Dissertação de

Mestrado

Aspectos da Torção nas Teorias Quânticas da Gravidade

Rafael Nardi

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF

Rio de Janeiro, Julho de 2008

Dedicatória

Aos meus pais por enfatizarem sempre o valor do conhecimento.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir apreciar a beleza da sua criação. Agradeço ao professor José Abdala Helayel Neto pelas memoráveis aulas e discussões, que muito me incentivaram a cultivar minha paixão pela Física. Aos meus pais, Aristeu Nardi e Elizabeth Maria do Nascimento Nardi, pelo irrestrito apoio e compreensão nos momentos difíceis, e valorização pelas conquistas. Agradeço à Julia Matos, pelo companheirismo e carinho. À Catarina Arnoldi, peça fundamental nas minhas realizações pessoais e profissionais destes dois anos. Catarina, além de tudo, você me ensinou muita Física !! Aos muitos "camaradas": Guto, Toca, Diego, Emmanuel, Dudu, Rodrigo, Chileno, Marcus, Alfredo, Carlos (Carlos André Hernaski foi parceiro em grande parte das contas deste trabalho), Victor, e muitos outros que não caberiam aqui. Enfim, agradeço a todas as pessoas com quem troquei experiências construtivas ao longo de minha vida me possibilitando chegar aqui hoje. *Good Vibes for all !!!* Agradeço por fim ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

Os estudos do comportamento da interação gravitacional em micro-escala, apontam para a torção como uma componente fundamental na caracterização da dinâmica desta interação. Isto é sugerido tanto na abordagem da Gravidade Quântica de Laços (*Loop Quantum Gravity*) quanto na teoria das Supercordas, que se apresentam como as duas principais candidatas para solucionar o problema. Para tanto, estas duas construções se valem do tratamento da interação gravitacional como uma teoria de gauge segundo a estratégia proposta por Utyama/Kibble/Sciama (1955). Esse contexto serviu de motivação para desenvolvermos, neste trabalho, uma base de projetores de spin para tensores de rank-3 que permite caracterizar teorias gerais de gravitação na presença de torção, a nível de árvore, segundo suas excitações locais. Em seguida, aplicamos o método a um problema específico, inspirado nas teorias gravitacionais oriundas das Supercordas (cordas fechadas do tipo II), no regime de baixas energias.

Abstract

Studies of the gravitational behaviour at the microscale points towards a very important role played by torsion in caracterizing dynamics of gravitation. This is suggested by both Loop Quantum Gravity and Superstring Theory, the two main candidates to give a consistent description of Nature in this scale. In these fundamental scenarios, gravity is regarded as a gauge theory following the proposal by Utyama/Kibble/Sciama (1955). In this work, we develop a new basis of spin-projectors in the space spanned by rank-3 Lorentz tensors that may be useful in determining the dynamics of gravitational theories with torsion at the tree approximation, in terms of its fundamental local excitations. Also, we apply our set-up to a specific problem, inspired by low-energy effective string theories.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

A Física enquanto ciência tem por objetivo descrever a evolução dinâmica dos sistemas. No método analítico da Física Moderna, isto se repercute em entendê-los como entidades compostas cujas partes interagem entre si. Com esta postura, a princípio, o reconhecimento das sub-partes de um sistema e as interações envolvidas, ou seja, a forma como as várias componentes trocam informações entre si e modificam por consequência os seus atributos, deve em princípio ser suficiente para resolver qualquer problema de física considerado.

Ao longo do século XX, esta postura foi sistematicamente empregada, tendo passado por uma profunda reinterpretação com o advento da mecânica quântica e culminando na física de partículas elementares, por sua vez representada simbolicamente pelas teorias quânticas de campos.

Pode-se dizer que o grande triunfo desta metodologia é o Modelo Padrão da Física de Partículas, uma teoria quântica de campos baseada num princípio de simetria local (teoria de Yang-Mills) sob transformações do grupo $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, que descreve 3 das conhecidas 4 interações fundamentais da natureza - o eletromagnetismo e as forças nucleares forte e fraca.

Paradoxalmente, enquanto o entendimento da dinâmica se revolucionou no mundo microscópico com a Mecânica Quântica, a gravitação, de todas a mais antiga qua a humanidade conhece, se revolucionou no sentido mais holístico possível com a Teoria da Relatividade geral de Einstein.

O fato de que a massa inercial m_i e a massa gravitacional m_g sejam iguais leva ao cancelamento da carga da interação na segunda lei de Newton,

$$G\frac{Mm_g}{r^2} = m_i\frac{d^2}{dt^2}r \implies G\frac{M}{r^2} = \frac{d^2}{dt^2}r \tag{1.1}$$

e, portanto, a carga da interação de cada um dos participantes de um processo não é determinante na forma como este é afetado. Isso permitiu a construção por Einstein de uma teoria que descreve o movimento por meio da dinâmica da geometria do espaço que cada um dos interagentes percebe. Com isso, a Relatividade Geral aponta para uma dualidade entre energia e espaço e uma consequente reinterpretação do que propriamente é entendido como espaço, e por extensão, todo o universo.

Postas estas considerações, as duas construções parecem se basear em aspectos totalmente distintos da natureza. Enquanto as interações do modelo padrão da física de partículas são compreendidas com base nas propriedades intrínsecas à matéria, a Física das interações gravitacionais, por outro lado, é determinada por uma estrutura (aparentemente) alheia a esta - o espaço-tempo.

Neste sentido, uma vez que estas duas classes de fenômenos tratam de aspectos tão distintos da nossa percepção, coloca-se a pergunta: Qual a necessidade de se promover a teoria de campo da interação gravitacional ao caráter quântico? Em outras palavras, qual a necessidade de se quantizar a gravitação?

A resposta a esta pergunta ainda não é consenso na literatura [1], mas uma discussão vem da análise das equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \ . \tag{1.2}$$

No regime quântico da matéria, o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, ganha caráter operatorial, deste modo, se torna e é necessário reconstruir a equação (1.2) .

Três hipóteses se apresentam para isso:

$$G_{\mu\nu} = \kappa \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle \ ; \tag{1.3}$$

$$\langle G_{\mu\nu} \rangle = \kappa \langle T_{\mu\nu} \rangle \ ; \tag{1.4}$$

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \kappa \hat{T}_{\mu\nu} \ . \tag{1.5}$$

A equação (1.3) é referida na literatura como abordagem semi-clássica [2] ou teoria quântica de campos em espaços curvos. Embora esta prescrição seja razoável enquanto uma aproximação (e de fato foi usado por Hawking e Bekenstein para derivar o famoso resultado da entropia de buracos negros)[3] [4], quando encarada como uma afirmação fundamental (de que a geometria é inerentemente clássica e não deve ser quantizada) leva a diversas inconsistências.

O ponto mais problemático do método semi-clássico é que os próprios estados dos campos de matéria dependem da geometria sobre a qual se encontram que por sua vez é determinada por estes

$$G_{\mu\nu}\left(g\right) = \kappa \langle \hat{T}_{\mu\nu}\left(g;\phi\right) \rangle \ . \tag{1.6}$$

Desta forma, qualquer solução de (1.3) deve ser encontrada dentro de algum mecanismo autoconsistente de resolução até agora desconhecido.

Esta dependência implícita com a métrica levou à observação de que tais estados não devam obedecer ao princípio da superposição e desta forma a estrutura linear da mecânica quântica possivelmente deva ser abandonada quando se considera efeitos gravitacionais.

Além deste problema central de auto-consistência, não é fisicamente claro como o estado $|\ \rangle$ deva ser escolhido. Enquanto o lado direito da equação depende do espaço de Hilbert, o lado direito não, e com isso, computações de amplitudes de transição, com a escolha de estados "in"$|\ \rangle$ e "out"$\langle\ |$ no setor de matéria implica em valores complexos para quantidades cuja interpretação é puramente geométrica.

A segunda opção é a equação (1.4). Esta hipótese coloca a teoria fundamental da gravidade em micro-escala numa descrição completamente estatística no sentido clássico. Em particular, todas as leis de conservação de quantidades são respeitadas apenas nos valores médios. Isto colocaria o fenômeno gravitacional numa classe fundamentalmente distinta das outras interações nas quais as quantidades conservadas são respeitadas em cada processo individual.

Claramente este caráter peculiar deve ser discutido com base no que reconhecemos como os observáveis da gravitação. Este ponto ainda é polêmico na literatura, e desde a proposição da relatividade geral por Einstein ainda se discute o que define uma medida na relatividade geral (clássica!) [1] , [5], [6], [7] .

Uma crítica pragmática em relação a esta postura é simplesmente que a teoria desta forma nada diz a respeito da dinâmica da matéria quântica via interação gravitacional e funciona apenas como um aparelho cinemático de computação de grandezas estatísticas sobre a energia e momento. Do ponto de vista preditivo portanto, a teoria tem pouco (ou nada) a dizer sobre como funciona a natureza.

Com isto, resta a última candidata, a equação (1.5), que põe efetivamente o problema de se estudar os graus de liberdade da métrica como operadores lineares num espaço de estados e define propriamente o problema da gravidade quântica.

As equações de Euler-Lagrange entretanto são apenas a versão clássica de uma teoria e neste sentido o problema é mapeado no estudo das propriedades do gerador funcional

$$Z \equiv \int D\left[g\right] e^{-iS_{E-H}}$$

onde S_{E-H} é a ação de Einstein-Hilbert

$$S_{E-H} \equiv \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R \ .$$

Comparado com as outras interações entretanto o problema parece mal definido. Enquanto os campos das outras teorias são funções (funcionais lineares) com domínio no espaço-tempo de Minkowski e imagem numa determinada representação do grupo de

Lorentz, a métrica por outro lado é a definidora do próprio espaço sobre o qual a matéria interage.

Desta forma, a adaptação da linguagem das TQC ao problema da gravidade quântica passa por encontrar um método que permita incorporar a métrica curva do espaço-tempo como efetivamente definida sobre algum espaço plano. Tal construção foi realizada por Utyama em 1955 incorporando o grupo de Lorentz como uma simetria interna de uma teoria definida sobre um espaço plano, influenciado pelo então recente trabalho de Yang-Mills (1954) sobre simetrias internas locais. Após a demonstração realizada por t' Hooft na década de 70 da renormalizabilidade das teorias de YM, a estratégia de Utyama tomou uma posição central na discussão da gravidade quântica permitindo que de certa forma a interpretação geométrica seja flexibilizada em favor da descrição dinâmica de conexões num fibrado.

A fusão completa da abordagem das TQC à gravidade ainda passa entretanto por muitos outros problemas conceituais. A citar

- Quanto do aparato conceitual e técnico da relatividade geral, como a hipótese de que o espaço-tempo seja uma variedade infinitamente diferenciável, propriedades topológicas da métrica como a existência de horizontes de eventos e até mesmo a comutatividade das coordenadas espaciais deve ser mantido no processo de quantização?

- Possivelmente a própria interpretação de Copenhagem da MQ não seja mais apropriada já que a suposta realidade clássica agora quer ser entendida quânticamente.

- Quais fontes de matéria devem ser quantizadas com o campo gravitacional de forma a constituir uma teoria consistente? Supergravidade?

Em geral as investigações destas várias questões se desenvolveram ao longo da história da Gravidade Quântica em duas grandes escolas de pensamento. A escola da física de partículas e os partidários da relatividade geral clássica.

Embora instrumentalmente a discussão em ambas as comunidades envolva mais e mais elementos comuns, as hipóteses assumidas bem como a interpretação geral do fenômeno gravitacional ainda difere radicalmente em muitos pontos.

Na escola da física de partículas, a dinâmica de um campo quântico é identificada fundamentalmente no pólo de um propagador e nas correções de vértice advindas do lagrangiano de interação.

Para que esta estrutura seja realizada no lagrangiano de Einstein-Hilbert é necessário adotar a prescrição de campo fraco para a métrica

$$g_{\mu\nu} = {g^c}_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \ ,$$

em que a estrutura estocástica do campo quântico, que é avaliada na integração funcional, é supostamente carregada na flutuação $h_{\mu\nu}$ sobre alguma métrica estática ${g^c}_{\mu\nu}$ que seja solução das equações clássicas de Einstein.

Com esta prescrição a ação de Einstein-Hilbert toma a forma de um característico termo Gaussiano, responsável por um pólo e a consequente dinâmica dos graus de liberdade da teoria, seguido por uma série infinita de termos de interação indexados por potências na constante de acoplamento κ

$$S_{E-H} \longrightarrow S = \int d^4x \left\{ h^{\mu\nu} G_{\mu\nu;\alpha\beta} h^{\alpha\beta} + \sum_{j=1}^{\infty} (\kappa)^j \mathcal{L}^{(j)} \left(h_{\mu\nu}; \partial_\mu \right) \right\} .$$

Escolhendo-se a configuração métrica de fundo como a métrica de Minkowski ${g^c}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ a teoria de Einstein é desta forma posta em pé de igualdade com as outras teorias quânticas de campos. As flutuações da métrica sobre Minkowski $h_{\mu\nu}$ são identificadas como os quanta (o gráviton) da teoria, que por sua vez, enquanto uma legítima TQC, se propõe a calcular amplitudes de transição/seções de choque entre as suas excitações fundamentais (partículas).

O grande resultado desta abordagem é que a teoria resultante é não renormalizável, e portanto não faz sentido enquanto teoria fundamental.

Este resultado, pode ser concluído por uma simples análise dimensional da constante de acoplamento [8], [9], [10]. Uma vez que a constante de acoplamento κ tem dimensão de comprimento (comprimento de Planck $10^{-33}m$) ou $[massa]^{-1}$, um diagrama de Feynmann com n vértices, isto é, com uma potência em κ^n , deve acompanhar uma integral que como um todo tenha dimensão $[massa]^n$ para que no final o resultado seja uma amplitude de probabilidade (adimensional). Isso implica que gráficos a suficientemente altas ordens na constante de acoplamento (a depender da estrutura do gráfico) aparecem com integrais cujos integrandos têm dimensão positiva de energia/momento resultando por isso em infinitos quando avaliadas em todo o espaço dos momenta.

A interpretação moderna de teorias não renormalizáveis é de que a constante de acoplamento

$$g = \frac{1}{(m_0)^n} \ ; \ [m_0] = massa \ , \ n > 0$$

define o domínio de validade da teoria ao longo da escala de energia envolvida nos processos. Uma vez que $g < 1$ para a validade da expansão perturbativa, isto implica que o valor real do parâmetro de massa característico m_0 seja muito alto. Por consequência, a avaliação de integrais no espaço dos momenta sobre um volume maior do que o englobado por uma esfera de raio m_0 pode resultar (após multiplicação por g) em amplitudes de probabilidade maiores do que 1.

Visto de outra forma, a dimensão positiva em comprimento de g

$$g = (l_0)^n$$

indica que novos interagentes entram nos processos quando as distâncias testadas são menores do que l_0. Em outras palavras, as partículas associadas aos campos da teoria possuem estrutura interna e não são excitações legitimamente fundamentais.

Isto é ainda assinalado na série infinita de contratermos que surgem no processo de renormalização de tais teorias. As sucessivas altas potências de derivadas dos campos introduzem um caráter não-local na teoria mais uma vez indicando que as excitações quânticas dos campos da teoria tem caráter extendido e portanto composto.

Desta forma o método perturbativo aplicado à teoria de Einstein sugere que esta deva ser encarada apenas como o limite de baixas energias de alguma teoria mais funfamental ainda desconhecida e o gráviton deve ser visto como uma excitação composta.

Os trabalhos nesta filosofia portanto devem continuar no sentido de buscar extensões da relatividade geral que garantam renormalizabilidade e gerem a teoria de Einstein como limite de baixas energias.

O fenômeno gravitacional nesta filosofia emergiria via algum mecanismo de quebra de simetria em que o graviton apareceria como um condensado. Vários trabalhos nesta linha foram realizados na década de 80 por A. Zee [11], [12], [13], Adler [14], [15] e outros [16], [17]. Em geral estes modelos levam a inclusão de termos com potências superiores na curvatura que efetivamente garantem a renormalizabilidade em todas as ordens [18] entretanto introduzem estados com normas negativas (ghosts).

Ainda neste sentido novas simetrias foram buscadas de modo a incorporar os contratermos, o resultado disso hoje são as teorias supersimétricas, em particular as supergravidades, e as teorias de supercordas (que nasceu motivada pelos estudos de espalhamentos de hadrons) que além da supersimetria incorpora também a invariância modular (invariância sob diffeomorfismos gerais - possivelmente desconectados com a identidade - do toro) e fornece além de uma teoria para a gravidade, também uma possível origem unificada para todas as interações.

Outra possibilidade ainda pouco explorada é o estudo de extensões da RG através de termos com torção, que na construção da gravidade como uma teoria de YM aparece em pé de igualdade com a curvatura na composição do tensor intensidade de campo da teoria.

Termos de torção de fato aparecem no limite de baixas energias das teorias de cordas, geralmente associados ao tensor intensidade de campo do campo de Kalb-Ramond $B_{[\mu\nu]}$ [19]. Neste sentido, alguns autores interpretam uma possível detecção de torção como um indício de validade indireta da teoria das supercordas [20], [21].

Nas mais novas interpretações das dimensões espaciais extra sugeridas nas teorias de cordas, os chamados cenários de *Brane-Worlds* [22], [23], [24], a torção tem sido explorada também através da associação com o tensor intensidade do campo de Kalb-Ramond [25], [26]. O campo de Kalb-Ramond nesta visão pode caracterizar de alguma forma a topologia da variedade através da associação da parte pseudo-vetorial da torção $S_\mu \backsim \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}T^{\nu\kappa\lambda}$ (que carrega toda a informação do tensor intensidade de campo $H_{\mu\nu\kappa} = \partial_{[\mu}B_{\nu\kappa]}$) com o invariante topológico de Nieh-Yan [27], [28] e conexões com a anomalia quiral [29].

Os cenários de branas se acomodam ainda na interpretação de que a gravidade seja o regime de baixas energias de uma teoria desconhecida definida em dimensões superiores, com o incremento de que o nosso universo apareça no processo de quebra de simetria como uma configuração do tipo defeito topológico [30], [31], [32] de tal teoria (teoria M?). A principal vantagem desta visão reside no fato de que com ela desaparece o problema da hierarquia da física de partículas.

Os modelos de branas fornecem ainda uma possibilidade interessante de comprovação experimental no LHC através do mecanismo de geração de grávitons massivos [33], [34].

Do outro lado da questão, estão os físicos com formação na escola da Relatividade Geral. Para esta comunidade a teoria de Eisntein com todas as suas implicações filosóficas sobre a nossa percepção dos conceitos de espaço, tempo e energia deve de fato ser encarada como uma teoria fundamental da natureza. O principal argumento para isso é que o caráter dos observáveis da teoria é ainda mal compreendido mesmo a nível clássico [5].

Neste sentido, o requerimento de que as excitações da gravidade sejam locais como a subentendida expansão linear,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \ ,$$

deve ser uma hipótese mal construída. Segundo esta visão, a caracterização da dinâmica da teoria deve mais precisamente se dar em termos de observáveis não locais [35], [36] [37]. Isto é ainda corroborado na observação de que a aproximação de campo fraco quebra manifestamente uma simetria presente na teoria clássica - a invariância sob transformações gerais de coordenadas, os também chamados difeomorfismos.

Os difeomorfismos têm uma conexão profunda com o princípio relacional de Mach [38] presente na relatividade geral que diz serem os movimentos dos corpos apenas relativos entre si, e nenhum espaço/referencial fundamental pode ser concebido na presença de matéria.

Deste modo a construção da gravidade quântica para os relativistas passa necessariamente por implementar as transformações gerais de coordenadas no espaço de Hilbert dos estados da teoria. Ou seja, a formulação da teoria quântica deve ser independente da métrica de fundo (background).

A evolução histórica desta linha de pensamento culminou no que hoje chamamos de Loop Quantum Gravity (LQG).

Tecnicamente, a LQG é construida como uma teoria cujos graus de liberdade são carregados numa conexão de gauge associada ao grupo de Lorentz (conexão de spin) no sentido proposto por Utyama (1955), entretanto estendida ao plano complexo onde os graus de liberdade são então parametrizados pelas partes auto-dual e anti–auto-dual da conexão de spin original

$$\begin{aligned} {}^{+}A_{\mu}{}^{ab} &\equiv \omega_{\mu}{}^{ab} + i\varepsilon^{ab}{}_{cd}\omega_{\mu}{}^{cd} \; ; \\ {}^{-}A_{\mu}{}^{ab} &\equiv \omega_{\mu}{}^{ab} - i\varepsilon^{ab}{}_{cd}\omega_{\mu}{}^{cd} \; . \end{aligned}$$

As variáveis acima são conhecidas na literatura como variáveis de Ashtekar [39], [40]. A motivação para isso é o emprego do procedimento de quantização não-perturbativamente através do método canônico de sistemas vinculados de Dirac. A utilidade desta reparametrização do espaço de fase está no fato de que com ela os vínculos, que na teoria completa (não-perturbativa) definem o hamiltoniano, tomam a forma polinomial ao contrário do que acontece no formalismo métrico. A rejeição ao método perturbativo é baseada na observação de que quando se aplica a prescrição perturbativa de campo fraco

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$$

os vínculos da teoria original são quebrados e o hamiltoniano não pode mais ser escrito em termos daqueles.

Com isso, após a imposição de condições de realidade, o espaço de fase da teoria se reduz ao de uma teoria de Yang-Mills com grupo de gauge $SU(2)$.

A caracterização quântica da teoria é então finalmente realizada em termos dos observáveis (não-locais) dados pelas holonomias da conexão. Os chamados loops de Wilson foram inicialmente propostos no contexto da QCD como uma medida do tensor intensidade de campo da teoria através da avaliação de um funcional do campo de gauge ao longo de curvas fechadas. São defnidos por

$$W_C \equiv Tr\left[\wp \exp\left(i\oint_C A_\mu dx^\mu\right)\right]$$

onde $\wp$ é um operador de ordenamento e C é uma curva fechada sobre a variedade base. A invariância de gauge é garantida pelo traço o que faz de W_C um bom candidato a observável.

Posteriormente, observou-se que outras extensões dos graus de liberdade que não a no plano complexo podem ser feitas [41], [42] com o que se introduziu um parametrização da transformação canônica inicialmente proposta por Ashtekar, o parâmetro de Barbero-Immirzi γ.

O parâmetro de Immirzi pode ser visto como uma medida das flutuações quânticas da torção a menos de termos de superfície dados pela integração da densidade topológica de Nieh-Yan [37] e desenpenha por isso um papel fundamental na discussão das quebras de paridade associadas à componente axial da torção [43].

Com esta construção a ação de E-H toma a forma

$$S_{E-H} = \int d^4x e e_I^\mu e_J^\nu \left(R_{\mu\nu}{}^{IJ} - \frac{1}{\gamma}\varepsilon^{IJ}{}_{KL}R_{\mu\nu}{}^{KL}\right).$$

Em particular, dois importantes resultados da teoria foram a computação do espectro discreto de quantidades geométricas a nível fundamental em termos dos loops de Wilson [6] e a derivação do resultado de Hawking-Bekenstein sobre a entropia de buracos negros [44], [45], [46].

