Nivaldo Agostinho Lemos

SUPERSIMETRIA E MECÂNICA CLÁSSICA DE PARTÍCULAS COM SPIN

TESE DE MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

1977

É tempo de meio silêncio,
de boca gelada e murmúrio,
palavra indireta, aviso
na esquina. Tempo de cinco sentidos
num só. O espião janta conosco.

Nosso Tempo, Carlos Drummond de Andrade.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Prem Prakash Srivastava por sua orientação, sem a qual não teria sido possível a realização deste trabalho.

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq pela concessão de bolsas de estudos.

- A N. A. Lemos pelo excelente trabalho de datilografia.

A meus pais.

R E S U M O

Construímos uma mecânica pseudoclássica para partículas livres de qualquer spin e massa não nula. Os graus de liberdade de spin são descritos por variáveis anticomutativas. Definimos um grupo de transformações lineares(supersimetria) sobre nossas variáveis e exigimos que a lagrangiana seja quase-invariante sob ele. A lagrangiana singular assim obtida é tratada pelo método de Dirac de construir a mecânica hamiltoniana. Sob quantização os vínculos do modelo se transformam em condições sobre os estados que reproduzem as equações de onda relativísticas de Bargmann-Wigner para partículas de qualquer spin. Verificamos que a supersimetria inicial deve ser substituída por uma simetria inferior a fim de eliminar as variáveis redundantes. Por razões de consistência alguns dos parênteses de Dirac de variáveis anticomutativas devem corresponder a comutadores sob quantização. As equações pseudoclássicas de movimento são resolvidas num "gauge" especial e encontramos um análogo pseudoclássico do "zitterbewegung" quântico. Verificamos, finalmente, que a introdução da interação com um campo eletromagnético externo via acoplamento mínimo é inconsistente.

SUMÁRIO

Folha de Rosto I
Dedicatória II
Agradecimentos III
Resumo IV

Introdução 1

CAPÍTULO 1 - ÁLGEBRAS DE GRASSMANN E DE CLIFFORD 4

1.1 - Álgebra de Grassmann 4
1.2 - Álgebra de Clifford 10

CAPÍTULO 2 - MECÂNICA CLÁSSICA COM VARIÁVEIS ANTICOMUTATIVAS 12

2.1 - Formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano 12
2.2 - Parênteses de Poisson 14
2.3 - Transformações Canônicas 18

CAPÍTULO 3 - TRATAMENTO HAMILTONIANO DE SISTEMAS COM VÍNCULOS 24

3.1 - Vínculos Primários 24
3.2 - Condições de Consistência 32
3.3 - Quantização 37

CAPÍTULO 4 - EQUAÇÕES DE ONDA RELATIVÍSTICAS 40

4.1 - Spinores 40
4.2 - O Grupo de Lorentz 43
4.3 - Representação Spinorial do Grupo de Lorentz 45
4.4 - Geradores do Grupo de Poincaré 47
4.5 - Invariantes do Grupo de Poincaré 50
4.6 - Equações de Onda Relativísticas 52

CAPÍTULO 5 - PARTÍCULA NÃO RELATIVÍSTICA COM SPIN 60

5.1 - Partícula em Repouso 60

5.2 - Movimento em Campos Externos 63

CAPÍTULO 6 - DINÂMICA PSEUDOCLÁSSICA RELATIVÍSTICA DE PARTÍCULAS COM QUALQUER SPIN 65

6.1 - Supersimetria 65

6.2 - Supersimetria Pseudoclássica 68

6.3 - Lagrangiana Pseudoclássica 71

6.4 - Dinâmica Hamiltoniana 75

6.5 - Quantização 81

6.6 - Covariância Relativística e sob Supersimetria 84

6.7 - Vínculo de "Gauge" 86

6.8 - Interação com o Campo Eletromagnético 90

6.9 - Conclusões 91

APÊNDICE A - FORMA SPINORIAL DAS EQUAÇÕES DE ONDA RELATIVÍSTICAS .. 94

REFERÊNCIAS 98

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos generalizou-se na física das partículas elementares o uso de números anticomutativos. Estes números já eram conhecidos há muito tempo pelos matemáticos, que desenvolveram o formalismo da álgebra de Grassmann. A análise na álgebra de Grassmann foi usada sistematicamente por Berezin (1) no tratamento da segunda quantização de sistemas fermiônicos em que o espaço de estados é realizado em termos de funcionais. Parece que o primeiro trabalho em Física em que números anticomutativos foram usados em relação a férmions foi o de Matthews e Salam (2). No trabalho acima os propagadores de campos quantizados em interação eram expressos como integrais funcionais, sendo que para campos fermiônicos a integração era sobre um conjunto de funções anticomutativas. A formulação de um princípio de Feynman para sistemas descritos por variáveis anticomutativas foi considerada por Martin (3) que aplicou seus resultados ao caso de um oscilador fermiônico.

