ISSN 0029-3865

CBPF-NF-037/87

SOBRE A COMPONENTE NUCLEÔNICA DA RADIAÇÃO CÓSMICA, NA ATMOSFERA

por

F.M. de Oliveira Castro

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CNPq/CBPF
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

ABSTRACT

In this paper we deduce the Shibata's solution of the diffusion equation as an complex integral. We give it's expression in the real domain by two different methods and proof a very useful theorem of reciprocity.

Key-words - Nucleonic cosmic rays diffusion.
Reciprocity theorem.

O fluxo de nucleons produzidos na profundidade $x(g/cm^2)$, por um único nucleon, de energia E_0, incidente no topo da atmosfera foi calculado[1] com o seguinte resultado

$$F(x,E,E_0) = e^{-x/\lambda}\,\delta(E-E_0) + \frac{x}{\lambda}\,e^{-x/\lambda}\,\frac{1}{E_0}\,\frac{2}{Z}\,I_1(Z) \tag{1}$$

em que $Z = (\frac{4x}{\lambda}\ln E_0/E)^{1/2}$; $I_1(Z)$ é a conhecida função de Bessel e δ a função de Dirac; $F(x,E,E_0)dE$ é o espectro energético do nucleon, na profundidade atmosférica $x(g/cm^2)$; λ é o livre percurso médio de interação com os nucleons da atmosfera, suposto constante.

A lei de distribuição da elasticidade $f(\eta)$ adotada foi a seguinte:

$$\begin{aligned} &f(\eta) = 1 \quad \text{para } 0 \le \eta \le 1 \\ \text{e}\quad &f(\eta) = 0 \quad \text{para } \eta > 1 \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

E. Konishi, T. Shibata, E. Shibuya e N. Tateyama[2] também se ocuparam da mesma questão e indicaram a seguinte solução:

$$F(x,E,E_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x/\lambda)\,f_n(E_0,E) \tag{3}$$

em que $p_n(x/\lambda)$ é a distribuição de Poisson

$$p_n(x,\lambda) = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \frac{1}{n!}\,e^{-x/\lambda} \tag{4}$$

usada para descrever a probabilidade de haver n interações do nucleon inicial com os núcleos do ar, durante o seu percurso, desde o topo da atmosfera até a profundidade $x(g/cm^2)$.

A função $f_n(E_0,E)$, que representa a distribuição de energia, depois do nucleon colidir n vezes com os núcleos do ar, é dada pela integral

$$f_n(E_0,E) = \frac{1}{E}\frac{1}{2\pi i}\int_c ds \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \langle\eta^s\rangle^n \tag{5}$$

ao longo de uma paralela ao eixo dos imaginários, no plano da variável complexa s, em que

$$\langle\eta^s\rangle = \int_0^1 \eta^s\ f(\eta)d\eta \quad . \tag{6}$$

Substituindo (5) em (3), vem

$$F(x,E,E_0) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{E}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s e^{-x/\lambda(s)}\ ds \tag{7}$$

No caso particular de $f(\eta)$ dado por (2), se tem

$$\langle\eta^s\rangle = \frac{1}{s+1}$$

e se introduziu $\lambda(s)$ pela relação

$$\frac{1}{\lambda(s)} = \frac{1-\langle\eta^s\rangle}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda(s+1)} \quad . \tag{8}$$

Apresentou-se, então, a questão de comparar as duas soluções. Neste trabalho, vamos demonstrar a identidade das duas soluções. Para isso, calculemos os coeficientes $f_n(E_0,E)$.

1) para n = 0, temos

$$f_0(E_0,E) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{E}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s ds = \delta(E-E_0) \tag{9}$$

2) para n ≥ 1, temos, de acordo com (8)

$$f_n(E_0,E) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{E}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \langle\eta^s\rangle^n \, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i E}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s\ell n(E_0/E)} \frac{ds}{(s+1)^n} \quad . \qquad (10)$$

Na integral do 2º membro o integrando apresenta um polo de ordem $\underline{n}$ no ponto $s = -1$.