O ponto frágil por outro lado é a dinâmica. Embora a caracterização cinemática do espaço de Hilbert já se encontre bem compreendida através de uma representação dos estados em termos das possíveis imersões de grafos (spin-networks) [47] na variedade espaço-tempo base, a caracterização da evolução destes ainda apresenta problemas [48].

Apesar das posturas interpretativas das duas metodologias parecerem bastante distintas, elas podem no fundo ser complementares no sentido de que enquanto os partidários da física de partículas buscam teorias bem caracterizadas por excitações fundamentais (locais) que gerem a relatividade e os grávitons como agregados destas, a Loop Quantum Gravity está empenhada em construir uma teoria quântica consistente para as excitações da Relatividade Geral mesmo reconhecendo o seu caráter não-local e topológico. Este argumento torna mais justa a denominção frequentemente utilizada da LQG como uma teoria para a Relatividade Geral Quântica [49].

Semelhanças formais entre as duas construções emergem em vários pontos e certamente muitas outras aparecerão nos próximos anos, para citar uma, vale a observação da estrura extendida dos tijolos constituíntes de cada uma delas. Cordas de um lado e loops de outro.

Enfim, fundamentado na filosofia de que grandes projetos implicam o desenvolvimento de grandes técnicas que em geral se difundem nos diversos ramos do conhecimento científico e embasado nos resultados reportados acima e ainda em vários outros desde a descoberta dos ghosts por Feynmann ainda na década de 50 em estudos da QG, passando pela construção da SUGRA até a representação dos polinômios de Jones em termos de invariantes topológicos de variedades 3-dimensionais realizada por Witten [50], que lhe rendeu a medalha Fields, pode-se se dizer que o estudo da gravidade quântica é sem dúvida um ambiente repleto de razões para ser explorado.

Um ponto importante em ambas as linhas de argumentação, é a compreensão do papel da torção nas teorias de gravitação. Neste trabalho, colocamo-nos a questão de discutir mais detalhadamente o conteúdo de teorias com torção dinâmica já a nível de árvore nos gráficos de Feynman. Recentes trabalhos [51], [52] sugerem uma possível contribuição da torção no setor eletrofraco, e apresentam interessantes resultados através de fenômenos induzidos pela torção e correções a processos físicos (com a possibilidade de detecção no LHC) advindos do acoplamento de graus de liberdade da torção às famílias de férmions do Modelo-Padrão. Também, outros trabalhos [53] sugerem uma interessante conexão da torção com questões fundamentais da cosmologia, como a discussão da singularidade do universo primordial e o problema da energia escura.

Para tanto, fizemos uma revisão da construção de YM das interações Eletromagnética e as forças nucleares forte e fraca (este é o conteúdo Capítulo 2), e mostramos como o formalismo de calibre se adequa ao caso da gravidade, no qual se verifica o papel fundamental do tensor de torção, o que é apresentado no Capítulo 3. No Capítulo 4, discorremos brevemente sobre a construção Teleparalela da interação gravitacional, uma proposta alternativa à RG para descrever a gravidade a nível clássico, com base numa teoria de calibre para o grupo das translações, na qual a torção carrega toda a dinâmica, enquanto a curvatura é identicamente nula. Enfim, com o intuito de estudarmos as excitações locais da gravitação na presença de torção dinâmica, elaboramos, no Capítulo 5, um formalismo para projetores de spin no espaço dos tensores de rank-3. Alternativamente ao conjunto de projetores já apresentados na literatura por Nieuwenhuizen e Sezgin em 1980 [54], construímos independentemente uma outra base, bem como uma extensão de operadores de mapeamento entre os sub-espaços de spin. Aplicamos a seguir esta construção numa teoria com termos explícitos de torção, inspirada nos lagrangianos provenientes das teorias de cordas como sugerido em [55] e procedemos a inversão do operador de onda e a consequente extração da função de dois pontos da teoria a nível de árvore. Este é o material contido no Capítulo 6. A contribuição original desta Dissertação está completamente contida nos Capítulos 5 e 6. Finalizando, segue o Capítulo 7, onde são reunidas as Considerações Finais e Perspectivas e Encaminhamentos.

Capítulo 2

Teorias de Calibre

São expostos os ingredientes e a construção de uma teoria de calibre. Como exemplos, mostramos a Eletrodinâmica como a teoria de gauge para o grupo Abeliano $U(1)$ e as teorias da interação fraca e QCD como teorias de calibre para os grupos não-Abelianos $SU(2)$ e $SU(3)$, respectivamente.

2.1 Introdução

As teorias de calibre, às quais também nos referimos como teorias de gauge ou teorias de Yang-Mills, talvez sejam o exemplo mais bem sucedido das teorias quânticas de campos (TQC) na Física de Altas Energias.

Isto porque, das 4 interações fundamentais que conhecemos, 3 delas são bem entendidas como tais, a interação Eletromagnética e as forças nucleares forte e fraca.

Essencialmente, o ingrediente fundamental para a cosntrução de uma teoria deste tipo é a requisição de invariância do lagrangiano sob transformações locais de algum determinado grupo de simetria sobre os campos da teoria.

Uma interpretação disto é que sendo o ato de observação nas TQC's usuais um fenômeno local, a equivalência entre diversas formas possíveis de se caracterizar um sistema físico deve no caso mais geral ser independente para cada observador situado numa posição arbitrária do espaço [56].

2.2 A Eletrodinâmica como uma teoria de gauge para o grupo $U(1)$

A matéria fundamental fermiônica é descrita pelo lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i\overline{\psi}\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi \ ,$$

que é invariante sob transformações de fase (transformações do grupo $U(1)$) globais nos espinores

$$\psi \longmapsto \psi' = e^{-ie\alpha}\psi \ \ ; \ \ \overline{\psi} \longmapsto \overline{\psi}' = e^{ie\alpha}\overline{\psi} \quad \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}'_{Dirac} = e^{ie\alpha}\overline{\psi}\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)e^{-ie\alpha}\psi = \mathcal{L}_{Dirac}$$

entretanto, quando se promove o parâmetro da trasformação a uma função das coordenadas $\alpha = \alpha(x)$, (transformação local) o termo cinético não é mais invariante

$$i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi \longmapsto i\left(e^{ie\alpha}\overline{\psi}\right)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\left(e^{-ie\alpha}\psi\right) = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\partial_{\mu}\alpha(x) \ .$$

A fim de restaurar a simetria da teoria na versão local das transformações abelianas é necessário portanto criar um artifício que reabsorva o termo expúrio.

Este mecanismo é realizado precisamente pela introdução de um termo de interação do campo de matéria com o 4-vetor potencial do campo eletromagnético (campo de gauge para o grupo $U(1)$)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Dirac} + ieA_{\mu}\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi \ ,$$

que recebe a transformação de gauge, que no setor de matéria se manifesta numa fase, como um deslocamento pelo gradiente do parâmetro da transformação

$$A_{\mu} \longmapsto A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha(x) \ .$$

A análise dimensional (em unidades SI) das duas expressões acima

$$[A_\mu] = \frac{[\text{energia}]}{[\text{carga}]} = [\text{energia}] \times [\alpha] \quad \Longrightarrow \quad [e] = \frac{1}{[\alpha]} = [\text{carga}]$$

mostra que com esta construção a corrente $ie\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ que se acopla ao campo A_μ pode ser interpretada como corrente de férmions carregados eletricamente (elétrons!).

O termo de interação pode ser acomodado no que se chama de prescrição de acoplamento mínimo, definidora da derivada covariante de calibre

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \ ,$$

que por sua vez motiva a interpretação do campo de gauge como uma conexão no fibrado "$Minkowski \ \times U(1)$"em analogia com a conexão da geometria diferencial.

A dinâmica para o campo eletromagnético pode por fim ser dada pelo termo de Maxwell e o resultado é o Lagrangeano da Eletrodinâmica espinorial:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\overline{\psi}\left(\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi \ .$$

Com o mesmo procedimento, contrói-se a partir do Lagrangeano livre de Klein-Gordon para um campo escalar complexo

$$\mathcal{L}_{K-G} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^*\varphi$$

que, como no caso espinorial, é invariante sob transformações globais de fase, o lagrangiano da eletrodinâmica escalar

$$\mathcal{L}_{K-G} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\varphi^*D^\mu\varphi + \frac{1}{2}m^2\varphi^*\varphi$$

invariante sob transformações locais de $U(1)$.

O acoplamento mínimo fornece, desta forma, um método de propor interação entre as partículas carregadas por meio de um campo mediador, o campo de gauge.

A dimensão da constante de acoplamento em unidades naturais ($c = \hbar = 1$) é 0, o que implica se tratar de uma teoria com divergências logarítmicas, portanto uma boa candidata a renormalizável, como de fato é.

2.3 Teorias de gauge Não-Abelianas

Na seção anterior, vimos que a teoria que descreve a interação entre partículas eletricamente carregadas pode ser vista como resultado de se exigir que os Lagrangeanos $\mathcal{L}\left(\overline{\psi}, \psi; A_\mu\right)$ e $\mathcal{L}\left(\varphi, \varphi^*; A_\mu\right)$ para o caso fermiônico e escalar respectivamente, sejam invariantes sob as transformações locais do grupo abeliano $U\left(1\right)$ sobre os campos na forma

$$\begin{aligned} A_\mu &\longmapsto A_\mu + \partial_\mu \alpha\left(x\right) \;; \\ \psi &\longmapsto \psi' = e^{-ie\alpha}\psi \;; \\ \varphi &\longmapsto \varphi' = e^{-ie\alpha}\varphi \;. \end{aligned}$$

Na linguagem da teoria de grupos, as leis de transformação acima caracterizam os campos de matéria ψ e φ como elementos da representação fundamental enquanto o campo de gauge A_μ pertence à representação adjunta do grupo de gauge.

Dito desta forma, pode-se propor teorias que descrevam a interação entre partículas simplesmente invocando a invariância do sistema sob algum outro grupo - em geral não-Abeliano. Tais teorias são por isso chamadas de teorias de gauge não-Abelianas das quais são exemplos as descrições das interações nucleares forte e fraca, bem como todo o modelo padrão da física de partículas.

2.3.1 As interações nucleares na descrição das teorias de YM

A associação de uma simetria a um sistema começa pela identificação das degenerescências dos estados em que o sistema se mostra.

Sendo as partículas, auto-estados da matriz de massa numa TQC, a degenerescência de massa aparece como um ingrediente fundamental para a incorporação de uma simetria numa teoria que se proponha a descrever tais partículas como suas excitações fundamentais.

Com base nisso e na observação da pequena diferença relativa entre as massas do próton e do nêutron, se pensava na década de 50 que estas partículas deveriam corresponder a um dublete de campos espinoriais

$$\mathbf{\Psi}= \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} ,$$

obedecendo à dinâmica, no caso livre, ditada por

$$\mathcal{L} = i\overline{\mathbf{\Psi}} \left(\boldsymbol{I}\gamma^\mu \partial_\mu + \boldsymbol{M} \right) \mathbf{\Psi} \text{ ,}$$

onde

$$\boldsymbol{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; \boldsymbol{M} \equiv \begin{pmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_n \end{pmatrix}$$

e $m_n \simeq m_p \simeq m$.

O lagrangiano acima é invariante por transformações globais de $SU(2)$:

$$\mathbf{\Psi} \longmapsto \boldsymbol{U}\mathbf{\Psi} \;;\; \overline{\mathbf{\Psi}} \longmapsto \overline{\mathbf{\Psi}}\boldsymbol{U}^\dagger$$

com

$$\boldsymbol{U} = e^{iga_i\boldsymbol{\sigma}_i} \;;\; \boldsymbol{U}^\dagger = e^{-iga_i\boldsymbol{\sigma}_i}$$

e σ_i , $i = 1, 2, 3$ são as matrizes de Pauli.

O decaimento-beta, em que um neutron emite um elétron e um anti-neutrino transmutando-se para um próton, deveria de alguma forma, portanto, ser explicado pela teoria já que os dois campos do dublete estão presentes. À primeira vista, o mais natural é propor um vértice com os 4 férmions do processo num mesmo ponto. De fato esta foi a proposta por Fermi

$$\mathcal{L}_{int} \backsim G \left(\overline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi} \right) \left(\overline{\mathbf{\Psi}}\mathbf{\Psi} \right).$$

Análise dimensional entretanto indica que o acoplamento é não-renormalizável. Em potências de massa, a análise dimensional do bilinear de Dirac implica dimensão $\frac{3}{2}$ para o espinor: $\left(\frac{3}{2}\right) \times 2 + 1 = 4$ com isso para somar 4 potências no termo de interação acima, necessário a qualquer densidade de lagrangiano em 4-D, é necessário que a constante de acoplamento tenha dimensão -2 . Por medidas da taxa de decaimento se pode estimar o parâmetro de massa envolvido o que dá $M \equiv \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}G}} \approx 246,25\ GeV$ o que implica que experimentos nessa faixa de energia, ou seja, processos com transferência de momento com esta ordem de grandeza devem violar a unitariedade. Violação de unitariedade significa aparecimento de novas partículas e portanto a escala de energia em questão pode ter a ver com propriamente a massa de alguma partícula.

A solução apareceu justamente com a construção da idéia de introduzir bósons mediadores da interação entre os férmions no interior dos diagramas - os bósons de calibre de YM.

A idéia das teorias de gauge foram apresentadas em 1954 no famoso artigo de Yang-Mills [56] onde, considerando a arbitrariedade da definição do que é o próton e o nêutron para cada observador, verificou-se ser necessário conectar os vários observadores por uma rede de transformações de $SU(2)$, que dito de outra forma significa justamente promover a simetria ao estatus de local.

Como vimos no caso Abeliano, isto implica no termo cinético não ser invariante

$$i\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{I}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\boldsymbol{\Psi} \longmapsto i\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{I}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\boldsymbol{\Psi} - \partial_{\mu}a_{i}(x)\,\overline{\boldsymbol{\Psi}}\gamma^{\mu}\boldsymbol{\sigma}_{i}\boldsymbol{\Psi}$$

e na consequente necessidade de introduzir o campo de gauge que, para restaurar a simetria deve tomar valores na álgebra de Lie do grupo

$$\boldsymbol{A}_{\mu} = A_{\mu}^{i}\boldsymbol{\sigma}_{i} \ ,$$

e receber a transformação de fase nos campos de matéria como

$$\boldsymbol{A}_{\mu} \longmapsto \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}_{\mu}\boldsymbol{U}^{\dagger} + \boldsymbol{U}\partial_{\mu}\boldsymbol{U}^{\dagger} \ ,$$

lei de transformação esta que caracteriza um objeto da representação adjunta do grupo.

Assim como no caso eletromagnético, o acoplamento necessário pode ser acomodado na derivada covariante de YM

$$\boldsymbol{D}_{\mu} = \boldsymbol{1}\partial_{\mu} + ig\boldsymbol{A}_{\mu} \ .$$

Uma sutileza em relação ao caso Abeliano é que decorrente do caráter intrinsecamente matricial do grupo $SU(2)$, a forma funcional da derivada covariante de um objeto depende da representação do grupo à qual este objeto pertence. Em particular para campos das representações fundamental e adjunta,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_\mu \boldsymbol{\Psi} &= \mathbf{1}\partial_\mu \boldsymbol{\Psi} + ig\boldsymbol{A}_\mu \boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{D}_\mu \boldsymbol{A}_\nu &= \mathbf{1}\partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu + ig\left[\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu\right] \end{aligned}$$

bem como a derivada de um produto (tensorial) de campos deve obedecer a regra de Leibnitz

$$\boldsymbol{D}_\mu \left(E \otimes F\right) = \left(\boldsymbol{D}_\mu E\right) \otimes F + E \otimes \left(\boldsymbol{D}_\mu F\right)$$

donde

$$\boldsymbol{D}_\mu = \mathbf{1}^E \otimes \mathbf{1}^F + ig\boldsymbol{A}_\mu^{(E)} \otimes \mathbf{1}_F + ig\mathbf{1}_E \otimes \boldsymbol{A}_\mu^{(F)}$$

onde os índices superiores indicam a específica forma funcional adequada para os campos E e F .

A dinâmica da conexão de gauge pode ser dada com a introdução de tensor intensidade de campo

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \equiv \left[\boldsymbol{D}_\mu, \boldsymbol{D}_\nu\right] = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu - g^2\left[\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu\right] \ ,$$

que por ser construído com a derivada covariante, é um legítimo tensor (não-escalar) do grupo transformando-se homogeneamente ,

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \longmapsto \boldsymbol{F}'_{\mu\nu} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\nu}}\boldsymbol{U}^\dagger \ .$$

De fato, $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ é um vetor com respeito ao espaço linear da álgebra $su(2)$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\boldsymbol{\sigma}^a \ ;$$

por este motivo, a sua introdução de forma invariante no lagrangiano deve levar em conta a estrutura de índices internos da álgebra o que resulta em

$$\mathcal{L}_{cin-A} = -\frac{1}{4}tr\left(\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}.$$

Em oposição ao Eletromagnetismo, a expressão acima indica que no caso não-abeliano surgem efeitos de auto-interação do próprio campo de calibre (a nível de vértice) em virtude da contribuição não-linear do termo cinético

$$-\frac{1}{4}tr\left(\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\right) \backsim g^4 A^a_\mu A^{a\mu} \ .$$

Como resultado final, chega-se, então, ao Lagrangeano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Tr\left(\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\right) - i\overline{\boldsymbol{\Psi}}\left(\boldsymbol{I}\gamma^\mu \boldsymbol{D}_\mu + \boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{\Psi} \ ,$$

por meio do qual agora a interação entre o próton e o nêutron é entendida através da dinâmica dos campos A^1_μ ; A^2_μ ; A^3_μ :

$$ig\overline{\boldsymbol{\Psi}}\boldsymbol{A}_\mu\ \boldsymbol{\Psi} = ig\overline{\boldsymbol{\Psi}}A^a_\mu\boldsymbol{\sigma}^a\ \boldsymbol{\Psi} = ig\begin{pmatrix} \overline{\psi}_p & \overline{\psi}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^3_\mu & A^1_\mu - iA^2_\mu \\ A^1_\mu + iA^2_\mu & -A^3_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

agora acomodada sob uma constante de acoplamento adimensional.

Como foi proposta por YM na época, entretanto esta teoria apresentava conflitos com as observações, já que previa partículas vetoriais sem massa.

Para contornar este problema e utilizar a construção era necessário portanto criar um mecanismo que gerasse massa para os bósons de gauge ou os mantivesse de alguma forma confinados.

O prosseguimento dos trabalhos neste sentido culminaram finalmente na construção unificada da interação eletrofraca no modelo de Weinberg-Salam-Glashow.

Com mais um campo a disposição na teoria, se verificou o que a não renormalizabilidade do modelo de Fermi indicava. As excitações fundamentais dos campos de gauge são as atualmente conhecidas partículas portadoras da interação fraca, os mésons vetoriais

$$W^+ \ ; \ W^- \text{ e } Z^0 \ .$$

cuja massa é a prevista pelo valor da constante de acoplamento da antiga teoria de Fermi M hoje chamada, por justas razões, de escala eletrofraca de energia. Uma nova física surgiu portanto na escala em que o antigo modelo falhava.

2.3.2 QCD

A construção da teoria das interações fortes reproduz a seção precedente se apenas trocarmos o grupo de gauge para $SU(3)$.

Na QCD o grupo de gauge dá, a cada um dos sabores de quarks, os números quânticos de cor (verde, azul e vermelho) que lhes servem como índices para o multiplete da representação fundamental

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}.$$

O campo de calibre agora toma valores na álbegra de $SU(3)$

$$\boldsymbol{A}_\mu = A_\mu^a \boldsymbol{\lambda}^a$$

onde

$$\boldsymbol{\lambda}^a \ ; \ a = 1, ..., 8$$

são os geradores da álgebra do grupo (matrizes de Gell-Mann) e suas excitações são agora chamadas de glúons - os mensageiros da força forte.

O principal problema hoje da QCD é a questão do confinamento. Embora o modelo para a interação forte em termos do grupo $SU(3)$ e seus constituíntes fundamentais seja de grande apelo teórico, ele pouco diz sobre a física dos hadrons isto porque no regime de baixas energias (quando estes objetos compostos se formam) a constante de acoplamento toma valores maiores que 1 impedindo desta forma os cálculos perturbativos.

O desenvolvimento de técnicas não-perturbativas para o tratamento dos campos nestes regimes de altos acoplamentos é hoje uma área de intensa pesquisa e compartilha muitas interfaces tanto com os estudos das supercordas (conjectura de Maldacena) quanto com os estudos da LQG.

Capítulo 3

Gravitação como uma teoria de calibre

Explorando a idéia de que um espaço-tempo curvo é localmente equivalente ao espaço de Minkowski (princípio da equivalência), a teoria da gravitação pode ser formulada como uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz $SO(1,3)$. Este é o assunto que cobriremos neste capítulo, procurando elucidar as etapas mais marcantes no processo de caracterizar a estrutura de YM da interação gravitacional. Um dos aspectos mais relevantes é o papel da torção na cosntrução de YM para a gravitação.

3.1 Invariância local sob transformações de Lorentz

Seja φ uma representação arbitrária do grupo de Lorentz. Seguindo a notação usual, a transformação induzida em φ por uma transformação de Lorentz realizada nas coordenadas espaço-temporais expressa-se por

$$\varphi \longrightarrow \varphi\prime = e^{\frac{1}{2}\alpha^{ab}\Sigma_{ab}}\varphi, \tag{3.1}$$

onde Σ_{ab} são os geradores de $SO(1,3)$ na representação do campo φ , e α^{ab} são os parâmetros da transformação com $a, b = 0, 1, 2, 3$.

Embora a lei de transformação acima seja válida para qualquer representação do grupo de Lorentz, que, por sua vez, é o grupo de simetrias do espaço-tempo da Relatividade Especial, sob o ponto de vista da construção de uma teoria de gauge, onde as transformações se dão num espaço interno de simetrias dos campos, analizaremos as transformações realizadas pelos geradores Σ_{ab} como totalmente desvinculadas do espaço-tempo, expressando apenas a arbitrariedade na escolha de uma base no espaço dos campos por parte do observador. Neste sentido, devemos interpretar os índices a, b não como índices espaço-temporais e sim como simplesmente indexadores dos geradores do grupo $SO(1,3)$, que neste momento é entendido simplesmente como um grupo de simetria da teoria. No que segue adotaremos a notação padrão usada na literatura de usar letras latinas minúsculas para índices de gauge (também chamados de índices de *frame*) e letras gregas minúsculas para índices espaço-temporais (índices mundo).

Seguindo a construção precedente, realizada para as teorias de calibre com os grupos $SU(2)$ e $SU(3)$, a promoção ao caráter local da simetria de Lorentz implica na necessidade de se definir a derivada covariante de gauge

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{2}\omega_\mu{}^{ab}\left(\Sigma_{ab}\right) \tag{3.2}$$

e o consequente *field-strength*

$$R_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] \tag{3.3}$$

onde $\omega_\mu = \omega_\mu{}^{ab}\Sigma_{ab}$ é o campo de calibre da teoria também chamado de conexão de spin.

