ISSN 0029 - 3865

CBPF-NF-005/89

LEIS TOPOLÓGICAS NA FÍSICA*

por

J.J. GIAMBIAGI

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

*Conferência pronunciada no dia 4 de novembro de 1988, em homenagem ao Prof. Carlos Marcio do Amaral, na Universidade Federal do Rio de Janeiro.

LEIS TOPOLÓGICAS NA FÍSICA*

por

J.J. GIAMBIAGI

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

*Conferência pronunciada no dia 4 de novembro de 1988, em homenagem ao Prof. Carlos Marcio do Amaral, na Universidade Federal do Rio de Janeiro.

RESUMO

Nesta nota se faz um resumo pedagógico das idéias elementares (seguindo o caminho histórico) que estão na base das aplicações das estruturas topológicas em distintos campos da física.

Palavras-chaves: Teoria de campos topológicos.

LEIS TOPOLÓGICAS EM FÍSICA

§1 INTRODUÇÃO

Uma das conseqüências mais importantes da introdução de equações diferenciais não lineares é a aparição das soluções tipo solitons [1] e as estruturas topológicas com elas associadas. Este assunto está adquirindo dia a dia maior importância tanto na física das partículas elementares quanto nos fenômenos de matéria condensada.

O propósito destas linhas é rever de uma maneira pedagógica as idéias que levaram a introduzir conceitos topológicos e - consequentemente-leis de conservação.

Vamos começar por um exemplo simples em duas dimensões x,t. A teoria está definida por um lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}\, \partial^{\nu}\phi^{*}\partial_{\mu}\phi - U(\phi) \tag{1}$$

donde $U(\phi)$ define a teoria. Ex.:

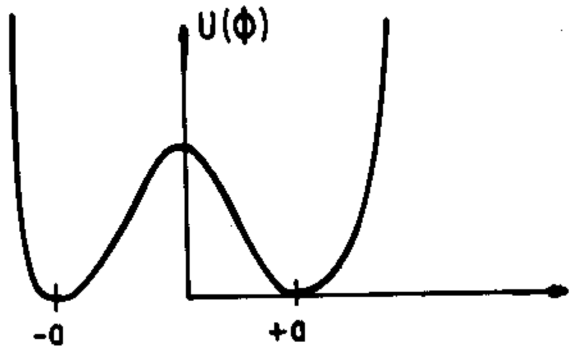
$$\lambda\phi^4 U(\phi) = \frac{\lambda}{2}(\phi^2-a^2)^2 \quad ; \quad \text{donde} \quad a^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

Sine-Gordon $U(\phi) = \frac{\alpha}{\beta^2}(1-\cos\beta\phi)$ ver ref. [1]. A teoria de campos nos ensina que a energia vem dada por

$$E = \int_{-\alpha}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + U(\phi) + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2\right] \tag{2}$$

o estado fundamental da teoria clássica é dada por [2]

$U(\phi) = 0.$



na teoria $\lambda\phi^4$ vem dada por

$$\phi = a \quad e \quad \phi = -a \tag{3}$$

Em geral o estado fundamental é independente do tempo t.

Para soluções independentes do tempo t o lagrangeano fica

$$L = -\partial_x^2 - U(\phi) \tag{4}$$

e o princípio de Hamilton leva a

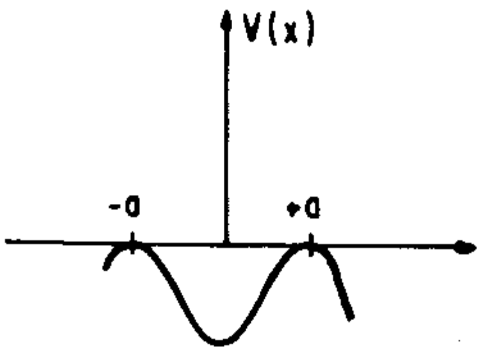
$$\delta \int dx\{\frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + U(\phi)\} = 0 \tag{5}$$

Este problema é matematicamente idêntico ao princípio de Hamilton para uma partícula de unidade de massa, que se move num potencial igual a $-U(\phi)$. Para ver isto mais claramente troquemos a notação $\phi \to x$ $x \to t$. Ver [3] e também [4].

Fica então

$$\delta \int dt\{\frac{1}{2}(\partial_t x)^2 - V(x)\} \tag{6}$$

Todo movimento de uma partícula neste potencial corresponde a uma solução independente de tempo do problema de teoria de campos originalmente proposto. Porém a maior parte não corresponde a soluções com energia finita. Para que a expressão (2) seja convergente é necessário que quando $x \to \infty$ $\phi(x) \to \phi_o$ tal que $U(\phi_o) = 0$ na analogia com a dinâmica de uma partícula deve partir de $\phi^{(\alpha)} = -a$ e chegar até $\phi(+\infty) = +a$. Deve unir os dois vácuos. Na linguagem da teoria de campos de Yang-Mills, são os instantons.