Estes números foram usados nos modelos duais fermiônicos em sua formulação como teorias de campo em duas dimensões (4). Grupos de Lie com parâmetros comutativos e anticomutativos foram estudados por Berezin e Kac (5). A elaboração da supersimetria em quatro dimensões (6) causou um grande impacto e o formalismo do superespaço introduzido por Salam e Strathdee (7) utiliza spinores cujas componentes são números anticomutativos.

O desenvolvimento de uma mecânica clássica com variáveis anticomutativas teve início com Martin (8) em 1959. Neste trabalho ele considerou inclusive a quantização de um sistema clássico com variáveis anticomutativas. Entretanto o desenvolvimento sistemático desta mecânica só viria vinte e sete anos depois. Em 1976 Casalbuoni (9) elaborou as formulações lagrangiana e hamiltoniana e definiu parênteses de Poisson para sistemas descritos por variáveis comutativas e anticomutativas. Estes sistemas foram chamados de pseudoclássicos e a mecânica correspondente de pseudomecânica. No trabalho acima foi dada uma receita geral para quantizar os sistemas pseudoclássicos. Num trabalho seguinte (10) foram definidas as transformações canônicas finitas e infinitesimais para estes sistemas.

O problema de tratar classicamente partículas com spin é antigo e permanece em aberto. As primeiras tentativas neste sentido datam de 1926. A partir daí sucederam-se muitos trabalhos. Que o problema continua em aberto pode ser comprovado pelo artigo recente de Hanson e Regge (11) em que são dadas muitas referências a trabalhos anteriores. A idéia do uso de variáveis anticomutativas para a descrição clássica dos graus de liberdade de spin teve origem nos trabalhos de Casalbuoni e colaboradores (10,12) e de Berezin e Marinov (13). Casalbuoni et al. tiveram a idéia de estender à mecânica pseudoclássica as transformações de supersimetria que haviam sido introduzidas na teoria quântica dos campos. Construindo uma lagrangiana quase-invariante sob supersimetria eles conseguiram descrever pseudoclassicamente uma partícula relativística de massa não nula e spin 1/2, com os graus de liberdade de spin representados por variáveis de Grassmann. Resultados análogos foram encontrados por Berezin e Marinov embora seu ponto de partida tenha sido completamente diferente.

Nosso trabalho nesta tese consiste em estender e generalizar para partículas de spin arbitrário a abordagem de Casalbuoni et al.. Verificamos que isto pode ser feito de forma bastante simples, mas quando quantizamos a a teoria descobrimos, no caso de spin superior a 1/2, características novas não partilhadas pelo caso de spin 1/2 (14). Em particular, nosso método de quantização foge à receita dada na referência (9).

No Capítulo 1 apresentamos sucintamente o formalismo da álgebra de Grassmann. Definimos nesta álgebra os conceitos de derivada, integral e involução que serão fartamente empregados nos capítulos subseqüentes. Definimos, também, as álgebras de Clifford de dimensão finita e sua relação com as álgebras de Grassmann. No Capítulo 2 apresentamos os formalismos lagrangiano e hamiltoniano para sistemas pseudoclássicos. São definidos os parênteses de Poisson bem como as transformações canônicas finitas e infinitesimais. Revemos, no Capítulo 3, o método desenvolvido por Dirac para o tratamento hamiltoniano de sistemas com vínculos, incluindo sua quantização. Este método é usado sistematicamente nos Capítulos 5 e 6. No Capítulo 4 apresentamos as equações de onda relativísticas para partículas de spin arbitrário. Definimos spinores a duas componentes e discutimos rapidamente a representação spinorial e as representações unitárias dos grupos de Lorentz e de Poincaré. Finalmente apresentamos as equações de onda relativísticas no formalismo de Bargmann-Wigner. No Capítulo 5 estudamos sucintamente como tratar não relativisticamente partículas com spin representando seus graus de liberdade de spin através de variáveis de Grassmann. No Capítulo 6 fazemos um tratamento relativístico de partículas com massa não nula e spin arbitrário representando os graus de liberdade de spin por meio de pseudovetores e pseudoescalares que são geradores de uma álgebra de Grassmann. Examinamos, também, a possibilidade de se introduzir a interação da partícula com um campo eletromagnético externo. No Apêndice A apresentamos as equações de onda relativísticas para partículas de spin arbitrário em forma spinorial.

Seek simplicity, and distrust it.

Alfred North Whitehead

CAPÍTULO 1

ÁLGEBRAS DE GRASSMANN E DE CLIFFORD

1.1. ÁLGEBRA DE GRASSMANN

Chamamos de álgebra de Grassmann (1) com n geradores a uma álgebra cujos geradores $\xi_1, \ldots, \xi_n$ satisfazem as relações

$$[\xi_i , \xi_j]_+ \equiv \xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = 0. \tag{1.1.1}$$

Em particular fazendo i=j resulta que $\xi_i^2=0$. Denotaremos a álgebra de Grassmann com n geradores por G_n. Os geradores ξ_i serão chamados simplesmente de variáveis de Grassmann.

