + (t-t')\,\frac{\partial Y_A(x^r,t')}{\partial x^o}\quad ,\quad t' \leq t \leq t''\ ;$$

$Y_A(x^r,t)$, $t' \leq t \leq t''$, fica determinado pela expressão acima, desde que $t-t'$ e $Y'_{A,o} \equiv \dfrac{\partial Y_A(x^r,t)}{\partial x^o}$ sejam dados. Nessa aproximação, pode-se considerar, portanto, Y'_A e $Y'_{A,o}$ como dados e perguntar por p^A, N^a, em $t' \leq t \leq t''$. O número de incógnitas é reduzido e, conseqüentemente, um dos grupos de equações se torna desncessário à determinação das soluções; é conveniente retirar do conjunto $p^A{}_{,o} = -\dfrac{\delta H}{\delta Y_A}$, desde que não contém todos os dados iniciais.

Um esquema desse, só tem sentido para o campo gravitacional, no limite em que $\delta t \to o$; nesse limite, o TSC se enuncia:

a) equações do Sanduíche:

$$\left.\begin{aligned} & C_a = 0 \\ & \mathcal{L} = N^a\, C_a = 0 \\ & Y_{A,o} = \frac{\delta H}{\delta p^A} \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

b) dados iniciais:

$$Y_A\,(x^r,t') \equiv Y_A'(x^r)$$

$$Y_{A,o}\,(x^r,t') \equiv Y'_{A,o}\,(x^r)$$

c) incógnitas: $p^A(x^r,x^o)$, N^a em $x^o = t'$

O Sanduíche define a trajetória clássica do campo entre as hipersuperfícies $x^o = t'$ e $x^o = t''$ como o conjunto dos valores assumidos pelos Y_A numa sucessão de hipersuperfícies tipo-espaço:

$$
\begin{array}{llll}
Y_A\ (x^r,\ x^o = t') & \equiv Y'_A(\vec{x}) & \text{em} & x^o = t' \\
Y_A\ (x^r,\ x^o = t' + \varepsilon) & \equiv Y^1_A\ (\vec{x}) & '' & x^o = t' + \varepsilon \\
\hline
Y_A\ (x^r,\ x^o = t'' - \varepsilon) & \equiv Y^n_A\ (\vec{x}) & '' & x^o = t' - \varepsilon \\
Y_A\ (x^r,\ x^o = t'') & \equiv Y''_A(\vec{x}) & '' & x^o = t'\ (*)
\end{array}
$$

(*) O método de Hamilton-Jacobi para esse problema envolve um funcional de ação, $S(Y''_A \mid Y'_A)$, que gera as transformações canônicas que levam aos valores iniciais do problema. Esse tipo de ação é utilizado para construir propagadores na teoria quântica, definidos, segundo Feynman[6], por

$$
\psi(Y''_A;\ t'') = \lim_{\delta t \to o} \int \left[\exp \frac{1}{\hbar} \sum_{i=\infty}^{N} S(Y^{i+1}_A, Y^i_A) \right] \prod_{A=1}^{N} \left[\frac{dY^n_A(\vec{x})}{\lambda} \frac{dY^{n-1}_A(\vec{x})}{\lambda} \cdots \right.
$$

$$
\left. \cdots \frac{dY'_A(\vec{x})}{\lambda} \right]
$$

onde ψ é a função de Schrödinger, S é a ação clássica, os λ's são fatores de normalização e a integração é feita sobre todos os valores possíveis dos $Y_A(\vec{x})$ nas várias hipersuperfícies (integral de trajetória de Feynman)[6].

TSC PARA O CAMPO GRAVITACIONAL

(I)[2]

Aplicando as considerações anteriores ao campo gravitacional e usando as variáveis canônicas introduzidas por Dirac, Komar[2] formulou um TSC completamente local para a Teoria de Einstein.

A classe de equivalência é determinada, se, a partir de

a) dados iniciais:

$$g_{mn}(x^r, x^o)$$

$$h_{mn}(x^r, x^o) = g_{mn,o} \quad \text{em} \quad x^o = t' = \text{constante}$$

Eventualmente serão dadas condições de contôrno sobre a hipersuperfície tipo-espaço.

via

b) equações: vinculos de 1a. classe

$$\mathcal{L}^m \stackrel{\prime}{=} -2p^{mn}{}_{|n} = 0 \qquad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_L = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,(p^{ab}\,p_{ab} - \frac{1}{2}\,p^2) + \sqrt{\rho}\,R = 0 \qquad (2.5)$$

equações de propagação

$$h_{mn} = N_{m|n} + N_{n\,m} + \frac{2N}{\sqrt{\rho}}(p_{mn} - \frac{1}{2}p\,g_{mn}) \qquad (2.6)$$

for possível obter:

c) incógnitas:

$p^{mn}(x^r, x^o)$ e as condições de coordenadas

N_m, N , em $x^o = t' =$ constante

Calculando o traço de (2.6) e explicitando essa equação para p_{mn}:

$$p = - \frac{\sqrt{\rho}}{N} (h - 2N^a{}_{|a}) \tag{2.7}$$

$$p_{mn} = \frac{\sqrt{\rho}}{N} \left[h_{mn} - N_{m|n} - N_{m|n} - g_{mn}(h - 2N^a{}_{|a}) \right] \tag{2.8}$$

A substituição de (2.8) no vínculo $\mathcal{H}_L$ leva a uma equação algébrica para N:

$$N^2 = - \frac{\psi}{R} \tag{2.9}$$

$$\psi = \frac{1}{4} (h_{mn} - N_{m|n} - N_{n|m})(h^{mn} - N^{m|n} - N^{n|m}) - - \frac{1}{4}(h - 2N^a{}_{|a})^2 \tag{2.10}$$

Substituindo (2.10), (2.9) e (2.8) no vínculo $\mathcal{H}^m = 0$, obtém-se o conjunto de equações para N_m:

$$\left[- N^{m|a}{}_a + N^{a|m}{}_a + R^m{}_a N^a + h^{mn}{}_{|n} - e^{mn} h_{|n} \right] \left[(h_{rs} - N_{r|s} - N_{s|r}) \times (h^{rs} - N^{r|s} - N^{s|r}) - (h - 2N^b{}_{|b})^2\right] - 4\left[- N^{m|n} - N^{n|m} + 2N^a{}_{|a} + h^{mn} - e^{mn}{}_{|h}\right] \left[(h_{rs|n} - 2N_{r|sn})(h^{rs} - N^{r|s} - N^{s|r}) - (h - 2N^b{}_{|b})(h_{|n} - 2N^j{}_{|jn}) \right] = 0 \tag{2.11}$$

A solução $N^m = \xi^m (g_{ab}, h_{ab})$, substituída em (2.10) e (2.9), levaria à solução $N = \xi (g_{ab}, h_{ab})$. Essas soluções das equações de vínculo, ξ^m e ξ, forneceriam, via (2.8), variáveis p_{mn} compatíveis com os vínculos e funções dos dados iniciais: $p_{mn} = p_{mn} (g_{ab}, h_{ab})$; pelo processo de obtenção das soluções, g_{ab} é compatível com os vínculos. O teorema de Bruhat permitiria concluir que estaria determinado um espaço-tempo único, a menos de transformações de coordenadas[2].

Entretanto, (2.11) é um sistema de equações diferenciais parciais, de segunda ordem, não homogêneas, não lineares e nada se pode dizer, a priori, sobre existência e unicidade de solução[2].

Dificuldades aparecem, ainda, com as situações especiais:

a) os dados iniciais resultam em $R = 0$. Nesse caso, ter-se-ia, em lugar de (2.9), $\psi = - RN^2$. Essa expressão não pode ser resolvida para N, que permanece, então, indeterminado. Fazendo $R = 0$, resulta que os N^m teriam de obedecer à relação $\psi = 0$, contendo termos quadráticos em suas derivadas, além de serem soluções dos vínculos $\mathscr{L}^m = 0$; como esses vínculos contêm N, o sistema não é superabundante, mas desde que N é indeterminado, o mesmo acontece com N^m.

b) ao substituir $N^m = \xi^m (g_{ab}, h_{ab})$ em (2.10) pode resultar, eventualmente, $N^2 = - \dfrac{\psi}{R} < 0$. De modo geral[2], essa situação pode ser contornada, dando-se $N^m(x^2, x^3)$ e $\dfrac{\partial N^m}{\partial x^1} (x^2, x^3)$, arbitrariamente, numa hipersuperfície x^1 = constante, de tal forma que, inicialmente,

$N^2 > 0$ e (2.11) possa ser resolvida para $\dfrac{\partial^2 \cdot N^m}{\partial x^2\, \partial x^1}$ em termos dos dados iniciais. Entretanto, devido à arbitrariedade de escolha de seis funções arbitrárias de duas variáveis, as soluções não são únicas.

Em resumo, além de (2.11) não ser de análise fácil, os casos especiais indicam soluções não únicas.

(II)[1]

Bergmann[1] formulou o TSC sob um ponto de vista complementar ao anterior, analisando a estabilidade das soluções de (I), isto é, se existe solução para o Sanduíche, numa vizinhança de uma solução conhecida: Supondo que variações da trajetória inicial levem a outra solução particular do problema, existe solução das equações do Sanduíche, agora equações para os acréscimos, consistentes, com essa imposição? Em geral, se o problema modificado não tem solução, o problema original tem solução única; caso contrário, indica a existência de uma solução na vizinhança da solução original. Essa variação pode ser feita de duas maneiras:

a) variando os dados iniciais e a trajetória. Por outro lado, essa variação dos dados iniciais pode ser feita variando g_{mn} ou h_{mn} ou ambos.

b) mantendo os dados iniciais e variando a trajetória. Obviamente, esse é um caso particular de (a), para variações nulas dos dados iniciais.

Supõe-se então, variações infinitesimais, apenas numa hipersuperfície,

$$h_{mn} \to h_{mn} + a_{mn} \tag{2.12}$$

e variações infinitesimais na trajetória

$$p^{mn} \rightarrow p^{mn} + \pi^{mn} \qquad (2.13)$$

$$N_m \rightarrow N_m + \eta_m \qquad (2.14)$$

$$N \rightarrow N + \eta \qquad (2.15)$$

onde p^{mn}, N_m e N são soluções do Sanduíche.

As equações de vínculo se tornam, desprezando termos quadráticos nas variações:

$$\mathcal{H}^m = -2\,\pi^{mn}{}_{|n} = 0 \qquad (2.4)'$$

$$\mathcal{H}_L = \frac{2}{\sqrt{\rho}}\left(p^{mn} - \frac{1}{2}\,p\,e^{mn}\right)\pi_{mn} = 0 \quad ; \qquad (2.5)'$$

equações de propagação:

$$a_{mn} = \eta_{m|n} + \eta_{n|m} + \frac{2N}{\sqrt{\rho}}\left(\pi_{mn} - \frac{1}{2}\,\pi\, g_{mn}\right) + \frac{2\eta}{\sqrt{\rho}}\left(p_{mn} - \frac{1}{2}\,p\, g_{mn}\right) \qquad (2.6)'$$

(2.4)', (2.5)' e (2.6)' formam um sistema de equações a ser resolvido para π^{mn}, η_m e η.

Seguindo a técnica anterior, π_{mn} deve ser explicitado de (2.6)':

$$\pi = -\frac{\sqrt{\rho}}{N}\left(a - 2\,\eta^{a}{}_{|a}\right) - \frac{\eta}{N}\,p \qquad (2.7)'$$

$$\pi_{mn} = \frac{\sqrt{\rho}}{N}(a_{mn} - ag_{mn}) - \frac{\sqrt{\rho}}{N}(\eta_{m|n} + \eta_{n|m} - 2g_{mn}\,\eta^{a}{}_{|a}) - \frac{\eta}{N} p_{mn} \qquad (2.8)'$$

Substituindo em (2.5)':

$$(a_{mn} - 2\,\eta_{m|n})p^{mn} + 2\,\eta R = 0 \qquad (2.9)'$$

(2.9)' pode ser resolvida algebricamente para η:

$$\eta = -\frac{(a_{mn} - 2\eta_{m|n})}{2R} p^{mn} \qquad (2.9)''$$

De (2.9)", ainda aqui o caso $R = 0$ é singular, na medida em que elimina de (2.9)" referência à variável η.