Nesta análise, o que é fundamental é que a função $U(\phi)$ tenha dois zeros não coincidentes.

Se não tiver dois zeros, a partícula não pode voltar, ou pode chegar a (+a) com velocidade diferente de zero e passar para o outro lado, e a solução não será de energia finita. Mas é condição necessária que existam dois zeros.

Temos o resultado seguinte:

1) Se $U(\phi)$ tem só um zero, ou seja, se o ground state é "não degenerado", não tem soluções não triviais independentes do t.
2) Se $U(\phi)$ tem mais de um zero, existem sempre soluções não triviais.

§2 LEIS TOPOLÓGICAS DE CONSERVAÇÃO

O fato que quando $x \to \infty$ $\phi(x)$ deve tender a um valor ϕ_o que é um zero de $U(\phi)$ é um exemplo de uma lei topológica. Modificando as condições iniciais em forma contínua $\phi(x)$ se modifica mas mantém o mesmo comportamento no infinito. De modo que ϕ_o passa a ser um rótulo de uma família de funções - soluções da equação proposta e que correspondem a soluções de energia finita. Esta família de soluções é uma "classe de homotopia" e o ϕ_o é um número quântico que a caracteriza. É uma constante de movimento que não surge do teorema de Noether.

Não é possível passar de uma classe a outra por mudanças contínuas. O espaço não é conexo.

A fim de estender as considerações anteriores a um maior número de dimensões vamos definir os símbolos que vamos usar. Por exemplo na teoria $\lambda\phi^4$ e um grupo de simetria U(1) o Lagrangeano é:

$$L = \frac{1}{2}\,\partial^{\mu}\phi^{\alpha}\partial_{\mu}\phi - U(\phi) \qquad U(\phi = \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi - a^2)^2 \tag{7}$$

G = grupo de simetria original.

Devido a estrutura de $U(\phi)$ (vácuo degenerado) o vácuo não tem a mesma simetria do Lagrangeano; isto se chama quebra espontânea de simetria [2]. O vácuo fica com simetria H.

Ou seja, na eq. (7) G = U(1) todos os zeros são da forma

$$\phi = g\phi_o \qquad g \in G$$

ϕ é um elemento de U(1). Para pertencer a H um elemento h deve satisfazer

$$h\phi_o = \phi_o$$

H é a energia residual do vácuo.

No caso de (7) $H \equiv \mathbb{1}$ em outros casos p.e. quando

$$U(\phi) = (\vec{\phi}^*\vec{\phi} - a^2)^2 \frac{\lambda}{2} \quad , \quad \text{em que } G = SO(3) \tag{8}$$

H é uma rotação no espaço isotópico com eixo $\vec{\phi}$. Nesse caso $h\vec{\phi}_o = \phi_o$.

Os zeros diferentes de U se identificam com o grupo quocien te $\frac{G}{H}$.

§3 SOLUÇÕES DE ENERGIA FINITA COM D > 1 (D = números de dimensões espaciais)

Vamos considerar o caso D = 2. Nesse caso, a expressão da energia (2) nos leva a:

$$E \geq \int_1^\infty rdr \int_0^{2\pi} d\theta \left[\partial\phi^*\partial\phi + U(\phi)\right] \qquad U(\phi(\infty,\theta) = 0 \tag{9}$$

com a condição

$$\ell im\ r \to \infty\ \phi(r,\theta) = \phi(\infty,\theta) \tag{10}$$

Um raciocínio superficial indicará que $\phi(\infty,\theta)$ não presta, já que

$$(\nabla\phi)_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\phi(\infty,\theta) \tag{11}$$

e substituindo em (9), a integral diverge. Porém quando nós escrevemos o lagrangeano da teoria de Gauge completa correspondendo a U(1)

$$L = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu\phi^* D_\mu\phi + U(\phi) \tag{12}$$

a expressão que entra na energia (9) não é o grad comum mais o grad covariante.

$$(D\phi)_\theta \simeq \frac{1}{r}\frac{d\phi}{d\phi} + \text{i.e. } A_\theta\phi \tag{13}$$

É então possível escolher um campo tal que (13) vai a zero de modo a fazer convergente a integral da energia (9). Vemos assim que toda solução de energia finita está associada a uma função $\phi(\infty,\theta)$ que representa o mapeado de um círculo S^1 (do espaço r,θ) no espaço dos zeros da função $U(\phi)$ isto é, no espaço G/H. Em três dimensões ela representa a esfera S^2 em G/H.