O monômio $\xi_{k_1} \ldots \xi_{k_\nu}$ será chamado de monômio de grau ν. É claro que qualquer monômio de grau maior que n será nulo. Qualquer elemento $g(\xi)$ da álgebra G_n pode ser representado como combinação linear dos monômios:

$$\begin{aligned} g(\xi) = g_0 &+ \sum_{k_1} g_1^{k_1} \xi_{k_1} + \sum_{k_1,k_2} g_2^{k_1 k_2} \xi_{k_1} \xi_{k_2} + \ldots + \\ &+ \sum_{k_1,\ldots,k_n} g_n^{k_1 \ldots k_n} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_n} \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k_i} g_\nu^{k_1 \ldots k_\nu} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_n} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

onde os $g_\nu^{k_1 \ldots k_\nu}$ são números reais ou complexos. A maneira de escrever o elemento $g(\xi)$ em (1.1.2) não é única. É fácil ver que a unicidade é conseguida se impusermos que os coeficientes $g_\nu^{k_1 \ldots k_\nu}$ sejam antissimétricos. Sempre que escrevermos um elemento da álgebra na forma (1.1.2) suporemos que os coeficientes são antissimétricos. Diremos que o elemento $g(\xi)$ de G_n é nulo se todos os coeficientes $g_\nu^{k_1 \ldots k_\nu}$ forem nulos. Um elemento da forma $f_\nu^{k_1 \ldots k_\nu} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_\nu}$ será chamado de elemento homogêneo de grau ν.

Consideremos o conjunto G_n^+ formado pelos elementos de G_n que são representáveis na forma de combinações lineares apenas de monômios de grau par:

$$g = g_0 + \sum_{n_1, n_2} g_2^{n_1 n_2} \xi_{n_1} \xi_{n_2} + \dots \quad . \tag{1.1.3}$$

Os elementos de G_n^+ são ditos <u>pares</u>. Eles comutam com todos os elementos de G_n. Denotaremos por G_n^- o conjunto dos elementos de G_n que são combinações lineares apenas de monômios de grau ímpar. Os elementos de G_n^- têm a forma

$$g = \sum_{n_1} g_1^{n_1} \xi_{n_1} + \sum_{n_1, n_2, n_3} g_3^{n_1 n_2 n_3} \xi_{n_1} \xi_{n_2} \xi_{n_3} + \dots , \tag{1.1.4}$$

e são ditos <u>ímpares</u>. O conjunto G_n^+ constitui uma subálgebra de G_n, mas o mesmo não ocorre com G_n^- porque este conjunto não é fechado sob o produto.

Evidentemente todo elemento f de G_n é unicamente representado na forma $f=f^+ + f^-$ onde $f^+ \in G_n^+$ e $f^- \in G_n^-$.

<u>Involução</u>. Definimos um mapeamento um a um da álgebra sobre si mesma, $g \to g^*$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $(g^*)^* = g$;

(ii) $(g_1 g_2)^* = g_2^* g_1^*$;

(iii) $(ag)^* = \bar{a} g^*$ onde a é um número complexo e $\bar{a}$ seu complexo conjugado;

(iv) $(g_1 + g_2)^* = g_1^* + g_2^*$.

A involução é um análogo da conjugação complexa. Um elemento g é dito real se $g=g^*$. A álgebra é real se todos os elementos forem reais; em particular $\xi_i = \xi_i^*$.

<u>Derivadas</u>. Podemos definir dois tipos de derivadas numa álgebra de Grassmann. Considere um elemento $g(\xi)$ e sua variação $\delta g(\xi)$ em primeira ordem nos $\delta \xi_\ell$ quando fazemos $\xi_\ell \to \xi_\ell + \delta \xi_\ell$, $\ell = 1, \dots, n$:

$$\delta g(\xi) = \delta\xi_\ell \frac{\vec{\partial} g}{\partial \xi_\ell} = \frac{g\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell}\delta\xi_\ell \,, \qquad (1.1.5)$$

onde os $\delta\xi_\ell$ anticomutam entre si e com os geradores ξ_ℓ. Na eq.(1.1.5) e daqui por diante suporemos que índices repetidos estão somados, a menos que haja indicação em contrário. A eq.(1.1.5) serve como definição das duas derivadas. Chamaremos $\frac{\vec{\partial} g}{\partial \xi_\ell}$ de derivada à esquerda e $\frac{g\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell}$ de derivada à direita de g em relação a ξ_ℓ.