Explicitando os índices de grupo em (3.3), temos

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}{}^{ab}\Sigma_{ab} &= (\partial_\mu + \frac{ig}{2}\omega_\mu{}^{cd}\Sigma_{cd})(\partial_\nu + \frac{ig}{2}\omega_\nu{}^{ef}\Sigma_{ef}) - (\partial_\nu + \frac{ig}{2}\omega_\nu{}^{ef}\Sigma_{ef})(\partial_\mu + \frac{ig}{2}\omega_\mu{}^{cd}\Sigma_{cd}) \\
&= \frac{ig}{2}\partial_\mu\omega_\nu{}^{ef}\Sigma_{ef} - \frac{g^2}{4}\omega_\mu{}^{cd}\omega_\nu{}^{ef}\Sigma_{cd}\Sigma_{ef} - \frac{ig}{2}\partial_\nu\omega_\mu{}^{cd}\Sigma_{cd} + \frac{g^2}{4}\omega_\nu{}^{ef}\omega_\mu{}^{cd}\Sigma_{ef}\Sigma_{cd} \\
&= \frac{ig}{2}\left(\partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{ab}\right)\Sigma_{ab} - \frac{g^2}{4}\omega_\mu{}^{cd}\omega_\nu{}^{ef}[\Sigma_{cd}, \Sigma_{ef}],
\end{aligned}$$

que usando a álgebra dos geradores do grupo de Lorentz

$$[\Sigma_{cd}, \Sigma_{ef}] = -(\eta_{ce}\Sigma_{df} + \eta_{df}\Sigma_{ce} - \eta_{cf}\Sigma_{de} - \eta_{de}\Sigma_{cf}) \tag{3.4}$$

desenvolve-se como

$$\begin{aligned}
\omega_\mu{}^{cd}\omega_\nu{}^{ef}[\Sigma_{cd},\Sigma_{ef}] &= -\omega_\mu{}^{cd}\omega_\nu{}^{ef}(\eta_{ce}\Sigma_{df}+\eta_{df}\Sigma_{ce}-\eta_{cf}\Sigma_{de}-\eta_{de}\Sigma_{cf}) \\
&= (\omega_\mu{}^{d}{}_{e}\omega_\nu{}^{ef}\Sigma_{df}-\omega_\mu{}^{c}{}_{f}\omega_\nu{}^{ef}\Sigma_{ce}+\omega_\mu{}^{cd}\omega_\nu{}^{e}{}_{c}\Sigma_{de}+\omega_\mu{}^{c}{}_{e}\omega_\nu{}^{ef}\Sigma_{cf}) \\
&= (\omega_\mu{}^{a}{}_{e}\omega_\nu{}^{eb}\Sigma_{ab}-\omega_\mu{}^{a}{}_{f}\omega_\nu{}^{bf}\Sigma_{ab}+\omega_\mu{}^{ca}\omega_\nu{}^{b}{}_{c}\Sigma_{ab}+\omega_\mu{}^{a}{}_{e}\omega_\nu{}^{eb}\Sigma_{ab}) \\
&= (\omega_\mu{}^{a}{}_{e}\omega_\nu{}^{eb}-\omega_\mu{}^{a}{}_{f}\omega_\nu{}^{bf}+\omega_\mu{}^{ca}\omega_\nu{}^{b}{}_{c}-\omega_\mu{}^{a}{}_{e}\omega_\nu{}^{be})\Sigma_{ab} \\
&= (\omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\nu{}^{cb}+\omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\nu{}^{cb}-\omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\nu{}^{bc}-\omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\nu{}^{bc})\Sigma_{ab} \\
&= 4\omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\nu{}^{cb}\Sigma_{ab}.
\end{aligned}$$

A antisimetria em Σ_{ab} implica ainda que

$$\omega_\mu{}^{cd}\omega_\nu{}^{ef}[\Sigma_{cd},\Sigma_{ef}] = 2(\omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\nu{}^{cb}-\omega_\mu{}^{b}{}_{c}\omega_\nu{}^{ca})\Sigma_{ab},$$

donde

$$R_{\mu\nu}{}^{ab}\Sigma_{ab} = \frac{ig}{2}\left(\partial_\mu\omega_\nu{}^{ab}-\partial_\nu\omega_\mu{}^{ab}\right)\Sigma_{ab}-\frac{g^2}{2}(\omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\nu{}^{cb}-\omega_\mu{}^{b}{}_{c}\omega_\nu{}^{ca})\Sigma_{ab}.$$

O tensor intensidade de campo é identificado como a curvatura de Riemann:

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = \frac{ig}{2}\left[\partial_\mu\omega_\nu{}^{ab}-\partial_\nu\omega_\mu{}^{ab}+ig\left(\omega_\mu{}^{a}{}_{c}\omega_\nu{}^{cb}-\omega_\mu{}^{b}{}_{c}\omega_\nu{}^{ca}\right)\right]. \tag{3.5}$$

3.1.1 A *vielbein*, o contato do espaço interno com a variedade mundo e a estrutura geral da construção

Até agora a simetria de Lorentz está restrita ao espaço interno do grupo de calibre. Supondo que em cada ponto de uma variedade espaço-temporal a simetria Lorentz é preservada, podemos fazer a identificação física dos objetos do espaço de representação da simetria de gauge até aqui tratada, como de fato tomando valores no espaço tangente à variedade base (espaço-tempo). Ou seja, *o espaço de ação do grupo é identificado como o próprio espaço tangente* à variedade mundo. Deve haver, portanto, uma correspondência entre objetos na variedade base e na variedade tangente o que implica em princípio ser possível escrever os objetos de um espaço nas coordenadas do outro e vice-versa. De fato tal correspondência (tradução entre coordenadas mundo e coordenadas do tipo frame) é realizada pela *vielbein* e_μ^a . Formalmente, a vielbein é definida pela propriedade

$$e_\mu^a e_\nu^b g^{\mu\nu} = \eta^{ab}. \tag{3.6}$$

Com a identificação dos dois espaços, a hipótese de que o espaço-tempo seja uma variedade infinitamente diferenciável garante que o mapeamento definido pela vielbein seja inversível. Com isso se define o mapeamento inverso $e_a^\mu = (e^{-1})_\mu^a$ por

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a \quad ; \quad e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu \quad \Longrightarrow \tag{3.7}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu \ . \tag{3.8}$$

De (3.8) verifica-se que a vielbein define um campo de referenciais inerciais sobre a variedade base a menos de transformações de Lorentz, visto que duas vielbeins que difiram uma da outra por uma TL no espaço interno caracterizam a mesma métrica

$$g'^{\mu\nu} = \eta^{ab} e'^\mu_a e'^\nu_b \tag{3.9}$$

$$= \eta^{ab} \Lambda^c{}_a e_c^\mu \Lambda^d{}_b e_d^\nu \tag{3.10}$$

$$= \eta^{cd} e_c^\mu e_d^\nu = g^{\mu\nu} \ . \tag{3.11}$$

Da invariância do produto escalar entre vetores de Lorentz $A_\mu V^\mu$ se verifica a principal propriedade da vielbein - traduzir as quantidades tensoriais entre os dois espaços:

$$A_\mu V^\mu = g^{\mu\nu} A_\mu V_\nu = \eta^{ab} e_a^\mu e_b^\nu A_\mu V_\nu, \tag{3.12}$$

motiva as definições

$$A_a \equiv A_\mu e_a^\mu \tag{3.13}$$

$$B_a \equiv B_\mu e_a^\mu \tag{3.14}$$

e o consequente análogo para vetores contravariantes,

$$A^a = e_\mu^a A^\mu \ . \tag{3.15}$$

Sob o ponto de vista matricial, a expressão (3.8) pode ser reescrita como

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}^t \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{e} \quad \Longrightarrow \tag{3.16}$$

$$\det \boldsymbol{g} = \det \boldsymbol{e}^t \det \boldsymbol{\eta} \det \boldsymbol{e} \tag{3.17}$$

$$\det \boldsymbol{g} = -(\det \boldsymbol{e})^2, \tag{3.18}$$

que sugere a vielbein como um objeto mais fundamental para a teoria do que a própria métrica.

Fazendo a conversão dos índices na derivada usual, obtemos

$$\partial_a = e^\mu_a \partial_\mu. \tag{3.19}$$

O comutador das derivadas, por sua vez, assume a forma:

$$\begin{aligned}
[\partial_a, \partial_b] &= [e^\mu_a \partial_\mu, e^\nu_b \partial_\nu] \\
&= e^\mu_a (\partial_\mu e^\nu_b) \partial_\nu + e^\mu_a e^\nu_b \partial_\mu \partial_\nu - e^\nu_b (\partial_\nu e^\mu_a) \partial_\mu - e^\nu_b e^\mu_a \partial_\nu \partial_\mu \\
&= (e^\mu_a (\partial_\mu e^\nu_b) - e^\mu_b (\partial_\mu e^\nu_a)) \partial_\nu \\
&= (e^\mu_a (\partial_\mu e^\nu_b) - e^\mu_b (\partial_\mu e^\nu_a)) e^c_\nu \partial_c,
\end{aligned}$$

com o que se define os *coeficientes de não-holonomicidade* :

$$\Omega_{ab}{}^c = (e^\mu_a (\partial_\mu e^\nu_b) - e^\mu_b (\partial_\mu e^\nu_a)) e^c_\nu \ \ ; \ \Omega_{ab}{}^c = -\Omega_{ba}{}^c \ , \tag{3.20}$$

que permite escrever

$$[\partial_a, \partial_b] = \Omega_{ab}{}^c \partial_c \ . \tag{3.21}$$

Exprimindo agora o tensor intensidade de campo anteriormente encontrado, nas *coordenadas-frame*,

$$[D_\mu, D_\nu] = \frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{ab} \Sigma_{ab}, \tag{3.22}$$

com

$$D_\mu \ \longrightarrow \ D_a = e^\mu_a D_\mu, \tag{3.23}$$

têm-se

$$[D_a, D_b] = [e_a^\mu D_\mu, e_b^\nu D_\nu] \tag{3.24}$$

$$= e_a^\mu(D_\mu e_b^\nu)D_\nu + e_a^\mu e_b^\nu D_\mu D_\nu - e_b^\nu(D_\nu e_a^\mu)D_\mu - e_b^\nu e_a^\mu D_\nu D_\mu \tag{3.25}$$

$$= e_a^\mu e_b^\nu[D_\mu, D_\nu] + e_a^\mu(D_\mu e_b^\nu)D_\nu - e_b^\nu(D_\nu e_a^\mu)D_\mu. \tag{3.26}$$

Manipulando $e_a^\mu(D_\mu e_b^\nu)D_\nu - e_b^\nu(D_\nu e_a^\mu)D_\mu$:

$$e_a^\mu(D_\mu e_b^\nu)D_\nu - e_b^\nu(D_\nu e_a^\mu)D_\mu = (e_a^\nu(D_\nu e_b^\mu) - e_b^\nu(D_\nu e_a^\mu))e_\mu^c D_c \tag{3.27}$$

usando

$$e_\mu^c(D_\nu e_b^\mu) = D_\nu(e_b^\mu e_\mu^c) - e_b^\mu(D_\nu e_\mu^c) = -e_b^\mu(D_\nu e_\mu^c) \tag{3.28}$$

$$e_\mu^c(D_\nu e_a^\mu) = -e_a^\mu(D_\nu e_\mu^c) \tag{3.29}$$

a equação (3.27) torna-se

$$(e_b^\nu e_a^\mu - e_a^\nu e_b^\mu)(D_\nu e_\mu^c)D_c = (e_b^\nu e_a^\mu - e_a^\nu e_b^\mu)(D_\nu e_\mu^c - D_\mu e_\nu^c)D_c \tag{3.30}$$

$$= e_b^\nu e_a^\mu(D_\nu e_\mu^c - D_\mu e_\nu^c)D_c. \tag{3.31}$$

Logo,

$$[D_a, D_b] = e_a^\mu e_b^\nu[D_\mu, D_\nu] - e_b^\nu e_a^\mu(D_\mu e_\nu^c - D_\nu e_\mu^c)D_c. \tag{3.32}$$

Definindo o tensor de *torção*

$$T_{\mu\nu}{}^c \equiv D_\mu e_\nu^c - D_\nu e_\mu^c, \tag{3.33}$$

(3.32) escreve-se como

$$[D_a, D_b] = \frac{1}{2}e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{cd}\Sigma_{cd} - e_a^\mu e_b^\nu T_{\mu\nu}{}^c D_c \tag{3.34}$$

$$= \frac{1}{2}R_{ab}{}^{cd}\Sigma_{cd} - T_{ab}{}^c D_c\ . \tag{3.35}$$

Na última expressão, verifica-se que o tensor *field-strength* da teoria separa-se em duas partes. Interpretados como coeficientes dos geradores da simetria de gauge da teoria, esta expressão indica que o processo de "colagem" dos dois espaços introduz mais uma simetria na teoria: a invariância sob translações espaciais.

Como resultado então ganha-se uma teoria com dois field-strengths, curvatura e torção, bem como, dois campos de gauge: a conexão de spin como campo de gauge para as transformações de Lorentz e a vielbein como campo de calibre para as translações. Em outras palavras, estamos diante de uma construção de gauge para o grupo de Poincaré.

Pode-se questionar chamarmos a *vielbein* como um legítimo campo de gauge, visto que, de fato, a equação (3.33) exprime-se como

$$T_{\mu\nu}{}^{c} = \partial_{\mu} e^{c}_{\nu} - \partial_{\nu} e^{c}_{\mu} + \omega_{\mu}{}^{c}{}_{a} e^{a}_{\nu} - \omega_{\nu}{}^{c}{}_{a} e^{a}_{\mu} \tag{3.36}$$

e, portanto, também carrega a conexão de spin como fonte de informação para sua construção. Entretanto, esta denominação se justifica quando analizamos o comportamento da vielbein frente a uma transformação infinitezimal de coordenadas. Sendo a vielbein uma tranformação entre as coordenadas tipo-mundo e -frame. Chamando as coordenadas tipo-mundo de x^{μ} e as tipo-frame de ξ^{a}, podemos escrever

$$e^{a}_{\mu} = \frac{\partial \xi^{a}}{\partial x^{\mu}} (x) \, . \tag{3.37}$$

Sob uma tranformação infinitesimal sobre as coordenadas mundo, temos

$$e^{a}_{\mu} \quad \longrightarrow \quad e'^{a}_{\mu} (x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} e^{a}_{\nu} (x) \, , \tag{3.38}$$

onde

$$x' = x + \delta x. \tag{3.39}$$

Com isso podemos dizer que

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \left(\delta^{\nu}_{\mu} - \partial_{\mu} \delta x^{\nu} \right) , \tag{3.40}$$

e ainda que

$$e'^{a}_{\mu} (x') = e'^{a}_{\mu} (x + \delta x) = e^{a}_{\mu} (x) + \delta x^{\nu} \partial_{\nu} e^{a}_{\mu} (x) \, , \tag{3.41}$$

donde concluímos que sob uma transformação geral de coordenadas (GCT) a vielbein sofre uma variação de

$$\delta_{GCT} e^a_\mu = (\delta x^\nu \partial_\nu)\, e^a_\mu - (\partial_\mu \delta x^\nu)\, e^a_\nu, \tag{3.42}$$

onde no segundo termo do lado direito se identifica um legítimo parâmetro de transformação local (característica de simetrias de gauge). Isto justifica tratar a vielbein como o campo de gauge que promove as interações advindas das simetrias das transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos).

3.2 Repercussão da derivada covariante de gauge em objetos com índices de mundo

Segundo o que discutimos até aqui, a derivada covariante de gauge atua sobre objetos que sejam representações do grupo de gauge, em outras palavras, os objetos devem ter índices de grupo para que a conexão de gauge modifique a derivada convencional ∂_μ . Entretanto, para a teoria em questão pode-se perguntar como a derivada covariante atua num objeto cujos índices de grupo (frame) foram traduzidos para índices de mundo através da vielbein. Ou seja,

$$D_\mu X^a \equiv \partial_\mu X^a + \omega_\mu{}^a{}_b X^b$$

$$X^a \longmapsto X^\mu = e^\mu_a X^a \implies$$

$$D_\mu X^a \longmapsto \nabla_\mu X^\nu \equiv \,? \tag{3.43}$$

Utilizemos o mapeamento realizado pela vielbein,

$$\begin{aligned} D_\mu X^a &= D_\mu \left(e^a_\nu X^\nu\right) \\ &= D_\mu \left(e^a_\nu\right) X^\nu + e^a_\nu D_\mu \left(X^\nu\right) \\ &= D_\mu \left(e^a_\nu\right) X^\nu + e^a_\nu \partial_\mu X^\nu . \end{aligned}$$

Podemos agora atuar à esquerda com a vielbein inversa :

$$\begin{aligned} e^\kappa_a D_\mu X^a &= e^\kappa_a \left[D_\mu \left(e^a_\nu\right) X^\nu + e^a_\nu \partial_\mu X^\nu\right] \\ &= \partial_\mu X^\kappa + e^\kappa_a D_\mu \left(e^a_\nu\right) X^\nu , \end{aligned} \tag{3.44}$$

onde utilizamos o fato de que o objeto X^ν, por não conter índices de grupo (não carrega carga de gauge), possui derivada covariante de calibre trivialmente dada pela derivada usual.

O resultado (3.44) pode ser identificado como uma medida da variação do objeto X^κ com respeito à coordenada x^μ, respeitando a correção advinda da conexão de spin. Em outras palavras, podemos adotar a expressão (3.44) como uma definição para a derivada covariante sobre objetos com índices de mundo:

$$\nabla_\mu X^\kappa \equiv e^\kappa_a \left(D_\mu X^a\right) = \partial_\mu X^\kappa + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} X^\nu \ \ ; \ \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \equiv e^\kappa_a D_\mu \left(e^a_\nu\right) \ . \tag{3.45}$$

Analogamente, tem-se para vetores covariantes

$$D_\mu X_a = D_\mu \left(e^\nu_a X_\nu\right) = D_\mu \left(e^\nu_a\right) X_\nu + e^\nu_a D_\mu \left(X_\nu\right) \tag{3.46}$$

$$= D_\mu \left(e^\nu_a\right) X_\nu + e^\nu_a \partial_\mu \left(X_\nu\right) \ \Longrightarrow \tag{3.47}$$

$$e^a_\kappa D_\mu X_a = e^a_\kappa D_\mu \left(e^\nu_a\right) X_\nu + \partial_\mu \left(X_\kappa\right) . \tag{3.48}$$

Por outro lado,

$$e^a_\kappa D_\mu \left(e^\nu_a\right) + D_\mu \left(e^a_\kappa\right) e^\nu_a = D_\mu \left(\delta^\nu_\kappa\right) = 0 \tag{3.49}$$

e, consequentemente

$$e^a_\kappa D_\mu \left(e^\nu_a\right) = -e^\nu_a D_\mu \left(e^a_\kappa\right) = -\Gamma^\nu_{\mu\kappa}. \tag{3.50}$$

Logo,

$$\nabla_\mu X_\kappa \equiv e^a_\kappa \left(D_\mu X_a\right) = \partial_\mu X_\kappa - \Gamma^\nu_{\mu\kappa} X_\nu, \tag{3.51}$$

que novamente concorda com a definição de derivada covariante para vetores covariantes na geometria diferencial.

Em particular,

$$\nabla_\mu g_{\nu\kappa} = e^a_\nu e^b_\kappa \left(D_\mu \eta_{ab}\right) = 0, \tag{3.52}$$

com o que se conclui que a derivada covariante de gauge se traduz numa derivada sobre índices mundo, cuja conexão é naturalmente uma conexão métrica.

Ainda no sentido de analizarmos as propriedades do objeto $\Gamma^\nu_{\mu\kappa}$, vemos que sua parte antisimétrica corresponde ao tensor de torção:

$$\Gamma^\nu_{[\mu\kappa]} = e^\nu_a \left(D_\mu e^a_\kappa - D_\kappa e^a_\mu\right) = e^\nu_a \left(T^a_{\mu\nu}\right) \ . \tag{3.53}$$

A parte simétrica pode ser explicitada via manipulações de

$$\nabla_\mu g_{\nu\kappa} + \nabla_\nu g_{\mu\kappa} - \nabla_\kappa g_{\mu\nu} = 0$$

com o que se verifica corresponder ao símbolo de Cristoffel:

$$\Gamma^\gamma_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} g^{\kappa\gamma} \left(\partial_\mu g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}\right) \ . \tag{3.54}$$

Concluímos, portanto, que a metodologia empregada aqui, de interpretar as diferentes representações do grupo de Lorentz como efetivamente cargas de gauge, ou seja, a construção de uma teoria de calibre cuja carga é o spin, nos leva naturalmente aos objetos encontrados na formulação geométrica do fenômeno gravitacional com a extensão de admitir a conexão métrica, em geral, tanto com partes simétrica (símbolo de Cristoffel - teoria de Einstein) quanto antisimétrica não nulas.

3.3 Construção de Funcionais de Ação Invariantes

Levando adiante a analogia com as teorias de gauge usuais, a proposta imediata de ação é sem dúvida

$$S = \int d^4 x e R_{\mu\nu}{}^{ab} R^{\mu\nu}{}_{ab} \ .$$

onde e denota o determinante da vielbein $e = \sqrt{-g}$, introduzido a fim de tornar a ação invariante sob reparametrizações.