O cálculo dos resíduos nos dá imediatamente

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s\ell n(E_0/E)} \frac{ds}{(s+1)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\; e^{\ell n(E_0/E)} \times \ell n^{n-1}(E_0/E)$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}\;\left(\frac{E}{E_0}\right)\ell n^{n-1}(E_0/E) \qquad (11)$$

Então

$$f_n(E_0,E) = \frac{1}{(n-1)!}\;\frac{1}{E_0}\;\ell n^{n-1}(E_0/E) \quad . \qquad (12)$$

Substituindo-se (9) e (12) em (3) e levando-se em conta (4) , vem,

$$F(x,E,E_0) = e^{-x/\lambda}\;\delta(E-E_0) + \frac{e^{-x/\lambda}}{E_0}\;\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/\lambda)^n}{(n-1)!\,n!}\ell n^{n-1}(E_0/E)$$

pondo $n-1 = k$, vem

$$F(x,E,E_0) = e^{-x/\lambda}\;\delta(E-E_0) + \frac{e^{-x/\lambda}}{E_0}\,\frac{x}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(x/\lambda)\,\ell nE_0/E]^k}{k!\;(k+1)!} \qquad (13)$$

Introduzindo, agora,

$$Z = [4\,\frac{x}{\lambda}\;\ell n\;E_0/E]^{1/2} \qquad (14)$$

e a função $I_1(Z)$ de Bessel

$$I_1(Z) = \frac{Z}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4} Z^2)^k}{k!(k+1)!} \tag{15}$$

vem, finalmente,

$$F(x,E,E_0) = e^{-x/\lambda} \delta(E-E_0) + \frac{x}{\lambda} \frac{e^{-x/\lambda}}{E_0} \frac{2}{Z} I_1(Z) \tag{16}$$

que é a fôrmula da ref. [1].

<u>2º Processo</u>

Depois de se introduzir na integral (7) a função $\lambda(s)$ por sua expressão (8), podemos considerá-la como a soma das seguintes parcelas:

1º) termo correspondente a $f_0(E_0,E)$, em (5), que é

$$A = \frac{e^{-x/\lambda}}{2\pi iE} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\frac{E_0}{E})^s \, ds = e^{-x/\lambda} \delta(E-E_0) \tag{17}$$

2º) a soma dos termos correspondentes a $f_n(E_0,E)$, para $n \geq 1$, em (5), que é

$$B = \frac{e^{-x/\lambda}}{2\pi iE} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\frac{x}{\lambda(s+1)})^n (\frac{E_0}{E})^s \, ds \tag{18}$$

Já que o 2º membro de (18) não se altera substituindo-se a integral sobre a paralela ao eixo dos imaginários por uma integral ao longo de um contorno fechado C e somando-se a ela a parcela,

$$\frac{e^{-x/\lambda}}{2\pi iE} \int_{C} (\frac{E_0}{E})^s \, ds = 0 \tag{19}$$

podemos escrever:

$$B = \frac{e^{-x/\lambda}}{2\pi i E} \int_C e^{us + \frac{x}{\lambda(s+1)}} ds \qquad (20)$$

em que

$$u = \ell n \left(\frac{E_0}{E}\right) \qquad E_0 \geq E \qquad (21)$$

Assim, temos

$$F(x,E,E_0) = e^{-x/\lambda}\,\delta(E-E_0) + \frac{e^{-x/\lambda}}{2\pi i E} \int_C e^{us + \frac{x}{\lambda(s+1)}} ds \qquad (22)$$

em que $u = \ell n \left(\frac{E_0}{E}\right)$, $E_0 \geq E$.

Agora, falta-nos apenas, escolher o contorno C e avaliar a integral que figura em (22).

Antes disso, porém, faremos algumas mudanças de variável em (22), para tornar mais simétrica a respectiva integral.

a) Pondo $s+1 = s'$, vem

$$B = \frac{e^{-x/\lambda}}{2\pi i E_0} \int_C e^{us' + \frac{x}{\lambda s'}} ds' \quad . \qquad (23)$$

b) Fazendo, agora, $\frac{x}{\lambda s'} = \frac{1}{p}$, vem

$$B = \frac{e^{-x/\lambda}}{2\pi i E_0} \frac{x}{\lambda} \int_C e^{\left(\frac{ux}{\lambda}\right)p + \frac{1}{p}} dp \qquad (24)$$