O espaço de funções que transforma S^1 em G/H se divide em classes de homotopia. Esta classe se for única, quer dizer que é homotópica a identidade. A teoria não tem soluções de energia finita e não é necessário tentar procurá-las. Para ser interessante a teoria devem existir pelo menos duas classes de homotopia. (Observe a analogia com o caso de duas dimensões em que $U(\phi)$ tinha que ter duas soluções disjuntas). Podemos sintetizar o resultado dizendo: as componentes conexas do espaço de soluções de energia finita estão em correspondência biunívoca com as classes de homotopia da representação de S^{D-1} em G/H onde D é o número de dimensões espaciais. Também vale como corolario do anterior. Se $U(\phi)$ tem só um zero G/H consiste em um só ponto e tem só uma classe de homotopia. As leis de conservação são triviais.

§3 EXEMPLOS

Ex. 1: $G = U(1)$ $D = 2.$

$$L = \frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D^{\mu}\phi^* D_{\mu}\phi_t U(\phi) \qquad U = (\phi^*\phi - a^2)^2 \tag{14}$$

os zeros de U são da forma:

$\phi = a\, e^{i\sigma}$ σ = número real função de θ

G/H é um círculo $\phi^*\phi = a^2$.

Devemos pois encontrar as classes de homotopia de S^1 em S^1. Elas estão dadas pelo "winding number"

$$n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\sigma(2\pi)-\sigma(o)}{2\pi} = n = 0,1,2\ldots\infty \tag{15}$$

Cada componente conexa leva uma etiqueta n. Esta teoria, na presença de um campo electromagnético é matematicamente idêntica a teoria da supercondutividade de Landau-Ginzburg onde ϕ representa os pares de Cooper, e os "kinks" representam o fluxo magnético (vórtice). Chamando Λ ao fluxo magnético.

$$\Lambda = \int_{-}^{+}\int_{\alpha}^{\infty} dxdy\, B_z = \lim_{r\to\infty} r\int_0^{2\pi} d\theta\, A\theta(r,\theta) \tag{16}$$

Da condição (13) igualada a zero, como condição para ter soluções de energia finita se obtém

$$A_{\theta_{r\to\infty}} \simeq -\frac{i}{re}\frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{d\theta}(\infty,\theta) = \frac{d\sigma}{d\theta} \tag{17}$$

já que $\phi = a\, e^{i\sigma}$

fica

$$\Lambda = \frac{1}{e}\int_0^{2\pi}\frac{d\sigma}{d\theta}\,d\theta = \frac{2\pi n}{e} \tag{18}$$

Ou seja, dentro da teoria clássica de Landau-Ginzburg obtivemos a quantização do fluxo magnético.

Correntemente se diz que a quantização do fluxo magnético é consequência da teoria quântica, enquanto (18) é um resultado clássico. A explicação está na constante de acoplamento e que é a cte de acoplamento clássico do campo e que não é a carga da partícula. Não tem sequer as mesmas dimensões. A relação entre as duas vem dada pela mecânica quântica e diz

$$\hbar\, e_{campo} = e\ part \tag{19}$$

que substituida na (18) nos dá

$$\Lambda = \frac{2\pi\hbar n}{e_p} = \frac{h_n}{e_p} \tag{20}$$

onde no caso dos pares de Cooper $e_p = 2e$ (e = carga de eletron).

Ex.2: $G = SU(2)$ $\qquad U(\psi) = (\bar{\psi}\psi - a^2)^2$

ψ se transforma como um spinor complexo. Os zeros de U são todos os ψ que satisfazem

$$\bar{\psi}\psi = a^2$$

Como ψ é um spinor, é uma representação de SU(2), $\frac{G}{H}$ é uma esfera de S^3, já que depende de três parâmetros.

Todas as representações de $S^{1(D=2)}$ $S^{2(D=3)}$ em S^3 são homotópicas a identidade. Logo, não tem soluções de energia finita.

Ex. 3: O mesmo que no caso anterior para fora G = SO(3), mas agora $\vec{\phi}$ substitui o ψ (ou o ϕ de U(1) $\frac{G}{H}$ é uma esfera bidimensional.

As classes de homotopia são agora

$$S^1 \to S^2 \text{ para } D = 1$$

mas para D = 2 $\vec{\phi}(\infty,\theta,\phi)$ é uma função que leva

$S^2 \to S^2$ e aqui as classes de homotopia são

$n = 1,2,\ldots\infty.$

Estas soluções de energia finita correspondem as encontradas por t'Hooft e Polyakov.

