TESES

NÚMERO 08/71

UM MÉTODO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN PARA CAMPOS FRACOS INDEPENDENTES DO TEMPO E APLICAÇÕES

TESE DE MESTRADO

por

NILTON OSCAR SANTOS

em

18 de novembro de 1971

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

AV. WENCESLAU BRAZ, 71

RIO DE JANEIRO

BRASIL

Tese 08-71

UM MÉTODO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN PARA CAMPOS FRACOS INDEPENDENTES DO TEMPO E APLICAÇÕES

TESE DE MESTRADO

defendida por

NILTON OSCAR SANTOS

no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Orientador: Prof. Colber Gonçalves de Oliveira

em 18 de novembro de 1971

perante a banca integrada pelos senhores professôres

Colber Gonçalves de Oliveira
Professor Titular do C.B.P.F.

Prem Prakash Srivastava
Professor Titular do C.B.P.F.

Luiz Adauto da Justa Medeiros
Professor Titular do C.B.P.F.

Nelson Lima Teixeira
Professor Titular da F.F.C.L. de Araraquara

Marcos Duarte Maia
Professor Colaborador da Universidade de Brasilia

ERRATA

Pag.	Linha	onde se lê	leia-se
5	eq. 2.3	$+ \underset{(2)}{\phi_{ij}} + \dots$	$+ \underset{(2)}{\phi^{ij}} + \dots$
6	eq. 2,6	$G_{rijs} = \underset{(1)}{G_{rijs}} + \dots$	$G_{ij} = \underset{(1)}{G_{ij}} + \underset{(2)}{G_{ij}} + \underset{(3)}{G_{ij}} + \dots$
6	eq. 2.9	$\underset{(N)}{G_{ij}} = R_{rijn} - \frac{1}{2} \dots$	$\underset{(N)}{G_{ij}} = \underset{(N)}{R_{nijn}} - \frac{1}{2} \dots$
6	eq. 2,7	$(\dots + g_{ij,rs} - g_{rj,is} + g_{is,rj})$	$(\dots + g_{ij,rs} - g_{rj,is} - g_{is,rj})$
8	4	dependência de $\underset{(N)}{G_{ij}}, \dots$	dependência de $\underset{(N)}{g_{ij}}, \dots$
10	2	$\underset{(1)}{g_{ij}} \neq 0$	$\underset{(1)}{g_{ij}} = 0$
15	eq. 5.8	$\underset{(B)}{G_{ik}}\, f_{,j} = [C]$	$\underset{(B)}{G_{ik})}\, f_{,j} = [C]$
19	9	q_{ij} e $T_{ij} \dots$	g_{ij} e $T_{ij} \dots$
32	eq. 8.21	$\underset{(2)}{M}_{44} = \dots$	$\underset{(2)}{M^*}_{44} = \dots$

UM MÉTODO DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN PARA CAMPOS FRACOS INDEPENDENTES DO TEMPO E APLICAÇÕES

TESE DE MESTRADO

Nilton Santos

Junho 1971

Í N D I C E

* * *

A realização dêste trabalho só foi possível graças à excelente orientação do Professor Colber Gonçalves de Oliveira e foi facilitada pelas discussões com Idel Wolk e Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira.

RESUMO

Um método para a solução das equações de Einstein foi proposto por J. L. Synge et al. Êle soluciona as equações para modêlos estáticos e estacionários, cujos campos deverão diferir pouco do campo flat, permitindo a expansão em série da métrica em tôrno de um parâmetro k, arbitràriamente pequeno. Êste método difere um pouco para ambos os modêlos.

Uniu-se neste trabalho ambos os métodos, ficando válido independentemente para um caso e outro.

As condições matemáticas supostas não foram levadas a julgamento mais rigoroso, baseando-se mais em explicações físicas e pela razoabilidade delas.

Aplicou-se o método para modêlos de uma esfera estática e de uma esfera em rotação constante em tôrno do seu eixo de simetria. Obteve-se a métrica exterior, já calculada na bibliografia, e ainda a métrica interior ao corpo.

No texto, após os cálculos da métrica de cada modêlo, observou-se as consequências físicas e matemáticas dos resultados obtidos.

* * *

1. INTRODUÇÃO

Em gravitação Newtoniana, conhecendo-se a distribuição de matéria, calcula-se o campo através da equação de Poisson em qualquer ponto do espaço, a dificuldade estando apenas na integral a ser resolvida. Em relatividade geral para resolver-se a equação de Einstein é necessário a distribuição de matéria, mas ela está intimamente conectada à geometria do espaço, mas a geometria só é conhecida após resolvida a equação. De forma que aparentemente temos uma indeterminação. Acontece que para certos problemas se conhece qual a distribuição de matéria que deve-se usar, por exemplo, o análogo relativístico gravitacional do campo estático de uma carga elétrica, é exemplo de um problema no qual a distribuição de matéria é conhecida. As equações de Einstein nêsse caso dão a geometria do espaço-tempo em tôrno da massa concentrada numa região finita e que apresenta simetria esférica. A geometria resultante se denomina geometria de Schwarzschild.

Entretanto, se propomos usar as dez equações de campo de Einstein para problemas gerais de mecânica celeste, teremos de fato uma indeterminação. Temos dez equações de campo e vinte incógnitas: a métrica g_{ij} e o tensor T_{ij} da matéria e energia distribuida no espaço.

Tal indeterminação também existe na mecânica celeste não-relativística. Em qualquer dos dois casos usualmente suplementa-se as equações de campo (conjuntamente com as equações de continuidade para a matéria) com equações subsidiárias que caracterizam qual a particular distribuição de matéria que se deseja (implicitamente isso é usado na solução de Schwarzschild citada antes). Tal forma de solucionar a indeterminação por meio de condições subsidiárias tem entretanto um ponto negativo: sempre se impõe uma certa, e particular, distribuição de matéria. Em problemas de mecânica celeste, que são os problemas básicos, presentemente considerados, tal limitação é muito drástica. Em verdade não conhecemos com suficiente exatidão qual a distribuição que se deve usar para as massas celestes. O método de solucionar a indeterminação das equações de campo, usado presentemente, é independente de qualquer escolha particular sobre a distribuição de matéria. Em lugar de se impor equações subsidiárias, se usa condições de contôrno adequadas, que possuem a vantagem de serem condições gerais.

Isso é equivalente a dar um certo modêlo do universo e à partir daí à observar suas propriedades métricas, decorrentes da solução que corresponda a êsse modêlo. Como o método se baseia essencialmente numa expansão em série "de modêlos" desde o mais primitivo até outro que seja tão sofisticado quanto se deseje, êsse método só se aplica à geometrias associadas à campos fracos. Êste método foi elaborado por J. L. Synge et al.[1, 2, 3] Até agora o método foi adequado para distribuição de matéria estática ou estacionária, em um único corpo, para distribuições dependentes do tempo as dificuldades ainda não foram superadas.

A idéia do método consiste em expandir a métrica em potências de k, constante arbitràriamente pequena, em tôrno da métrica de Minkowski. Obtendo-se a partir da equação de Einstein fórmulas para calcular-se cada ordem da expansão de g_{ij}.

Em mecânica Newtoniana as equações básicas são:

$$\rho \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial t} + (\rho \mu_\alpha \mu_\beta - S_{\alpha\beta})_{,\beta} = \rho V_{,\alpha} , \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \mu_\beta)_{,\beta} = 0 \qquad 1.1$$

onde a primeira é a equação de movimento do sistema e a segunda a equação de continuidade, sendo ρ a densidade, μ_α a velocidade, $S_{\alpha\beta}$ a tensão, e V o potencial ($V = \int \rho \, d^3v/r$).

Em um sistema estático elas se reduzem a

$$\rho \; V_{,\alpha} = S_{\alpha\beta,\beta} \tag{1.2}$$

essas equações são invariantes frente a uma transformação

$$\underset{(1)}{\rho} = k\rho' \quad , \quad \underset{(2)}{S_{\alpha\beta}} = k^2 \, S'_{\alpha\beta} \tag{1.3}$$

onde k é constante arbitrária.

Em um sistema estacionário as equações se reduzem a

$$(\rho \, \mu_\alpha \, \mu_\beta - S_{\alpha\beta})_{,\beta} = \rho \, V_{,\alpha} \, , \quad (\rho \, \mu_\beta)_{,\beta} = 0 \tag{1.4}$$

que são invariantes em relação a uma transformação

$$\underset{(2)}{\rho} = k^2 \rho' \, , \quad \underset{(1)}{\mu_\alpha} = k \, \mu'_\alpha \quad , \quad \underset{(4)}{S_{\alpha\beta}} = k^4 \, S'_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

As relações 1.3, 1.5 sugerem que um modêlo relativístico dêstes sistemas estático e estacionário, devem ter a mesma invariância frente a uma transformação de um k arbitrário.

Portanto na expansão de g_{ij} em potências de k, tomando-o pequeno, deverá aparecer a primeira potência de k no caso estático na 1ª aproximação, e no caso estacionário na 2ª aproximação, porque o campo provém principalmente da densidade de matéria.

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + \underset{(1)}{g_{ij}} + \underset{(2)}{g_{ij}} + \underset{(3)}{g_{ij}} + \ldots \quad \text{(estático)} \, , \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + \underset{(2)}{g_{ij}} + \underset{(3)}{g_{ij}} + \ldots \quad \text{(estacionário)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Um k conveniente para o caso estático é a razão da massa total do côrpo m e seu raio típico a : m/a. Portanto a métrica diferirá da métrica flat em têrmos da ordem de $(m/a)^N$, sendo N a ordem da aproximação. [4]

Tomando as unidades de comprimento e massa tal que a velocidade da luz e a constante gravitacional sejam iguais a um, obtem-se que as unidades de massa e espaço é o segundo:

$$\left.\begin{array}{l} G = 6{,}67 \times 10^{-8} \text{ dina.cm}^2/\text{gm}^2 = 1 \\ C = 3 \times 10^{10} \text{ cm/seg} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 \text{ g} = 2{,}476 \times 10^{-39} \text{ seg}, \\ 1 \text{ cm} = 3{,}336 \times 10^{-11} \text{ seg} \end{array} \qquad 1.7$$

Ficando a razão m/a adimensional. O valôr de k para o sol é da ordem de 10^{-6} e para a terra 10^{-10}.

Observa-se que os têrmos da métrica de ordem superior que o linear dependerão da estrutura não linear das equações relativísticas de gravitação que agem como fonte, enquanto que para a equação de Poisson para o cálculo do campo bastava ter-se a distribuição de matéria.

2. FÓRMULAS GERAIS

Índices latinos tomam valores 1, 2, 3, 4 e os índices gregos 1, 2, 3. Derivada parcial com respeito as coordenadas é indicada por vírgula, e uma barra indica coderivada ($A_{i,j} = \partial A_i/\partial x_j$, $A_{i|j} = A_{i,j} - g^{ab}[ij,b]\ A_a$). O tempo é dado por x_4 = it, de modo que a assinatura fica +4. As unidades são escolhidas de forma que a constante gravitacional e a velocidade da luz sejam unidades.

As fórmulas a serem deduzidas nêste parágrafo são válidas para qualquer campo fraco, estático, estacionário ou dependente do tempo e não estão sujeitas a condições de coordenadas.

Sendo k um parâmetro adimensional arbitrário, suficientemente pequeno tal que formalmente a assinatura de g_{ij} é +4, pode-se exprimir a métrica como,

$$g_{ij} = \delta_{ij} + k \underset{(1)}{\gamma_{ij}} + k^2 \underset{(2)}{\gamma_{ij}} + \dots \qquad 2.1$$

ou de forma mais concisa:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \underset{(1)}{g_{ij}} + \underset{(2)}{g_{ij}} + \dots \qquad 2.2$$

onde nos sufixos numéricos está a potência do k incluida em cada têrmo. Calculando g^{ij}, cujos têrmos da expansão definem-se pela matriz inversa dos diversos têrmos de g_{ij},

$$g^{ij} = \delta_{ij} + \underset{(1)}{\phi^{ij}} + \underset{(2)}{\phi_{ij}} + \dots \qquad 2.3$$

Obtem-se os têrmos contravariantes em função dos covariantes na expansão da métrica:

$$\underset{(1)}{g^{ij}} = - \underset{(1)}{g}_{ij}, \; \underset{(2)}{g^{ij}} = - \underset{(2)}{g}_{ij} + \underset{(1)}{g}_{ia} \underset{(1)}{g_{aj}} \text{, etc.} \qquad 2.4$$

A definição da soma é a usada por Einstein, índices repetidos somam-se, mesmo índices repetidos covariantes ou contravariantes somam-se também pois.

$$g_{ia}\, g^{a}{}_{j} = g_{ia} \quad \delta^{ka}\, g_{kj} = g_{ia}\, g_{aj}$$

o delta de Kroenecker é a função que sobe e desce índices.

se

$$\underset{(1)}{g}_{ij} = 0:$$

$$\underset{(1)}{g^{ij}} = 0, \; \underset{(2)}{g^{ij}} = -\underset{(2)}{g}_{ij}, \; \underset{(3)}{g^{ij}} = - \underset{(3)}{g}_{ij} \qquad 2.6$$

$$\underset{(4)}{g^{ij}} = -\underset{(4)}{g}_{ij} + \underset{(2)}{g}_{ia} \underset{(2)}{g}_{aj} \;, \; \underset{(5)}{g^{ij}} = - \underset{(5)}{g}_{ij} + \underset{(2)}{g}_{ia} \underset{(3)}{g}_{aj} + \underset{(3)}{g}_{ia} \underset{(2)}{g}_{aj}$$

Os tensores de Riemann e Einstein podem ser expandidos em potências de k:

$$\begin{aligned} R_{rijs} &= \underset{(1)}{R_{rijs}} + \underset{(2)}{R_{rijs}} + \underset{(3)}{R_{rijs}} + \dots \\ G_{rijs} &= \underset{(1)}{G_{rijs}} + \underset{(2)}{G_{rijs}} + \underset{(3)}{G_{rijs}} + \dots, \end{aligned} \qquad 2.6$$

onde, os tensores de Riemann e Einstein são

$$R_{rijs} = \frac{1}{2}\left(g_{rs,ij} + g_{ij,rs} - g_{rj,is} + g_{is,rj}\right) + g^{ab}\{[rs,a][ij,b] - [rj,a][is,b]\} \qquad 2.7$$

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = g^{rs} R_{rijs} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{rs} g^{ab} R_{rabs}$$

no caso de $\underset{(1)}{g_{ij}} = 0$:

$$\underset{(1)}{R_{rijs}} = 0, \quad \underset{(1)}{G_{ij}} = 0 \qquad 2.8$$

Observa-se que o sufixo representa as potências de k em cada têrmo e não o têrmo da expansão de g_{ij}.