e, finalmente, fazendo

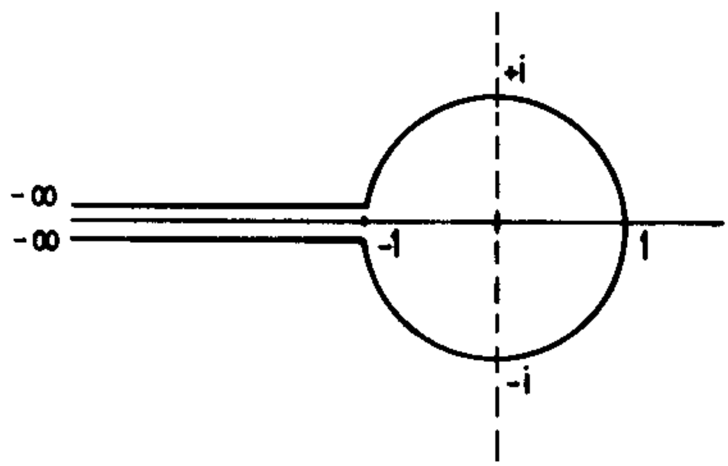
$$\frac{z}{2} = \left(\frac{ux}{\lambda}\right)^{1/2} \quad e \quad \xi = \frac{z}{2}\,p \quad , \quad \text{para} \quad z > 0$$

temos

$$B = e^{-x/\lambda} \frac{x}{\lambda} \frac{2}{ZE_0} \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{Z}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})} d\xi \qquad (25)$$

Para calcular a integral que figura em (25), notemos que os únicos pontos singulares do integrando são $\xi = 0$ e $\xi = \infty$. A função é, por conseguinte, holomorfa no interior de uma corôa circular formada pelo exterior de um círculo de raio $\varepsilon > 0$ e pelo interior de um círculo de raio $R > \varepsilon$, arbitrário, centrados na origem ($\xi = 0$) do plano complexo ξ.

Podemos, então, escolher para o caminho C de integração da integral (25), o indicado na figura abaixo.



Então, temos:

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{Z}{2}(\xi + \frac{1}{\xi})} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{Z\cos\theta + i\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{Z\cos\theta} \cos\theta d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{Z\cos\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta \quad . \qquad (26)$$

Mas a segunda integral é igual a zero, como se verifica, facilmente, fazendo $\theta = 2\pi - \phi$. Então vem,

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{Z\cos\theta}\cos\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{Z\cos\theta}\cos\theta d\theta = I_1(Z) \qquad (27)$$

em que $I_1(Z)$ é a conhecida função de Bessel.

Assim sendo, vem, finalmente

$$F(x,E,E_0) = e^{-x/\lambda}\,\delta(E-E_0) + e^{-x/\lambda}\,\frac{x}{\lambda E_0}\,\frac{2}{Z}\,I_1(Z) \qquad (28)$$

em que

$$Z = 2\sqrt{\frac{ux}{\lambda}} = \sqrt{\frac{4x}{\lambda}\ \ell n(E_0/E)} \quad , \qquad (29)$$

como se queria provar.

Caso Geral

Demonstrada a equivalência de (1) e (7), para o caso particular em que a função $F(\eta)$ é dada por (2), consideremos o caso geral em que o espectro diferencial das partículas primárias (principalmente prótons) no topo da atmosfera é dado pela expressão $G(E)dE$, em que a função $G(E)$ é suposta não negativa, contínua e limitada no intervalo $0 < a \leq E < \infty$.

A existência da integral

$$\int_E^{\infty} G(E)dE \qquad \text{para} \qquad E \geq a \quad ,$$

deve ser suposta porque representa o espectro integral das partículas primárias, no topo da atmosfera. Usando o método das aproximações sucessivas, o autor mostrou, em trabalho anterior[3] que a expressão do espectro diferencial $F(x,E)dE$, na profundidade atmosférica $x(g/cm^2)$, pode ser obtida como solução da equação de difusão da componente nucleônica dos raios cósmicos:

$$\lambda \frac{\partial F(x,E)}{\partial x} = -F(x,E) + \int_0^1 F(x,\frac{E}{\eta}) f(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \tag{30}$$

com a condição inicial $F(0,E) = G(E)$.