As equações (2.4)' deverão ser resolvidas para η_m, após substituição de (2.9)". O sistema obtido é não homogêneo, linear, com coeficientes dependendo da métrica g_{mn}, dos momenta p^{mn}, todos dados[1]. Nada se pode dizer, de modo geral, sobre o caráter elíptico, hiperbólico ou parabólico do sistema[1]. De fato, esse caráter pode variar de uma região finita a outra do domínio tri-dimensional, desde que o tramento dado é local.

Uma particularidade desse tratamento é que as equações (2.9)" e (2.4)' contêm referências aos g_{mn} e p^{mn} e, portanto, poderá haver especificações de g_{mn} e h_{mn}, para as quais (2.9)" e (2.4)' se tornem mutuamente incompatíveis[1,2].

Em resumo, o esquema não é concludente e indica eventuais soluções não estáveis (R = 0).

(III)[3]

Empregando um novo conjunto de variáveis canônicas, Komar[3] reduziu o problema do Sanduíche a um problema de Dirichlet com condições de contorno em um hipersuperfície bi-dimensional, limitando a hipersuperfície tipo-espaço.

Define-se a transformação canônica[21]

$$g_{mn} = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \, |\bar{p}| \, \bar{g}_{mn} \tag{2.16}$$

$$p^{mn} = \sqrt{-\bar{g}} \, \frac{1}{|\bar{p}|} \left(\bar{p}^{mn} - \bar{p} \, \bar{e}^{mn} \right) \tag{2.17}$$

onde a barra indica as novas variáveis; $\bar{g}$ é o determinante da matriz $(\bar{g}_{ab})$; $\bar{p}$ é o traço de $\bar{p}_{mn}$ e $\bar{p}_{mn}$ é uma densidade tensorial de peso + 1, relativo à ${}^3\mathcal{G}$; $|\;|$ indica valor absoluto; $\bar{e}^{mn}$ é a inversa de $\bar{g}_{mn}$.

$$p \equiv g_{mn} \, p^{mn} = - 2(\bar{g}_{mn} \, \bar{p}^{mn}) \equiv - 2 \, \bar{p} \tag{2.18}$$

Os vínculos se tornam:

$$\bar{\mathcal{H}}^{m} \equiv - 2 \, \bar{p}^{mn}{}_{|n} = 0 \tag{2.19}$$

$$\overline{\mathcal{H}}_L \equiv \sqrt[4]{-g}\ \frac{1}{|\bar{p}|^{3/2}} (\bar{p}_{mn}\ \bar{p}^{mn} - \bar{p}^2 + \bar{p}^2\ \bar{R} - 2\ \bar{p}\ g^{mn}\ \bar{p}_{|mn}) = 0 \qquad (2.20)$$

Observa-se que a nova métrica é conforme com a antiga e é, por isso, negativa definida. O vínculo $\mathcal{H}^m$ preserva sua forma sob a transformação, porém $\mathcal{H}_L$ se transforma numa função que envolve derivadas segundas dos momenta, diferentemente do $\mathcal{H}_L$ anterior, que era uma função algébrica e não homogênea dessas variáveis. É justamente essa nova forma de $\mathcal{H}_L$ que muda radicalmente as equações do Sanduíche[3].

No que se segue, vai-se empregar somente as novas variáveis e a supressão da barra não trará confusões.

Com a definição

$$\lambda = (-\ g)^{1/4}\ (p)^{-1/2}\ N \qquad (2.21)$$

acha-se por cálculo direto do Parêntese de Poisson:

$$h_{mn} = -\ N_{m|n} - N_{n|m} + 2\ g_{mn}\ \nabla^2 \lambda\ + \lambda(p^{-2}\ p^{ab}\ p_{ab}\ g_{mn} - 2\ p^{-1}\ p^{mn}\ +$$

$$+\ g_{mn}\ -\ g_{mn}\ R) \qquad (2.22)$$

onde ∇^2 indica o Laplaciano covariante, por exemplo, $\nabla^2\lambda \equiv e^{mn}\ \lambda_{|mn}$.

A equação (2.22) deve ser explicitada para p_{mn}, segundo o método do Sanduíche. Assim, com a notação

$$\ell_{mn} = h_{mn} + N_{m|n} + N_{n|m} \tag{2.23}$$

e calculando o traço de (2.22),

$$p^{-2}\,(p^{ab}\,p_{ab}) = \frac{1}{3}\,(\lambda^{-1}\,\ell - 6\,\lambda^{-1}\nabla^2\lambda + (3R-1) \tag{2.24}$$

que, substituída em (2.22), resulta em p_{mn}:

$$p_{mn} = p(\frac{1}{3}\,g_{mn} + \frac{1}{6}\,\ell\,\lambda^{-1}\,g_{mn} - \frac{1}{2}\,\lambda^{-1}\,\ell_{mn}) \tag{2.25}$$

Observa-se que p_{mn} envolve, além das incógnitas usuais do TSC, o seu próprio traço, algebricamente. A substituição de (2.25) nos vínculos conteria referências a essa variável, além de $\mathscr{B}_L$ já conter derivadas de p. Portanto, p é introduzida como incógnita do TSC e deve ser obtida a partir das equações dadas. Isso envolve um procedimento um pouco diferente dos casos anteriores.

Reagrupando termos em (2.22):

$$\begin{aligned} k_{mn} &\equiv \lambda^{-1}\ell_{mn} - 2\,g_{mn}\,\lambda^{-1}\,\nabla^2\,\lambda - g_{mn} + g_{mn}\,R = \\ &= p^{-2}\,(p^{ab}\,p_{ab})\,g_{mn} - 2\,p^{-1}\,p_{mn} \end{aligned} \tag{2.26}$$

e contraindo (2.26) com ela mesma:

$$\frac{1}{3}\,k_{mn}\,k^{mn} = p^{-4}\,(p^{ab}\,p_{ab})^2 \tag{2.27}$$

Igualando (2.27) com o quadrado de (2.26), obtém-se a equação para λ :[3]

$$\nabla^2 \lambda = (24R\,\lambda + 8\ell)^{-1} \Big[\lambda^2 (9R^2 - 24R + 19) + \lambda(4R\ell - 6\ell) + \ell^2 - \ell_{mn}\,\ell^{mn} \Big] \equiv \mu \tag{2.28}$$

Agora, os vínculos são utilizados para calcular as incógnitas restantes. De $\mathscr{H}_L$, após a substituição de (2.28) e (2.24), obtém-se a equação para p:

$$\nabla^2 p = p\left(R - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,\ell\,\lambda^{-1} - \mu\,\lambda^{-1}\right) \tag{2.29}$$

e de $\mathscr{H}^m$, após a substituição de (2.25), obtém-se as equações para os N_m.

$$\nabla^2 N_m + \frac{1}{3} N^a{}_{|am} = (\lambda^{-1}\lambda_{|a} - p^{-1} p_{|a})\left(\ell^a_m - \frac{1}{3}\,\ell\,\delta^a_m\right) + \frac{2}{3}\lambda\, p^{-1} p_{|m} + N^a R_{am} + \frac{1}{3} h_{|m} - h^a{}_{m|a} \tag{2.30}$$

As equações (2.30), (2.29) e (2.28) formam um sistema elíptico. Com efeito, a matriz característica do sistema

$$\begin{matrix} e^{mn}\,k_m\,k_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{mn}\,k_m\,k_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{mn}\,k_m\,k_n + \frac{1}{3}\,k^1\,k_1 & \frac{1}{3}\,k^1\,k_2 & \frac{1}{3}\,k^1\,k_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\,k^2\,k_1 & e^{mn}k_m k_n + \frac{1}{3}\,k^2\,k_2 & \frac{1}{3}\,k^2\,k_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\,k^3\,k_1 & \frac{1}{3}\,k^3\,k_2 & e^{mn}k_m k_n + \frac{1}{3}\,k^3\,k_3 \end{pmatrix}$$

tem determinante $D = \frac{4}{3}\,(e^{mn}\,k_m\,k_n)^5$; em vista do caráter negativo definido de e^{mn}, $D < 0$ e só será nula, se $k_m = 0$ (k_m é a componente de um vetor da ${}^3\mathcal{G}$, segundo uma das três direções da ${}^3\mathcal{G}$).

Embora não exista teoremas de existência[3] para essas equações, há esperanças[3] de que, com restrições convenientes nas condições de contorno, tamanho do domínio e/ou condições de campo fraco, possam ser demonstrados a existência, regularidade e unicidade de soluções[3].

Finalmente, da definição (2.17) é necessário que $\overline{p}$ nunca se anule, para que se possa retornar às variáveis de Dirac. Então, convém investigar os casos em que possa ocorrer $\overline{p} = 0$. Com a notação

$$q_{mn} = \frac{1}{p}\,(p_{mn} - \frac{1}{3}\,p\,g_{mn})\ ,$$

o vínculo (2.20) pode ser escrito

$$\nabla^2 p = \frac{1}{2}\,p\,(q^{ab}\,q_{ab} + R - \frac{2}{3}\,)$$

ou

$$\nabla^2 \ln |p| + (\nabla \ln |p|)^2 = \frac{1}{2} (q^{ab} q_{ab} + R - \frac{2}{3}) \geq \frac{1}{2} (R - \frac{2}{3})$$

onde

$$(\nabla \ln |p|)^2 = e^{mn} (\ln |p|)_{|m} (\ln |p|)_{|n} .$$

Pode-se demonstrar[3] que, se g_{mn} é dado de tal forma que $R \geq \frac{2}{3}$, a especificação de $|p| > 0$ num contôrno bi-dimensional é suficiente para que p não se anule na hipersuperfície tri-dimensional. Em termos das novas variáveis, R é adimensional[3]; a condição $R \geq \frac{2}{3}$ é não trivial sob o ponto de vista físico, embora sem significação particular sob o ponto de vista geométrico[3] .

(IV)[8]

As equações de vínculo, $G^{o\mu} = 0$, foram estudadas por Bruhat[8,15], usando a densidade métrica contravariante

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{|g|}\ g^{\mu\nu} \tag{2.31}$$

para descrever o campo.

Com as condições de De Donder,

$$\sqrt{|g|}\ F^{\mu} \equiv \tilde{g}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{2.32}$$

o tensor de Ricci da ${}^4\mathcal{G}$ se escreve[15] :

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\mu\alpha} F^{\alpha}{}_{,\nu} + \frac{1}{2} g_{\nu\alpha} F^{\alpha}{}_{,\mu} + H_{\mu\nu} (g_{\alpha\beta};\ g_{\alpha\rho,\lambda})$$

As equações de Einstein, na ausência de matéria, se tornam[8]

$$2\sqrt{|g|}\ G^{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta}\ \tilde{g}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta} + \mathcal{H}^{\mu\nu}(g_{\alpha\beta};\ g_{\alpha\beta,\lambda}) = 0 \tag{2.33}$$

onde

$$\mathcal{H}^{\mu\nu} \equiv -2\ g^{\alpha\beta} \left\{ {\rho \atop \beta\rho} \right\} \tilde{g}^{\mu\nu}{}_{,\alpha} - 2\ g^{\alpha\beta}\ g^{\rho\sigma} \left\{ {\mu \atop \alpha\rho} \right\}\left\{ {\nu \atop \beta\sigma} \right\} \sqrt{\rho} + \tilde{g}^{\mu\nu}(\tilde{g}^{\alpha\beta}\left\{ {\rho \atop \rho\alpha} \right\}\left\{ {\sigma \atop \rho\sigma} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ {\rho \atop \alpha\beta} \right\} g^{\alpha\beta}{}_{,\rho})$$

O sistema de condições iniciais, $G^{o}{}_{\mu} = 0$, juntamente com a condição de harmonicidade inicial, $F^{\mu} = 0$, implica[15]

$$\partial_o(\sqrt{|g|}\ F^{\mu}) = 0 \qquad \text{em } x^o = \text{constante} \tag{2.34}$$

e, portanto, $F^{\mu} = 0$ sempre.