Conhecendo-se a propriedade $\underset{(N)}{R_{rijr}} = \underset{(N)}{R_{irrj}}$ obtem-se

$$\begin{aligned} \underset{(N)}{R_{rijs}} &= \frac{1}{2}\left(\underset{(N)}{g_{rs,ij}} + \underset{(N)}{g_{ij,rs}} - \underset{(N)}{g_{rj,is}} - \underset{(N)}{g_{is,rj}}\right) + \underset{(N)}{S_{rijs}} \\ \underset{(N)}{G_{ij}} &= \underset{(N)}{R_{rijn}} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \underset{(N)}{R_{raar}} + \underset{(N)}{H_{ij}}, \end{aligned} \qquad 2.9$$

onde

$$\underset{(A)}{[ij,k]} = \frac{1}{2}\left(\underset{(A)}{g_{jk,i}} + \underset{(A)}{g_{ik,j}} - \underset{(A)}{g_{ij,k}}\right)$$

$$\underset{(N)}{S_{rijs}} = \sum_{A+B=N} \{\underset{(A)}{[rs,a]}\underset{(B)}{[ij,a]} - \underset{(A)}{[rj,a]}\underset{(B)}{[is,a]}\} + \sum_{A+B+C=N} \underset{(A)}{g^{ab}}\{\underset{(B)}{[rs,a]}\underset{(C)}{[ij,b]} - \underset{(B)}{[rj,a]}\underset{(C)}{[is,b]}\}$$

$$\begin{aligned} \underset{(N)}{H_{ij}} = &\sum_{A+B=N} \left(\underset{(A)}{g^{rs}} \underset{(B)}{R_{rijs}} - \delta_{ij} \underset{(A)}{g^{ab}} \underset{(B)}{R_{rabr}} - \frac{1}{2} \underset{(A)}{g_{ij}} \underset{(B)}{R_{raar}}\right) \\ &- \sum_{A+B+C=N} \left(\underset{(A)}{g_{ij}} \underset{(B)}{g^{rs}} \underset{(C)}{R_{raas}} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \underset{(A)}{g^{rs}} \underset{(B)}{g^{ab}} \underset{(C)}{R_{rabs}}\right) - \end{aligned} \qquad 2.10$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{A+B+C+D=N} \underset{(A)}{g_{ij}} \underset{(B)}{g^{rs}} \underset{(C)}{g^{ab}} \underset{(D)}{R_{rabs}}$$

onde A, B, C, D são inteiros positivos diferentes de zero, caso êstes valores não existam o têrmo é considerado nulo. Portanto

$$\underset{(1)}{S_{rijs}} = 0 \ , \qquad \underset{(1)}{H_{ij}} = 0 \qquad 2.11$$

logo

$$\underset{(1)}{R_{rijs}} = \frac{1}{2} (\underset{(1)}{g_{rs,ij}} + \underset{(1)}{g_{ij,rs}} - \underset{(1)}{g_{rj,is}} - \underset{(1)}{g_{is,rj}}),$$

$$\underset{(1)}{G_{ij}} = \underset{(1)}{R_{rijr}} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \underset{(1)}{R_{raar}} \qquad 2.12$$

Define-se o conjugado de um tensor como

$$\overset{*}{A}_{ij} = A_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} A_{aa} \ , \qquad 2.13$$

tendo as propriedades

$$\overset{*}{A}_{aa} = - A_{aa} \ , \quad A_{ij} = \overset{*}{A}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \overset{*}{A}_{aa} \ , \quad \overset{**}{A}_{ij} = A_{ij} \qquad 2.14$$

Também define-se para qualquer tensor γ_{ij}

$$\overset{*}{L}_{ij} (\gamma) = \frac{1}{2} (\gamma_{aa,ij} + \gamma_{ij,aa} - \gamma_{ia,aj} - \gamma_{ja,ai}) \qquad 2.15$$

Tomando $L_{ij}(\underset{(N)}{g}) = \underset{(N)}{L_{ij}}$, obtemos

$$\underset{(N)}{R_{rijr}} = \underset{(N)}{\overset{*}{L}_{ij}} + \underset{(N)}{S_{rijr}} \qquad 2.16$$

e

$$\underset{(N)}{G_{ij}} = \underset{(N)}{L_{ij}} + \underset{(N)}{M_{ij}} \qquad 2.17$$

onde

$$-\frac{1}{2}\sum_{A+B+C+D=N} \underset{(A)}{g_{ij}}\ \underset{(B)}{g^{rs}}\ \underset{(C)}{g^{ab}}\ \underset{(D)}{R_{rabs}}$$

onde A, B, C, D são inteiros positivos diferentes de zero, caso êstes valores não existam o têrmo é considerado nulo. Portanto

$$\underset{(1)}{S_{rijs}} = 0 \ , \qquad \underset{(1)}{H_{ij}} = 0 \qquad 2.11$$

logo

$$\underset{(1)}{R_{rijs}} = \frac{1}{2}\left(\underset{(1)}{g_{rs,ij}} + \underset{(1)}{g_{ij,rs}} - \underset{(1)}{g_{rj,is}} - \underset{(1)}{g_{is,rj}}\right),$$

$$\underset{(1)}{G_{ij}} = \underset{(1)}{R_{rijr}} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\,\underset{(1)}{R_{raar}} \qquad 2.12$$

Define-se o conjugado de um tensor como

$$\overset{*}{A}_{ij} = A_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\,A_{aa} \ , \qquad 2.13$$

tendo as propriedades

$$\overset{*}{A}_{aa} = -A_{aa} \ , \quad A_{ij} = \overset{*}{A}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\,\overset{*}{A}_{aa} \ , \quad \overset{**}{A}_{ij} = A_{ij} \qquad 2.14$$

Também define-se para qualquer tensor γ_{ij}

$$\overset{*}{L}_{ij}(\gamma) = \frac{1}{2}\left(\gamma_{aa,ij} + \gamma_{ij,aa} - \gamma_{ia,aj} - \gamma_{ja,ai}\right) \qquad 2.15$$

Tomando $\underset{(N)}{L_{ij}(g)} = \underset{(N)}{L_{ij}}$, obtemos

$$\underset{(N)}{R_{rijr}} = \underset{(N)}{\overset{*}{L}_{ij}} + \underset{(N)}{S_{rijr}} \qquad 2.16$$

e

$$\underset{(N)}{G_{ij}} = \underset{(N)}{L_{ij}} + \underset{(N)}{M_{ij}} \qquad 2.17$$

onde

$$\underset{(N)}{M_{ij}} = \underset{(N)}{S^{*}_{rijr}} + \underset{(N)}{H_{ij}} \qquad 2.18$$

O tensor de Einstein é a soma de uma parte linear e outra não linear. Pela importância que mais tarde terá esta separação de têrmos em $\underset{(N)}{G_{ij}}$ para a aplicação do método, escreve-se $\underset{(N)}{G_{ij}}$ de acôrdo com a dependência de $\underset{(N)}{G_{ij}}$, para o caso estático $\underset{(1)}{g_{ij}} \neq 0$, de forma que se tem,

$$\underset{(1)}{G_{ij}}\,(\underset{(1)}{g}) = \underset{(1)}{L_{ij}}\,(\underset{(1)}{g})$$

$$\underset{(2)}{G_{ij}}\,(\underset{(1)}{g}, \underset{(2)}{g}) = \underset{(2)}{L_{ij}}\,(\underset{(2)}{g}) + \underset{(2)}{M_{ij}}(\underset{(1)}{g}) \qquad 2.19$$

$$\underset{(3)}{G_{ij}}\,(\underset{(1)}{g}, \underset{(2)}{g}, \underset{(3)}{g}) = \underset{(3)}{L_{ij}}(\underset{(3)}{g}) + \underset{(3)}{M_{ij}}\,(\underset{(1)}{g}, \underset{(2)}{g})$$

- -

$$\underset{(N)}{G_{ij}}\,(\underset{(1)}{g}, \underset{(2)}{g}, \ldots \underset{(N)}{g}) = \underset{(N)}{L_{ij}}\,(\underset{(N)}{g}) + \underset{(N)}{M_{ij}}\,(\underset{(1)}{g}, \underset{(2)}{g}, \ldots \underset{(N-1)}{g}) \,, \quad N = 1, 2, \ldots$$

para o caso estacionário $\underset{(1)}{g_{ij}} = 0$, e se obtem

$$\underset{(1)}{G_{ij}} = 0$$

$$\underset{(2)}{G_{ij}}(\underset{(2)}{g}) = \underset{(2)}{L_{ij}}(\underset{(2)}{g})$$

$$\underset{(3)}{G_{ij}}\,(\underset{(3)}{g}) = \underset{(3)}{L_{ij}}\,(\underset{(3)}{g}) \qquad 2.20$$

$$\underset{(4)}{G_{ij}}\,(\underset{(2)}{g}, \underset{(4)}{g}) = \underset{(4)}{L_{ij}}\,(\underset{(4)}{g}) + \underset{(4)}{M_{ij}}\,(\underset{(2)}{g})$$

$$\underset{(5)}{G_{ij}} (\underset{(2)}{g}, \underset{(3)}{g}, \underset{(5)}{g}) = \underset{(5)}{L_{ij}} (\underset{(5)}{g}) + \underset{(5)}{M_{ij}} (\underset{(2)}{g}, \underset{(3)}{g})$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\underset{(N)}{G_{ij}} (\underset{(2)}{g}, \underset{(3)}{g}, \ldots \underset{(N)}{g}) = \underset{(N)}{L_{ij}} (\underset{(N)}{g}) + \underset{(N)}{M_{ij}} (\underset{(2)}{g}, \underset{(3)}{g} \ldots \underset{(N-2)}{g}) \quad , \; N = 2, 3, \ldots$$

As identidades de Bianchi

$$g^{jk} G_{ij|k} = 0 \qquad 2.21$$

se escrevem explicitamente como,

$$g^{jk}(G_{ij,k} - g^{ab} [jk, b] \, G_{ia} - g^{ab} [ik, b] \, G_{aj}) = 0 \qquad 2.22$$

Tomando as expansões de g_{ij}, g^{ij} e G_{ij}, se obtem essas identidades para as diferentes ordens de aproximação

$$\underset{(1)}{G_{ij,j}} = 0$$

$$\underset{(2)}{G_{ij,j}} - \underset{(1)}{g_{jk}} \underset{(1)}{G_{ij,k}} - \underset{(1)}{[jj,a]} \underset{(1)}{G_{ia}} - \underset{(1)}{[ij, a]} \underset{(1)}{G_{aj}} = 0 \qquad 2.23$$

- -

Define-se através das identidades 2.23 as grandezas,

$$\underset{(N)}{G_{ij,j}} = \underset{(N)}{K_i} \qquad 2.24$$

onde

$$\underset{(N)}{K_i} = \sum_{A+B=N} (\underset{(A)}{g^{jk}} \underset{(B)}{G_{ij,k}} - \underset{(A)}{[jj,a]} \underset{(B)}{G_{ia}} - \underset{(A)}{[ik, a]} \underset{(B)}{G_{ak}}) +$$

$$+ \sum_{A+B+C=N} \left\{ \underset{(A)}{g^{ab}} \left(\underset{(B)}{[kk,b]} \underset{(C)}{G_{ia}} + \underset{(B)}{[ik, b]} \underset{(C)}{G_{ak}} \right) + \underset{(A)}{g^{jk}} \underset{(B)}{[jk, a]} \underset{(C)}{G_{ia}} + \right. \qquad 2.25$$

$$+ \underset{(A)}{g^{jk}} \underset{(B)}{[ik, a]} \underset{(C)}{G_{aj}} \Big\} + \sum_{A+B+C+D=N} \underset{(A)}{g^{jk}} \underset{(B)}{g^{ab}} \left(\underset{(C)}{[jk, b]} \underset{(D)}{G_{ia}} + \underset{(C)}{[ik, b]} \underset{(D)}{G_{aj}} \right)$$

No caso estacionário $\underset{(1)}{g_{ij}} \neq 0$, $\underset{(N)}{K_i}$ se reduz a

$$\underset{(1)}{K_i} = 0 \qquad \underset{(2)}{K_i} = 0 , \qquad \underset{(3)}{K_i} = 0$$

$$\underset{(4)}{K_i} = \underset{(2)}{g_{jk}} \underset{(2)}{G_{ij,k}} + \underset{(2)}{[jj, a]} \underset{(2)}{G_{ia}} + \underset{(2)}{[ik, a]} \underset{(2)}{G_{ak}} \qquad 2.16$$

$$\underset{(5)}{K_i} = \underset{(2)}{g_{jk}} \underset{(3)}{G_{ij,k}} + \underset{(2)}{[jj,a]} \underset{(3)}{G_{ia}} + \underset{(2)}{[ik, a]} \underset{(3)}{G_{ak}} + \underset{(3)}{g_{jk}} \underset{(2)}{G_{ij,k}} +$$

$$+ \underset{(3)}{[jj, a]} \underset{(2)}{G_{ia}} + \underset{(3)}{[ik, a]} \underset{(2)}{G_{ak}}$$

e assim por diante.

Da expressão 2.15 segue-se que

$$L_{ij,j} (\gamma) = 0 \qquad 2.27$$

em particular

$$\underset{(N)}{L_{ij,j}} \underset{(N)}{(g)} = 0 \qquad 2.28$$

Daí, tomando 2.17 , 2.24 e 2.28 , obtém-se

para $\underset{(1)}{g_{ij}} \neq 0$

$$\underset{(N)}{M_{ij,j}} (\underset{(1)}{g}, \underset{(2)}{g}, \ldots, \underset{(N-1)}{g}) = \underset{(N)}{K_i} (\underset{(1)}{g}, \underset{(2)}{g}, \ldots \underset{(N-1)}{g}, \underset{(1)}{G}, \underset{(2)}{G}, \ldots \underset{(N-1)}{G}) \qquad 2.29$$

para $\underset{(1)}{g_{ij}} = 0$

$$\underset{(N)}{M_{ij,j}} (\underset{(2)}{g}, \ldots \underset{(N-2)}{g}) = \underset{(N)}{K_i} (\underset{(2)}{g}, \ldots \underset{(N-2)}{g}, \underset{(2)}{G}, \ldots, \underset{(N-2)}{G}), \quad N = 2,3, \ldots \qquad 2.30$$

o que demonstra ser a expressão de $\underset{(N)}{M_{ij,j}}$ linear homogênea em G_{ij} e em suas primeiras derivadas.