Entretanto, a disponibilidade de contrações com os índices da vielbein possibilita que um termo ainda mais simples seja concebido neste caso - a ação de Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4 x e e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab} \ . \tag{3.55}$$

Variando a ação (3.55) com respeito à vielbein, encontramos

$$\int d^4 x \delta_e \left[e e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab} \right] = \int d^4 x \left\{ \delta \left[e \right] e_a^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab} + 2e\delta \left[e_a^\lambda \right] e_b^\nu R_{\lambda\nu}{}^{ab} \right\} . \tag{3.56}$$

Em particular, a variação de e com respeito à vielbein desenvolve-se como

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta e_\lambda^a} \left[e \right] &= \frac{\delta}{\delta e_\lambda^a} \left[\varepsilon^{\mu\nu\kappa\xi} e_\mu^0 e_\nu^1 e_\kappa^2 e_\xi^3 \right] = \frac{\delta}{\delta e_\lambda^a} \left[\varepsilon^{(0)(1)(2)(3)} \right] \\
&= \varepsilon^{\mu\nu\kappa\xi} \frac{\delta}{\delta e_\lambda^a} \left[e_\mu^0 e_\nu^1 e_\kappa^2 e_\xi^3 \right] \\
&= \varepsilon^{\mu\nu\kappa\xi} \frac{\delta}{\delta e_\lambda^a} \left[\begin{array}{c} \delta_a^0 \delta_\mu^\lambda e_\lambda^a e_\nu^1 e_\kappa^2 e_\xi^3 + e_\mu^0 \delta_a^1 \delta_\nu^\lambda e_\lambda^a e_\kappa^2 e_\xi^3 \\ + e_\mu^0 e_\nu^1 \delta_a^2 \delta_\kappa^\lambda e_\lambda^a e_\xi^3 + e_\mu^0 e_\nu^1 e_\kappa^2 \delta_a^3 \delta_\xi^\lambda e_\lambda^a \end{array} \right] \\
&= \varepsilon^{\mu\nu\kappa\xi} \left[\delta_a^0 \delta_\mu^\lambda e_\nu^1 e_\kappa^2 e_\xi^3 + e_\mu^0 \delta_a^1 \delta_\nu^\lambda e_\kappa^2 e_\xi^3 + e_\mu^0 e_\nu^1 \delta_a^2 \delta_\kappa^\lambda e_\xi^3 + e_\mu^0 e_\nu^1 e_\kappa^2 \delta_a^3 \delta_\xi^\lambda \right]
\end{aligned}$$

Olhando para o termo $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\xi} \delta_a^0 \delta_\mu^\lambda e_\nu^1 e_\kappa^2 e_\xi^3$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\mu\nu\kappa\xi} \delta_a^0 \delta_\mu^\lambda e_\nu^1 e_\kappa^2 e_\xi^3 &= \delta_a^0 \varepsilon^{\lambda(1)(2)(3)} \\
&= \delta_a^0 e_c^\lambda \varepsilon^{(c)(1)(2)(3)} \\
&= \delta_a^0 e_c^\lambda \delta_0^c \varepsilon^{(0)(1)(2)(3)} \\
&= \delta_a^0 e_c^\lambda \delta_0^c e \\
&= e \delta_a^0 e_0^\lambda
\end{aligned}$$

Efetuando a soma de todos os 4 termos encontra-se:

$$\frac{\delta}{\delta e^a_\lambda}[e] = e e^\lambda_b \delta^b_a = e e^\lambda_a \ . \tag{3.57}$$

Afim de obter a variação do elemento de matriz e^ν_a (vielbein inversa) com respeito a um elemento de matriz e^b_μ da vielbein, vemos que

$$\delta(\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}^{-1} + \boldsymbol{e}\delta\left(\boldsymbol{e}^{-1}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}\delta\left(\boldsymbol{e}^{-1}\right) &= -\delta(\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}^{-1} \\ \delta\left(\boldsymbol{e}^{-1}\right) &= -\boldsymbol{e}^{-1}\delta(\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\left(\boldsymbol{e}^{-1}\right)_{ab} &= \left[-\boldsymbol{e}^{-1}\delta(\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}^{-1}\right]_{ab} \\ &= -\left(\boldsymbol{e}^{-1}\right)_{ac}\delta(\boldsymbol{e})_{cd}\left(\boldsymbol{e}^{-1}\right)_{db} \end{aligned}$$

$$e^a_\mu e^\nu_a = \delta^\nu_\mu \ \Leftrightarrow \ e_{\mu a}\left(\boldsymbol{e}^{-1}\right)_{a\nu} = \delta_{\mu\nu} \ \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \delta\left(\boldsymbol{e}^{-1}\right)_{a\nu} &= -\left(\boldsymbol{e}^{-1}\right)_{a\mu}\delta(\boldsymbol{e})_{\mu d}\left(\boldsymbol{e}^{-1}\right)_{d\nu} \Longrightarrow \\ \delta\left(e^\nu_a\right) &= -e^\mu_a\left(\delta e^d_\mu\right)e^\nu_d \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\delta\left(e^\nu_a\right)}{\delta e^b_\mu} = \frac{-e^\mu_a\left(\delta e^d_\mu\right)e^\nu_d}{\delta e^b_\mu} = \delta^d_b\frac{-e^\mu_a\left(\delta e^b_\mu\right)e^\nu_d}{\delta e^b_\mu} = -\delta^d_b e^\mu_a e^\nu_d = -e^\mu_a e^\nu_b \tag{3.58}$$

Ou,

$$\delta\left[e^\nu_a\right] = -e^\mu_a e^\nu_b \delta\left[e^b_\mu\right] \tag{3.59}$$

$$\delta\left[e^\mu_a\right] = -e^\lambda_a e^\mu_c \delta\left[e^c_\lambda\right], \tag{3.60}$$

com o que (3.56) pode ser reescrita como

$$\int d^4x \left\{ee_c^{\lambda}e_a^{\mu}e_b^{\nu}R_{\mu\nu}{}^{ab} - 2ee_a^{\lambda}e_c^{\mu}e_b^{\nu}R_{\mu\nu}{}^{ab}\right\} \delta\left[e_{\lambda}^{c}\right], \tag{3.61}$$

donde, devido à arbitrariedade da variação $\delta\left[e_{\lambda}^{c}\right]$, a inversibilidade da vielbein ($\Longleftrightarrow$ $\det e \neq 0$) e a condição de extremização da ação, identificamos o coeficiente como as equações de movimento

$$e_c^{\lambda}R - 2R_c{}^{\lambda} = 0, \tag{3.62}$$

que se contraída com $e_{\mu}^{c}g_{\lambda\nu}$ reduzem-se às equações de Einstein no vácuo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0\ . \tag{3.63}$$

Efetuemos agora a variação da teoria com respeito à conexão de spin:

$$\int d^4x\delta_{\omega}\left[ee_a^{\mu}e_b^{\nu}R_{\mu\nu}{}^{ab}\right] = \int d^4xee_a^{\mu}e_b^{\nu}\delta\left[R_{\mu\nu}{}^{ab}\right] \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
\delta\left[R_{\mu\nu}{}^{ab}\right] &= \delta\left[D_{\mu}\omega_{\nu}{}^{ab} - D_{\nu}\omega_{\mu}{}^{ab}\right] \\
&= \left[D_{\mu}\delta\left(\omega_{\nu}{}^{ab}\right) - D_{\nu}\delta\left(\omega_{\mu}{}^{ab}\right)\right].
\end{aligned}$$

Por uma integração por partes conseguimos

$$\begin{aligned}
\int d^4xee_a^{\mu}e_b^{\nu}\delta\left[R_{\mu\nu}{}^{ab}\right] &= \int d^4x\left[\delta\left(\omega_{\mu}{}^{ab}\right)D_{\nu}\left(ee_a^{\mu}e_b^{\nu}\right) - \delta\left(\omega_{\nu}{}^{ab}\right)D_{\mu}\left(ee_a^{\mu}e_b^{\nu}\right)\right] \\
&= \int d^4x\left[D_{\nu}\left(ee_a^{\mu}e_b^{\nu}\right) - D_{\nu}\left(ee_a^{\nu}e_b^{\mu}\right)\right]\delta\left(\omega_{\mu}{}^{ab}\right),
\end{aligned}$$

donde extraímos as equações de movimento:

$$D_{\nu}\left(ee_{[a}^{\mu}e_{b]}^{\nu}\right) = 0. \tag{3.65}$$

Manipulemos a expressão anterior a fim de explorar seu conteúdo físico:

$$D_{\nu}\left(ee_a^{\mu}e_b^{\nu}\right) = D_{\nu}\left(ee_a^{\mu}\right)e_b^{\nu} + ee_a^{\mu}D_{\nu}\left(e_b^{\nu}\right) \tag{3.66}$$

Desenvolvendo o primeiro termo do lado direito,

$$D_\nu \left(e e_a^\mu\right) = D_\nu \left(e\right) e_a^\mu + e D_\nu \left(e_a^\mu\right). \tag{3.67}$$

Pela regra da cadeia podemos escrever

$$D_\nu \left(e\right) = \partial_\nu \left(e\right) = \frac{\delta e}{\delta e_\lambda^b} \partial_\nu e_\lambda^b, \tag{3.68}$$

que utilizando o resultado (3.57), torna-se

$$D_\nu \left(e\right) = e e_b^\lambda \partial_\nu e_\lambda^b = e e_b^\lambda \left(D_\nu e_\lambda^b - \omega_\nu{}^b{}_c e_\lambda^c\right).$$

Mas,

$$\begin{aligned} e e_a^\lambda \omega_\nu{}^a{}_b e_\lambda^b &= e \omega_\nu{}^a{}_b \delta_a^b = e \omega_\nu{}^a{}_a = 0 \implies \\ D_\nu \left(e\right) &= e e_b^\lambda D_\nu e_\lambda^b. \end{aligned}$$

Por outro lado, o segundo termo de (3.67) pode ser desenvolvido como

$$e D_\nu \left(e_a^\mu\right) = -e e_a^\alpha e_b^\mu D_\nu e_\alpha^b.$$

Logo,

$$\begin{aligned} e_b^\nu D_\nu \left(e e_a^\mu\right) &= e_b^\nu \left(D_\nu \left(e\right) e_a^\mu + e D_\nu \left(e_a^\mu\right)\right) && (3.69) \\ &= e e_b^\nu \left(e_a^\mu e_c^\alpha - e_c^\mu e_a^\alpha\right) D_\nu e_\alpha^c && (3.70) \\ &= e e_b^\nu \left(e_a^\mu e_c^\alpha - e_a^\alpha e_c^\mu\right) D_\nu e_\alpha^c && (3.71) \\ &= e e_b^\nu \left(e_a^{[\mu} e_c^{\alpha]}\right) D_\nu e_\alpha^c, && (3.72) \end{aligned}$$

que uma vez introduzida em (3.65) e somada à sua parte antisimétrica nos dá

$$\begin{aligned} e_b^\nu D_\nu \left(e e_a^\mu\right) - e_a^\nu D_\nu \left(e e_b^\mu\right) &= e e_b^\nu \left(e_a^\mu e_c^\alpha - e_c^\mu e_a^\alpha\right) D_\nu e_\alpha^c - e e_a^\nu \left(e_b^\mu e_c^\alpha - e_c^\mu e_b^\alpha\right) D_\nu e_\alpha^c && (3.73) \\ &= e \left\{-e_b^\alpha e_c^\mu e_a^\nu D_\alpha e_\nu^c + e_a^\nu e_c^\mu e_b^\alpha D_\nu e_\alpha^c + e_b^\nu e_a^\mu e_c^\alpha D_\nu e_\alpha^c - e_a^\nu e_b^\mu e_c^\alpha D_\nu e_\alpha^c\right\} && (3.74) \\ &= e \left\{e_a^\nu e_c^\mu e_b^\alpha T_{\nu\alpha}{}^c + \left(e_b^\nu e_a^\mu - e_a^\nu e_b^\mu\right) e_c^\alpha D_\nu e_\alpha^c\right\}. && (3.75) \end{aligned}$$

Da definição da derivada covariante da relatividade geral, temos

$$e^{\alpha}_{c} D_{\nu} e^{c}_{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta} \left(e^{\beta}_{c} D_{\nu} e^{c}_{\alpha} \right) = \delta^{\alpha}_{\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = \Gamma^{\beta}_{\nu\beta} \quad \Longrightarrow \tag{3.76}$$

$$e^{\nu}_{[b} D_{\nu} \left(e e^{\mu}_{a]} \right) = e \left\{ e^{\nu}_{a} e^{\mu}_{c} e^{\alpha}_{b} T_{\nu\alpha}{}^{c} + \left(e^{\nu}_{b} e^{\mu}_{a} - e^{\nu}_{a} e^{\mu}_{b} \right) \Gamma^{\beta}_{\nu\beta} \right\}. \tag{3.77}$$

Desenvolvendo agora o segundo termo de (3.66), temos

$$e e^{\mu}_{a} D_{\nu} \left(e^{\nu}_{b} \right) = -e e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{c} e^{\alpha}_{b} D_{\nu} \left(e^{c}_{\alpha} \right)$$

e, analogamente,

$$e e^{\mu}_{b} D_{\nu} \left(e^{\nu}_{a} \right) = -e e^{\mu}_{b} e^{\nu}_{c} e^{\alpha}_{a} D_{\nu} \left(e^{c}_{\alpha} \right), \tag{3.78}$$

donde

$$\begin{aligned}
e e^{\mu}_{[a} D_{\nu} \left(e^{\nu}_{b]} \right) &= -e e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{c} e^{\alpha}_{b} D_{\nu} \left(e^{c}_{\alpha} \right) + e e^{\mu}_{b} e^{\nu}_{c} e^{\alpha}_{a} D_{\nu} \left(e^{c}_{\alpha} \right) \\
&= e \left\{ e^{\mu}_{b} e^{\alpha}_{a} - e^{\mu}_{a} e^{\alpha}_{b} \right\} \delta^{\nu}_{\lambda} e^{\lambda}_{c} D_{\nu} \left(e^{c}_{\alpha} \right) \\
&= e \left\{ e^{\alpha}_{a} e^{\mu}_{b} - e^{\mu}_{a} e^{\alpha}_{b} \right\} e^{\nu}_{c} D_{\nu} \left(e^{c}_{\alpha} \right) \\
&= e \left(e^{[\alpha}_{a} e^{\mu]}_{b} \right) e^{\nu}_{c} D_{\nu} \left(e^{c}_{\alpha} \right).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
D_\nu\left(e e^\mu_{[a} e^\nu_{b]}\right) &= e^\nu_{[b} D_\nu\left(e e^\mu_{a]}\right) + e e^\mu_{[a} D_\nu\left(e^\nu_{b]}\right) = 0 \\
&= e\left\{e^\nu_a e^\mu_c e^\alpha_b T_{\nu\alpha}{}^c + \left(e^\nu_b e^\mu_a - e^\nu_a e^\mu_b\right) e^\alpha_c D_\nu\left(e^c_\alpha\right)\right\} + e\left(e^{[\alpha}_a e^{\mu]}_b\right) e^\nu_c D_\nu\left(e^c_\alpha\right) \\
&= e\left\{e^\nu_a e^\mu_c e^\alpha_b T_{\nu\alpha}{}^c + \left[\left(e^\nu_b e^\mu_a - e^\nu_a e^\mu_b\right) e^\alpha_c + \left(e^\alpha_a e^\mu_b - e^\mu_a e^\alpha_b\right) e^\nu_c\right] D_\nu\left(e^c_\alpha\right)\right\} \\
&= e\left\{e^\nu_a e^\mu_c e^\alpha_b T_{\nu\alpha}{}^c + \left[e^\mu_a e^\alpha_c e^\nu_b - e^\mu_b e^\alpha_c e^\nu_a + e^\mu_b e^\alpha_a e^\nu_c - e^\mu_a e^\alpha_b e^\nu_c\right] D_\nu\left(e^c_\alpha\right)\right\} \\
&= e\left\{e^\nu_a e^\mu_c e^\alpha_b T_{\nu\alpha}{}^c + \left[e^\mu_a e^\alpha_c e^\nu_b - e^\mu_a e^\alpha_b e^\nu_c + e^\mu_b e^\alpha_a e^\nu_c - e^\mu_b e^\alpha_c e^\nu_a\right] D_\nu\left(e^c_\alpha\right)\right\} \\
&= e\left\{e^\nu_a e^\mu_c e^\alpha_b T_{\nu\alpha}{}^c + \left[e^\mu_a\left(e^\alpha_c e^\nu_b - e^\alpha_b e^\nu_c\right) + e^\mu_b\left(e^\alpha_a e^\nu_c - e^\alpha_c e^\nu_a\right)\right] D_\nu\left(e^c_\alpha\right)\right\} \\
&= e\left\{e^\nu_a e^\mu_c e^\alpha_b T_{\nu\alpha}{}^c + \left[e^\mu_a\left(e^{[\alpha}_c e^{\nu]}_b\right) + e^\mu_b\left(e^{[\alpha}_a e^{\nu]}_c\right)\right] D_\nu\left(e^c_\alpha\right)\right\} \\
&= e\left\{e^\nu_a e^\mu_c e^\alpha_b + \left[e^\mu_a\left(e^{[\alpha}_c e^{\nu]}_b\right) + e^\mu_b\left(e^{[\alpha}_a e^{\nu]}_c\right)\right]\right\} T_{\nu\alpha}{}^c \\
&= e\left\{e^\nu_a e^\mu_c e^\alpha_b + e^\mu_a\left(e^\alpha_c e^\nu_b - e^\nu_c e^\alpha_b\right) + e^\mu_b\left(e^\alpha_a e^\nu_c - e^\nu_a e^\alpha_c\right)\right\} T_{\nu\alpha}{}^c \\
&= e\left\{e^\nu_a e^\mu_c e^\alpha_b T_{\nu\alpha}{}^c + e^\mu_a e^\alpha_c e^\nu_b T_{\nu\alpha}{}^c - e^\mu_a e^\nu_c e^\alpha_b T_{\nu\alpha}{}^c + e^\mu_b e^\alpha_a e^\nu_c T_{\nu\alpha}{}^c - e^\mu_b e^\nu_a e^\alpha_c T_{\nu\alpha}{}^c\right\} \\
&= e\left\{T_{ab}{}^\mu + e^\mu_a T_{b\alpha}{}^\alpha - e^\mu_a T_{\nu b}{}^\nu + e^\mu_b T_{\nu a}{}^\nu - e^\mu_b T_{a\alpha}{}^\alpha\right\} \\
&= e\left\{T_{ab}{}^\mu + 2 e^\mu_a T_{b\alpha}{}^\alpha - 2 e^\mu_b T_{a\nu}{}^\nu\right\}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$T_{ab}{}^\mu + 2 e^\mu_a T_{b\alpha}{}^\alpha - 2 e^\mu_b T_{a\nu}{}^\nu = 0. \tag{3.79}$$

Multiplicando esta equação por e^b_μ, temos

$$e^b_\mu T_{ab}{}^\mu + 2 e^b_\mu e^\mu_a T_{b\alpha}{}^\alpha - 2 e^b_\mu e^\mu_b T_{a\nu}{}^\nu = 0 \tag{3.80}$$

$$T_{a\alpha}{}^\alpha + 2 T_{a\alpha}{}^\alpha - 8 T_{a\alpha}{}^\alpha = 0 \tag{3.81}$$

$$T_{a\alpha}{}^\alpha = 0. \tag{3.82}$$

Finalmente, substituindo este resultado em (3.79), chega-se à conclusão de que na teoria de Einstein a torção é identicamente nula

$$T_{ab}{}^\mu = 0. \tag{3.83}$$

Os graus de liberdade contidos na conexão de spin podem, por isto, ser escritos em termos da vielbein e suas derivadas

$$T_{\mu\nu}{}^{a} = 0 = \partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega_\mu{}^a{}_b e^b_\nu - \omega_\nu{}^a{}_b e^b_\mu \implies$$

$$\omega_{\alpha dc} = \frac{1}{2}\left\{K_{[\mu\nu]a} e^\mu_c e^\nu_d e^a_\alpha + K_{[\mu\alpha]c} e^\mu_d - K_{[\alpha\mu]d} e^\mu_c\right\} \; ; \; K^a_{[\mu\nu]} \equiv -\partial_{[\mu} e^a_{\nu]} \tag{3.84}$$

e a teoria clássica depende efetivamente apenas de e^a_μ, ou, dito de forma equivalente, apenas da métrica

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab} \; .$$

Vale a pena ressaltar entretanto que o vínculo acima é um resultado derivado da imposição de extremização da ação (vínculo *on-shell*), ou seja, a rigor válido apenas no regime clássico da teoria. Sendo a configuração clássica apenas uma das possíveis para um campo quântico que flutua sobre o mínimo funcional da ação, é razoável esperar que no regime quântico a torção torne-se dinâmica e a conexão de spin adquira caráter independente.

Do ponto de vista físico, a observação acima é ainda corroborada pelo fato de que, no nível microscópico, o spin das partículas deva ser um atributo fundamental na caracterização da dinâmica. Isto faz com que a conexão de spin, por sua vez, sendo o menssageiro da interação entre as cargas de YM para o grupo $SO\,(1,3)$, deve certamente desempenhar um papel determinante.

Neste sentido, extensões da teoria de Einstein admitindo termos de torção podem trazer aspectos interessantes do que se espera ser a teoria do fenômeno gravitacional em micro-escala.

Capítulo 4

Teleparalelismo

A teoria teleparalela é apresentada como uma teoria de calibre para o grupo de translações. A construção leva naturalmente à identificação da torção como o tensor intensidade de campo enquanto a curvatura é identicamente nula. A ação do teleparalelismo é apresentada e são identificadas semelhanças formais com as teorias de YM usuais. Apresentamos a equivalência entre a construção teleparalela da gravidade e a teoria de Einstein-Hilbert a menos de uma derivada total.

4.1 Motivação Geral

Como vimos, na contrução de YM, a gravitação clássica como conhecemos pode ser tomada como a interação que surge quando construímos uma teoria de gauge para grupo de Poincaré definida pelo lagrangiano

$$\mathcal{L} = e e^{\mu}_{a} e^{\nu}_{b} R_{\mu\nu}{}^{ab}.$$

Como observamos, devido ao vínculo on-shell da torção ser identicamente nula, o campo de gauge referente ao setor de rotações (conexão de spin) pode ser determinado totalmente em função do campo que representa as transformações de translação espaciais (vielbein). Em última análise portanto pode-se afirmar que a dinâmica (clássica) da teoria é determinada totalmente pelas cargas de Nöether associadas à simetria do sistema com respeito a translações - o tensor energia-momento.

Fisicamente este resultado pode ser interpretado como uma consequência de que, embora globalmente as noções de translação e rotação sejam distintas, a nível local isto não ocorre. Pode-se simular uma rotação num dado ponto A de uma variedade por meio da translação (local) de todos os outros pontos cocentricamente em relação a A.

Com base nisso poderia se perguntar sobre a viabilidade de se construir uma teoria de gauge somente para o grupo das translações que fosse equivalente à Relatividade Geral. Tal construção contornaria o mecanismo de vínculo on-shell necessário na proposta de $SO(1,3)$ como o grupo de gauge, e, associaria diretamente a fonte de energia-momento à dinâmica. De fato, esta teoria existe, e chama-se Teleparalelismo [57].

Sob um ponto de vista menos geométrico e talvez mais físico, assim como na construção de Einstein, a idéia central da teoria teleparalela é abordar a gravitação pelo que talvez seja a sua característica mais marcante, o princípio da universalidade da queda livre. Também chamado de princípio da equivalência fraco.

O fato de que corpos com massas distintas "sentem" da mesma forma a interação gravitacional é explorado na relatividade geral através da associação da interação gravitacional à uma curvatura não trivial do espaço onde o objeto se move. Desta forma as equações de movimento dos corpos sujeitos à gravitação são simplesmente as geodésicas neste espaço curvo. Neste sentido o conceito de força gravitacional torna-se supérfluo, uma vez que toda a informação que caracteriza a dinâmica dos corpos massivos se encontra na propriedade geométrica do espaço que é a curvatura.

Aqui aparece uma diferença marcante da teoria teleparalela em relação a tanto a construção original de Einstein quanto a da gravidade como SO(1,3)-YM. Enquanto nestas estratégias verifica-se que das duas características geométricas de um espaço métrico, curvatura e a torção, apenas a primeira assume caráter dinâmico, na teoria teleparalela acontece justamente o contrário [58].

No teleparalelismo, toda a informação dinâmica é carregada pela torção enquanto a curvatura é identicamente nula. Por ser a torção também uma propriedade geométrica de um espaço, o princípio de equivalência é preservado - a física continua independente das cargas de interação. Entretanto perde-se a identificação geométrica da dinâmica dos corpos como determinada por equações geodésicas definidas num espaço curvo e recupera-se as equações de movimento das partículas com a forma de uma equação de força.

4.2 Teoria de gauge para o grupo de translações

Seguindo a construção de uma teoria de gauge, o campo fundamental da teoria (o campo de gauge) toma valores na álgebra do grupo de simetria associado

$$B_\mu = B^a_\mu P_a \tag{4.1}$$

onde

$$P_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a} \tag{4.2}$$

são os geradores das translações do espaço de Minkowski e satisfazem a álgebra

$$[P_a \ , \ P_b] = 0 \ . \tag{4.3}$$

Aqui também denotamos índices do espaço tangente com letras latinas e índices na variedade curva com letras gregas.