Isso sugere[15] tomar como condições iniciais as condições (2.34) e usá-la para eliminar derivadas temporais segundas nas equações

$$2\sqrt{|g|}\ G^{o\mu} \equiv g^{\alpha\beta}\ \tilde{g}^{\mu o}{}_{,\alpha\beta} + \mathcal{H}^{o\mu} = 0 \tag{2.35}$$

Assim, de (2.35)

$$\tilde{g}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha o} = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{g}^{\mu o}{}_{,oo} = -\,\tilde{g}^{\mu i}{}_{,oi} \qquad (2.36)$$

e, explicitando termos de derivada segunda em (2.35), juntamente com (2.36)

$$g^{ij}\,\tilde{g}^{o\mu}{}_{,ij} + 2\,g^{io}\,\tilde{g}^{\mu o}{}_{,oi} - g^{oo}\,\tilde{g}^{i\mu}{}_{,io} + \mathcal{H}^{o\mu} = 0 \qquad (2.37)$$

Essas equações, com (2.32), sobre a hipersuperfície inicial, constituem as equações do Problema das Condições Iniciais. Vários métodos de solução são possíveis para o sistema, dependendo da escolha de variáveis entre as vinte incógnitas $\tilde{g}^{\alpha\beta}$, $\tilde{g}^{\alpha\beta}{}_{,o}$, em x^o = constante[15]. No TSC, (2.37) são as equações para o sistema de coordenadas (vêm de $G^{o\mu} = 0$) e, portanto, dados $\tilde{g}^{ij}$ e $\tilde{g}^{ij}{}_{,o}$ na hipersuperfície x^o = constante, (2.37) e (2.32) devem ser um sistema para $\tilde{g}^{io}$, $\tilde{g}^{oo}$, $\tilde{g}^{oo}{}_{,o}$ e $\tilde{g}^{oj}{}_{,o}$.

Das condições harmônicas (2.32), é possível explicitar $\tilde{g}^{oj}{}_{,o}$; de fato,

$$\tilde{g}^{o\mu}{}_{,o} = -\,\tilde{g}^{i\mu}{}_{,i}$$

se decompõe em

$$\tilde{g}^{oi}{}_{,o} = -\,\tilde{g}^{ij}{}_{,j} \qquad (2.38)$$

$$\tilde{g}^{oo}{}_{,o} = -\,\tilde{g}^{io}{}_{,i} \qquad (2.39)$$

e, por (2.38), $\tilde{g}^{oi}{}_{,o}$ é determinado em função dos dados do problema.

Com (2.38), as equações (2.37) podem ser escritas

$$\left.\begin{aligned} g^{ij}\,\tilde{g}^{om}{}_{,ij} &= g^{oo}\,\tilde{g}^{im}{}_{,io} - 2\,g^{io}\,\tilde{g}^{mo}{}_{o} - \mathcal{H}^{om} \\ g^{ij}\,\tilde{g}^{oo}{}_{,ij} - 2\,g^{oj}\,\tilde{g}^{oi}{}_{,ij} &= g^{oo}\,\tilde{g}^{io}{}_{,io} - \mathcal{H}^{oo} \end{aligned}\right\} \qquad (2.40)$$

(2.40) é um sistema de quatro equações nas incógnitas $\tilde{g}^{io}$ e $\tilde{g}^{oo}$ Esse sistema depende, no lado direito das igualdades, das quantidades dadas e de derivadas das incógnitas, de ordem ≤ 1. O sistema é quase linear e elíptico[8] e admite uma infinidade de soluções[8]. Pode-se demonstrar[22] que, com condições de contorno restritivas, o sistema admite uma e uma só solução, assumindo valores no contorno bi-dimensional da hipersuperfície inicial.

NOTAS.

1) A singularidade $R = 0$ e o caso $N^2 < 0$ foram eliminados pelo emprego de coordenadas canônicas diferentes das introduzidas por Dirac, embora ainda ocorra um caso singular $p = 0$.

2) Apesar dos resultados obtidos por Bruhat, o abandono da D-invariância e o uso de condições de coordenadas de De Donder tornam difícil ver sua relação com o problema original[3] ou sua aplicação ao esquema de quantização de Feynman, que é uma das motivações do TSC. Entretanto, acredita-se[3] que uma adaptação da técnica de Bruhat possa ser útil na demonstração da existência e unicidade de soluções na formulação (III), de Komar.

3) O Sanduíche fornece um critério para determinação de condições de coordenadas, compatíveis com estados dados do campo gravitacional em duas hipersuperfícies tipo-espaço distintas.

3. A CONJETURA SANDUÍCHE NA APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO

NOTAÇÃO.

O campo fraco é, por definição, descrito, em algum sistema de coordenadas, por um tensor métrico da forma[23]

$$g_{\mu\nu} \quad \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

onde, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-chato; $h_{\mu\nu} = \varepsilon\,\lambda_{\mu\nu}$, com $\lambda_{\mu\nu}$ funções arbitrárias e limitadas e ε, parâmetro infinitesimal arbitrário; supõe-se que essa situação seja possível, ao menos em uma região finita do espaço.

Tendo mapeado $g_{\mu\nu}$ nessa forma, ela é preservada por transformações do grupo de Poincaré e por transformações de gauge, $x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$, onde ξ^{μ} é uma função infinitesimal de primeira ordem, que não seja vetor de Killing da geometria chata; sob o grupo de gauge, (3.1) se mantém, se $h_{\mu\nu}$ se transforma segundo[23]

$$h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \xi_{\mu,\nu}(x) - \xi_{\nu,\mu}(x) \tag{3.2}$$

Nessa aproximação, somente termos de primeira ordem são consideradas significativos. Então

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

é a inversa de $g_{\mu\nu}$; índices são abaixados e levantados com a métrica do espaço chato, $\eta_{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu}$; os símbolos de Chrisfoffel são

$$\{ {}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} \} - \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(h_{\mu\alpha,\nu} + h_{\nu\alpha,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha})$$

O conjunto de variáveis canônicas, introduzido por Dirac[13], é,aqui, constituído pelos D-invariantes:

a) h_{mn}

b) $e^{mn} = \eta^{mn} - h^{mn}$

c) os p^{mn} anteriores linearizados:

$$p^{mn} = (\eta^{ma}\,\eta^{nb} - \eta^{mn}\,\eta^{ab})\,\{ {}_{a}{}^{o}{}_{b} \}$$

que são objetos de primeira ordem; sob o grupo de gauge, os p^{mn} se transfromam de acordo com[12]

$$p'^{mn}(x) = p^{mn}(x) - \xi_{o},{}^{mn} + \eta^{mn}\,\xi_{o},{}^{j}{}_{j}$$

Os vínculos têm a forma linearizada:

$$\mathscr{L}^{m} = -\,2p^{mn},{}_{n} = 0$$

$$\mathscr{L}_{L} = R \qquad = 0$$

onde $R_{mn} = \Gamma^{j}_{jm,n} - \Gamma^{\ell}_{mn,j}$ se refere à ${}^{3}\mathcal{G}$. Daí

$$R_{mn} = -\frac{1}{2}\eta^{ab}(h_{mn,ab} + h_{ab,mn} - h_{ma,bn} - h_{na,bm})$$

e

$$R = \eta^{mn} R_{mn}$$

Desde que as operações de levantar e abaixar índice são feitas com a métrica do espaço chato, a distinção entre grandezas contra e covariantes perde seu sentido e é conveniente adotar a notação

$$\eta^{mn} = \eta_{nm} = - \delta_{mn} \qquad (3.3)$$

Então,

$$P_{mn} = \{ {}^{o}_{m\,n} \} - \delta_{mn} \{ {}^{o}_{a\,a} \} \qquad (3.4)$$

$$p'^{mn}(x) = p_{mn}(x) - \xi_{o}(x)_{,mn} + \delta_{mn} \nabla^2 \xi_o(x) \qquad (3.5)$$

$$\mathcal{H}_m = 2\, p_{mn,n} = 0 \qquad (3.6)$$

$$\mathcal{H}_L = \nabla^2 h - h_{ab,ab} = 0 \qquad (3.7)$$

$$R = \nabla^2 h - h_{ab,ab} \qquad (3.8)$$

Índices repetidos têm o mesmo sentido de soma, como na convenção de Einstein e ∇^2 é o Laplaciano do espaço chato tri-dimensional. Os Parênteses de Poisson fundamentais são:

$$\left[p_{mn}(x^r, x^o), p_{ij}(x^{r'}, x^o) \right] = \left[h_{mn}(x^r, x^o), h_{ij}(x^{r'}, x^o) \right] = 0$$

$$\left[h_{mn}(x^r, x^o), p_{ij}(x^{r'}, x^o) \right] = \frac{1}{2} (\delta_{mi} \delta_{nj} + \delta_{jm} \delta_{jn}) \delta(x^r - x^{r'})$$

DECOMPOSIÇÃO ADM

A teoria linearizada apresenta soluções de onda, com interpretação semelhante ao Eletromagnetismo clássico[24]. Isso sugere tentar interpretar as variáveis significativas do campo fraco em termos de modos transversais de vibração e tentar incorporar, na teoria não linear, o campo fraco (em segunda ordem na Hamiltoniana) como campo de radiação que escapa de uma região de campo forte.

Arnowitt, Deser e Misner[25] desenvolveram um método de decomposição de um tensor simétrico de 2a. ordem, em partes irredutíveis, em relação ao grupo das rotações tri-dimensionais. Se T_{mn} é esse tensor[25, 12],

$$T_{mn} = T_{mn} + \overset{t}{T}_{mn} + T_{m,n} + T_{n,m} \tag{3.9}$$

onde a decomposição é feita como:

a) duas componentes $\overset{TT}{T}_{mn}$, satisfazendo às condições de transversalidade

$$\overset{TT}{T}_{mn,n} = 0 \ , \qquad \overset{TT}{T}_{mm} = 0 \tag{3.10}$$

b) uma componente $\overset{t}{T}_{mn}$, satisfazendo

$$\overset{t}{T}_{mn,n} = 0 \quad , \qquad \overset{t}{T}_{mm} = \overset{t}{T} \ , \tag{3.11}$$

c) três componentes vetoriais, T_m, assim distribuídas:

1) duas componentes do tipo transversal, satisfazendo

$$\overset{T}{T}_{m,m} = 0 \tag{3.12}$$

2) uma componente longitudinal, $\overset{L}{T}_m$, tal que

$$\varepsilon_{mab} \overset{L}{T}_{b,a} = 0 \ , \quad \overset{L}{T}_m = \overset{L}{T}_{,m} \tag{3.13}$$