Portanto daí segue-se o teorema:

Teorema 1: Se, num domínio do espaço-tempo, se tem

$$\underset{(1)}{G_{ij}} = 0, \quad \underset{(2)}{G_{ij}} = 0, \ldots, \quad \underset{(N-1)}{G_{ij}} = 0$$

então nêste domínio

$$\underset{(N)}{M_{ij,j}} = 0.$$

3. POTENCIAIS RETARDADOS

Sendo T_{ij} qualquer tensor simétrico, contínuo com derivadas até 2ª ordem $[C^2]$, satisfazendo

$$T_{ij,j} = 0 \qquad 3.1$$

em cada domínio de continuidade, e

$$T_{ij}\, n_j = [C] \qquad 3.2$$

através de qualquer triespaço de descontinuidade, onde n_i é um vetor unitário Minkowskiano normal ao triespaço. Seja $\mathcal{N}$ o cone nulo Minkowskiano dirigido ao passado do ponto P e seja γ_{ij} definido por

$$\gamma_{ij}(P) = 4 \int_{\mathcal{N}} \overset{*}{T}_{ij}\, d\omega \qquad 3.3$$

onde $d\omega$ é $d\omega = \frac{d^3v}{r}$. Então demonstra-se que [1]

$$L_{ij}(\gamma) = -k\ T_{ij} \qquad (k = 8\pi) \qquad 3.4$$

Sendo que T_{ij} se anula com suficiente rapidez no infinito sobre $\mathcal{N}$. E L_{ij} é a forma linear definida antes pela equação 2-15. Se não se tivesse toma do $T_{ij,j} = 0$, porém sòmente T_{ij} de classe-$[C^2]$ se obteria em lugar de 3.4

$$L_{ij}(\gamma) = K\, T_{ij} + 2 \int_{\mathcal{N}} (\delta_{ij}\, T_{ab,ab} - T_{ia,aj} - T_{ja,ai})\, d\omega \qquad 3.5$$

A equação

$$\gamma_{ij}(P) = 4 \int_{\mathcal{N}} \overset{*}{T}_{ij}\, d\omega \qquad 3.6$$

é equivalente a

$$\overset{*}{\gamma}_{ij}(P) = 4 \int_{\mathcal{N}} T_{ij}\, d\omega \qquad 3.7$$

e segue-se que automàticamente a condição de coordenadas

$$\overset{*}{\gamma}_{ij,j} = 0 \,, \qquad 3.8$$

é satisfeita se a relação 3.1 for verificada. O presente resultado nada mais é do que uma outra forma de se apresentar as soluções retardadas das equações de campo linearizadas de Einstein (como se vê através das relações 3.4). Sabe-se que nêsse caso as condições de coordenadas (ou condições de gauge) 3.8 estão intimamente conectadas com as equações de conservação 3.1 .

Até aqui os resultados foram gerais, a não ser as fórmulas expressas para o caso estacionário. Agora escreveremos as fórmulas antes calculadas satisfazendo a condição de coordenadas 3.8. A aplicação da equação 3.6 nêste método será simplificada por não haver retardamento, pois $\underset{(N)}{T_{ij,4}} = 0$. Simplesmente será integrada 3.6 no espaço instantâneo.

4. FÓRMULAS SIMPLIFICADAS PELA CONDIÇÃO DE COORDENADAS

Considerando que $\underset{(N)}{g_{ij}}$ satisfaça a condição de coordenadas

$$\underset{(N)}{\overset{*}{g}_{ij,j}} = 0 \qquad 4.1$$

para qualquer N. Segue-se que,

$$\underset{(N)}{[rr,a]} = 0 \quad . \qquad 4.2$$

A forma linear $\underset{(N)}{L_{ij}}$ simplifica-se

$$\underset{(N)}{L^*_{ij}} = \frac{1}{2}\, \underset{(N)}{g_{ij,aa}} \; ; \qquad \underset{(N)}{L_{ij}} = \frac{1}{2}\, \underset{(N)}{g^*_{ij,aa}} \qquad 4.3$$

Usando-se $[rr,\, a] = 0$, (2.18) e (2.10) obtem-se

$$\begin{aligned}
\underset{(N)}{M_{ij}} = & - \sum_{A+B=N} \Big(\underset{(A)}{[rj,a]}\underset{(B)}{[ir,a]} - \frac{1}{2}\, \delta_{ij}\, \underset{(A)}{[rk,a]}\, \underset{(B)}{[rk,a]} \Big) + \\
& + \sum_{A+B=N} \Big\{ \underset{(A)}{g^{rs}}\, \underset{(B)}{R_{rijs}} - \delta_{ij}\, \underset{(A)}{g^{ab}} \big(\underset{(B)}{L^*_{ab}} + \underset{(B)}{S_{rabr}} \big) - \frac{1}{2}\, \underset{(A)}{g_{ij}} \big(\underset{(B)}{L^*_{aa}} + \underset{(B)}{S_{raar}} \big) \Big\} - \\
& - \sum_{A+B+C=N} \Big\{ \underset{(A)}{g^{ab}}\, \underset{(B)}{[rj,a]}\, \underset{(C)}{[ir,b]} - \frac{1}{2}\, \delta_{ij}\, \underset{(A)}{g^{ab}}\, \underset{(B)}{[rk,a]}\, \underset{(C)}{[rk,b]} + \\
& + \underset{(A)}{g_{ij}}\, \underset{(B)}{g^{rs}} \big(\underset{(C)}{L^*_{rs}} + \underset{(C)}{S_{raas}} \big) + \frac{1}{2}\, \delta_{ij}\, \underset{(A)}{g^{rs}}\, \underset{(B)}{g^{ab}}\, \underset{(C)}{R_{rabs}} \Big\} - \frac{1}{2} \sum_{A+B+C+D=N} \underset{(A)}{g_{ij}}\, \underset{(B)}{g^{rs}}\, \underset{(C)}{g^{ab}}\, \underset{(D)}{R_{rabs}}
\end{aligned} \qquad 4.4$$

onde

$$\underset{(N)}{S_{rijr}} = - \sum_{A+B=N} \underset{(A)}{[rj,a]}\, \underset{(B)}{[ri,a]} - \sum_{A+B+C=N} \underset{(A)}{g^{ab}}\, \underset{(B)}{[rj,a]}\, \underset{(C)}{[ir,k]} = \underset{(N)}{S_{irrj}} \qquad 4.5$$

Como $\underset{(1)}{S_{rijs}} = 0$ obtém-se para $\underset{(2)}{M_{ij}}$

$$\begin{aligned}
\underset{(2)}{M_{ij}} = & \frac{1}{2}\, \underset{(1)}{g^{rs}} \big(\underset{(1)}{g_{rs,ij}} + \underset{(1)}{g_{ij,rs}} - \underset{(1)}{g_{rj,is}} - \underset{(1)}{g_{is,rj}} \big) - \delta_{ij}\, \underset{(1)}{g^{ab}}\, \underset{(1)}{L^*_{ab}} - \frac{1}{2}\, \underset{(1)}{g_{ij}}\, \underset{(1)}{L^*_{aa}} - \\
& - \underset{(1)}{[rj,a]}\, \underset{(1)}{[ir,a]} + \frac{1}{2}\, \delta_{ij}\, \underset{(1)}{[rk,a]}\, \underset{(1)}{[rk,a]}
\end{aligned} \qquad 4.6$$

Se $\underset{(1)}{L_{ij}} = 0$ a expressão (4.6) se reduz a

$$\underset{(2)}{M_{ij}} = \frac{1}{2}\,\underset{(1)}{g^{rs}}(\underset{(1)}{g_{rs,ij}} + \underset{(1)}{g_{ij,rs}} - \underset{(1)}{g_{rj,is}} - \underset{(1)}{g_{is,rj}}) - \underset{(1)}{[rj,a]}\,\underset{(1)}{[ir,a]} + \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\underset{(1)}{[rk,a]}\,\underset{(1)}{[rk,a]} \qquad 4.7$$

ou equivalentemente

$$\underset{(2)}{M^{*}_{ij}} = \frac{1}{2}\,\underset{(1)}{g^{rs}}\,(\underset{(1)}{g_{rs,ij}} + \underset{(1)}{g_{ij,rs}} - \underset{(1)}{g_{rj,is}} - \underset{(1)}{g_{is,rj}}) - \underset{(1)}{[rj,a]}\,\underset{(1)}{[ir,a]} \qquad 4.8$$

5. CONDIÇÕES DE JUNÇÃO

Serão necessárias condições que deverão satisfazer o tensor T_{ij} no triespaço $f(x,y,z) = 0$ de descontinuidade. Enquanto fôr válido que $g_{ij} = [C]$ e $g_{ij,k} = [C]$ no triespaço, onde $[C]$ significa contínuo, demonstra-se que [10]

$$G_i^{\ j}\, f_{,j} = [C] \qquad 5.1$$

ou

$$g^{jk}\, G_{ik}\, f_{,j} = [C] \qquad 5.2$$

Tomando-se a série de g^{jk} e G_{ik}, obtem-se,

$$\begin{aligned} \underset{(1)}{G_{ij}}\, f_{,j} &= [C] \\ (\underset{(2)}{G_{ij}} + \underset{(1)}{g^{jk}}\,\underset{(1)}{G_{ik}})\, f_{,j} &= [C] \end{aligned} \qquad 5.3$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

generalizando

$$(\underset{(N)}{G_{ij}} + \sum_{A+B=N} \underset{(A)}{g^{jk}}\,\underset{(B)}{G_{ik}})\, f_{,j} = [C] \qquad 5.4$$

Tomando $N = 2$, obtem-se

$$\underset{(2)}{L_{ij}}(\underset{(2)}{g})\, f_{,j} = [C]$$

Tomando para o caso estático N = 1, obtem-se:

$$\underset{(1)}{L_{ij}}\underset{(1)}{(g)}\; f_{,j} = \boxed{C} \tag{5.6}$$

o que deve ser válido para qualquer ordem de N, pois $\underset{(1)}{g_{ij}}$ ou $\underset{(2)}{g_{ij}}$ são arbitrários

$$\underset{(N)}{L_{ij}}\;\underset{(N)}{(g)}\; f_{,j} = \boxed{C} \tag{5.7}$$

Portanto substituindo $\underset{(N)}{G_{ij}}$ por sua igualdade (2.17), pode-se escrever

$$(\underset{(N)}{M_{ij}} + \sum_{A+B=N} \underset{(A)}{g^{jk}}\, \underset{(B)}{G_{ik}}\, f_{,j} = \boxed{C} \tag{5.8}$$

Supondo as equações de campo

$$\underset{(N)}{G_{ij}} = -\, k\, \underset{(N)}{T_{ij}} \tag{5.9}$$

e qua $\underset{(N)}{T_{ij}}$ se anule fora de f = 0, na região de f crescente, então deve-se

$$\underset{(N)}{T_{ij}}\, f_{,j} = \underset{(N)}{Q_i} \tag{5.10}$$

onde

$$\underset{(N)}{Q_i} = - \sum_{A+B=N} \underset{(A)}{g^{jk}}\, \underset{(B)}{T_{ik}}\, f_{,j} \tag{5.11}$$

sendo $\underset{(N)}{T_{ij}}$ calculado dentro do triespaço f. Pode-se também derivar as condições (5.10) através da equação de continuidade

$$T_i^{\;j}\; f_{,j} = \boxed{C}$$

6. ASPECTOS FÍSICOS DAS EQUAÇÕES DE CAMPO

As equações de campo

$$G_{ij} = - k\, T_{ij} \qquad (k = 8\pi) \tag{6.1}$$

relacionam vinte funções g_{ij} e T_{ij} do espaçó tempo em dez equações, sujeitas a restrições impostas por cada modêlo físico tomado.

A restrição feita a g_{ij} é que representa um espaço flat com correções obtidas pelo método empregado dependentes do modêlo tomado. Caso as coordenadas forem reais a métrica terá assinatura +2 ou -2 conforme a convenção, e se o tempo fôr tomado imaginário será +4, como é o caso presentemente.

T_{ij} não é tão definido como g_{ij} T_{ij} deve ser zero fora do corpo, caso consideremos um côrpo rodeado de vácuo. Fìsicamente isto nunca ocorre, nunca há um vácuo perfeito. Pelo método também não pode-se obter um vácuo perfeito ($T_{ij} = 0$) isto é, sempre até a aproximação N tomada pode-se obter $G_{ij} = G_{ij}^{(1)} + G_{ij}^{(2)} \ldots + G_{ij}^{(N)} = 0$ mas os restantes G's são diferentes de zero, $G_{ij}^{(N+1)} + \ldots \neq 0$, o que está razoável com o modêlo físico tomado.

As propriedades físicas de T_{ij} (quadrivelocidade, densidade, tensões, pressões) podem ser obtidas através das equações de autovalores

$$T_{ij}\, \lambda^{j} = - \;\Theta\, g_{ij}\, \lambda^{j} \tag{6.2}$$

Dentro do côrpo impomos que os quatro autovalores sejam reais, podendo ser negativos ou positivos caso admitirmos densidades negativas.

Densidades positivas correspondem a autovalores do tipo tempo

$$T_{ij}\, \lambda^{j} = - \Theta\, g_{ij}\, \lambda^{j}$$

$$T_{ij}\, \lambda^{j}\, \lambda^{i} = - \Theta\, g_{ij}\, \lambda^{j}\, \lambda^{i} = - \Theta\, \lambda^{2}$$

$$\lambda^2 < 0 \quad \text{tipo tempo} \Longrightarrow \Theta < 0 \quad \text{(densidade positiva)}$$
$$\lambda^2 > 0 \quad \text{tipo espaço} \Longrightarrow \Theta > 0 \quad \text{(densidade negativa)} \qquad 6.3$$

Ainda póder-se-ia impor que os outros três autovalores fossem negativos pois isto significa pressões para o interior do côrpo, e sabe-se que corpos celestes suportam pressões dirigidas para o exterior muito pequenas.

Através do método não obtem-se apenas um modêlo mas uma single infinidade de modêlos com a métrica

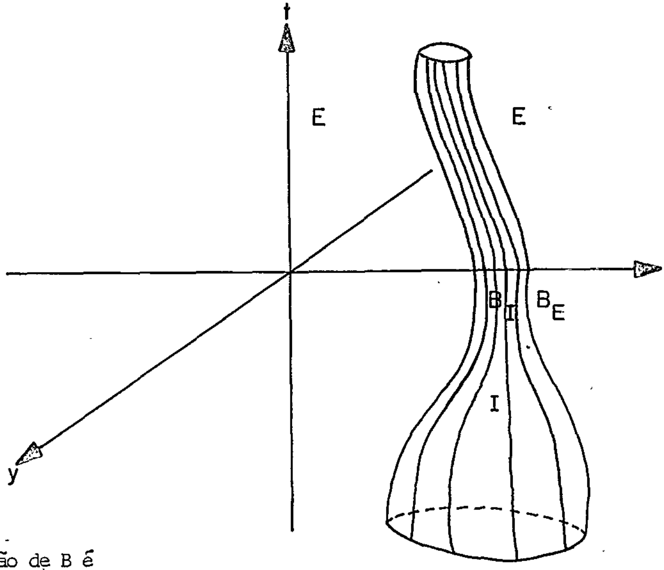
$$g_{ij} = \delta_{ij} + \underset{(1)}{g_{ij}} + \underset{(2)}{g_{ij}} + \ldots \qquad 6.4$$

onde os índices numéricos representam as potências do parâmetro adimensional k, admitindo valores entre $0 < k < k_1$ onde k_1 é pequeno. A imposição de que k_1 seja pequeno é porque estamos apenas tratando de campos fracos e que a correta assinatura seja preservada.