Com isto define-se a derivada covariante de calibre

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + B_\mu \tag{4.4}$$

que pode ser reescrita como

$$D_\mu = \left[\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} + B^a_\mu\right] \partial_a \ . \tag{4.5}$$

A expressão (4.5) pode ser usada como definição da vielbein (não trivial) da teoria

$$e^a_\mu \equiv \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} + B^a_\mu \tag{4.6}$$

de tal modo que a propriedade fundamental da vielbein seja mantida

$$g^{\mu\nu}e^a_\mu e^b_\nu = \eta^{ab} \tag{4.7}$$

Com esta definição, a derivada covariante atuando sobre um campo genérico $\Psi(x)$ se repercute apenas sobre o argumento do campo sem levar em conta qual seja a representação do grupo de Lorentz em que $\Psi(x)$ toma valores. Com isto todos os campos "sentem" da mesma forma a interação mediada pela teoria o que pode ser identificado como a manifestação do princípio da universalidade da queda livre na contrução teleparalela [59].

Vale ressaltar que de fato este é o mesmo mecanismo que assegura na construção de Einstein o princípio da equivalência: a gravitação é uma interação que se acopla ao conteúdo de momento-energia dos campos que por sua vez nada mais é do que uma medida de como o campo varia de ponto a ponto do espaço-tempo.

O tensor intensidade de campo da teoria é definido por

$$F_{\mu\nu} \equiv [D_\mu\ ,\ D_\nu] = \left(\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu\right) P_a \tag{4.8}$$

onde se identificam as componentes no grupo de gauge

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu\ . \tag{4.9}$$

Identificando a torção com o tensor intensidade de campo da teoria temos

$$T_{\mu\nu}{}^{\kappa} = e^\kappa_a F^a_{\mu\nu} = e^\kappa_a \left(\partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu\right) \tag{4.10}$$

que fazendo-se uso da definição da vielbein da teoria pode ser reescrita de forma mais análoga à construção SO(1,3) - YM para a gravitação

$$T_{\mu\nu}{}^{\kappa} = e^\kappa_a \left(\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu\right). \tag{4.11}$$

Mantendo o "significado" geométrico dado à torção num determinado espaço métrico de ser a parte antisimétrica da conexão, podemos utilizar a expressão acima como definição para a conexão da teoria teleparalela

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\kappa} \equiv e^\kappa_a \partial_\mu e^a_\nu \tag{4.12}$$

também conhecida como conexão de Weitzenböck [60].

Com esta definição, a conexão (4.12) leva ao resultado, também encontrado na relatividade geral, de que a derivada covariante é compatível com a métrica uma vez que

$$\tilde{\nabla}_\mu e^a_\nu = \partial_\mu e^a_\nu - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\kappa} e^a_\kappa = \partial_\mu e^a_\nu - e^a_\kappa e^\kappa_b \partial_\mu e^b_\nu = 0 \tag{4.13}$$

o que implica

$$\tilde{\nabla}_\mu g_{\nu\kappa} = \eta_{ab} \tilde{\nabla}_\mu \left(e^a_\nu e^b_\kappa \right) = 0. \tag{4.14}$$

Manipulando agora a conexão da relatividade (símbolo de Christoffel)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} &= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right) && (4.15)\\
&= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \eta_{ab} \left[\partial_\mu \left(e^a_\nu e^b_\alpha \right) + \partial_\nu \left(e^a_\mu e^b_\alpha \right) - \partial_\alpha \left(e^a_\mu e^b_\nu \right) \right] && (4.16)\\
&= \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \eta_{ab} \left[e^b_\nu T_{\mu\alpha}{}^{a} + e^b_\mu T_{\nu\alpha}{}^{a} + e^a_\alpha T_{\mu\nu}{}^{b} \right] + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\rho} && (4.17)
\end{aligned}$$

onde utilizando a definição do tensor de *contorsão*

$$K_{\mu\nu}{}^{\rho} \equiv -\frac{1}{2} \left(T_\nu{}^{\rho}{}_\mu + T_\mu{}^{\rho}{}_\nu + T_{\mu\nu}{}^{\rho} \right) \tag{4.18}$$

pode ser reescrito como

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}{}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} + K_{\mu\nu}{}^{\rho} \ . \tag{4.19}$$

Com isso desenvolvemos o tensor de curvatura da teoria

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} &\equiv \tilde{\nabla}_\kappa \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\mu} - \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\Gamma}_{\nu\kappa}{}^{\mu} && (4.20)\\
&= \partial_\kappa \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\mu} - \partial_\lambda \tilde{\Gamma}_{\nu\kappa}{}^{\mu} + \tilde{\Gamma}_{\rho\kappa}{}^{\mu} \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}{}^{\rho} - \tilde{\Gamma}_{\rho\lambda}{}^{\mu} \tilde{\Gamma}_{\nu\kappa}{}^{\rho} && (4.21)
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} &= R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} + \nabla_\kappa K_{\nu\lambda}{}^{\mu} - \nabla_\lambda K_{\nu\kappa}{}^{\mu} + K_{\rho\kappa}{}^{\mu} K_{\nu\lambda}{}^{\rho} - K_{\rho\lambda}{}^{\mu} K_{\nu\kappa}{}^{\rho}\\
&= R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} + Q^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}
\end{aligned}$$

Onde $R^\mu{}_{\nu\kappa\lambda}$ denota o tensor de Riemann usual, as derivadas covariantes foram tomadas apenas com relação ao índice tensorial (contravariante) da conexão e definimos o objeto

$$Q^\mu{}_{\nu\kappa\lambda} \equiv \nabla_\kappa K_{\nu\lambda}{}^{\mu} - \nabla_\lambda K_{\nu\kappa}{}^{\mu} + K_{\rho\kappa}{}^{\mu} K_{\nu\lambda}{}^{\rho} - K_{\rho\lambda}{}^{\mu} K_{\nu\kappa}{}^{\rho} \ .$$

.

Desenvolvendo a expressão (4.21) com o uso da definição da conexão de Weitzenböck mostra-se facilmente que a curvatura associada é identicamente nula:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^{\mu}{}_{\nu\kappa\lambda} &= \partial_\kappa\left(e_a^\mu \partial_\lambda e_\nu^a\right) - \partial_\lambda\left(e_a^\mu \partial_\kappa e_\nu^a\right) + \left(e_a^\mu \partial_\kappa e_\rho^a\right)\left(e_b^\rho \partial_\lambda e_\nu^b\right) - \left(e_a^\mu \partial_\lambda e_\rho^a\right)\left(e_b^\rho \partial_\kappa e_\nu^b\right) \\
&= \partial_\kappa e_a^\mu \partial_\lambda e_\nu^a + e_a^\mu \partial_\kappa \partial_\lambda e_\nu^a - \partial_\lambda e_a^\mu \partial_\kappa e_\nu^a - e_a^\mu \partial_\lambda \partial_\kappa e_\nu^a - \left(e_\rho^a \partial_\kappa e_a^\mu\right)\left(e_b^\rho \partial_\lambda e_\nu^b\right) + \left(e_\rho^a \partial_\lambda e_a^\mu\right)\left(e_b^\rho \partial_\kappa e_\nu^b\right) \\
&= \partial_\kappa e_a^\mu \partial_\lambda e_\nu^a - \partial_\lambda e_a^\mu \partial_\kappa e_\nu^a - \delta_b^a \partial_\kappa e_a^\mu \partial_\lambda e_\nu^b + \delta_b^a \partial_\lambda e_a^\mu \partial_\kappa e_\nu^b \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Tem-se, portanto, que a contribuição que a contorsão adiciona à conexão de Christoffel para a composição da conexão da teoria teleparalela é tal que

$$Q^{\mu}{}_{\nu\kappa\lambda} = -R^{\mu}{}_{\nu\kappa\lambda}. \tag{4.22}$$

4.2.1 Prescrição de Acoplamento do Teleparalelismo

Como vimos no Capítulo anterior, o acoplamento entre campos tensoriais e a interação gravitacional se dá na construção de SO(1,3)-YM, por meio da prescrição de acoplamento mínimo

$$\partial_\mu \longmapsto D_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu{}^{ab}\Sigma_{ab} \tag{4.23}$$

em que a conexão de spin desempenha o papel fundamental de mediador da interação (embora ela seja totalmente determinada pela vielbein). Via o mapeamento definido pela viebein, isto equivale a substituir a derivada usual pela derivada covariante da relatividade

$$\partial_\mu G_\alpha \longmapsto \nabla_\mu G_\alpha = \partial_\mu G_\alpha - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} G_\rho \tag{4.24}$$

onde agora o símbolo de Christoffel é que representa a correção advinda da interação gravitacional.

O acoplamento da gravitação com campos fermiônicos por outro lado não pode ser traduzido desta maneira. Isto sugere que de certa forma a expressão (4.23) seja mais fundamental do que (4.24).

Na construção teleparalela, portanto, também é necessário introduzir um objeto que faça o papel da conexão de spin, de modo a fazer o acoplamento da gravitação com espinores.

A proposta mais imediata talvez seja a de utilizar a vielbein para a tradução da expressão (4.24) em (4.23), onde agora o símbolo de Christoffel seria substituído pela conexão de Weitzenböck. Entretanto, esta tentativa, na verdade, implica numa conexão de spin identicamente nula:

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_\mu V_a &\equiv \partial_\mu V_a + \tilde{\omega}_{\mu a}{}^{b} V_b \\
&= e_a^\alpha \left(\tilde{\nabla}_\mu V_\alpha\right) \\
&= e_a^\alpha \left(\partial_\mu V_\alpha - \tilde{\Gamma}^\nu_{\alpha\mu} V_\nu\right) \\
&= e_a^\alpha \left(\partial_\mu \left(e_\alpha^b V_b\right) - e_\nu^b \tilde{\Gamma}^\nu_{\alpha\mu} V_b\right) \\
&= e_a^\alpha \left(V_b \partial_\mu e_\alpha^b + e_\alpha^b \partial_\mu V_b - e_\nu^b \tilde{\Gamma}^\nu_{\alpha\mu} V_b\right) \\
&= e_a^\alpha \left(V_b \partial_\mu e_\alpha^b + e_\alpha^b \partial_\mu V_b - e_\nu^b e_c^\nu \left(\partial_\mu e_\alpha^c\right) V_b\right) \\
&= \partial_\mu V_a + e_a^\alpha \left(\partial_\mu e_\alpha^b\right) V_b - e_a^\alpha \delta_c^b \left(\partial_\mu e_\alpha^c\right) V_b \\
&= \partial_\mu V_a \implies \tilde{\omega}_{\mu a}{}^{b} = 0 \ .
\end{aligned}
$$

A solução para esta dificuldade é dada pela proposta [61]

$$
\tilde{\omega}_\mu{}^a{}_b \equiv -e_\alpha^a e_b^\beta K_{\beta\mu}{}^\alpha \ ,
$$

onde, usando a equação (4.19) e o resultado acima, quer dizer simplesmente que estamos escrevendo o símbolo de Christoffel em termos da conexão de Weitzenböck e o tensor de contorsão na prescrição de acoplamento usual da relatividade geral:

$$
\tilde{D}_\mu V_a = e_a^\alpha \left[\partial_\mu V_\alpha - \left(\tilde{\Gamma}^\beta_{\alpha\mu} - K_{\alpha\mu}{}^\beta\right) V_\beta\right] = e_a^\alpha \left[\partial_\mu V_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha\mu} V_\beta\right] .
$$

Este é também o mecanismo por trás da equação de movimento de uma partícula na teoria teleparalela. Enquanto na teoria de Einstein a dinâmica gravitacional de uma partícula é ditada pela equação da geodésia,

$$\frac{dv^{\alpha}}{ds} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = 0 \; ; \; v^{\mu} \equiv \frac{dx^{\mu}}{ds} \; , \tag{4.25}$$

no teleparalelismo é dito simplesmente que

$$\frac{dv^{\alpha}}{ds} + \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = K^{\alpha}_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu}. \tag{4.26}$$

As duas expressões são portanto completamente equivalentes. Todavia, embora (4.26) seja totalmente determinada por caraterísticas geométricas da variedade - o que garante a independência da dinâmica com respeito a possíveis características intrínsecas à partícula - não se pode mais dizer que ela define uma geodésia.

Uma observação importante, encontrada via análise de consistência entre as duas equações acima, é que ao contrário do símbolo de Christoffel, a conexão de Weitzenböck não pode sempre ser zerada mediante uma particular escolha de coordenadas, caso contrário, teríamos

$$\frac{dv^{\alpha}}{ds} = K^{\alpha}_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} \tag{4.27}$$

que no caso geral em que o tensor $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ diferente de zero, não equivale a (4.25).

Conclui-se portanto que $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu}$ encontra-se, em geral, numa órbita de calibre não necessariamente conexa com a identidade ao contrário do que acontece na teoria de Einstein.

A possibilidade de se fazer $\tilde{\Gamma} = 0$ realiza-se apenas quando a métrica da variedade é a própria métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e então existe a vielbein trivial $e^{a}_{\mu} = \delta^{a}_{\mu}$ resultando tanto na torção nula quanto numa possibilidade nula para a conexão de Weitzenböck.

Formalmente, (4.26) assemelha-se à equação de uma partícula num espaço plano (curvatura nula) na presença de um campo de força externo representado pelo tensor de contorsão.

4.3 Lagrangiano do Teleparalelismo

Com base no tensor intensidade de campo (4.9) e seguindo a analogia com as teorias de YM usuais poderíamos propor o lagrangiano

$$
{}^{*}\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}{}^{a} F^{\mu\nu}{}_{a} \ .
$$

Entretanto, como aqui dispomos da vielbein para traduzir os índices não holonômicos para coordenadas mundo, outras contrações são possíveis.

Explorando as outras contrações, o lagrangiano da teoria teleparalela toma a forma [59]

$$
\mathcal{L}_{Tel} = \frac{e}{2\kappa^2} \left\{ -\frac{1}{4} T_{\mu\nu}{}^{\kappa} T^{\mu\nu}{}_{\kappa} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\rho} T^{\mu\rho\nu} - T_{\mu\alpha}{}^{\alpha} T^{\mu\beta}{}_{\beta} \right\} \ ,
$$

que, em termos da contorsão, lê-se

$$
\mathcal{L}_{Tel} = \frac{e}{2\kappa^2} \left\{ K^{\mu\rho\nu} K_{\mu\nu\rho} - K^{\rho\mu}{}_{\mu} K_{\rho\nu}{}^{\nu} \right\} \ .
$$

A equivalência com a Relatividade Geral é verificada utilizando na expressão acima a relação (4.22). Após manipulações algébricas chega-se a:

$$
\mathcal{L}_{Tel} = \frac{e}{2\kappa^2} R - \partial_{\mu} \left(2 \frac{e}{\kappa^2} T^{\mu\nu}{}_{\nu} \right) \ ,
$$

onde R é o escalar de Ricci construído com a conexão de Christoffel.

Desta forma vê-se que a menos de um termo de superfície as duas teorias são completamente equivalentes.

Podemos dizer, portanto, que a estratégia teleparalela explora a liberdade de escolha da conexão para a descrição de uma variedade, de tal forma que a dinâmica passa a ser carregada totalmente na torção; entretanto, de forma equivalente à teoria de Einstein.

Sob este ponto de vista, a estrutura mais fundamental da variedade espaço-tempo é a sua métrica e não a curvatura ou torção a ela associadas por meio de uma específica escolha de conexão.

Capítulo 5

Operadores de spin

No cálculo dos propagadores para modelos de gravitação, faz-se necessário encontrar e manipular com os chamados operadores de spin, que nos permitem de forma sistemática, realizar as operações tensoriais de forma compacta e com controle sobre os diferentes modos de spin portados pelos campos tensoriais. Expomos o método dos projetores de spin e apresentamos os projetores de Barnes-Rivers para o caso de campos tensoriais de rank-2. Um conjunto de projetores de spin é derivado para campos tensoriais de rank-3 antisimétricos num par de índices. Este resultado constitui uma das contribuições originais deste trabalho.

5.1 Introdução

O espectro de partículas de uma teoria quântica de campos é encontrado quando se determinam todas as massas e spins (graus de liberdade) que se propagam na teoria. As massas (nuas) da teoria são reconhecidas como os pólos do propagador. Os spins, por outro lado, podem ser determinados através da contagem dos graus de liberdade, por meio da associação do número quântico de spin, s, a uma partícula que se apresente (em experiências do tipo Stern-Gerlach) com as polarizações $-s; -s+1; ...; s-1; s$ para o caso massivo; $-s$ e $+s$ para partículas sem massa (teorema de Wigner). Uma forma muito eficaz de se trabalhar esta questão é através do método dos operadores de spin. Neste método, os graus de liberdade de um determinado modo do campo são identificados de forma covariante também no propagador da teoria como o operador tensorial presente no resíduo associado ao pólo do modo, sem a necessidade de decomposição das equações de movimento em cada uma das suas componentes.

Por meio do método de projetores de spin, o problema de encontrar o propagador da teoria é resolvido de forma algébrica, ao encontrar-se a combinação linear dos projetores (e possíveis outros operadores deste espaço) que represente o inverso operatorial da equação de onda:

$$O\varphi = J \implies \varphi = O^{-1}J$$

onde O representa um operador (operador de onda) no espaço tensorial da representação do grupo de Lorentz de φ .

Para o caso de campos tensoriais, o método dos projetores pode ser entendido como uma extensão do teorema de Helmholtz, que afirma ser possível decompor um campo vetorial como uma soma de duas contribuições, uma com divergência nula (componente transversa) e outra com rotacional nulo (parte longitudinal)

$$V_\mu = V_\mu^L + V_\mu^T \ ,$$

onde V_μ é um vetor no espaço de Minkowski e

$$\begin{aligned} \partial_\mu V_\nu^L - \partial_\nu V_\mu^L &= 0 \ ; \\ \partial^\mu V_\mu^T &= 0 \ . \end{aligned}$$

Estas duas equações são resolvidas tomando-se V_μ^L, sob a forma de um gradiente de um escalar:

$$\begin{aligned} V_\mu^L &\equiv \partial_\mu \alpha \implies \partial_\mu V_\nu^L - \partial_\nu V_\mu^L = \partial_\mu \partial_\nu \alpha - \partial_\nu \partial_\mu \alpha = 0 \ ; \\ V_\mu^T &\equiv V_\mu - V_\mu^L \ . \end{aligned}$$

Realizando a passagem para o espaço dos momenta via uma transformada de Fourier temos

$$\partial_\nu \partial^\mu V_\mu = \Box \partial_\nu \alpha \ \longmapsto k_\nu k^\mu \tilde{V}_\mu = k^2 k_\nu \tilde{\alpha}$$

logo

$$\tilde{V}^L_\nu \equiv k_\nu \tilde{\alpha} = \left(\frac{k_\nu k_\mu}{k^2} \right) \times \tilde{V}^\mu$$

e

$$\tilde{V}^T_\mu = \left[\eta_{\mu\nu} - \left(\frac{k_\nu k_\mu}{k^2} \right) \right] \times \tilde{V}^\mu \ .$$

Cometendo um abuso de linguagem, podemos tratar as duas equações acima no espaço das posições simbolicamente como

$$\begin{aligned} V^L_\nu &= \frac{\partial_\nu \partial_\mu}{\Box} V^\mu \ ; \\ V^T_\nu &= \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\nu \partial_\mu}{\Box} \right) V^\mu \ . \end{aligned}$$

Estas duas equações definem as partes V^L_ν e V^T_ν , por meio de operadores lineares atuando sobre o campo V_ν completo. Os operadores

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu\nu} &\equiv \frac{\partial_\nu \partial_\mu}{\Box} \ ; \\ \Theta_{\mu\nu} &\equiv \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\nu \partial_\mu}{\Box} \right) \end{aligned}$$

obedecem uma álgebra de projetores:

- *Ortogonalidade*

$$\Omega_{\mu\nu} \Theta^\nu{}_\alpha = \Theta_{\mu\nu} \Omega^\nu{}_\alpha = 0 \ ;$$

- *Idempotência:*

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu\nu} \Omega^\nu{}_\alpha &= \Omega_{\mu\alpha} \ ; \\ \Theta_{\mu\nu} \Theta^\nu{}_\alpha &= \Theta_{\mu\alpha} \ ; \end{aligned}$$

- *Decomposição da unidade:*

$$\eta_{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu} \ .$$

Além disto, a parte longitudinal V_ν^L é um campo que efetivamente possui apenas um grau de liberdade pois é um gradiente de um escalar. Uma flutuação deste campo deve ser portanto identificada como uma partícula de spin 0 enquanto a parte transversa V_ν^T carrega 3 graus de liberdade, que se identificadas como as possíveis polarizações de spin de uma partícula, a caracterizam como um modo de spin 1 .

Com isso pode-se separar o conteúdo de spin contido no campo vetorial por meio dos projetores $\Omega_{\mu\nu}$e $\Theta_{\mu\nu}$ que por este motivo recebem o nome de projetores de spin.

5.2 Projetores de Barnes-Rivers

O raciocínio exposto acima pode ser estendido para campos tensoriais de rank mais alto, mantendo a idéia de que um tensor é obtido via produto tensorial entre vetores que, por sua vez, carregam conteúdo de spin caracterizado pelos projetores longitudinal e transverso. No caso de tensores de rank-2, o conteúdo de spin é

$$\begin{aligned} T^{(2)} &\ni (\mathbf{0} \oplus \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{0} \oplus \mathbf{1}) = (\mathbf{0} \otimes \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0} \otimes \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \otimes \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \\ &= \mathbf{0} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \ , \end{aligned}$$

onde usamos a regra de produto de spins

$$\mathbf{s} \otimes \ell = (\mathbf{s} + \ell) \oplus (\mathbf{s} + \ell - \mathbf{1}) \oplus ... \oplus \ \mathbf{0} \ .$$

Donde, o conteúdo de spin de um campo tensorial de rank-2 é duas partículas escalares, três partículas de spin 1 e uma partícula de spin 2.