Para todo vetor,

$$T_m = \overset{T}{T}_m + \overset{L}{T}_{,m} \tag{3.14}$$

De (3-9) e de (3-14), vem que:

$$T_{mn} = \overset{TT}{T}_{mn} + \overset{t}{T}_{mn} + \overset{T}{T}_{m,n} + \overset{T}{T}_{n,m} + 2 \overset{L}{T}_{,mn} \tag{3.15}$$

ou seja:

$$T_{m,n} = \overset{t}{T} + 2\nabla^2 \overset{L}{T} \tag{3.16}$$

Em termos de T_{mn}, as componentes são[25,12]:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{L}{T} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\nabla^2} \frac{1}{\nabla^2} T_{ab,ba} \\
\overset{T}{T}_m &= \frac{1}{\nabla^2} (\delta_{ma} - \partial_m \frac{1}{\nabla^2} \partial_a) T_{ab,b} \\
\overset{t}{T}_{mn} &= \frac{1}{2} (\delta_{mn} \overset{t}{T} - \frac{1}{\nabla^2} \overset{t}{T}_{,mn}) \\
\overset{TT}{T}_{mn} &= T_{mn} - \overset{t}{T}_{mn} - \overset{T}{T}_{m,n} - \overset{T}{T}_{n,m} - 2 \overset{L}{T}_{,mn}
\end{aligned}\right\} ; \tag{3.17}$$

$\frac{1}{\nabla^2}$ é o operador integral de Green, por exemplo,

$$\frac{1}{\nabla^2}\,\phi(x) \;\equiv\; \int D(\vec{x} - \vec{x}\,')\,\phi(\vec{x}\,')\,d^3 x^1 \quad ;$$

$D(\vec{x} - \vec{x}\,')$ é a função de Green de ∇^2:

$$\nabla^2 D(\vec{x} - \vec{x}\,') = \delta(\vec{x} - \vec{x}\,') \tag{3.18}$$

onde $(\vec{x} - \vec{x}\,')$ é a distribuição de Dirac, tridimensional, e

$$D(\vec{x} - \vec{x}\,') = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \tag{3.19}$$

O TSC NA APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO

Seguindo o método (I), formulamos um TSC para o campo fraco*. De acordo com o tratamento prévio, temos:

a) dados iniciais:

$$\left.\begin{aligned} & h_{mn}\,(\vec{x}, x^o) \\ & \alpha_{mn}(\vec{x}, x^o) = h_{mn,o}(\vec{x}, x^o) \end{aligned}\right\}\text{numa hipersuperfície } x^o = t = \text{constante}$$

b) equações:

$$\mathcal{L}_L = \nabla^2 h - h_{ab,ba} = 0$$

$$\mathcal{L}_m = 2p_{mn,n} = 0$$

$$\mathcal{L} = N_m \mathcal{L}_m + N \mathcal{L}_L$$

$$\alpha_{mn} = \left[h_{mn}\,(x^r, x^o), H(x^o)\right]$$

(*) Convém lembrar que, aqui, consideramos o limite assintótico do campo gravitacional: a teoria é covariante pelo grupo de Poincaré, a métrica é a do espaço-chato e as transformações de gauge sobre o potencial h_{mn} são do tipo (3.2).

c) incógnitas: $p_{mn}(x^r, x^o)$, $N_m(x^r, x^o)$, $N(x^r, x^o)$, em x^o=t=constante.

A Hamiltoniana que propaga as variáveis canônicas deve estar sujeita a ser interpretada como energia; conseqüentemente, deverá conter termos quadráticos nas variáveis canônicas, e um esquema como apresentamos acima não corresponderia a uma situação dinâmica. Consideramos, então, a Hamiltoniana com termos até segunda ordem nas variáveis canônicas[13]; com

$$\mathcal{H}_o = p_{ab}\, p_{ab} - \frac{p^2}{2} + \frac{1}{4} h_{ab,j}\, h_{ab,j} - \frac{1}{4} h_{,a} h_{,a} + \frac{1}{2} h_{,r} h_{ar,a} - \frac{1}{2} h_{ab,j}\, h_{aj,b} \qquad (3.20)$$

vem

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_o + N_m\, \mathcal{H}_m + N\, \mathcal{H}_L \qquad (3.21)$$

As equações de propagação dentro do Sanduíche, calculadas com (3.21) são:

$$\alpha_{mn} = - N_{m,n} - N_{n,m} + 2(p_{mn} - \frac{1}{2}\, p\, \delta_{mn}) \qquad (3.22)$$

Essas equações, juntamente com os vínculos e as condições iniciais definem o TSC.

Em resumo, temos de resolver o sistema

$$\nabla^2 h - h_{ab,ab} = 0 \qquad (3.23)$$

$$p_{mn,n} = 0 \qquad (3.24)$$

$$\alpha_{mn} = - N_{m,n} - N_{n,m} + 2(p_{mn} - \frac{1}{2}\, p\, \delta_{mn}) \qquad (3.25)$$

para p_{mn}, N_m e N.

(3.25) deve ser explicitada em termos de p_{mn}, o que leva à expressão para os momenta:

$$p_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{2} + \frac{N_{m,n} + N_{n,m}}{2} + \frac{p}{2}\, \partial_{mn} \qquad (3.26)$$

e

$$p = -\ (\alpha + 2N_{a,a}) \qquad (3.27)$$

Substituindo (3.26) no vínculo $\mathscr{L}_m = 0$

$$0 = p_{mn,n} \equiv \frac{\alpha_{mn,n}}{2} + \frac{\nabla^2 N_m + N_{n,nm}}{2} + \frac{p_{,m}}{2} \qquad (3.28)$$

Da divergência de (3.28):

$$0 = p_{mn,mn} \equiv \frac{\alpha_{mn,mn}}{2} + \nabla^2 N_{m,m} + \frac{1}{2} \nabla^2 p \qquad (3.29)$$

As equações (3.28) deverão ser resolvidas para N_m. O vínculo secundário $\mathscr{L}_L = 0$ não contém referências à variável N e deverá representar restrições aos dados iniciais, h_{mn}. A equação (3.29) será inserida no sistema do Sanduíche: de fato, mostraremos que é consistente com (3.28); sua vantagem está na completa simetria entre (3.30) e (3.31), o que mostra que as restrições aos dados na hipersuperfície inicial se propagam.

Vamos procurar soluções do sistema, usando a decomposição ADM. Como essas decomposição introduz novas variáveis, no sentido de que as componentes terão de ser calculadas separadamente, vamos considerar (3.28) e (3.29) dando origem, também, a equações para p_{mn}.

Usamos:

$$\alpha_{mn} = \overset{TT}{\alpha}_{mn} + \overset{t}{\alpha}_{mn} + \overset{T}{\alpha}_{m,n} + \overset{T}{\alpha}_{n,m} + 2\,\overset{L}{\alpha}_{,mn}$$

$$\alpha = \overset{t}{\alpha} + 2\,\nabla^2\,\overset{L}{\alpha}$$

$$\alpha_{mn,m} = \nabla^2\,\overset{t}{\alpha}_m + 2\,\nabla^2\,\overset{L}{\alpha}_{,m}$$

$$\alpha_{mn,mn} = 2\,\nabla^2\,\nabla^2\,\overset{L}{\alpha}$$

$$h_{mn} = \overset{TT}{h}_{mn} + \overset{t}{h}_{mn} + \overset{T}{h}_{m,n} + \overset{T}{h}_{n,m} + 2\,\overset{L}{h}_{,mn}$$

$$h = \overset{t}{h} + 2\,\nabla^2\,\overset{L}{h}$$

$$h_{mn,n} = \nabla^2\,\overset{T}{h}_m + 2\,\nabla^2\,\overset{L}{h}$$

$$h_{mn,mn} = 2\,\nabla^2\,\nabla^2\,\overset{L}{h}$$

$$p_{mn} = \overset{TT}{p}_{mn} + \overset{t}{p}_{mn} + \overset{T}{p}_{m,n} + \overset{T}{p}_{n,m} + 2\,\overset{L}{p}_{,mn}$$

$$p = \overset{t}{p} + 2\,\nabla^2\,\overset{L}{p}$$

$$p_{mn,n} = \nabla^2 \overset{T}{p}_m + 2\, \nabla^2 \overset{L}{p}_{,m}$$

$$p_{mn,mn} = 2\, \nabla^2\, \nabla^2 \overset{L}{p}$$

$$N_m = \overset{T}{N}_m + \overset{L}{N}_{,m}$$

$$N_{m,m} = \nabla^2 \overset{L}{N}$$

O vínculo $\mathcal{H}_L = 0$ conduz a restrições sobre h_{mn}:

$$0 = \nabla^2 h - h_{ab,ab} \equiv \nabla^2 \overset{t}{h} + \cancel{2\nabla^2\nabla^2 \overset{L}{h}} - \cancel{2\nabla^2\nabla^2 \overset{L}{h}}$$

ou

$$\nabla^2 \overset{t}{h} = 0 \tag{3.30}$$

cuja solução analítica que se anula no infinito espacial é

$$\overset{t}{h} = 0 \tag{3.30$'$}$$

A equação $p_{ab,ab} = 0$ conduz a restrição sobre α_{mn} ; com efeito, de (3.29):

$$0 = 2\, \nabla^2\, \nabla^2 \overset{L}{p} \equiv \cancel{\nabla^2\, \nabla^2 \overset{L}{\alpha}} + \nabla^2\, \cancel{\nabla^2 \overset{L}{N}} - \frac{1}{2}\, \nabla^2 \overset{t}{\alpha} - \nabla^2\, \nabla^2 (\cancel{\overset{L}{\alpha}} + \cancel{\overset{L}{N}}) \quad ;$$

essa expressão se decompõe em duas equações

$$\nabla^2 \overset{t}{\alpha} = 0 \tag{3.31}$$

$$\nabla^2\nabla^2 \overset{L}{p} = 0 \tag{3.32}$$

e uma relação entre componentes:

$$2\,\nabla^2\,\nabla^2\,\overset{L}{p} \equiv -\,\frac{1}{2}\,\nabla^2\,\overset{t}{\alpha} \qquad (3.33)$$

(3.31) é restrição sobre os dados na "segunda" hipersuperfície:

$$\overset{t}{\alpha} \equiv \overset{t}{\alpha}\,(x^o) \qquad (3.31)'$$

(3.32) é equação para $\overset{L}{p}$:

$$\nabla^2\,\overset{L}{p} = f(x^o);$$

supondo-se que $\overset{L}{p}$ é inteiro e limitado em todos os pontos do espaço, então, pelo teorema de Liouville[26], será constante; conseqüentemente, o único valor possível de $f(x^o)$, que resulta em resoluções inteiras, é $f(x^o)=0$. Com soluções que se anulam no infinito espacial,

$$\overset{L}{p}\,(\vec{x},\,x^o) = 0 \qquad (3.32)'$$

A expressão (3.33) fornece uma ligação entre $\overset{L}{p}$ e $\overset{t}{\alpha}$. De fato, se $\overset{t}{\alpha}$ é o traço da parte tensorial-t de um tensor simétrico[12], $\overset{t}{\alpha} = \varepsilon_{mab}\ \phi_{ab,m}$, onde ϕ_{ab} é um tensor anti-simétrico, tal que $\phi_{ab,b} = 0$. Notando que $V_m = \varepsilon_{mab}\ \phi_{ab}$ é um vetor, vem $\overset{t}{\alpha} = V_{m,m} \equiv \nabla^2\overset{L}{V}$ e $\overset{t}{\alpha}$ está associado à componente longitudinal de um vetor.