O resultado é o seguinte

$$F(x,E) = e^{-x/\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x/\lambda)^{\nu}}{\nu!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 G(\frac{E}{\eta_1 \cdots \eta_\nu}) \times$$

$$\times \frac{f(\eta_1)}{\eta_1} \cdots \frac{f(\eta_\nu)}{\eta_\nu} d\eta_1 \cdots d\eta_\nu \tag{31}$$

para uma distribuição de elasticidade $f(\eta)d\eta$, não especifica - da. Por outro lado, o mesmo problema pode ser resolvido integrando-se a equação (30) por meio da transformação ML de Mellin-Laplace. Desta forma, se obtém para $F(x,e)$ a integral

$$F(x,E) = \frac{1}{2\pi i E} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M_G(s) \frac{e^{-x/\lambda(s)}}{E^s} ds \quad , \tag{32}$$

em que $M_G(s)$ é a transformada de Mellin da função $G(E)$.

$$\frac{1}{\lambda(s)} = \frac{1-\langle\eta^s\rangle}{\lambda} \quad \text{e} \quad \langle\eta^s\rangle = \int_0^1 \eta^s f(\eta) d\eta \quad . \tag{33}$$

Agora, para demonstrar a equivalência de (31) e (32) basta aplicar a transformada de Mellin a ambos os membros da equação (31).

Isto feito, temos

$$M_F(s) = M_G(s)\ e^{-x/\lambda(s)} \quad , \tag{34}$$

donde

$$F(x,E) = \frac{1}{2\pi i E} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M_G(s) \frac{e^{-x/\lambda(s)}}{E^s} ds \tag{35}$$

que coincide com (32), como se queria provar.

Relação de Reciprocidade

Da fórmula (34) resulta uma relação de reciprocidade entre as transformadas de Mellin de F(x,E) e G(E), isto é,

$$\begin{cases} M_F(s) = M_G(s)\ e^{-x/\lambda(s)} \\ M_G(s) = M_F(s)\ e^{x/\lambda(s)} \end{cases} \quad , \tag{36}$$

que se transmite às respectivas transformadas inversas que são

$$F(x,E) = \frac{1}{2\pi i E}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M_F(s)\ \frac{ds}{E^s} = \frac{1}{2\pi i E}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M_G(s)\ \frac{e^{-x/\lambda(s)}}{E^s}\ ds$$

e (37)

$$G(E) = \frac{1}{2\pi i E}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M_G(s)\ \frac{ds}{E^s} = \frac{1}{2\pi i E}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M_F(s)\ \frac{e^{x/\lambda(s)}}{E^s}\ ds \quad ,$$

então

"Conhecida a expressão matemática de F(x,E)dE do espectro diferencial da componente nucleônica, na profundidade x (g/cm^2), para se obter o espectro diferencial G(E)dE das partículas primárias (principalmente prótons) no topo da atmosfera, basta substituir, na expressão F(x,E)dE x por (-x) e M_G por M_F."

e o mesmo acontece com as respectivas expressões explícitas no campo real.

Desta reciprocidade, resulta imediatamente, a partir da fórmula (31) de F(x,E) a seguinte expressão de G(E):

$$G(E) = e^{x/\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-x/\lambda)^{\nu}}{\nu!}\int_0^1\cdots\int_0^1 F\left(x, \frac{E}{\eta_1\cdots\eta_\nu}\right) \times$$

$$\times\ \frac{f(\eta_1)}{\eta_1}\cdots\frac{f(\eta_\nu)}{\eta_\nu}\, d\eta_1\cdots d\eta \tag{38}$$

cuja equivalência com a segunda equação (37) se verifica facilmente. Basta calcular a transformada $M_G(s)$ de G(E) que nos dá

$$M_G(s) = M_F(s)\ e^{x/\lambda(s)} \quad ,$$

que é a segunda das fórmulas (36) da qual resulta a expressão de G(E) dada em (37).

Observação. As fórmulas (31) e (38) generalizam, para o caso de se levar em conta a distribuição de elasticidade, as soluções correspondentes de um problema mais simples considerado pelo autor[4], e que foram obtidas com método inteiramente diferente.

Agradecimentos. O autor deseja manifestar seu agradecimento ao Prof.N.Arata pelas comunicações privadas de que teve a oportunidade de tomar conhecimento e pelas discussões relativas ao presente trabalho. Da mesma forma fica o autor muito agradecido aos colegas Neusa Amato e Helio Portella pela leitura do presente artigo, bem como à Sra. Helena de Souza Ferreira pelo excelente trabalho de datilografia.

Referências

[1] N. Arata e F.M.O. Castro, submetido à Rev. Bras. Física (agosto, 1987).

[2] E. Konishi, T. Shibata, E. Shibuya e N. Tateyama, Prog. of Theoretical Phys. - vol. 56, December 1976.

[3] F.M. de Oliveira Castro, Notas de Física, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF-NF-064/85 (1985) - Rio de Janeiro - Brasil.

[4] F.M. de Oliveira Castro, Notas de Física, CBPF-NF-027/83 , (1983).