Podemos dar expressões explícitas para o cálculo das derivadas à esquerda ou à direita. Ambas as derivadas são operadores lineares sobre G_n, de modo que é suficiente dá-las sobre os monômios de base. Sobre os elementos de base as derivadas são dadas por

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_\ell}(\xi_{n_1}\cdots\xi_{n_\nu}) = \delta_{\ell n_1}\xi_{n_2}\cdots\xi_{n_\nu} - \delta_{\ell n_2}\xi_{n_1}\xi_{n_3}\cdots\xi_{n_\nu} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\delta_{\ell n_\nu}\xi_{n_1}\cdots\xi_{n_{\nu-1}} \,, \qquad (1.1.6)$$

$$(\xi_{n_1}\cdots\xi_{n_\nu})\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell} = \delta_{\ell n_\nu}\xi_{n_1}\cdots\xi_{n_{\nu-1}} - \delta_{\ell n_{\nu-1}}\xi_{n_1}\cdots\xi_{n_{\nu-2}}\xi_{n_\nu} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\delta_{\ell n_1}\xi_{n_2}\cdots\xi_{n_\nu} \,. \qquad (1.1.7)$$

Em outros termos, para calcular a derivada à esquerda de $\xi_{n_1}\cdots\xi_{n_\nu}$ em relação a ξ_ℓ, temos que permutar ξ_ℓ até a posição mais à esquerda do monômio usando as relações (1.1.1) e depois apagá-lo. Para calcular a derivada à direita temos que permutar ξ_ℓ até a posição mais à direita e depois apagá-lo. Se o monômio não contiver ξ_ℓ então ambas as derivadas são iguais a zero.

É fácil ver que as definições (1.1.6) e (1.1.7) de derivada à esquerda e à direita coincidem com a definição (1.1.5).

Passemos a examinar as propriedades das derivadas segundas. Temos que

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j}\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_\ell}\, \xi_{n_1}\cdots\xi_{n_\nu}\,\xi_j\,\xi_{p_1}\cdots\xi_{p_r}\,\xi_\ell\,\xi_{\mu_1}\cdots\xi_{\mu_s}\right) =$$

$$= (-1)^{\nu}(-1)^{\nu+r+1}\,\xi_{n_1}\cdots\xi_{n_\nu}\,\xi_{p_1}\cdots\xi_{p_r}\,\xi_{\mu_1}\cdots\xi_{\mu_s}\ ;$$

por outro lado

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_\ell}\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j}\, \xi_{n_1}\cdots\xi_{n_\nu}\,\xi_j\,\xi_{p_1}\cdots\xi_{p_r}\,\xi_\ell\,\xi_{\mu_1}\cdots\xi_{\mu_s}\right) =$$

$$= (-1)^{\nu+r}(-1)^{\nu}\,\xi_{n_1}\cdots\xi_{n_\nu}\,\xi_{p_1}\cdots\xi_{p_r}\,\xi_{\mu_1}\cdots\xi_{\mu_s}\,.$$

Portanto

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j}\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_\ell}\, g\right) = -\,\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_\ell}\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j}\, g\right)\,. \qquad (1.1.8)$$

Analogamente pode-se verificar que

$$\left(g\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_j}\right)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell} = -\left(g\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell}\right)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_j}\ , \qquad (1.1.9)$$

$$\left(\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j}\, g\right)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell} = \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j}\left(g\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell}\right)\,. \qquad (1.1.10)$$

Damos, também, fórmulas para a diferenciação de um produto. Seja $g = g_1(\xi)g_2(\xi)$. Então

$$\delta g = \delta g_1 g_2 + g_1 \delta g_2 = \delta\xi_\ell\,\frac{\vec{\partial} g_1}{\partial \xi_\ell}\, g_2 + g_1\,\delta\xi_\ell\,\frac{\vec{\partial} g_2}{\partial \xi_\ell} =$$

$$= \delta\xi_\ell\,\frac{\vec{\partial} g_1}{\partial \xi_\ell}\, g_2 + (-1)^{s_1}\,\delta\xi_\ell\, g_1\,\frac{\vec{\partial} g_2}{\partial \xi_\ell}\ ,$$

$$\delta g = \delta g_1 g_2 + g_1 \delta g_2 = \frac{g_1\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell}\,\delta\xi_\ell\, g_2 + g_1\,\frac{g_2\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell}\,\delta\xi_\ell =$$

$$= (-1)^{s_2}\,\frac{g_1\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell}\, g_2\,\delta\xi_\ell + g_1\,\frac{g_2\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell}\,\delta\xi_\ell\,.$$

Nestas expressões s_1 e s_2 são os índices de paridade de g_1 e g_2 respectivamente. O índice de paridade s de um elemento g é zero se g for par ou 1 se g for ímpar. Concluímos que

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_\ell}(g_1 g_2) = \frac{\vec{\partial} g_1}{\partial \xi_\ell} g_2 + (-1)^{s_1} g_1 \frac{\vec{\partial} g_2}{\partial \xi_\ell} , \tag{1.1.11}$$

$$(g_1 g_2) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell} = g_1 \frac{g_2 \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell} + (-1)^{s_2} \frac{g_1 \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell} g_2 . \tag{1.1.12}$$

É uma conseqüência imediata das definições das derivadas que vale a regra da cadeia de diferenciação.

a) Sejam

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha(\theta_\beta) \quad e \quad f = f(\xi(\theta)) .$$