7. O MÉTODO

Considerando um modêlo mais geral possível: uma distribuição de massa movendo-se de acôrdo com suas interações, e aos poucos introduzindo-se restrições de acôrdo com as necessidades para o uso do método.

A história dos corpos no espaço tempo é dividida em domínios: domínio E exterior a todos os corpos, domínio I interior a todos êles e um triespaço B tipo tempo separando I de E; chamando B_I interior e B_E exterior.



A equação de B é

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \qquad 7.1$$

com f aumentando para fora. A normal para fora da superfície é

$$n_i = \frac{f_{,i}}{\sqrt{f_{,j}\, f_{,j}}} \qquad 7.2$$

Para construir-se um modêlo deve-se satisfazer as equações de campo, quase vácuo fora dos corpos e condições de junção sôbre as superfícies. Portanto

$$\underset{(N)}{G_{ij}} = - k \underset{(N)}{T_{ij}} \quad \text{em} \quad E + I$$

$$\underset{(N)}{T_{ij}} = 0 \quad \text{em} \quad E \qquad 7.3$$

$$\underset{(N)}{T_{ij}}\, n_j = \underset{(N)}{Q_i} \quad \text{sôbre} \quad B_I$$

onde

$$Q_{\underset{(N)}{i}} = - \sum_{A+B=N} \underset{(A)}{g^{jk}} \; \underset{(B)}{T_{ik}} \, n_j \quad \text{sôbre} \quad B_I \,. \qquad 7.4$$

Sendo satisfeitas as equações para N = 1, 2, 3, ... no caso estático e N = 2, 3, ... no caso estacionário. O valor mais alto assumido para N dependerá de quanto se quizer reduzir E ao vácuo.

Caso tivessem sido feitos os cálculos todos para um determinado modêlo e obtido os g_{ij} e T_{ij} até a aproximação N-1, êstes satisfariam ás condições de junção e vácuo e as equações de campo, o próximo passo seria solucionar estas mesmas equações para a aproximação N onde $\underset{(N)}{Q_i}$ já é conhecido pois involve só q_{ij} e T_{ij} de ordem menor que N.

Pode-se escrever a primeira equação das condições 7.3 a serem satisfeitas

$$\underset{(N)}{L_{ij}} \underset{(N)}{(g)} + \underset{(N)}{M_{ij}} (\underset{(1)}{g}, \underset{(2)}{g}, \ldots, \underset{(N-2)}{g}, \underset{(N-1)}{g}) = - k \underset{(N)}{T_{ij}} \text{ em } E + I \qquad 7.5$$

Se T_{ij} fôr conhecido tem-se equações diferenciais parciais lineares em $\underset{(N)}{g_{ij}}$ Tomando-se em consideração as identidades $L_{ij,j} = 0$, a solução da equação diferencial 7.5, só poderá ser encontrada se satisfizer

$$\underset{(N)}{M_{ij,j}} = - k \underset{(N)}{T_{ij,j}} \text{ em } E + I \qquad 7.6$$

ou pelas relações 2.29 e 2.30

$$- k \underset{(N)}{T_{ij,j}} = \underset{(N)}{K_i} (\underset{(1)}{g}, \underset{(2)}{g}, \ldots, \underset{(N-1)}{g}, \; \underset{(1)}{G}, \underset{(2)}{G}, \ldots \underset{(N-1)}{G}) \qquad \text{em } F + I \qquad 7.7$$

sendo $\underset{(N)}{K_i}$ linear e homogênea em G_{ij}. Como G_{ij} é igual a T_{ij} a menos de constante, e como T_{ij} se anula em E, obtem-se as condições

$$- k \underset{(N)}{T_{ij,j}} = \underset{(N)}{K_i} \text{ em } I, \quad \underset{(N)}{T_{ij,j}} = 0 \text{ em } E \qquad 7.8$$

Portanto o T_{ij} procurado deverá satisfazer as condições de consistência interior ao côrpo

$$- k \underset{(N)}{T_{ij,j}} = \underset{(N)}{K_i} \text{ em I} , \quad \underset{(N)}{T_{ij}} n_j = \underset{(N)}{Q_i} \quad \text{em } B_I \qquad 7.9$$

Estas equações são bastante indeterminadas, apenas quatro equações para dez incógnitas. Achado um $\underset{(N)}{T_{ij}}$ substitui-se em (7.7) para ter-se $\underset{(N)}{g_{ij}}$.

Para permitir soluções nêste método impõe-se condições restringindo a generalidade dos argumentos tomados. Consideramos um universo <u>estacionário</u> no qual as quantidades independem de x_4, $g_{ij,0} = 0$; ou ainda mais restritivo, um universo <u>estático</u>, que também independe de x_4, $g_{ij,0} = 0$ e ainda mais $g_{io}=0$. Para um universo estacionário pode-se considerar apenas uma massa girando com velocidade contínua em tôrno de seu eixo de simetria, como uma possível realização.

Portanto a coordenada x_4 desaparece, $n_i = (n_{\mu,0})$. As condições de consistência ficam simplesmente

$$\begin{aligned} - k \underset{(N)}{T_{\alpha\beta,\beta}} &= \underset{(N)}{K_\alpha} \text{ em I;} \quad \underset{(N)}{T_{\alpha\beta}} n_\beta = \underset{(N)}{Q_\alpha} \quad \text{em } B_I \\ - k \underset{(N)}{T_{\beta,\beta}} &= \underset{(N)}{K_4} \text{ em I;} \quad \underset{(N)}{T_{4\beta}} n_\beta = \underset{(N)}{Q_4} \quad \text{em } B_I \end{aligned} \qquad 8.10$$

Chamamos as condições de consistência (7.9) de <u>diferenciais</u> e as que são dadas adiante de <u>integrais</u>, as razões para êstes nomes serão esclarecidas no que se segue.

Seja ξ_α um vetor de Killing Euclidiano (do tipo espaço) que está associado à métricas com simetria esférica.

$$\xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} = 0 \qquad (7.11)$$

então, qualquer tensor simétrico $S_{\alpha\beta}$ satisfaz,

$$\int_I S_{\alpha\beta,\beta}\, \xi_\alpha\, d_3\, v = \int_{B_I} S_{\alpha\beta}.\xi_\alpha\, n_\beta\, d_2\, v \tag{7.12}$$

Tomando-se $S_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$, e usando-se as 7.10 , se obtem

$$\int_{I(N)} K_\alpha\, \xi_\alpha\, d_3\, v = -\, k \int_{(N)} Q_\alpha\, \xi_\alpha\, d_2\, v \tag{7.13.1}$$

Seja ξ_i um vetor de Killing do tipo tempo (tais vetores de Killing estão associados à métricas independentes de x^4). Então, qualquer tensor simétrico S_{ij} satisfaz,

$$S_{ij,j}\, \xi_i = (S_{ij}\, \xi_i)_{,j}$$

supondo que S_{ij} independa de x^4, e que ξ_i são constantes no tempo

$$S_{i\alpha,\alpha}\, \xi_i = (S_{i\alpha}\, \xi_i)_{,\alpha}$$

ou,

$$\int_I S_{i\alpha,\alpha}\, \xi_i\, d_3 v = \int_I (S_{i\alpha}\, \xi_i)_{,\alpha}\, d_3 v = \int_{B_I} S_{i\alpha}\, \xi_i\, n_\alpha\, d_2\, v$$

tomando-se os valores canônicos correspondentes a um vetor de Killing do tipo tempo e unitário, $\xi_i = \delta_i^4$, vem

$$\int_I S_{4\alpha,\alpha}\, d_3\, v = \int_{B_I} S_{4\alpha}\, n_\alpha\, d_2\, v$$

aplicando essa relação para $S_{4\alpha} = T_{4\alpha}$, se terá (a partir de 7.10)

$$\int_{I\,(N)} K_4\, d_3\, v = -\, k \int_{B_I\,(N)} Q_4\, d_2\, v \tag{7.13.2}$$

As relações 7.13.1 e 7.13.2 são as condições de consistência sob forma integral. Em sua demonstração introduzimos as simetrias que a métrica decorrente (ou consistente) dela deverá satisfazer.

Essas relações involvem só quantidades já conhecidas, de ordem (N-1), através delas e das relações 7.3 e 7.6

$$\underset{(N)}{K_i} = \underset{(N)}{M_{i\beta,\beta}} \quad \text{em } I \qquad 7.14$$

e como

$$-k\int_I \underset{(N)}{T_{\alpha\beta,\beta}}\, \xi_\alpha\, d_3\, v = \int_I \underset{(N)}{M_{\alpha\beta,\beta}}\, \xi_\beta\, d_3\, v$$

$$-k\int_{B_I} \underset{(N)}{Q_\beta}\, \xi_\beta\, d_2\, v = \int_{B_I} \underset{(N)}{M_{\alpha\beta}}\, \xi_\beta\, d_2\, v \qquad 7.15$$

$$0 = \int_{B_E} \underset{(N)}{M}{}_{\alpha\beta}\, \xi_\beta\, d_2\, v$$

subtraindo-se ambas as equações e considerando J o pulo da região B_I para B_E (fazendo o mesmo cálculo para a componente $\underset{(N)}{Q_4}$)

$$\underset{(N)}{Q_i} = k^{-1}\, J\, \underset{(N)}{M_{i\beta}}\, n_\beta \qquad \text{em } B_I \qquad 7.16$$

Como

$$\int_{I(N)} K_\alpha\, \xi_\alpha\, d_3\, v = -k \int_{B_I} \underset{(N)}{Q_\alpha}\, \xi_\alpha\, d_2\, v$$

$$7.17$$

$$\int_I \underset{(N)}{M_{\alpha\beta,\beta}}\, \xi_\alpha\, d_3\, v = -\int_{B_I} J\, \underset{(N)}{M_{\alpha\beta}}\, \xi_\alpha\, n_\beta\, d_2\, v$$

ou

$$\int_{B_I} \underset{(N)}{M_{\alpha\beta}}\, \xi_\alpha\, \eta_\beta\, d_2\, v = -\int_{B_E} \underset{(N)}{M_{\alpha\beta}}\, \xi_\beta\, \eta_\beta\, d_2\, v + \int_{B_I} \underset{(N)}{M_{\alpha\beta}}\, \xi_\alpha\, \eta_\beta\, d_2\, v$$

$$7.18$$

da mesma forma calculando para a componente Q_4 obtem-se

$$\int_{B_E} \underset{(N)}{M}_{\alpha\beta}\, \xi_\alpha\, \eta_\beta\, d_2\, v = 0 \;, \qquad \int_{B_E} \underset{(N)}{M}_{4\beta}\, \eta_\beta\, d_2\, v = 0 \qquad 7.19$$

A primeira integral representa que a fôrça total externa se anula e o momento total da fôrça externa se anula. A segunda integral representa que o fluxo total de energia para fora do corpo se anula.

Como $\underset{(N)}{M}_{i\beta,\beta} = 0$ em E, pode-se transferir estas integrais para esferas infinitas [7] e sua anulação vem da ordem de grandeza de M à grandes distâncias da origem.

Os N - 1 g's obtidos vem da solução da equação

$$\underset{(N-1)}{L_{ij}}\ \underset{(N-1)}{(g)} + \underset{(N-1)}{M_{ij}}\ (\underset{(2)}{g}, \ldots, \underset{(N-3)}{g}) = -\,k\, \underset{(N-1)}{T_{ij}} \qquad \text{em} \qquad E + I \qquad 7.20$$

cuja solução é

$$\underset{(A)}{g_{ij}}(P) = 4 \int \left[\underset{(A)}{T^*_{ij}}(P') + k^{-1}\, \underset{(A)}{M^*_{ij}}\,(P') \right] d\omega\,(P, P'), \quad A = 1,2,\ldots,N-1 \qquad 7.21$$

onde

$$d\omega\,(P, P') = \frac{d_3\, P'}{|\overline{PP'}|} \qquad 7.22$$

é o elemento de volume espacial dividido pela distância Euclidiana, e integrado sôbre espaço. Como g é da ordem de $0(r^{-1})$ para r grande, obtem-se que M é da ordem $0(r^{-4})$ e ξ_α no máximo $0(r)$. Daí observa-se que realmente as integrais antes calculadas (7.19) anulam-se ao tomarmos esferas infinitas e substituirmos as ordens de grandeza dos seus têrmos.

Impomos a escolha mais geral para caso estático e estacionário de $\underset{(N)}{T_{ij}}$ que satisfaça as condições diferenciais de consistência. Observa-se que para $\underset{(N)}{T_{44}}$ nada é impôsto, ficando sua escolha livre. Com isto finaliza-se o cálculo para g_{ij} , resolvendo-se a integral para A = N.

(Considera-se todos os têrmos independentes de x_4 e $n_4 = 0$).

7.1) Condições de Contôrno para o Caso Estático: Para N = 1, escolhe-se

$$\underset{(1)}{T_{ij,j}} = 0 \qquad \text{em } I$$

$$\underset{(1)}{T_{ij}}\, n_j = 0 \qquad \text{em } B_I \qquad 7.23$$

$$\underset{(1)}{T_{ij}} = 0 \qquad \text{em } E$$

definindo-se a métrica nessa ordem por,

$$\underset{(1)}{g_{ij}}(P) = 4 \int_I \underset{(1)}{T^*_{ij}} (P')\, d\omega\, (P, P') \qquad 7.24$$

Para N = 2, escolhe-se $\underset{(2)}{T_{ij}}$ que satisfaça

$$\underset{(2)}{T_{ij,j}} = -k^{-1} \underset{(2)}{K_i} \qquad \text{em } I$$

$$\underset{(2)}{T_{ij}}\, n_j = \underset{(2)}{Q_i} \qquad \text{em } B_I \qquad 7.25$$

$$\underset{(2)}{T_{ij}} = 0 \qquad \text{em } E$$

definindo-se,

$$\underset{(2)}{g_{ij}}(P) = 4 \int_I \underset{(2)}{T^*_{ij}}(P')\, d\omega\, (P', P) + 4\, k^{-1} \int_{E+I} \underset{(2)}{M^*_{ij}} (P')\, d\omega\, (P', P) \qquad 7.26$$

Para N=3, escolhe-se $\underset{(3)}{T_{ij}}$ que satisfaça

$$\underset{(3)}{T_{ij,j}} = -k^{-1} \underset{(3)}{K_i} \quad \text{em} \quad I$$

$$\underset{(3)}{T_{ij}} n_j = \underset{(3)}{Q_i} \quad \text{em} \quad B_I \qquad 7.27$$

$$\underset{(3)}{T_{ij}} = 0 \quad \text{em} \quad E$$

a métrica sendo dada por,

$$\underset{(3)}{g_{ij}}(P) = 4 \int_I \underset{(3)}{T^*_{ij}} (P') \, d\omega\, (P', P) + 4\, k^{-1} \int_{E+I} \underset{(3)}{M^*_{ij}} (P') \, d\omega\, (P, P') \qquad 7.28$$

Os mesmos passos se seguem até qualquer ordem de aproximação. A métrica calculada até a aproximação N=3, fica

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{N=1}^{3} \underset{(N)}{g_{ij}} \qquad 7.29$$

O T_{ij} calculado toma a expressão

$$T_{ij} = \sum_{N=1}^{3} \underset{(N)}{T_{ij}} + 0(k^4)$$

7.30

$$T_{ij} = 0(k^4) \quad \text{em} \quad E$$

apesar de não obter-se vácuo perfeito em E podemos ficar mais próximo dêle quanto maior for a aproximação N considerada, os têrmos que sobram sempre são de ordem $0(k^{N+1})$.

