Tese de

Doutorado

Fenômenos de Condensação em Teorias de Cordas

Rafael Nardi

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF

Rio de Janeiro, Março de 2013

Dedicatória

Aos meus pais por me ensinarem a importância do conhecimento e da consciência.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pelo exemplo de integridade, pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis, e pela valorização das conquistas. Ao saudoso Professor André Nardoto por ter me ajudado e motivado com meus primeiros passos na física e assim ter contribuído com o nascimento da minha paixão por esta bela ciência. Ao Professor José Abdalla Helayël-Neto pelas inspiradoras aulas e explicações que me incentivaram grandemente a cultivar minha paixão pela física, e pelo socorro nos momentos de desesperança. Ao Professor Sérgio José Barbosa Duarte pela generosidade de ter me cedido seus valiosos tempo e atenção. Agradeço ao Professor Sebastião Alves Dias pelas empolgantes e motivantes discussões sobre física de altas energias e ao Professor Ion Vasile Vancea pela introdução ao assunto desta tese. Aos companheiros de luta social Arthur, Camila, Enrique, Fred, Paulo e Wesley pelo exemplo de organização, austeridade e compromisso com o que realmente importa. Aos amigos e amigas do CBPF: Cris, Martinha, Marcus, Alfredo, Carlos, Bruno, Guilherme, Alan, Turcati, Jefferson pela colaboração na física e pelos momentos de descontração. Aos amigos de república Emmanuel, Toca, Guto, Ricardo, Daniel e Paulo pelos *hang outs* e companheirismo. Enfim, agradeço a todos os amigos de longa data e pessoas especiais com quem troquei experiências construtivas como Daniel Brioschi, Paschoal, Diego Uzêda, Letícia, Julia, Marcella, Aninha e muitas outras pessoas que não caberiam aqui. Agradeço por fim ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - pelo suporte financeiro e ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas pelas instalações e material humano disponibilizados.

Resumo

Os desenvolvimentos recentes nas teorias de cordas sugerem que o princípio holográfico deve constituir um elemento central de uma teoria definitiva que incorpore consistentemente a interação gravitacional no regime microscópico. Neste cenário, torna-se necessário uma reinterpretação termodinâmica do que seriam os efetivos graus de liberdade da teoria fundamental. Nesta tese exploramos como fenômenos de condensação aparecem na dinâmica de D-branas em compactificações toroidais, na dinâmica das cordas nas vizinhanças de singularidades cosmológicas e na interação a 1-loop de cordas fechadas mediante a exploração conteúdo termodinâmico contido nas transformações de Bogoliubov.

Abstract

Recent developments in string theories suggest the holographic principle can play a central role in a consistent description of gravitational interaction at the microscale regime. In this scenario, it becomes necessary to reinterpret in a thermodynamical way what would be the very effective degrees of freedom of the fundamental theory. In this thesis we explore condensation phenomena in the dynamics of D-branes in toroidal compactifications, strings near cosmological singularities as well as 1-loop bosonic closed string interaction by analysis of the intrinsic thermodynamical content of Bogoliubov transformations.

Conteúdo

Dedicatória i

Agradecimentos ii

Resumo iii

Abstract iv

Índice v

1 Introdução 1

2 Transformações de Bogoliubov e Estados Termodinâmicos 5

2.1 A Física das Transformações de Bogoliubov 5

2.2 Transformações de Bogoliubov enquanto Transformações Canônicas 12

2.2.1 Estados Coerentes 12

2.2.2 *Squeezed States* 13

2.2.3 *2-Mode Squeezed States* 13

3 D-branas térmicas Magnetizadas em Compactificações Toroidais no Formalismo TFD Generalizado 15

3.1 Introdução 15

3.2 D-Branas magnéticas a $T = 0$ 19

3.3 Termodinâmica da corda fechada em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$ 23

3.3.1 O vácuo térmico da corda fechada 24

3.3.2 Termodinâmica da corda térmica fechada 31

3.4 D-Branas Térmicas Magnetizadas 34

3.4.1 Estados de D-Branas térmicas magnéticas 35
3.4.2 Termodinâmica de D-branas magnetizadas 37

4 Dinâmica fora do Equilíbrio de Cordas em Fundo do Tipo onda Plana Dependente do Tempo 40

4.1 Introdução 40
4.2 Cordas sobre fundos de onda plana 46
4.3 Dinâmica das cordas fora do equilíbrio 49
4.3.1 Campos das cordas à temperatura finita 50
4.3.2 Dinâmica dos campos térmicos 54
4.3.3 Dinâmica do Centro de Massa 56
4.4 As correlações da corda térmica 58
4.5 Formalismo NETFD 62

5 Emaranhamento de estados de fronteira em 1-loop 66

5.1 Introdução 66
5.2 Interações a 1-loop das cordas bosônicas 69
5.3 Condensação de D-branas 71
5.4 Entropia 74

6 Conclusões e Perspectivas 76

Capítulo 1

Introdução

A teoria de cordas se destaca por ser uma das principais candidatas à descrição da interação gravitacional no regime microscópico. Esta afirmação em grande medida se baseia na existência de um modo de massa zero com spin 2 no espectro de cordas fechadas e sua interação com os modos do setor de Yang-Mills (spin 1 do setor de cordas abertas) é livre dos problemas usuais de renormalização e unitariedade presentes nas formulações da gravidade quântica via linearização da ação de Einstein-Hilbert, bem como suas generalizações.

Embora este êxito das cordas em montar um esquema consistente para a propagação do modo de spin-2 ainda não signifique que a teoria de fato descreve a gravidade no regime microscópico, visto que ainda não se compreende como se dá a formação da geometria do espaço-tempo a partir das cordas, considera-se que se trata de um avanço significativo. Em parte, o êxito repousa na invariância conforme da teoria em 2 dimensões: devido à invariância conforme da folha-mundo da corda, as amplitudes de espalhamento dependem apenas da topologia e não da forma específica da propagação das cordas envolvidas no processo.

O fato da descrição da gravidade microscópica envolver a simetria conforme concorda com a expectativa geral da física de altas energias de que a invariância conforme deva valer no regime de altos momentos trocados nos diagramas de Feynmann.

Formalmente, e em nível clássico, este resultado pode ser observado no chamado referencial de momentos infinitos (*Infinite Momentum Frame*): o hamiltoniano relativístico de um sistema de N partículas massivas livres se comporta enquanto um hamiltoniano não-relativístico sem parâmetro de massa no limite em que o momento numa das direções é infinito

$$H = \left[g_{zz} \left(\sum_{i=1}^{N} p_z^{(i)} \right)^2 + g_{yy} \left(\sum_{i=1}^{N} p_y^{(i)} \right)^2 \right.$$
$$\left. + g_{xx} \left(\sum_{i=1}^{N} p_x^{(i)} \right)^2 + g_{tt} \left(\sum_{i=1}^{N} m_{(i)} \right)^2 \right]^{1/2} \ ; \ P_z = \sum_{i=1}^{N} p_z^{(i)} \longrightarrow +\infty \quad (1.1)$$

implica

$$\begin{aligned} H &\approx g_{zz} P_z + \frac{g_{yy} P_y^2 + g_{xx} P_x^2}{2P_z} + \frac{g_{tt} M^2}{2P_z} \\ &\approx g_{zz} P_z + \frac{g_{yy} P_y^2 + g_{xx} P_x^2}{2P_z} \end{aligned}$$

ou seja, a dinâmica não mostra parâmetro de escala e portanto não há uma escala preferencial.

Surpreendentemente, uma realização física interessante do limite de momentos infinitos é encontrada na escala cosmológica com as geometrias de Sitter (dS) e sua relação com o *princípio holográfico*. Num universo de Sitter, a velocidade de afastamento cresce com a distância de modo que num raio finito R_{dS} ocorre uma singularidade cosmológica que impossibilita que sinais sejam trocados entre pontos distantes um do outro por $R > R_{dS}$. Nesta situação, o momento associado à velocidade de afastamento da matéria diverge em R_{dS} realizando o limite $P_z \longrightarrow +\infty$. Com isto a simetria conforme joga um papel fundamental tanto no limite ultramicroscópico quanto no ultramacroscópico. Sobre isto, novamente as cordas apontam uma ligação interessante entre as duas escalas de energia. Através da invariância modular do toro, as amplitudes de cordas a 1-loop numa escala de energia μ equivalem às amplitudes numa escala μ^{-1} eliminando portanto as divergências UV e ligando definitivamente a dinâmica macroscópica com a microscópica.

É um paradoxo entretanto, que a simetria conforme também represente o grande obstáculo ao contato da teoria com a física conhecida em baixas energias. Uma vez que a teoria não possui escala privilegiada, não é possível derivar as massas ou acoplamentos entre os modos de baixas energias descritos nas teorias de campos já estabelecidas tais como a cromodinâmica quântica e a teoria eletrofraca. Em outras palavras, a teoria se mostra incapaz de fazer prescrições mensuráveis.

Com isto, entendemos que um passo necessário para o avanço da conexão entre a teoria de cordas e as teorias quânticas de campos em $d = 3 + 1$ deva ser o de discutir como se dá a redefinição/renormalização dos graus de liberdade das teorias de cordas à medida que se caminha para baixas energias. Em outras palavras, cabe a pergunta sobre como os graus de liberdade das cordas, ao fluírem segundo as equações do grupo de renormalização, se condensam nos graus de liberdade das TQC conhecidas.

A perspectiva dominante atualmente (interpretação de Wilson) é que o grupo de renormalização realiza a ligação entre a física nas diferentes escalas de energia parametrizando a dinâmica por meio de operadores marginais, renormalizáveis e super-renormalizáveis.

Por outro lado, uma maneira alternativa de compreender o mecanismo de redefinição dos graus de liberdade envolvido nas equações do grupo de renormalização é o das transformações de Bogoliubov. De acordo com esta abordagem, a passagem entre a dinâmica numa escala de energia μ e a dinâmica na escala de energia $\mu + d\mu$ deve ser compreendida enquanto uma transformação canônica cujo gerador $G(\mu)$ nada mais é do que o gerador de uma transformação de Bogoliubov.

Tradicionalmente, as transformações de Bogoliubov são familiares na literatura da física da matéria condensada. Em particular na descrição da supercondutividade, a passagem da descrição da dinâmica de elétrons para a dinâmica de pares de Cooper e a consequente diagonalização do hamiltoniano, se dá justamente por meio de uma transformação de Bogoliubov que então marca uma escala de energia característica para o evento - a temperatura de condensação/formação dos pares de Cooper T_c.

Consequentemente, a confirmação das teorias de cordas como uma proposta relevante à física de altas energias, e em particular à gravidade microscópica, envolve a conciliação entre duas abordagens ao problema de como a física é sensível às operações de reescala, a dizer, a linguagem da teoria conforme, predominante nas cordas, e a linguagem do grupo de renormalização, predominante nas TQC em $d = 3 + 1$.

Neste trabalho nos propomos a análise de uma possível conciliação acima mencionada mediante a exploração da dinâmica das cordas usando as transformações de Bogoliubov como ferramenta analítica.

No Capítulo 2, uma breve motivação e exposição das transformações de Bogoliubov bem como de sua relação com os fenômenos de condensação são apresentadas.

No Capítulo 3, é exposto o conteúdo do trabalho publicado [1] em que é discutido o problema de como se dá a termalização de cordas e Branas no cenário de compactificações toroidais com campos de fundo mantidos frios.

O Capítulo 4 trata do conteúdo do artigo publicado [2], o qual diz respeito ao problema da termalização de cordas na presença de singularidades cosmológicas.

O conteúdo do Capítulo 5 diz respeito ao artigo publicado [3] no qual a interação entre cordas fechadas é vista como um fenômeno de condensação assinalado pelo aparecimento de um termo de Bogoliubov misturando a dinâmica dos modos à esquerda com a dos modos à direita e dando origem a estados condensados.

No capítulo 6, os principais resultados são coletados e discutidos dentro do contexto geral da presente tese.

Capítulo 2

Transformações de Bogoliubov e Estados Termodinâmicos

2.1 A Física das Transformações de Bogoliubov

É justo dizer de um modo geral que a termodinâmica é subordinada à mecânica estatística: as quantidades macroscópicas são identificadas nas médias estatísticas sobre configurações da dinâmica microscópica (o ensemble) e em última instância, a determinação dos pesos estatísticos e dos estados microscópicos do sistema em análise, de uma forma ou de outra constituem o alvo das teorias fundamentais da física. Particularmente, para os sistemas em equilíbrio termodinâmico, as probabilidades se mantêm estáveis no tempo e realizam, por exemplo, o espectro de radiação térmica dependendo somente dos níveis energéticos pelo fator de Boltzmann.

Entre as médias sobre os estados microscópicos, uma em especial se destaca por tornar-se máxima no equilíbrio: a entropia (de Gibbs). Neste sentido, a entropia carrega consigo um princípio variacional realizado pela distribuição de probabilidades para os estados microscópicos

$$0 \leq S = -k_B \sum_{n}^{N} P_n \ln P_n \leq k_B \ln N \ . \tag{2.1}$$

A seta do tempo seria deste modo dada pela reorganização/interação do mundo microscópico no sentido da produção de entropia tendendo ao limite de Boltzmann em que as configurações microscópicas são equiprováveis.

Os termos de Bogoliubov abrem uma interessante perspectiva sobre este argumento. Como exemplo, tomemos o simples sistema de osciladores

$$[a, a^\dagger] = 1 \ ; \ a\,|0\rangle = 0 \ . \tag{2.2}$$

O vácuo não é invariante sob a evolução temporal gerada por um hamiltoniano que contenha um termo do tipo

$$G_B = G_B^\dagger = i\theta \left(a^\dagger - a\right) \ ; \ \theta \in \mathbb{R} \ . \tag{2.3}$$

pois embora o operador evolução temporal, ainda seja unitário, ele leva o vácuo num estado com infinitos modos (condensados):

$$U \sim e^{-iG_B} \tag{2.4}$$

implica

$$\begin{aligned} e^{-iG_B}\,|0\rangle &= e^{\theta\left(a^\dagger - a\right)}\,|0\rangle \\ &= e^{\frac{-\theta^2}{2}} e^{\theta a^\dagger} e^{-\theta a}\,|0\rangle \\ &= e^{\frac{-\theta^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\theta a^\dagger\right)^n}{n!}\,|0\rangle \equiv |\theta\rangle \ ; \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde usamos o resultado

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \ . \tag{2.6}$$

O resultado mostra que $|\theta\rangle$ é auto-estado do operador aniquilação a com auto-valor θ. O estado $|\theta\rangle$ é conhecido na literatura como *estado coerente* [4] e desempenha um papel central na discussão dos lasers na literatura de ótica quântica [5], [6].

É notável que a presença de termos de Bogoliubov está intimamente ligada ao fenômeno da quebra espontânea de simetria visto que esta específica forma do operador G_B induz funções de 1-ponto não-nulas. Por consequência disto, os termos de Bogoliubov desempenham um papel importante na compreensão dos fenômenos de transições de fase.

Em particular, observa-se que a forma específica do termo de Bogoliubov acima corresponde ao operador momento associado ao oscilador harmônico multiplicado pelo parâmetro θ

$$p = i\left(a^{\dagger} - a\right) \tag{2.7}$$

$$G_B = \theta p \; . \tag{2.8}$$

Disto pode-se dizer que o termo de Bogoliubov característico do estado coerente é o *operador translação* na respectiva coordenada canonicamente conjugada.

Observa-se ainda daí que um termo de momento não-nulo no hamiltoniano significa a escolha de um referêncial diferente daquele de repouso da respectiva coordenada canônica, dito de outro modo, trata-se de uma injeção de momento no sistema, o que por sua vez implica no processo de condensação. Uma integração sobre a escala de momento esconde portanto uma integração sobre condensados.

Na literatura, $U_B(\theta) = \exp\left(-iG_B(\theta)\right)$ é usualmente referido como transformação de Bogoliubov, isto porque $|\theta\rangle$ pode ainda ser considerado como um vácuo para osciladores transformados que representam a criação e destruição de modos condensados. Isto

$$\alpha(\theta) = e^{-iG_B(\theta)} a e^{iG_B(\theta)} \tag{2.9}$$

$$\alpha^{\dagger}(\theta) = e^{-iG_B(\theta)} a^{\dagger} e^{iG_B(\theta)} \tag{2.10}$$

implica

$$\alpha(\theta)|\theta\rangle = e^{-iG_B(\theta)} a e^{iG_B(\theta)} e^{-iG_B(\theta)}|0\rangle = 0 \tag{2.11}$$

$$\left[\alpha(\theta), \alpha^{\dagger}(\theta)\right] = e^{-iG_B(\theta)} 1 e^{iG_B(\theta)} = 1. \tag{2.12}$$

Donde se conclui que $U_B(\theta)$ é uma transformação canônica.

Este esquema da dinâmica induzida pelos termos de Bogoliubov sugere um mecanismo geral de produção de entropia (visto que a entropia apresenta saltos de descontinuidade nas transições de fase) e, neste sentido, um caso especialmente importante é aquele em que o sistema já atingiu o equilíbrio o que torna possível uma definição de temperatura.

Para fazer contato com a discussão usual da mecânica estatística quântica, lembramos a construção do operador densidade para um ensemble estatístico de N estados quânticos $|\psi_m\rangle$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$:

$$
\begin{aligned}
\rho &\equiv \sum_{m=1}^{N} P_m |\psi_m\rangle \langle\psi_m| && (2.13)\\
&= \sum_{m=1}^{N} \sum_{i,j\in\mathcal{H}} P_m C_{im} C^*_{jm} |i\rangle \langle j| && (2.14)\\
&= \sum_{i,j\in\mathcal{H}} \mathcal{P}_{ij} |i\rangle \langle j| \ ; \ \mathcal{P}_{ij} \equiv \sum_{m=1}^{N} P_m C_{im} C^*_{jm} \ . && (2.15)
\end{aligned}
$$

Médias estatísticas de operadores quânticos são calculados mediante o traço sobre o ensemble

$$\langle O\rangle_{estat.} = Tr\{\rho O\} \tag{2.16}$$

que, especificamente na base que diagonaliza ρ,

$$\rho_{ij} = \mathcal{P}_{ii}\delta_{ij} \equiv \mathcal{P}_i \delta_{ij} \tag{2.17}$$

implica

$$\langle O\rangle = \sum_{i,j} \rho_{ij} O_{ji} = \sum_i \mathcal{P}_i \langle i| O |i\rangle \ . \tag{2.18}$$

A incerteza estatística representa uma extensão das possibilidades para o resultado da medida que pode ser lida no índice de ensemble e formalmente reportada a um novo setor do espaço de Hilbert. Com isto, a média do operador O se reduz à média quântica no novo espaço de Hilbert $\mathcal{H}'$ dotado de um setor aritificialmente construído (o qual chamaremos de agora em diante de setor virtual de $\mathcal{H}'$) (no confundir com partículas virtuais) cujos atributos serão representados por um sinal $\tilde{}$ sobrescrito

$$
\begin{aligned}
\langle O\rangle &= \langle\Psi| O |\Psi\rangle && (2.19)\\
&= \sum_{k,l,m,n\in\mathcal{H}'} C^*_{k\tilde{l}} C_{m\tilde{n}} \left\langle k,\tilde{l}\right| O \times \tilde{\mathbf{1}} |m,\tilde{n}\rangle && (2.20)\\
&= \sum_{k,l,m\in\mathcal{H}'} C^*_{k\tilde{l}} C_{m\tilde{l}} \langle k| O |m\rangle \ . && (2.21)
\end{aligned}
$$

Em particular, no ensemble de equilíbrio térmico as probabilidades são dadas pelos fatores de Boltzmann que dependem somente dos níveis energéticos do sistema físico e não de qualquer história particular do sistema (que em princípio poderia conferir outros atributos ao estado levantando projeções não-nulas em específicas direções do espaço de Hilbert)

$$\mathcal{P}_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z(\beta)} . \tag{2.22}$$

Esta particularidade do equilíbrio térmico impõe uma forma especial para o estado $|\Psi\rangle$, a dizer, seu único atributo é a temperatura. Isto permite que $|\Psi\rangle$ seja apropriadamente chamado de vácuo térmico e será daqui em diante denotado por $|0(\theta)\rangle\rangle$. Aqui entram novamente as transformações de Bogoliubov: num sistema de osciladores duplicado pela existência de um setor virtual

$$\left[a, a^\dagger\right] = \left[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\right] = 1, \tag{2.23}$$

$$\tilde{a}\left|0, \tilde{0}\right\rangle = a\left|0, \tilde{0}\right\rangle = [a, \tilde{a}] = \left[a^\dagger, \tilde{a}^\dagger\right] = 0 \tag{2.24}$$

as transformações de Bogoliubov de interesse são

$$U_B(\theta) = e^{-iG_B(\theta)} \tag{2.25}$$

onde

$$G_B(\theta) = i\theta\left(a^\dagger\tilde{a}^\dagger - a\tilde{a}\right). \tag{2.26}$$

O vácuo térmico é definido

$$|0(\theta)\rangle\rangle = \frac{1}{Z'^{1/2}(\theta)} e^{-iG_B(\theta)}\left|0, \tilde{0}\right\rangle \tag{2.27}$$

$$= \frac{e^{-\theta^2/2}}{Z'^{1/2}(\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\theta a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right)^n}{n!}\left|0, \tilde{0}\right\rangle . \tag{2.28}$$

Redefine-se o fator de normalização global do estado

$$|0(\theta)\rangle\rangle = \frac{1}{Z^{1/2}(\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\theta a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right)^n}{n!}\left|0, \tilde{0}\right\rangle . \tag{2.29}$$

Agora, da normalização da base de Fock

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle \tag{2.30}$$

e parametrizando o ângulo de Bogoliubov θ por

$$\theta = e^{-\beta\omega/2} \ , \ \beta = \frac{1}{k_B T} \tag{2.31}$$

chega-se ao fator de normalização que concorda com a normalização da estatística de osciladores bosônicos de energia ω isto é, a função de partição

$$\langle\langle 0\left(\theta\left(\beta\right)\right) | 0\left(\theta\left(\beta\right)\right)\rangle\rangle = 1 = Z^{-1}\left(\beta\right)\sum_{m,n} \langle m, \tilde{m}| \, e^{-m\beta\omega/2} e^{-n\beta\omega/2} \, |n, \tilde{n}\rangle \tag{2.32}$$

donde

$$Z\left(\beta\right) = \sum_{n} e^{-n\beta\omega} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega}} \ . \tag{2.33}$$

Agora os valores esperados de quantidades observáveis reproduzem as médias estatíticas térmicas

$$\begin{aligned}
\left\langle O\left(a, a^{\dagger}\right)\right\rangle &= \langle\langle 0\left(\theta\right)| \, O \, |0\left(\theta\right)\rangle\rangle \\
&= Z^{-1}\left(\beta\right)\sum_{m,n} \langle m, \tilde{m}| \, e^{-m\beta\omega/2} O \times \tilde{\mathbf{1}} e^{-n\beta\omega/2} \, |n, \tilde{n}\rangle \\
&= \sum_{n} \frac{e^{-\beta n\omega}}{Z\left(\beta\right)} \langle n| \, O \, |n\rangle
\end{aligned} \tag{2.34}$$

onde se identifica o fator de Boltzmann.

A mesma construção vale para osciladores fermiônicos. Aos osciladores físicos

$$\left\{a, a^{\dagger}\right\} = aa^{\dagger} + a^{\dagger}a = 1 \ ; \ a\left|0\right\rangle = 0 \tag{2.35}$$

adiciona-se o setor virtual

$$\left\{\tilde{a}, \tilde{a}^{\dagger}\right\} = \tilde{a}\tilde{a}^{\dagger} + \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a} = 1 \ ; \ \tilde{a}\left|\tilde{0}\right\rangle = 0 \tag{2.36}$$

tal que

$$\left\{a, \tilde{a}^{\dagger}\right\} = \left\{\tilde{a}, a^{\dagger}\right\} = \left\{\tilde{a}, a\right\} = \left\{a^{\dagger}, \tilde{a}^{\dagger}\right\} = 0 \tag{2.37}$$

e a transformação de bogoliubov de 2-modos fermiônicos

$$U_B\left(\theta\right) = e^{\theta\left(a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger} - a\tilde{a}\right)} \tag{2.38}$$

que atuando sobre o vácuo fundamental, gera o vácuo condensado

$$|0(\theta)\rangle\rangle = Z^{-1/2}(\theta)\, U_B(\theta) \left|0, \tilde{0}\right\rangle \ . \tag{2.39}$$

A normalização do vácuo térmico mediante a identificação do atributo de temperatura no parâmetro da transformação de Bogoliubov $\theta = e^{-\beta\omega/2}$ resulta na função de partição fermiônica

$$\begin{aligned} \langle\langle 0(\theta)\,|0(\theta)\rangle\rangle &= 1 & (2.40)\\ &= Z^{-1}\left[\left\langle 0, \tilde{0}\right| + \left\langle 1, \tilde{1}\right|\theta\right]\left[\left|0, \tilde{0}\right\rangle + \theta\left|1, \tilde{1}\right\rangle\right] & (2.41)\\ &= Z^{-1}\left(1 + \theta^2\right) & (2.42)\end{aligned}$$

que resulta em

$$Z(\beta) = 1 + e^{-\beta\omega} \tag{2.43}$$

Com isso, e quando se leva em conta a quantização canônica das teorias quânticas de campos onde mediante decomposição de Fourier o campo quântico se manifesta como um conjunto infinito de osciladores, é justo dizer que as transformações de Bogoliubov são providas de uma considerável capacidade descritiva dos fenômenos térmicos. Tal estratégia de abordagem do fenômeno térmico é usada sistematicamente no contexto das teorias de campos sob o nome de *Dinâmica de Campos Térmicos (Thermal Field Theory - TFD)* [7].

Uma das vantagens que se destaca do formalismo TFD consiste no fato de que o sistema físico não é expropriado de seu parâmetro temporal. Isto permite, mediante uma definição da evolução temporal do setor virtual, o tratamento da dinâmica nos fenômenos termodinâmicos.

Numa prescrição simplificada, a dinâmica dos graus de liberdade do setor virtual pode ser tomada como uma cópia daquela do setor físico a menos de um sinal negativo. O hamiltoniano total então é

$$\hat{H} = H - \tilde{H} \ . \tag{2.44}$$

Modos virtuais carregam portanto energia negativa: a conservação da energia total se expressa na troca de modos entre o setor físico e o reservatório térmico.

2.2 Transformações de Bogoliubov enquanto Transformações Canônicas

Existem 3 tipos de transformação de Bogoliubov. Nesta seção realizamos a exposição destas transformações enquanto exemplos de transformações canônicas no espaço de Fock donde, seguem naturalmente parametrizações interessantes (funções trigonométricas e trigonométricas-hiperbólicas).