Então

$$\delta \xi_\alpha = \delta\theta_\beta \frac{\vec{\partial} \xi_\alpha}{\partial \theta_\beta} = \frac{\xi_\alpha \overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\beta} \delta\theta_\beta ,$$

$$\delta f = \delta \xi_\alpha \frac{\vec{\partial} f}{\partial \xi_\alpha} = \delta\theta_\beta \frac{\vec{\partial} \xi_\alpha}{\partial \theta_\beta} \frac{\vec{\partial} f}{\partial \xi_\alpha} ,$$

$$\delta f = \frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\alpha} \delta \xi_\alpha = \frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\alpha} \frac{\xi_\alpha \overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\beta} \delta \theta_\beta .$$

Portanto, da definição (1.1.5) resulta que

$$\frac{\vec{\partial} f}{\partial \theta_\beta} = \frac{\vec{\partial} \xi_\alpha}{\partial \theta_\beta} \frac{\vec{\partial} f}{\partial \xi_\alpha} , \tag{1.1.13}$$

$$\frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\beta} = \frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\alpha} \frac{\xi_\alpha \overleftarrow{\partial}}{\partial \theta_\beta} . \tag{1.1.14}$$

Observe a ordem em que aparecem os termos em (1.1.13) e (1.1.14).

b) Seja t um parâmetro real e

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha(t) .$$

Então

$$\delta \xi_\alpha = \frac{d\xi_\alpha}{dt} dt ,$$

$$\delta f = \delta \xi_\alpha \frac{\vec{\partial} f}{\partial \xi_\alpha} = dt \frac{d\xi_\alpha}{dt} \frac{\vec{\partial} f}{\partial \xi_\alpha} ,$$

$$\delta f = \frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\alpha} \delta \xi_\alpha = \frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\alpha} \frac{d\xi_\alpha}{dt} dt .$$

Concluímos que

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\xi_\alpha}{dt}\frac{\vec{\partial} f}{\partial \xi_\alpha} = \frac{f\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\alpha}\frac{d\xi_\alpha}{dt} \tag{1.1.15}$$

Integrais. Introduzimos os símbolos $d\xi_1, \dots, d\xi_n$ sujeitos às relações de anticomutação

$$d\xi_i d\xi_j + d\xi_j d\xi_i = \xi_i d\xi_j + d\xi_j \xi_i = 0 . \tag{1.1.16}$$

Definimos as integrais

$$\int d\xi_i = 0 \quad , \quad \int \xi_i d\xi_i = 1 \; , \; i = 1, \dots, n . \tag{1.1.17}$$

Na segunda das integrais (1.1.7) não há soma sobre o índice repetido. Integrais múltiplas serão entendidas como integrais iteradas. Temos os resultados evidentes:

$$\int \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_n} d\xi_n \cdots d\xi_1 = \epsilon_{k_1 \dots k_n} , \tag{1.1.18}$$

$$\int g(\xi)\, d\xi_n \cdots d\xi_1 = \sum_{k_i} \epsilon_{k_1 \dots k_n} g_n^{k_1 \dots k_n} = n!\, g_n^{1 \dots n} . \tag{1.1.19}$$

onde $\epsilon_{k_1 \dots k_n}$ é o símbolo de Levi-Civita com n índices.

A integração por partes é possível e temos o resultado

$$\int f(\xi) \frac{\vec{\partial} g}{\partial \xi_\ell} d\xi_\ell = \int \frac{f\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell} g(\xi)\, d\xi_\ell . \tag{1.1.20}$$

Para provar isto basta observar que

$$\int \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_\nu} \xi_\ell \xi_{p_1} \cdots \xi_{p_s} \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_\ell}\left(\xi_{\ell_1} \cdots \xi_{\ell_r} \xi_\ell \xi_{m_1} \cdots \xi_{m_\mu}\right) d\xi_\ell =$$

$$= (-1)^r \int \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_\nu} \xi_\ell \xi_{p_1} \cdots \xi_{p_s} \xi_{\ell_1} \cdots \xi_{\ell_r} \xi_{m_1} \cdots \xi_{m_\mu} d\xi_\ell =$$

$$= (-1)^r (-1)^{s+r+\mu} \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_\nu} \xi_{p_1} \cdots \xi_{p_s} \xi_{\ell_1} \cdots \xi_{\ell_r} \xi_{m_1} \cdots \xi_{m_\mu} ,$$

que

$$\int (\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_\nu} \xi_\ell \xi_{p_1} \cdots \xi_{p_s}) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell} \xi_{\ell_1} \cdots \xi_{\ell_r} \xi_\ell \xi_{m_1} \cdots \xi_{m_\mu} d\xi_\ell =$$

$$= (-1)^s \int \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_\nu} \xi_{p_1} \cdots \xi_{p_s} \xi_{\ell_1} \cdots \xi_{\ell_r} \xi_\ell \xi_{m_1} \cdots \xi_{m_\mu} d\xi_\ell =$$

$$= (-1)^s (-1)^\mu \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_\nu} \xi_{p_1} \cdots \xi_{p_s} \xi_{\ell_1} \cdots \xi_{\ell_r} \xi_{m_1} \cdots \xi_{m_\mu}$$