(3.28) se escreve:

$$0 = \nabla^2\,\overset{T}{p}_m + 2\,\nabla^2\,\overset{L}{p}{}'_{m} \equiv \frac{\nabla^2\,\overset{T}{\alpha}_m}{2} + \nabla^2\,\cancel{\overset{L}{\alpha}}{}'_{m} + \frac{\nabla^2\,\overset{T}{N}_m + 2\,\nabla^2\overset{L}{N}{}'_{m}}{2} - \frac{\overset{t}{\alpha}{}'_{m}}{2} - \nabla^2(\overset{L}{\alpha}+\cancel{\overset{L}{N}})'_{m}\,;$$

observando que a expressão acima contém termos longitudinais e transversais, obtemos as equações

$$\nabla^2(\overset{T}{\alpha}_m + \overset{T}{N}_m) = 0 \qquad (3.34)$$

$$\overset{t}{\alpha}_{,m} = 0 \qquad (3.31)''$$

$$\nabla^2 \overset{T}{p}_m = 0 \qquad (3.35)$$

$$\nabla^2 \overset{L}{p}_{,m} = 0 \qquad (3.32)''$$

e as relações entre componentes

$$\nabla^2(\overset{T}{\alpha}_m + \overset{T}{N}_m) \equiv \nabla^2 \overset{T}{p}_m \equiv 0 \qquad (3.36)$$

$$-\frac{\overset{t}{\alpha}_{,m}}{2} \equiv \nabla^2 \overset{L}{p}_{,m} \qquad (3.33)'$$

De (3.34), obtemos a solução para $\overset{L}{N}_m$, analítica e nula no infito espacial:

$$\overset{T}{N}_m = - \overset{T}{\alpha}_m \qquad (3.35)'$$

De (3.35), $\overset{T}{p}_m$ analítico e nulo no infinito espacial é:

$$\overset{T}{p}_m (\vec{x}, x^o) = 0 \qquad (3.35)'$$

Observamos que (3.31)", (3.32)" e (3.33)" são consistentes com os resultados anteriormente obtidos, (3.31), (3.32) e (3.33).

Com as soluções obtidas, (3.31), (3.32)', (3.35)' e (3.34)', a expressão de p_{mn} se escreve

$$p_{mn} = \frac{\overset{TT}{\alpha}_{mn}}{2} + (\overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N})_{,mn} - \delta_{mn}\, \nabla^2 (\overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N}) + \frac{\overset{t}{\alpha}_{mn}}{2} - \frac{\delta_{mn}\, \overset{t}{\alpha}(x^o)}{2} \qquad (3.26)'$$

$$\overset{t}{p} = -\, 2\, \nabla^2 (\overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N}) - \overset{t}{\alpha}(x^o) \qquad (3.27)'$$

ou

$$\overset{TT}{p}_{mn} = \frac{\overset{TT}{\alpha}_{mn}}{2}$$

$$\overset{t}{p}_{mn} = (\overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N})_{,mn} - \delta_{mn}\, \nabla^2 (\overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N}) + \frac{\overset{t}{\alpha}_{mn}(x^o)}{2} - \frac{\overset{t}{\alpha}_{mn}(x^o)}{2}\, \delta_{mn}$$

Sob transformação de gauge, p_{mn} se modifica de acôrdo com (3.4):

$$p'_{mn}(x) = p_{mn}(x) - N(x)_{,mn} + \delta_{mn}\, \nabla^2 N(x) \qquad (3.4)'$$

É trivial ver que $\overline{\delta p}_{mn}$ é tensor transversal do tipo-t; portanto, $\overset{t}{p}_{mn}$ não pode ser variável canônica dinâmica e pode ser anulada por uma escolha conveniente de N. Desde que a parte transversal do tipo-t fica determinada, dado seu traço, podemos usar, em lugar de (3.4)':

$$\overset{t'}{p}(x) = \overset{t}{p}(x) + 2\, \nabla^2 N(x) \qquad (3.4)''$$

Comparando (3.4)" com (3.27)', podemos dizer que $\overset{t}{p}$, em (3.27)', é a particular N que transforma $\overset{t'}{p} = 0$ em $\overset{t}{p}$ dado por (3.27)'. Então, de (3.4)":

$$0 = -\,2\,\nabla^2(\overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N}) - \overset{t}{\alpha}(x^o) + 2\,\nabla^2\,\overline{N}$$

ou

$$\overline{N} = \overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N} + \frac{1}{2\,\nabla^2}\,\overset{t}{\alpha}\,(x^o)$$

onde $\overline{N}$ indica a particular N. Pelos mesmos motivos que levam a (3.32), $\nabla^2\,\phi(x) = \overset{t}{\alpha}(x^o)$ só admite solução inteira, se

$$\overset{t}{\alpha}(x^o) = 0 \quad ,$$

em completa simetria com (3.30)'. Então,

$$\overline{N} = \overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N} \tag{3.37}$$

Para determinar N, vamos <u>impor</u> que $\overset{t}{p}$ seja gauge-invariante, então $\overline{N}$ deverá ser solução de

$$\nabla^2\,\overline{N} \equiv \nabla^2\,(\overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N}) = 0$$

com solução analítica

$$\overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N} = f(x^o),\quad \overline{N} = f(x^o)\ ; \tag{3.38}$$

dado $f(x^o)$ num contorno bi-dimensional, fica univocamente determinado co mo solução da equação de Laplace. Essa solução fixa univocamente:

$$N \equiv \tilde{N}\,(x^0) = f(x^0) \qquad (3.38)'$$

$$\overset{L}{N} = -\overset{L}{\alpha} + f(x^0) \qquad (3.37)'$$

$$p_{mn} = \frac{\overset{TT}{\alpha}_{mn}}{2} \qquad (3.26)''$$

$$\overset{t}{p} = 0 \qquad (3.27)'' \;;$$

Em resumo, dadas as condições iniciais, h_{mn}, α_{mn}, restritas por

$$\overset{t}{h} = 0, \qquad \overset{t}{\alpha} = 0,$$

O Sanduíche determina univocamente

$$\overset{t}{N}_m = -\overset{T}{\alpha}_m$$

$$\overset{L}{p} = 0$$

$$\overset{T}{p} = 0$$

Em particular, pode-se escolher, sem perda de generalidade,

$$N = \overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N}$$

o que é uma condição de gauge sobre $\overset{t}{p}$, a saber, $\overset{t}{p} = 0$. Com a imposição de que

$$\nabla^2(\overset{L}{\alpha} + \overset{L}{N}) = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \overline{N} = 0$$

o que torna p_{mn} único, ficam determinados

$$\overset{L}{N} = - \alpha + f(x^o)$$

$$N = f(x^o)$$

$$p_{mn} = \frac{\overset{TT}{\alpha}_{mn}}{2}$$

$$\overset{t}{p} = 0$$

O Sanduíche não contém, em suas equações, referências à variável N. Entretanto, foi possível, pela forma de p_{mn}, determinada pelo Sanduíche e pela lei de transformação de p_{mn} sob o grupo de gauge, achar uma condição de coordenadas e impor a equação obedecida por N, de tal forma que p_{mn} fosse único e consistente com o Sanduíche.

Embora a imposição de condições de coordenadas seja contrária à idéia do Sanduíche, torna-se impossível nesse tratamento, o uso exclusivo das equações do TSC, sem condições adicionais, devido à falta de informações sobre N, o que tem sua origem na linearização do vínculo $\mathcal{H}_L = 0$: esse vínculo, na teoria não linear, só contém p_{mn} em termos quadráticos, que são eliminados na teoria linear; conseqüentemente, $\mathcal{H}_L = 0$ só conterá termos em h_{mn}, que não trazem contribuição às equações do movimento, (3.22).

SOLUÇÕES DO TIPO TRANSVERSAL NA TEORIA NÃO LINEAR

Variáveis TT só são rigorosamente definidas em um espaço tri-dimensional chato. De fato, sua definição envolve o operador $\frac{1}{\nabla^2}$, com função de Green $D(\vec{x} - \vec{x}') = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ e não existe forma conhecida para a generalização MMG convariante dessa função[12]. Portanto, uma caracterização desse tipo envolve campos fracos ou, na teoria não linear, um observador para o qual a geometria tri-dimensional seja chata e é, então, uma caracterização essencialmente local.

Supondo, pois um observador para o qual a tri-geometria seja localmente chata, existe solução para o TSC, de modo que as variáveis se propaguem TT, para esse observador?

Seja $x^o = t =$ constante a equação, local, da hipersuperfície do TSC. Para o observador em questão:

$$g_{mn} \equiv g_{mn}(\underset{p}{x^r}, x^o = t) = - \delta_{mn} \qquad (3.39)$$

$$g_{mn,r} \equiv g_{mn,r}(\underset{p}{x^r}, x^o = t) = 0 \qquad (3.40)$$

onde, P indica o particular observador. A afinidade* da tri-geometria

---

* Cumpre ressaltar que Γ^r_{mn} é interpretado como afinidade, ou seja, como em relatividade geral: o observador P provê, apenas, uma particular descrição do campo.

será nula numa vizinhança de P, que indicaremos por $a^r \leq x^r \leq b^r$:

$$\Gamma_{mn}(x_p^r, x^o = t) = 0 \tag{3.41}$$

e os vínculos assumem as formas:

$$\mathcal{H}_m = 2p_{mn,n} = 0 \tag{3.42}$$

$$\mathcal{H}_L = p_{ab,ab} - \frac{p^2}{2} - R = 0 \tag{3.43}$$

$$R = -(\nabla^2 g - g_{ab,ab}) \tag{3.44}$$

Com os Parênteses de Poisson fundamentais

$$\left[g_{mn}(x^r,\ x^o),\ g_{rs}(x^{r'},\ x^o)\right] = \left[p_{mn}(x^r,\ x^o),\ p_{rs}(x^{r'}, x^o)\right] = 0$$

$$\left[g_{mn}(x^r,\ x^o),\ p_{rs}(x^{r'},\ x^o)\right] = \frac{1}{2}\,(\delta_{mr}\ \delta_{ns} + \delta_{ms}\ \delta_{nr})\ \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

vem:

$$\underset{\mathcal{H}_r}{\delta g_{mn}} = -\ N_{m,n} - N_{n,m} \qquad \underset{\mathcal{H}_L}{\delta g_{mn}} = 2N(p_{mn} - \frac{1}{2}\ p\ \delta_{mn})$$

$$\underset{\mathcal{H}_r}{\delta g_{mn,n}} = -\ N_m - N_{j,j} \qquad \underset{\mathcal{H}_L}{\delta g_{mn,n}} = \partial_n\ \{2N\ (p_{mn} - \frac{1}{2}\, p\ \delta_{mn})\}$$

$$\underset{\mathcal{H}_r}{\delta g} = -\ 2N_{a,a} \qquad \underset{\mathcal{H}_L}{\delta g} = -\ Np$$

$$\underset{r}{\delta} p_{mn} = 0 \qquad\qquad \underset{L}{\delta} p_{mn} = \delta_{mn} \nabla^2 N + N_{,mn}$$

$$\underset{r}{\delta} p_{mn,n} = 0 \qquad\qquad \underset{L}{\delta} p_{mn,n} = 0$$

$$\underset{r}{\delta} p = 0 \qquad\qquad \underset{L}{\delta} p = - 2 \nabla^2 N$$

Para que o campo se propague do tipo TT, no "interior" do Sanduíche, espacial e temporalmente, é necessário que

(1) $\underset{L}{\delta} p = 0 \implies \nabla^2 N = 0$, com a solução analítica $N \equiv N(x^0)$

(2) $\underset{r}{\delta} g = 0 \implies N_{a,a} = 0 \implies \nabla^2 \overset{L}{N} = 0, \quad \overset{L}{N} \equiv \overset{L}{N}(x^0)$

(3) $\underset{L}{\delta} g = 0 \implies p \equiv 0$

(4) $\underset{r}{\delta} g_{mn,n} = 0 \implies \nabla^2 N_m + N_{j,jm} = 0 \implies \nabla^2 \overset{T}{N}_m + 2\nabla^2 \overset{L}{N}_{,m} = 0$.