2.2.1 Estados Coerentes

A transformação de Bogoliubov mais simples é a que caracteriza o chamado **estado coerente** e consiste de uma translação simples por uma constante complexa (*c-number*) que deixa trivialmente as relações de comutação inalteradas

$$a \longrightarrow \alpha(\theta) = a + f(\theta) \tag{2.45}$$

$$a^\dagger \longrightarrow \alpha^\dagger(\theta) = a^\dagger + f^\dagger(\theta) \tag{2.46}$$

implica

$$\left[\alpha(\theta), \alpha^\dagger(\theta)\right] = 1 \ . \tag{2.47}$$

2.2.2 *Squeezed States*

Os *Squeezed States* de um modo são caracterizados pela transformação canônica que "mistura"o operador criação com o destruição. Para bósons

$$\begin{aligned} \left[a, a^{\dagger}\right] &= 1 && (2.48)\\ a &\longrightarrow \alpha(\theta) = ua + va^{\dagger} && (2.49)\\ a^{\dagger} &\longrightarrow \alpha^{\dagger}(\theta) = u^{*}a^{\dagger} + v^{*}a && (2.50) \end{aligned}$$

$$\left[\alpha(\theta), \alpha^{\dagger}(\theta)\right] = uu^{*}\left[a, a^{\dagger}\right] + vv^{*}\left[a^{\dagger}, a\right] = 1 \tag{2.51}$$

logo,

$$u^{2}(\theta) - v^{2}(\theta) = 1 \tag{2.52}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(\theta) &= \cosh(\theta)\, a - \sinh(\theta)\, a^{\dagger} \ ; && (2.53)\\ \alpha^{\dagger}(\theta) &= \cosh(\theta)\, a^{\dagger} - \sinh(\theta)\, a \ . && (2.54) \end{aligned}$$

Construção similar segue no caso fermiônico

$$u^{2}(\theta) + v^{2}(\theta) = 1 \tag{2.55}$$

logo

$$\begin{aligned} \alpha(\theta) &= \cos(\theta)\, a - \sin(\theta)\, a^{\dagger} \ ; && (2.56)\\ \alpha^{\dagger}(\theta) &= \cos(\theta)\, a^{\dagger} - \sin(\theta)\, a \ . && (2.57) \end{aligned}$$

2.2.3 *2-Mode Squeezed States*

A extensão para o sistema de 2 modos, que é de particular importância na construção TFD, é imediata e observa apenas a mistura entre dois tipos de osciladores (que na construção TFD representam o setor físico e o setor virtual do Espaço de Hilbert duplicado).

No caso bosônico tem-se

$$\alpha(\theta) = \cosh(\theta)\, a - \sinh(\theta)\, \tilde{a}^{\dagger} \tag{2.58}$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = \cosh(\theta)\, \tilde{a} - \sinh(\theta)\, a^{\dagger} \tag{2.59}$$

$$\alpha^{\dagger}(\theta) = \cosh(\theta)\, a^{\dagger} - \sinh(\theta)\, \tilde{a} \tag{2.60}$$

$$\tilde{\alpha}^{\dagger}(\theta) = \cosh(\theta)\, \tilde{a}^{\dagger} - \sinh(\theta)\, a \tag{2.61}$$

e no caso fermiônico têm-se

$$\alpha(\theta) = \cos(\theta)\, a - \sin(\theta)\, \tilde{a}^{\dagger} \tag{2.62}$$

$$\tilde{\alpha}(\theta) = \cos(\theta)\, \tilde{a} - \sin(\theta)\, a^{\dagger} \tag{2.63}$$

$$\alpha^{\dagger}(\theta) = \cos(\theta)\, a^{\dagger} - \sin(\theta)\, \tilde{a} \tag{2.64}$$

$$\tilde{\alpha}^{\dagger}(\theta) = \cos(\theta)\, \tilde{a}^{\dagger} - \sin(\theta)\, a \tag{2.65}$$

Na construção TFD [7], [8], aos modos de Fourier dos campos físicos $a_k, a_k^{\dagger}$ se adiciona um setor não-físico $\tilde{a}_k, \tilde{a}_k^{\dagger}$ que representa excitações do reservatório térmico. Mediante a transformação de Bogoliubov de dois modos misturando osciladores de mesmo valor de k gerada pelo gerador $G_k(\beta)$, o vácuo transformado $|0(\beta)\rangle\rangle$, é tal que resulta em médias quânticas de operadores transformados do setor físico que podem ser interpretadas como médias térmicas cuja temperatura é definida pelo parâmetro da transformação de Bogoliubov.

Uma das principais vantagens desta técnica de termalização consiste no fato de que o parâmetro temporal é preservado de modo que é possível tratar a evoluo temporal de uma teoria à temperatura finita.

Capítulo 3

D-branas térmicas Magnetizadas em Compactificações Toroidais no Formalismo TFD Generalizado

3.1 Introdução

O entendimento dos estados de fronteira (D-Branas) em compactificações toroidais ($\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$) (p dimensões espaciais extendidas, d-p-1 compactificadas num toro e 1 dimensão temporal) é importante tanto do ponto de vista do desenvolvimento fundamental da teoria de cordas quanto para as suas aplicações. D-branas em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$ são de importância fundamental para a teoria de cordas uma vez que esta geometria com fluxos representa um dos poucos cenários onde é possível definir as cordas perturbativamente e as condições de fronteira serem resolvidas exatamente. Os sistemas de D-Branas magnetizadas em compactificações toroidais podem ainda ser usadas na "engenharia de configurações de D-Branas" que suportam campos de gauge quirais em 4 dimensões estendidas [9]. As D-Branas enroladas nos ciclos da seção compactificada T^{d-p-1} suportam grávitons em $\mathbb{R}^{(1,p)}$ através do mecanismo de Kaluza-Klein o qual é bastante útil para se fazer contato com os cenários de mundos de brana (Brane-Worlds). Resultados importantes já foram obtidos neste sentido, entre os quais podemos citar: a contrução de várias extensões do modelo padrão com 3 gerações de férmions quirais através das configurações de D9-Branas em orbifolds [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17]; a estabilização dos moduli com fluxos [18],[19]; a repercussão dos instantons e a métrica de Kähler nos multipletes quirais [20], [21], [22], [23]. Estes resultados estabelecem relações importantes entre teorias de campos em 4 dimensões e a fenomenologia das teorias de cordas. (Para mais detalhes sobre como as extensões do modelo padrão podem ser obtidas de D-Branas magnetizadas e vários exemplos ver [24] e suas referências. O enrolamento das D-Branas nos seis ciclos do espaço 10-dimensional representam um ingrediente fundamental nestes exemplos. D-Branas maximais magnetizadas em toros foram recentemente construídas em [25],[26], [27] seguindo o método de [28] e [29]. (Uma análise detalhada da estrutura topológica dos estados de fronteira em fibrados com grupos de gauge $U(N)$ foi feita em [26] e a dualidade T foi analisada em [30]). Além disso, um estudo generalizado de campos quânticos em compactificações toroidais foi realizado em [31].

A existência de uma estrutura microscópica das D-Branas magnetizadas sugere que estes objetos devem possuir uma termodinâmica intrínseca gerada pelas excitações das cordas fechadas que condensam no volume de mundo da Brana. Neste capítulo, o nós nos propomos explorar a termodinâmica das Branas por meio da construção de D-Branas térmicas em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$ e do cálculo de sua entropia mediante a hipótese de equíbrio termodinâmico local. A técnica para se construir os estados de D-Branas à temperatura finita a partir de estados de fronteira à temperatura zero foi sistematicamente desenvolvida em [32], [33], [34],[35] e [36] e seus vários aspectos foram revisados e discutidos em [37], [38], [39], [40] e [41]. Tal método baseia-se na abordagem já mencionada da como Dinâmica de Campos Térmicos (Thermo Field Dynamics - TFD) aplicada às teorias de campos à temperatura zero e já foi aplicado às teorias de cordas e à teoria de campos de cordas em [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54] e mais recentemente em [55], [56], [57], [58], [59]. Neste contexto, as D-Branas térmicas são definidas como os estados de fronteira da corda fechada térmica, que por sua vez, é obtida da corda à temperatura zero por meio de uma transformação de Bogoliubov térmica sobre os osciladores da corda. As funções termodinâmicas das D-Branas em equilíbrio são definidas como valores esperados dos correspondentes operadores da corda térmica no estado de fronteira. As propriedades estatísticas das cordas na presença de D-Branas já foram discutidas na literatura no contexto do formalismo de integrais de trajetórias [62], [63], [64], [65]. Entretanto a abordagem TFD à termodinâmica de D-Branas possui a vantagem de que estados de D-Brana térmicos podem ser explicitamente contruídos de modo semelhante à forma como se controem os estados na teoria à temperatura zero e observáveis estatísticos podem ser calculados como valores esperados de operadores nestes estados. Isto pode ser usado, por exemplo, para identificar os setores onde as simetrias são quebradas devido a efeitos térmicos (ver, por exemplo, [35].

A fim de se obter os estados de D-Branas térmicas em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times \mathbb{T}^{d-p-1}$, o método geral previamente desenvolvido para D-Branas em $\mathbb{R}^{(1,d)}$ deve ser modificado devido aos modos zero não-triviais que aparecem do enrolamento das cordas fechadas no setor toroidal. O modo zero, ou setor topológico, introduz um fator dependente da temperatura no vácuo térmico da corda. Nós mostramos que a termalização dos modos enrolados (winding modes) é diferente dos osciladores da corda e leva ao aparecimento de produtos de funções de Jacobi na função de partição, diferenciando-se portanto dos usuais produtos de distribuições de Bose-Einstein associados aos operadores de criação/aniquilação bosônicos. Como consequência, o vácuo do setor topológico da corda térmica bem como sua entropia não corresponde ao objetos da teoria à temperatura zero transformado pela ação do operador de Bogoliubov. Entretanto, nós mostramos que o mapa pode ainda pode ser estabelecido na forma operatorial mediante uma construção formal da álgebra (de Heisenberg) de operadores de criação e aniquilação para o número de voltas e o momento do centro de massa ao longo da seção compactificada.

A termodinâmica intrínseca às D-Branas magnéticas pode ser calculada sem qualquer campo de matéria. Entretanto, os campos de fundo neste tipo de sistema são necessários na estabilização dos moduli e no cancelamento dos tadpoles. Portanto nós consideramos o fundo genérico composto de configurações constantes do campo de Kalb-Ramond (KR) e do campo de gauge abeliano. Nós ainda impomos a hipótese simplificadora de que estes campos são frios, isto é, os valores médios das quantidades térmicas das cordas recebem destas configurações as mesmas contribuições que à temperatura zero. O caso mais geral quando os fluxos são termalizados em consequência da interação com as cordas termalizadas deve ser estudado posteriormente.

Neste capítulo, na seção 2 nós primeiramente revisamos a construção dos estados de D-Branas enroladas em compactificações toroidais à temperatura zero seguindo a exposição de [25]. O setor topológico destes estados, isto é, aquele correspondente às voltas das cordas fechadas e o momento do centro de massa nos ciclos de T^{d-p-1} é dado no caso de um par de ciclos (i, j) ao qual corresponde um específico setor do espaço de Hilbert $H_{(i,j)}$. Nós generalizamos esta solução para o espaço de Hilbert total incluindo todos os ciclos do toro. Uma vez que estamos interessados apenas nos graus de liberdade físicos, nós escolhemos trabalhar no gauge do cone de luz e nas coordenadas do cone de luz em $\mathbb{R}^{(1,p)}$. Na seção 3 nós construímos o vácuo térmico físico e os operadores de Bogoliubov para a corda bosônica. Os modos-zero não triviais mostram-se consequência do enrolamento das cordas fechadas nos ciclos da seção compactificada e da interação entre a corda e o campo de KR de fundo. Nós mostramos que os termos topológicos introduzem um fator dependente da temperatura no vácuo térmico mas deixa inalterada a forma dos operadores de Bogoliubov para os modos de oscilação da corda. Entretanto o parâmetro térmico é modificado com a inclusão de um parâmetro proporcional ao raio típico da compactificação. Em seguida nós generalizamos o formalismo TFD para os campos da corda em T^{d-p-1} de forma consistente com a invariância translacional da folha-mundo da corda em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$. O mapa entre o vácuo térmico e o vácuo à temperatura zero é dado na forma operatorial. No setor $\mathbb{R}^{(1,p)}$ o mapa é reduzido ao produto de operadores de Bogoliubov. No setor T^{d-p-1} por outro lado, surge um novo operador que nós escrevemos na forma de um produto de operadores de criação e aniquilação para o númeor de modos de enrolamento além do momento do centro de massa ao longo das direções compactas. Usando esta construção é possível definir o operador entropia e proceder com seu cálculo e o da energia livre da corda fechada tanto no setor de osciladores quanto no setor topológico. Na seção 4 nós construímos o estado de D-Branas magnéticas termalizadas por meio da aplicação do formalismo TFD generalizado desenvolvido na seção 3 e então calculamos a entropia da D-Brana.

3.2 D-Branas magnéticas a $T = 0$

Consideramos uma corda bosônica em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$ em presença de um campo de gauge abeliano A_μ e da 2-forma de Kalb-Ramond $B_{\mu\nu}$ e seja $G_{\mu\nu} = \{\eta_{ab}, G_{ij}\}$ a métrica do espaço alvo. Onde η_{ab} é a métrica de Minkowski $\mathbb{R}^{(1,p)}$ e G_{ij} é a métrica da seção toroidal T^{d-p-1}. Com isso, usamos a seguinte convenção de índices

$$\begin{aligned}
\mu, \nu &= 0, ..., \ d-1 \quad \in \mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1} \ , \\
a, b &= 0, ..., \ p \quad \in \mathbb{R}^{(1,p)} \ , \\
i, j &= p+1, ..., \ d \quad \in T^{d-p-1} \ .
\end{aligned}$$

Seguindo a notação usual, denotamos as coordenadas da corda bosônica por $X^\mu(\tau, \sigma)$. Os graus de liberdade físicos são fixados mediante a escolha de calibre do cone de luz $X^+ = \alpha' p_+ \tau$ no espaço alvo. Uma vez fixado o calibre, os índices correm apenas nas direções transversas $a, b = 2, ..., \ p \ \tilde{} \ \mathbb{R}^{(1,p)}$ e $\mu, \nu = 2, ..., \ d-1 \ \tilde{} \ \mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$.

A dinâmica clássica da corda bosônica pode ser derivada do seguinte funcional de ação

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left(\eta^{\alpha\beta} G_{\mu\nu} + \epsilon^{\alpha\beta} B_{\mu\nu} \right) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \tag{3.1}$$

onde $\alpha, \beta = 0, 1$, σ^{α} ˜ (τ, σ) e $\epsilon^{\alpha\beta}$ é o símbolo completamente anti-simétrico em duas dimensões com $\epsilon^{01} = 1$. As equações de movimento e condições de fronteira para o caso da corda fechada que emergem da ação (3.1) são respectivamente

$$\Box X^{\mu} = 0 \tag{3.2}$$

$$X^{\mu}(\tau, \sigma + \pi) = X^{\mu}(\tau, \sigma + \pi) + 2\pi R^{i} m^{i} \delta^{\mu i} \; . \tag{3.3}$$

Onde R^{i} é o raio de compactificação da coordenada X^{i}. As soluções do problema de fronteira podem admitir a seguinte decomposição de Fourier

$$X^{a}(\tau, \sigma) = x^{a} + 2\alpha' p^{a} \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left[\hat{a}^{a}_{n} e^{-2in(\tau - \sigma)} + \hat{b}^{a}_{n} e^{-2in(\tau + \sigma)} \right] , \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} X^{j}(\tau, \sigma) = x^{j} + \sqrt{\alpha'} \left[2\hat{m}^{j} \sigma + 2G^{jk} \left(\hat{n}_{k} - B_{kl} \hat{m}^{l} \right) \tau \right] p^{j} \tau \\ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left[\hat{a}^{j}_{n} e^{-2in(\tau - \sigma)} + \hat{b}^{j}_{n} e^{-2in(\tau + \sigma)} \right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $\hat{n}_{k}$ é o operador de número associado aos modos do centro de massa e $\hat{m}^{j} \in \mathbb{Z}$ é o operador que contabiliza o número de voltas da corda ao longo da direção compacta j . No que segue, nós procedemos com a normalização dos operadores da corda como operadores de criação/aniquilação usuais

$$\hat{a}^{\mu}_{m} = \sqrt{m} \hat{\alpha}^{\mu}_{m} \; , \; \hat{a}^{\mu}_{-m} = \sqrt{m} \hat{\alpha}^{\mu \dagger}_{m} \tag{3.6}$$

$$\hat{b}^{\mu}_{m} = \sqrt{m} \hat{\beta}^{\mu}_{m} \; , \; \hat{b}^{\mu}_{-m} = \sqrt{m} \hat{\beta}^{\mu \dagger}_{m} \tag{3.7}$$

para todo $m > 0$. O espaço de Hilbert físico é o produto tensorial dos espaços de Hilbert de todos os modos da corda fatorados pela condição de *level-matching* (invariância sob translações ao longo de σ)

$$G_{\mu\nu} \left[\hat{n}^{\mu} \hat{m}^{\nu} + \sum_{n > 0} n \left(\hat{\alpha}^{\dagger \mu}_{n} \hat{\alpha}^{\nu}_{n} - \hat{\beta}^{\dagger \mu}_{n} \hat{\beta}^{\nu}_{n} \right) \right] |\Psi_{phys}\rangle = 0 \tag{3.8}$$

onde os operadores $\hat{n}^{\mu}$ e $\hat{m}^{\nu}$ são zero ao longo das direções estendidas. As unidades foram escolhidas de modo que o quadrado do número de voltas contabilize a energia da corda em múltiplos do comprimento típico da corda $\varepsilon_s = l_s^{-1} = \left(\sqrt{\alpha'}\right)^{-1}$. O hamiltoniano total é dado pela soma das contribuições advindas do setor toroidal e do setor estendido. Se escolhemos o referencial do centro de massa em $\mathbb{R}^{p-1}$, os hamiltonianos são

$$\hat{H}^{\mathbb{R}} = \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} n : \left(\hat{\alpha}_n^{\dagger a} \hat{\alpha}_n^a + \hat{\beta}_n^{\dagger a} \hat{\beta}_n^a \right) : ; \tag{3.9}$$

$$\hat{H}^{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha'}} \left[G_{ij} \hat{m}^i \hat{m}^j + \left(\hat{n}_i - B_{ik} \hat{m}^k \right) G^{ij} \left(\hat{n}_j - B_{jl} \hat{m}^l \right) \right] + \frac{G_{ij}}{2} \sum_{n \neq 0} n : \left(\hat{\alpha}_n^{\dagger i} \hat{\alpha}_n^j + \hat{\beta}_n^{\dagger i} \hat{\beta}_n^j \right) : \ . \tag{3.10}$$

Como observado em [28], a fim de se obter o número correto de graus de liberdade do estado de fronteira supersimétrico nas direções compactas, é necessário tomar $\hat{H}^{\boldsymbol{T}}/2$ no hamiltoniano total.

O estado de D-Brana bosônica magnetizada $|B\rangle$ é definido pelas condições de fronteira no espaço de Hilbert da corda fechada. As condições de fronteira para o modo zero são dadas por

$$\hat{p}^a |B\rangle = 0 \ , \quad \left(\hat{n}_i - 2\pi\alpha' q F_{ij} \hat{m}^j \right) |B\rangle = 0 \tag{3.11}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Os campos da corda, por sua vez, se acoplam com o objeto invariante de calibre

$$\mathrm{B}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - 2\pi\alpha' q F_{\mu\nu} \ . \tag{3.12}$$

A invariância dos campos de calibre sob translações ao longo dos ciclos toroidais implica que as componentes do tensor intensidade de campo nestas direções sejam números inteiros $F_{ij} \in \mathbb{Z}$ [27] e [28]. Este acoplamento determina as condições de fronteira para os osciladores em termos de operadores de criação/aniquilação

$$\begin{aligned}\left[(\mathbf{1}+\mathrm{B})_{ab}\,\hat{\alpha}^{b}_{n}+(\mathbf{1}+\mathrm{B})^{T}_{ab}\,\hat{\beta}^{\dagger b}_{n}\right]|B\rangle &= 0 &(3.13)\\ \left[(\mathbf{1}+\mathrm{B})_{ab}\,\hat{\alpha}^{\dagger b}_{n}+(\mathbf{1}+\mathrm{B})^{T}_{ab}\,\hat{\beta}^{b}_{n}\right]|B\rangle &= 0 &(3.14)\\ \left(\varepsilon_{ij}\hat{\beta}^{j}_{n}+\varepsilon^{T}_{ij}\hat{\alpha}^{\dagger j}_{n}\right)|B\rangle &= 0 &(3.15)\\ \left(\varepsilon_{ij}\hat{\beta}^{\dagger j}_{n}+\varepsilon^{T}_{ij}\hat{\alpha}^{j}_{n}\right)|B\rangle &= 0 &(3.16)\end{aligned}$$

onde $n>0$ e $\varepsilon_{ij}=(G-\mathrm{B})_{ij}$. A solução das equações (3.13) e (3.14) pode ser fatorada da seguinte forma

$$|B\rangle=|B\rangle^{\mathbb{R}}_{osc}\otimes|B\rangle^{\mathbb{T}}_{osc}\otimes|B\rangle^{\mathbb{T}}_{top}\ . \qquad (3.17)$$

Os estados $|B\rangle^{\mathbb{R}}_{osc}$ e $|B\rangle^{\mathbb{T}}_{osc}$ são gerados apenas por osciladores e já são conhecidos na literatura [68] e [69]:

$$\begin{aligned}|B\rangle^{\mathbb{R}}_{osc} &= N_{p-1}(\mathrm{B})\left(\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\hat{\alpha}^{\dagger a}_{n}M_{ab}\hat{\beta}^{\dagger b}_{n}}\right)|0\rangle_{osc}\ , &(3.18)\\ |B\rangle^{\mathbb{T}}_{osc} &= N_{d-p-1}(\mathrm{B})\left(\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\hat{\alpha}^{\dagger i}_{n}G_{ik}\left(\varepsilon^{-1}\right)^{kl}\left(\varepsilon^{-1}\right)_{lj}\hat{\beta}^{\dagger j}_{n}}\right)|0\rangle_{osc}\ , &(3.19)\end{aligned}$$

onde as constantes de normalização $N_{p-1}(\mathrm{B})$ e $N_{d-p-1}(\mathrm{B})$ dependem dos campos de fundo e da tensão da brana e podem ser calculados a partir do diagrama do cilindro interpretado nos canais aberto e fechado da corda. O setor topológico $|B\rangle^{\mathbb{T}}_{top}$ do estado de fronteira é uma solução da equação (3.11) e possui a seguinte forma

$$|B\rangle^{\mathbb{T}}_{top}=\prod_{i=p+1}^{d-1}\sum_{n_i,m_i}\delta\left(n_i-2\pi\alpha' F_i^{k_i}m_{k_i}\right)|n_i\rangle\,|m_i\rangle\,. \qquad (3.20)$$

Daqui em diante nós usaremos a seguinte normalização dos auto-valores dos operadores momento e do número de voltas:

$$\begin{aligned}\langle p^a|\,|p'^b\rangle &= 2\pi\delta^{ab}\delta(p-p')\,,\\ \langle n_i|\,|n'_j\rangle &= \left(2\pi\sqrt{\alpha'}\right)^{1/2}\delta_{n_i,n'_j}\,,\\ \langle m^i|\,|m'^j\rangle &= \left(2\pi\sqrt{\alpha'}\right)^{1/2}\delta^{m^i,m'^j}\ . &(3.21)\end{aligned}$$

É interessante notar que (3.20) generaliza o estado contruído em [25] o qual satisfaz a equação (3.11) em apenas duas direções do toro. O estado de Dp-Brana plana mais geral é desta forma obtido para $p=d-1$.

3.3 Termodinâmica da corda fechada em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$

Os estados de fronteira da equação (3.17) descrevem condensados dos modos das cordas em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$. O nosso principal objetivo é calcular as D-branas magnéticas termalizadas e estudar suas propriedades termodinâmicas. Para isto, faz-se necessário generalizar o método desenvolvido em [32], [33] e [34] o qual tem sido usado no estudo das D-branas termalizadas em espaços completamente extendidos ao contexto das compactificações toroidais. É importante mencionar que este método por si só já generaliza a construção TFD a cordas fechadas e é o único conhecido que proporciona uma construção explícita dos estados de vácuo térmico e estados de fronteira térmicos.

No formalismo TFD, as propriedades termodinâmicas das D-Branas em variedades planas são estudadas na interação do sistema físico com um reservatório térmico. Esta interação, chamada de termalização, é descrita em termos dos operadores de Bogoliubov que atuam no espaço de Hilbert total da corda, o qual é dado pelo produto tensorial do espaço de Hilbert da corda fechada com uma cópia térmica da corda original denotada por um til. A corda til descreve os graus de liberdade do reservatório que interagem, um a um, com os graus de liberdade da corda física [7]. O operador de Bogoliubov mapeia o espaço de Hilbert total no espaço de Hilbert térmico que por sua vez possui uma estrutura de espaço de Fock; ou seja, os estados térmicos podem ser obtidos mediante a atuação de operadores de criação e aniquilação sobre o estado de vácuo térmico $|0(\beta)\rangle\rangle$ [7]. Entretanto, no caso da D-Brana magnética termalizada em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$ há um setor topológico extra do espaço de Hilbert da corda fechada como exposto na seção precedente. Não há prescrição de termalização de modos topológicos conhecida na literatura TFD , por este motivo, o objetivo desta seção é o de generalizarmos o método TFD para a corda em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$ e então determinar o operador térmico que realiza a termalização do setor topológico. Nós iremos calcular o vácuo térmico da corda fechada em presença de configurações constantes do campo de KR e campo de gauge abeliano partindo dos princípios da construção TFD.

3.3.1 O vácuo térmico da corda fechada

No formalismo TFD, o vácuo térmico de um sistema físico genérico em equilíbrio termodinâmico é definido postulando-se que para qualquer observável $\hat{A}$, a média estatística calculada no ensemble canônico é dada pelo valor esperado de $\hat{A}$ no estado de vácuo térmico

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = Z^{-1}\left(\beta_T\right) Tr\left[\hat{A} e^{-\beta_T \hat{H}}\right] = \left\langle 0\left(\beta_T\right)\right| \hat{A} \left|0\left(\beta_T\right)\right\rangle \tag{3.22}$$

onde $\beta_T = 1/k_B T$ e k_B é a constante de Boltzmann.