e que $2r + s + \mu - (s + \mu) = 2r$ é par. Outras fórmulas de integração por partes são

$$\int f(\xi) \frac{\overrightarrow{\partial} g}{\partial \xi_\ell} d\xi_m \cdots d\xi_1 = \int \frac{f \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell} g(\xi)\, d\xi_m \cdots d\xi_1 , \tag{1.1.21}$$

$$\int f(\xi) \frac{g \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_\ell} d\xi_m \cdots d\xi_1 = (-1)^{m+1} \int \frac{\overrightarrow{\partial} f}{\partial \xi_\ell} g(\xi)\, d\xi_m \cdots d\xi_1 . \tag{1.1.22}$$

Para verificar estas fórmulas basta tomar f e g como monômios arbitrários. A fórmula (1.1.21) vale também quando a integração é apenas sobre parte da álgebra. Entretanto a fórmula (1.1.22) não vale quando a integração se estende apenas sobre parte da álgebra, como podemos ver pelo seguinte exemplo. Considere a álgebra G_3, $f = \xi_1 \xi_2$ e $g = \xi_3$. Então

$$\int f \frac{g \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_3} d\xi_2 d\xi_1 = \int \xi_1 \xi_2 \left(\frac{\xi_3 \overleftarrow{\partial}}{\partial \xi_3} \right) d\xi_2 d\xi_1 = \int \xi_1 \xi_2 d\xi_2 d\xi_1 = 1$$

mas

$$(-1)^{m+1} \int \frac{\overrightarrow{\partial} f}{\partial \xi_3} g\, d\xi_2 d\xi_1 = \int \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi_3} (\xi_1 \xi_2) \xi_3 d\xi_2 d\xi_1 = 0 .$$

1.2. ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Chamamos de álgebra de Clifford (1) com n geradores a uma álgebra cujos geradores $k_1, \ldots, k_n$ satisfazem as relações

$$\begin{aligned} k_i k_j + k_j k_i &= 0 \text{ para } i \neq j , \\ k_i^2 &= 1 . \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Denotaremos a álgebra de Clifford com n geradores por K_n.

Com cada álgebra de Grassmann G_n há uma álgebra de Clifford associada K_{2n} com o número duplicado de geradores. Consideremos em G_n os operadores $\hat{\xi}_k$ de multiplicação à esquerda por ξ_k e $\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_k}$ de diferenciação à esquerda em relação a ξ_k . Temos que

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j}(\xi_k g) = -\xi_k \frac{\vec{\partial} g}{\partial \xi_j} + \delta_{jk} g$$

onde usamos a eq.(1.1.11). Isto mostra que estes operadores satisfazem

$$\hat{\xi}_k \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j} + \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_j} \hat{\xi}_k = \delta_{jk} \tag{1.2.2}$$

Formemos agora os operadores $Q_k = \hat{\xi}_k + \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_k}$ e $P_k = -i\left(\hat{\xi}_k - \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_k}\right)$. É fácil verificar que estes operadores satisfazem as relações

$$\begin{aligned} P_i Q_j + Q_j P_i &= 0, \\ P_i P_j + P_j P_i = Q_i Q_j + Q_j Q_i &= 2\delta_{ij} \ . \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Assim os operadores P_i , Q_i são geradores da álgebra de Clifford K_{2n}. Estes operadores são até certo ponto análogos aos operadores coordenadas e momentos de um sistema bosônico usual com n graus de liberdade.

CAPÍTULO 2

MECÂNICA CLÁSSICA COM VARIÁVEIS ANTICOMUTATIVAS

2.1. FORMALISMOS LAGRANGIANO E HAMILTONIANO

Vamos considerar um sistema pseudoclássico (9,10) descrito pelas variáveis reais $q_i(t)$ $(i=1,\dots,N)$ e pelas variáveis de Grassmann reais $\xi_\alpha(t)$ $(\alpha=1,\dots,M)$ onde t é um parâmetro real monótono que rotula os pontos sobre a trajetória. Admitimos que a dinâmica deste sistema é descrita por um princípio de ação com uma ação dada por

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i\,;\, \xi_\alpha, \dot{\xi}_\alpha\,;\, t)\, dt \tag{2.1.1}$$

onde $L(q_i,\dot{q}_i;\xi_\alpha,\dot{\xi}_\alpha;t)$ é a lagrangiana do sistema e o ponto denota derivada em relação a t. Para termos uma teoria fisicamente razoável exigimos que a ação S seja uma função par das variáveis de Grassmann. Isto exige que a lagrangiana seja par.

Uma variação geral da lagrangiana conduz a

$$\delta L = \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \delta \xi_\alpha \frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} + \delta \dot{\xi}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha} \tag{2.1.2}$$

onde denotamos simplesmente por $\frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha}$ e $\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha}$ as derivadas à esquerda de L em relação a ξ_α e $\dot{\xi}_\alpha$. Usaremos sempre derivadas à esquerda em relação às variáveis de Grassmann.