7.2) Condições de Contôrno para o Caso Estacionário

Para N=2, escolhe-se $\underset{(2)}{T_{ij}}$ que satisfaça

$$\underset{(2)}{T_{ij,j}} = 0 \quad \text{em} \quad I$$

$$\underset{(2)}{T_{ij}}\, n_j = 0 \quad \text{em} \quad B_I \qquad 7.31$$

$$\underset{(2)}{T_{ij}} = 0 \quad \text{em} \quad E$$

definindo-se

$$\underset{(2)}{g_{ij}}(P) = 4 \int_I \underset{(2)}{T^*_{ij}} (P')\, d \quad (P, P') \qquad 7.32$$

Para N=3, escolhe-se $\underset{(3)}{T_{ij}}$ que satisfaça

$$\underset{(3)}{T_{ij,j}} = 0 \quad \text{em} \quad I$$

$$\underset{(3)}{T_{ij}}\, n_j = 0 \text{ em } B_I \qquad 7.33$$

$$\underset{(3)}{T_{ij}} = 0 \quad \text{em } E$$

definindo-se

$$\underset{(3)}{g_{ij}}(P) = 4 \int_I \underset{(3)}{T^*_{ij}} (P')\, d \quad (P, P') \qquad 7.34$$

Para N=4, escolhe-se $\underset{(4)}{T_{ij}}$ que satisfaça

$$\underset{(4)}{T_{ij,j}} = - k^{-1} \underset{(4)}{K_i} \text{ em } I$$

$$\underset{(4)}{T_{ij}}\, n_j = \underset{(4)}{Q_i} \quad \text{em } B_I \qquad 7.35$$

$$\underset{(4)}{T_{ij}} = 0 \quad \text{em} \quad E$$

definindo-se

$$\underset{(4)}{g_{ij}}(P) = 4 \int_{I} \underset{(4)}{T^{*}_{ij}}(P')\, d\omega\ (P, P') + 4\, k^{-1} \int_{E+I} \underset{(4)}{M^{*}_{ij}}\ (P')\, d\omega\ (P, P') \quad 7.36$$

Para N=5, escolhe-se $\underset{(5)}{T_{ij}}$ que satisfaça

$$\underset{(5)}{T_{ij,j}} = - k^{-1} \underset{(5)}{K_i} \text{ em } I$$

$$\underset{(5)}{T_{ij}}\, n_j = \underset{(5)}{Q_i} \quad \text{em } B_I \qquad 7.37$$

$$\underset{(5)}{T_{ij}} = 0 \quad \text{em } E$$

definindo-se

$$\underset{(5)}{g_{ij}}(P) = 4 \int_{I} \underset{(5)}{T^{*}_{ij}}\ (P')\, d\omega\ (P, P') + 4\, k^{-1} \int_{E+I} \underset{(5)}{M^{*}_{ij}}\ (P')\, d\omega(P,P') \qquad 7.38$$

Seguem-se os mesmos passos até qualquer ordem.

A métrica calculada até esta aproximação N=5 fica

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{N=2}^{5} \underset{(N)}{g_{ij}} \qquad 7.39$$

O T_{ij} calculado toma a expressão

$$T_{ij} = \sum_{N=2}^{5} \underset{(N)}{T_{ij}} + 0(k^{6})$$

$$T_{ij} = 0(k^{6}) \text{ em } E \qquad 7.40$$

da mesma forma não se obtém um vácuo perfeito, sendo o têrmo residual da ordem $0(k^{N+1})$ em relação à aproximação N tomada.

8. APLICAÇÃO DO MÉTODO PARA O CÁLCULO DA MÉTRICA DE UM CÔRPO ESFÉRICO ESTÁTICO

Definindo-se uma região I, de superfície B, de simetria esférica onde há uma distribuição de matéria estática $\rho(x)$ e um vetor unitário $n_i = (n_{\alpha,0})$ dirigido perpendicularmente à superfície, para fora dela, ou seja para a região E. O $\underset{(1)}{T_{ij}}$ escolhido é

$$\underset{(1)}{T_{\alpha\beta}} = 0, \quad \underset{(1)}{T_{\alpha 4}} = 0, \quad \underset{(1)}{T_{44}} = -\rho(x) \quad \text{em I}$$

$$\underset{(1)}{T_{ij}} = 0 \quad \text{em E} \tag{8.1}$$

que satisfaz as condições de $\underset{(1)}{T_{ij}}$ de (7.23). Seu conjugado é

$$\underset{(1)}{\overset{*}{T}_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\rho\,\delta_{\alpha\beta}, \quad \underset{(1)}{\overset{*}{T}_{4\alpha}} = 0, \quad \underset{(1)}{\overset{*}{T}_{44}} = -\frac{1}{2}\rho \quad \text{em I}$$

$$\underset{(1)}{\overset{*}{T}_{ij}} = 0 \quad \text{em E} \tag{8.2}$$

Sendo <u>a</u> o raio da esfera, se tem,

$$\left.\underset{(1)}{g_{44}}(x)\right|_{x>a} = 4\int_{\substack{x>a\\y>a}} \underset{(1)}{\overset{*}{T}_{44}}(y)\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} + 4\int_{\substack{x>a\\y<a}} \underset{(1)}{\overset{*}{T}_{44}}(y)\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{8.3}$$

como

$$\underset{(1)}{\overset{*}{T}_{44}}(y) = -\frac{1}{2}\rho(y), \quad y < a \tag{8.4}$$

$$\underset{(1)}{\overset{*}{T}_{44}}(y) = 0 \quad , \quad y > a \tag{8.5}$$

vem·

$$g_{\underset{(1)}{44}}(x)\Big|_{x>a} = -\frac{4}{2}\int \rho(y)\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \qquad 8.5$$

Tomando o resultado (A-9) obtemos

$$g_{\underset{(1)}{44}}(x)\Big|_{x>a} = -2\cdot\frac{4\pi}{x}\int_{\substack{x>a\\y<a}} y^2\,\rho(y)dy \qquad 8.6$$

definindo,

$$\overline{m} = 4\pi\int_0^a y^2\,\rho(y)dy \qquad 8.7$$

obtem-se

$$g_{\underset{(1)}{44}}(x)\Big|_{x>a} = -\frac{2\overline{m}}{x} \qquad 8.8$$

Para o interior da esfera,

$$g_{\underset{(1)}{44}}(x)\Big|_{x<a} = 4\int_{\substack{x<a\\y<a}} T^{*}_{\underset{(1)}{44}}(y)\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -\frac{4}{2}\int \rho(y)\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \qquad 8.9$$

considerando (A-9) tem-se,

$$g_{\underset{(1)}{44}}(x)\Big|_{x<a} = -\frac{8\pi}{x}\int_0^x y^2\,\rho(y)dy - 8\pi\int_x^a y\,\rho(y)dy \qquad 8.10$$

definindo

$$\overline{v}(x) = 4\pi\int_0^x y\,\rho(y)dy \qquad 8.11$$

$$J(x,a) = \int_x^a y^2\rho(y)\,dy \qquad 8.12$$

obtem-se

$$g_{\underset{(1)}{44}}(x)\Big|_{x<a} = -\frac{2}{x}\,\overline{v}(x) - 8\pi\,J(x,a) \qquad 8.12$$

Como,

$$\underset{(1)}{T^{*}_{\alpha 4}}(y) = 0 \quad \begin{cases} y > a \\ y < a \end{cases} \tag{8.13}$$

vem

$$\underset{(1)}{g_{\alpha 4}}(x)\Big|_{\substack{x>a \\ \text{ou} \\ x<a}} = 4 \int \underset{(1)}{T^{*}_{\alpha 4}}(y) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} = 0 \tag{8.14}$$

Continuando no cálculo da métrica,

$$\underset{(1)}{g_{\alpha\beta}}(x)\Big|_{x>a} = 4 \int_{x>a} \underset{(1)}{T^{*}_{\alpha\beta}}(y) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$= 4 \int_{\substack{x>a \\ y>a}} \underset{(1)}{T^{*}_{\alpha\beta}}(y) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} + 4 \int_{\substack{x>a \\ y<a}} \underset{(1)}{T^{*}_{\alpha\beta}}(y) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{8.15}$$

sendo

$$\underset{(1)}{T^{*}_{\alpha\beta}}(y) = \frac{1}{2} \rho(y) \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad y < a$$

$$= 0 \quad , \quad y > a \tag{8.16}$$

$$\underset{(1)}{g_{\alpha\beta}}(x)\Big|_{x>a} = \frac{4}{2} \delta_{\alpha\beta} \int_{\substack{x>a \\ y<a}} \rho(y) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

tomando (A-9),

$$\underset{(1)}{g_{\alpha\beta}}(x)\Big|_{x>a} = \frac{8\pi}{x} \delta_{\alpha\beta} \int_0^a y^2 \rho(y) dy \tag{8.17}$$

$$= \frac{2}{x} \delta_{\alpha\beta} \bar{m}$$

No interior da esfera se tem

$$\underset{(1)}{g_{\alpha\beta}}(x)\Big|_{x<a} = \frac{4}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\int_{\substack{x<a\\y<a}} \rho(y)\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$= \frac{8\pi}{x}\,\delta_{\alpha\beta}\int_{\substack{0\\x<a\\y<a}}^{x} y^2\,\rho(y)dy + 8\pi\,\delta_{\alpha\beta}\int_{\substack{x\\x<a\\y<a}}^{\infty} y\,\rho(y)dy \qquad 8.18$$

$$= \frac{2}{x}\,\delta_{\alpha\beta}\,\overline{\nu}(x) + 8\pi\,\delta_{\alpha\beta}\,J(x,a)$$

Aproximação de segunda ordem:

$$\underset{(2)}{g_{ij}}(x) = 4\int_{I} \underset{(2)}{T^{*}_{ij}}(y)\,\frac{dy}{|\vec{x}-\vec{y}|} + 4\,k^{-1}\int_{I+E} \underset{(2)}{M^{*}_{ij}}(y)\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \qquad 8.19$$

para obtê-la necessitamos de $\underset{(2)}{M_{ij}}$ nessa ordem, que são

$$\underset{(2)}{M_{\alpha\beta}} = -\frac{14\,\overline{m}^2}{r^6}\,y_\alpha\,y_\beta + \frac{7\,\overline{m}^2}{r^4}\,\delta_{\alpha\beta}$$

$$\underset{(2)}{M_{\alpha 4}} = 0 \qquad 8.20$$

$$\underset{(2)}{M_{44}} = \frac{3\,\overline{m}^2}{r^4}$$

em y > a, (espaço E). Equivalentemente,

$$\underset{(2)}{M^{*}_{\alpha\beta}} = -\frac{14\,\overline{m}^2}{r^6}\,y_\alpha\,y_\beta + \frac{2\,\overline{m}^2}{r^4}\,\delta_{\alpha\beta} \qquad 8.21$$

$$\underset{(2)}{M^{*}_{\alpha 4}} = 0$$

$$\underset{(2)}{M_{44}} = - \frac{2\,\overline{m}}{r^4} \qquad 8.21$$

em E.

Para calcular $\underset{(2)}{g'_{44}}$ tomo 8.19 e $\underset{(2)}{T_{44}}$ e $\underset{(2)}{M_{44}}$ em I. Como

$$k \cdot \underset{(2)}{T_{ij,j}} + \underset{(2)}{M_{ij,j}} = 0 \;, \qquad I \qquad 8.22$$

vem que

$$k\, \underset{(2)}{T_{44}} + \underset{(2)}{M_{44}} = U_{44} \qquad 8.23$$

onde

$$U_{ij,j} = 0 \qquad 8.24$$

é independente do tempo.

Como imponho que não há acréscimo de matéria na esfera,

$$U_{44} = 0$$

Devendo ser possível encontrar $\underset{(2)}{T_{44}}$ em I que satisfaça as relações 8.22 e 8.23, pois $\underset{(2)}{M_{44}}$ é obtido através de $\underset{(1)}{g_{ij}}$ e suas derivadas.

$$\underset{(2)}{M_{44}}(x)\Big|_{x<a} = 10 \left(2\,\frac{\overline{\nu}^2}{x^4} - \frac{x_\alpha\,\overline{\nu}_{,\alpha}}{r^4} - \frac{x_\alpha\,\overline{\nu}_{,\alpha}}{r^4} - 8\pi\,\frac{x_\alpha\,J_{,\alpha}}{r}\,\overline{\nu} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\overline{\nu}_{,\alpha}\,\overline{\nu}_{,\alpha}}{r^2} + 4\,\frac{\nu_{,\alpha}\,J_{,\alpha}}{r} + 8\pi^2\,J_{,\alpha}\,J_{,\alpha} + \qquad 8.25$$

$$\left. + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{r}\,\nu + 8\pi\,J\right)\left(-\frac{x_\alpha\,\overline{\nu}_{,\alpha}}{r^3} + \frac{\overline{\nu}_{,\alpha\alpha}}{r} + 4\pi\,J_{,\alpha\alpha}\right) \right)$$

Pela simetria esférica do côrpo, não havendo fluxo de matéria para fora do côrpo,

$$\underset{(2)}{k.T_{\alpha 4}} + \underset{(2)}{M_{\alpha 4}} = 0 \quad , \qquad I \qquad 8.26$$

Também deve haver um $\underset{(2)}{T_{\alpha 4}}$ que satisfaça a relação anterior 8.26 , pois $\underset{(2)}{M_{\alpha 4}}$ são dados por $\underset{(1)}{g_{ij}}$ em I, já calculados.

