ISSN 0029-3865

CBPF-NF-050/87

# SUR LES ÉQUATIONS DE DISTRIBUTION

par

F.M. de Oliveira Castro

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CNPq/CBPF
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

## ABSTRACT

On généralize un problème fondamental du calcul des variations et l'équation differentielle d'Euler qui lui correspond pour obtenir des équations généralisées de distributions.



Key words - Distribution equations,
Generalized Euler equations.

Dès que Mr. L. Schwartz a montré que la fonction $\delta$ de Dirac n'est pas une fonction mais une distribution, on est forcé a considerer comme équations de distributions quelques équations differentielles à coefficients constants d'ont le second membre est une fonction $\delta$.

Comme ces équations sont obtenues par des methodes usuelles du calcul differentiel, il semble convenable,pour éviter cette reinterpretation "a posteriori", de les deduire de quelque principe genéral.

C'est ce que nous allons faire dans cette courte note.

Pour cela, il faut d'abord genéralizer un problème fondamental du calcul des variations et l'équation d'Euler qui en resulte. Pour ne pas allonger beaucoup ces considerations, nous nous bornerons au cas le plus simple d'une seule variable indépendante qui suffit pour montrer l'essentiel du raisonnement. Avec un example très simple nous montrons comme une équation genéralisée resulte d'une façon toute naturelle de l'équation d'Euler generalisée.

Soit $F(u_1,u_2,...,u_n)$ une fonction reélle continue des variables reélles $u_1,u_2,...,u_n$, oû ces fonctions sont definies et sommables dans l'intervalle $[a,b]$ de l'axe reél.

S'il existe une fonction reélle $h(x)$, sommable $\geq 0$ dans $[a,b]$. Telle que

$$|F(u_1(x),u_2(x),...,u_n(x)| \leq h(x)$$

la fonction

$$G(x) = F(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$$

est sommable dans [a,b].

Ce theoréme de F. Riesz et Béla Sz. Nagy |1| assure l'existence de la fonctionnelle

$$J(y) = \int_a^b F(g(x), y(x), y'(x))dx \qquad (1)$$

où

1) F est une fonction reélle, continue de g, y et y',
2) g(x) est sommable dans [a,b],
3) y(x) est absolument continue dans [a,b],
4) il existe une fonction reélle h(x), sommable dans

telle que

$$|G(x)| = |F(g(x), y(x), y'(x))| \leq h(x) \quad .$$

Dans la même façon que dans un problème classique du calcul des variations, cherchons une condition necessaire pour l'existence d'une extremale y(x), absolument continue dans [a,b], telle que $y(a) = y(b) = 0$, adotant toutefois comme variations <u>admissibles</u> $\delta y = \alpha\eta(x)$ où $\alpha$ est un paramétre reél, defini dans un voisinage V de $\alpha = 0$ et les $\eta(x)$ des fonctions indéfiniment deriva - bles à support compact contenu dans [a,b].

Comme conditions supplémentaires imposées à la fonction F, admettons l'existence a la sommabilité de ses derivées du premier ordre $F_y(x)$ et $F_{y'}(x)$ dans [a,b].

Si l'on attribue à y(x) la variation $\delta y = \alpha\eta(x)$, on a

$$\Phi(\alpha) = J(y+\alpha\eta(x)) = \int_a^b F[g(x), y(x) + \alpha\eta(x),$$

$$y'(x) + \alpha\eta'(x)]dx \tag{2}$$

Comme la fonction sous le signe de l'integrale (2) est une fonction $f(x,\alpha)$, on a

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx \tag{3}$$

Mais

1) $f(x,\alpha)$ est partiellement continue et derivable par rapport a $\alpha$,
2) la derivée $f'_\alpha(x,\alpha) = \frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\eta'(x)$, existe presque tous les valeurs de x,
3) $f'_\alpha(x,\alpha)$ est sommable dans $[a,b]$

donc

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)dx = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx$$

oũ

$$\Phi'(\alpha) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\eta'(x)\right]dx \tag{4}$$

et la condition d'extreme cherchée est $\Phi'(\alpha) = 0$.
Mais $\eta(x)$ et $\eta'(x)$ ont leur supports compacts contenus dans $[a,b]$, ce qui nous permet d'ecrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{\partial F}{\partial y}\, \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\, \eta'(x)]dx = 0 \tag{5}$$

qui est simplement, la distribution de Schwartz

$$(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\hat{d}}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}})(\phi(x)) = 0 \tag{6}$$

où le symbole $\frac{\hat{d}}{dx}$ est une derivée de distribution.