Os operadores que separam estas componentes de spin foram construídos por Barnes e Rivers [62], [63] e podem ser subdivididos no setor simétrico

$$
\begin{aligned}
P^{(2)}{}_{(\alpha\beta);(\mu\nu)} &\equiv \frac{1}{2}\left(\Theta_{\alpha\mu}\Theta_{\beta\nu}+\Theta_{\alpha\nu}\Theta_{\beta\mu}\right)-\frac{1}{3}\Theta_{\alpha\beta}\Theta_{\mu\nu}\ ; \\
P^{(1-m)}{}_{(\alpha\beta);(\mu\nu)} &\equiv \frac{1}{2}\left(\Theta_{\mu\alpha}\Omega_{\nu\beta}+\Theta_{\mu\beta}\Omega_{\nu\alpha}+\Theta_{\nu\alpha}\Omega_{\mu\beta}+\Theta_{\nu\beta}\Omega_{\mu\alpha}\right)\ ; \\
P^{(0-s)}{}_{(\alpha\beta);(\mu\nu)} &\equiv \frac{1}{3}\Theta_{\mu\nu}\Theta_{\alpha\beta}\ ; \\
P^{(0-\omega)}{}_{(\alpha\beta);(\mu\nu)} &\equiv \Omega_{\mu\nu}\Omega_{\alpha\beta}\ ;
\end{aligned}
$$

e no setor antisimétrico

$$
\begin{aligned}
P^{(1-b)}{}_{[\alpha\beta];[\mu\nu]} &\equiv \frac{1}{2}\left(\Theta_{\alpha\mu}\Theta_{\beta\nu}-\Theta_{\alpha\nu}\Theta_{\beta\mu}\right)\ ; \\
P^{(1-e)}{}_{[\alpha\beta];[\mu\nu]} &\equiv \frac{1}{2}\left(\Theta_{\alpha\mu}\Omega_{\beta\nu}-\Theta_{\alpha\nu}\Omega_{\beta\mu}-\Theta_{\beta\mu}\Omega_{\alpha\nu}+\Theta_{\beta\nu}\Omega_{\alpha\mu}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Além destes projetores, outros operadores (sem caráter de projetores) podem aparecer num Lagrangeano para o campo tensorial de rank-2 executando o acoplamento entre diferentes espaços (de mesmo spin), que chamaremos aqui de mapeadores. Existem dois destes objetos no setor simétrico conectando os dois spins-0:

$$
\begin{aligned}
P^{(0-s\omega)}{}_{(\mu\nu);(\alpha\beta)} &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\Theta_{\mu\nu}\Omega_{\alpha\beta} \\
P^{(0-\omega s)}{}_{\mu\nu;\alpha\beta} &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}}\Omega_{\mu\nu}\Theta_{\alpha\beta}\ ;
\end{aligned}
$$

e outros dois mapeadores, que ligam o spin-1 do setor simétrico com o spin-1 (e) do setor antisimétrico:

$$
\begin{aligned}
P^{(1-me)}{}_{(\alpha\beta);[\mu\nu]} &\equiv \frac{1}{2}\left(\Theta_{\alpha\mu}\Omega_{\beta\nu}-\Theta_{\alpha\nu}\Omega_{\beta\mu}+\Theta_{\beta\mu}\Omega_{\alpha\nu}-\Theta_{\beta\nu}\Omega_{\alpha\mu}\right)\ ; \\
P^{(1-em)}{}_{[\alpha\beta];(\mu\nu)} &\equiv \frac{1}{2}\left(\Theta_{\alpha\mu}\Omega_{\beta\nu}+\Theta_{\alpha\nu}\Omega_{\beta\mu}-\Theta_{\beta\mu}\Omega_{\alpha\nu}-\Theta_{\beta\nu}\Omega_{\alpha\mu}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Todos estes operadores compõem a álgebra multiplicativa fechada

$$
\begin{aligned}
P^{(0-s\omega)}{}_{(\mu\nu);}{}^{(\alpha\beta)} P^{(0-\omega)}{}_{(\alpha\beta);(\kappa\lambda)} &= P^{(0-s\omega)}{}_{(\mu\nu);(\kappa\lambda)} \\
P^{(0-\omega s)} P^{(0-s)} &= P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-s)} P^{(0-s\omega)} &= P^{(0-s\omega)} \\
P^{(0-\omega)} P^{(0-\omega s)} &= P^{(0-\omega s)} \\
P^{(0-\omega s)} P^{(0-s\omega)} &= P^{(0-\omega)} \\
P^{(0-s\omega)} P^{(0-\omega s)} &= P^{(0-s)} \\
P^{(1-em)} P^{(1-me)} &= P^{(1-e)} \\
P^{(1-me)} P^{(1-em)} &= P^{(1-m)} \\
P^{(1-me)} P^{(1-e)} &= P^{(1-me)} \\
P^{(1-e)} P^{(1-em)} &= P^{(1-em)} \\
P^{(1-em)} P^{(1-m)} &= P^{(1-em)} \\
P^{(1-m)} P^{(1-me)} &= P^{(1-me)}
\end{aligned}
$$

5.3 Projetores de spin para campos tensoriais de rank-3

Consideremos o tensor de rank-3 $T^{(3)}$ com componentes $T_{\mu[\nu\kappa]}$. Devido à propriedade de antisimetria no par de índices $[\nu\kappa]$, podemos realizar a decomposição

$$T^{(3)} = V^{(1)} \otimes R^{(2)} \ ,$$

onde $V^{(1)}$ denota o espaço dos vetores e $R^{(2)}$ o espaço dos tensores de rank-2 antisimétricos. Com isto, a contagem de graus de liberdade contidos neste objeto resulta em

$$\left(4 \in V^{(1)}\right) \times \left(6 \in R^{(2)}\right) = 24 \text{ graus de liberdade,}$$

que, em termos das representações de spin, traduzem-se em

$$T^{\mu[\nu\kappa]} \in (\mathbf{0} \oplus \mathbf{1}) \otimes (\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}) = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{2} = 2 \times \mathbf{0} \oplus 4 \times \mathbf{1} \oplus 2 \times \mathbf{2} \ .$$

De posse dos projetores de spin destes dois espaços, podemos agora utilizá-los para construir um conjunto de projetores para o espaço completo do tensor $T^{(3)}$ decompondo a unidade de todo o espaço em produtos tensoriais dos operadores de cada um dos sub-espaços

$$\begin{aligned} id &= \left[\Theta^{(1)} \oplus \Omega^{(0)}\right] \otimes \left[P^{(1-b)} \oplus P^{(1-e)}\right] \\ &= \left(\Omega^{(0)} \otimes P^{(1-b)}\right) \oplus \left(\Omega^{(0)} \otimes P^{(1-e)}\right) \oplus \left(\Theta^{(1)} \otimes P^{(1-e)}\right) \oplus \left(\Theta^{(1)} \otimes P^{(1-b)}\right). \end{aligned}$$

Dois projetores de spin-1 são imediatamente reconhecidos

$$\begin{aligned} J_b^{(1)} &\equiv \left(\Omega^{(0)} \otimes P^{(1-b)}\right) \ ; \\ J_e^{(1)} &\equiv \left(\Omega^{(0)} \otimes P^{(1-e)}\right) \ ; \end{aligned}$$

que, em componentes, lêem-se

$$\begin{aligned} J_b^{(1)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu k]} &\equiv \frac{1}{2}\Omega_{\mu\alpha} P^{(1-b)}{}_{[\beta\gamma];[\nu k]} \ ; \\ J_e^{(1)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu k]} &\equiv \frac{1}{2}\Omega_{\mu\alpha} P^{(1-e)}{}_{[\beta\gamma];[\nu k]} \ , \end{aligned}$$

onde os fatores foram fixados para garantir a idempotência.

Quanto aos outros dois setores de projetores,

$$\begin{aligned} &\left(\Theta^{(1)} \otimes P^{(1-e)}\right) \\ &\left(\Theta^{(1)} \otimes P^{(1-b)}\right) \ , \end{aligned}$$

devemos explicitar o conteúdo de spin subdividindo-os em operadores que satisfaçam as propriedades de projetores e selecionem apenas os graus de liberdade contidos nas representações de spin correspondentes

$$\begin{aligned} \left(\Theta^1 \otimes P_b^1\right) &\ni \mathbf{0} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{2} \implies \\ \left(\Theta^1 \otimes P_b^1\right) &= K_b^0 \oplus L_b^1 \oplus M_b^2 \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\left(\Theta^1 \otimes P_e^1\right) = K_e^0 \oplus L_e^1 \oplus M_e^2 \ .$$

A estrutura de índices destes operadores pode ser construída com base em algumas regras heurísticas :

- *Simetria de índices do operador compatível com a simetria de índices do campo.*

Uma vez que um legítmo projetor acopla uma mesma representação de spin nos bilineares presentes no lagrangiano, devemos ter

$$\mathcal{L} \backsim T^{\alpha[\beta\gamma]} P_{\alpha\beta\gamma;\mu\nu\kappa} T^{\mu[\nu\kappa]} \implies P_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]}$$

- *Projetores com número par de derivadas devem ser simétricos sob a troca de índices de entrada pelos índices de saída.*

A fim de ser possível associar a um bilinear do lagrangiano

$$T^{\alpha[\beta\gamma]} P_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} T^{\mu[\nu\kappa]}$$

o termo na equação de campo

$$P_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} T^{\mu[\nu\kappa]}$$

é necessário que se realize um número par de integrações por partes de modo a

$$\delta\left(T^{\alpha[\beta\gamma]} P_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} T^{\mu[\nu\kappa]}\right) = 2\delta\left(T^{\alpha[\beta\gamma]}\right) P_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} T^{\mu[\nu\kappa]}$$

que por sua vez implica em

$$P_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} = P_{\mu[\nu\kappa];\alpha[\beta\gamma]}.$$

- *Índices "filtrados"por Θ carregam 3 graus de liberdade enquanto "filtrados"por Ω contém apenas 1 grau de liberdade.*

Isto segue diretamente da análise dos vetores longitudinais e transversos.

Com isto em mente, construímos e listamos abaixo, operadores que satisfazem as regras heurísticas acima, e juntos, possuem as propriedades de um conjunto bem definido de projetores (idempotência, ortogonalidade e decomposição da unidade). Mostramos ainda uma extensão operatorial com cinco mapeadores entre diversos setores de spin. Nossa construção é alternativa à já existente na literatura [54].

$$K_e^{(0)} \oplus K_b^{(0)} \oplus L_e^{(1)} \oplus L_b^{(1)} \oplus J_b^{(1)} \oplus J_e^{(1)} \oplus M_e^{(2)} \oplus M_b^{(2)} = (\Theta \oplus \Omega) \otimes \left(P_e^{(1)} \oplus P_b^{(1)}\right) = id$$

$$K_e^{(0)} \oplus L_e^{(1)} \oplus M_e^{(2)} = \Theta \otimes P_e^{(1)}$$

$$K_b^{(0)} \oplus L_b^{(1)} \oplus M_b^{(2)} = \Theta \otimes P_b^{(1)}$$

$$J_b^{(1)} \oplus J_e^{(1)} = \Omega \otimes \left(P_e^{(1)} \oplus P_b^{(1)}\right)$$

$$J_b^{(1)}{}_{\ \alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \equiv \frac{1}{2}\Omega_{\mu\alpha}\left[\Theta_{\beta\nu}\Theta_{\gamma\kappa} - \Theta_{\beta\kappa}\Theta_{\gamma\nu}\right] \ ;$$
$$J_e^{(1)}{}_{\ \alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \equiv \frac{1}{2}\Omega_{\mu\alpha}\left[\Theta_{\beta\nu}\Omega_{\gamma\kappa} - \Theta_{\beta\kappa}\Omega_{\gamma\nu} - \Theta_{\gamma\nu}\Omega_{\beta\kappa} + \Theta_{\gamma\kappa}\Omega_{\beta\nu}\right] \ ;$$

$$K_b^{(0)}{}_{\ \alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \equiv \frac{1}{6}\left\{\Theta_{\alpha\mu}\left[\Theta_{\beta\nu}\Theta_{\gamma\kappa} - \Theta_{\beta\kappa}\Theta_{\gamma\nu}\right] + \Theta_{\alpha\nu}\left[\Theta_{\beta\kappa}\Theta_{\gamma\mu} - \Theta_{\beta\mu}\Theta_{\gamma\kappa}\right] + \Theta_{\alpha\kappa}\left[\Theta_{\beta\mu}\Theta_{\gamma\nu} - \Theta_{\beta\nu}\Theta_{\gamma\mu}\right]\right\} \ ;$$
$$L_b^{(1)}{}_{\ \alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} = \frac{1}{2}\left\{\Theta_{\alpha\beta}\left(\Theta_{\mu\nu}\Theta_{\gamma\kappa} - \Theta_{\mu\kappa}\Theta_{\gamma\nu}\right) - \Theta_{\alpha\gamma}\left(\Theta_{\mu\nu}\Theta_{\beta\kappa} - \Theta_{\mu\kappa}\Theta_{\beta\nu}\right)\right\} \ ;$$

$$M_b^{(2)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \equiv \Theta_{\alpha\mu}P_b^{(1)}{}_{[\beta\gamma];[\nu\kappa]} - L_b^{(1)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} - K_b^{(0)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \ ;$$

$$K_e^{(0)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} = \frac{1}{2}\left[\Theta_{\alpha\beta}\left(\Theta_{\mu\nu}\Omega_{\kappa\gamma} - \Theta_{\mu\kappa}\Omega_{\nu\gamma}\right) - \Theta_{\alpha\gamma}\left(\Theta_{\mu\nu}\Omega_{\kappa\beta} - \Theta_{\mu\kappa}\Omega_{\nu\beta}\right)\right] \ ;$$

$$L_e^{(1)}{}_{[\alpha\beta\gamma];[\mu\nu\kappa]} = \frac{1}{6}\left\{\begin{array}{c} \Theta_{\alpha\mu}\left[\Theta_{\beta\nu}\Omega_{\gamma\kappa} - \Theta_{\beta\kappa}\Omega_{\gamma\nu} - \Theta_{\gamma\nu}\Omega_{\beta\kappa} + \Theta_{\gamma\kappa}\Omega_{\beta\nu}\right] \\ +\Theta_{\alpha\nu}\left[\Theta_{\beta\kappa}\Omega_{\gamma\mu} - \Theta_{\beta\mu}\Omega_{\gamma\kappa} - \Theta_{\gamma\kappa}\Omega_{\beta\mu} + \Theta_{\gamma\mu}\Omega_{\beta\kappa}\right] \\ +\Theta_{\alpha\kappa}\left[\Theta_{\beta\mu}\Omega_{\gamma\nu} - \Theta_{\beta\nu}\Omega_{\gamma\mu} - \Theta_{\gamma\mu}\Omega_{\beta\nu} + \Theta_{\gamma\nu}\Omega_{\beta\mu}\right] \\ +\Theta_{\beta\mu}\left[\Theta_{\gamma\nu}\Omega_{\alpha\kappa} - \Theta_{\gamma\kappa}\Omega_{\alpha\nu}\right] \\ +\Theta_{\beta\nu}\left[\Theta_{\gamma\kappa}\Omega_{\alpha\mu} - \Theta_{\gamma\mu}\Omega_{\alpha\kappa}\right] \\ +\Theta_{\beta\kappa}\left[\Theta_{\gamma\mu}\Omega_{\alpha\nu} - \Theta_{\gamma\nu}\Omega_{\alpha\mu}\right] \end{array}\right\} \ ;$$

$$M_e^{(2)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \equiv \Theta_{\alpha\mu}P_e^{(1)}{}_{[\beta\gamma];[\nu\kappa]} - L_e^{(1)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} - K_e^{(0)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \ .$$

No lagrangiano que estudamos no capítulo a seguir, apareceram ainda outros cinco mapeadores nas equações de campo:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta\gamma;\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2}\left\{\Theta_{\alpha\beta}\left[\Theta_{\gamma\nu}\Omega_{\mu\kappa} - \Theta_{\gamma k}\Omega_{\mu\nu}\right] - \Theta_{\alpha\gamma}\left[\Theta_{\beta\nu}\Omega_{\mu\kappa} - \Theta_{\beta\kappa}\Omega_{\mu\nu}\right]\right\} \ ; \\ B_{\alpha\beta\gamma;\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2}\left\{\Omega_{\alpha\beta}\left[\Theta_{\mu\kappa}\Theta_{\gamma\nu} - \Theta_{\mu\nu}\Theta_{\kappa\gamma}\right] - \Omega_{\alpha\gamma}\left[\Theta_{\mu\kappa}\Theta_{\nu\beta} - \Theta_{\mu\nu}\Theta_{\beta\kappa}\right]\right\} \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} &\equiv \left[\Theta_{\gamma\mu}\left(\Theta_{\beta\nu}\Omega_{\kappa\alpha} - \Theta_{\beta\kappa}\Omega_{\nu\alpha}\right) + \Theta_{\beta\mu}\left(\Theta_{\gamma\kappa}\Omega_{\nu\alpha} - \Theta_{\gamma\nu}\Omega_{\kappa\alpha}\right)\right] \ ; \\ S_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Theta_{\gamma\mu}\left(\Theta_{\alpha\nu}\Omega_{\kappa\beta} - \Theta_{\alpha\kappa}\Omega_{\nu\beta}\right) + \Theta_{\beta\mu}\left(\Theta_{\alpha\kappa}\Omega_{\nu\gamma} - \Theta_{\alpha\nu}\Omega_{\kappa\gamma}\right)\right] \ ; \end{aligned}$$

$$R_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \equiv \left\{\Theta_{\alpha\nu}\left[\Theta_{\beta\kappa}\Omega_{\gamma\mu} - \Theta_{\gamma\kappa}\Omega_{\beta\mu}\right] - \Theta_{\alpha\kappa}\left[\Theta_{\beta\nu}\Omega_{\gamma\mu} - \Theta_{\gamma\nu}\Omega_{\beta\mu}\right]\right\} \ .$$

Juntos todos estes operadores formam a seguinte álgebra (não-comutativa) fechada:

$$L_b^{(1)} \cdot N = 2N$$

$$L_e^{(1)} \cdot N = J_b^{(1)} \cdot N = J_e^{(1)} \cdot N = K_e^{(0)} \cdot N = K_b^{(0)} \cdot N = 0$$

$$M_b^{(2)} \cdot N = -N$$

$$M_e^{(2)} \cdot N = N^2 = N \cdot K_e^{(0)} = N \cdot K_b^{(0)} = 0$$

$$N \cdot L_b^{(1)} = N \cdot L_e^{(1)} = N \cdot J_b^{(1)} = N \cdot M_b^{(2)} = N \cdot M_e^{(2)} = 0$$

$$N \cdot J_e^{(1)} = N$$

$$N \cdot B = L_b^{(1)}$$

$$B^2 = B \cdot K_e^{(0)} = B \cdot K_b^{(0)} = 0$$

$$B \cdot L_b^{(1)} = -2B$$

$$B \cdot L_e^{(1)} = B \cdot J_b^{(1)} = B \cdot J_e^{(1)} = B \cdot M_b^{(2)} = 0$$

$$B \cdot M_b^{(2)} = B$$

$$B \cdot N = 2J_e^{(1)}$$

$$K_e^{(0)} \cdot B = K_b^{(0)} \cdot B = L_b^{(1)} \cdot B = L_e^{(1)} \cdot B = J_b^{(1)} \cdot B = 0$$

$$J_e^{(1)} \cdot B = B$$

$$M_b^{(2)} \cdot B = M_e^{(2)} \cdot B = Q \cdot Q = 0$$

$$S \cdot S = K^{(0-e)} + L^{(1-e)} + M^{(2-e)}$$

$$Q \cdot S = \sqrt{2}Q$$

$$S \cdot Q = Q \cdot J^{(1-e)} = J^{(1-e)} \cdot Q = 0$$

$$Q \cdot J^{(1-b)} = 0 \ ; \ J^{(1-b)} \cdot Q = Q$$

$$S \cdot J^{(1-e)} = J^{(1-e)} \cdot S = S \cdot J^{(1-b)} = J^{(1-b)} \cdot S = 0$$

$$S \cdot N = N \cdot S = S \cdot B = B \cdot S = 0$$

$$Q \cdot B = B \cdot Q = Q \cdot N = N \cdot Q = 0$$

$$Q \cdot \left(K^{(0-b)} \ ; \ L^{(1-b)} \ ; \ M^{(2-b)}\right) = \left(K^{(0-b)} \ ; \ L^{(1-b)} \ ; \ M^{(2-b)}\right) \cdot Q = 0$$

$$S \cdot \left(K^{(0-b)} \ ; \ L^{(1-b)} \ ; \ M^{(2-b)}\right) = \left(K^{(0-b)} \ ; \ L^{(1-b)} \ ; \ M^{(2-b)}\right) \cdot S = 0$$

$$Q \cdot K^{(0-e)} = K^{(0-e)} \cdot Q = 0$$

$$S \cdot K^{(0-e)} = K^{(0-e)} \cdot S = \sqrt{2} K^{(0-e)}$$

$$S \cdot L^{(1-e)} = \sqrt{2} \left[L^{(1-e)} + \frac{1}{6} Q - \frac{1}{3} J^{(1-b)} \right]$$

$$L^{(1-e)} \cdot S = \sqrt{2} \left[L^{(1-e)} - \frac{1}{3} J^{(1-b)} - \frac{1}{6} R \right]$$

$$L^{(1-e)} \cdot Q = -2 \left[L^{(1-e)} - \frac{1}{3} J^{(1-b)} - \frac{1}{6} R \right]$$

$$Q \cdot L^{(1-e)} = \frac{2}{3} \left[Q + 2 J^{(1-b)} \right]$$

$$R \cdot R = R \cdot S = 0$$

$$R \cdot Q = -2 \left[\sqrt{2} S + 2 \left(K^{(0-e)} + L^{(1-e)} + M^{(2-e)} \right) \right]$$

$$Q \cdot R = -8 J^{(1-b)}$$

$$S \cdot R = \sqrt{2} R$$

$$R \cdot J^{(1-b)} = R$$

$$J^{(1-b)} \cdot R = J^{(1-e)} \cdot R = R \cdot J^{(1-e)} = 0$$

$$B \cdot R = R \cdot B = N \cdot R = R \cdot N = 0$$

$$R \cdot \left(K^{(0-b)} \ ; \ L^{(1-b)} \ ; \ M^{(2-b)} \right) = \left(K^{(0-b)} \ ; \ L^{(1-b)} \ ; \ M^{(2-b)} \right) \cdot R = 0$$

$$K^{(0-e)} \cdot R = R \cdot K^{(0-e)} = 0$$

$$R \cdot L^{(1-e)} = \frac{1}{3} \left[R + \sqrt{2} S + 2 \left(K^{(0-e)} + L^{(1-e)} + M^{(2-e)} \right) \right]$$

$$L^{(1-e)} \cdot R = \frac{2}{3} \left[R + 2 J^{(1-b)} \right]$$

$$R \cdot M^{(2-e)} = -\frac{1}{3} \left[R + \sqrt{2} S + 2 \left(K^{(0-e)} + L^{(1-e)} + M^{(2-e)} \right) \right]$$

$$M^{(2-e)} \cdot R = \frac{1}{3} \left[R - 4 J^{(1-b)} \right]$$

$$R \cdot K_b^{(0)} = K_b^{(0)} \cdot R = R \cdot L_b^{(1)} = L_b^{(1)} \cdot R = R \cdot M_b^{(2)} = M_b^{(2)} \cdot R = 0$$

Capítulo 6

Teorias com Torção Propagante

Resumimos as principais motivações do estudo de teorias com torção dinâmica. Como exemplo, estudamos um modelo particular inspirado nas teorias de gravitação induzidas como regime de baixas energias das teorias de cordas. Aplicamos o método dos operadores de spin desenvolvido no Capítulo 5.

6.1 A torção e a dinâmica microscópica da gravidade

Vimos que na teoria de Einstein para a gravitação, a torção assume apenas um papel cinemático. Isto pode ser visto como uma manifestação da observação geométrica, de que a nível clássico, rotações equivalem a translações locais o que atrela os conceitos de momento angular e energia ou do ponto de vista físico, que no regime macroscópico da matéria os spins das partículas constituíntes se somam numa média nula [64]. Este fato expressa-se na Relatividade Geral pela possibilidade de escrever o tensor de spin em termos do tensor energia-momento, que é visto como a verdadeira fonte da interação gravitacional.

Por outro lado, o caráter não-renormalizável da RG, em analogia com a antiga teoria de Fermi para a interação fraca, sugere que a teoria de Einstein seja, no fundo, uma teoria efetiva de baixas energias de alguma teoria mais fundamental, na qual a renormalizabilidade estaria garantida.