O vácuo térmico da corda em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$ pode ser obtido generalizando-se a prescrição TFD como segue. Uma vez que em (3.22) o traço é tomado sobre todos os estados físicos do sistema em consideração, no caso da teoria de cordas esta relação deve ser modificada de modo a gerar um estado térmico a partir de apenas estados físicos. A modificação consiste em impor o vínculo de que o traço seja tomado apenas sobre estados que satisfaçam a condição de level-matching. Esta condição é necessária e suficiente no caso da corda bosônica e no caso da corda supersimétrica no formalismo de Green-Schwarz [32], [35], [36], [57] e [59]. A generalização de (3.22) a uma construção do vácuo térmico a partir de estados físicos mostra-se

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{A} \right\rangle &= Z^{-1}\left(\beta_T\right)\sqrt{\alpha'}\int_0^1 d\lambda Tr\left[e^{-\beta_T \hat{H}(p^a,\ N,\ M,\ N_{osc})+2\pi i\hat{P}}\hat{A}\right] \\ &= \sqrt{\alpha'}\int d^{p-2}p\int_0^1 d\lambda \left\langle 0\left(\beta_T,\ \lambda,\ p^a\right)\right| \delta\left(\hat{P}=0\right)\hat{A}\left|0\left(\beta_T,\ \lambda,\ p^a\right)\right\rangle \ .\end{aligned} \tag{3.23}$$

A atuação do operador momento do centro de massa da corda $\hat{P} = \hat{L}_0^l - \hat{L}_0^r$ sobre os estados é definida pela relação (3.8). O traço sobre $\hat{P}$ envolve a integral sobre o multiplicador de Lagrange λ e a soma sobre os índices vetoriais no setor físico do espaço de Hilbert [35],[55]. A mesma integral deve ser tomada no lado direito da relação (3.23) onde o vácuo da corda térmica depende da variável λ. O hamiltoniano da corda $\hat{H}\left(p^a,\ N,\ M,\ N_{osc}\right)$ é dado pela soma dos dois operadores de (3.9) e (3.10). A função de partição da corda é o traço do operador identidade

$$Z\left(\beta_T\right) = \sqrt{\alpha'} \int d^{p-2}p \int_0^1 d\lambda Tr\left[e^{-\beta_T \hat{H}\left(p^a,\ N,\ M,\ N_{osc}\right)+2\pi i\hat{P}}\right]. \tag{3.24}$$

O vácuo da corda térmica $|0\left(\beta_T,\ \lambda,\ p^a\right)\rangle$ pertence ao espaço de Hilbert total

$$H_{phys}^{tot} = H_{phys} \otimes \tilde{H}_{phys}\ . \tag{3.25}$$

O vácuo térmico físico $|0\left(\beta_T,\ p^a\right)\rangle$ resulta então da projeção de $|0\left(\beta_T,\ \lambda,\ p^a\right)\rangle$ no subespaço de estados físicos do espaço de Hilbert. As projeções de H em H_{phys} e de $\tilde{H}$ em $\tilde{H}_{phys}$ são dadas pela condição de *level-matching* tanto para a corda física quanto para a corda til (reservatório térmico). Para simplificar a notação, nós introduzimos a convenção de multi-índices: M e N representam todos os momentos e número de voltas compactos respectivamente, enquanto N_{osc} representa todos os rótulos de osciladores tanto à esquerda quanto à direita ao longo de todas as direções de $\mathbb{R}^{(1,p)}$ e T^{d-p-1}:

$$|N\rangle = \bigotimes_{i=1}^{d-p-1} |n_i\rangle\ ;\quad |M\rangle = \bigotimes_{i=1}^{d-p-1} \left|m^i\right\rangle\ ;\quad |N_{osc}\rangle = \bigotimes_{n_1,\ n_2,\ \ldots=1}^{\infty} |n_1,\ n_2,\ \ldots\rangle \tag{3.26}$$

onde

$$\hat{n}_i\,|n_i\rangle = n_i\,|n_i\rangle\ ,\ \hat{m}^i\left|m^i\right\rangle = m^i\left|m^i\right\rangle\ . \tag{3.27}$$

Os estados da corda são dados por produtos tensoriais da forma

$$|N, M, N_{osc}\rangle = |N\rangle\,|M\rangle\,|N_{osc}\rangle\ . \tag{3.28}$$

O estado $|0\left(\beta_T,\ p^a\right)\rangle$ pode ser obtido da segunda igualdade em (3.22). A fim de computar a integral sobre λ a partir do traço, é necessário escolher uma forma explícita para a métrica. A seguir nós escolhemos T^{d-p-1} plano de modo que a métrica fica $G_{\mu\nu} = \left(\delta_{ab}, \frac{R^2}{\alpha'}\delta_{ij}\right)$ com R sendo o raio típico da compactificação. Sem perda de generalidade nós trabalhamos no referencial do centro de massa da corda em $\mathbb{R}^{(1,p)}$ de modo que $|0(\beta_T,\ p^a)\rangle|_{c.m.} = |0(\beta_T)\rangle$. Após algumas manipulações algébricas simples a relação (3.22) toma a seguinte forma

$$\langle 0(\beta_T)|\,\delta\left(\hat{P}=0\right)\hat{A}\,|0(\beta_T)\rangle = Z^{-1}(\beta_T)\sqrt{\alpha'}$$
$$\sum_{N,\ M,\ N_{osc}} e^{-\beta_T E(N,\ M,\ N_{osc})}\int_0^1 d\lambda e^{2\pi i\lambda P} A_{N,\ M,\ N_{osc};\ N,\ M,\ N_{osc}}\ . \quad (3.29)$$

Onde a notação $A_{N,\ M,\ N_{osc};\ N,\ M,\ N_{osc}}$ se refere aos elementos de matriz do operador $\hat{A}$ nos correspondentes estados da corda. Os autovalores do hamiltoniano $E(N,\ M,\ N_{osc})$ apresentam a seguinte forma

$$E(N,\ M,\ N_{osc}) = \frac{R^2}{2(\alpha')^{3/2}}\left[m^2+(n-Bm)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n>0}\left(E^{\mathbb{R}}_{l,n}+E^{\mathbb{R}}_{r,n}\right)+\frac{R^2}{2\alpha'}\sum_{n>0}\left(E^{\mathbb{T}}_{l,n}+E^{\mathbb{T}}_{r,n}\right), \quad (3.30)$$

onde a energia dos osciladores à esquerda e à direita é $E_* = nN_{*,n}$ com $* = l, r$. A energia dos modos zero é dada pelo primeiro termo de (3.30). A equação (3.29) define o vácuo térmico físico e deve valer para qualquer observável $\hat{A}$.

O vácuo térmico pode ser obtido de (3.29) da seguinte forma. Primeiramente notamos que a integral sobre λ pode ser vista como a representação integral de uma função delta dependente de multi-variáveis que, por sua vez, pode ser escrita em termos de funções ortogonais

$$\Psi_E(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2\pi iE\lambda} \quad , \quad \int_0^1 d\lambda \Psi^*_E(\lambda)\,\Psi_{E'}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\delta_{E,E'}\ . \quad (3.31)$$

Quando estas relações são aplicadas aos modos à esquerda e à direita, chega-se à condição de level-matching a qual deveria aparecer nos elementos de matriz de $\hat{A}$ no lado direito de (3.29) após realizada a integração em λ. Em seguida nós decompomos o vácuo da corda térmica na base de Fock tensorada com o setor do espaço de estados físicos que representa os momentos e os números de voltas nas direções compactas [7]

$$|0(\beta_T)\rangle\rangle = \sum_{N,\ M,\ N_{osc}}[f(\beta_T)]_{N,\ M,\ N_{osc}}\,|N,M,N_{osc}\rangle\,|N,M,N_{osc}\rangle^{\tilde{}} \quad (3.32)$$

onde $[f(\beta_T)]_{N,\ M,\ N_{osc}}$ são coeficientes complexos. Por substituição de (3.32) em (3.29), é possível mostrar que o vácuo térmico possui a seguinte forma

$$|0(\beta_T)\rangle\rangle = Z^{-1}(\beta_T) \sum_{N,\ M,\ N_{osc}} \exp\left[-\frac{\beta_T}{2} E(N,\ M,\ N_{osc})\right] |N, M, N_{osc}\rangle\, |N, M, N_{osc}\rangle^{\tilde{}} \quad . \tag{3.33}$$

A função de partição pode ser obtida a partir de (3.24) e da imposição de normalização do vácuo térmico. Num referencial inercial arbitrário, $Z(\beta_T)$ pode ser fatorada como

$$Z(\beta_T) = Z_0(\beta_T)\, Z_{top}(\beta_T)\, Z_{osc}(\beta_T)\,, \tag{3.34}$$

onde

$$Z_0(\beta_T) = \int d^{p-2} \left\langle k \left| \exp\left[-\frac{\beta_T}{2}\alpha' \hat{p}^2\right] \right| k \right\rangle, \tag{3.35}$$

$$Z_{top}(\beta_T) = \sum_{N,\ M} \left\langle N,\ M \left| \exp\left[-\beta_T \frac{R^2}{2(\alpha')^{3/2}} \left[\hat{m}^2 + (\hat{n} - B\hat{m})^2\right]\right] \right| N,\ M \right\rangle, \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} Z_{osc}(\beta_T) = &\sum_{N,\ M} \left\langle N_{osc} \left| \exp\left[-\frac{\beta_T}{2} \sum_{n>0} \left(\hat{N}_{l,n} + \hat{N}_{r,n}\right)\right] \right| N_{osc} \right\rangle \\ &+ \int_0^1 d\lambda \sum_{N_{osc}} \sum_{N} \left\langle N_{osc} \left| \exp\left[-i\pi\lambda \sum_{n>0} \left(\hat{N}_{l,n} - \hat{N}_{r,n}\right) + \frac{R^2}{(\alpha')^{3/2}} \hat{W}\right] \right| N_{osc} \right\rangle, \end{aligned} \tag{3.37}$$

onde $N_{osc} = \left(N^{\mathbb{R}}_{osc},\ N^{\mathbb{T}}_{osc}\right)$, $\hat{N}_{*,n} = \hat{N}^{\mathbb{R}}_{*,n} + \frac{R^2}{\alpha'}\hat{N}^{\mathbb{T}}_{*,n}$ com $* = r, l$ e $\hat{W} = \sum_{i,j} \delta_{ij} \hat{n}^i \hat{m}^j$. O fator $Z_0(\beta_T)$ é a integral gaussiana sobre os momenta do centro de massa no subespaço $\mathbb{R}^{p-1}$. No referencial do centro de massa $Z_0(\beta_T)$ não dá qualquer contribuição à função de partição. A integral sobre λ presente em $Z_{osc}(\beta_T)$ pode ser facilmente calculada usando as funções ortogonais em (3.31). As somas sobre $N = \left(N^{\mathbb{R}}_{l,n},\ N^{\mathbb{R}}_{r,n},\ N^{\mathbb{T}}_{l,n},\ N^{\mathbb{T}}_{r,n}\right)$ se reduzem a somas sobre osciladores à esquerda devido à condição de level-matching

$$\mathbb{R} \ :\ N^{l,a}_{osc} = N^{r,a}_{osc} \tag{3.38}$$

$$\mathbb{T} \ :\ N^{l,j}_{osc} = N^{l,j}_{osc} + \frac{12R^2W}{(d-p-1)(\alpha')^{3/2}} \tag{3.39}$$

para $d > p+1$. Para o subespaço plano $d = p+1$ tem-se $W = 0$ já que este é o setor estendido. Consequentemente $Z_{osc}(\beta_T)$ possui a seguinte forma

$$Z_{osc}(\beta_T) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\beta_T n}\right)^{1-p} \left(1 - e^{-\beta_T R^2/2\alpha'}\right)^{p+1-d} \quad . \tag{3.40}$$

A função de partição topológica $Z_{top}(\beta_T)$ também pode ser calculada e mostra-se que ela é dada pela relação

$$Z_{top}(\beta_T) \,\tilde{}\, \sum_M \prod_{j=p+1}^{d-1} \vartheta\left(-\frac{i\beta_T R^2}{4\pi (\alpha')^{3/2}} C^j_k m^k;\ \frac{i\beta_T R^2}{2\pi (\alpha')^{3/2}} \left[\frac{2(d-p)+22}{d-p-1}\right]\right) \times \exp\left[-\frac{\beta_T R^2}{2\pi (\alpha')^{3/2}} \left(m_j^2 + \left(B_{jk} m^k\right)\right)\right], \quad (3.41)$$

onde $C^j_k = \delta^j_k + B^j_k$ e $\vartheta(z;\tau)$ é a função teta de Jacobi. Vale ressaltar que $Im\tau > 0$ tanto em $d = 10$ quanto em $d = 26$ para $d > p + 1$ como requerido pela definição da função teta. Coletando-se os resultados acima e levando-se em consideração as relações de normalização para os momenta (3.21) é possível inferir que o vácuo térmico é dado por

$$\begin{aligned}|0(\beta_T)\rangle\rangle = {} & (2\pi)^{\frac{3-d}{2}} (\alpha')^{\frac{3-2p}{4}} R^{\frac{p+1-d}{2}} (\beta_T)^{\frac{p-2}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\beta_T n}\right)^{1-p} \left(1 - e^{-\beta_T R^2/2\alpha'}\right)^{p+1-d} \\ & \times \sum_M \prod_{j=p+1}^{d-1} \vartheta\left(-\frac{i\beta_T R^2}{4\pi (\alpha')^{3/2}} C^j_k m^k;\ \frac{i\beta_T R^2}{2\pi (\alpha')^{3/2}} \left[\frac{2(d-p)+22}{d-p-1}\right]\right) \\ & \times \exp\left[-\frac{\beta_T R^2}{2\pi (\alpha')^{3/2}} \left(m_j^2 + \left(B_{jk} m^k\right)\right)\right]^{-1/2} \\ & \times \sum_{N,\ M,\ N_{osc}} \exp\left[-\frac{\beta_T}{2} E(N,\ M,\ N_{osc})\right] |N, M, N_{osc}\rangle\, |N, M, N_{osc}\rangle^{\tilde{}}\ . \quad (3.42)\end{aligned}$$

Alguns comentários são pertinentes neste momento. Uma forma de se compreender a equação (3.40) vem quando recordamos que a energia do n-ésimo modo em espaços planos é $\epsilon_n = n$. Então pode-se ver que os osciladores do setor toroidal devem ser dados por

$$\epsilon'_n = \frac{R^2 n}{2\alpha'},\ \forall n > 0.$$

Outra interpretação da relação (3.40) é a de que os modos da corda no toro se comportam como se estivessem em presença de uma temperatura efetiva $T' = 2\alpha' T/R^2$. Certamente este não é o caso já que a corda como um todo deve está em equilíbrio termodinâmico. Entretanto é importante compreender esta questão pois o maior problema relacionado à termalização dos modos da corda em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$, ou seja, a termalização dos osciladores da corda, é resolvido pela relação (3.42). De fato, é possível ver em (3.40) que o mapa dos modos da corda à temperatura zero nos modos da corda à temperatura finita é realizado pelos operadores de Bogoliubov. Ao longo das direções $\mathbb{R}^{(1,p)}$ os operadores de Bogoliubov são os do espaço plano

$$\hat{G}(\beta_T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=2}^{d-1} \hat{G}_n^{\mu}(\beta_T), \qquad \hat{G}_n^{\mu}(\beta_T) = \hat{G}_{l,n}^{\mu}(\beta_T) + \hat{G}_{r,n}^{\mu}(\beta_T) \tag{3.43}$$

$$\hat{G}_{l,n}^{\mu}(\beta_T) = -i\theta_n(\beta_T)\left(\hat{\alpha}_n^{\mu\dagger}\widehat{\tilde{\alpha}}_n^{\mu\dagger} - \hat{\alpha}_n^{\mu}\widehat{\tilde{\alpha}}_n^{\mu}\right), \tag{3.44}$$

$$\hat{G}_{r,n}^{\mu}(\beta_T) = -i\theta_n(\beta_T)\left(\hat{\beta}_n^{\mu\dagger}\widehat{\tilde{\beta}}_n^{\mu\dagger} - \hat{\beta}_n^{\mu}\widehat{\tilde{\beta}}_n^{\mu}\right). \tag{3.45}$$

A função $\theta_n(\beta_T)$ depende da temperatura e da frequência. Portanto possui a mesma forma tanto em $\mathbb{R}^{(1,p)}$ quando em $\mathbb{T}^{d-p-1}$, a dizer,

$$\cosh\theta_n(\beta_T) = \left(1 - e^{-\beta_T n}\right)^{-1/2}. \tag{3.46}$$

Entretanto, para a sub-variedade $\mathbb{T}^{d-p-1}$ o argumento de $\theta_n(\beta_T)$ deve ser substituído por $\theta_n(\beta_T R^2/2\alpha')$. A forma da função $\theta_n(\beta_T)$ dada pela relação (3.46) permanece inalterada sob a multiplicação da variável de temperatura pelo fator $R^2/2\alpha'$. Disto segue que a fim de termalizar os modos da corda em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$ basta aplicar o mesmo método válido no espaço plano estendido com com a diferença de que a temperatura é reescalada na seção compactificada.

O segundo problema importante de ser considerado no sistema da corda em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times \mathbb{T}^{d-p-1}$ é o da termalização dos modos topológicos, processo que não é definido dentro do formalismo TFD usual. De fato, na abordagem TFD a termalização repousa na estrutura do espaço de Fock do espaço de Hilbert associado aos osciladores ao passo que tal estrutura não existe no setor topológico. A partir de (3.42) é possível notar que o setor topológico não é mapeado na representação de estados térmicos por uma transformação de Bogoliubov. É possível fatorar o vácuo térmico como

$$|0(\beta_T)\rangle\rangle = \beta_T^{\frac{p-2}{2}} |0(\beta_T)\rangle\rangle_{top} \sum_{N_{osc}} e^{\frac{-\beta_T}{2}E(N_{osc})} |N_{osc}\rangle |N_{osc}\rangle^{\tilde{}} \ . \tag{3.47}$$

Com a finalidade de encontrar o mapa entre $|0\rangle\rangle_{top}$ e $|0\left(\beta_T\right)\rangle\rangle_{top}$ nós introduzimos a seguinte álgebra $\left\{\hat{n}_i,\ \hat{n}_i^+,\ \hat{n}_i^-\right\}$:

$$\left[\hat{n}_i^+, \hat{n}_j^-\right] = 0,\ \left[\hat{n}_i, \hat{n}_j^+\right] = \hat{n}_i^+ \delta_{ij},\ \left[\hat{n}_i, \hat{n}_j^-\right] = -\hat{n}_i^- \delta_{ij} \tag{3.48}$$

com

$$\left(\hat{n}_i^+\right)^\dagger = \hat{n}_i^-,\ \left(\hat{n}_i\right)^\dagger = \hat{n}_i\ . \tag{3.49}$$

A ação dos operadores acima sobre os estados $\{|n_i\rangle\}$ é definida pelas seguintes realações:

$$\hat{n}_i\,|n_i\rangle = n_i\,|n_i\rangle \tag{3.50}$$

$$\hat{n}_i^+\,|n_i\rangle = |n_i + 1\rangle \tag{3.51}$$

$$\hat{n}_i^-\,|n_i\rangle = |n_i - 1\rangle \tag{3.52}$$

Os operadores $\hat{n}_i^+$ e $\hat{n}_i^-$ portanto criam e destroem respectivamente os quanta de momento do centro de massa ao longo da direção i com autovalores arbitrários $n_i \in \mathbb{Z}$. Uma álgebra idêntica $\left\{\hat{m}_i,\ \hat{m}_i^+,\ \hat{m}_i^-\right\}$ pode ser introduzida com a finalidade de descrever o incremento ou decréscimo do número de voltas da corda com os mesmos valores ilimitados. Consequentemente, o vácuo topológico pode ser escrito como

$$|0\left(\beta_T\right)\rangle\rangle_{top} = \hat{\Omega}\left(\beta_T\right)|0\rangle\rangle_{top}, \tag{3.53}$$

onde

$$\hat{\Omega}\left(\beta_T\right) = Z_{top}^{-1/2}\left(\beta_T\right)\sum_{N,\ M}\prod_{j=p+1}^{d-1}\exp\left[-\frac{\beta_T}{2}E_0\left(N,\ M\right)\right]\left[\hat{n}_i^{\pm}\widehat{\tilde{n}}_i^{\pm}\right]^{|n_i|}\left[\hat{m}_i^{\pm}\widehat{\tilde{m}}_i^{\pm}\right]^{|m_i|}\ , \tag{3.54}$$

onde para valores negativos de n_i e m_i nos multi-indices M e N, respectivamente, o último fator operatorial consta dos $\hat{n}_i^-$ e similarmente para os m's. Com isso, o operador $\hat{\Omega}\left(\beta_T\right)$

mapeia o vácuo topológico à temperatura zero no estado térmico

$$
\begin{aligned}
|0(\beta_T)\rangle\rangle_{top} \quad \sim \quad & \left\{ \sum_M \prod_{j=p+1}^{d-1} \vartheta \left(-\frac{i\beta_T R^2}{4\pi (\alpha')^{3/2}} C_k^j m^k ;\ \frac{i\beta_T R^2}{2\pi (\alpha')^{3/2}} \left[\frac{2(d-p)+22}{d-p-1} \right] \right) \right. \\
& \times \exp \left[-\frac{\beta_T R^2}{2\pi (\alpha')^{3/2}} \left(m_j^2 + \left(B_{jk} m^k \right) \right) \right]^{-1/2} \\
& \times \sum_{N,\ M} \exp \left[-\frac{\beta_T}{2} E_0 (N,\ M) \right] |N, M\rangle \, |N, M\rangle^{\tilde{}} \quad , \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

onde a energia do modo zero é

$$
E_0 (N,\ M) = \frac{R^2}{2 (\alpha')^{3/2}} \left[(m)^2 + (n - Bm)^2 \right] . \qquad (3.56)
$$

Logo, a solução para a termalização do setor topológico da corda é a relação (3.55), que em última análise segue como consequência do postulado fundamental da construção TFD, expresso na relação (3.23). A expressão (3.55) representa a generalização do formalismo TFD ao setor topológico das cordas fechadas e define os estados térmicos para os momenta do centro do massa e números de voltas em $\mathbb{T}^{d-p-1}$, respectivamente. Ainda, nós explicitamos a forma do mapa $\hat{\Omega}(\beta_T)$ entre o vácuo topológico à temperatura zero e o respectivo estado à temperatura finita em termos da álgebra (3.48). O operador $\hat{\Omega}(\beta_T)$ representa a generalização do operador de Bogoliubov $\hat{G}(\beta_T)$ ao setor topológico.

3.3.2 Termodinâmica da corda térmica fechada

As variáveis termodinâmicas da corda térmica fechada podem ser calculadas a partir da função de partição calculada na seção precedente. Entretanto, este procedimento não pode ser realizado no caso da D-Brana térmica uma vez que na derivação de (3.40) e (3.41) foi usado apenas o estado de vácuo térmico. Outra possibilidade é calcular as variáveis termodinâmicas a partir da entropia. Partindo da relação (3.29), basal no formalismo TFD, a entropia da corda pode ser atribuída ao valor esperado do operador entropia no vácuo térmico

$$\frac{1}{k_B} S\left(\beta_T\right) = \langle\langle 0\left(\beta_T\right)|\, \hat{K}\left(\beta_T\right) |0\left(\beta_T\right)\rangle\rangle, \tag{3.57}$$

onde $|0\left(\beta_T\right)\rangle\rangle$ é dado pela equação (3.42). A análise da sub-seção anterior mostra que no referencial do centro de massa, os graus de liberdade da corda organizam-se como uma soma direta de uma contribuição advinda dos osciladores e uma contribuição topológica, disto resulta uma entropia aditiva

$$\hat{K}\left(\beta_T\right) = \hat{K}_{osc}\left(\beta_T\right) + \hat{K}_{top}\left(\beta_T\right). \tag{3.58}$$

De acordo com o método TFD [7], o operador entropia correspondente aos osciladores da corda $\hat{K}_{osc}\left(\beta_T\right)$ relaciona-se com o operador de Bogoliubov (3.44) e (3.45) pela relação que segue

$$e^{-i\hat{G}(\beta_T)} = e^{-\frac{1}{2}\hat{K}(\beta_T)} \exp\left[\sum_{n,\mu}\left(\hat{\alpha}_n^{\mu\dagger}\widehat{\tilde{\alpha}}_n^{\mu\dagger} + \hat{\beta}_n^{\mu\dagger}\widehat{\tilde{\beta}}_n^{\mu\dagger}\right)\right]. \tag{3.59}$$

A forma explícita do operador $\hat{K}\left(\beta_T\right)$ pode ser obtida da equação acima e é dada pelas seguintes relações

$$\hat{K}_{osc}\left(\beta_T\right) = \hat{K}^{\mathbb{R}}_{osc}\left(\beta_T\right) + \hat{K}^{\mathbb{T}}_{osc}\left(\beta_T\right) \tag{3.60}$$

$$\hat{K}^{\mathbb{R}}_{osc}\left(\beta_T\right) = -\sum_{a=2}^{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\hat{N}^a_{l,n} + \hat{N}^a_{r,n}\right)\ln\left[\frac{e^{-\beta_T n}Z_n\left(\beta_T\right)}{e^{-\beta_T n}Z_n\left(\beta_T\right)+1}\right] - \ln\left[e^{-\beta_T n}Z_n\left(\beta_T\right)\right]\right\} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}\hat{K}^{\mathbb{T}}_{osc}\left(\beta_T\right) = -\frac{R^2}{2\alpha'}\sum_{j=p+1}^{d-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\left(\hat{N}^j_{l,n} + \hat{N}^j_{r,n}\right)\ln\left[\frac{e^{-\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}n}Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)}{e^{-\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}n}Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)+1}\right] \\ - \ln\left[e^{-\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}n}Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{3.62}$$

onde $Z_n\left(\beta_T\right)$ é a função de partição de um único oscilador. Note que a equação (3.60) define apenas a entropia dos osciladores da corda fechada. Para o reservatório, um operador semelhante pode ser construído trocando-se os operadores da corda pelos respectivos operadores til. Entretanto, uma vez que estamos interessados na entropia da corda, não é necessário contabilizar a entropia do reservatório. Inserindo a equação (3.61) e (62) em

(3.57) e com alguma álgebra, é possível mostrar que a entropia dos osciladores da corda fechada apresenta a seguinte forma:

$$\begin{aligned}S_{osc}(\beta_T) &= (p-1)\,k_B\sum_{n=1}^{\infty}\left[\beta_T n e^{-\beta_T n} Z_n(\beta_T) - \ln Z_n(\beta_T)\right]\\ &+ (p-d+1)\,k_B\frac{R^2}{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\beta_T R^2 n e^{-\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}n}}{2\alpha'} Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right) - \ln Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.63}$$

onde N_n é o autovalor do operador número de modos com frequência n. O fator 2 se deve à contribuição dos setores à esquerda e à direita respectivamente. Nós notamos que no raio crítico $R_0 = \sqrt{2\alpha'}$ a equação (3.63) reproduz a entropia de $d-2$ campos escalares não-massivos e transversos.

A contribuição do setor topológico à entropia da corda (3.57) , em contrapartida, não pode ser calculada da mesma forma que a entropia dos osciladores pois não há no formalismo TFD um operador de entropia sensível à entropia carregada nos modos topológicos da corda em $\mathbb{T}^{d-p-1}$. A seguir procedemos com a construção deste operador. Ou seja, construímos o objeto $\hat{K}_{top}(\beta_T)$ de modo que

$$S_{top}(\beta_T) = -\frac{\partial}{\partial T}\left[k_B T \ln Z_{top}(\beta_T)\right] = k_B \langle\langle 0(\beta_T)|\, \hat{K}_{top}(\beta_T)\, |0(\beta_T)\rangle\rangle. \tag{3.64}$$

Usando (3.41) na relação acima chega-se a

$$\begin{aligned}\hat{K}_{top}(\beta_T) &= (2\pi R)^{p+1-d}\left[\frac{\beta_T}{2}\hat{H}_{top}\exp\left(\frac{\beta_T}{2}\hat{H}_{top}\right)\right.\\ &\left. + (2\pi R)^{p+1-d}\, Z_{top}(\beta_T)\ln\left(Z_{top}(\beta_T)\right)\exp\left(\beta_T \hat{H}_{top}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.65}$$

onde

$$\hat{H}_{top} = \hat{H}_0 + \frac{R^2}{2(\alpha')^{3/2}}\hat{W}, \tag{3.66}$$

e $\hat{H}_0$ representa a parte topológica do hamiltoniano com autovalores $E_0(N,M)$ dados pela relação (3.56). O valor esperado no vácuo térmico do objeto $\hat{K}_{top}(\beta_T)$ de fato reproduz corretamente a entropia topológica

$$S_{top} = k_B \ln Z_{top}(\beta_T) + \frac{k_B\beta_T}{2} Z_{top}^{-1}(\beta_T)\sum_{N,M} E_{top}(N,M)\, e^{\frac{-\beta_T}{2}E_{top}(N,M)}, \tag{3.67}$$

onde

$$E_{top}\left(N,M\right)=\frac{R^{2}}{2\left(\alpha'\right)^{3/2}}\left[\left(m\right)^{2}+\left(n-Bm\right)^{2}\right]+\frac{R^{2}}{2\left(\alpha'\right)^{3/2}}W \tag{3.68}$$

são os autovalores do operador $\hat{H}_{top}$.