Usando (2), resulta na condição sobre $\overset{T}{N}_m$:

$$\nabla^2 \overset{T}{N}_m = 0 , \qquad \overset{T}{N}_m \equiv \overset{T}{N}_m(x^0)$$

(5) $\delta \underset{L}{g}_{mn,n} = 0 \quad \Rightarrow \partial_n \{2N(p_{mn} - \frac{1}{2}\, p\, \delta_{mn})\} \;= 0$

Usando (2), a expressão acima resulta em $p_{,m} = 0$, que é uma consequência de (3). Portanto, $\delta \underset{L}{g}_{mn,n} = 0$ é naturalmente verificada, se

$$\delta \underset{r}{g} = \delta \underset{L}{g} = 0$$

Em resumo, as condições para que o campo se propague do tipo TT resultam em condições sobre o traço de p_{mn},

$$p \equiv 0 \quad \text{em } x^o = t \quad \text{e} \quad a^r \leq x^r \leq b^r$$

e condições sobre o sistema de coordenadas

$$\left.\begin{array}{lcl} N & \equiv & \overset{L}{N}(x^o) \\ \overset{T}{N}_m & \equiv & \overset{T}{N}_m(x^o) \\ \overset{L}{N} & \equiv & \overset{L}{N}(x^o) \\ N_m & = & \overset{T}{N}_m(x^o) + \overset{L}{N}_{,m}(x^o) \equiv \overset{T}{N}_m(x^o) \end{array}\right\} \qquad (3.45)$$

em x^o=t e $a^r \leq x^r \leq b^r$. Essas incógnitas são soluções da equação de Laplace e, dadas em P, têm solução única em $x^o = t$, $a^r \leq x^r \leq b^r$.

Verifiquemos a consistência do Sanduíche com essas soluções:

a) condições iniciais (1) $g_{mn}(x^r, x^o = t) = - \delta_{mn}$.

$g_{mn,o}(x^r, x^o = t) \equiv h_{mn}(x^r, x^o)$

em $x^o = t$ e numa vizinhança de P : $a^r \leq x^r \leq b^r$

(2) $N \equiv N(x^o)$

$\overset{L}{N} \equiv \overset{L}{N}(x^o)$

$\overset{T}{N}_m \equiv \overset{T}{N}_m(x^o)$

$p \equiv 0$

b) equações do Sanduíche: $p_{ab,ab} - \frac{1}{2} p^2 - R = 0$

$p_{mn,n} = 0$

$h_{mn} = - (N_{m,n} + N_{n,m}) + 2N(p_{mn} - \frac{1}{2} p\delta_{mn})$

c) Nesse problema, o sistema de coordenadas é dado e as equações do TSC serão usadas para determinar condições sobre os dados iniciais,consistentes com as imposições de transversalidade, numa região $x^o = t$, $a^r \leq x^r \leq b^r$.

As equações de propagação devem ser equações para p_{mn}, enquanto os vínculos deverão levar a condições sobre os dados. Seguindo o processo usual de explicitar p_{mn} nas equações de propagação e substituir nos vínculos, as equações são reescritas:

$$p_{mn} = \frac{h_{mn}}{2N} + \frac{N_{m,n} + N_{n,m}}{-2N} + \frac{p}{2}\ \delta_{mn} \qquad (3.46)$$

$$p = -\frac{1}{N}(h + 2N_{a,a}) \qquad (3.47)$$

$$0 = p_{mn,n} \equiv \frac{h_{mn,n}}{2N} + \frac{1}{2N}(\nabla^2 N_m + N_{j,jm}) + (h_{mn} + N_{m,n} + N_{n,m})(\frac{1}{2N})_{,n} + \frac{p_{,m}}{2} \qquad (3.48)$$

$$R = p_{ab}\ p_{ab} - \frac{1}{2}p^2 \qquad (3.49)$$

Usando as condições de coordenadas necessárias à propagação TT:

$$\left.\begin{array}{lcl} p_{mn} & = & \dfrac{h_{mn}}{2N} \\ 0 & = & p = h \\ 0 & = & h_{mn,n} \\ R & = & p_{ab}\ p_{ab} \end{array}\right\} \qquad (3.50)$$

Então, h_{mn} deverá ser do tipo TT:

$$h_{mn,n} = 0, \quad h = 0$$

Agora, podemos enunciar o seguinte TSC:

a) condições iniciais: (1) $g_{mn}(x^r, x^o = t) = -\delta_{mn}$

$$g_{mn,o}(x^r\ x^o = t) \equiv h_{mn}(x^r, x^o), \text{ em } x^o = t,\ a^r \leq x^r \leq b^r$$

$$(2) \quad h_{mn,n} = 0, \quad h \equiv 0$$

$$p \equiv 0 \qquad , \text{ em } x^o = t, \quad a^r \leq x^r \leq b^r$$

b) equações: (3.46) a (3.49)

c) incógnitas: p_{mn}, N_m e N, em $x^o = t$, $a^r \leq x^r \leq b^r$.

Vamos mostrar que esse TSC conduz às soluções (3.45) e (3.50). Com efeito, de (3.47), usando $p \equiv 0$ e $h \equiv 0$, segue-se que:

$$N_{a,a} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \overset{L}{N} = 0, \quad \overset{L}{N} \equiv \overset{L}{N}(x^o)$$

A expressão

$$f_{mn} \equiv N_{m,n} + N_{n,m} \, , \quad f_{mm} \equiv f \equiv 2N_{a,a}$$

terá, portanto, traço nulo. Essa expressão aparece em (3.46) e como p_{mn} é, por hipótese, do tipo TT, deverá ser, por consistência:

$$0 \equiv f_{mn,n} \equiv \nabla^2 \overset{T}{N}_m + \nabla^2 \overset{L}{N}_{,m} \; ;$$

com a solução achada para $\overset{L}{N}$, segue-se:

$$\nabla^2 \overset{T}{N}_m = 0, \quad \overset{T}{N}_m \equiv \overset{T}{N}_m(x^o)$$

Substituindo essas soluções em f_{mn}, resulta $f_{mn} \equiv 0$, o que torna $\underset{\mathcal{R}_r}{\delta g} = - f_{mn}$ consistente com o dada inicial $g_{mn} = - \delta_{mn}$, numa região infinitesimal, $a^r \leq x^r \leq b^r$, em torno de P.

Das equações (3.48), após substituir as soluções achadas e os dados iniciais:

$$0 \equiv \overset{TT}{h}_{mn} \left(\frac{1}{2N} \right)_{,n}$$

As componentes TT são em número de duas componentes independentes e, então, da relação anterior:

$$N_{,n} = 0 \quad , \quad N \equiv N(x^o)$$

Reunindo resultados:

$$p_{mn} = \frac{h_{mn}}{2N(x^o)} \tag{3.51}$$

$$\nabla^2 \overset{T}{N}_m = 0 \ , \quad \overset{T}{N}_m \equiv \overset{T}{N}_m(x^o) \tag{3.52}$$

$$\nabla^2 \overset{L}{N} = 0 \quad , \quad \overset{L}{N} \equiv \overset{L}{N}(x^o) \tag{3.53}$$

$$N \equiv N(x^o) \tag{3.54}$$

As condições de coordenadas $\overset{T}{N}_m(x^o)$, $\overset{L}{N}(x^o)$ são soluções da equação de Laplace e, especificadas no ponto P, ficam determinadas univocamente no Sanduíche; a solução $N(x^o)$ não vem da equação de Laplace, como em (3.45), mas é determinada univocamente sobre a região $x^o = t$, $a^r \leq x^r \leq b^r$, dada em P.

O vínculo $\mathcal{H}_L = p_{ab}\, p_{ab} - R = 0$ leva a restrições sobre a forma de $N(x^o)$. Com efeito, substituindo p_{ab} pela solução (3.51) do Sanduíche:

$$N^2\,(x^o) = \frac{h_{ab}\,h_{ab}}{4R};$$

derivando em j, como $N_{,j} = 0$:

$$0 = \frac{1}{R}\,(h_{ab}\,h_{ab})_{,j} - (h_{ab}\,\dot{h}_{ab})\,\frac{R_{,j}}{R^2}$$

$$\ln \frac{h_{ab}\,h_{ab}}{R} = C(x^o)$$

$$\frac{h_{ab}\,h_{ab}}{R} = e^{C(x^o)} \qquad ;$$

portanto,

$$N(x^o) = \frac{1}{2}\;e^{C'(x^o)} \;\sim\; \frac{1}{2}\,(1 + C'(x^o)) \tag{3.55}$$

Então, $N(x^o)$ deve ser uma função de x^o, na forma acima.

Observação: As soluções achadas são válidas numa região infinitesimal da hipersuperfície tri-dimensional tipo-espaço, $x^o = t =$ constante, onde a afinidade da tri-geometria se anula. Nessa região, derivadas primeiras podem ser calculadas a partir das soluções encontradas. Derivadas segundas espaciais se referem à inserção da região chata numa ^3g não chata e derivadas temporais se referem a deslocamentos fora da hipersuperfície e, portanto, ambas estão associadas a deslocamentos fora da região $a^r \leq x^r \leq b^r$, $x^o = t$.

APÊNDICE

CONJETURA SANDUÍCHE PARA O CAMPO ELETROMAGNÉTICO

FORMALISMO CANÔNICO

A teoria Eletromagnética é caracterizada por dois grupos diferentes de invariância: o grupo de Poincaré, que dá origem às leis de conservação pelo teorema de Nöether, e um grupo de gauge, dependendo de uma função arbitrária das coordenadas do espaço-tempo.

A Lagrangeana que dá origem às equações do campo é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \qquad \text{(A.1)}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad , \quad F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

e $j_\mu A^\mu$ é a parte de interação (interação mínima).

O grupo de gauge é constituído por transformações do tipo

$$A'_\mu (x) = A_\mu (x) + \Lambda_{,\mu} (x) \qquad \text{(A.2)}$$

onde Λ é função arbitrária de x^μ, limitada, apenas, pelo fato de obedecer à equação de onda,

$$\Box \Lambda = 0$$

Mostra-se[27] que a Lagrangeana (A.1) é invariante pela transformação de gauge (A.2): embora uma transformação de gauge sobre a parte de interação acrescente uma divergência à Lagrangeana[27], isso é irrelevante para a obtenção das equações da teoria.

Com a notação

$$A_\mu = (\phi, -\vec{A}) \equiv (\phi, -\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

todas as expressões passarão a ser escritas num espaço tri-dimensional chato, de métrica

$$\eta^{mn} = \eta_{mn} = -\delta_{mn}$$

Assim,

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\vec{A}_{,o} + \vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 + \vec{j}.\vec{A} - \rho\phi \qquad (A.3)$$

Os momenta canonicamente conjugados à variável de campo, A_μ, são:

$$\pi = \frac{\partial}{\partial\phi_{,o}} \equiv 0 \qquad (A.4)$$

$$\vec{p} = \frac{\partial}{\partial \vec{A}_{,o}} = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi = -\vec{E} \qquad (A.5)$$

$\pi \equiv 0$ é o vínculo primário da teoria e está associado à invariância de gauge da Lagrangeana livre. De fato, $\vec{A}_{,o}$ aparece na combinação gauge-invariante $\vec{A}_{,o} + \vec{\nabla}\phi$, mas a partir de $\phi_{,o}$ a única expressão gauge invariante que se pode formar é $\phi_{,o} + \vec{\nabla}.\vec{A}$; por transformação de gauge,

$$\phi',_o + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \phi,_o + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Box\Lambda$$

e será invariante, desde que as transformações de gauge satisfaçam à equação de onda. Mas esse invariante é nulo, pela condição de Lorentz ($\phi,_o + \vec{\nabla} . \vec{A} = 0$), significando que nenhum invariante diferente de zero pode ser construído a partir de $\phi,_o$. Logo, a Lagrangeana não pode conter $\phi,_o$ e ϕ é eliminada como variável dinâmica.

A Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = \vec{p} \cdot \dot{\vec{A}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \vec{p}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 - \vec{j} \cdot \vec{A} + \phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{p} + \rho) \qquad (A.6)$$

e as equações serão calculadas, usando os Parênteses de Poisson fundamentais:

$$\left[p_m (\vec{x}, x^o), p_n(\vec{x}', x^o)\right] = \left[A_m(\vec{x}, x^o), A_n(\vec{x}', x^o)\right] = 0$$

$$\left[A_m(\vec{x}, x^o), p_n(\vec{x}', x^o)\right] = \delta_{mn}\, \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Da condição de que o vínculo se mantenha no tempo,

$$\pi,_o = \int_{x^o} \left[\pi(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{x}') \right] d^3 \vec{x} = - \int \frac{\delta\pi(\vec{x})}{\delta\pi(\vec{x}'')} \frac{\delta H(\vec{x}')}{\delta\phi(\vec{x}'')} d^3 \vec{x}' \, d^3 \vec{x}'' =$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{p} + \rho$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{p} + \rho = 0 \qquad \text{(A.7)}$$

será vínculo secundário da teoria. Essa relação pode ser escrita

$$- \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \rho = p \qquad \text{(A.7)'}$$

que é uma das equações de Maxwell. Nenum outro vínculo aparece na teoria, pois se mostra[27] que

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{p} + \rho)_{,0} = \int \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{p}(\vec{x}) + \rho(\vec{x}),\ \mathcal{H}(\vec{x}') \right]_{x^0} d^3 \vec{x}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \ ;$$

o vínculo, é, então, mantido no tempo, pela lei de conservação da corrente.

A Hamiltoniana (A.6) tem, portanto, a forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \phi\ (\vec{\nabla} \cdot \vec{p} + \rho)$$

onde ϕ é um parâmetro arbitrário, associado à condição de gauge e $\mathcal{H}_0$ é a densidade de energia do campo.

Em analogia com o campo gravitacional, convém considerar o campo livre. As equações canônicas serão:

$$A_{r,o} = p_r - \phi_{,r} \qquad \text{(A.8)}$$

$$p_{r,o} = \nabla^2 A_r - \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{,r} \qquad \text{(A.9)}$$

O vínculo primário reduz o espaço de fase à superfície descrita pelas variáveis $(\vec{p}, \vec{A})$: ϕ é eliminada como variável dinâmica, pois não é propagada pelas equações do movimento, embora seja mantida nas equações, na forma de um parâmetro arbitrário. Com o vínculo secundário e uma condição de gauge, que elimine ϕ das equações, o sistema será descrito por 4 variáveis independentes.

Para eliminar as componentes não dinâmicas de $(\vec{p}, \vec{A})$, a forma do vínculo sugere que se represente as variáveis por meio de componentes transversais e longitudinais referentes a uma dada direção no espaço tri-dimensional:

$$\vec{p} = \overset{T}{\vec{p}} + \overset{L}{\vec{p}} \quad , \quad \text{onde} \quad \vec{\nabla}\cdot\overset{T}{\vec{p}} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\overset{L}{\vec{p}} = 0$$

$$\vec{A} = \overset{T}{\vec{A}} + \overset{L}{\vec{A}} \quad , \quad \text{onde} \quad \vec{\nabla}\cdot\overset{T}{\vec{A}} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\overset{L}{\vec{A}} = 0$$

Do vínculo $0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{p} \equiv \vec{\nabla}\cdot\overset{L}{\vec{p}}$, com a condição $\vec{\nabla}\times\overset{L}{\vec{p}} = 0$, segue-se que

$$\overset{L}{\vec{p}} \equiv 0 \qquad \text{(A.10)}$$

e será

$$\vec{p} \equiv \overset{T}{\vec{p}} = -\vec{E} \qquad \text{(A.11)}$$

Pela transformação de gauge,

$$\vec{A}'(x) = \vec{A}(x) - \vec{\nabla}\,\Lambda(x)$$

as componentes de A se transformam de acordo com

$$\left.\begin{aligned} \overset{T}{\vec{A}}{}' &= \overset{T}{\vec{A}} \\ \overset{L}{\vec{A}}{}' &= \overset{L}{\vec{A}} - \vec{\nabla}\Lambda \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.12)}$$

e $\overset{L}{\vec{A}} \equiv \vec{\nabla}\overset{L}{A}$ fica caracterizada como variável não dinâmica, sobre a qual deverá ser imposta a condição de gauge; escolhida $\overset{L}{\vec{A}}$ a condição de Lorentz é usada para fixar ϕ.

TSC E SC PARA O CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Especificadas as variáveis de configuração, $\vec{A}$, em duas hipersuperfície tipo-espaço, a SC estabelece que isso deve ser suficiente para determinar $\vec{p}$ (ou $\vec{E}$) e a gauge, ϕ, no espaço-tempo intermediário. A variável $\vec{A}$ é o análogo da $^3\varsigma$ e o Sanduíche associa a $\vec{A}$ uma "trajetória" dada pelo conhecimento dos $\vec{A}'$ s numa família de hipersuperfícies tipo-espaço:

$$\vec{A}(\vec{x},\, x^o = t') \quad \equiv \vec{A}'(\vec{x}) \quad \text{em} \quad x^o = t'$$

$$\vec{A}(\vec{x},\, x^o = t'+\varepsilon) \equiv \vec{A}^1(\vec{x}) \quad \text{"} \quad x^o = t' + \varepsilon$$

$$\vec{A}(\vec{x},\, x^o = t''-\varepsilon) \equiv \vec{A}^N(\vec{x}) \quad \text{"} \quad x^o = t'' - \varepsilon$$

$$\vec{A}(\vec{x},\, x^o = t'') \quad \equiv \vec{A}''(\vec{x}) \quad \text{"} \quad x^o = t''$$

A formulação do TSC é bastante simples, segundo o esquema (I):

a) dados iniciais $A_m(\vec{x}, x^o)$

$h_m(\vec{x}, x^o) \equiv A_{m,o}(\vec{x}, x^o)$, em $x^o = t$ = constante

b) equações: vínculo: $p_{m;m} = 0$ (A.13)

equação de propagação: $h_m = p_m - \phi_{,m}$ (A.14)

c) incógnitas: p_m, ϕ, em $x^o = t$

Da equação de propagação tiramos p_m:

$$p_m = h_m + \phi_{,m} \tag{A.15}$$

que, substituída no vínculo, deve ser uma equação para ϕ:

$$0 = p_{m,m} \equiv h_{m,m} + \nabla^2\phi$$

ou

$$\phi = -\frac{1}{\nabla^2} h_{m,m} \equiv -\frac{1}{\nabla^2} \overset{L}{h}_{m,m} \equiv -\frac{1}{\nabla^2}\nabla^2 \overset{L}{h}$$

$$\phi = -\overset{L}{h} \tag{A.16}$$

onde $\overset{L}{h}$ tem o sentido dado pela decomposição ortogonal de um vetor em partes longitudinal e transversal.

Substituindo (A.16) em (A.15)

$$p_m = h_m - \overset{L}{h}{}_{,m} \equiv h_m - \overset{L}{h}_m \equiv \overset{T}{h}_m \qquad \text{(A.17)}$$

que se decompe em

$$\overset{T}{p}_m = \overset{T}{h}_m \qquad \text{(A.17)'}$$

$$\overset{L}{p}_m = 0 \qquad \text{(A.17)''}$$

(A.16) e (A.17) são as soluções do TSC e se escrevem:

$$\phi = - \overset{L}{A}{}_{,o}$$

$$\overset{T}{p}_m = A_{m,o} \qquad \text{ou} \qquad - \overset{T}{\vec{E}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \overset{T}{\vec{B}})$$

Para formular um SC para o campo eletromagnético, vamos admitir que o SC possa ser construído por superposições de TSC's em primeira ordem, isto é, que as variáveis canônicas do campo nas várias hipersuperfícies intermediárias, entre duas dadas hipersuperfícies a distância finita, sejam dadas por um desenvolvimento em série de Taylor em torno da "primeira" hipersuperfície:

$$\vec{A}(\vec{x}, x^o) = \vec{A}'(\vec{x}) + \delta x^o \vec{A}'_{,o}(\vec{x}) + \frac{\delta x^{o^2}}{2!} \vec{A}'_{,oo}(\vec{x}) + \ldots$$

$$\vec{p}(\vec{x}, x^o) = \vec{p}'(\vec{x}) + \delta x^o \vec{p}'_{,o}(\vec{x}) + \frac{\delta x^{o^2}}{2!} \vec{p}'_{,oo}(\vec{x}) + \ldots$$

onde

$$\vec{A}'(\vec{x}) \equiv \vec{A}(\vec{x},\ x^o = t')$$

$$\vec{p}'(\vec{x}) \equiv \vec{p}(\vec{x},\ x^o = t')$$

e $x^o = t'$ define a "primeira" hipersuperfície.

As expressões acima substituem o sistema:

$$A_{m,o} = p_m - \phi_{,m}$$

$$p_{m,o} = \nabla^2 A_m - (\vec{\nabla}.\ \vec{A})_{,m}$$

De fato, a SC coneta hipersuperfícies a "distância" δx^o e a especificação de $\vec{A}\ (\vec{x},\ x^o = t")$, utilizando o sistema acima, só seria possível após a integração das equações, que é, justamente, o problema; o Sanduíche está antes relacionado a formulações integrais do que a formulações locais por meio de equações diferenciais.

Na construção das séries, as derivadas foram calculadas através de Parênteses de Poisson com a Hamiltoniana, vindo

$$\begin{aligned} A_m(\vec{x},\ x^o) = A'_m &+ \left(\frac{\delta x^{o^2}}{2!} + \frac{\delta x^{o^4}}{4!}\nabla^2 + \frac{\delta x^{o^6}}{6!}\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)(\nabla^2 A'_m - A'_{j,jm}) + \\ &+ \left(\frac{\delta x^{o^3}}{3!} + \frac{\delta x^{o^5}}{5!}\nabla^2 + \frac{\delta x^{o^7}}{7!}\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)(\nabla^2 p'_m - p'_{j,jm}) + \delta x^o\, p'_m \\ &- \left(\delta x^o \phi' + \frac{\delta x^{o^2}}{2!}\phi'_{,o} + \frac{\delta x^{o^3}}{3!}\phi'_{,oo} + \dots\right)_{,m} \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$p_m(\vec{x},x^0) = p'_m + (\delta x^0 + \frac{\delta x^{0^3}}{3!}\nabla^2 + \frac{\delta x^{0^5}}{5!}\nabla^2\nabla^2 + \ldots)(\nabla^2 A'_m - A'_{j,jm}) + $$

$$+ (\frac{\delta x^{0^2}}{2!} + \frac{\delta x^{0^4}}{4!}\nabla^2 + \frac{\delta x^{0^6}}{6!}\nabla^2\nabla^2 + \ldots)(\nabla^2 p'_m - p'_{j,jm}) \qquad \text{(A.19)}$$

Enunciamos o SC:

a) dados iniciais: $\vec{A}''(\vec{x}) \equiv \vec{A}(\vec{x},x^0=t'')$, $x^0 = t''$ é a "segunda" hipersuperfíc

$\vec{A}'(\vec{x}) \equiv \vec{A}(\vec{x},x^0=t')$, $x^0=t'$ é a "primeira" hipersuperfí

$t'' - t' = \Delta t$

b) equações: vínculo: $\vec{\nabla}.\vec{p}(\vec{x}, x^0) = 0$

"equações" (A.18), (A.19)

c) incógnitas: $\vec{A}(\vec{x}, x^0)$, $\vec{p}(\vec{x}, x^0)$, $\phi(\vec{x}, x^0)$, $t' \leq x^0 \leq t''$

Observamos que as expressões $\nabla^2 p'_m - p'_{j,jm}$ e $\nabla^2 A'_m - A'_{j,jm}$ são transversais — $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\ )$ — e já serão substituídas por $\nabla^2 \overset{T}{p}_m$ e $\nabla^2 \overset{T}{A}_m$, respectivamente, no que se segue.

Calculando a divergência de (A.19):

$$p_{m,m} = p'_{m,m}$$

e, se o vínculo vale inicialmente, ele se manterá com a evolução do sistema.