Isto coloca a busca por teorias que incorporem novos graus de liberdade no regime da altas energias da teoria de Einstein. Sob o ponto de vista da estratégia de gauge, isto significa que outros atributos da matéria, além da massa, devam entrar na dinâmica em altas energias.

No nível microscópico, o momento angular de spin de uma partícula não está associado a rotações espaciais, constituindo, juntamente com sua massa, um par de números quânticos independentes que rotulam a identidade da partícula.

É razoável supor, portanto, que num nível fundamental, a informação contida no tensor de spin seja independente da informação energética dos sistemas físicos. Com isto, a conexão de spin (que se acopla ao tensor de spin) torna-se um objeto independente da vielbein, desaparecendo o vínculo de torção estática. Em outras palavras, no nível microscópico, a torção deve adquirir dinâmica e, consequentemente, se propagar.

O spin de um campo aparece, neste sentido, como a carga de interação que entra em jogo na dinâmica da gravidade a altas energias cujo bóson mediador associado é a conexão de spin [64], [65].

Investigações desta natureza justificam-se ainda dentro do programa das teorias de cordas, que geram teorias de gravitação no regime de baixas energias em que a torção aparece explicitamente [66], [55], [21], [19].

Propomos, neste sentido, o estudo da teoria [67]

$$\mathcal{L} = -\frac{e}{2\kappa^2}R + \xi_1 e T_{\mu\nu}{}^{a} T^{\mu\nu}{}_{a} + \xi_2 e g^{\kappa\sigma} g^{\nu\rho} g^{\mu\xi} \eta_{cb} \left(\nabla_\mu T_{\nu\kappa}{}^{c}\right) \left(\nabla_\xi T_{\sigma\rho}{}^{b}\right) + e e^{\mu}_{a} \bar{\Psi} i \gamma^a D_\mu \Psi - e m \bar{\Psi}\Psi \ ,$$

em que Ψ representa um campo de spin $1/2$, D_μ é a derivada covariante do grupo de Lorentz local e ∇_μ é a derivada covariante usual da Relatividade Geral, que, atuando sobre objetos com índices tensoriais mistos, desenvolve-se como

$$\nabla_\mu T_{\nu\kappa}{}^{a} = D_\mu T_{\nu\kappa}{}^{a} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} T_{\alpha\kappa}{}^{a} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\kappa} T_{\nu\alpha}{}^{a} \ ; \ D_\mu T_{\nu\kappa}{}^{a} = \partial_\mu T_{\nu\kappa}{}^{a} + \omega_\mu{}^{a}{}_{b} T_{\nu\kappa}{}^{b} \ .$$

Extremizando a ação obtemos as equações clássicas de campo para a vielbein e a conexão de spin:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\kappa^2}\left[ee_c^\lambda R - 2ee_g^\lambda e_c^\mu e_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{gb}\right]\delta\left(e_\lambda^c\right) + \xi_1\left\{ee_c^\lambda T^2 - 4D_\mu\left(eT^{\mu\lambda}{}_c\right) - 4ee_c^\mu T_{\mu\nu}{}^a T^{\lambda\nu}{}_a\right\}\delta\left(e_\lambda^c\right) \\
&\qquad + \xi_2 ee_h^\nu e_c^\sigma e_f^\lambda \eta^{gh}\left(D_\mu T_{ab}{}^i\right)\left(D_\nu T^{ba}{}_i\right)\left[e_\sigma^f e_g^\mu - 2\delta_\sigma^\mu \delta_g^f\right]\delta\left(e_\lambda^c\right) \\
&\qquad + 4\xi_2\left\{D_\alpha\left[e_d^\alpha e_f^\lambda D_\nu\left(eD^\nu T^{fd}{}_c\right)\right] + e_c^\alpha e_f^\gamma e_d^\lambda T_{\alpha\gamma}{}^e D_\nu\left[eD^\nu T^{fd}{}_e\right]\right\}\delta\left(e_\lambda^c\right) \\
&\qquad + \left\{ee_c^\lambda e_b^\mu \bar{\Psi} i\gamma^b D_\mu \Psi - ee_c^\mu e_b^\lambda \bar{\Psi} i\gamma^b D_\mu \Psi - ee_c^\lambda m\bar{\Psi}\Psi\right\}\delta\left(e_\lambda^c\right) = 0 \;; \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\frac{-1}{2\kappa^2}D_\nu\left(ee_{[e}^\lambda e_{f]}^\nu\right)\delta\left(\omega_\lambda{}^{ef}\right) + 4\xi_1 ee_\nu^c \eta_{cf} T^{\lambda\nu}{}_e \delta\left(\omega_\lambda{}^{ef}\right) \\
&\qquad + 2\xi_2\left\{\begin{array}{c} 2e_a^\alpha e_b^\lambda \eta_{df} e_\alpha^d D_\mu\left(eD^\mu T^{ba}{}_e\right) \\ +e\left(D^\lambda T^{gd}{}_c\right)\left[\eta_{ed} T_{fg}{}^c + \eta_{ge} T_{df}{}^c + \delta_e^c T_{dgf}\right] \end{array}\right\}\delta\left(\omega_\lambda{}^{ef}\right) \\
&\qquad + ee_d^\lambda \bar{\Psi} i\gamma^d \Sigma_{ef} \Psi \delta\left(\omega_\lambda{}^{ef}\right) = 0 \;. \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

No sentido de analisar o regime quântico da teoria, procedemos à decomposição linear de pequenas flutuações dinâmicas sobre a configuração estável de Minkowski:

$$
\begin{aligned}
e_\mu^a &\longmapsto \delta_\mu^a + \tilde{e}_\mu^a \\
\omega_\mu{}^{ab} &\longmapsto \tilde{\omega}_\mu{}^{ab} \;,
\end{aligned}
$$

em que $\tilde{e}_\mu^a$ representa pequenas flutuações sobre o mapa trivial δ_μ^a ; $\tilde{\omega}_\mu{}^{ab}$, por não conter dinâmica clássica, é entendido como a própria flutuação (o valor esperado no vácuo de $\omega_\mu{}^{ab}$ é nulo).

Neste regime os índices internos e de espaço tempo ficam em pé de igualdade, isto é, os campos $\tilde{e}_\mu^a$ e $\tilde{\omega}_\mu{}^{ab}$ são entendidos como legítimos tensores.

Com esta prescrição, temos a versão linearizada das equações de campo para a conexão de spin

$$\frac{-1}{2\kappa^2}\left\{\begin{array}{c}\left[\partial_e\tilde{e}^\lambda_f-\partial_b\tilde{e}^\lambda_a+\tilde{\omega}_e{}^\lambda{}_f-\tilde{\omega}_b{}^\lambda{}_e\right]-2\delta^\lambda_e\left[\partial_c\tilde{e}^c_f-\partial_f\tilde{e}^c_c+\tilde{\omega}_c{}^c{}_f\right]\\ +2\delta^\lambda_f\left[\partial_c\tilde{e}^c_e-\partial_e\tilde{e}^c_c+\tilde{\omega}_c{}^c{}_e\right]\end{array}\right\}$$

$$+4\xi_1 e\left(\partial^\lambda\tilde{e}_{ef}-\partial_f\tilde{e}^\lambda_e+\tilde{\omega}^\lambda{}_{ef}-\tilde{\omega}_{fe}{}^\lambda\right)+4\xi_2\delta^\alpha_a\delta^\lambda_b\eta_{df}\delta^d_\alpha\partial_\mu\left[e\left(\partial^\mu T^{ba}{}_e\right)\right]+e\left(\delta^\lambda_d+\tilde{e}^\lambda_d\right)\bar{\Psi}i\gamma^d\Sigma_{ef}\Psi=0\,, \tag{6.3}$$

e para a vielbein

$$\frac{1}{2\kappa^2}\left[2e\delta^\lambda_c\partial_\mu\tilde{\omega}_\nu{}^{\mu\nu}-2e\left(\partial_c\tilde{\omega}_b{}^{\lambda b}-\partial_b\tilde{\omega}_c{}^{\lambda b}\right)\right]-\xi_1 4\partial_\mu\left(T^{\mu\lambda}{}_c\right)+4\xi_2\delta^\alpha_d\delta^\lambda_f\partial_\alpha\partial_\nu\left(\partial^\nu T^{fd}{}_c\right)$$
$$+\left\{e\left(\delta^\lambda_c+\tilde{e}^\lambda_c\right)\left(\delta^\mu_b+\tilde{e}^\mu_b\right)\bar{\Psi}i\gamma^b D_\mu\Psi-e\left(\delta^\mu_c+\tilde{e}^\mu_c\right)\left(\delta^\lambda_b+\tilde{e}^\lambda_b\right)\bar{\Psi}i\gamma^b D_\mu\Psi-e\left(\delta^\lambda_c+e^\lambda_c\right)m\bar{\Psi}\Psi\right\}=0\,,$$

que podem, formalmente ser arranjadas na forma matricial (com elementos tensoriais):

$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{e}^a_\mu\\ \tilde{\omega}_\nu{}^{bc}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Pi^\lambda{}_d\\ \Xi^\lambda{}_{ef}\end{pmatrix}\,, \tag{6.4}$$

onde

$$\begin{aligned}-\Pi^\lambda{}_d &= \left\{e\left(\delta^\lambda_d+\tilde{e}^\lambda_d\right)\left(\delta^\mu_b+\tilde{e}^\mu_b\right)\bar{\Psi}i\gamma^b D_\mu\Psi-e\left(\delta^\mu_d+\tilde{e}^\mu_d\right)\left(\delta^\lambda_b+\tilde{e}^\lambda_b\right)\bar{\Psi}i\gamma^b D_\mu\Psi-e\left(\delta^\lambda_d+\tilde{e}^\lambda_d\right)m\bar{\Psi}\Psi\right\}\\ -\Xi^\lambda{}_{ef} &= e\left(\delta^\lambda_d+\tilde{e}^\lambda_d\right)\bar{\Psi}i\gamma^d\Sigma_{ef}\Psi\end{aligned}$$

são as fontes de matéria. As componentes do operador de onda são:

$$A^\lambda{}_{d;}{}^\mu{}_a=\left\{4\xi_2\eta^{\lambda\kappa}\eta^{\alpha\theta}\eta_{da}\partial_\alpha\Box\left(\delta^\mu_\theta\partial_\kappa-\delta^\mu_\kappa\partial_\theta\right)-4\xi_1\eta^{\alpha\kappa}\eta^{\lambda\theta}\eta_{da}\partial_\alpha\left(\delta^\mu_\theta\partial_\kappa-\delta^\mu_\kappa\partial_\theta\right)\right\}\ ; \tag{6.5}$$

$$B^\lambda{}_{d;}{}^\nu{}_{bc}=\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2\kappa^2}\left[2e\delta^\lambda_d\delta^\nu_c\partial_b+2e\left(\delta^\nu_b\delta^\lambda_c\partial_d-\delta^\lambda_c\delta^\nu_d\partial_b\right)\right]-4\xi_1\eta^{\alpha\kappa}\eta^{\lambda\theta}\eta_{da}\partial_\alpha\left(\delta^\nu_\kappa\delta^h_\theta\eta_{hc}\delta^a_b-\delta^\nu_\theta\delta^h_\kappa\eta_{hc}\delta^a_b\right)\\ +4\xi_2\eta^{\lambda\kappa}\eta^{\alpha\theta}\eta_{da}\partial_\alpha\Box\left(\delta^\nu_\kappa\delta^h_\theta\eta_{hc}\delta^a_b-\delta^\nu_\theta\delta^h_\kappa\eta_{hc}\delta^a_b\right)\end{array}\right\}\ ; \tag{6.6}$$

$$C^\lambda{}_{ef;}{}^\mu{}_a=\left\{\begin{array}{c}\frac{-1}{2\kappa^2}\left[\delta^\lambda_a\left(\delta^\mu_f\partial_e-\delta^\mu_e\partial_f\right)+2\delta^\lambda_f\left(\delta^\mu_e\partial_a-\delta^\mu_a\partial_e\right)-2\delta^\lambda_e\left(\delta^\mu_f\partial_a-\delta^\mu_a\partial_f\right)\right]\\ +4\xi_1\left(\delta^\mu_e\eta_{fa}\partial^\lambda-\delta^\mu_e\delta^\lambda_a\partial_f\right)+4\xi_2\eta^{\kappa\lambda}\delta^\theta_f\eta_{ea}\left(\delta^\mu_\theta\partial_\kappa-\delta^\mu_\kappa\partial_\theta\right)\Box\end{array}\right\}\ ; \tag{6.7}$$

$$D^\lambda{}_{ef;}{}^\nu{}_{bc}=\left\{\begin{array}{c}\frac{-1}{2\kappa^2}\left[\delta^\lambda_b\left(\delta^\nu_e\delta^d_f-\delta^\nu_f\delta^d_e\right)+2\delta^\lambda_f\delta^\nu_b\delta^d_e-2\delta^\lambda_e\delta^\nu_b\delta^d_f\right]\eta_{cd}\\ +4\xi_1\left[\eta^{\lambda\nu}\eta_{eb}\eta_{fc}-\delta^\lambda_c\eta_{eb}\delta^\nu_f\right]+4\xi_2\eta^{\kappa\lambda}\delta^\theta_f\eta_{ea}\left[\delta^\nu_\kappa\delta^h_\theta\eta_{hc}\delta^a_b-\delta^\nu_\theta\delta^h_\kappa\eta_{hc}\delta^a_b\right]\Box\end{array}\right\}\,. \tag{6.8}$$

A simetria de gauge nas equações de campo implica que, para uma determinada configuração das fontes, várias configurações dos campos relacionadas entre si por transformações de gauge são admitidas. Isso faz com que a matriz operatorial acima não seja inversível, levando à necessidade de introduzir um novo termo no lagrangiano de modo a fixar um calibre. Utilizamos o calibre de *de Donder*, que fixa a simetria no setor simétrico da vielbein (que corresponde às flutuações da métrica):

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}$$

$$g_{\mu\nu} = ;\ e^a_\mu = \delta^a_\mu + \tilde{e}^a_\mu \implies$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} &= \left(\delta^a_\mu + \tilde{e}^a_\mu\right)\left(\delta^b_\nu + \tilde{e}^b_\nu\right)\eta_{ab} \\ &\simeq \eta_{\mu\nu} + \delta^a_\mu \tilde{e}^b_\nu \eta_{ab} + \tilde{e}^a_\mu \delta^b_\nu \eta_{ab} \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$h_{\mu\nu} = \tilde{e}_{\mu\nu} + \tilde{e}_{\nu\mu}\ .$$

O lagrangiano de gauge-fixing de *de Donder* é

$$\mathcal{L}_{de\ Donder} = \alpha f_\mu f^\mu$$

$$f_\mu = \partial_\nu \left(\widetilde{e}^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu \delta^\sigma_\beta \widetilde{e}^\beta_\sigma\right),$$

que introduz novos operadores na componente A da matriz operatorial

$$\begin{aligned} A_{\lambda\delta;\mu\alpha} &\longmapsto A_{\lambda\delta;\mu\alpha} - 2\alpha \check{A}_{\lambda\delta;\mu\alpha}\ ; \\ \check{A}_{\lambda\delta;\mu\alpha} &\equiv \eta_{\alpha\delta}\partial_\lambda\partial_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\lambda\delta}\partial_\alpha\partial_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\partial_\lambda\partial_\delta + \frac{1}{4}\eta_{\lambda\delta}\eta_{\mu\alpha}\Box\ . \end{aligned}$$

Procedemos, agora, com o propósito de encontrar os propagadores dos modos carregados na conexão de spin e na vielbein.

Esquematicamente, a matriz inversa de operadores deve satisfazer à equação matricial

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

para que se obtenham as configurações de campo a partir das fontes por meio de

$$\begin{pmatrix} e^h_\alpha \\ \omega_\beta{}^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\alpha\lambda}{}^{hd} & F_{\alpha\lambda}{}^{hef} \\ G_{\beta\lambda}{}^{dij} & H_{\beta\lambda}{}^{ijef} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi^\lambda{}_d \\ \Xi^\lambda{}_{ef} \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Da equação (6.9), obtivemos as relações definidoras das componentes da matriz de propagadores

$$EA + FC = \mathbf{1} \tag{6.11}$$

$$EB + FD = \mathbf{0} \tag{6.12}$$

$$GA + HC = \mathbf{0} \tag{6.13}$$

$$GB + HD = \mathbf{1}\ , \tag{6.14}$$

donde

$$F = -EBD^{-1} \Longrightarrow \tag{6.15}$$

$$E\left(A - BD^{-1}C\right) = \mathbf{1} \Longrightarrow \tag{6.16}$$

$$E = \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} \tag{6.17}$$

e

$$G = -HCA^{-1} \Longrightarrow \tag{6.18}$$

$$H\left[D - CA^{-1}B\right] = \mathbf{1} \Longrightarrow \tag{6.19}$$

$$H = \left[D - CA^{-1}B\right]^{-1}\ . \tag{6.20}$$

Em particular, o mesmo processo foi utilizado na inversão da componente A que define o setor quadrático da vielbein:

$$\tilde{e}^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta;\mu\nu}\tilde{e}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{e}^{(\alpha\beta)} & \tilde{e}^{[\alpha\beta]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{i}_{(\alpha\beta);(\mu\nu)} & A^{ii}_{(\alpha\beta);[\mu\nu]} \\ A^{iii}_{[\alpha\beta];(\mu\nu)} & A^{iv}_{[\alpha\beta];[\mu\nu]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}^{(\mu\nu)} \\ \tilde{e}^{[\mu\nu]} \end{pmatrix}\ ,$$

da qual se extrai a inversa por meio de

$$\begin{pmatrix} R_{(\kappa\lambda);}{}^{(\alpha\beta)} & S_{(\kappa\lambda);}{}^{[\alpha\beta]} \\ P_{[\kappa\lambda];}{}^{(\alpha\beta)} & Q_{[\kappa\lambda];}{}^{[\alpha\beta]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{i}_{(\alpha\beta);(\mu\nu)} & A^{ii}_{(\alpha\beta);[\mu\nu]} \\ A^{iii}_{[\alpha\beta];(\mu\nu)} & A^{iv}_{[\alpha\beta];[\mu\nu]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id_{(\kappa\lambda);(\mu\nu)} & 0 \\ 0 & id_{[\kappa\lambda];[\mu\nu]} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
R_{(\kappa\lambda);}{}^{(\alpha\beta)}A^{i}_{(\alpha\beta);(\mu\nu)}+S_{(\kappa\lambda);}{}^{[\alpha\beta]}A^{iii}_{[\alpha\beta];(\mu\nu)} &= id_{(\kappa\lambda);(\mu\nu)}\\
R_{(\kappa\lambda);}{}^{(\alpha\beta)}A^{ii}_{(\alpha\beta);[\mu\nu]}+S_{(\kappa\lambda);}{}^{[\alpha\beta]}A^{iv}_{[\alpha\beta];[\mu\nu]} &= 0\\
P_{[\kappa\lambda];}{}^{(\alpha\beta)}A^{i}_{(\alpha\beta);(\mu\nu)}+Q_{[\kappa\lambda];}{}^{[\alpha\beta]}A^{iii}_{[\alpha\beta];(\mu\nu)} &= 0\\
P_{[\kappa\lambda];}{}^{(\alpha\beta)}A^{ii}_{(\alpha\beta);[\mu\nu]}+Q_{[\kappa\lambda];}{}^{[\alpha\beta]}A^{iv}_{[\alpha\beta];[\mu\nu]} &= id_{[\kappa\lambda];[\mu\nu]}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
S &= -RA^{ii}\left(A^{iv}\right)^{-1}\\
R &= \left[A^{i}+-A^{ii}\left(A^{iv}\right)^{-1}A^{iii}\right]^{-1}\\
P &= -QA^{iii}\left(A^{i}\right)^{-1}\\
Q &= \left[A^{iv}-A^{iii}\left(A^{i}\right)^{-1}A^{ii}\right]^{-1}\ .
\end{aligned}
$$

Expomos, agora, os resultados obtidos nos setores diagonais $e-e$ e $\omega-\omega$.