Para o cálculo de $\underset{(2)}{g_{\alpha\beta}}$ em I sabe-se que,

$$(k \underset{(2)}{T_{\alpha\beta}} + \underset{(2)}{M_{\alpha\beta}})_I \, n_\beta = (\underset{(2)}{M_{\alpha\beta}})_E \, n_\beta \; , \qquad B_I \qquad 8.27$$

assim,

$$\underset{(2)}{M_{\alpha\beta}} n_\beta = - \frac{14 \, \overline{m}^2}{r^6} x_\alpha x_\beta n_\beta + 7 \frac{\overline{m}^2}{r^4} n_\alpha , \qquad B_I$$

$$= - 7 \frac{\overline{m}^2}{a^4} \delta_{\alpha\beta} n_\beta \qquad 8.28$$

$$(k \underset{(2)}{T_{\alpha\beta}} + \underset{(2)}{M_{\alpha\beta}})_I \, n_\beta = - 7 \frac{\overline{m}^2}{a^4} \delta_{\alpha\beta} n_\beta$$

$$k \underset{(2)}{T_{\alpha\beta}} + \underset{(2)}{M_{\alpha\beta}} = - 7 \frac{\overline{m}^2}{a^4} \delta_{\alpha\beta} \; , \quad I$$

Chamando

$$\underset{(N)}{P_{ij}} = k \underset{(N)}{T_{ij}} + \underset{(N)}{M_{ij}} \qquad 8.29$$

obtem-se pelas condições de contôrno 8.22

$$\underset{(N)}{P_{i\alpha,\alpha}} = 0 \; , \qquad I \qquad 8.30$$

A única solução consistente com a simetria esférica é

$$\underset{(2)}{P_{\alpha 4}} = 0 \qquad , \quad \mathrm{I} \tag{8.31}$$

Portanto $\underset{(2)}{P_{ij}}$ em I fica

$$\left.\begin{aligned} \underset{(2)}{P_{\alpha\beta}} &= -7\,\frac{\overline{m}^2}{a^4}\,\delta_{\alpha\beta} \\ \underset{(2)}{P_{\alpha 4}} &= 0 \\ \underset{(2)}{P_{44}} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad , \mathrm{I} \tag{8.32}$$

e $\underset{(2)}{P^{*}_{ij}}$ em I

$$\left.\begin{aligned} \underset{(2)}{P^{*}_{\alpha\beta}} &= \frac{7}{2}\,\frac{\overline{m}^2}{a^4}\,\delta_{\alpha\beta} \\ \underset{(2)}{P^{*}_{\alpha 4}} &= 0 \\ \underset{(2)}{P^{*}_{44}} &= \frac{21}{2}\,\frac{\overline{m}^2}{a^4} \end{aligned}\right\} \quad , \mathrm{I} \tag{8.33}$$

Tomando as quantidades calculadas em 8.21 e 8.33 , obtem-se

$$\left.\underset{(2)}{g_{44}}(x)\right|_{x>a} = 4\,k^{-1}\left(\int_{\mathrm{I}} \underset{(2)}{P^{*}_{44}}(y)\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \int_{\mathrm{E}} \underset{(2)}{M^{*}_{44}}(y)\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\substack{x>a \\ y<a}} \frac{21}{2}\,\frac{\overline{m}^2}{a^4}\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \int_{\substack{x>a \\ y>a}} \left(-\frac{2\,\overline{m}^2}{y^4}\right)\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right)$$

$$= \frac{\overline{m}^2}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{a}\right) \tag{8.34}$$

$$\left. \underset{(2)}{g_{44}}(x) \right|_{x<a} = 4\, k^{-1} \left(- \int_{\substack{x<a \\ y>a}} \frac{2\, \overline{m}^2}{y^4} \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \int_{\substack{x<a \\ y<a}} \frac{21}{2} \frac{\overline{m}^2}{a^4} \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right)$$

$$= \frac{\overline{m}^2}{2.a^2} \left(17 - \frac{7\, x^2}{a^2} \right)$$

$$\left. \underset{(2)}{g_{\alpha 4}}(x) \right|_{\substack{x>a \\ x<a}} = 0$$

$$\left. \underset{(2)}{g_{\alpha\beta}}(x) \right|_{x>a} = 4\, k^{-1} \left[\int_{\substack{x>a \\ y<a}} \frac{7}{2} \frac{\overline{m}^2}{a^4} \delta_{\alpha\beta} \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \right.$$

$$\left. + \int_{\substack{x>a \\ y>a}} \left(\frac{2\, \overline{m}^2}{y^4} \delta_{\alpha\beta} - \frac{14\, \overline{m}^2}{y^6} y_\alpha\, y_\beta \right) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right] \qquad 8.34$$

$$= \frac{\overline{m}^2}{x} \left(\frac{5}{x} - \frac{3}{a} - \frac{28a}{15x^2} \right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{7\, \overline{m}^2}{x^2} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{a}{x} \right) \frac{x_\alpha x_\beta}{x^2}$$

$$\left. \underset{(2)}{g_{\alpha\beta}}(x) \right|_{x<a} = 4\, k^{-1} \left[\int_{\substack{x<a \\ y<a}} \frac{7}{2} \frac{\overline{m}^2}{a^4} \delta_{\alpha\beta} \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \right.$$

$$\left. + \int_{\substack{x<a \\ y>a}} \left(\frac{2\, \overline{m}^2}{y^4} \delta_{\alpha\beta} - \frac{14\, \overline{m}^2}{y^6} y_\alpha\, y_\beta \right) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \right]$$

$$= \frac{\overline{m}^2}{2\, a^2} \left[\frac{5}{3} - \frac{7\, x^2}{5\, a^2} \right] \delta_{\alpha\beta} - \frac{7\, \overline{m}^2}{5\, a^4} x_\alpha\, x_\beta$$

Portanto até segunda ordem a métrica para uma esfera estática de raio a, no espaço E $(x > a)$, tem a forma:

$$g_{44}(x) = 1 - \frac{2\,\overline{m}}{x} + \frac{\overline{m}^2}{x}\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{a}\right)$$

$$g_{\alpha 4}(x) = 0 \tag{8.35}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left[1 + \frac{2\overline{m}}{x} + \frac{\overline{m}^2}{x}\left(\frac{5}{x} - \frac{3}{a} - \frac{28\ a}{15x^2}\right)\right]\delta_{\alpha\beta} - \frac{7\ \overline{m}^2}{x^2}\left(1 - \frac{4a}{5x}\right)\frac{x_\alpha x_\beta}{x^2}$$

e no espaço I, $(x < a)$

$$g_{44}(x) = 1 - \frac{2\overline{\nu}(x)}{x} - 8\pi J(x,a) + \frac{\overline{m}^2}{2\ a^2}\left(17 - \frac{7\ x^2}{a^2}\right)$$

$$g_{\alpha 4}(x) = 0 \tag{8.36}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left[1 + \frac{2\overline{\nu}(x)}{x} + 8\pi J\ (x,a) + \frac{\overline{m}^2}{2\ a^2}\left(\frac{5}{3} - \frac{7\ x^2}{5\ a^2}\right)\right]\delta_{\alpha\beta} - \frac{7\ \overline{m}^2}{5\ a^4}\, x_\alpha x_\beta$$

Se a distribuição de matéria fôr constante, ρ = cte dentro da esfera, a métrica ficará no espaço E,

$$g_{44}(x) = 1 - \frac{8\ \pi\ \rho\ a^3}{3\ x} + \frac{16\ \pi^2\ a^6}{9\ x}\ \rho^2\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{a}\right)$$

$$g_{\alpha 4}(x) = 0 \tag{8.37}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left[1 + \frac{8\pi}{3x}\rho\ a^3 + \frac{16\ \pi^2\ \rho^2 a^6}{9\ x}\left(\frac{5}{x} - \frac{3}{a} - \frac{28\ a}{15\ x^2}\right)\right]\delta_{\alpha\beta} -$$

$$- \frac{112}{9\ x^2}\pi^2\ \rho^2\ \ a^6\ \left(1 - \frac{4}{5}\frac{a}{x}\right)\ \frac{x_\alpha\ x_\beta}{x^2}$$

e no espaço I,

$$g_{44}(x) = 1 + 4\,\pi\,\rho \left(\frac{x^2}{3} - a^2\right) + \frac{8\pi^2 \quad a^4}{9}\,\rho^2 \left(17 - \frac{7\,x^2}{a^2}\right)$$

$$g_{\alpha 4}(x) = 0 \tag{8.38}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left[1 + 4\,\pi\,\rho \left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{8\,\pi^2\,\rho^2\,a^4}{9}\left(\frac{5}{3} - \frac{7\,x^2}{5\,a^2}\right)\right]\delta_{\alpha\beta} -$$

$$- \frac{112}{45}\,\pi\,\rho^2\,a^2\,x_\alpha\,x_\beta$$

9. NOTAS SÔBRE A MÉTRICA CALCULADA PARA A DISTRIBUIÇÃO ESTÁTICA E ESFÉRICA DE MATÉRIA

A métrica resultante em aproximação sucessivas é proveniente sempre de uma distribuição de matéria que difere um pouco da distribuição imposta pelas aproximações anteriores. Para observarmos o quanto "acrescentamos" de matéria fora da esfera, visto que na seção 8 consideramos aproximação até segunda ordem apenas (pois caso tomássemos um número infinito de aproximação teríamos $T_{44} = 0$ em $x > a$) calculamos qual o T_{44} para $x > a$

$$- k\,T_{44} = G_{44}$$

$$- k\,T_{44} = R_{44} - \frac{1}{2}\,R\,g_{44} \tag{9.1}$$

tomando as equações 2.9 e 8.35, obtem-se

$$- k\,T_{44} = \frac{5\,\bar{m}^2}{2x^4} - \frac{4\,\bar{m}^3}{x^5} - \frac{13\,\bar{m}^4}{2\,x^6} + \frac{64\,\bar{m}^5}{x^7} - \frac{34\,\bar{m}^6}{x^8}$$

$$T_{44} \equiv 0\left[\left(\frac{G}{c^2}\right)^2\right] \tag{9.2}$$

que é uma ordem mais alta que a primeira correção à métrica.

A métrica calculada no exterior é de Schwarzchild até segunda aproximação, o que foi provado por P. S. Florides e J. L. Synge [6].

A singularidade do raio de Schwarzchild fica desaparecida expandindo-se em série a métrica. Por isso na métrica calculada por êste método não aparece esta singularidade porque provém de uma expansão.

A curvatura escalar, R^2, calculada até segunda aproximação para $x > a$ não apresenta nenhuma singularidade

$$R^2 = R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$= 24 \frac{\bar{m}^2}{x^6} - 240 \frac{\bar{m}^3}{x^7} + 1092 \frac{\bar{m}^4}{x^8} + \dots \text{ até têrmos } 0\left(\frac{\bar{m}^{10}}{x^{14}}\right) \qquad 9.3$$

A geodésica dessa geometria é

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop kj} \right\} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \qquad 9.4$$

substituindo a métrica para $x > a$ e definindo

$$v^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad 9.5$$

Tem-se

$$\frac{dv^\alpha}{ds} + \frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{\bar{m}}{x}\right) \frac{\bar{m}}{x^3} \left(-2x_\gamma v^\gamma v^\alpha + x^\alpha v^\gamma v_\gamma\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2\bar{m}}{x}\right] \frac{\bar{m}}{x^3} x^\alpha v^4 v^4 = 0 \qquad 9.6$$

Da equação de movimento 9.6 obtem-se as equações de movimento Newtonianas considerando-se velocidades da massa teste baixas, isto é, têrmos $0(v^2)$ são desprezíveis, $v^4 v^4 = 1$, e potenciais $0(1/r^3)$ também desprezíveis. Ob...

$$\frac{dv^\alpha}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\bar{m}}{x^3} x^\alpha = 0 \qquad 9.7$$

Para i = 4 obtem-se a conservação de energia; a equação 9.6 fica

$$\frac{d^2x^4}{ds^2} = 0 \qquad 9.8$$

Substituindo 9.5 em 9.7 obtem-se as equações de Newton

$$\frac{d^2x^\alpha}{dx^{4^2}} - \frac{\bar{m}}{x^3} x^\alpha = 0 \qquad 9.9$$

O espaço deformado pela distribuição de massa estática esfèricamente simétrica é quase Euclidiano, a primeira correção a métrica $\underset{(1)}{g_{ij}}$ é pequena, e a $\underset{(2)}{g_{ij}}$ é menor ainda. Observa-se o quanto cada correção à métrica modifica o raio da esfera através do quociente entre a circunferência e o raio geodésico, na ordem considerada.

Para o cálculo da circunferência o valor obtido deverá ser o mesmo utilizando-se tanto a métrica calculada para x > a como para x < a, o que constata-se,

$$C = \int ds = \int\left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{4\mu}\ g_{4\nu}}{g_{44}}\right) dx^\mu\ dx^\nu\right]^{1/2}_{\text{componente}\ \phi}$$

$$= \int (g_{\mu\nu}\ dx^\mu\ dx^\nu)^{1/2}_{\text{componente}\ \phi} \qquad 9.10$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2\bar{m}}{r}\right)^{1/2} r\ d\phi$$

tomando a densidade ρ constante na esfera

$$C = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{8\pi}{3}\ \rho r^2\right)^{1/2} r\ d\phi = \left(1 + \frac{4\pi}{3}\rho\ a^2\right) a\ 2\pi \qquad 9.11$$

O raio geodésico em primeira aproximação, será

$$R = \int ds = \int \left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{4\mu}\, g_{4\nu}}{g_{44}}\right) dx^\mu\, dx^\nu\right]^{1/2}$$

$$= \left[g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu\right]^{1/2}$$

$$= \int_0^a \left(1 + \frac{2}{r}\,\bar{\nu} + 8\,\pi\,J\right)^{1/2} dr$$

$$= \int_0^a \left[1 + \frac{8}{3}\,\pi\,\rho\,r^2 + 8\,\pi\,\rho\left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)\right]^{1/2} dr \qquad 9.12$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}\,\pi\,\rho}} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\,\pi\,\rho\,r}}{2} \left[1 + 4\,\pi\,\rho\,a^2 - \frac{4}{3}\,\pi\,\rho\,r^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[1 + 4\,\pi\,\rho\,a^2\right] \mathrm{sen}^{-1} \frac{(\frac{4}{3}\,\pi\,\rho)^{1/2} r}{(1 + \pi\,\rho\,a^2)^{1/2}} \right\}_0^a$$

$$= \frac{a}{2}\left[1 + \frac{8}{3}\,\pi\,\rho\,a^2\right] + \frac{1}{2}\,\frac{1 + 4\pi\rho a^2}{\sqrt{\frac{4}{3}\,\pi\,\rho}}\,\mathrm{sen}^{-1} \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\,\pi\,\rho}\;\;a}{(1 + 4\,\pi\,\rho\,a^2)^{1/2}}$$

Escrevendo em têrmos do potencial $V(r) = 4/3\,\pi\,\rho\,r^2$, tem-se

$$R = \frac{a}{2}\,|1 + 2\,V| + \frac{1 + 3V}{\frac{2}{a}\sqrt{V}}\,\mathrm{sen}^{-1} \frac{\sqrt{V}}{(1 + 3V)^{1/2}} \qquad 9.13$$

Expandindo-se em série, (pois considera-se $V \ll 1$)

$$R \cong (1 + \frac{13}{4}\,V)\,a, \qquad 9.14$$

O quociente entre a circunferência e o raio geodésico fica

$$\frac{C}{R} \cong \left(\frac{1 + V}{1 + \frac{13}{4} V} \right) 2\pi \qquad 9.15$$

expandindo-se em série novamente até têrmos lineares em V,

$$\frac{C}{R} \cong (1 - \frac{9}{4} V)\, 2\pi$$
$$= (1 - 3\pi\rho a^2)\, 2\pi \qquad 9.16$$

Resultado que é interpretado como uma "contração no espaço" devido à matéria presente.