A energia livre da corda fechada térmica pode ser computada como o valor esperado no vácuo térmico do operador

$$\hat{F}\left(\beta_T\right)=\hat{H}-\frac{1}{\beta_T}\hat{K}\left(\beta_T\right), \tag{3.69}$$

onde $\hat{K}=\hat{K}_{top}+\hat{K}_{osc}$ e $\hat{H}=\hat{H}^{\mathbb{R}}+\hat{H}^{\mathbb{T}}$. O cálculo do valor esperado de $\hat{F}\left(\beta_T\right)$ no vácuo térmico resulta

$$\begin{aligned}F\left(\beta_T\right)=\beta_T^{-1}&\left[\left(p-1\right)\sum_{n=1}^{\infty}\ln Z_n\left(\beta_T\right)\right.\\&\left.+\left(d-p-1\right)\frac{R^2}{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\ln Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)+\ln Z_{top}\left(\beta_T\right)\right].\end{aligned} \tag{3.70}$$

Novamente se vê que no raio crítico, a energia livre total é a soma da energia livre de $d-2$ campos escalares sem massa e a energia livre topológica para os modos zero. Na ausência de direções compactas a energia livre é dada apenas pelos modos de oscilação.

3.4 D-Branas Térmicas Magnetizadas

Nesta seção nós derivamos os estados de D-Brana térmica magnetizada em $\mathbb{R}^{(1,p)}\times\mathbb{T}^{d-p-1}$ aplicando a generalização do formalismo TFD que derivamos da seção anterior. Os estados de D-Branas (estados de fronteira) em espaços planos não compactos foram definidos em [32] como sendo os estados no espaço de estados da corda térmica que satisfazem as condições de fronteira que satisfazem as mesmas condições de fronteira de Dirichlet e Neumann válidas à temperatura zero. Isto significa impor dois conjuntos de condições de fronteira: um para os graus de liberdade da corda e outro para os graus de liberdade do reservatório. A mesma definição pode ser aplicada na geometria $\mathbb{R}^{(1,p)}\times\mathbb{T}^{d-p-1}$ e os estados de D-Branas térmicas magnéticas podem ser calculados. A partir do estado de fronteira térmico é possível calcular a entropia e a energia livre das D-Branas magnéticas à temperatura finita como o valor esperado do operador entropia e do operador de energia livre, respectivamente, no estado de D-Brana térmica magnética.

3.4.1 Estados de D-Branas térmicas magnéticas

A termalização da corda fechada é descrita pelos operadores $\hat{\Omega}(\beta_T)$ e $\hat{G}(\beta_T)$ que mapeiam o sistema total à temperatura zero no sistema à temperatura finita, o que implica que os operadores genéricos da corda $\hat{O}$ passam a ter um atributo de temperatura $\hat{O}(\beta_T)$ de acordo com

$$\hat{O} \longrightarrow \hat{O}(\beta_T) = \left[\hat{\Omega}(\beta_T) \otimes e^{i\hat{G}(\beta_T)}\right] \hat{O} \left[e^{-i\hat{G}(\beta_T)} \otimes \hat{\Omega}^{-1}(\beta_T)\right]. \tag{3.71}$$

No espaço-tempo plano estendido, os estados de D-branas foram definidos por dois conjuntos de condições de fronteira obtidos da densidade lagrangiana à temperatura finita e impostas tanto no espaço de Hilbert original da corda quanto no espaço que representa a cópia térmica [32]. É possível generalizar esta definição às D-branas magnetizadas em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times \mathbb{T}^{d-p-1}$ e então procurar soluções $|B(\beta_T)\rangle\rangle$ das seguintes equações :

$$\begin{aligned}
\hat{p}^a(\beta_T)\,|B(\beta_T)\rangle\rangle &= 0, & (3.72)\\
\left(\hat{n}_i - 2\pi\alpha' q F_{ij}\hat{m}^j\right)(\beta_T)\,|B(\beta_T)\rangle\rangle &= 0, & (3.73)\\
\left[(\mathbf{1}+\boldsymbol{B})_{ab}\,\hat{\alpha}_n^{\dagger b}(\beta_T) + (\mathbf{1}+\boldsymbol{B})^T_{ab}\,\hat{\beta}_n^{b}(\beta_T)\right]|B(\beta_T)\rangle\rangle &= 0, & (3.74)\\
\left[(\mathbf{1}+\boldsymbol{B})_{ab}\,\hat{\alpha}_n^{b}(\beta_T) + (\mathbf{1}+\boldsymbol{B})^T_{ab}\,\hat{\beta}_n^{\dagger b}(\beta_T)\right]|B(\beta_T)\rangle\rangle &= 0, & (3.75)\\
\left[\varepsilon_{ij}\hat{\alpha}_n^{\dagger j}(\beta_T) + \varepsilon^T_{ij}\hat{\beta}_n^{j}(\beta_T)\right]|B(\beta_T)\rangle\rangle &= 0, & (3.76)\\
\left[\varepsilon_{ij}\hat{\alpha}_n^{j}(\beta_T) + \varepsilon^T_{ij}\hat{\beta}_n^{\dagger j}(\beta_T)\right]|B(\beta_T)\rangle\rangle &= 0, & (3.77)
\end{aligned}$$

para todo $n > 0$. Nas equações acima os operadores à temperatura finita foram obtidos mediante a aplicação do mapa (3.71) aos operadores de fronteira nas equações (3.11) e

(3.13) – (3.16). Equações similares podem ser escritas para os operadores da corda til. A fim de resolver o conjunto de equações acima, primeiramente notamos que a solução pode ser fatorada tal como

$$|B(\beta_T)\rangle\rangle = |B(\beta_T)\rangle\rangle_{top} \otimes |B(\beta_T)\rangle\rangle_{osc} \,. \tag{3.78}$$

Donde pode-se mostrar que $|B(\beta_T)\rangle\rangle_{top}$ e $|B(\beta_T)\rangle\rangle_{osc}$ podem ser escritos em termos do estado de D-brana à temperatura zero de acordo com

$$\begin{aligned} |B(\beta_T)\rangle\rangle_{top} &= \hat{\Omega}(\beta_T)\,|B\rangle\rangle_{top}^{\mathbb{T}} = \hat{\Omega}(\beta_T)\,|B\rangle\rangle_{top}\left|\tilde{B}\right\rangle\rangle_{top}^{\mathbb{T}}, & (3.79)\\ |B(\beta_T)\rangle\rangle_{osc} &= e^{i\hat{G}(\beta_T)}\,|B\rangle\rangle_{osc} = e^{i\hat{G}(\beta_T)}\,|B\rangle\rangle_{osc}\left|\tilde{B}\right\rangle\rangle_{osc}, & (3.80) \end{aligned}$$

onde $|B\rangle\rangle_{top}^{\mathbb{T}}$ e $|B\rangle\rangle_{osc} = |B\rangle\rangle_{osc}^{\mathbb{R}}\,|B\rangle\rangle_{osc}^{\mathbb{T}}$ pertencem, respectivamente, ao espaço de Hilbert total à temperatura zero e representam duas cópias dos estados dados nas equações (3.20) e (3.18) e (3.19). As relações (3.79) e (3.80) representam o mapeamento da D-brana magnetizada desde o espaço de Hilbert à temperatura zero na D-brana magnética termalizada no espaço de Hilbert da corda fechada térmica. Com alguma álgebra encontra-se a solução do sistema (3.72) – (3.77)

$$\begin{aligned} |B(\beta_T)\rangle\rangle = {}& N_{p-1}^2(\boldsymbol{B})\,N_{d-p-1}^2(\boldsymbol{B})\prod_{i=p+1}^{d-1}\sum_{n_i}\delta_{n_i-2\pi\alpha' F_i^{k_i} m_{k_i}}\left[\hat{n}_i^{\pm}\hat{\tilde{n}}_i^{\pm}\right]^{|n_i|}(\beta_T)\left[\hat{m}_i^{\pm}\hat{\tilde{m}}_i^{\pm}\right]^{|m_i|}(\beta_T)\\ &\otimes\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\left(\hat{\alpha}_n^{\dagger a}(\beta_T)\,M_{ab}\hat{\beta}_n^{\dagger b}(\beta_T)+\hat{\tilde{\alpha}}_n^{\dagger a}(\beta_T)\,\tilde{M}_{ab}\hat{\tilde{\beta}}_n^{\dagger b}(\beta_T)\right)\right]\right\}|0(\beta_T)\rangle\rangle_{osc}^{\mathbb{R}}\\ &\otimes\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{R^2}{\alpha'}\left(\hat{\alpha}_n^{\dagger i}\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)S_{ij}\hat{\beta}_n^{\dagger j}\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.+\hat{\tilde{\alpha}}_n^{\dagger i}\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)S_{ij}\hat{\tilde{\beta}}_n^{\dagger j}\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)\right)\right]\right\}\left|0\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)\right\rangle\Big\rangle_{osc}^{\mathbb{T}} \end{aligned} \tag{3.81}$$

onde $S_{ij} = \left(\varepsilon^{-1}\right)_i^l\left(\varepsilon^T\right)_{lj}$. A relação acima representa a D-Brana magnética termalizada e mostra que a D-brana magnética à temperatura finita é um vetor que mora no espaço de Hilbert térmico total. Na ausência de setor topológico (todas as direções extendidas) e com $d = p+1$ o estado acima se reduz ao estado de D-Brana térmica já conhecido na literatura [32] e [33]. É instrutivo notar que os campos de fundo em (3.81) não são termalizados, isto é, os valores médios dos correspondentes estados de cordas são tomados iguais aos que ocorrem à temperatura zero. Consequentemente, pode-se afirmar que $M_{ab} = \tilde{M}_{ab}$ e $\varepsilon_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}$. Assim como os demais estados de cordas, não há interpretação simples de $|B(\beta_T)\rangle\rangle$ em termos de D-branas magnéticas à temperatura zero.

3.4.2 Termodinâmica de D-branas magnetizadas

As propriedades termodinâmicas das D-Branas magnetizadas à temperatura finita podem ser derivadas de sua entropia. A entropia e a energia livre das D-branas térmicas são definidas como valores esperados dos operadores $\hat{K}$ e $\hat{F}$, construídos na seção 3, no estado $|B(\beta_T)\rangle\rangle$:

$$\frac{1}{k_B} S_D(\beta_T) = \langle\langle B(\beta_T)| \hat{K}(\beta_T) |B(\beta_T)\rangle\rangle. \tag{3.82}$$

Daí ainda é possível escrever

$$\begin{aligned} S_D(\beta_T) &= S_D(\beta_T)_{(osc)} + S_D(\beta_T)_{(top)} && (3.83) \\ S_D(\beta_T) &= S_D^{\mathbb{R}}(\beta_T) + S_D^{\mathbb{T}}(\beta_T) \ . && (3.84) \end{aligned}$$

Os cálculos são longos mas simples. O principal detalhe técnico envolve o fato de que a transformação de bogoliubov pode ser linearizada [7]:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_n^a &= \sqrt{Z_n(\beta_T)}\hat{\alpha}_n^a(\beta_T) + \sqrt{Z_n(\beta_T) - 1}\hat{\tilde{\alpha}}_n^{\dagger a}(\beta_T), && (3.85) \\ \hat{\alpha}_n^{\dagger a} &= \sqrt{Z_n(\beta_T)}\hat{\alpha}_n^{\dagger a}(\beta_T) + \sqrt{Z_n(\beta_T) - 1}\hat{\tilde{\alpha}}_n^{a}(\beta_T), && (3.86) \end{aligned}$$

com relações similares válidas para os operadores $\hat{\beta}_n^a$. Note que quem $\mathbb{T}^{d-p-1}$, β_T deve ser substituído por $\beta_T R^2/2\alpha'$. A contribuição dos osciladores de $\mathbb{R}^{p-1}$ à entropia da D-brana magnetizada é

$$
\begin{aligned}
S_D\left(\beta_T\right)^{\mathbb{R}}_{(osc)} &= -2V^{\mathbb{T}}_{D,\ top} V^{\mathbb{T}}_{D,\ osc} k_B \\
&\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a=2}^{p} \left[\prod_{m \neq n=1}^{\infty} \prod_{c \neq a=2}^{p} \prod_{d=2}^{p} \left[\sum_{k^m_{cd}=0}^{\infty} \left(M_{cd}\right)^{2k^m_{cd}} \right] \right] \right. \\
&\times \left[2Z_n\left(\beta_T\right) - 1\right] \ln\left(\frac{e^{-\beta_T n} Z_n\left(\beta_T\right)}{e^{-\beta_T n} Z_n\left(\beta_T\right) + 1} \right) \left[\sum_{s^n_{ad}=0}^{\infty} s^n_{ad} \left(M_{ad}\right)^{2s^m_{ad}} \right] \\
&+ (p-1) V^{\mathbb{R}}_{D,\ osc} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[Z_n\left(\beta_T\right) - 1\right] \ln\left(\frac{e^{-\beta_T n} Z_n\left(\beta_T\right)}{e^{-\beta_T n} Z_n\left(\beta_T\right) + 1} \right) \right. \\
&\left. \left. + \ \ln\left(e^{-\beta_T n} Z_n\left(\beta_T\right) + 1\right) \right\} \right\} . \qquad (3.87)
\end{aligned}
$$

Onde $V^{\mathbb{T}}_{D,\ top}$, $V^{\mathbb{T}}_{D,\ osc}$ e $V^{\mathbb{R}}_{D,\ osc}$ são as normas dos estados $|B\left(\beta_T\right)\rangle\rangle^{\mathbb{T}}_{top}$, $|B\left(\beta_T\right)\rangle\rangle^{\mathbb{T}}_{osc}$ e $|B\left(\beta_T\right)\rangle\rangle^{\mathbb{R}}_{osc}$ respectivamente. Uma vez que o operador de Bogoliubov é unitário, a norma dos estados de fronteira térmicos associados aos osciladores apresenta o mesmo valor do estado à temperatura zero. Os termos $\left(M_{cd}\right)^{2k^m_{cd}}$ representam os elementos de matriz $M_{cd} = \tilde{M}_{cd}$ elevados à potência $2k^m_{cd}$. O fator global 2 em frente a todos os termos deve-se à contabilidade idêntica de entropia nos setores à esquerda e à direita. A entropia dos osciladores em $\mathbb{T}^{d-p-1}$ pode ser calculada da mesma forma com que foi obtida $S_D\left(\beta_T\right)^{\mathbb{R}}_{osc}$ e o resultado é formalmente o mesmo:

$$
\begin{aligned}
S_D\left(\beta_T\right)^{\mathbb{T}}_{(osc)} &= -2V^{\mathbb{R}}_{D,\ top} V^{\mathbb{R}}_{D,\ osc} k_B \\
&\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=p+1}^{d-1} \left[\prod_{m \neq n=1}^{\infty} \prod_{l \neq i=p+1}^{d-1} \prod_{r=p+1}^{d-1} \left[\sum_{k^m_{lr}=0}^{\infty} \left(S_{lr}\right)^{2k^m_{lr}} \right] \right] \right. \\
&\times \left[2Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right) - 1\right] \ln\left(\frac{e^{-\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'} n} Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)}{e^{-\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'} n} Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right) + 1} \right) \left[\sum_{t^n_{ir}=0}^{\infty} t^n_{ir} \left(S_{lr}\right)^{2t^n_{ir}} \right] \\
&+ (d-p-1) V^{\mathbb{T}}_{D,\ osc} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right) - 1\right] \ln\left(\frac{e^{-\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'} n} Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right)}{e^{-\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'} n} Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right) + 1} \right) \right. \\
&\left. \left. + \ln\left(e^{-\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'} n} Z_n\left(\frac{\beta_T R^2}{2\alpha'}\right) + 1\right) \right\} \right\} . \qquad (3.88)
\end{aligned}
$$

A contribuição do setor topológico à entropia pode ser calculado das relações (3.65) e

(3.81):

$$
\begin{aligned}
S_D\left(\beta_T\right)_{top} = {} & R^{p+1}\alpha'^{\frac{d-p-1}{2}} V^{\mathbb{R}}_{D,osc} V^{\mathbb{T}}_{D,osc} k_B Z^{-1}_{top}\left(\beta_T\right) \\
& \times \left\{ \sum_{N,M}^{\infty} \sum_{K,S}^{p+1} \left(2\pi R\right)^{p+1-d} Z_{top}\left(\beta_T\right) \ln Z_{top}\left(\beta_T\right) \exp\left[\beta_T E_{top}\left(N \pm K, M \pm S\right)\right] \right. \\
& \left. \qquad + \frac{\beta_T}{2} E_{top}\left(N \pm K, M \pm S\right) \exp\left[\frac{\beta_T}{2} E_{top}\left(N \pm K, M \pm S\right)\right]\right\}. \qquad (3.89)
\end{aligned}
$$

A soma das entropias (3.87), (3.88) e (3.89) representa a entropia da D-Brana magnetizada à temperatura finita em $\mathbb{R}^{(1,p)} \times T^{d-p-1}$. Este resultado pode ser usado para o cálculo dos outros potenciais termodinâmicos associados à D-brana da forma usual visto que se esta se encontra em equilíbrio termodinâmico.

Capítulo 4

Dinâmica fora do Equilíbrio de Cordas em Fundo do Tipo onda Plana Dependente do Tempo

4.1 Introdução

Entender a dinâmica das cordas numa quantidade tão grande quanto possível de geometrias constitui um passo essencial no desenvolvimento da teoria de cordas bem como na formulação de suas novas aplicações e testes. Em particular, espera-se obter importantes informações a respeito de propriedades semi-clássicas da interação gravitacional na teoria de cordas tais como a reação da matéria à métrica de fundo do espaço-tempo, às singularidades cosmológicas às condições iniciais em cosmologia bem como sua evolução. Uma vez que não existem métodos gerais disponíveis para uma exploração sistemática da física das cordas em geometrias arbitrárias [74], apenas algumas poucas geometrias tem sido abordadas pelas técnicas semi-clássicas.

Uma das características das variedades nas quais é possível explorar a física das cordas com métodos semi-clássicos é o fato de possuírem vetores de Killing tipo-tempo pelo menos localmente. Essas variedades podem ser generalizadas para espaços-tempo dependentes do tempo juntamente com campos não-massivos advindos do setor de cordas fechadas. Entre esses exemplos, a classe de espaços-tempo do tipo onda plana dependente do tempo tem recebido especial atenção ultimamente. Pode-se dizer que existem pelo menos três razões que justificam o estudo destas geometrias nas teorias de cordas. Em primeiro lugar elas podem ser relacionadas a cenários cosmológicos, cordas e D-Branas através do limite de Penrose-Grüven como descrito em [75]. Em segundo lugar, as ondas planas possuem a propriedade interessante de gerarem geometrias conformes para as cordas, nas quais é possível sua quantização canônica [76] e [77]. Em terceiro lugar, as técnicas usadas para quantizar as cordas em *backgrounds* do tipo onda plana podem ser aplicadas em outras situações com estrutura de simetria semelhante tais como backgrounds do tipo luz [78] e backgrounds do tipo Kasner [79], [80], [81] (ver artigo de revisão recente [82] e suas referências). Um fato notável é que as simetrias dos cenários de onda plana possibilitam o estudo de problemas envolvendo singularidades cosmológicas mediante o uso das técnicas simples de quantização perturbativa das cordas.

A fim de entender a dinâmica das cordas nas proximidades de singularidades cosmológicas, ou as singularidades das soluções do tipo onda plana dependente do tempo, é fundamental investigar os aspectos térmicos da teoria de cordas no correspondente *background*. No caso estático, os aspectos térmicos podem ser estudados sob a hipótese de equilíbrio termodinâmico e por consequência, as quantidades termodinâmicas de interesse podem ser derivadas da função de partição estatística da corda. Em contrapartida, a hipótese de equilíbrio térmico em backgrounds dependentes do tempo levam à conclusão de que nas proximidades de uma singularidade as cordas possuem representações canônicas inequivalentes ao longo do tempo [83]. Em geral, a necessidade de diferentes teorias para diferentes valores do parâmetro temporal sinaliza uma transição de fase entre os dois valores limites. Análises extensivas da temperatura sob a hipótese de equilíbrio térmico em backgrounds dependentes do tempo foram levadas a cabo em [84], [85], [86], [87], [88], [89],

[90], [91], [92] onde é mostrado que a temperatura de Hagedorn no espaço de Minkowski poderia ser interpretada como uma temperatura limite ou temperatura crítica ou mesmo a dependência dos modos de oscilação com a temperatura.

Os resultados obtidos até agora mediante o uso de diferentes técnicas de teorias de campos à temperatura finita indicam, que nestes casos, a hipótese de equilíbrio térmico é no máximo válida localmente e em regiões assintoticamente longe da singularidade. De modo geral o que ocorre nestes casos é que a interação entre o campo gravitacional e os modos das cordas envolve uma troca de energia que depende do tempo. Por consequência, as frequências dos modos das cordas tornam-se funções do tempo e por isso a corda não pode manter seu equilíbrio térmico.

A dependência temporal das frequências de oscilação leva a efeitos significativos na teoria. Por exemplo a função de dois pontos da teoria a temperatura finita apresenta a seguinte forma

$$G\left(x,y\right) = G_0\left(x,y\right) - \frac{i}{2} sign_C\left(t_x - t_y\right)\rho\left(x,y\right), \tag{4.1}$$

onde $G_0\left(x,y\right)$ é a função de 2 pontos da teoria estatística e C é um contorno fechado a tempo real. Quando em equilíbrio térmico, verifica-se que $\rho\left(x,y\right) \sim G_0\left(x,y\right)$, enquanto que fora do equilíbrio, a função espectral $\rho\left(x,y\right)$ não é um múltiplo de $G_0\left(x,y\right)$. Portanto, os argumentos heurísticos bem como os cálculos em teoria de campos no equilíbrio sugerem que ensembles de cordas em *backgrounds* dependentes do tempo devem ser tomados como sistemas fora do equilíbrio.

Na literatura existem poucas tentativas de estudo das cordas fora do equilíbrio mesmo em *backgrounds* simples, em grande parte devido às dificuldades inerentes à teoria de campos fora do equilíbrio. Entretanto uma vez que as cordas podem ser resolvidas por métodos canônicos em backgrounds do tipo onda plana dependente do tempo, torna-se legítima a procura por uma descrição das cordas em termos de ensembles de osciladores fora do equilíbrio. Aparentemente, os poucos trabalhos na literatura que exploram este problema o fazem pelo viés da teoria de Liouville-von-Neumann [93], [94], [95] (baseado na generalização do teorema do invariante de Lewis-Riesenfeld [96]) que recentemente tem sido usada para mapear a mecânica quântica dependente do tempo em fluxos do grupo de renormalização, para lidar com o limite Penrose-Güven de pilhas de D-Branas assim como a solução de Pilch-Warner [97]. O mesmo método foi usado para analisar o espectro das cordas no limite de Penrose-Güven de ondas planas em backgrounds de NS5-Branas em [98] e para construir o operador densidade das supercordas tipo IIB no background de onda plana invariante de escala com singularidade em [99] onde foi mostrado que o comportamento Hagedorn das cordas é o mesmo apresentado em espaço-tempos sem curvatura. Todavia, os resultados obtidos até agora não são completos já que fornecem uma descrição simples em termos de osciladores sem explicar a dinâmica fora do equilíbrio dos campos de cordas e a forma como devem ser calculados os observáveis da corda térmica a partir destes observáveis.

Neste capítulo propomos uma nova formulação da dinâmica das cordas fora do equilíbrio em backgrounds do tipo onda plana dependente do tempo baseado na construção da *Dinâmica de Campos Térmicos Fora do Equilíbrio* (*Non-EquilibriumThermo Field Dynamics - NETFD*) [7]. O formalismo chamado *Dinâmica de Campos Térmicos* (Thermo Field Dynamics - TFD) é um formalismo operatorial canônico em tempo real no qual as médias térmicas em equilíbrio termodinâmico são calculadas não por manipulações do operador densidade mas, ao contrário, atribuídas ao valor esperado da respectiva quantidade no vácuo renormalizado por efeitos térmicos (vácuo térmico) o qual obedece a condição de estado térmico definida no espaço de estados duplicado (espaço térmico). A estrutura matemática do espaço térmico é a do produto direto de duas cópias idênticas do espaço de Hilbert à temperatura zero sobre o campo de funções dependentes da temperatura e provido de uma involução denominada conjugação-til. A interpretação física dos vetores térmicos é a de graus de liberdade expressos em termos de quasi-partículas til e não-til. Em particular, o espaço térmico contém um grupo de objetos invariantes sob a involução e sob translações temporais que é isomórfico ao $SO(1,1)$ no caso dos bósons e ao $SO(2)$ no caso fermiônico. A escolha de uma específica transformação de Bogoliubov equivale à escolha de um estado de vácuo térmico definido como o condensado dos respectivos pares de modos til e não-til. Isso acontece porque os operadores de Bogoliubov emaranham os setores til e não-til de forma a produzir amplitudes que equivalem à distribuição térmica [7]. O formalismo TFD em equilíbrio foi aplicado à teoria de cordas e à teoria de campos de cordas em espaço-tempos de curvatura nula em [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [100], [49], [50], [51], [52], [53]. Mais recentemente, o formalismo tem sido usado para calcular a termodinâmica de cordas em *backgrounds* estáticos [54], [55], [56], [57], [58], [40], [41] e para construir estados de D-Branas térmicas e calcular suas funções termodinâmicas em [32], [33], [34], [35], [36], [59], [60] (ver [37], [38], [39] para revisões) . Em [1] o TFD em equilíbrio foi generalizado para acomodar o setor topológico das cordas e D-Branas em $R^{1,p} \times T^{d-p-1}$.