Calculando a divergência do (A.18) e usando o vínculo primário, obtemos a expressão de ϕ:

$$A_{m,m} = A'_{m,m} - \nabla^2(\delta x^0\, \phi' + \frac{\delta x^{0^2}}{2!}\, \phi'_{;o} + \frac{\delta x^{0^3}}{3!}\, \phi'_{;oo} + \dots)$$

ou

$$\nabla^2 \overset{L}{A} - \nabla^2 \overset{L}{A}{}' = - \nabla^2 \,(\delta x^0\, \phi' + \frac{\delta x^{0^2}}{2!}\, \phi'_{;o} + \frac{\delta x^{0^3}}{3!}\, \phi'_{;oo} + \dots)$$

ou

$$- (\delta x^0\, \phi' + \frac{\delta x^{0^2}}{2!}\, \phi'_{;o} + \frac{\delta x^{0^3}}{3!}\, \phi'_{;oo} + \dots) = \overset{L}{A}(\vec{x}, x^0) - \overset{L}{A}{}'(\vec{x}) \qquad \text{(A.20)}$$

Essa expressão mostra que ϕ' se associa à parte longitudinal de $\vec{A}$, como esperado.

(A.20) não é, propriamente, uma solução para ϕ, no sentido de que envolve essa grandeza somente na hipersuperfície inicial. Entretanto, ϕ só contribui na expressão dos $\vec{A}$'s na combinação (A.20), cujo conhecimento é suficiente para eliminar ϕ' de (A.18).

Substituindo (A.20) em (A.18):

$$A_m - \overset{L}{A}_m = (A'_m - \overset{L}{A}{}'_m) + (\frac{\delta x^{0^2}}{2!} + \frac{\delta x^{0^4}}{4!}\nabla^2 + \frac{\delta x^{0^6}}{6!}\nabla^2\nabla^2 + \dots)\cdot\nabla^2\, \overset{T}{A}{}'_m +$$

$$+ (\frac{\delta x^{0^3}}{3!} + \frac{\delta x^{0^5}}{5!}\nabla^2 + \frac{\delta x^{0^7}}{7!}\nabla^2\nabla^2 + \dots)\,\nabla^2\, \overset{T}{p}{}'_m +$$

$$+ \delta x^0\, p'_m$$

que é reescrita:

$$\overset{T}{A}_m = \overset{T}{A}{}'_m + \left(\frac{{\delta x^0}^2}{2!}\nabla^2 + \frac{{\delta x^0}^4}{4!}\nabla^2\nabla^2 + \frac{{\delta x^0}^6}{6!}\nabla^2\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)\overset{T}{A}{}'_m +$$

$$+ \left(\delta x^0 + \frac{{\delta x^0}^3}{3!}\nabla^2 + \frac{{\delta x^0}^5}{5!}\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)\overset{T}{p}{}'_m + \delta x^0\, \overset{L}{p}{}'_m$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \overset{T}{A}_m(\vec{x}, x^0) &= \left(\delta x^0 + \frac{{\delta x^0}^2}{2!}\nabla^2 + \frac{{\delta x^0}^4}{4!}\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)\overset{T}{A}{}'_m(\vec{x}) + \\ &+ \left(\delta x^0 + \frac{{\delta x^0}^3}{3!}\nabla^2 + \frac{{\delta x^0}^5}{5!}\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)\overset{T}{p}{}'_m(\vec{x}) \\ 0 &= \overset{L}{p}{}'_m \end{aligned}\right\} \quad (A.21)$$

(A.15) pode ser reescrita

$$\begin{aligned} p_m = \overset{L}{p}{}'_m &+ \left(\delta x^0\nabla^2 + \frac{{\delta x^0}^3}{3!}\nabla^2\nabla^2 + \frac{{\delta x^0}^5}{5!}\nabla^2\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)\overset{T}{A}{}'_m + \\ &+ \left(\delta x^0 + \frac{{\delta x^0}^2}{2!}\nabla^2 + \frac{{\delta x^0}^4}{4!}\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)\overset{T}{p}{}'_m \end{aligned} \quad (A.15)'$$

Os $\overset{T}{A}_m(\vec{x}, x^0)$ e, $p_m(\vec{x}, x^0)$ serão determinados, respectivamente, pela primeira das equações (A.21) e (A.15)', desde que possamos obter p'_m em termos das quantidades dadas. Assim, se, em (A.21) fizermos

a) $\delta x^0 = \Delta t$

b) $\vec{A}(\vec{x}, x^0) = \vec{A}''(\vec{x})$

obtemos o seguinte sistema, a ser resolvido para os p'_m:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\Delta t + \frac{\Delta t^3}{3!}\nabla^2 + \frac{\Delta t^5}{5!}\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)\overset{T}{p}_m(\vec{x}) = \overset{T}{A}{}''_m(\vec{x}) - \left(\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2!}\nabla^2 + \frac{\Delta t^4}{4!}.\nabla^2\nabla^2 + \dots\right) X \\ \qquad\qquad\qquad X \ \overset{T'}{A}_m(\vec{x}) \\ \\ \qquad\qquad \overset{L'}{p}_m(\vec{x}) = 0 \end{array}\right. \qquad (A.22)$$

As soluções de (A.22), substituídas em (A.15)', levarão às soluções para os $\overset{T}{p}_m$ e $\overset{L}{p}_m$:

$$\left. \begin{array}{l} \overset{T}{p}_m(\vec{x}, x^0) = \left(\delta x^0 \nabla^2 + \frac{\delta x^{0^3}}{3!}\nabla^2\nabla^2 + \frac{\delta x^{0^5}}{5!}\nabla^2\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)\overset{T'}{A}_m(\vec{x}) + \\ \qquad + \left(\delta x^0 + \frac{\delta x^{0^2}}{2!}\nabla^2 + \frac{\delta x^{0^4}}{4!}\nabla^2\nabla^2 + \dots\right)\overset{T}{p}{}'_m(\vec{x}) \\ \\ \overset{L}{p}_m(\vec{x}, x^0) = \overset{L}{p}{}'_m(\vec{x}) = 0 \end{array}\right\} \qquad (A.23)$$

Observações: 1) Esse processo depende da explicitação de $\overset{T'}{p}_m$ em (A.22). Essa operação envolve o inverso do operador $(\Delta t + \frac{\Delta t^3}{3!}\nabla^2 + \dots)$, construído com ∇^2, que tem como autovetores nulos as soluções constantes no espaço; podemos supor, sem perda de generalidade, que o inverso do operador acima existe.

2) As séries envolvidas nas expressoes convergem. Com efei-

to

$$\overset{L}{A} - \overset{L}{A}' = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta x^{o^{n}}}{n!} \frac{\partial^{n-1} \phi'}{\partial x^{o^{n-1}}}$$

$$\overset{T}{p}_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta x^{o^{2n-1}}}{(2n-1)!} (\nabla^2)^{n-1} \overset{T}{A}'_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta x^{o^{2n}}}{(2n)!} (\nabla^2)^{n} \overset{T}{p}'_m + \overset{T}{p}'_m$$

$$\overset{T}{A}_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta n^{o^{2n-1}}}{(2n-1)!} (\nabla^2)^{n-1} \overset{T}{p}'_m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta x^{o^{2n}}}{(2n)!} (\nabla^2)^{n-1} \overset{T}{A}'_m + \overset{T}{A}'_m \quad ;$$

o coeficiente do termo genérico (onde ψ indica $\overset{T}{A}'$ ou $\overset{T}{p}'_m$)

$$a_n = \frac{1}{(2n)!} (\nabla^2)^n \psi$$

é tal que

$$\sqrt[n]{a_n} \sim \frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \left(\frac{1}{r} \right)^{n/n} \psi \to 0 \quad , \text{ quando } n \to \infty$$

e as séries convergem, por serem "séries de polências"[28] em δx^o e se

$$\frac{\partial^{n-1} \phi}{\partial x^{o^{n-1}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Finalmente, o SC tende ao TSC anteriormente feito. Com efeito, derivándo (A.20) no tempo:

$$-(\phi' + \delta x^o \phi'_{;o} + \frac{\delta x^{o^2}}{2!} \phi'_{;oo} + \ldots) = \overset{L}{A}_{,o}(\vec{x}, x^o)$$

ou

$$- \phi(\vec{x}, x^o) = \overset{L}{A}_{,o} \qquad (A.16)$$

Derivando (A.21) no tempo:

$$\overset{T}{A}_{m,o} = (\delta x^o + \frac{\delta x^{o^3}}{3!} \nabla^2 + \frac{\delta x^{o^5}}{5!} \nabla^2 \nabla^2 + \ldots) \nabla^2 \overset{T}{A}{}'_m +$$

$$(1 + \frac{\delta x^{o^2}}{2!} \nabla^2 + \frac{\delta x^{o^4}}{4!} \nabla^2 + \ldots) \overset{T}{p}{}'_m$$

e substituindo em (A.23)

$$\overset{T}{p}_m(\vec{x}, x^o) = \overset{T}{A}_{m,o}(\vec{x}, x^o) \qquad (A.17)$$

REFERÊNCIAS

1. P.G. Bergmann, The Sandwich Conjecture, em Relativity, eds.: Carmelli, Fickler, Witten, Plenum Press, NY (1970).

2. A. Komar, J.Math. Phys., 11, 820 (1970).

3. A. Komar, Phys. Rev., D4, 927 (1971).

4. J.A. Wheeler, Geometrodynamics and the Issue of the Final State, em Relativity, Groups and Topology, eds.: C.&B. De Witt, Gordon and Breach, NY (1964).

5. R.F. Baierlein, D.H. Sharp e J.A. Wheeler, Phys. Rev., 126, 1964 (1962).

6. R.P. Feynman, Rev. of Mod. Phys., 20, 367 (1948).

7. C.W. Misner, Rev. of Mod. Phys., 29, 497 (1957).

8. Y. Bruhat, Compt. Rend, 252, 3411 (1961).

9. J.L. Anderson, Principles of Relativity Physics, § 4.7, Academic Press, NY (1967).

10. C.G. Oliveira, Relativity and Gravitation, Monografias de Física, CBPF (1970).

11. P.A.M. Dirac, Proc Roy Soc., A246, 326 (1958).

12. C.G. Oliveira, Lectures Notes on Canonical Formalism, Monografias de Física, CBPF (1971), a ser publicado.

13. P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc., A246, 333 (1958)

14. A. Lichnerowicz, Théories Relativistes de la Gravitation et de L'Eletromagnetisme, Masson et C^{ie}, Paris (1955).

15. Y. Bruhat, The Cauchy Problem, em Gravitation: an introduction to current research, ed.: Witten, Wiley & Sons, NY (1962).

16. P.G. Bergmann, Rev. of Mod.Phys., 33, 510 (1961).

17. ——————, Phys.Rev., 114, 1078 (1966).

18. A. Komar, Phys.Rev., 153, 1385 (1967).

19. ————, Phys.Rev.,170, 1195 (1968).

20. ————, Phys.Rev., D1, 1521 (1970).

21. ————, Phys.Rev., D4, 923 (1971).

22. A. Vaillant, J.Math. Pures Appl, 48, 173 (1968), referência citada em (3).

23. J.L. Anderson, Principles of Relativity Phys., § 10.10

24. J.L. Anderson, Principles of Relativity Phys., § 11.1

25. R. Arnowitt, S. Deser e C.W. Misner, The Dynamics of General Relativity, em Gravitation: an introduction to current research.

26. R.V. Churchill, Complex Variables and Applications, Mc Graw Hill,(1960).

27. C.G. Oliveira, Lectures Notes on Special Relativity, Monografias de Fí sica, CBPF (1969).

28. A. Tibiriçá Dias, Curso de Cálculo Infinitesimal, vol. II, Sedegra, Rio (1962).

* * *