10. APLICAÇÃO DO MÉTODO PARA O CÁLCULO DA MÉTRICA DE UM CORPO ESFÉRICO EM MOVIMENTO ESTACIONÁRIO

Sendo a expansão da métrica em potências de k, observa-se que a primeira correção da métrica de Minkowski é em k^2 em relação a primeira correção para o caso estático que é em k. Pois pelas equações de Newton 1.4, ρ é invariante por uma transformação k^2 e u_α por uma transformação k, e a correção da massa é a de mais baixa ordem pois é a mais importante. No caso estático tomou-se a primeira correção em k pois não havia têrmo em u_α.

Êste k introduzido não constroe um só universo, como também no caso estático, pois como êste parâmetro pode tomar valores entre $0 < k < k_1$, constroe-se um single-infinito de universos. Realmente esta constante k não necessita de uma especificação precisa. Observando as transformações 1.3 e 1.5, vê-se por exemplo que ρ, é tomado como densidade, e a quantidade do lado direito é um produto de duas quantidades matemáticas, tendo só sentido físico êste produto. Portanto, fisicamente nada muda se aumentarmos ou diminuirmos k e proporcionalmente variarmos ρ'.

Define-se no espaço de Minkowski como no caso estático uma região I de superfície B, de simetria esférica onde há uma distribuição de matéria estacionária $\rho(x) = \rho(\vec{x})$, e um vetor unitário $n_i = (n_\alpha, 0)$ dirigido perpendicularmente à superfície para fora dela, E.

A superfície B descrita por $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ não se altera, enquanto que a geometria em cada aproximação tomada altera-se. consideração também válida para o caso estático.

A matéria conhecida não pode ter um movimento estacionário, a não ser para velocidades muito pequenas em relação à velocidade da luz, senão a tensão a dividiria em partes.

Por simplicidade admite-se que a densidade do corpo é pequena, para evitar mais têrmos de interação na expressão de $\underset{(N)}{T_{\mu\nu}}$ O $\underset{(2)}{T_{ij}}$ escolhido é,

$$\underset{(2)}{T_{\alpha\beta}} = 0 \,, \qquad \underset{(2)}{T_{\alpha 4}} = 0 \,, \qquad \underset{(2)}{T_{44}} = -\rho \quad , \quad \mathrm{I} \qquad\qquad 10.1$$

$$\underset{(2)}{T_{ij}} = 0 \,, \qquad \mathrm{E}$$

onde

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \,, \qquad \rho(x) = 0 \,, \qquad x > a \qquad\qquad 10.2$$

satisfazendo as condições

$$T_{ij,j} = 0 \ , \quad I \qquad T_{ij}\, n_j = 0 \ , \quad B_I \qquad T_{ij} = 0 \ , \quad E \tag{10.3}$$

O conjugado fica

$$\underset{(2)}{T^{*}_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\,\rho\,\delta_{\alpha\beta} \ , \quad \underset{(2)}{T^{*}_{4\alpha}} = 0 \qquad \underset{(2)}{T^{*}_{44}} = -\frac{1}{2}\,\rho \ , \ I$$

$$\underset{(2)}{T^{*}_{ij}} = 0 \ , \quad E \tag{10.4}$$

Aplicando a expressão

$$\underset{(2)}{g_{ij}}(x) = 4 \int_I \underset{(2)}{T^{*}_{ij}}(y) \quad \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{10.5}$$

Faz-se os mesmos cálculos para essa métrica que foram feitos para $\underset{(1)}{g_{ij}}$ da esfera estática o resultado sendo,

$$\begin{cases} \underset{(2)}{g_{44}}(x)\Big|_{x>a} = -\dfrac{2\,\overline{m}}{x} \\ \underset{(2)}{g_{\alpha 4}}(x)\Big|_{x>a} = 0 \\ \underset{(2)}{g_{\alpha\beta}}(x)\Big|_{x>a} = \dfrac{2}{x}\,\delta_{\alpha\beta}\,\overline{m} \end{cases} \tag{10.6}$$

$$\begin{cases} \underset{(2)}{g_{44}}(x)\Big|_{x<a} = -\dfrac{2}{x}\,\overline{\nu}(x) - 8\,\pi\,J(x,a) \\ \underset{(2)}{g_{\alpha 4}}(x)\Big|_{x<a} = 0 \\ \underset{(2)}{g_{\alpha\beta}}(x)\Big|_{x<a} = \dfrac{2}{x}\,\overline{\nu}(x)\,\delta_{\alpha\beta} + 8\,\pi\,J(x,a)\,\delta_{\alpha\beta} \end{cases}$$

no espaço externo e interno da esfera de raio a.

Para a aproximação da ordem k^3, escolhe-se

$$\underset{(3)}{T_{\alpha\beta}} = 0 \ , \qquad \underset{(3)}{T_{\alpha 4}} = i\,\rho\,u_\alpha \ , \qquad \underset{(3)}{T_{44}} = 0 \ , \quad I$$

$$\underset{(3)}{T_{ij}} = 0 \ , \quad E \tag{10.7}$$

onde

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0 \ , \qquad u_\alpha(x) = 0 \ , \qquad x > a \tag{10.8}$$

$\underset{(3)}{T_{ij}}$ satisfazendo

$$\underset{(3)}{T_{ij,j}} = 0 \ , \ I \qquad \underset{(3)}{T_{ij}}\, n_j = 0 \ , \ B_I \qquad \underset{(3)}{T_{ij}} = 0 \ , \quad E \tag{10.9}$$

Pelo $\underset{(3)}{T_{ij}}$ tomado, tem-se:

$$\underset{(3)}{T_{ij,4}} = 0 \ , \quad I, E$$

$$\underset{(3)}{T_{ij,j}} = \underset{(3)}{T_{i\alpha,\alpha}} = \begin{cases} i = \beta \ , & T_{\beta\alpha,\alpha} = 0 \ , \quad I, E \\ i = 4 \ , & T_{4\alpha,\alpha} = i\,\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho\, u_\alpha) \ , \quad I \\ & \phantom{T_{4\alpha,\alpha}} = 0 \ , \quad E \end{cases} \tag{10.10}$$

$$\underset{(3)}{T_{ij}}\, n_j = \underset{(3)}{T_{i\alpha}}\, n_\alpha = \begin{cases} i = \beta, & \underset{(3)}{T_{\alpha\beta}}\, n_\beta = 0 \ , \quad I, E \\ i = 4, & \underset{(3)}{T_{4\alpha}}\, n_\alpha = i\,\rho\, u_\alpha\, n_\alpha \ , \ B \text{ em direção de } I. \\ & \phantom{T_{4\alpha} n_\alpha} = 0, \ B \text{ em direção de } E. \end{cases}$$

Impondo as condições

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho\, u_\alpha) = 0, \quad I$$

10.11

$$u_\alpha\, n_\alpha = 0 \ , \quad \text{sôbre } B$$

para que as condições de aplicação do método sejam satisfeitas. O conjugado de $\underset{(3)}{T_{ij}}$ é

$$\underset{(3)}{T^*_{\alpha\beta}} = 0 \ , \qquad \underset{(3)}{T^*_{\alpha 4}} = i\, \rho\, u_\alpha \ , \qquad \underset{(3)}{T^*_{44}} = 0 \ , \qquad I$$

10.12

$$\underset{(3)}{T^*_{ij}} = 0 \ , \qquad E$$

Aplicando a expressão

$$\underset{(3)}{g_{ij}}(x) = 4 \int_I \underset{(3)}{T^*_{ij}}(y)\, \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \qquad 10.13$$

vem que

$$\underset{(3)}{g_{44}}\,(x)\Big|_{\substack{x>a \\ x<a}} = 0 \qquad 10.14$$

$$\underset{(3)}{g_{\alpha 4}}\,(x)\Big|_{x>a} = 4\, i \int_{\substack{x>a \\ y<a}} \rho(y)\, u_\alpha(y)\, \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

Sendo $\dfrac{\partial(\rho\, u_\alpha)}{\partial\, x^\alpha} = 0$ segue-se que $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\,[g_{\alpha 4}(x)] = 0.$

Teremos que calcular uma integral da forma

$$I_\alpha = \int f(y)\, u_\alpha(y)\, \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \qquad 10.15$$

Simplificando o problema, consideramos um côrpo girando em torno de seu eixo de simetria. Se o eixo é dado pelo vetor ω_β, e tomando $\partial_\alpha \omega_\beta = 0$, tem-se:

$$u_\alpha(y_\lambda) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \omega_\beta\, y_\gamma \tag{10.16}$$

tomando-se a representação Newtoniana.

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial t} = 0$$

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{y}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{\omega} \times \vec{y} = \frac{\vec{y}}{y} \cdot \vec{\omega} \times \vec{y} = 0 \tag{10.17}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \omega_\beta \frac{\partial y_\gamma}{\partial y_\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \omega_\beta\, \delta_{\gamma\alpha} = 0$$

Desta forma o vetor $u_\alpha(y_\lambda)$ satisfaz as duas condições 10.11

$$n_\alpha\, u_\alpha = 0 \quad \text{sôbre B}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho\, u_\alpha) = 0, \ \mathrm{I} \tag{10.18}$$

A última condição é transformada em uma identidade, e não mais uma condição em $\rho(y)$. Observa-se que quando se aplica êstes resultados ao problema considera-se o côrpo esférico, desta maneira pela simetria esférica a integral I_α deve ser independente da direção de $\vec{\omega}$. Escrevendo I_α na forma tensorial.

$$I_\alpha = \phi(x)\, \frac{x_\alpha}{x} \tag{10.19}$$

Então

$$\phi(x) = \frac{I_\alpha\, x_\alpha}{x} \tag{10.20}$$

Mas

$$\frac{I_\alpha\, x_\alpha}{x} = \int f(y) \quad \frac{y_\alpha\, x_\alpha}{x} \, \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{10.21}$$

Se chamarmos μ o cosseno do ângulo dos vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, no triespaço Euclidiano

$$y_\alpha \; x_\alpha = y\, x\, \mu$$

$$\frac{I_\alpha\, x_\alpha}{x} = \int \frac{d\vec{y}\; f(y)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, y\, \mu \qquad 10.22$$

Tomando dS_y como um elemento de área da esfera y = cte

$$d\vec{y} = dy\; dS_y$$

$$\frac{I_\alpha\, x_\alpha}{x} = \int_{y=0}^{\infty} y\, f(y)\; dy \int_{S_y} \frac{\mu\; dS_y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \qquad 10.23$$

A solução desta integral está em (A-19) e de $I_\alpha(x)$ em (A-20). Portanto substituindo-se a solução na métrica 10.14, tem-se:

$$\underset{(3)}{g_{\alpha 4}}(x)\Big|_{x>a} = 4i\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\; \omega_\beta\; I_\gamma(x)\Big|_{x>a} \qquad 10.24$$

que deve satisfazer

$$\frac{\partial \underset{(3)}{g_{\alpha 4}}}{\partial\, x^\alpha} = 0 \implies \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\; \omega_\beta \; \frac{\partial I_\gamma}{\partial x^\alpha} = 0 \qquad 10.25$$

onde

$$I_\alpha(x)\Big|_{x>a} = \frac{x_\alpha}{x}\; \phi(x)\Big|_{x>a}$$

$$\phi(x) = \frac{4\pi}{3x^2} \int_{\substack{y=0\\ x>a\\ y<a}}^{x} y^4\; \rho(y)\; dy \qquad 10.26$$

A condição 10.25 fica satisfeita com 10.26 Portanto a métrica fica

$$\underset{(3)}{g_{\alpha 4}}(x)\Big|_{x>a} = \frac{16\,\pi\, i}{3x^3}\, x_\gamma\; \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\; \omega_\beta \int_0^a y^4\; \rho(y)\; dy \qquad 10.27$$

Observa-se que $\underset{(3)}{g_{\alpha 4}}(x)\Big|_{x>a}$ é adimensional como deve ser. Considerando o côrpo esférico de raio a, o momentum de inércia com o eixo de rotação em tôrno da origem é.

$$\overline{I}(a) = \frac{8\pi}{3}\int_0^a y^4\,\rho(y)\,dy \qquad 10.28$$

portanto

$$\underset{(3)}{g_{\alpha 4}}(x)\Big|_{x>a} = \frac{2i}{x^3}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta\,x_\gamma\,\overline{I}(a) \qquad 10.29$$

A expressão (10.28) é obtida, pois o momentum de inércia em tôrno do eixo de rotação é

$$\overline{I} = \int_{\text{corpo}} \rho(y)\,d\vec{y}\left[y^2 - (\vec{y}\cdot\vec{n})^2\right] \qquad 10.30$$

Tomando $\vec{\omega}$ como o eixo polar

$$\begin{aligned}\overline{I} &= \int y^2\rho(y)(1-\cos^2\Theta)d\vec{y}\\ &= \frac{8\pi}{3}\int_0^a y^4\,\rho(y)\,dy\end{aligned} \qquad 10.31$$

Como $\overline{I}\,\omega_\beta = \overline{M}_\beta$ é o momentum angular do corpo

$$\underset{(3)}{g_{\alpha 4}}(x)\Big|_{x>a} = \frac{2i}{x^3}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\overline{M}_\beta\,x_\gamma \qquad 10.32$$

Calcula-se agora $\underset{(3)}{g_{\alpha 4}}$ no interior

$$\begin{aligned}\underset{(3)}{g_{\alpha 4}}(x)\Big|_{x<a} &= 4\int_I \underset{(3)}{T^*_{\alpha 4}}(y)\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}\\ &= 4i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta\int_{\substack{x<a\\ y<a}} \rho(y)\,y_\gamma\,\frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}\end{aligned} \qquad 10.33$$

cuja solução é dada por (A-20)

$$\left. \underset{(3)}{g_{\alpha 4}}(x) \right|_{x<a} = \frac{2i}{x^3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \omega_\beta\, x_\gamma \left(\frac{8\pi}{3} \int_0^x y^4\, \rho(y)\, dy + \frac{8\pi\, x^3}{x^3} \int_x^a y\, \rho(y) dy \right) \qquad 10.34$$

ou,

$$\left. \underset{(3)}{g_{\alpha 4}}(x) \right|_{x<a} = \frac{2i}{x^3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \omega_\beta\, x_\gamma \left[\bar{I}(x) + \frac{8\pi\, x^3}{3}\, J(x,a) \right]$$

$$\left. \underset{(3)}{g_{44}}(x) \right|_{\substack{x>a \\ x<a}} = 4 \int_I \underset{(3)}{\dot{T}^*_{44}}(y) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} = 0 \qquad 10.35$$

$$\left. \underset{(3)}{g_{\alpha\beta}}(x) \right|_{\substack{x>a \\ x<a}} = 4 \int_I \underset{(3)}{T^*_{\alpha\beta}}(y) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} = 0$$