Propagadores do setor da vielbein puro $(E_{\alpha\lambda}{}^{hd})$:

$$
E=\begin{pmatrix}
\frac{1}{(\Gamma-\delta)}P^{(2)}+\frac{2}{3\Gamma}P^{(1)}_{m}+\frac{1}{[\Gamma-(\alpha+\delta)]}P^{(0)}_{s} & \frac{2}{3\Gamma}P^{(1)}_{em}\\
-\frac{2}{3\Gamma}P^{(1)}_{me} & \left(\frac{1}{[4\Gamma-(\beta+\delta)]}P^{(1)}_{b}+\frac{\Gamma-2\gamma}{(2\Gamma-\gamma)(\Gamma-2\gamma)-2(2\Gamma-\gamma)^{2}}P^{(1)}_{e}\right)
\end{pmatrix}\ ,
$$

onde os parâmetros acima desenvolvem-se em termos das constantes de acoplamento κ, ξ_1 e ξ_2 como

$$
\alpha=6\Box\left\{a\left[3\left(-\frac{1}{2\kappa^{2}}\right)^{2}+4\left(\xi_1+\xi_2\Box\right)^{2}\right]+4w\left[\left(-\frac{1}{2\kappa^{2}}\right)^{2}-\left(\xi_1+\xi_2\Box\right)^{2}\right]\right\}
$$

$$
\beta=8\Box\left\{\begin{array}{c}
(c-a)\left[-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2\kappa^{2}}\right)^{2}+\left(-\frac{1}{2\kappa^{2}}\right)\left(\xi_1+\xi_2\Box\right)-\frac{8}{3}\left(\xi_1+\xi_2\Box\right)^{2}\right]\\
-2\left(x+y\right)\left(\xi_1+\xi_2\Box\right)^{2}
\end{array}\right\}
$$

$$
\gamma=2\Box\left\{(b-2d)\left(-\frac{1}{2\kappa^{2}}\right)^{2}-(2s+r)\left(-\frac{1}{2\kappa^{2}}\right)\left(\xi_1+\xi_2\Box\right)\right\}
$$

$$
\delta=-2\Box\left\{a\left[\left(-\frac{1}{2\kappa^{2}}\right)^{2}+4\left(\xi_1+\xi_2\Box\right)^{2}\right]\right\}
$$

$$\Gamma = -\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right) \Box$$

e

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\left[-\frac{1}{2\kappa^2} + 2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\right]} = b = x, \\
c &= \frac{-1}{2\left[-\frac{1}{2\kappa^2} - 4\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\right]} = z \\
w &= \frac{1}{2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)} \\
d &= \frac{2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\left[2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\right] + \left(-\frac{1}{2\kappa^2}\right)^2}{2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\left[\left[2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\right]^2 + 2\left(-\frac{1}{2\kappa^2}\right)^2\right]} \\
s &= \frac{-\frac{1}{2\kappa^2}}{\left[2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\right]^2 + 2\left(-\frac{1}{2\kappa^2}\right)^2} \\
y &= \frac{-\frac{1}{2\kappa^2} - 2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)}{\left[2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\right]\left(-\frac{1}{2\kappa^2} - 2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\right) + 2\left(-\frac{1}{2\kappa^2}\right)^2} \\
r &= \frac{-\frac{1}{2\kappa^2}}{\left[2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\right]\left(-\frac{1}{2\kappa^2} - 2\left(\xi_1 + \xi_2 \Box\right)\right) + 2\left(-\frac{1}{2\kappa^2}\right)^2} \ .
\end{aligned}$$

No setor da conexão de spin, o operador H assume a forma abaixo:

$$H_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \equiv$$

$$\begin{aligned}
& r_1 \times M^{(2-b)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} + r_2 \times L^{(1-b)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} + r_3 \times K^{(0-b)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} + r_4 \times M^{(2-e)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \\
& + r_5 \times L^{(1-e)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} + r_6 \times K^{(0-e)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} + r_7 \times J^{(1-b)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} + r_8 \times J^{(1-e)}{}_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \\
& + r_9 \times B_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} + r_{10} \times N_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} + r_{11} \times S_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} + r_{12} \times Q_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} + r_{13} \times R_{\alpha[\beta\gamma];\mu[\nu\kappa]} \ ,
\end{aligned}$$

com coeficientes dados pelas relações algébricas

$$r_1 = \frac{1}{s_1} \ ; \ r_3 = \frac{1}{2s_2};$$

$$r_2 = \frac{1}{(s_3 - q_1)} + \left[\frac{(s_4 + q_9)}{(s_3 - q_1)}\right] \frac{\left[\frac{1}{s_1} + \frac{2}{(s_3 - q_1)}\right]}{\left[(s_3 - q_6) - \frac{2(s_4 + q_{10})(s_4 + q_9)}{(s_3 - q_1)}\right]} (s_4 + q_{10}) \ ;$$

$$r_8 = \frac{[s_1 - 2(s_3 - q_1)]}{(s_4 + q_9)} \frac{1}{\left[\frac{(s_3-q_6)[s_1-2(s_3-q_1)]}{(s_4+q_9)} - 2(s_4 + q_{10})\right]} \ ;$$

$$r_9 = \frac{1}{\left[\frac{(s_3-q_6)[s_1-2(s_3-q_1)]}{(s_4+q_9)} - 2(s_4 + q_{10})\right]};$$

$$r_{10} = \frac{\left[\frac{1}{s_1} + \frac{2}{(s_3-q_1)}\right]}{\left[(s_3 - q_6) - \frac{2(s_4+q_{10})(s_4+q_9)}{(s_3-q_1)}\right]} (s_4 + q_{10}) \ .$$

Os demais coeficientes r_4, r_5, r_6, r_7, r_{11}, r_{12} e r_{13} podem ser obtidos mediante a resolução do sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -q_4 & W_1 & W_5 & 0 \\ \left[\frac{1}{3}q_4 - \frac{1}{3}q_5\right] & \left[\frac{1}{3}q_5 - \frac{1}{3}q_4\right] & 0 & 0 & 0 & 0 & W_7 \\ -2q_5 & 0 & W_{13} & 0 & W_2 & 0 & W_8 \\ (s_1 - q_3) & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}q_5 & 0 & W_9 \\ [2q_5 - 2q_4] & W_{12} & 0 & 0 & W_3 & 0 & W_{10} \\ \left[\frac{2}{3}q_4 - \frac{2}{3}q_5\right] & \left[\frac{2}{3}q_5 - \frac{2}{3}q_4\right] & 0 & (s_1 - q_7) & W_4 & W_6 & 0 \\ -\sqrt{2}q_5 & 0 & 0 & 0 & (s_1 - q_3) & 0 & W_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_4 \\ r_5 \\ r_6 \\ r_7 \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde os parâmetros se relacionam da seguinte forma

$$W_1 = \left[\frac{\sqrt{2}}{6}(s_2 - q_2) - \frac{\sqrt{2}}{6}(s_1 - q_3)\right] \ ;$$

$$W_2 = \left[\sqrt{2}(s_1 - q_3) - \sqrt{2}(s_3 - q_8) - \sqrt{2}q_5\right] \ ;$$

$$W_3 = \left[\sqrt{2}(s_2 - q_2) - \sqrt{2}q_5 - \sqrt{2}(s_1 - q_3)\right] \ ;$$

$$W_4 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}(s_1 - q_3) - \frac{\sqrt{2}}{3}(s_2 - q_2)\right] \ ;$$

$$W_5 = \left[2q_5 + \frac{2}{3}(s_2 - q_2) + \frac{2}{3}(s_1 - q_3)\right] \ ;$$

$$W_6 = \left[\frac{4}{3}(s_2 - q_2) - \frac{4}{3}(s_1 - q_3)\right] \ ;$$

$$W_7 = \left[(s_1 - q_7) - \frac{1}{3}(s_1 - q_3) + \frac{1}{3}(s_2 - q_2)\right] \ ;$$

$$W_8 = \left[4q_4 - \frac{2}{3}\left(s_1 - q_3\right) + \frac{2}{3}\left(s_2 - q_2\right)\right] \ ;$$

$$W_9 = \left[\frac{2}{3}\left(s_2 - q_2\right) - \frac{2}{3}\left(s_1 - q_3\right) + 4q_4\right] \ ;$$

$$W_{10} = \left[\frac{2}{3}\left(s_2 - q_2\right) - \frac{2}{3}\left(s_1 - q_3\right) + 4q_4\right] \ ;$$

$$W_{11} = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\left(s_2 - q_2\right) - \frac{\sqrt{2}}{3}\left(s_1 - q_3\right) + 2\sqrt{2}q_4\right] \ ;$$

$$W_{12} = \left[2q_4 + \left(s_2 - q_2\right) - 2q_5\right] \ ;$$

$$W_{13} = \left[\left(s_3 - q_8\right) + 2q_5\right] \ ;$$

$$\begin{aligned}
s_1 &\equiv \left[2\left(\xi_1 + \xi_2\Box\right) - \frac{1}{2\kappa^2}\right] \ ; \\
s_2 &\equiv \left[8\left(\xi_1 + \xi_2\Box\right) + \frac{1}{2\kappa^2}\right] \ ; \\
s_3 &\equiv 2\left(\xi_1 + \xi_2\Box\right) \ ; \\
s_4 &\equiv \frac{1}{2\kappa^2} \ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1 &\equiv \frac{1}{4\kappa^2}\Box\left\{\left(Z + \frac{1}{4\kappa^2}y\right)2 - 4H\right\} \ ; \\
q_2 &\equiv \left(K_1\sqrt{6} + 2\left(K_3 - K_1\right)\right) \ ; \\
q_3 &\equiv 2\left(K_3 - K_1\right) \ ; \\
q_4 &\equiv \left(K_2 - K_1\right) \ ; \\
q_5 &\equiv -\left(K_1 + K_4\right) \ ; \\
q_6 &\equiv 2\Gamma\left\{2Z - X + \frac{1}{2\kappa^2}y - 2\left(2H - G\right)\right\} \ ; \\
q_7 &\equiv \left[2K_1 - 8\Gamma F\right] \ ; \\
q_8 &\equiv \left\{\frac{1}{4\kappa^2} \times \left(\frac{1}{3}Y\left(x + 2z\right) + \frac{1}{\kappa^2}z + \frac{\Gamma}{\Box}4z\right)2\Box + 4\Gamma \times \frac{1}{3}Y\left(z - x\right) + 2\left(K_3 - K_1\right)\right\} \ ; \\
q_9 &\equiv \frac{1}{4\kappa^2}\Box\left\{\left(X - 2Z - \frac{1}{2\kappa^2}y\right) + 2\left(2H - G\right)\right\} \ ; \\
q_{10} &\equiv 2\Gamma\left\{4H - 2Z - \frac{1}{2\kappa^2}y\right\} \ ;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_1 &\equiv -4\Gamma I \ ; \\
K_2 &\equiv \left(2\frac{\Gamma}{\Box} + \frac{1}{4\kappa^2}\right) F\Box \ ; \\
K_3 &\equiv \left\{\left(2\frac{\Gamma}{\Box} + \frac{1}{4\kappa^2}\right) I\Box + xY\left(\frac{1}{8\kappa^2} - \frac{\Gamma}{\Box}\right)\Box\right\} \ ; \\
K_4 &\equiv \left\{\left(2\frac{\Gamma}{\Box} + \frac{1}{4\kappa^2}\right) I - xY\left(\frac{1}{8\kappa^2} - \frac{\Gamma}{\Box}\right)\right\} \ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X &\equiv \left\{\frac{4b}{[b\Gamma - 2]}\left[\xi_1 - \xi_2\Box + \frac{1}{4\kappa^2}\right] - 2y\left(\xi_1 + \xi_2\Box - \frac{1}{4\kappa^2}\right)\right\} \ ; \\
Y &\equiv 2\left(\xi_1 + \xi_2\Box - \frac{1}{4\kappa^2}\right) \ ; \\
Z &\equiv \frac{1}{4\kappa^2}\left(\frac{2b}{[b\Gamma - 2]}\right) \ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G &\equiv \left[-2y\left(\xi_1 + \xi_2\Box - \frac{1}{4\kappa^2}\right) - \left(\xi_1 - \xi_2\Box + \frac{1}{4\kappa^2}\right)\frac{2}{[2\Gamma - b\Gamma^2]}\right] \ ; \\
H &\equiv \left[\frac{y}{4\kappa^2} - \frac{1}{4\kappa^2\,[2\Gamma - b\Gamma^2]}\right] \ ; \\
I &\equiv \left(\xi_1 - \xi_2\Box - \frac{1}{4\kappa^2}\right)\frac{1}{2\Gamma} \ ; \\
F &\equiv (\xi_1 - \xi_2\Box)\,\frac{1}{\Gamma} \ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\Gamma} \ ; \\
y &= \frac{-1}{\left(\frac{7}{2}\Gamma + \alpha\Box\right)} \ ; \\
z &\equiv \left[1 - \frac{6\alpha\Box}{\left(\Gamma - \alpha\Box\frac{3}{2}\right)}\right] \times \left[\Gamma + \frac{9}{2}\alpha\Box\right]^{-1} \ ;
\end{aligned}
$$

$$
b \equiv \frac{1}{\left(\frac{\Gamma}{2} - \alpha\Box\right)} \ ;
$$

$$
\Gamma = -\left(\xi_2\Box^2 + \xi_1\Box\right) \ .
$$

Capítulo 7

Conclusões Gerais e Perspectivas e Encaminhamentos

Mesmo após os 92 anos da proposição por Einstein da Teoria Geral da Relatividade e dos 81 anos do trabalho de Dirac que funda as Teorias Quânticas de Campos, os dois pilares da Física do século XX, a fusão consistente destas duas disciplinas continua um problema nebuloso.

É inegável, entretanto, reconhecer se tratar de um ramo extremamente fértil da Física que vem, ao longo de todos estes anos estabelecido ricas fronteiras interdisciplinares [68], [69], [70], [71].

Em geral, as tentativas de conciliação exploram, sobretudo, as semelhanças formais entre os dois assuntos, das quais destacamos a formulação da gravitação como uma teoria de calibre para o grupo de Lorentz, o chamado formalismo de primeira ordem, que expusemos no Capítulo 3.

Em particular, o tensor de torção aparece no formalismo de primeira ordem em pé de igualdade com a curvatura de Riemann, compondo o tensor intesidade de campo. Com base nisto, é razoável dizer que muitos aspectos interessantes da Física, no domínio da gravidade quântica, devam levar em conta a torção como um ingrediente fundamental.

Ainda, pautando uma breve discussão da gravidade (clássica) em curvatura *versus* torção, a teoria de Einstein e o Teleparalelismo aparecem como duas faces da mesma moeda, como vimos no Capítulo 4.

O método dos operadores de spin, desenvolvido no Capítulo 5, pode ser muito útil na caracterização das excitações fundamentais em teorias com torção dinâmica a nível de árvore.

Combinações das constantes de acoplamento podem ser exploradas no intuito de se cancelar os modos expúrios (ghosts e táquions).

Como citamos na Introdução, a torção é um elemento presente tanto nas teorias de gravitação derivadas das supercordas quanto na LQG com importantes implicações interpretativas, tais como violação de paridade e da simetria de Lorentz através de condensados fermiônicos que, por sua vez, é assinalada em valores não-nulos das componentes irredutíveis da torção.

Além dos pontos mencionados acima, uma boa perspectiva é o aprofundamento do estudo da torção em ambiente de Supergravidade nos cenários de branas, já que, em vista dos experimentos no LHC, questões importantes, como a provável produção de grávitons leves e gravitinos podem nos orientar sobre uma eventual contribuição dos graus de liberdade da torção para o espectro de excitações gravitacionais. Esperamos também, com a técnica tensorial desenvolvida a partir dos operadores de spin no setor dos campos de rank-3, ter ferramental eficiente para o estudo dos espectros de excitações de diferentes modelos para gravidade obtidos como modelos efetivos a partir de teorias mais fundamentais.

Bibliografia

[1] H. H. Von Borzeszkowski and H. J. Treder, "THE MEANING OF QUANTUM GRAVITY," *DORDRECHT, NETHERLANDS: REIDEL (1988) 132 P. (FUNDAMENTAL THEORIES OF PHYSICS)*

[2] H. Salehi, Class. Quant. Grav. **9** (1992) 2557.

[3] S. W. Hawking, Phys. Rev. D **13** (1976) 191.

[4] J. D. Bekenstein, "Black holes and entropy," Phys. Rev. D **7** (1973) 2333.

[5] C. Rovelli, "WHAT IS OBSERVABLE IN CLASSICAL AND QUANTUM GRAVITY?," Class. Quant. Grav. **8** (1991) 297.

[6] C. Rovelli and L. Smolin, "Discreteness of area and volume in quantum gravity," Nucl. Phys. B **442** (1995) 593 [Erratum-ibid. B **456** (1995) 753] [arXiv:gr-qc/9411005].

[7] A. Perez and C. Rovelli, "Observables in quantum gravity," arXiv:gr-qc/0104034.

[8] S. Sakata, H. Umezawa and S. Kamefuchi, "Applicability of the renormalization theory and the structure of elementary Phys. Rev. **84** (1951) 154.

[9] S. Weinberg, *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1995) 609 p*

[10] A. Zee, "Quantum field theory in a nutshell," *Princeton, UK: Princeton Univ. Pr. (2003) 518 p*

[11] A. Zee, "A Broken Symmetric Theory Of Gravity," Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 417.

[12] A. Zee, "Spontaneously Generated Gravity," Phys. Rev. D **23** (1981) 858.

[13] A. Zee, "A Theory Of Gravity Based On The Weyl-Eddington Action," Phys. Lett. B **109** (1982) 183.

[14] S. L. Adler, "ORDER R VACUUM ACTION FUNCTIONAL IN SCALAR FREE UNIFIED THEORIES WITH SPONTANEOUS SCALE BREAKING," Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 1567.

[15] S. L. Adler, "A FORMULA FOR THE INDUCED GRAVITATIONAL CONSTANT," Phys. Lett. B **95** (1980) 241.

[16] L. Smolin, "Towards A Theory Of Space-Time Structure At Very Short Distances," Nucl. Phys. B **160** (1979) 253.

[17] F. David, "A Comment On Induced Gravity," Phys. Lett. B **138** (1984) 383.

[18] G. de Berredo-Peixoto and I. L. Shapiro, "Higher derivative quantum gravity near four dimensions," Braz. J. Phys. **35** (2005) 1099.

[19] R. T. Hammond, "Geometrization of string theory gravity," Gen. Rel. Grav. **30** (1998) 1803.

[20] R. T. Hammond, "Gravitation, Torsion, And String Theory," Gen. Rel. Grav. **28** (1996) 749.

[21] R. T. Hammond, "Torsion Gravity, The Brans-Dicke Type Generalization And String Theory," Class. Quant. Grav. **13** (1996) L73.

[22] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter," Phys. Lett. B **429** (1998) 263 [arXiv:hep-ph/9803315].

[23] L. Randall and R. Sundrum, "A large mass hierarchy from a small extra dimension," Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370 [arXiv:hep-ph/9905221].

[24] L. Randall and R. Sundrum, "An alternative to compactification," Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690 [arXiv:hep-th/9906064].

[25] N. R. F. Braga and C. N. Ferreira, "Topological mass term in effective brane-world scenario with torsion," JHEP **0503** (2005) 039 [arXiv:hep-th/0410186].

[26] B. Mukhopadhyaya, S. Sen, S. Sen and S. SenGupta, "Bulk Kalb-Ramond field in Randall Sundrum scenario," Phys. Rev. D **70** (2004) 066009 [arXiv:hep-th/0403098].

[27] H. T. Nieh and M. L. Yan, "An Identity In Riemann-Cartan Geometry," J. Math. Phys. **23** (1982) 373.

[28] P. Mahato, "Gravitational Constant and Torsion," Mod. Phys. Lett. A **30** (2002) 1991 [arXiv:gr-qc/0604042].

[29] O. Chandia and J. Zanelli, "Torsional topological invariants (and their relevance for real life)," arXiv:hep-th/9708138.

[30] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, "Do We Live Inside A Domain Wall?," Phys. Lett. B **125** (1983) 136.

[31] V. A. Rubakov, "Large and infinite extra dimensions: An introduction," Phys. Usp. **44** (2001) 871 [Usp. Fiz. Nauk **171** (2001) 913] [arXiv:hep-ph/0104152].

[32] A. Anabalon, S. Willison and J. Zanelli, "The Universe as a topological defect," Phys. Rev. D **77** (2008) 044019 [arXiv:hep-th/0702192].

[33] G. C. Nayak, "Graviton and radion production at LHC: From p p and Pb Pb collisions," arXiv:hep-ph/0211395.

[34] K. Hagiwara, P. Konar, Q. Li, K. Mawatari and D. Zeppenfeld, "Graviton production with 2 jets at the LHC in large extra dimensions," JHEP **0804** (2008) 019 [arXiv:0801.1794 [hep-ph]].

[35] N. Itzhaki, "Black Hole Information vs. Locality," Phys. Rev. D **54** (1996) 1557 [arXiv:hep-th/9510212].

[36] S. B. Giddings, "Black holes, information, and locality," Mod. Phys. Lett. A **22** (2007) 2949 [arXiv:0705.2197 [hep-th]].

[37] L. Freidel and A. Starodubtsev, "Quantum gravity in terms of topological observables," arXiv:hep-th/0501191.

[38] J. Khoury and M. Parikh, "Mach's holographic principle," arXiv:hep-th/0612117.

[39] A. Ashtekar, "New Variables for Classical and Quantum Gravity," Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 2244.

[40] A. Ashtekar, "New Hamiltonian Formulation of General Relativity," Phys. Rev. D **36** (1987) 1587.

[41] J. F. Barbero, "Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times," Phys. Rev. D **51** (1995) 5507 [arXiv:gr-qc/9410014].

[42] G. Immirzi, "Real and complex connections for canonical gravity," Class. Quant. Grav. **14** (1997) L177 [arXiv:gr-qc/9612030].

[43] L. Freidel, D. Minic and T. Takeuchi, "Quantum gravity, torsion, parity violation and all that," Phys. Rev. D **72** (2005) 104002 [arXiv:hep-th/0507253].

[44] L. Smolin, "Linking topological quantum field theory and nonperturbative quantum gravity," J. Math. Phys. **36** (1995) 6417 [arXiv:gr-qc/9505028].

[45] K. V. Krasnov, "On statistical mechanics of gravitational systems," Gen. Rel. Grav. **30** (1998) 53 [arXiv:gr-qc/9605047].

[46] C. Rovelli, "Black hole entropy from loop quantum gravity," Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3288 [arXiv:gr-qc/9603063].

[47] L. Smolin, "An invitation to loop quantum gravity," arXiv:hep-th/0408048.

[48] K. Giesel and T. Thiemann, "Algebraic quantum gravity (AQG). I: Conceptual setup," Class. Quant. Grav. **24** (2007) 2465 [arXiv:gr-qc/0607099].

[49] C. Rovelli, "GR16: Quantum general relativity," arXiv:gr-qc/0110040.

[50] E. Witten, "Quantum field theory and the Jones polynomial," Commun. Math. Phys. **121** (1989) 351.

[51] S. I. Kruglov, "Light-torsion interaction in background magnetic field, vacuum birefringence and dichroism," arXiv:0804.4011 [hep-ph].

[52] A. S. Belyaev, I. L. Shapiro and M. A. B. do Vale, "Torsion phenomenology at the LHC," Phys. Rev. D **75** (2007) 034014 [arXiv:hep-ph/0701002].

[53] A. V. Minkevich, "Gravitation, Cosmology and Space-Time Torsion," arXiv:0709.4337 [gr-qc].

[54] E. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, "New Ghost Free Gravity Lagrangians With Propagating Torsion," Phys. Rev. D **21** (1980) 3269.

[55] R. I. Nepomechie, "On The Low-Energy Limit Of Strings," Phys. Rev. D **32** (1985) 3201.

[56] C. N. Yang and R. L. Mills, "Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance," Phys. Rev. **96** (1954) 191.

[57] Y. M. Cho, "Einstein Lagrangian as the translational Yang-Mills Lagrangian," Phys. Rev. D **14** (1976) 2521.

[58] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, "Gravitation: in search of the missing torsion," arXiv:0801.4148 [gr-qc].

[59] H. I. Arcos and J. G. Pereira, "Torsion Gravity: a Reappraisal," Int. J. Mod. Phys. D **13** (2004) 2193 [arXiv:gr-qc/0501017].

[60] J. G. Pereira, “In Search of the Spacetime Torsion,” arXiv:0704.1141 [gr-qc].

[61] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen and J. G. Pereira, “Teleparallel Spin Connection,” Phys. Rev. D **64** (2001) 027502 [arXiv:gr-qc/0104102].

[62] R. J. Rivers, Il Nuovo Cimento **34** (1964) 387.

[63] P. Van Nieuwenhuizen, “On Ghost-Free Tensor Lagrangians And Linearized Gravitation,” Nucl. Phys. B **60** (1973) 478.

[64] F. W. Hehl, P. Von Der Heyde, G. D. Kerlick and J. M. Nester, “General Relativity With Spin And Torsion: Foundations And Prospects,” Rev. Mod. Phys. **48** (1976) 393.

[65] Richard T. Hammond, “New fields in General Relativity,” Contemporary Physics **36** (1995) 103.

[66] J. Scherk and J. H. Schwarz, “Dual Models And The Geometry Of Space-Time,” Phys. Lett. B **52** (1974) 347.

[67] C. Hernaski, R. Nardi e J. A. Helayël Neto, “Torsion Condensation and Lorentz-Symmetry violation,” Trabalho Apresentado na Conferência *Quantum Gravity in the Southern Cone IV*, Punta del Este - Uruguay, Outubro/2007; “Gravity Excitation Spectrum in Theories with Dynamical Torsion,” trabalho em fase de redação.

[68] H. Kleinert, “Gauge fields in condensed matter. Vol. 1: Superflow and vortex lines. Disorder fields, phase transitions,” *Singapore, Singapore: World Scientific (1989) 1-742*

[69] H. Kleinert, “Gauge fields in condensed matter. Vol. 2: Stresses and defects. Differential geometry, crystal melting,” *Singapore, Singapore: World Scientific (1989) 744-1456*

[70] M. O. Katanaev, "Geometric Theory of Defects," Phys. Usp. **48** (2005) 675 [Usp. Fiz. Nauk **175** (2005) 705] [arXiv:cond-mat/0407469].

[71] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, "Theory Of Defects In Solids And Three-Dimensional Gravity," Annals Phys. **216** (1992) 1.