O NETFD é um formalismo canônico de tempo real no qual as correlações fora do equilíbrio podem ser calculadas a partir de estados e operadores que possuem uma estrutura algébrica muito simples. Basicamente o formalismo mantém a estrutura algébrica de estados e operadores do TFD. Os vetores térmicos são interpretados enquanto graus de liberdade térmicos do sistema fora do equilíbrio e podem ser construídos na representação de Fock do espaço térmico o qual é uma solução da equação mestra

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|0\left(t\right)\right\rangle = \hat{H}\left|0\left(t\right)\right\rangle \ . \tag{4.2}$$

A equação acima é a equação de Schrödinger com tempo de evolução infinitezimal gerado pelo operador [103], [104], [105], [106]

$$\hat{H} = H - \tilde{H} \tag{4.3}$$

em que H e $\tilde{H}$ são os hamiltonianos do setor físico (sem til) e não-físico (com til) respectivamente. A interpretação física do sinal negativo é a de que o setor não físico representa as oscilações do reservatório térmico com o qual o sistema físico interage e é uma característica dos processos térmicos na descrição TFD [7]. Ainda, o sinal também mostra que o vácuo térmico fora do equilíbrio é geralmente instável e dependente do tempo. Entretanto ainda é possível definir um conjunto de operadores de criação e aniquilação com frequências dependentes do tempo em ambos os setores de modo que o vácuo térmico seja canonicamente definido para qualquer valor do parâmetro de tempo [7]. Uma vez que a dependência temporal é carregada tanto pelos estados quanto pelos operadores, é possível por meio de uma transformação de Bogoliubov dependente no tempo, definir um conjunto de operadores independentes do tempo, com os quais então é possível definir de estados de quase-partícula. Estes permitem o cálculo das funções de correlação para os operadores dependentes do tempo no vácuo das quase-partículas invariantes no tempo com ou sem interações [7]. A generalização relativística do formalismo foi trabalhada recentemente em [107],[108].

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 2 nós revisamos brevemente a estrututura canônica da corda livre no background de onda-plana dependente do tempo seguindo [77]. Após fixação de gauge, a corda pode ser reduzida a um ensemble de osciladores com frequências dependentes do tempo não-interagentes nas coordenadas de Brinkmann. Explorando esta estrutura, nós construímos na seção 3 os operadores de Bogoliubov dependentes do tempo e o vácuo das quasi-partículas, o qual é independente do tempo. Na seção 4 nós construímos as funções de correlação dependentes do tempo para a corda térmica. Mostramos que estas funções de correlação contêm as matrizes de transição entre o instante inicial $t = -\infty$ e o instante da singularidade $t = 0$. No contexto da NETFD, a matriz de transição é definida em termos do Hamiltoniano de interação entre os setores til e não-til e um contratermo que é responsável pela evolução temporal dos operadores número. Uma Expansão de Dyson-Schwinger dupla é possível neste caso. Nós computamos as correlações em ordem zero de perturbação. Finalmente, com o intuito de tornar o capítulo auto-consistente, nós coletamos alguns resultados importantes sobre o NETFD na seção 4.5.

4.2 Cordas sobre fundos de onda plana

Nesta seção nós revisamos a quantização canônica da corda fechada livre sobre fundo de onda plana dependente do tempo [77] e [82] e estabelecemos as notações. No que segue, nós estaremos usando as coordenadas de Brinkmann, em termos das quais o *background* em questão pertence à seguinte classe

$$ds^2 = 2dx^+dx^- - \lambda\left(x^+\right)x^ix^idx^+dx^+ + dx^idx^i \; ; \tag{4.4}$$

$$\varphi = \varphi\left(x^+\right) \; . \tag{4.5}$$

Onde x^+ e x^- representam as coordenadas do cone de luz no espaço-tempo e x^i com $i = 2,\ 3,\ ...,\ D$ as coordenadas transversas. A presença do dilaton φ compensa a contribuição métrica ao tensor de Ricci de modo a garantir que o fundo seja conformalmente plano. No caso de ondas planas com singularidade, a função $\lambda\left(x\right)$ comporta-se como $\lambda\left(x\right) \longrightarrow kx^{-2} + O\left(x^r\right)$ no limite em que $x \longrightarrow 0$, onde $k \in \mathbb{R}$ e $r > 2$. Para $k > 0$ a massa é positiva e o dilaton toma a seguinte forma

$$\varphi\left(x^+\right) = \varphi_0 - Cx^+ + \frac{(D-2)\,k}{2}\ln\left(x^+\right), \tag{4.6}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ e D é a dimensão do espaço alvo. Com esta estrutura de fundo a ação da corda possui a forma geral

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\left[h^{\alpha\beta}\left(\sigma\right)g_{\mu\nu}\left(x\right)\partial_\alpha x^\mu\left(\sigma\right)\partial_\beta x^\nu\left(\sigma\right) + \frac{\alpha'}{2}R^{(2)}\left(\sigma\right)\varphi\left(\sigma\right)\right], \tag{4.7}$$

onde $\sigma^\alpha \sim \left(\sigma^0, \sigma^1\right) = \left(\tau, \sigma\right)$ são as coordenadas da folha-mundo da corda, $h^{\alpha\beta}$ é a métrica da folha-mundo, $x^\mu\left(\sigma\right)$ são os graus de liberdade da corda, $g_{\mu\nu}\left(x\right)$ é a métrica do espaço alvo definida em (4.4) com $\mu, \nu = +,\ -,\ 2,\ 3,\ ...,\ D$, e $R^{(2)}$ é o escalar de Ricci em duas dimensões. As simetrias da ação (4.7) são fixadas mediante imposição de $\partial_\alpha h_{\alpha\alpha} = 0$ e o gauge do cone de luz $x^+ = \alpha' p^+ \tau$.

A solução geral das equações de movimento obtidas mediante extremização de (4.7) admitem a seguinte decomposição de Fourier

$$x^j(\tau,\sigma) = x_0^j + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n>0}\frac{1}{n}\left\{F_n(\tau)\left(\alpha_n^j e^{2in\sigma} + \beta_n^i e^{-2in\sigma}\right)\right.$$
$$\left. -F_n^*(\tau)\left(\alpha_n^{j\dagger} e^{-2in\sigma} + \beta_n^{j\dagger} e^{2in\sigma}\right)\right\}, \quad (4.8)$$

em que os operadores de criação e aniquilação são normalizados como modos da corda ao invés de modos de oscilação e as funções $F_n(\tau)$ são combinações lineares das funções de Bessel como segue

$$F_n(\tau) = e^{\frac{-1\pi\nu}{2}}\sqrt{n\pi\nu}\left[J_{\nu-1/2}(2\pi\tau) - iY_{\nu-1/2}(2\pi\tau)\right], \quad (4.9)$$

onde

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4k}\right). \quad (4.10)$$

a ordem da funo de Bessel.

Os modos do centro de massa da corda podem ser escritos em termos de osciladores independentes do tempo como segue

$$x_0^j(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\alpha'}{2(2\nu-1)}}\left[\left(\alpha_0^j + \alpha_0^{j\dagger}\right)\tau^{1-\nu} - 2i\left(\alpha_0^j - \alpha_0^{j\dagger}\right)\tau^{\nu}\right], \; k \neq \frac{1}{4}\;, \\ \sqrt{\frac{\alpha'\tau}{2}}\left[\left(\alpha_0^j + \alpha_0^{j\dagger}\right) - 2i\left(\alpha_0^j - \alpha_0^{j\dagger}\right)\ln\tau\right], \; k = \frac{1}{4}\;. \end{cases} \quad (4.11)$$

O hamiltoniano da corda no calibre do cone de luz apresenta a seguinte estrutura de osciladores

$$H = \frac{\alpha'}{2}\sum_{i=2}^{D}\left[\left(p_0^i\right)^2 + \frac{k}{4\alpha'^2\tau^2}\left(x_0^i\right)^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\Omega_n(\tau)\left(\alpha_n^{\dagger i}\alpha_n^i + \beta_n^{\dagger i}\beta_n^i\right) - \Phi_n(\tau)\,\alpha_n^i\beta_n^i - \Phi_n^{\dagger}(\tau)\,\alpha_n^{\dagger i}\beta_n^{\dagger i}\right] \quad (4.12)$$

onde os coeficientes dependentes do tempo $\Omega_n(\tau)$ e $\Phi_n(\tau)$ são dados pelas seguintes relações

$$\Omega_n(\tau) = \left(1+\frac{\nu}{4\tau^2n^2}\right)|F_n(\tau)|^2 + |G_n(\tau)|^2 - \frac{\nu}{2n\tau}\left[F_n^*(\tau)\,G_n(\tau) + F_n(\tau)\,G_n^*(\tau)\right], \quad (4.13)$$
$$\Phi_n(\tau) = \left(1+\frac{\nu}{4\tau^2n^2}\right)F_n(\tau)^2 + G_n(\tau)^2 - \frac{\nu}{2n\tau}F_n(\tau)\,G_n(\tau)\;. \quad (4.14)$$

É possível perceber das equações (4.13) e (4.14) que a corda se comporta como uma coleção infinita de osciladores auto-interagentes cujas frequências são dependentes do tempo mesmo quando a corda se propaga livremente. Ainda, os termos não-diagonais não misturam frequências diferentes e surgem dos coeficientes $\Omega_n(\tau)$ e $\Phi_n(\tau)$ que por sua vez advém do acoplamento com a métrica de fundo. O setor de interação deste Hamiltoniano deve, em geral, ser tratado não-perturbativamente, entretanto, como foi mostrado em [77], o Hamiltoniano pode ser escrito como uma coleção de osciladores dependentes do tempo por meio do seguinte mapa linear:

$$A_n^i(\tau) = u_n(\tau)\,\alpha_n^i + v_n^*(\tau)\,\beta_n^{\dagger i} \ , \tag{4.15}$$

$$A_n^{\dagger i}(\tau) = u_n^*(\tau)\,\alpha_n^{\dagger i} + v_n(\tau)\,\beta_n^i \ , \tag{4.16}$$

$$B_n^i(\tau) = u_n(\tau)\,\beta_n^i + v_n^*(\tau)\,\alpha_n^{\dagger i} \ , \tag{4.17}$$

$$B_n^{\dagger i}(\tau) = u_n^*(\tau)\,\beta_n^{\dagger i} + v_n(\tau)\,\alpha_n^i \ . \tag{4.18}$$

onde

$$u_n = \frac{1}{2}e^{2i\omega_n(\tau)\tau}\left[F_n(\tau) + \frac{1}{2\omega_n(\tau)}\partial_\tau F_n\right] \ , \tag{4.19}$$

$$v_n = \frac{1}{2}e^{-2i\omega_n(\tau)\tau}\left[-F_n(\tau) + \frac{1}{2\omega_n(\tau)}\partial_\tau F_n\right] \ . \tag{4.20}$$

Com esta definição os osciladores A e B satisfazem as relações de comutação canônicas:

$$\left[A_n^i(\tau), A_m^{\dagger j}(\tau)\right] = \left[B_n^i(\tau), B_m^{\dagger j}(\tau)\right] = \delta_{nm}\delta^{ij} \ , \tag{4.21}$$

$$\left[A_n^i(\tau), B_m^{\dagger j}(\tau)\right] = \left[A_n^i(\tau), B_m^j(\tau)\right] = 0 \ . \tag{4.22}$$

O objetivo da passagem aos osciladores A e B é o fato de que em termos deles, o Hamiltoniano (4.12) toma a forma diagonal

$$H = \frac{\alpha'}{2}\sum_{i=2}^{D}\left[\left(p_0^i\right)^2 + \frac{k}{4\alpha'^2\tau^2}\left(x_0^i\right)^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\omega_n(\tau)\left(A_n^{\dagger i}A_n^i + B_n^{\dagger i}B_n^i\right) + h(\tau)\right] \tag{4.23}$$

onde as frequências dependentes do tempo $\omega_n(\tau)$ são

$$\omega_n(\tau) = \sqrt{n^2 + \frac{k}{4\tau^2}} \ . \tag{4.24}$$

A função

$$h(\tau) = (D-2) \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(\tau) \tag{4.25}$$

desempenha o papel de uma constante de ordenamento normal, diverge logaritmicamente e pode ser cancelada por uma renormalização do dilaton para todos os valores de τ [77]. Os campos da corda x^i podem agora ser expandidos em termos dos osciladores A e B como segue

$$\begin{aligned} x(\tau,\sigma)^i = x_0^i(\tau) &+ i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\omega_n(\tau)}} \left\{ e^{-2i\omega_n(\tau)\tau} A_n^i(\tau)\, e^{2in\sigma} - e^{2i\omega_n(\tau)\tau} A_n^{\dagger i}(\tau)\, e^{-2in\sigma} \right\} \\ &+ i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\omega_n(\tau)}} \left\{ e^{-2i\omega_n(\tau)\tau} B_n^i(\tau)\, e^{-2in\sigma} - e^{2i\omega_n(\tau)\tau} B_n^{\dagger i}(\tau)\, e^{2in\sigma} \right\}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Em geral, os estados do tipo partícula associados aos osciladores dependentes do tempo são bem definidos apenas assintoticamente [7]. No caso em questão, existem dois espaços de Fock para obseradores no limite $\tau \longrightarrow \pm\infty$ (setores α e β) e, uma vez que os setores de osciladores são os mesmo daqueles definidos para a corda livre no espaço-tempo plano, os estados assintóticos podem ser construídos a partir do vácuo do cone de luz $|0(\pm\infty)\rangle_{\alpha,\beta}$ o qual é definido como auto-estado nulo dos operadores α_n^i e β_n^i. Ao longo da evolução temporal da corda, a representação da corda como livre deixa de ser válida devido às auto-interações relacionadas aos termos de mixing. Entretanto existem estados livres que podem ser obtidos a partir da excitação do vácuo dependente do tempo $|0(\tau)\rangle_{A,B}$ (auto-estado dos operadores A_n^i e B_n^i) na representação do espaço de Fock dada pelos osciladores A e B. A dinâmica do centro de massa da corda, por sua vez, não se reduz àquela que ocorre no caso da corda livre no espaço-tempo plano e é intrinsecamente ligada à solução do tipo onda plana.

4.3 Dinâmica das cordas fora do equilíbrio

O fato da teoria de cordas sobre o fundo do tipo onda plana dependente do tempo ser passível de solução mediante quantização canônica sugere que esta também deva se aplicar no caso da dinâmica fora do equilíbrio. Existem várias técnicas que podem ser usadas com este intuito. Como mencionado na introdução deste capítulo, nós iremos utilizar o formalismo NETFD devido à simplicidade da interpretação que pode ser dada aos estados, os operadores assim como as correlações fora do equilíbrio.

4.3.1 Campos das cordas à temperatura finita

O primeiro passo a ser dado com o fim de desenvolver o formalismo NETFD para o caso das cordas é o de definir os graus de liberdade térmicos. Os estados térmicos pertencem ao espaço térmico $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$ o qual é o produto direto entre duas cópias do espaço de Hilbert da teoria à temperatura zero. Em $\hat{\mathcal{H}}$ atuam operadores da forma $O \otimes \tilde{1}$ e $1 \otimes \tilde{O}$ os quais, mediante produto tensorial com o corpo dos $\mathbb{R}^2$ formam os chamados *dubletes térmicos* [7]. Começamos com a teoria na forma diagonal em que os campos da corda são dados pela relação (4.26). As coordenadas da corda til são obtidas aplicando-se a conjugação-til (ver seção 4.5 adiante).

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\tau,\sigma)^i = \tilde{x}_0^i(\tau) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\omega_n(\tau)}} \left\{ e^{-2i\omega_n(\tau)\tau} \tilde{A}_n^i(\tau)\, e^{2in\sigma} - e^{2i\omega_n(\tau)\tau} \tilde{A}_n^{\dagger i}(\tau)\, e^{-2in\sigma} \right\} \\ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\omega_n(\tau)}} \left\{ e^{-2i\omega_n(\tau)\tau} \tilde{B}_n^i(\tau)\, e^{-2in\sigma} - e^{2i\omega_n(\tau)\tau} \tilde{B}_n^{\dagger i}(\tau)\, e^{2in\sigma} \right\} \ . \quad (4.27) \end{aligned}$$

É conveniente absorver as exponenciais dependentes do tempo nos operadores canônicos por meio da seguinte redefinição:

$$e^{-2i\omega_n(\tau)\tau} A_n^i(\tau) = a_n^i(\tau) \ ; \ e^{2i\omega_n(\tau)\tau} A_n^{\dagger i}(\tau) = a_n^{\dagger i}(\tau) \quad (4.28)$$

e versões análogas para os outros setores. O dublete térmico da corda, denotado por $\phi^{i\alpha}(\tau,\sigma)$, pode ser obtido organizando-se os campos (4.26) e (4.27) na forma de um campo vetorial de duas componentes tal que a estrutura $a-b$ seja mantida

$$\begin{aligned}\phi^{i\alpha}(\tau,\sigma) &= \phi_0^{i\alpha}(\tau)+\phi_a^{i\alpha}(\tau,\sigma)+\phi_b^{i\alpha}(\tau,\sigma)\\ &= \phi_0^{i\alpha}(\tau)+i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n>0}\frac{1}{\sqrt{n\omega_n(\tau)}}\left\{a_n^{i\alpha}(\tau)\,e^{2in\sigma}-\left(s_3\bar{a}_n^i(\tau)^T\right)^\alpha e^{-2in\sigma}\right\}\\ &\quad -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n>0}\frac{1}{\sqrt{n\omega_n(\tau)}}\left\{b_n^{i\alpha}(\tau)\,e^{-2in\sigma}-\left(s_3\bar{b}_n^i(\tau)^T\right)^\alpha e^{2in\sigma}\right\}\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde α é o índice no $\mathbb{R}^2$, $\phi_0^{i\alpha}(\tau)$ representa os modos duplicados do centro de massa e s_3 é a matriz de Pauli. Ainda, acima foram introduzidas as seguintes notações

$$a_n^{i\alpha}(\tau)=\begin{pmatrix} a_n^i(\tau)\\ \tilde{a}_n^{\dagger i}(\tau)\end{pmatrix}\ ;\ \bar{a}_n^{i\alpha}(\tau)=\begin{pmatrix} a_n^{\dagger i}(\tau) & -\tilde{a}_n^i(\tau)\end{pmatrix}$$

assim como operadores similares para o setor b. O conjugado ao campo térmico dado pela relação (4.29) é obtido pela aplicação da operação definida na seção 4.5

$$\begin{aligned}\bar{\phi}^{i\alpha}(\tau,\sigma) &= \bar{\phi}_0^{i\alpha}(\tau)+\bar{\phi}_a^{i\alpha}(\tau,\sigma)+\bar{\phi}_b^{i\alpha}(\tau,\sigma)\\ &= \bar{\phi}_0^{i\alpha}(\tau)-i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n>0}\frac{1}{\sqrt{n\omega_n(\tau)}}\left\{\bar{a}_n^{i\alpha}(\tau)\,e^{-2in\sigma}-\left(a_n^i(\tau)^T s_3\right)^\alpha e^{2in\sigma}\right\}\\ &\quad +i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n>0}\frac{1}{\sqrt{n\omega_n(\tau)}}\left\{\bar{b}_n^{i\alpha}(\tau)\,e^{2in\sigma}-\left(b_n^i(\tau)^T s_3\right)^\alpha e^{-2in\sigma}\right\}\ .\end{aligned} \tag{4.30}$$

Onde se nota que as coordenadas do centro de massa não apresentam a mesma forma do dublete térmico dada pelo formalismo NETFD. Isto pode ser reparado com a seguinte reorganização das coordenadas

$$x_0^i(\tau)=U(\tau)\,\alpha_0^i+U^*(\tau)\,\alpha_0^{\dagger i}\ , \tag{4.31}$$

onde $U(\tau)$ é dado por

$$U(\tau)=\begin{cases}\sqrt{\frac{\alpha'}{2(2\nu-1)}}\tau^{1-\nu}-i\sqrt{\frac{2\alpha'}{2\nu-1}}\tau^\nu\ ,\ k\neq\frac{1}{4}\ ,\\ \sqrt{\frac{\alpha'\tau}{2}}-i\sqrt{2\alpha'\tau}\ln\tau\ ,\ k=\frac{1}{4}\ .\end{cases} \tag{4.32}$$

As coordenadas do centro de massa da corda til podem ser obtidas aplicando-se as regras de conjugação dadas no seção 4.5. Com isto, agora os campos térmicos podem ser generalizados também ao setor do centro de massa

$$\phi_0^{i\beta} = \begin{pmatrix} x_0^i(\tau) \\ \tilde{x}_0^i(\tau) \end{pmatrix} = U(\tau)\,\alpha_0^{i\beta} + U^*(\tau)\left(s_3\bar{\alpha}_0^{i\,T}\right)^\beta \quad . \tag{4.33}$$

Os dubletes térmicos definem uma família de representações dos campos térmicos parametrizada pelo tempo e contruída a partir do vácuo $\{|0(\tau)\rangle\}$. Qualquer uma destas representações pode ser mapeada na representação de quase-partícula independente do tempo por meio da transformação de Bogoliubov inversa (ver seção 4.5)

$$a_n^{i\alpha}(\tau) = \mathbf{B}_{a,n}^{-1}(\tau)^{\alpha\beta}\,\xi_n^\beta \ , \tag{4.34}$$

$$b_n^{i\alpha}(\tau) = \mathbf{B}_{b,n}^{-1}(\tau)^{\alpha\beta}\,\chi_n^\beta \ . \tag{4.35}$$

Com isto, a dinâmica fora do equilíbrio é determinada pela variação temporal dos dubletes térmicos $a_n^{i\alpha}(\tau)$ e $b_n^{i\alpha}(\tau)$ sobre o vácuo independente do tempo $|0\rangle$ definido por ξ_n^β e χ_n^β respectivamente. Os operadores de Bogoliubov podem ser diferentes nos setores a e b, respectivamente, mas são os mesmos em todas as direções transversais. Entretanto, uma vez que os dois setores diferem apenas na orientação dos modos ao longo da direção espacial da folha-mundo da corda, é possível tomar $\mathbf{B}_{a,n}(\tau) = \mathbf{B}_{b,n}(\tau) = \mathbf{B}_n(\tau)$. Disto resulta que o mapa de Bogoliubov para o modo k apresenta a forma dada na expressão (4.108) no calibre linear do dublete

$$\xi_k^{j\alpha} = \exp\left[i\int_{\tau_0}^{\tau} d\lambda\omega_k(\lambda)\right] B_k^{\alpha\beta}(\tau)\,a_k^{j\beta}(\tau) \ , \tag{4.36}$$

$$\bar{\xi}_k^{j\alpha} = \bar{a}_k^{j\beta}(\tau)\exp\left[-i\int_{\tau_0}^{\tau} d\lambda\omega_k(\lambda)\right]\left[B_k^{-1}\right]^{\beta\alpha}(\tau) \ , \tag{4.37}$$

$$\chi_k^{j\alpha} = \exp\left[i\int_{\tau_0}^{\tau} d\lambda\omega_k(\lambda)\right] B_k^{\alpha\beta}(\tau)\,b_k^{j\beta}(\tau) \ , \tag{4.38}$$

$$\bar{\chi}_k^{j\alpha} = \bar{b}_k^{j\beta}(\tau)\exp\left[-i\int_{\tau_0}^{\tau} d\lambda\omega_k(\lambda)\right]\left[B_k^{-1}\right]^{\beta\alpha}(\tau) \ , \tag{4.39}$$

em que as exponenciais positivas representam uma fase puramente complexa e

$$n_k(\tau)\,\delta_{k,l} = n_k^i(\tau)\,\delta_{k,l} = \langle 0(\tau)|\,a_k^{\dagger i}a_k^i\,|0(\tau)\rangle \ . \tag{4.40}$$

As condições de contorno iniciais são tomadas em $\tau_0 \longrightarrow -\infty$. Os operadores de quase-partícula dependente do tempo são obtidos multiplicando-se as equações (4.36) $-$ (4.39) pelas respectivas exponenciais inversas.

$$\xi_k^{j\alpha}(\tau) = B_k^{\alpha\beta}(\tau)\, a_k^{j\beta}(\tau) \ , \tag{4.41}$$

$$\bar{\xi}_k^{j\alpha}(\tau) = \bar{a}_k^{j\beta}(\tau)\left[B_k^{-1}\right]^{\beta\alpha}(\tau) \ , \tag{4.42}$$

$$\chi_k^{j\alpha}(\tau) = B_k^{\alpha\beta}(\tau)\, b_k^{j\beta}(\tau) \ , \tag{4.43}$$

$$\bar{\chi}_k^{j\alpha}(\tau) = \bar{b}_k^{j\beta}(\tau)\left[B_k^{-1}\right]^{\beta\alpha}(\tau) \ . \tag{4.44}$$

A representação de quase-partícula é baseada na equação de movimento a qual é satisfeita pelos modos da corda (4.8) e pela hipótese natural de que o sistema de osciladores evolui de acordo com a equação de Schrödinger com hamiltoniano dado por (4.23) na representação $a-b$ [77]. Tomando a primeira derivada de $\xi_k^{i\alpha}(\tau)$ com respeito a τ verifica-se que $a_k^{i\beta}(\tau)$ satisfaz a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\left[\left(i\frac{d}{d\tau} - \omega_k(\tau)\right) + P_k(\tau)\right]^{\alpha\beta} a_k^{j\beta}(\tau) = 0, \tag{4.45}$$

onde

$$P_k^{\alpha\beta}(\tau) = i\frac{dn_k(\tau)}{d\tau}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

As mesmas equações valem para os operadores $b_k^{j\beta}(\tau)$. Este é um resultado geral do NETFD para o conjunto de osciladores dependentes do tempo [7]. Segue de (4.45) que a evolução temporal da corda térmica obedece as seguintes relações

$$i\frac{d}{d\tau}a_k^{j\alpha}(\tau) = \left[a_k^{j\alpha}(\tau)\ ,\ \hat{H}_Q^a\right], \tag{4.47}$$

$$i\frac{d}{d\tau}\bar{a}_k^{j\alpha}(\tau) = \left[\bar{a}_k^{j\alpha}(\tau)\ ,\ \hat{H}_Q^a\right], \tag{4.48}$$

onde

$$\hat{H}_Q^a = \sum_{i=2}^{D}\sum_k\left[\omega_k(\tau)\,\delta^{\alpha\beta} + P_k^{\alpha\beta}(\tau)\right]\bar{a}_k^{i\alpha}(\tau)\, a_k^{i\beta}(\tau). \tag{4.49}$$

O segundo termo em (4.49) é o contratermo térmico que deve ser adicionado ao hamiltoniano como uma consequência do mapeamento de Bogoliubov dependente do tempo. Como pode ser visto da definição (4.46), este objeto se relaciona com a variação temporal do operador número $n_k(\tau)$ dado em (4.40) , com as mesmas relações válidas no setor b .Uma vez que o hamiltoniano total pode ser escrito como [7]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \hat{H}_Q + \hat{H}_I \ , \tag{4.50}$$

o contratermo $\hat{H}_Q(\tau) = \hat{H}_{cm}(\tau) + \hat{H}_Q^a(\tau) + \hat{H}_Q^b(\tau)$ de (4.50) deve ser compensado por um termo adicionado ao hamiltoniano de interação. No caso da teoria livre, o hamiltoniano de interação possui apenas este contratermo compensador. Nota-se ainda que mesmo no caso de estabilidade dos campos de quase-partícula, estes não podem ser usados para definir os estados térmicos assintóticos uma vez que o espectro do hamiltoniano térmico não possui cota inferior [7].