D'une maniére plus concise, on peut écrire:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\hat{d}}{dx}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0 \quad . \tag{7}$$

Soit une équation d'Euler generalisée.

Il faut remarquer que, dans la deduction de cette équation, le lemma fondamental du calcul des variations n'intervient pas et que la continuité de $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}$ n'est non plus necessaire.

## Example d'application

Soit

$$F[g(t),y(t),y'(t)] = \frac{1}{2}\, L\, \dot{y}^2 - \frac{1}{2c}\, y^2 - Y(t)y' \tag{8}$$

où $Y(t)$ est la fonction d'Heaviside.

L'équation d'Euler generalisée, est

$$\frac{\hat{d}}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y} = L\,\frac{\hat{d}}{dt}\,\dot{y} + \frac{Y}{c} - \delta(t) = 0 \quad . \tag{9}$$

Si y represente la quantité d'electricité, $\dot{y}(t)$ represente le courant electrique et l'équation (9) est l'équation d'un circuit eléctrique avec sel-induction et capacité, soumis à une force electromotrice impulsive $\delta(t)$, avec $y(t) = 0$ pour $t < 0$.

Comme le Lagrangien (8) dépend explicitement du temps, le système n'est pas conservatif ce qui montre clairement l'apparition de la force electromotrice externe $\delta(t)$.

L'integration de cette équation peut être faite très simplement avec l'employ des transformations de Fourier d'une distribution (Schwarts) qui sont définies de la manière suivante

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-2\pi i\lambda t)dt = g(\lambda)$$

et

$$\bar{\mathcal{F}}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\exp(2\pi i\lambda t)d\lambda = f(t)$$

En effect, l'équation (9) peut être ecrite, plus explicitement comme

$$<L \frac{\bar{d}}{dt} \dot{y} + \frac{1}{c} y, \phi> = <\delta, \phi>$$

où

$$<y, L\phi'' + \frac{1}{c}\phi> = <\delta, \phi> \quad .$$

L'application de la transformation de Fourier a cette équation, nous donne, successivement

$$<y, \mathcal{F} (L\phi'' + \frac{1}{c} \phi)> = <\mathcal{F}\delta, \phi>$$

$$<y, (-4\pi^2L\lambda^2 + \frac{1}{c}) \mathcal{F}(\phi)> = <1, \phi>$$

$$<(-4\pi^2 L\lambda^2 + \frac{1}{c})\,\mathcal{F}(y),\phi> = <1,\phi> \quad .$$

Si l'on pose $\mathcal{F}(y) = g(\lambda)$, on a finalement

$$<(-4\pi^2 L\lambda^2 + \frac{1}{c})g(\lambda),\phi> = <1,\phi>$$

d'oû

$$g(\lambda) = \frac{-1}{4\pi^2 L\lambda^2 - \frac{1}{c}}$$

et

$$y(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i\lambda t}\, d\lambda}{4\pi^2 L\lambda^2 - \frac{1}{c}} = \sqrt{\frac{c}{L}}\ \sin(\frac{t}{\sqrt{Lc}}) \quad .$$

et $y(t) = 0$ pour $t < 0$.

Finalement, si l'on designe par $q$ et $\dot{q}$ les coordonées généralisées d'une particule e si l'on admet pour le Lagrangien $L\ (g(t),q(t),\dot{q}(t))$ les mêmes hypothèses qu'on a imposé à la fonction $F(g(t),y,\dot{y})$, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange généralisée

$$(\frac{\hat{d}}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q})(\phi) = 0$$

et si l'on a defini $p$, comme

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ (\phi)$$

nous pouvons introduire un Hamiltonien distribution par la transformation de Legendre (dans le cas oû $p\dot{q}$ est sommable).

$$H(p,q)(\phi) = <p\dot{q} - L(p,\dot{q}),\phi>$$

de sorte que les équations du mouvement deviénnent

$$[H,q](\phi) = \frac{\partial H}{\partial p}(\phi) = \dot{q}(\phi)$$

et

$$[H,p](\phi) = -\frac{\partial H}{\partial q}(\phi) = \frac{\hat{d}}{dt}\, p(\phi)$$

où les crochets sont des crochets de Poisson.

Remerciements

Nous tenons à exprimer ici nos vifs remerciements à M. Leopoldo Nachbin qui a lu cette note avant la publication et à Mlle. Helena de Souza Ferreira par son travail de dactylographie.

[1] Frédéric Riesz et Béla Sz. Nagy.
[Leçons d'Analyse Fonctionnelle, pg. 39, Gauthier-Villars (Paris)(1955)].