§4 EFEITO HALL E FASES DE BERRY [5] [6]

Já foi mostrado que no eletromagnetismo a magnitude fundamental é

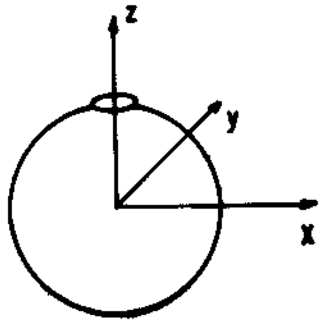
$$W = C^{\oint_C A_\mu dx^\mu} \quad \text{(Wilson loop)} \tag{21}$$

onde C é qualquer loop no espaço tempo.

Pelo teorema de Stokes podemos escrever

$$W = e^{\int_\Sigma F_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu}} = e^{\int_\Sigma \vec{H}.\vec{d}\sigma} \tag{22}$$

onde Σ é qualquer superfície que tenha a C como borde. Se imagi



no C o loop da figura que considero infinitésimo a integral de H me dá o fluxo magnético total que quando o raio de C tende a zero será nula a menos que A_μ tenha uma singularidade na intersecção com o eixo z. Essa singularidade é característica do string de Dirac, valendo sempre

$$\int H d\sigma = 4\pi n g \tag{21}$$

onde a integral se estende a todo o rango dos valores das variáveis, na esfera g é a carga magnética e n uma invariante topológica chamada invariante de Chern [7] e que caracteriza uma classe de homotopia.

Chama-se classe de Chern da conexão A_μ a integral da curvatura estendida a toda superfície. É uma invariante topológica.

Voltando ao efeito Hall, encontramos [8] que a fórmula de Kubo da condutividade Hall pode ser escrita como

$$\sigma_H = \frac{ie^2}{A_0\hbar} \sum_{\varepsilon_\beta > \varepsilon_F} \sum_{\varepsilon_\alpha > \varepsilon_F} \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial R_1}\right)_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial H}{\partial R_2}\right)_{\beta\alpha} - \left(\frac{\partial H}{\partial R_2}\right)_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial H}{\partial R_1}\right)_{\beta\alpha}}{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2}$$

onde A_0 é a área do sistema. $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$ são os autovalores do Hamiltoniano

$$H(R_1 R_2) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial X} + \hbar R_1\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + \hbar R_2 - cBx\right)^2 + U(x,y) \tag{23}$$

Agora, se vamos a ref. [6] vemos que a expressão para a fase de Berry é

$$\gamma_n(C) = - \iint_{\Sigma_c} d\vec{s}.\vec{V}_n(R) \tag{24}$$

onde $\gamma_n(C)$ é o fator de fase que multiplica a n-ésima função de onda quando os parâmetros do Hamiltoniano recorrem um loop fechado C no espaço dos parâmetos e $\vec{R}$ é o vetor posição no espaço dos parâmetros e

$$V_n(R) = \mathrm{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n(R)|\nabla_R H(R)|m(R)\rangle \Lambda \langle m(R)/\nabla_R H|n(R)\rangle}{(Em(R) - En(R))^2} \tag{25}$$

onde Λ significa produto vetorial e $\sum_c$ é uma superfície com borde C. Se agora compararmos as integrantes de (22) com (25) vemos que são idênticas o que dá a condutividade uma significação geométrica e quando tomamos para $\sum_c$ uma superfície que se estende a todos os valores possíveis dos parâmetros na presença de uma invariante de Chern, o que assegura sua quantificação.

A existência de números fermionicos fracionários está também associada a efeitos topológicos mas sua discussão excede aos limites impostos a esta conferência.

BIBLIOGRAFIA

1. A. Scott-F.Y. Chu - D.W. McLaughlin, The Soliton: a new concept in applied science IEEE 10, 1973, 1443.
2. J. Goldstone, N. Cimento 19, 154 (1961).
3. S. Coleman, Classical lumps and their quantum desendants, Erice 1973.
4. P. Goddard and D.I. Olive, Magnetic monopoles in gauge field theory Rep. Progr. Phys. 41 (1978) 1358.
5. R.B. Laughlin, Phys. Rev. B 23 (1981) 5632.
6. M.V. Berry, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 392 (1984) 45.
7. Barry Simon, Holonomy, the quantum adiabatic theorem and Berry's Phase, PRL 24 (1983), 2167.
8. D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale and M. den Nijs Phys. Rev. 49 (1982) 405.