Se definirmos

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \;, \quad \pi^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha} \;, \tag{2.1.3}$$

resulta que

$$\delta L = \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i p^i + \delta \xi_\alpha \frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} + \delta \dot{\xi}_\alpha \Pi^\alpha . \tag{2.1.4}$$

As equações de movimento que resultam de δ S=0 são as equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \tag{2.1.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} = 0 , \tag{2.1.6}$$

ou

$$\dot{p}^i = \frac{\partial L}{\partial q_i} , \quad \dot{\Pi}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} . \tag{2.1.7}$$

Por analogia com a mecânica usual definimos a hamiltoniana como

$$H = \dot{q}_i p^i + \dot{\xi}_\alpha \Pi^\alpha - L . \tag{2.1.8}$$

Observamos que, como L é par, os $\Pi^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha}$ são ímpares, assim como os $\dot{\xi}_\alpha$.
Se calcularmos a variação de H e usarmos (2.1.4) obtemos

$$\delta H = \dot{q}_i \delta p^i + \dot{\xi}_\alpha \delta \Pi^\alpha - \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - \delta \xi_\alpha \frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} . \tag{2.1.9}$$

Usando as equações de movimento (2.1.7) e trocando a ordem dos termos $\dot{\xi}_\alpha \delta \Pi^\alpha$ em (2.1.9) obtemos finalmente

$$\delta H = -\delta q_i \dot{p}^i - \delta \xi_\alpha \dot{\Pi}^\alpha + \delta p^i \dot{q}_i - \delta \Pi^\alpha \dot{\xi}_\alpha . \tag{2.1.10}$$

Como a variação da hamiltoniana não depende da variação das velocidades, H é função apenas de q_i, ξ_α, p^i, Π^α. De (2.1.10) resultam as equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i} \quad , \quad \dot{p}^i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \tag{2.1.11}$$

$$\dot{\xi}_\alpha = - \frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha} \quad , \quad \dot{\pi}^\alpha = - \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} \quad . \tag{2.1.12}$$

Note os sinais nas equações de Hamilton para as variáveis de Grassmann.

2.2. PARÊNTESES DE POISSON

Usando as equações hamiltonianas de movimento (2.1.11) e (2.1.12) podemos calcular a derivada total em relação ao tempo de qualquer variável dinâmica:

$$\frac{d}{dt} A(q_i, p^i, \xi_\alpha, \pi^\alpha, t) = \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p^i} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha} \frac{\partial A}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha} \right) . \tag{2.2.1}$$

Esta expressão nos permite definir os parênteses de Poisson de duas variáveis dinâmicas:

$$\{A, B\} = \left(\frac{\partial B}{\partial p^i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p^i} \right) - \left(\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha} \frac{\partial A}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha} \right) , \tag{2.2.2}$$

o que nos permite escrever

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} . \tag{2.2.3}$$

Notemos, entretanto, que (2.2.2) é uma definição efetiva dos parênteses de Poisson apenas quando B é par, já que teve como origem (2.2.1) onde H é par. Assim, estamos livres para definir os parênteses de Poisson quando B é ímpar. Como as propriedades mais importantes dos parênteses de Poisson são as algébricas, vamos defini-los de modo a formarem uma álgebra. Isto equivale a exigir que (9)

$$\epsilon\{E,O\} = \{\epsilon E, O\} = \{E, \epsilon O\} \tag{2.2.4}$$

onde E designa uma variável dinâmica par, O uma variável dinâmica ímpar e ϵ é uma constante ímpar.

Vamos examinar cada caso separadamente.

a) Caso par-par. Segue-se de (2.2.2) que

$$\{E_1, E_2\} = \left(\frac{\partial E_1}{\partial q_i}\frac{\partial E_2}{\partial p^i} - \frac{\partial E_2}{\partial q_i}\frac{\partial E_1}{\partial p^i}\right) + \left(\frac{\partial E_1}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial E_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial E_2}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial E_1}{\partial \pi^\alpha}\right) \tag{2.2.5}$$

já que $\frac{\partial E}{\partial q_i}$, $\frac{\partial E}{\partial p^i}$ são pares e $\frac{\partial E}{\partial \xi_\alpha}$, $\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}$ são ímpares. Estes parênteses gozam das seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &\{E_1, E_2\} = -\{E_2, E_1\}\,, \\ &\{E_1, E_2 E_3\} = E_2\{E_1, E_3\} + \{E_1, E_2\}E_3 \\ &\{E_1,\{E_2,E_3\}\} + \{E_2,\{E_3,E_1\}\} + \{E_3,\{E_1,E_2\}\} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

b) Caso ímpar-par. De (2.2.2) segue-se que

$$\{O,E\} = \left(\frac{\partial O}{\partial q_i}\frac{\partial E}{\partial p^i} - \frac{\partial E}{\partial q_i}\frac{\partial O}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial O}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial E}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha}\right), \tag{2.2.7}$$