4.3.2 Dinâmica dos campos térmicos

Já que cada um dos modos da corda térmica, descritos em (4.47) e (4.48), é bem conhecido, é possível proceder com a derivação das equações de movimento dos campos térmicos. Para isto, levando em conta o fato de que estamos trabalhando no formalismo hamiltoniano, é necessário determinar os conjugados canônicos dos objetos $\phi^{i\alpha}(\tau,\sigma)$ e $\bar{\phi}^{i\alpha}(\tau,\sigma)$. Os momentos canonicamente conjugados são definidos de modo que satisfazem as relações canônicas de comutação a tempos iguais

$$\begin{aligned}
\left[\phi^{i\alpha}(\tau,\sigma)\ ,\ \pi^{j\beta}(\tau,\sigma')\right] &= i\delta^{ij} s_3^{\alpha\beta}\delta(\sigma-\sigma')\ , &(4.51)\\
\left[\bar{\phi}^{i\alpha}(\tau,\sigma)\ ,\ \pi^{j\beta}(\tau,\sigma')\right] &= i\delta^{ij} \delta^{\alpha\beta}\delta(\sigma-\sigma')\ . &(4.52)
\end{aligned}$$

A inserção das relações (4.47) e (4.48) nas expressões acima resulta em

$$\begin{aligned}
\pi^{i\beta}(\tau,\sigma) &= \pi_0^{i\beta}(\tau) + \pi_a^{i\beta}(\tau,\sigma) + \pi_b^{i\beta}(\tau,\sigma)\\
&= \frac{i}{2\pi}\left[U^{-1}(\tau)\left(s_3\bar{\alpha}_0^i\right)^\beta + \left(U^*(\tau)\right)^{-1}\alpha_0^{i\beta}\right]\\
&\quad + \frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_{n>0}\sqrt{n\omega_n(\tau)}\left[a_n^{i\beta}(\tau)\, e^{2in\sigma} + \left(s_3\bar{a}_n^i(\tau)^T\right)^\beta e^{-2in\sigma}\right]\\
&\quad - \frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_{n>0}\sqrt{n\omega_n(\tau)}\left[b_n^{i\beta}(\tau)\, e^{-2in\sigma} + \left(s_3\bar{b}_n^i(\tau)^T\right)^\beta e^{2in\sigma}\right]\ . \qquad (4.53)
\end{aligned}$$

Por sua vez, o momento conjugado ao campo $\bar{\phi}^{i\beta}(\tau,\sigma)$ pode ser obtido por conjugação til de $\pi^{i\beta}(\tau,\sigma)$ e toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}^{i\beta}(\tau,\sigma) &= \bar{\pi}_0^{i\beta}(\tau)+\bar{\pi}_a^{i\beta}(\tau,\sigma)+\bar{\pi}_b^{i\beta}(\tau,\sigma) \\
&= \frac{i}{2\pi}\left[-\left(U^*(\tau)\right)^{-1}\left(\bar{\alpha}_0^{iT}s_3\right)^{\beta}+U^{-1}(\tau)\left(\bar{\alpha}_0^{i}\right)^{\beta}\right] \\
&\quad +\frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_{n>0}\sqrt{n\omega_n(\tau)}\left[a_n^{i\beta}(\tau)\,e^{2in\sigma}+\left(s_3\bar{a}_n^{i}(\tau)^T\right)^{\beta}e^{-2in\sigma}\right] \\
&\quad -\frac{i}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_{n>0}\sqrt{n\omega_n(\tau)}\left[b_n^{i\beta}(\tau)\,e^{-2in\sigma}+\left(s_3\bar{b}_n^{i}(\tau)^T\right)^{\beta}e^{2in\sigma}\right] \ . \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Campos obtidos desta forma satisfazem às seguintes relações de comutação

$$\left[\bar{\phi}^{i\alpha}(\tau,\sigma)\ ,\ \bar{\pi}^{j\beta}(\tau,\sigma')\right]=i\delta^{ij}\delta_3^{\alpha\beta}\delta(\sigma-\sigma') \qquad (4.55)$$

o que os qualifica enquanto momentos canônicos conjugados. Agora procedemos com a determinação das equações de movimento obedecidas por $\phi^{i\alpha}(\tau,\sigma)\,,\ \bar{\phi}^{i\alpha}(\tau,\sigma)\,,\ \pi^{i\alpha}(\tau,\sigma)$ e $\bar{\pi}^{i\alpha}(\tau,\sigma)$. Elas podem ser extraídas tomando-se a derivada dos campos com respeito a τ e uso das equações (4.47) e (4.48). Antes de realizar o cálculo, é conveniente expressar as frequências de oscilação nas unidades características da corda mediante a seguinte transformação de escala

$$\omega_n(\tau)\longrightarrow\frac{n\omega_n(\tau)}{\alpha'}. \qquad (4.56)$$

Longas manipulações resultam nas seguintes equações de movimento para os modos de oscilação

$$\begin{aligned}
&\Big[\left(1+2i\partial_\tau n_{|\nabla|}\nabla^{-1}T_0\right)^{\alpha\beta}\partial_\tau \\
&\qquad +\partial_\tau\nabla\cdot\nabla^{-1}\left(1+2i\partial_\tau n_{|\nabla|}\nabla^{-1}T_0\right)^{\alpha\beta}\Big]\,\phi_{osc}^{i\beta}(\tau,\sigma)=\pi_{osc}^{i\alpha}(\tau,\sigma) \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

$$\left(1+2i\partial_\tau n_{|\nabla|}\nabla^{-1}T_0\right)^{\alpha\beta}\nabla^2\phi_{osc}^{i\beta}(\tau,\sigma)+\left[\partial_\tau-\partial_\tau\nabla\cdot\nabla^{-1}\right]\pi_{osc}^{i\alpha}(\tau,\sigma)=0\ . \qquad (4.58)$$

Aqui nós introduzimos a notação $\nabla=\sqrt{-\partial_\tau{}^2+\frac{k}{\tau^2}}$.As equações (4.57) e (4.58) descrevem a dinâmica clássica dos osciladores da corda nas proximidades da singularidade. Uma vez que as equações de movimento são o resultado da evolução temporal gerada pelo

Hamiltoniano clássico, é possível usar as equações (4.57) e (4.58) (e (4.65) no setor do centro de massa) para integrar as equações de Hamilton. O hamiltoniano resultante é então composto de dois termos

$$\hat{H}_Q = \hat{H}_{cm} + \hat{H}_{osc} \ , \tag{4.59}$$

onde $\hat{H}_{cm}$ é o Hamiltoniano do centro de massa e o hamiltoniano do setor de oscilação é dado por

$$\begin{aligned} \hat{H}_{osc} &= \frac{1}{2}\int d\sigma \sum_{i=2}^{D}\sum_{n>0}\Big\{\bar{\pi}^{i\alpha}_{osc}\left(1+2i\partial_\tau n_{|\nabla|}\nabla^{-1}T_0\right)^{\alpha\beta}\pi^{i\beta}_{osc} \\ &+\bar{\phi}^{i\alpha}_{osc}\left(1+2i\partial_\tau n_{|\nabla|}\nabla^{-1}T_0\right)^{\alpha\beta}\nabla^2\phi^{i\beta}_{osc} \\ &-\bar{\pi}^{i\alpha}_{osc}\left(1+T_n\right)^{\alpha\beta}\partial_\tau\nabla\cdot\nabla^{-1}\left(1+2i\partial_\tau n_{|\nabla|}\nabla^{-1}T_0\right)^{\beta\gamma}\phi^{i\gamma}_{osc} \\ &-\bar{\phi}^{i\alpha}\partial_\tau\nabla\cdot\nabla^{-1}\pi^{i\alpha}_{osc}\Big\} \end{aligned} \tag{4.60}$$

onde definimos

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ ; \ T_n = \begin{pmatrix} 2i\partial_\tau n_{|\nabla|}\nabla^{-1} & 1-2i\partial_\tau n_{|\nabla|}\nabla^{-1} \\ 2i\partial_\tau n_{|\nabla|}\nabla^{-1} & 1-2i\partial_\tau n_{|\nabla|}\nabla^{-1} \end{pmatrix} . \tag{4.61}$$

Agora o hamiltoniano dos osciladores pode ser separado em dois termos: o termo de osciladores livres $\hat{H}^0_{osc}$ e o contratermo Q que podem ser lidos no lado direito da equação (4.60). O hamiltoniano (4.59) gera as equações de movimento (4.57) e (4.58) (e (4.65) para o centro de massa) e o contratermo Q determina a dinâmica da função número $n_{|\nabla|}(\tau)$ da qual é derivada a evolução temporal de cada um dos modos de oscilação.

4.3.3 Dinâmica do Centro de Massa

É ilustrativo notar que a derivação dos termos de oscilação a partir de (4.53) e (4.54) é uma consequência direta do método NETFD. Entretanto, o coeficiente do modo zero não é dado pelo formalismo geral. Torna-se necessário portanto generalizar o formalismo.

Primeiramente, a fim de incluir o modo zero na discussão, consideramos a representação em série da função delta

$$\delta\left(\sigma-a\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{2in(\sigma-a)}\ . \tag{4.62}$$

É possível então mostrar que as relações de comutação (4.51) e (4.52) são reproduzidas se as coordenadas do centro de massa satisfizerem os seguintes comutadores

$$\left[\phi_0^{i\alpha}\left(\tau\right)\ ,\ \pi_0^{j\beta}\left(\tau\right)\right]=-\frac{i}{\pi}\delta^{ij}{s_3}^{\alpha\beta}\ . \tag{4.63}$$

A partir daí, é possível determinar o momento

$${\pi_0}^{i\alpha}\left(\tau\right)=\frac{i}{2\pi}\left[U^{-1}\left(\tau\right)\left(s_3\bar{\alpha}_0^i\right)^{\alpha}+\left(U^*\left(\tau\right)\right)^{-1}\alpha_0^{i\alpha}\right]\ . \tag{4.64}$$

Desta forma o coeficiente do modo zero na equação (4.53) pode ser fixado e, por procedimento análogo, também o coeficiente do termo de modo zero em (4.54).

As equações de movimento do centro de massa podem ser obtidas derivando-se a equação (4.33) com respeito a τ . Após alguma álgebra chega-se a

$$\begin{aligned}\left[\partial_\tau+\frac{2\pi}{U^*\left(\tau\right)}\left(\frac{\partial_\tau U\left(\tau\right)}{2\pi-i}-i\frac{\partial_\tau U^*\left(\tau\right)}{2\pi\left(2\pi+i\right)}\right)\right]\phi_0^{i\alpha}=&\\ 2\pi U\left(\tau\right)\left(\frac{\partial_\tau U\left(\tau\right)}{2\pi-i}-i\frac{\partial_\tau U^*\left(\tau\right)}{2\pi+i}\right)\pi_0^{i\alpha}\ .&\end{aligned} \tag{4.65}$$

A equação de movimento dos momenta, por sua vez é

$$\begin{aligned}\left[\partial_\tau-i\left(\frac{1}{\left(2\pi+i\right)}\frac{\partial_\tau U\left(\tau\right)}{U\left(\tau\right)}+\frac{i}{\left(2\pi-i\right)}\frac{\partial_\tau U^*\left(\tau\right)}{\left(U^*\left(\tau\right)\right)^2}U\left(\tau\right)\right)\right]\pi_0^{i\alpha}=&\\ -i\left[\frac{i}{2\pi\left(2\pi+i\right)}\frac{\partial_\tau U\left(\tau\right)}{U\left(\tau\right)\left|U\left(\tau\right)\right|^2}-\frac{1}{\left(2\pi-i\right)}\frac{\partial_\tau U^*\left(\tau\right)}{\left(U^*\left(\tau\right)\right)^3}\right]\phi_0^{i\alpha}\ .&\end{aligned} \tag{4.66}$$

As equações de movimento para $\bar{\phi}_0^{i\alpha}$ e $\bar{\pi}_0^{i\alpha}$ são obtidas da mesma forma.

A partir da afirmação de que estas equações de movimento são as equações de Hamilton dadas pelo hamiltoniano $\hat{H}_{cm}$, é possível calcular sua forma exata que segue a baixo

$$\hat{H}_{cm} = \sum_{i=2}^{D} \left[2\pi U(\tau) \left(\frac{\partial_\tau U(\tau)}{2\pi - i} + \frac{\partial_\tau U^*(\tau)}{2\pi + i} \right) \bar{\pi}_0^{i\alpha} \pi_0^{i\alpha} \right.$$
$$- i \left(\frac{i}{2\pi(2\pi + i)} \frac{\partial_\tau U(\tau)}{U(\tau)|U(\tau)|^2} - \frac{1}{(2\pi - i)} \frac{\partial_\tau U^*(\tau)}{(U^*(\tau))^3} \right) \bar{\phi}_0^{i\alpha} \phi_0^{i\alpha}$$
$$- i \left(\frac{1}{2\pi + i} \frac{\partial_\tau U(\tau)}{U(\tau)} + \frac{i}{(2\pi - i)} \frac{\partial_\tau U^*(\tau)}{(U^*(\tau))^2} U(\tau) \right) \bar{\phi}_0^{i\alpha} \pi_0^{i\alpha}$$
$$\left. - i \frac{2\pi}{U^*(\tau)} \left(\frac{\partial_\tau U(\tau)}{2\pi - i} - i \frac{\partial_\tau U^*(\tau)}{2\pi(2\pi + i)} \right) \bar{\pi}_0^{i\alpha} \phi_0^{i\alpha} \right] . \quad (4.67)$$

O hamiltoniano total $\hat{H}_{cm} + \hat{H}_{osc}$ determina então a dinâmica dos campos da corda térmica nas proximidades da singularidade.

4.4 As correlações da corda térmica

A fim de fazermos previsões sobre as propriedades físicas da corda térmica, é necessário definir quantidades físicas observáveis. Quando se trata de um sistema em equilíbrio, os observáveis advém das funções termodinâmicas e suas respectivas derivadas. Quando fora do equilíbrio, entretanto, é mais natural esperar que os observáveis sejam expressos em termos de probabilidades de transição entre estados da corda em diferentes valores do parâmetro temporal. Estas probabilidades de transição podem ser definidas em termos de funções de correlação. Uma vez que estamos considerando a dinâmica da corda no nível de árvore, e, na representação $a - b$ não existem interações entre os modos da corda, uma avaliação descuidada poderia nos levar a esperar que as funções de correlação devessem ser definidas por

$$\left\langle T \left[\phi^{i_1\alpha_1}(\tau_1) \phi^{i_2\alpha_2}(\tau_2) ... \bar{\phi}^{i_n\alpha_n}(\tau_n) \right] \right\rangle . \quad (4.68)$$

Todavia, a análise feita na seção anterior mostra que, mesmo na ausência de interações, ocorre a presença de um contratermo $\hat{Q}$ em $\hat{H}_{osc}$ devido à evolução temporal das frequências. Numa teoria de interação entretanto, os contratermos devem se cancelar com as auto-energias dos vértices de modo a deixar o hamiltoniano inalterado [7]. Portanto, a fim de definir as funções de correlação é necessário trabalhar na base de interação, definida pelo hamiltoniano de interação

$$\hat{H}_I = \hat{Q}. \tag{4.69}$$

Nesta representação, os osciladores evoluem segundo as equações (4.47) e (4.48), ou seja, segundo o hamiltoniano livre $\hat{H}_Q$ definido na relação (4.50). Portanto, as funções de correlação são definidas como valores esperados da forma

$$\left\langle T\left[\phi^{i_1\alpha_1}(\tau_1)\,\phi^{i_2\alpha_2}(\tau_2)\ldots\bar{\phi}^{i_n\alpha_n}(\tau_n)\,\hat{S}(0,\infty)\right]\right\rangle, \tag{4.70}$$

onde o operador $\hat{S}$ é definido como o usual

$$\hat{S}(0,\infty) = \lim_{\tau_1\longmapsto 0}\lim_{\tau_2\longmapsto +\infty}\hat{u}(\tau_1,\tau_2) = T\left[\exp\left(-i\int_0^{+\infty} d\zeta \hat{H}_I(\zeta)\right)\right]. \tag{4.71}$$

O vácuo térmico na representação de interação satisfaz a seguinte relação

$$\langle 0|\,\hat{u}(0,\tau) = \langle 0|\ . \tag{4.72}$$

Esta é a formulação de Schwinger-Dyson para campos térmicos no formalismo canônico. As correlações definidas pela relação (4.70) podem, por sua vez, ser calculadas por meio de uma expansão em potências de $\hat{Q}$

$$\begin{aligned}\left\langle T\left[\phi^{i_1\alpha_1}(\tau_1)\,\phi^{i_2\alpha_2}(\tau_2)\ldots\bar{\phi}^{i_n\alpha_n}(\tau_n)\,\hat{S}(0,\infty)\right]\right\rangle = &\\ \left\langle T\left[\phi^{i_1\alpha_1}(\tau_1)\,\phi^{i_2\alpha_2}(\tau_2)\ldots\bar{\phi}^{i_n\alpha_n}(\tau_n)\right]\right\rangle &\\ -i\left\langle T\left[\phi^{i_1\alpha_1}(\tau_1)\,\phi^{i_2\alpha_2}(\tau_2)\ldots\bar{\phi}^{i_n\alpha_n}(\tau_n)\int_0^{\infty} d\zeta \hat{H}_I(\zeta)\right]\right\rangle + \ldots\ .\end{aligned} \tag{4.73}$$

É interessante notar que a expansão é válida para pequenos valores das derivadas temporais de $n_{|\nabla|}$. Em virtude disso, pode-se dizer que o NETFD prescreve um método geral para o cálculo de funções de correlação da corda térmica dentro de um esquema perturbativo.

A fim de exemplificar o formalismo, procedemos com o cálculo da função de dois pontos em ordem zero. Para isso, consideramos o primeiro termo de (4.73) no vácuo dependente do tempo

$$D^{ij,\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2;\sigma_1,\sigma_2) = -i\left\langle T\left[\phi^{i\alpha}(\tau_1,\sigma_1)\,\bar{\phi}^{j\beta}(\tau_2,\sigma_2)\right]\right\rangle. \tag{4.74}$$

Os campos da equação (4.29) atuam no espaço direto $\hat{\mathcal{H}}$ na ausência de mixing entre os setores a e b. Segue daí que a transformada de Fourier dos propagadores dos osciladores possuem a mesma forma em ambos os setores e os termos cruzados se anulam. Com isso, apenas 3 termos são não-nulos do lado esquerdo da relação (4.74) que correspondem aos 3 espaços de Hilbert distintos dos campos das cordas (centro de massa, modos à esquerda e modos à direita)

$$D^{ij,\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2;\sigma_1,\sigma_2) = D_0^{ij,\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2) + D_a^{ij,\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2;\sigma_1,\sigma_2) + D_b^{ij,\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2;\sigma_1,\sigma_2). \quad (4.75)$$

Substituíndo-se os modos zero de (4.33) na relação acima, é possível mostrar que o propagador do centro de massa possui a seguinte forma

$$\begin{aligned} D_0^{ij,\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2) = &-\frac{i}{2}\theta(\tau_1-\tau_2)\left[U(\tau_1)U(\tau_2)+U(\tau_1)U^*(\tau_2)\right](\mathbf{1}_2+s_3)^{\alpha\beta}\delta^{ij} \\ &-\frac{i}{2}\theta(\tau_2-\tau_1)\left[-U(\tau_2)U(\tau_1)+U^*(\tau_2)U(\tau_1)\right](\mathbf{1}_2+s_3)^{\alpha\beta}\delta^{ij}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

O cálculo dos propagadores dos setores a e b da equação (4.75) são mais longos porém simples. Uma vez que os setores a e b podem ser relacionados por uma transformação de reflexão $\sigma_1 - \sigma_2 \longrightarrow \sigma_2 - \sigma_1$ é possível calcular $D_a^{ij,\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2;\sigma_1,\sigma_2)$ e então obter $D_b^{ij,\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2;\sigma_1,\sigma_2)$ por meio de uma reflexão. A fim de calcular o valor esperado de $D_a^{ij,\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2;\sigma_1,\sigma_2)$ nós usamos as decomposições de Fourier (4.29) e (4.30) e aplicamos as tranformações de Bogoliubov (4.36) e (4.37) para transformar os operadores $a(\tau)$ nos operadores de quase-partículas independentes do tempo ξ que correspondem ao vácuo definido por (4.74). Após feita a algebra, o resultado toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} D_a^{ij,\alpha\beta}(\tau_1,\tau_2;\sigma_1,\sigma_2) &= \frac{-i\alpha'}{4}\delta^{ij}\sum_{n>0}\left\{B_n^{-1}(\tau_1)\left[e^{2in(\sigma_1-\sigma_2)}D_{a,+}^{ij}(\tau_1,\tau_2;n)\right.\right. \\ &\left.\left.+e^{-2in(\sigma_1-\sigma_2)}D_{a,-}^{ij}(\tau_1,\tau_2;n)\right]B_n(\tau_2)\right\}^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Onde + e - representam as componentes avançada e retardada da função de Green respectivamente no caso em que as frequências não dependem do tempo. Estes termos são dados pelas seguintes equações

$$D^{ij}_{a,+}(\tau_1,\tau_2;n)=\frac{\exp\left(i\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\lambda\omega_n(\lambda)\right)}{2n\sqrt{\omega_n(\tau_1)\omega_n(\tau_2)}}\left[\theta(\tau_1-\tau_2)(\mathbf{1}+s_3)\right.$$
$$\left.+\theta(\tau_2-\tau_1)(\mathbf{1}-s_3)\right]^{\alpha\beta}\quad(4.78)$$

$$D^{ij}_{a,+}(\tau_1,\tau_2;n)=\frac{\exp\left(-i\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\lambda\omega_n(\lambda)\right)}{2n\sqrt{\omega_n(\tau_1)\omega_n(\tau_2)}}\left[C_n(\tau_1)\theta(\tau_1-\tau_2)(\mathbf{1}+s_3)\right.$$
$$\left.+\theta(\tau_2-\tau_1)(\mathbf{1}-s_3)C_n^{-1}(\tau_2)\right]^{\alpha\beta}\quad(4.79)$$

onde introduzimos a matriz para cada um dos modos m

$$C_m(\tau)=\begin{pmatrix}1+2n_m(\tau) & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.\quad(4.80)$$

As transformadas de Fourier dos propagadores fora do equilíbrio no setor a dadas pelas relações (4.78) e (4.79) são similares aos propagadores fora do equilíbrio do campo escalar no espaço de Minkowski [107], [108], [109]. Uma das diferenças é notada na presença do fator $(\omega_n(\tau_1)\omega_n(\tau_2))^{-1/2}$ que não está presente no caso do campo escalar no espaço plano. Este fator é uma consequência da dependência dos modos $\phi^{i\alpha}_n(\tau_1)$ do argumento $\sqrt{n\omega_n(\tau)}$, mais especificamente, é o resultado da interação entre o fundo gravitacional e as cordas. O propagador fora do equilíbrio do setor b pode ser calculado exatamente da mesma maneira.

4.5 Formalismo NETFD

O formalismo conhecido por Dinâmica de Campos Térmicos fora do Equilíbrio (Non-Equilibrium Thermo Fild Dynamics - NETFD) é um formalismo canônico a tempo real para o tratamento de teorias térmicas de campos quânticos. O formalismo foi desenvolvido inicialmente como uma alternativa aos já existentes formalismos a tempo imaginário os quais apresentam dificuldades com respeito à definição de correlações envolvendo vários instantes no tempo assim como à construção da matriz densidade [7]. O NETFD pode ser derivado a partir dos mesmos axiomas do TFD (Thermo Field Dynamics) em equilíbrio, os quais podem ser sumarizados como segue

1. Um sistema físico termalizado é descrito por dois conjuntos de operadores de campo comutantes (anti-comutantes) denotados por $\phi(x)$ e $\tilde{\phi}(x)$ os quais atuam no espaço de Hilbert térmico total que por sua vez é dado pelo produto direto entre dois espaços de Hilbert idênticos
$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}} \ . \tag{4.81}$$
2. Associa-se a cada operador $O = O\left(\phi(x), \phi^{\dagger}(x)\right)$ atuando em H uma cópia $\tilde{O} = O^{*}\left(\tilde{\phi}(x), \tilde{\phi}^{\dagger}(x)\right)$ a qual atua em $\tilde{\mathcal{H}}$.
3. A marcação til denota uma involução em $\hat{\mathcal{H}}$que obedece as seguintes regras
$$\begin{aligned}
\left(c_1 O_1 + c_2 O_2\right)^{\tilde{}} &= c_1^{*}\tilde{O}_1 + c_2^{*}\tilde{O}_2 \ , && (4.82)\\
\left(O_1 O_2\right)^{\tilde{}} &= \tilde{O}_1\tilde{O}_2 \ , && (4.83)\\
\left(O^{\dagger}\right)^{\tilde{}} &= \tilde{O}^{\dagger}, && (4.84)\\
\left(\tilde{O}\right)^{\tilde{}} &= \varepsilon O, && (4.85)
\end{aligned}$$
para quaisquer $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$e $O,\ O_1,\ O_2 \ \in \ End\left(\hat{\mathcal{H}}\right)$. $\varepsilon = 1(-1)$ para operadores bosônicos (fermiônicos).

4. O estado de vácuo é invariante sob a involução

$$|0(\tau)\rangle^{\sim} = |0(\tau)\rangle \;\; ; \;\; \langle 0(\tau)|^{\sim} = \langle 0(\tau)| \;\; . \tag{4.86}$$

5. O gerador da evolução temporal deve ser tal que

$$\left(i\hat{\mathcal{H}}\right)^{\sim} = i\hat{\mathcal{H}}. \tag{4.87}$$

Com isto, se conclui que o hamiltoniano deve tomar a forma da diferença entre dois hamiltonianos idênticos

$$\hat{H} = H - \tilde{H} \tag{4.88}$$

e é dado pela equação de Heisenberg para operadores não-til

$$i\frac{d}{d\tau}O(\tau) = \left[O, \hat{H}\right]. \tag{4.89}$$

6. Existe um conjuto de operadores $\left\{\xi, \tilde{\xi}, \xi^{\dagger}, \tilde{\xi}^{\dagger}\right\}$ que define uma representação do tipo quase-partícula livre, independente do tempo, que atua sobre o vácuo da seguinte forma

$$\xi|0\rangle = \tilde{\xi}|0\rangle = \langle 0|\xi^{\dagger} = \langle 0|\tilde{\xi}^{\dagger} = 0 \;. \tag{4.90}$$

Os estados térmicos são então definidos mediante imposição da *condição térmica sobre os estados*

$$\langle 0|O(\tau) = \langle 0|\tilde{O}^{\dagger}(\tau) \quad \text{para bósons,} \tag{4.91}$$

$$\langle 0|O(\tau) = e^{i\theta}\langle 0|\tilde{O}^{\dagger}(\tau) \quad \text{para férmions,} \tag{4.92}$$

onde θ é determinado pelas regras de conjugação til.

7. A média térmica de um observável O é dada pelo valor esperado no vácuo

$$\langle O\rangle = \langle 0|O|0\rangle . \tag{4.93}$$

8. Para qualquer valor da variável temporal t existe um mapa inversível entre o espaço de Hilbert total e a representação de quase-partícula dependente do tempo dada

por uma transformação de Bogoliubov dependente do tempo $B(t)$

$$\begin{pmatrix} \phi(\tau) \\ e^{i\theta}\tilde{\phi}(\tau) \end{pmatrix} = B^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} \xi(\tau) \\ e^{i\theta}\tilde{\xi}(\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.94}$$

9. O estado de vácuo dependente do tempo é definido por

$$\xi(t)\left|0(\tau)\right\rangle = \tilde{\xi}(\tau)\left|0(\tau)\right\rangle = 0, \tag{4.95}$$

$$\left\langle 0(\tau)\right|\xi^{\dagger}(\tau) = \left\langle 0(\tau)\right|\tilde{\xi}^{\dagger}(\tau) = 0. \tag{4.96}$$

E obedece as equações de evolução temporal

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}\left|0(\tau)\right\rangle = \hat{H}\left|0(\tau)\right\rangle, \tag{4.97}$$

$$\left\langle 0(\tau)\right|\hat{H} = 0. \tag{4.98}$$

10. Os estados térmicos estacionários na representação de Schrödinger são definidos por

$$\lim_{\tau\mapsto\infty}\hat{H}\left|0(\tau)\right\rangle = 0 \tag{4.99}$$

em consonância com o que se espera sobre o equilíbrio térmico ser atingido no limite $\tau \to \infty$.