Portanto a métrica até a aproximação k^3 para uma esfera girando lentamente em torno de seu eixo de simetria é,

No espaço E, $(x > a)$

$$g_{44}(x) = 1 - \frac{2\,\bar{m}}{x}$$

$$g_{\alpha 4}(x) = \frac{2i}{x^3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \omega_\beta\, x_\gamma\, \bar{I}(a) \qquad 10.36$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{2}{x}\bar{m}\right)$$

No espaço I, $(x < a)$

$$g_{44}(x) = 1 - \frac{2}{x}\bar{V}(x) - 8\pi\, J(x,a)$$

$$g_{\alpha 4}(x) = \frac{2i}{x^3}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta\,x_\gamma\,\bar{I}(x) + \frac{16\pi i}{3}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta\,x_\gamma\,J(x,a)$$

10.37

$$g_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}\left[1 + \frac{2}{x}\,\bar{v}(x) + 8\pi\,J(x,a)\right]$$

Até aproximações k^5 para $(x > a)$ ver trabalho de P. S. Florides e J. L. Synge [2]

Se a distribuição de matéria fôr constante, ρ =cte, dentro da esfera, a mé trica ficará no espaço E, $(x > a)$

$$g_{44}(x) = 1 - \frac{8\pi}{3}\,\rho\,\frac{a^3}{x}$$

$$g_{\alpha 4}(x) = \frac{16\pi i}{15}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta\,x_\gamma\,\frac{\rho\,a^5}{x^3}$$

10.38

$$g_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}\left(1 + \frac{8\pi}{3}\,\frac{\rho\,a^3}{x}\right)$$

no espaço I, $(x < a)$

$$g_{44}(x) = 1 - \frac{8\pi}{3}\,\rho\,x^2 - 4\pi\,\rho(a^2 - x^2)$$

$$g_{\alpha 4}(x) = \frac{16\pi i}{15}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta\,x_\gamma\,\rho\,x^2 + \frac{16\pi i}{6}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\omega_\beta\,x_\gamma\,\rho(a^2-x^2)$$

10.39

$$g_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}\left[1 + \frac{8\pi}{3}\,\rho\,x^2 + 4\pi\,\rho(a^2-x^2)\right]$$

11. NOTAS SÔBRE A MÉTRICA CALCULADA PARA A DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA E ESFÉRICA DE MATÉRIA

Cálculo da "contração do espaço", variação de 2π através do quociente entre a circunferência da esfera e o seu raio. Toma-se a densidade ρ constante

$$C = \int \left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{4\mu}\, g_{4\nu}}{g_{44}} \right) dx^\mu\, dx^\nu \right|^{1/2}_{\text{componente } \phi}$$

$$= \int \left\{ \left[\delta_{\mu\nu} \left(1 + \frac{8\pi}{3} \frac{\rho\, a^3}{x} \right) + \left(\frac{16\pi}{15} \right)^2 u_\mu\, u_\nu \frac{\rho^2\, a^{10}}{x^6} \frac{1}{\left(1 - \frac{8\pi}{3} \rho \frac{a^3}{x} \right)} \right] dx^\mu\, dx^\nu \right\}^{1/2}_{\text{componente } \phi} \qquad 11.1$$

a componente $u_\phi = r\, \omega \,\text{sen}\, \Theta$

$$C = \left[1 + \frac{8\pi}{3} \rho\, a^2 + \left(\frac{16\pi}{15} \right)^2 \frac{\rho^2\, a^6}{1 - \frac{8\pi}{3} \rho\, a^2}\, \omega^2\, \text{sen}^2\Theta \right]^{1/2} a\, 2\pi \qquad 11.2$$

Expandindo-se em série:

$$C \cong \left[1 + \frac{4\pi}{3} \rho\, a^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{16\pi}{15} \right)^2 \frac{\rho^2\, a^6}{1 - \frac{8\pi}{3} \rho\, a^2}\, \omega^2\, \text{sen}^2\Theta \right] a\, 2\pi \qquad 11.3$$

Substituindo o potencial definido por $V(a) = \frac{4}{3} \pi\, \rho\, a^3$, tem-se

$$C \cong \left(1 + V + \frac{8}{25} V^2 \frac{a^2\, \omega^2\, \text{sen}^2\Theta}{1 - 2V} \right) a\, 2\pi \qquad 11.4$$

Θ é o ângulo entre a direção da rotação angular $\vec{\omega}$ e o raio $\vec{r}$. Como se quer a maior circunferência: $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Os dois primeiros têrmos dão o resultado estático, o terceiro é a correção estacionária.

O raio geodésico é dado por:

$$R = \int \left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{g_{4\mu}\, g_{4\nu}}{g_{44}} \right) dx^{\mu}\, dx^{\nu} \right]^{1/2}_{\text{componente } r} \qquad 11.5$$

$$R = \int_0^a \left[1 + \frac{2}{r}\bar{\nu} + 8\pi J + \frac{\frac{4}{r^6}\bar{I}^2 + \frac{64}{3r^3}\pi \bar{I}J + \frac{256\pi^2}{9} J^2}{1 - \frac{2}{r}\bar{\nu} - 8\pi J} v_r^2 \right]^{1/2} dr \qquad 11.6$$

Com $v_r = 0$, a correção estacionária ao raio é nula. Os cálculos seguem-se como em (9.12. Êste resultado é esperado, pois a correção devida ao campo é dada em 2π e não no raio.

$$R \cong \left(1 + \frac{13}{4} V \right) a \qquad 11.7$$

O quociente entre a circunferência e o raio geodésico fica:

$$\frac{C}{R} = \left[\frac{1 + V + \frac{8}{25}\ 1 - \frac{2}{2V}\ a^2\, \omega^2}{1 + \frac{13}{4} V} \right] 2\pi \qquad 11.8$$

expandindo-se em série até têrmos de segunda ordem em V

$$\frac{C}{R} \cong \left[1 - \frac{9}{4} V + \left(\frac{8}{25}\ \omega^2\, a^2 - \frac{13}{4} \right) V^2 \right] 2\pi$$

ou

$$\frac{C}{R} \cong \left[1 - 3\pi\,\rho\,a^2 + \left(\frac{128}{225}\;\omega^2\,a^2 - \frac{52}{9}\right)\pi^2\,\rho^2\,a^4\right] \cdot 2\pi \qquad 11.9$$

Os dois primeiros têrmos são os correspondentes ao caso estático e o terceiro representa a correção estacionária.

* * *

A. APÊNDICE

Sendo $|\vec{x}|$ e $|\vec{y}|$ quaisquer dois pontos do espaço Euclidiano. Sendo $\mu = \cos\theta$ o ângulo entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Então

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{(x^2 + y^2 - 2\,x\,y\,\mu)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[P_o(\mu) + \beta\,P_1(\mu) + \beta^2\,P_2(\mu) + \dots\right] = \begin{cases} \frac{1}{y}\left(1 - 2\mu\,\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)^{-1/2} \\ \frac{1}{x}\left(1 - 2\mu\,\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)^{-1/2} \end{cases} \qquad \text{(A-1)}$$

Usou-se a expansão em série de potências com dois possíveis parâmetros

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \beta = \frac{y}{x} \quad \text{se} \quad y < x \longrightarrow \alpha = x \\ &\text{(b)} \quad \beta = \frac{x}{y} \quad \text{se} \quad x < y \longrightarrow \alpha = y \end{aligned} \qquad \text{(A-2)}$$

Os coeficientes desta expansão são os polinômions de Legendre Tem-se

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} P_m\,P_n\,d\mu = 0 \quad \text{para } m \neq n \\ &\int_{-1}^{+1} P_n^2\,d\mu = \frac{2}{2n+1} \end{aligned} \qquad \text{(A-3)}$$

$$P_o = 1$$

$$P_1 = \mu$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \tag{A-4}$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

daí

$$\mu = P_1$$

$$\mu^2 = \frac{1}{3}(1 + 2\ P_2)$$

$$\mu^3 = \frac{1}{5}(3\ P_1 + 2\ P_3) \tag{A-5}$$

$$\mu^4 = \frac{1}{35}(7 + 20\ P_2 + 8\ P_4)$$

$$- - - - - - - - - - - - - -$$

Cálculo de certas integrais

$$\text{(a)}\ I(x) = \int f(y) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{A-6}$$

onde f(y) é qualquer função de y, e a integral é tomada em todo o espaço, e

$$dy = dSy\ dy$$

onde dSy é um elemento de superfície de esfera de y = cte.

Portanto,

$$I(x) = \int_{y=0}^{x} f(y)\ dy \int_{S_y} \frac{dS_y}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \int_{y=x}^{\infty} f(y) dy \int_{S_y} \frac{dSy}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{A-7}$$

Tomando (A-1)

$$\int_{S_y} \frac{dS_y}{|\vec{x}-\vec{y}|} = 2\pi\, y^2 \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{4\pi\, y^2}{\alpha} \tag{A-8}$$

daí

$$I(x) = \frac{4\pi}{x} \int_{y=0}^{x} y^2\, f(y) dy + 4\pi \int_{y=x}^{\infty} y\, f(y) dy \tag{A-9}$$

se f(y) é tal que estas integrais convergem.

$$\text{(b)} \quad I_{\rho\sigma}(x) = \int f(y) \frac{y_\rho\, y_\sigma}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, d\vec{y} \tag{A-10}$$

Da forma tensorial, tem-se

$$I_{\rho\sigma}(x) = \phi(x)\, \delta_{\rho\sigma} + \psi(x) \frac{x_\rho\, x_\sigma}{x^2} \tag{A-11}$$

Então

$$\begin{aligned} I_{\rho\rho} &= 3\, \phi + \psi \\ I_{\rho\sigma}\, x_\rho\, x_\sigma &= x^2(\phi + \psi) \end{aligned} \tag{A-12}$$

portanto

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2}\left(I_{\rho\rho} - I_{\rho\sigma} \frac{x_\rho\, x_\sigma}{x^2}\right) \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}\left(3\, I_{\rho\sigma} \frac{x_\rho\, x_\sigma}{x^2} - I_{\rho\rho}\right) \end{aligned} \tag{A-13}$$

Tem-se

$$\begin{aligned} I_{\rho\rho} &= \int y^2\, f(y) \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\ I_{\rho\sigma} \frac{x_\rho\, x_\sigma}{x^2} &= \int y^2\, f(y)\, \mu^2 \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \end{aligned} \tag{A-14}$$

daí

$$I_{\rho\rho} = \int_{y=0}^{\infty} y^2\, f(y)\, dy \int_{S_y} \frac{dS_y}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

tomando (A-8)

$$I_{\rho\rho} = \frac{4\pi}{x} \int_{y=0}^{x} y^4 f(y)\, dy + 4\pi \int_{y=x}^{\infty} y^3 f(y) dy \tag{A-15}$$

$$I_{\rho\sigma} \frac{x_\rho x_\sigma}{x^2} = \int_{y=0}^{\infty} y^2 f(y)\, dy \int_{S_y} \frac{\mu^2\, dS_y}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

efetuando a integral de superfície. tomando a expansão em série (A-1)

$$I_{\rho\sigma} \frac{x_\rho x_\sigma}{x^2} = \frac{8\pi}{15} \frac{1}{x^3} \int_{y=0}^{x} y^6 f(y)\, dy + \frac{4\pi}{3x} \int_{y=0}^{x} y^4 f(y)\, dy + $$

$$+ \frac{4\pi}{3} \int_{y=x}^{\infty} y^3 f(y) dy + \frac{8\pi x^2}{15} \int_{y=x}^{\infty} y\, f(y) dy \tag{A-16}$$

Substituindo em (A-13)

$$\phi(x) = - \frac{4\pi}{15} \frac{1}{x^3} \int_{y=0}^{x} y^6 f(y)\, dy + \frac{4\pi}{3x} \int_{y=0}^{x} y^4 f(y)\, dy +$$

$$+ \frac{4\pi}{3} \int_{y=x}^{\infty} y^3 f(y)\, dy - \frac{4\pi x^2}{15} \int_{y=x}^{\infty} y\, f(y)\, dy \tag{A-17}$$

$$\psi(x) = \frac{4\pi}{5} \frac{1}{x^3} \int_{y=0}^{x} y^6 f(y)\, dy + \frac{4\pi}{5} x^2 \int_{y=x}^{\infty} y\, f(y)\, dy$$

Se estas integrais convergem, tem-se

$$I_{\rho\sigma} = \int f(y) \frac{y_\rho y_\sigma}{|\vec{x}-\vec{y}|} d\vec{y} = \phi(x)\, \delta_{\rho\sigma} + \psi(x) \frac{x_\rho x_\sigma}{x^2} \tag{A-18}$$

 57

$$\text{(C)} \quad \frac{I_\rho \, x_\sigma}{x} = \int y \, f(y) \, \mu \, \frac{d\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$= \int_{y=0}^{x} y \, f(y) \, dy \int_{S_y} \frac{\mu \, dS_y}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \int_{y=x}^{\infty} y \, f(y) \, dy \int \frac{\mu \, dS_y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \qquad \text{(A-19)}$$

$$= \frac{4\pi}{3\,x^2} \int_{y=0}^{x} y^4 \, f(y) \, dy + \frac{4\pi . x}{3} \int_{y=x}^{\infty} y \, f(y) \, dy$$

Considerando que esta integral converja

$$I_\sigma \, (x) = \frac{x_\sigma}{x} \, \phi(x)$$

$$\phi(x) = \frac{4\pi}{3\,x^2} \int_{y=0}^{x} y^4 \, f(y) \, dy + \frac{4\pi x}{3} \int_{y=x}^{\infty} y \, f(y) \, dy \qquad \text{(A-20)}$$

* * *

BIBLIOGRAFIA

1. J. L. Synge, Proc. Roy. Soc. A270, 315 (1962).

2. P. S. Florides, J. L. Synge, Proc. Roy. Soc. A270, 467 (1962).

3. P. S. Florides, J. L. Synge, Proc. Roy. Soc. A280, 459 (1964).

4. J. L. Synge, Proc. R. Irish Acad. A, 61, 37 (1961).

5. P. S. Florides, J. L. Synge, T. Yukawa, Proc. Roy. Soc. A284, 32 (1965).

6. P. S. Florides, J. L. Synge, Commun. Dublin Inst. Advanced Study, A, nº 14

7. A. Das, P. S. Florides, J. L. Synge, Proc. Roy. Soc. A263, 451 (1961).

8. E. Pechlaner, J. L. Synge, Proc. Roy. Ir. Acad. (1968).

9. Conférence Internationale Sur les Théories Relativistes de la Gravitation, pág. 3 , Pergamon Press (1962).

10. J. L. Synge, Relativity: The General Theory, pag. 40 (1960).

* * *