O formalismo NETFD, como já enfatizado, é um formalismo canônico. Portanto, a representação canônica dependente do tempo é definida em termos dos operadores canônicos $\left\{a(\tau), a^{\dagger}(\tau), \tilde{a}(\tau), \tilde{a}^{\dagger}(\tau)\right\}$. A família de mapas (parametrizados pelo tempo) da representação canônica na representação de quase-partícula dependente do tempo $\left\{\xi(\tau), \xi^{\dagger}(\tau), \tilde{\xi}(\tau), \tilde{\xi}^{\dagger}(\tau)\right\}$ é dada pelo mapa de Bogoliubov inversível e dependente do tempo

$$B(\tau): \left\{a(\tau), a^{\dagger}(\tau), \tilde{a}(\tau), \tilde{a}^{\dagger}(\tau)\right\} \longrightarrow \left\{\xi(\tau), \xi^{\dagger}(\tau), \tilde{\xi}(\tau), \tilde{\xi}^{\dagger}(\tau)\right\}. \tag{4.100}$$

A representação de quase-partícula é definida pelas propriedades do mapa de Bogoliubov que deve satisfazer 3 condições: (i) deve manter a estrutura canônica; (ii) deve preservar a conjugação hermitiana; (iii) deve preservar a conjugação til:

$$B(\tau)(s_2 \otimes s_3) B^T(\tau) = s_2 \otimes s_3, \tag{4.101}$$

$$B^*(t)(s_1 \otimes \mathbf{1}) = (s_1 \otimes \mathbf{1}) B(\tau) \tag{4.102}$$

$$B^*(t)(s_1 \otimes s_1) = (s_1 \otimes s_1) B(\tau) \tag{4.103}$$

onde s_1, s_2 e s_3 são as matrizes de Pauli. O primeiro requisito é imposto a todos os 3 casos. Os dois últimos definem representações da teoria de campos térmicos menos usuais porém úteis. É possível mostrar que a forma mais geral do operador de Bogoliubov não-hermitiano na representação dublete da equação (4.94) é dada por

$$B_{\boldsymbol{k}} = (1 + \varepsilon n_{\boldsymbol{k}}(\tau))^{\frac{1}{2}} e^{\gamma_{\boldsymbol{k}}(\tau) s_3} \begin{pmatrix} 1 & -f_{\boldsymbol{k}}^{\alpha_k}(\tau) \\ -\varepsilon f_{\boldsymbol{k}}^{1-\alpha_k}(\tau) & 1 \end{pmatrix} \theta_k(t), \tag{4.104}$$

onde $\boldsymbol{k}$ denota o modo canônico do campo, $\varepsilon = 1\,(-1)$ para bósons (férmions) e α_k, $n_{\boldsymbol{k}}(\tau)$ e $\gamma_{\boldsymbol{k}}(\tau)$ são os parâmetros do grupo de gauge dos mapas térmicos ($SU(1,1)$ para bósons e $SO(2)$ para férmions). A fase complexa $\theta_k(\tau)$ depende da energia do modo e satisfaz a equação diferencial de primeira ordem

$$i\frac{d}{d\tau}\theta_n(\tau) = \omega_n(\tau)\,\theta_n(\tau). \tag{4.105}$$

O parâmetro $n_k(\tau)$ representa número de ocupação

$$n_{\boldsymbol{k}}(\tau)\,\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{l}) = \langle 0(\tau)|\, a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} a_{\boldsymbol{l}}\, |0(\tau)\rangle \;. \tag{4.106}$$

A função $f_{\boldsymbol{k}}^{\alpha_{\boldsymbol{k}}}$ é a distribuição estatística

$$f_{\boldsymbol{k}}^{\alpha_{\boldsymbol{k}}}(\tau) = \frac{n_{\boldsymbol{k}}(\tau)}{1 + \varepsilon n_{\boldsymbol{k}}(\tau)} \;. \tag{4.107}$$

O parâmetro $\alpha_{\boldsymbol{k}} \in [0,1]$ rotula diferentes representações do campo térmico no espaço de Liouville. A escolha de $\alpha_{\boldsymbol{k}} = 1$ e $\gamma_{\boldsymbol{k}}(\tau) = \ln(1 + \varepsilon n_{\boldsymbol{k}}(\tau))$, em particular resulta na transformação de Bogoliubov linear [101], [102]

$$B_{\boldsymbol{k}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon n_{\boldsymbol{k}}(\tau) & -n_{\boldsymbol{k}}(\tau) \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.108}$$

Capítulo 5

Emaranhamento de estados de fronteira em 1-loop

5.1 Introdução

É razoável afirmar que a interpretação de Wilson do Grupo de Renormalização (RG) [111] constitui um dos maiores feitos da física no último quarto do século XX.

Além do fato de que esta ter proporcionado uma interpretação física consistente das indesejadas divergências presentes nos antigos esquemas de renormalização por meio de um rebaixamento das teorias quânticas de campos ao estatus de provedoras da dinâmica dominante numa específica escala de energia, o RG também pôs em evidência as transformações conformes como um dispositivo que conecta a física em diferentes pontos ao longo da escala de energia.

Como resultado, a simetria conforme se apresenta numa posição especial quando comparada às outras simetrias, a dizer, sua presença numa teoria sinaliza uma situação de imutabilidade de toda a dinâmica ao longo da escala de energia e não somente uma equivalência entre graus de liberdade.

Em quatro dimensões uma propriedade particular simplifica a checagem da invariância conforme: toda teoria invariante sob dilatações é conforme. Na QCD este fato, juntamente com a liberdade assintótica e seu limite não-massivo em altas energias, sugere que de fato devemos esperar que a simetria conforme seja uma peça fundamental na física de altas energias.

A investigação de como a simetria conforme entra no jogo da física de altas energias é ainda mais enriquecida na teoria de cordas uma vez que em 2-dimensões o grupo conforme possui infinitos geradores. Este fato, apesar de possuir um elevado apelo formal, implica todavia que a física das cordas é insensível à escala de energia e portanto deixa sem resposta a importante questão de como ocorre a transição entre a dinâmica dominada pelos graus de liberdade da corda e os das teorias quânticas de campos conhecidas à baixas energias.

Nesta direção, uma observação importante é o fato de que a interpretação do cut-off enquanto provido de significado físico, presente na construção de Wilson do RG, na verdade esconde a hipótese de falta de informação a cerca do que realmente acontece nas camadas mais microscópicas da natureza, isto é, se está diante de um problema de teoria da informação/física estatística/termodinâmica [112].

No contexto da física à temperatura finita, pode-se dizer que a temperatura e a renormalização andam lado a lado visto que através da segunda lei da termodinâmica

$$\Delta E = T\Delta S \ , \tag{5.1}$$

uma mudança nas ocupações dos níveis quantizados de energia de um sistema (isto é, uma mudança na norma do estado quântico) incorre numa variação da entropia com a temperatura enquanto constante de proporcionalidade. Desde um ponto de vista da teoria da informação, tal conexão pode também ser vista na existência de um setor desconhecido de graus de liberdade (reservatório térmico). Ambos pontos de vista sugerem, portanto, que um sistema térmico deve compartilhar semelhanças com um conjunto de graus de liberdadae renormalizados.

De volta ao contexto das cordas, uma vez que esta teoria tem sido vista enquanto a candidata mais promissora à descrição da gravidade em nível microscópico, cabe a investigação a cerca da interpretação termodinâmica do grupo conforme em 2 dimensões, principalmente quando se leva em conta a entropia de buracos negros e as propostas (com inspiração no arcabouço da teoria de cordas) mais recentes de interpretação da gravidade como um fenômeno intrinsecamente termodinâmico [113], [114] as quais, de certa forma, dão continuidade a uma linha de pesquisa já estabelecida que toma a gravidade como um fenômeno inerentemente macroscópico [115], [116], [117], [118], [119], [120], [121], [122].

Neste sentido, pode se esperar que a conexão entre a teoria de cordas e as teorias de campos em baixas energias devem envolver algum tipo de interação do tipo mixing/ruído (térmico) entre os estados de cordas, do qual emergiriam condensados termodinâmicos.

Apesar de já terem ocorrido pesquisas no início dos anos 90 a respeito da relação entre o grupo de renormalização dos graus de liberdade das cordas desde o ponto de vista da folha-mundo e do espaço-tempo [123] , aparentemente o assunto foi deixado de lado desde a descoberta das D-branas. Entendemos que o ponto merece ser revisitado visto que a quebra da simetria de Poincaré no espaço-alvo (e a consequente quebra do grupo conforme no espaço alvo) deve possuir uma contrapartida desde perspectiva da folha-mundo.

Neste trabalho nós procedemos com a investigação a cerca de como a integração ao longo da escala de energia nas cordas bosônicas, isto é, a integração sobre o espaço modular da folha-mundo esconde a integração de um ruído estatístico entre os estados puros da corda.

O resultado mais importante consiste na descoberta de que este ruído emerge sob a forma de um estado coerente o qual no limite da ausência de mixing se reduz ao estado de fronteira/D-brana. Este resultado está de acordo com a espectativa de que as D-branas devem ser condensados de cordas em baixas energias. Os cálculos se dão sob o prisma de uma dinâmica efetiva das cordas em baixas energias em que, particularmente, se espera a invariância conforme estar quebrada.

5.2 Interações a 1-loop das cordas bosônicas

No regime perturbativo da interação entre as cordas bosônicas, as amplitudes de espalhamento são calculadas levando-se em conta a contribuição topológica advinda da característica de Euler da folha-mundo Σ

$$\chi\left(\Sigma\right)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}d^{2}\sigma\sqrt{g}R=2\left(1-g\right) \tag{5.2}$$

onde g é o gênero de Σ. A característica de Euler $\chi\left(\Sigma\right)$ funciona como um contador de loops para a corda quântica tornando possível dotar a integral funcional de um peso estatístico que represente uma dinâmica de interação. Mediante fixação de calibre covariante e rotação de Wick a ação toma a seguinte forma

$$S=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\Sigma}d^{2}\sigma\sqrt{\hat{g}}\hat{g}^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}X^{\mu}\partial_{\beta}X_{\mu}+\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}d^{2}\sigma\sqrt{\hat{g}}b^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}c_{\beta}+\chi\left(\Sigma\right)\ , \tag{5.3}$$

onde $\hat{g}$ representa a métrica da folha-mundo fixada sob transformações de calibre.

O gênero de Σ está relacionado com a forma com que a compactificação topológica (da folha mundo) é realizada e, induz configurações globalmente não triviais para a métrica em 2 dimensões, os chamados *moduli*, os quais, são identificados como os modos-zero do adjunto do operador de onda do setor de fantasmas de Fadeev-Popov associados às transformações de difeomorfismos e reescalas de Weyl (as simetrias de gauge em questão), sendo portanto irredutíveis à identidade por meio destas transformações.

A 1-loop ($\chi\left(\Sigma\right)=0$), lida-se com a topologia do toro, cuja compactificação (a menos de transformações de Weyl globais) é parametrizada por um comprimento τ_2 e um ângulo de *"torção"* τ_1. As transformações modulares fixam a região fundamental do parâmetro de Teichmüller (modulus) $\tau=\tau_1+i\tau_2$ em $-1/2<\tau_1<1/2$ and $|\tau|>1$. Por fim, este parâmetro entra na métrica global em 2 dimensões uma vez fixado o volume da folha-mundo sendo 1

$$g_{(\tau)}=\frac{1}{\tau_2}\begin{pmatrix}1 & \tau_1\\ \tau_1 & |\tau|^2\end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Levando em consideração o fato de que cada valor de τ define uma classe de equivalência sob transformações de calibre, uma integral funcional apropriadamente definida deve considerar todas as classes de equivalências no que diz respeito à definição de uma teoria quântica consistente. Por outro lado, uma vez que τ_2 mede o comprimento do toro, este parâmetro funciona como um comprimento de correlação e desta forma possui uma escala de energia associada. Em outras palavras, a integração sobre o espaço modular é no fundo uma integração sobre a escala de energia, isto é, uma integração do grupo de renormalização.

Levando-se isto em consideração, procedemos com a questão natural a respeito de qual tipo de estado quântico contribui à função de partição em cada nível da escala de energia a 1-loop.

Usamos a seguinte decomposição de Fourier dos modos da corda bosônica

$$X^{\mu}\left(\sigma^1,\sigma^2\right) = x^{\mu} - i\alpha^{'} p^{\mu}\sigma^2 + i\sqrt{\frac{\alpha^{'}}{2}}\sum_{n\neq 0}\left\{\frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{\mu}}{n}e^{-n\left(i\sigma^1+\sigma^2\right)} + \frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^{\mu}}{n}e^{-n\left(i\sigma^1-\sigma^2\right)}\right\} \tag{5.5}$$

e consideramos a ação de Polyakov definida com $g_{(\tau)}$

$$S_{P_{(\tau)}} = \frac{-1}{4\pi\alpha^{'}}\int_{\Sigma} d^2\sigma\sqrt{g_{(\tau)}}g_{(\tau)}^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}X^{\mu}\partial_{\beta}X_{\mu}\ . \tag{5.6}$$

Uma substituição simples de (5.4) e (5.5) em (5.6) seguinda por integração das exponenciais no centro de massa da corda e redefinição dos osciladores por

$$A_n^{\mu} = e^{-\pi n}\frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{\mu}}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{A}_n^{\mu} = e^{-\pi n}\frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^{\mu}}{\sqrt{n}} \tag{5.7}$$

$$A_n^{\dagger\mu} = e^{\pi n}\frac{\boldsymbol{\alpha}_n^{\dagger\mu}}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{A}_n^{\dagger\mu} = e^{\pi n}\frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^{\dagger\mu}}{\sqrt{n}} \tag{5.8}$$

além de alguma álgebra resulta na soma de um termo livre com um termo típico das interações do tipo formação de pares (pairing interactions) ou termo de Bogoliubov $B(\tau)$ que representa a formação de condensados

$$S_{P_{(\tau)}} \sim S_{free} + B(\tau)\,; \tag{5.9}$$

$$B(\tau) = \frac{\left(1+|\tau|^2\right)}{2\tau_2}G_{\mu\nu}\sum_{n\geq 1}\sinh(2\pi n)\left\{A_n^{\dagger\mu}\bar{A}_n^{\dagger\nu} - A_n^{\mu}\bar{A}_n^{\nu}\right\}. \tag{5.10}$$

O resultado é que a topologia da folha-mundo induz a formação de um estado condensado entre osciladores à esquerda e osciladores à direita. Em linhas gerais, ao redor do buraco da folha-mundo os modos da corda bosônica advindos do infinito interagem uns com os outros na forma determinada pelo termo de Bogoliubov $B(\tau)$, o qual dá origem a um condensado.

O aparecimento de $B(\tau)$ pode intuitivamente ser comparado à condensação dos modos bosônicos ao redor de um buraco negro: as ondas planas dos campos advindas do infinito condensam no horizonte de eventos devido ao fato de que o hamiltoniano da matéria, quando escrito em termos da métrica curva dá origem a um termo de Bogoliubov (fora da diagonal) para os modos. É então possível por meio de uma transformação canônica (a transformação de Bogoliubov cujo gerador é um múltiplo do termo de mixing) relacionar os modos dos campos distantes do buraco negro com os modos típicos ao redor do buraco negro de modo que o hamiltoniano renormaliza-se e torna-se novamente diagonal enquanto que o vácuo é redefinido como um estado condensado. Ou seja,

$$\langle 0| e^{H_{free}+H_{Bog}} |0\rangle = \langle 0| \left(e^{-\theta H_{Bog}} e^{\theta H_{Bog}}\right) e^{H_{free}+H_{Bog}} \left(e^{-\theta H_{Bog}} e^{\theta H_{Bog}}\right) |0\rangle \tag{5.11}$$

$$= \langle \theta| e^{H'^{(\theta)}_{free}} |\theta\rangle \ . \tag{5.12}$$

Com isto, pode-se afirmar que a emergência do condensado é um efeito da métrica não-trivial no hamiltoniano através do termo de interação entre pares, em outras palavras, trata-se de um efeito dinâmico que pode ser detectado por meio de uma análise do hamiltoniano da mesma forma como se procede com a análise da formação de condensados na teoria BCS da supercondutividade por exemplo.

5.3 Condensação de D-branas

O estado condensado $|B(\theta)\rangle$ é definido pela ação da transformação de Bogoliubov sobre o vácuo

$$|B(\theta)\rangle = e^{B(\tau)} |0\rangle |\bar{0}\rangle = N \prod_{n\geq 1} e^{\alpha\theta_n \left[A_n^\dagger \cdot \bar{A}_n^\dagger\right]} |0\rangle |\bar{0}\rangle \tag{5.13}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\theta_n &= \sinh(2\pi n) && (5.14)\\
\alpha &= \frac{\left(1+|\tau|^2\right)}{2\tau_2} && (5.15)
\end{aligned}
$$

e N é uma constante de normalização.

Na teoria de cordas, as D-branas são há muito tempo reconhecidas como um caso especial de estados condesados [67], também chamados de estados de fronteira devido ao fato de que advém das condições de fronteira da folha-mundo (isto é, uma propriedade topológica da folha-mundo).

A fim de esclarecer este ponto, recordamos brevemente a emergência dos estados de fronteira das condições de fronteira. Seja S a ação de Polyakov

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma \left\{\partial^\alpha X^a \partial^\beta X^b \eta_{\alpha\beta}\eta_{ab}\right\} \ . \tag{5.16}$$

Extremização $\delta S = 0$ implica na dinâmica dos modos no interior da folha-mundo $\Box X_a = 0$ além das condições de fronteira, as quais podem ser manipuladas com o teorema de Stokes em 2 dimensões

$$\int_\Sigma d^2\sigma \partial_\alpha \left(\delta X^a \partial^\alpha X_a\right) = \int_{\partial\Sigma} -\varepsilon_{\gamma\alpha}\delta X^a \partial^\alpha X_a d\sigma^\gamma = 0 \tag{5.17}$$

e integração sob extremos fixos no tempo

$$\int_{\partial\Sigma_{\sigma=0}} \varepsilon_{01}\delta X^a \partial^1 X_a d\sigma^0 + \int_{\partial\Sigma_{\sigma=\pi}} \varepsilon_{01}\delta X^a \partial^1 X_a \left(-d\sigma^0\right) = 0 \tag{5.18}$$

ou

$$\int_{\partial\Sigma_{\sigma=\pi}} \delta X^a \partial_\sigma X_a d\sigma^0 = \int_{\partial\Sigma_{\sigma=0}} \delta X^a \partial_\sigma X_a d\sigma^0 \tag{5.19}$$

que, no caso das cordas abertas podem ser satisfeitas, nas duas fronteiras, tanto pela condição de fronteira de Neumann quanto pela condição de Dirichlet

$$
\begin{aligned}
\partial_\sigma X^a\big|_{\sigma=0,\pi} &= 0 \text{ - Neumann ;} && (5.20)\\
\delta X^a\big|_{\sigma=0,\pi} &= 0 \text{ - Dirichlet .} && (5.21)
\end{aligned}
$$

Em termos das componentes de Fourier dos campos da corda X^a, as condições acima significam

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_n^\mu + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^\mu &= 0 \text{ - Neumann} \qquad (5.22) \\ \boldsymbol{\alpha}_n^\mu - \bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^\mu &= 0 \text{ - Dirichlet} \qquad (5.23) \end{aligned}$$

cujas versões quânticas devem ser interpretadas enquanto condições restritivas aos estados no espaço de Hilbert, ou seja,

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_n^\mu \pm \bar{\boldsymbol{\alpha}}_n^\mu\right) |B\rangle = 0 \ . \qquad (5.24)$$

Finalmente, a equação (5.24) pode ser formalmente resolvida para o estado (puro) de fronteira ou, estado de D-brana $|B\rangle$

$$|B\rangle = \prod_{n\geq 1} e^{S_{\mu\nu}\boldsymbol{\alpha}_{-n}^{\mu}\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{-n}^{\nu}} |0\rangle |\bar{0}\rangle \qquad (5.25)$$

com $S_{\mu\nu}$ determinando a assinatura de quais direções são paralelas e quais são perpendiculares à brana. Portanto, as D-branas podem ser vistas como estados condensados puros (ver [60]).

Uma comparação simples entre (5.25) e (5.13) mostra que ambos pertencem à mesma categoria de estados. A dizer, $|B(\theta)\rangle$ é um estado coerente [59], [60] que representa uma brana que compreende todas as direções espaciais dotada entretanto de um fator de fase global α assim como uma distribuição não-trivial de amplitudes para os níveis n associada aos osciladores A_n^μ e $\bar{A}_n^\mu$

$$\begin{aligned} A_n^\mu |B(\theta)\rangle - \alpha\theta_n \bar{A}_n^{\mu\dagger} |B(\theta)\rangle &= 0 \ , \qquad (5.26) \\ \bar{A}_n^\mu |B(\theta)\rangle - \alpha\theta_n A_n^{\mu\dagger} |B(\theta)\rangle &= 0. \qquad (5.27) \end{aligned}$$

Uma importante investigação neste ponto consiste em compreender o papel desempenhado pelo parâmetro $\alpha\theta_n$. Como já foi estudado anteriormente na literatura [59], [60], as D-branas em nível de árvore podem ser tomadas enquanto um tipo particular de estados puros. Neste sentido se pode dizer que o fator $\alpha\theta_n$ em (5.13) representa uma forma de ruído para o estado de D-brana, a dizer, o ruído característico à interação a 1-loop. Em outras paIavras, $\alpha\theta_n$ representa uma renormalização com respeito ao estado de fronteira em nível de árvore.

Ainda, uma vez que o fator de fase $\alpha\theta_n$ é uma consequência das interações das cordas, é pertinente a pergunta de como este fator depende da escala de energia. Devido à presença explícita do parâmetro τ_2 em α é simples ver que o emaranhamento diverge em baixas energias

$$\lim_{\tau_2 \longmapsto +\infty} \alpha\left(\tau_1, \tau_2\right) = +\infty \tag{5.28}$$

e tende a um valor finito (e perturbativo) em altas energias

$$0 < \lim_{|\tau| \longmapsto 1} \alpha\left(\tau_1, \tau_2\right) < 1 \ . \tag{5.29}$$

Além disso, já que $\alpha\left(\tau_2\right)$ não possui raízes reais, não existe nenhum ponto da escala de energia livre do emaranhamento.

Pontos fixos $\left(\partial\alpha/\partial\tau_2\right) = 0$, por outro lado são encontrados ao longo de uma hipérbole no espaço modular estendido

$$\left(\tau_2\right)^2 - \left(\tau_1\right)^2 = 1 \ . \tag{5.30}$$

As transformações modulares são finalmente responsáveis por mapear estes pontos de volta à região fundamental.

5.4 Entropia

Devido ao fato de que no canal aberto, as D-branas aparecem enquanto condensados puros de cordas fechadas, estes objetos são frequentemente vistos como fundos gravitacionais. Este aspecto sugere que as D-branas devem desempenhar um papel fundamental numa formulação final da gravidade em nível microscópico, isto é, espera-se que as propriedades que nós usualmente associamos à geometria do espaço-tempo devam ser deriváveis a partir de cáculos envolvendo as D-Branas.

Desta perspectiva é interessante examinar a microestrutura do condensado encontrado.

Para isso procedemos com a avaliação da entropia S_n para o nível-n

$$S_n = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{\beta}\ln\left(Z_n^{(B)}(\beta)\right)\right] \tag{5.31}$$

$$= -\left(\frac{\omega_n}{\ln(\alpha\theta_n)}\right)^2 \ln[1-\alpha\theta_n] - \frac{(\omega_n)^2}{\alpha\ln(\alpha\theta_n)}\left(\frac{(\alpha\theta_n)^2}{1-\alpha\theta_n}\right) \tag{5.32}$$

com

$$Z_n^{(B)}(\beta) = \frac{1}{1-\exp(-\beta\omega_n)}\ ; \tag{5.33}$$

$$\alpha\theta_n = \exp(-\beta\omega_n)\ . \tag{5.34}$$

A análise mostra que o aparecimento dos estados de fronteira assim como seu emaranhamento são fenômenos característicos das altas energias e das baixas temperaturas (comportamento esperado de um estado coerente)

$$\lim_{|\tau|\longmapsto 1} S_n < +\infty\ . \tag{5.35}$$

É informativo notar ainda que a temperatura é apenas positivo-definida para valores $\alpha\theta_n < 1$. De fato, a entropia S_n também é apenas positivo-definida para os mesmos valores de $\alpha\theta_n$, o que acontece em altas energias no limite $|\tau| \longmapsto 1$ e baixos modos n.

Além disso, é importante salientar que $Z_n^{(B)}(\beta)$ é uma *função de partição para a folha mundo*: este objeto conta estados para um determinado valor do parâmetro de Teichmüller e para um determinado nível. Como é conhecido, a função de partição completa da corda é tomada por meio da integração em τ sobre a região fundamental do espaço modular. Entretanto, nosso interesse aqui é explorar a microestrutura da dinâmica da folha-mundo devido às interações das cordas e procurar mecanismos que assinalem a condensação das cordas fechadas em cada nível da escala de energia do grupo de renormalização com o propósito final de encontrar pistas de como diferentes geometrias do espaço-tempo podem emergir da análise na folha-mundo.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Na presente tese discutimos como, efeitos de condensação aparecem no contexto da teoria de cordas. Uma classe de objetos importantes para esta discussão consiste nas D-Branas visto que do ponto de vista de sua representação em termos dos estados de fronteira, estes objetos aparecem enquanto um exemplo de estado condensado de cordas fechadas no nível quântico. Por consequência do modo de spin 2 das cordas pertencer ao setor de cordas fechadas, o estado de fronteira coloca a D-brana enquanto um condensado de grávitons o que a torna forte candidata à descrição da formação de fundos gravitacionais nas teorias de cordas.

Ainda, nas teorias de Supercordas, as D-branas adquirem um estatus special. Devido às suas massa e cargas de supersimetria não-triviais, estes objetos aparecem como exemplos de estados BPS, e devido ao seu acoplamento com os campos de Ramond-Ramond (RR), sua estabilidade pode ser discutida em termos de suas cargas RR [125].

Tendo como ponto de partida a construção do formalismo TFD onde estados térmicos são obtidos por meio das transformações de Bogoliubov de dois modos, obtivemos o estado de D-Brana bosônica termalizada em compactificações toroidais e na presença de campos de fundo frios no capítulo 3. Este resultado representa uma generalização da literatura [32] e [33] e [36] nos quais a termalização das D-branas bosônicas e as D-branas supersimétricas no formalismo GS foi obtida em espaço plano e sua entropia calculada. A fim de se obter o estado de fronteira térmico, o formalismo TFD foi generalizado de modo a incluir o setor de modo zero da corda em T^{d-p-1} e tal generalização foi usada na obtenção da entropia e a energia livre da corda fechada à temperatura finita. Pode-se dizer que a generalização do formalismo TFD é por si só um resultado interessante na medida em que ele estende o método de termalização canônica à condições de fronteira não-triviais e generaliza os estudos precedentes [70] e [71] os quais estabelecem a forma do operador de Bogoliubov para campos escalares e espinoriais em T^{d-p-1} sem entretanto lidar com a questão do número de voltas nos ciclos toroidais que é específica aos campos da corda. Com estas condições de fronteira, o mapa desde o espaço de Hilbert à temperatura zero no espaço de Hilbert à temperatura finita deve ser generalizado ao produto direto dado em $\hat{\Omega}\left(\beta_T\right) \otimes e^{i\hat{G}(\beta_T)}$. O operador $\hat{\Omega}\left(\beta_T\right)$ leva os estados do setor de modo zero da corda à temperatura zero nos correspondentes estados à temperatura finita e com isso possibilita a extensão do formalismo TFD ao setor topológico.

Como encaminhamento futuro desta linha de investigação, uma possibilidade interessante é o estudo da versão térmica das D-branas supersimétricas magnéticas. Vale salientar que enquanto a construção de D-branas térmicas a partir de D-branas supersimétricas em espaços planos (e estendidos) na ausência de campos de fundo foi levada a cabo em [36] por meio do formalismo GS, a construção no formalismo RNS ainda é uma seara aberta mesmo em espaços planos.

A análise detalhada das propriedades termodinâmicas das D-branas térmicas magnéticas é um problema desafiador. Devido à existência de infinitos modos da corda e da presença do fator de normalização $N_{p-1}\left(B\right)$ e $N_{d-p-1}\left(B\right)$ nos estados de fronteira, muitas das quantidades termodinâmicas são divergentes e devem ser renormalizadas antes de lhes ser possível a atribuição de qualquer significado físico. Este é um problema geral presente tanto na descrição em termos de estados de fronteira das D-branas à temperatura zero quanto à temperatura finita. Entretanto, informações interessantes podem ser obtidas mediante truncamento da escala de energia/número de modos da corda. Este truncamento pode ser valioso na análise das D-branas térmicas magnéticas através da associação do parâmetro de escala com o raio de compactificação R e requer um tratamento cuidadoso da questão da dualidade-T nas direções compactas à temperatura finita.

No capítulo 4 desta tese foi dado um tratamento canônico ao problema de cordas nas proximidades de singularidades cosmológicas do tipo onda plana com base no formalismo NETFD para campos fora do equilíbrio. Este método permite a construção e interpretação do espaço de estados bem como a computação de funções de correlação para a corda térmica. As funções de correlação para os osciladores da corda recebem correções do contratermo $\hat{Q}$ o qual gera a evolução temporal do parâmetro de número $n_{|\nabla|}(\tau)$. Comparado à literatura existente, estes resultados são similares aos obtidos no caso do campo escalar relativístico no espaço de Minkowski [107], [108], [109]. Entretanto, os graus de liberdade extras proporcionados pelo centro de massa da corda não possuem qualquer análogo na teoria de campos térmicos. Consequentemente, com o intuito de computar o comportamento térmico deste setor, foi necessário generalizar o formalismo NETFD postulando-se novas relações de comutação para as variáveis canonicamente conjugadas associadas ao centro de massa (4.63) que sejam consistentes com os comutadores a tempos iguais dos campos térmicos (4.51) , (4.52) e (4.55). No limite de pequenas variações temporais do parâmetro de número, o formalismo NETFD viabiliza uma abordagem perturbativa no cálculo das funções de correlação que foi usada aqui na computação da função de dois pontos em ordem zero de perturbação. Devido à importância das aplicações da teoria de cordas fora do equilíbrio, entendemos que o desenvolvimento posterior do método apresentado neste trabalho merece atenção. Em particular, é importante calcular a função de dois pontos em primeira ordem de perturbação e a equação que descreve a evolução temporal das correlações térmicas.

No capítulo 5 foi discutido como uma versão emaranhada das D-branas aparece nos cálculos de 1-loop das cordas bosônicas devido à presença do fator $\alpha\theta_n$ o qual é uma consequência direta das interações das cordas/topologia da folha-mundo segundo assinalado pelo parâmetro de Teichmüller τ.

Levando-se em consideração que o entendimento da microestrutura intrínseca das D-branas deve ser um passo importante na conquista de uma formulação consistente do fenômeno gravitacional em altas energias, acreditamos que o mecanismo simples discutido neste trabalho pode trazer algum ar novo para esta caminhada. Passos futuros nesta direção incluem a generalização ao caso supersimétrico, consideração de topologias mais sofisticadas, assim como lidar com a questão de como D-branas com dimensionalidade inferior percebem a presença das interações das cordas.

Ainda, acreditamos que uma linha inteira e não-explorada de pesquisa se encontra escondida sob a hipótese de desacoplamento dos modos de altas energias na interpretação de Wilson do grupo de renormalização. No fundo ela envolve a hipótese de informação escondida [112] que por sua vez implica na existência de uma entropia inerente aos fluxos de renormalização ao longo da escala de energia. Esta linha de investigação tem sido explorada em associação ao princípio holográfico [126] e pode providenciar novas ferramentas úteis no trato dos enígmas envolvendo o centeúdo de informação, presentes nos cenários de gravidade quântica e na perspectiva da gravidade enquanto um efeito macroscópico [113], [115], [116], [117], [118], [119], [120], [121], [122] and [114].

Bibliografia

[1] R. Nardi, M. A. Santos and I. V. Vancea, "Thermal magnetized D-branes on $R^{1,p} \times T^{d-p-1}$ in the generalized Thermo Field Dynamics approach," J. Phys. A **44** (2011) 235403 [arXiv:1011.0574 [hep-th]].

[2] R. Nardi and I. V. Vancea, "Nonequilibrium dynamics of strings in time-dependent plane wave backgrounds," Nucl. Phys. B **859** (2012) 269 [arXiv:1112.4389 [hep-th]].

[3] R. Nardi, "Mixed boundary states from 1-loop bosonic closed strings," Physica A **392** (2013) 1188.

[4] R. F. Bishop and A. Vourdas, "Generalized Coherent States And Bogolyubov Transformations," J. Phys. A **19** (1986) 2525.

[5] R. J. Glauber, "The Quantum theory of optical coherence," Phys. Rev. **130** (1963) 2529.

[6] R. J. Glauber, "Coherent and incoherent states of the radiation field," Phys. Rev. **131** (1963) 2766.

[7] H. Umezawa, "Advanced field theory: Micro, macro, and thermal physics," New York, USA: AIP (1993) 238 p

[8] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson and A. R. Santana,

[9] R. Blumenhagen, B. Kors, D. Lust and S. Stieberger, "Four-dimensional String Compactifications with D-Branes, Orientifolds and Fluxes," Phys. Rept. **445** (2007) 1 [hep-th/0610327].

[10] R. Blumenhagen, B. Kors and D. Lust, "Type I strings with F flux and B flux," JHEP **0102** (2001) 030 [hep-th/0012156].

[11] M. Larosa, "Magnetized type I orbifolds in four-dimensions," hep-th/0212109.

[12] R. Blumenhagen, D. Lust and T. R. Taylor, "Moduli stabilization in chiral type IIB orientifold models with fluxes," Nucl. Phys. B **663** (2003) 319 [hep-th/0303016].

[13] J. F. G. Cascales and A. M. Uranga, "Chiral 4-D string vacua with D-branes and moduli stabilization," hep-th/0311250.

[14] L. Gorlich, "N = 1 and nonsupersymmetric open string theories in six and four space-time dimensions," hep-th/0401040.

[15] I. Antoniadis and S. Dimopoulos, "Splitting supersymmetry in string theory," Nucl. Phys. B **715** (2005) 120 [hep-th/0411032].

[16] I. Antoniadis, A. Kumar and B. Panda, "Supersymmetric SU(5) GUT with stabilized moduli," Nucl. Phys. B **795** (2008) 69 [arXiv:0709.2799 [hep-th]].

[17] C. -M. Chen, T. Li and D. V. Nanopoulos, "Standard-like model building on Type II orientifolds," Nucl. Phys. B **732** (2006) 224 [hep-th/0509059].

[18] M. Bianchi and E. Trevigne, "The Open story of the magnetic fluxes," JHEP **0508** (2005) 034 [hep-th/0502147].

[19] I. Antoniadis, A. Kumar and T. Maillard, "Moduli stabilization with open and closed string fluxes," hep-th/0505260.

[20] M. Billo, M. Frau, I. Pesando, P. Di Vecchia, A. Lerda and R. Marotta, "Instanton effects in N=1 brane models and the Kahler metric of twisted matter," JHEP **0712** (2007) 051 [arXiv:0709.0245 [hep-th]].

[21] M. Billo, "(D)-instanton effects in magnetized brane worlds," arXiv:0804.0755 [hep-th].

[22] P. Di Vecchia, A. Liccardo, R. Marotta and F. Pezzella, "Kahler Metrics and Yukawa Couplings in Magnetized Brane Models," JHEP **0903** (2009) 029 [arXiv:0810.5509 [hep-th]].

[23] P. Di Vecchia, A. Liccardo, R. Marotta and F. Pezzella, "Kahler Metrics: String vs Field Theoretical Approach," Fortsch. Phys. **57** (2009) 718 [arXiv:0901.4458 [hep-th]].

[24] I. Antoniadis, "Topics on String Phenomenology," arXiv:0710.4267 [hep-th].

[25] P. Di Vecchia, A. Liccardo, R. Marotta, F. Pezzella and I. Pesando, "Boundary state for magnetized D9 branes and one-loop calculation," hep-th/0601067.

[26] D. Duo, R. Russo and S. Sciuto, "New twist field couplings from the partition function for multiply wrapped D-branes," JHEP **0712** (2007) 042 [arXiv:0709.1805 [hep-th]].

[27] G. 't Hooft, "Some Twisted Selfdual Solutions for the Yang-Mills Equations on a Hypertorus," Commun. Math. Phys. **81** (1981) 267.

[28] P. Di Vecchia, A. Liccardo, R. Marotta, I. Pesando and F. Pezzella, "Wrapped magnetized branes: two alternative descriptions?," JHEP **0711** (2007) 100 [arXiv:0709.4149 [hep-th]].

[29] I. Pesando, "Boundary states for branes with non trivial homology in constant closed and open background," hep-th/0505052.

[30] I. Pesando, "Open and Closed String Vertices for branes with magnetic field and T-duality," JHEP **1002** (2010) 064 [arXiv:0910.2576 [hep-th]].

[31] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson and A. E. Santana, Annals Phys. **326** (2011) 2634 [arXiv:1107.5717 [hep-th]].

[32] I. V. Vancea, "Bosonic D-branes at finite temperature," Phys. Lett. B **487** (2000) 175 [hep-th/0006228].

[33] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, "Bosonic D-branes at finite temperature with an external field," Phys. Rev. D **64** (2001) 086005 [hep-th/0104068].

[34] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, "On the SU(1,1) thermal group of bosonic strings and D-branes," Phys. Rev. D **66** (2002) 065005 [hep-th/0203222].

[35] I. V. Vancea, "Thermal D-brane boundary states from Green-Schwarz superstrings," Phys. Rev. D **74** (2006) 086002 [hep-th/0607167].

[36] I. V. Vancea, "Thermal D-brane boundary states from type IIB Green-Schwarz superstring in pp-wave background," Int. J. Mod. Phys. A **23** (2008) 4485 [arXiv:0712.1569 [hep-th]].

[37] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, "TFD approach for bosonic strings and D(p) branes," Int. J. Mod. Phys. A **18** (2003) 2109 [hep-th/0301249].

[38] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, "D-branes at finite temperature in TFD," hep-th/0308114.

[39] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, "Bosonic Dp-branes at finite temperature in TFD approach," Nucl. Phys. Proc. Suppl. **127** (2004) 92.

[40] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and I. V. Vancea, "On (b,c) system at finite temperature in thermo field approach," Phys. Lett. A **273** (2000) 235 [hep-th/0003209].

[41] H. Belich, E. L. Graca, M. A. Santos and I. V. Vancea, "First order Semiclassical thermal string in the black-hole AdS spacetime," JHEP **0702** (2007) 037 [hep-th/0610271].

[42] Y. Leblanc, "String Field Theory At Finite Temperature," Phys. Rev. D **36** (1987) 1780.

[43] Y. Leblanc, "Finite Temperature Amplitudes In Open String Systems," Phys. Rev. D **37** (1988) 1547.

[44] Y. Leblanc, "Cosmological Aspects Of The Heterotic String Above The Hagedorn Temperature," Phys. Rev. D **38** (1988) 3087.

[45] Y. Leblanc, "Improved Integral Representation For The Finite-temperature Propagator In String Theory," Phys. Rev. D **39** (1989) 1139.

[46] Y. Leblanc, M. Knecht and J. C. Wallet, "Regularization of finite temperature string theories," Phys. Lett. B **237** (1990) 357.

[47] Y. Leblanc, "Generalized McClain-Roth-O'Brien-Tan theorem and the string free energy at higher genus," Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 831.

[48] H. Fujisaki, K. Nakagawa and I. Shirai, "Comments On The Thermal Neveu-schwarz-ramond Superstring," Prog. Theor. Phys. **81** (1989) 570.

[49] H. Fujisaki and K. Nakagawa, "Renormalizability Of Open Bosonic Thermal Strings," Prog. Theor. Phys. **82** (1989) 1017.

[50] H. Fujisaki and K. Nakagawa, "Infrared behavior of the type I Neveu-Schwarz-Ramond open thermal superstring," Europhys. Lett. **14** (1991) 737.

[51] H. Fujisaki and K. Nakagawa, "Infrared behavior of the type II closed thermal superstring," Europhys. Lett. **20** (1992) 677.

[52] H. Fujisaki, "Dimensional regularization of the closed bosonic thermal string," Europhys. Lett. **28** (1994) 623.

[53] H. Fujisaki, "Thermo field dynamics of the heterotic string: Physical aspects of the thermal duality," Europhys. Lett. **39** (1997) 479 [hep-th/9704180].

[54] D. L. Nedel, M. C. B. Abdalla and A. L. Gadelha, "Superstring in a pp-wave background at finite temperature: TFD approach," Phys. Lett. B **598** (2004) 121 [hep-th/0405258].

[55] M. C. BAbdalla, A. L. Gadelha and D. L. Nedel, "PP-wave light-cone free string field theory at finite temperature," JHEP **0510** (2005) 063 [hep-th/0508195].

[56] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and D. L. Nedel, "Closed string thermal torus from thermofield dynamics," Phys. Lett. B **613** (2005) 213 [hep-th/0410068].

[57] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and D. L. Nedel, "Perspectives of TFD on string theory," PoS WC **2004** (2004) 020 [hep-th/0412134].

[58] M. C. B. Abdalla, A. L. Gadelha and D. L. Nedel, "General unitary TFD formulation for superstrings," PoS WC **2004** (2004) 032 [hep-th/0412128].

[59] M. B. Cantcheff, "D-branes as coherent states in the open string channel," Eur. Phys. J. C **55** (2008) 517 [arXiv:0710.3186 [hep-th]].

[60] M. B. Cantcheff, "String Entanglement and D-branes as Pure States," Phys. Rev. D **80** (2009) 046001 [arXiv:0906.3049 [hep-th]].

[61] M. A. Vazquez-Mozo, "Open string thermodynamics and D-branes," Phys. Lett. B **388** (1996) 494 [hep-th/9607052].

[62] J. Ambjorn, Y. .Makeenko, G. W. Semenoff and R. J. Szabo, "Screening and D-brane dynamics in finite temperature superstring theory," Phys. Rev. D **60** (1999) 106009 [hep-th/9906134].

[63] J. Ambjorn, Y. M. Makeenko, G. W. Semenoff and R. J. Szabo, "String theory in electromagnetic fields," JHEP **0302** (2003) 026 [hep-th/0012092].

[64] K. Hotta, "Finite temperature systems of brane antibrane pairs and nonBPS D-branes," Prog. Theor. Phys. **112** (2004) 653 [hep-th/0403078].

[65] S. Alexander, R. H. Brandenberger and D. A. Easson, "Brane gases in the early universe," Phys. Rev. D **62** (2000) 103509 [hep-th/0005212].

[66] R. H. Brandenberger and C. Vafa, "Superstrings in the Early Universe," Nucl. Phys. B **316** (1989) 391.

[67] P. Di Vecchia and A. Liccardo, "D-branes in string theory. 1.," NATO Adv. Study Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. **556** (2000) 1 [hep-th/9912161].

[68] P. Di Vecchia and A. Liccardo, "D-branes in string theory. 2.," hep-th/9912275.

[69] J. C. da Silva, F. C. Khanna, A. Matos Neto and A. E. Santana, "Generalized Bogolyubov transformation for confined fields: Applications in Casimir effect," hep-th/0208183.

[70] H. Queiroz, J. C. da Silva, F. C. Khanna, J. M. C. Malbouisson, M. Revzen and A. E. Santana, "Thermofield dynamics and Casimir effect for fermions," Annals Phys. **317** (2005) 220 [Erratum-ibid. **321** (2006) 1274] [hep-th/0411228].

[71] E. Alvarez and M. A. R. Osorio, "Superstrings at Finite Temperature," Phys. Rev. D **36** (1987) 1175.

[72] M. C. BAbdalla, A. L. Gadelha and D. L. Nedel, "On the entropy operator for the general SU(1,1) TFD formulation," Phys. Lett. A **334** (2005) 123 [hep-th/0409116].

[73] E. Kiritsis, "String theory in a nutshell," Princeton University Press, 2007

[74] H. J. de Vega and N. G. Sanchez, “Lectures on string theory in curved space-times,” In *Erice 1995, String gravity and physics at the Planck energy scale* 11-63 [hep-th/9512074].

[75] M. Blau, J. M. Figueroa-O’Farrill, C. Hull and G. Papadopoulos, “Penrose limits and maximal supersymmetry,” Class. Quant. Grav. **19** (2002) L87 [hep-th/0201081].

[76] J. G. Russo and A. A. Tseytlin, “A Class of exact pp wave string models with interacting light cone gauge actions,” JHEP **0209** (2002) 035 [hep-th/0208114].

[77] G. Papadopoulos, J. G. Russo and A. A. Tseytlin, “Solvable model of strings in a time dependent plane wave background,” Class. Quant. Grav. **20** (2003) 969 [hep-th/0211289].

[78] B. Craps, F. De Roo and O. Evnin, “Can free strings propagate across plane wave singularities?,” JHEP **0903** (2009) 105 [arXiv:0812.2900 [hep-th]].

[79] B. Craps, D. Kutasov and G. Rajesh, “String propagation in the presence of cosmological singularities,” JHEP **0206** (2002) 053 [hep-th/0205101].

[80] K. Narayan, “Null cosmological singularities and free strings,” Phys. Rev. D **81** (2010) 066005 [arXiv:0909.4731 [hep-th]].

[81] K. Narayan, “Null cosmological singularities and free strings: II,” JHEP **1101** (2011) 145 [arXiv:1012.0113 [hep-th]].

[82] B. Craps and O. Evnin, “Light-like Big Bang singularities in string and matrix theories,” Class. Quant. Grav. **28** (2011) 204006 [arXiv:1103.5911 [hep-th]].

[83] A. L. Gadelha, D. Z. Marchioro and D. L. Nedel, “Entanglement and entropy operator for strings in pp-wave time dependent background,” Phys. Lett. B **639** (2006) 383 [hep-th/0605237].

[84] L. A. Pando Zayas and D. Vaman, "Strings in RR plane wave background at finite temperature," Phys. Rev. D **67** (2003) 106006 [hep-th/0208066].

[85] B. R. Greene, K. Schalm and G. Shiu, "On the Hagedorn behaviour of PP wave strings and N=4 SYM theory at finite R charge density," Nucl. Phys. B **652** (2003) 105 [hep-th/0208163].

[86] Y. Sugawara, "Thermal amplitudes in DLCQ superstrings on PP waves," Nucl. Phys. B **650** (2003) 75 [hep-th/0209145].

[87] Y. Sugawara, "Thermal partition function of superstring on compactified PP wave," Nucl. Phys. B **661** (2003) 191 [hep-th/0301035].

[88] R. C. Brower, D. A. Lowe and C. -ITan, "Hagedorn transition for strings on pp waves and tori with chemical potentials," Nucl. Phys. B **652** (2003) 127 [hep-th/0211201].

[89] G. Grignani, M. Orselli, G. W. Semenoff and D. Trancanelli, "The Superstring Hagedorn temperature in a pp wave background," JHEP **0306** (2003) 006 [hep-th/0301186].

[90] S. -j. Hyun, J. -D. Park and S. -H. Yi, "Thermodynamic behavior of IIA string theory on a pp wave," JHEP **0311** (2003) 006 [hep-th/0304239].

[91] A. Hashimoto and L. Pando Zayas, "Correspondence principle for black holes in plane waves," JHEP **0403** (2004) 014 [hep-th/0401197].

[92] F. Bigazzi and A. L. Cotrone, "On zero point energy, stability and Hagedorn behavior of type IIB strings on pp waves," JHEP **0308** (2003) 052 [hep-th/0306102].

[93] O. Evnin and T. Nguyen, "On discrete features of the wave equation in singular pp-wave backgrounds," JHEP **0809** (2008) 105 [arXiv:0806.3057 [hep-th]].

[94] S. P. Kim, “Liouville-Neumann approach to the nonperturbative quantum field theory,” In *Seoul 1997, Recent developments in nonperturbative quantum field theory* 345-352 [hep-th/9706052].

[95] S. P. Kim and C. H. Lee, “Nonequilibrium quantum dynamics of second order phase transitions,” Phys. Rev. D **62** (2000) 125020 [hep-ph/0005224].

[96] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, “An Exact quantum theory of the time dependent harmonic oscillator and of a charged particle time dependent electromagnetic field,” J. Math. Phys. **10** (1969) 1458.

[97] E. G. Gimon, L. A. Pando Zayas and J. Sonnenschein, “Penrose limits and RG flows,” JHEP **0209** (2002) 044 [hep-th/0206033].

[98] K. Sfetsos, “The Exact description of NS5-branes in the Penrose limit,” Nucl. Phys. B **669** (2003) 103 [hep-th/0305109].

[99] M. Blau, M. Borunda and M. O’Loughlin, “On the Hagedorn behaviour of singular scale-invariant plane waves,” JHEP **0510** (2005) 047 [hep-th/0412228].

[100] H. Fujisaki and K. Nakagawa, “The Thermal Stability Of Renormalization Of Open Bosonic Strings,” Prog. Theor. Phys. **82** (1989) 236.

[101] H. Matsumoto, “Quasiparticle Field In Nonequilibrium Quantum Field Theory,” Physica A **158** (1989) 291.

[102] P. A. Henning, “Thermo field dynamics for quantum fields with continuous mass spectrum,” Phys. Rept. **253** (1995) 235.

[103] T. Arimitsu and H. Umezawa, “A General Formulation Of Nonequilibrium Thermo Field Dynamics,” Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 429.

[104] T. Arimitsu and H. Umezawa, “Nonequilibrium Thermo Field Dynamics,” Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.

[105] T. Arimitsu and H. Umezawa, “General Structure Of Nonequilibrium Thermo Field Dynamics,” Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 53.

[106] H. Umezawa and Y. Yamanaka, “Selfconsistent Renormalization In Thermo Field Dynamics,” J. Phys. A **22** (1989) 2461.

[107] Y. Mizutani and T. Inagaki, “Boltzmann Equation for Relativistic Neutral Scalar Field in Non-equilibrium Thermo Field Dynamics,” Prog. Theor. Phys. **125** (2011) 933 [arXiv:1011.0281 [hep-th]].

[108] Y. Mizutani, T. Inagaki, Y. Nakamura and Y. Yamanaka, “Canonical Quantization for a Relativistic Neutral Scalar Field in Non-equilibrium Thermo Field Dynamics,” Prog. Theor. Phys. **126** (2011) 681 [arXiv:1105.5952 [hep-th]].

[109] Y. Mizutani and T. Inagaki, “Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics for Relativistic Complex Scalar and Dirac Fields,” Int. J. Mod. Phys. A **27** (2012) 1250078 [arXiv:1111.7083 [hep-th]].

[110] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory. Vol. 1: Introduction,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)

[111] K. G. Wilson and J. B. Kogut, “The Renormalization group and the epsilon expansion,” Phys. Rept. **12** (1974) 75.

[112] S. M. Apenko, “Information theory and renormalization group flows,” Physica A **391** (2012) 62 [arXiv:0910.2097 [cond-mat.stat-mech]].

[113] E. P. Verlinde, “On the Origin of Gravity and the Laws of Newton,” JHEP **1104** (2011) 029 [arXiv:1001.0785 [hep-th]].

[114] M. B. Cantcheff, “Spacetime Geometry as Statistic Ensemble of Strings,” arXiv:1105.3658 [hep-th].

[115] J. Makela and A. Peltola, "Gravitation and thermodynamics: The Einstein equation of state revisited," Int. J. Mod. Phys. D **18** (2009) 669 [gr-qc/0612078].

[116] T. Padmanabhan, "Gravity as elasticity of spacetime: A Paradigm to understand horizon thermodynamics and cosmological constant," Int. J. Mod. Phys. D **13** (2004) 2293 [gr-qc/0408051].

[117] T. Padmanabhan, "Thermodynamical Aspects of Gravity: New insights," Rept. Prog. Phys. **73** (2010) 046901 [arXiv:0911.5004 [gr-qc]].

[118] T. Padmanabhan, "Lessons from Classical Gravity about the Quantum Structure of Spacetime," J. Phys. Conf. Ser. **306** (2011) 012001 [arXiv:1012.4476 [gr-qc]].

[119] A. D. Sakharov, "Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation," Sov. Phys. Dokl. **12** (1968) 1040 [Dokl. Akad. Nauk Ser. Fiz. **177** (1967) 70] [Sov. Phys. Usp. **34** (1991) 394] [Gen. Rel. Grav. **32** (2000) 365].

[120] T. Jacobson, "Thermodynamics of space-time: The Einstein equation of state," Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 1260 [gr-qc/9504004].

[121] G. E. Volovik, "The Universe in a helium droplet," Int. Ser. Monogr. Phys. **117** (2006) 1.

[122] N. Seiberg, "Emergent spacetime," hep-th/0601234.

[123] R. Brustein and K. Roland, "Space-Time Versus World Sheet Renormalization Group Equation In String Theory," Nucl. Phys. B **372** (1992) 201.

[124] T. Domanski "Flow equation approach to the pairing problemsCond. Mat. Phys. **11**, (2008) 195 [arXiv:0602236 [cond-mat]].

[125] J. Polchinski, "Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges," Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724 [hep-th/9510017].

[126] T. Albash and C. V. Johnson, "Holographic Entanglement Entropy and Renormalization Group Flow," arXiv:1110.1074 [hep-th].

[127] K. Skenderis, "Lecture notes on holographic renormalization," Class. Quant. Grav. **19** (2002) 5849 [hep-th/0209067].