donde

$$\begin{aligned} &\{O, E_1 E_2\} = E_1\{O, E_2\} + \{O, E_1\}E_2\,, \\ &\{O_1 O_2, E\} = O_1\{O_2, E\} + \{O_1, E\}O_2\,, \\ &\{O E_1, E_2\} = O\{E_1, E_2\} + \{O, E_2\}E_1\,. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

c) Caso par-ímpar. De (2.2.4) obtemos a condição

$$\epsilon\{E,O\} = \{E,\epsilon O\} = \left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\frac{\partial(\epsilon O)}{\partial p^i} - \frac{\partial(\epsilon O)}{\partial q_i}\frac{\partial E}{\partial p^i}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial E}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial(\epsilon O)}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial(\epsilon O)}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}\right)$$

onde usamos (2.2.5) já que ϵO é par. Como $\frac{\partial(\epsilon O)}{\partial \xi_\alpha} = -\epsilon\frac{\partial O}{\partial \xi_\alpha}$, $\frac{\partial(\epsilon O)}{\partial \pi^\alpha} = -\epsilon\frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha}$, $\frac{\partial(\epsilon O)}{\partial q_i} = \epsilon\frac{\partial O}{\partial q_i}$, $\frac{\partial(\epsilon O)}{\partial p^i} = \epsilon\frac{\partial O}{\partial p^i}$, e $\frac{\partial E}{\partial \xi_\alpha}$ e $\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}$ são ímpares concluímos que, neste caso, os parênteses de Poisson devem ser definidos como

$$\{E,O\} = \left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\frac{\partial O}{\partial p^i} - \frac{\partial O}{\partial q_i}\frac{\partial E}{\partial p^i}\right) + \left(\frac{\partial E}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}\right). \tag{2.2.9}$$

As propriedades destes parênteses são

$$\begin{aligned}
&\{E,O\} = -\{O,E\}, \\
&\{E_1E_2,O\} = E_1\{E_2,O\} + \{E_1,O\}E_2, \\
&\{E,O_1O_2\} = O_1\{E,O_2\} + \{E,O_1\}O_2, \\
&\{E_1,OE_2\} = O\{E_1,E_2\} + \{E_1,O\}E_2, \\
&\{E_1,\{E_2,O\}\} + \{O,\{E_1,E_2\}\} + \{E_2,\{O,E_1\}\} = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

d) Caso ímpar-ímpar. De (2.2.4) obtemos

$$\{\epsilon E,O\} = \epsilon\{E,O\} = \epsilon\left(\frac{\partial E}{\partial q_i}\frac{\partial O}{\partial p^i} - \frac{\partial O}{\partial q_i}\frac{\partial E}{\partial p^i}\right) +$$

$$+\epsilon\left(\frac{\partial E}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial(\epsilon E)}{\partial q_i}\frac{\partial O}{\partial p^i} + \frac{\partial O}{\partial q_i}\frac{\partial(\epsilon E)}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial(\epsilon E)}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial(\epsilon E)}{\partial \pi^\alpha}\right),$$

de modo que devemos definir

$$\{O_1,O_2\} = \left(\frac{\partial O_1}{\partial q_i}\frac{\partial O_2}{\partial p^i} + \frac{\partial O_2}{\partial q_i}\frac{\partial O_1}{\partial p^i}\right) - \left(\frac{\partial O_1}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial O_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O_2}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial O_1}{\partial \pi^\alpha}\right). \qquad (2.2.11)$$

Estes parênteses são simétricos ,

$$\{O_1,O_2\} = \{O_2,O_1\}\ , \qquad (2.2.12)$$

e satisfazem

$$\begin{aligned}
&\{O_1,O_2O_3\} = \{O_1,O_2\}O_3 - \{O_1,O_3\}O_2\ ,\\
&\{EO_1,O_2\} = E\{O_1,O_2\} + O_1\{E,O_2\}\ ,\\
&\{E,\{O_1,O_2\}\} - \{O_2,\{E,O_1\}\} + \{O_1,\{O_2,E\}\} = 0\ ,\\
&\{O_1,\{O_2,O_3\}\} + \{O_2,\{O_3,O_1\}\} + \{O_3,\{O_1,O_2\}\} = 0\ .
\end{aligned} \qquad (2.2.13)$$

Se A, B, C forem três variáveis dinâmicas quaisquer definimos

$$\{A,B+C\} = \{A,B\} + \{A,C\}\ , \qquad (2.2.14)$$

$$\{A+B,C\} = \{A,C\} + \{B,C\}\ , \qquad (2.2.15)$$

isto é, os parênteses de Poisson $\{A,B\}$ são lineares em A e B. A eq.(2.2.16) abaixo mostra que estas definições tornam-se identidades quando B e C ou A e B têm a mesma paridade.

Podemos resumir os parênteses de Poisson para todos os casos pela expressão

$$\{A,B\} = \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right) + (-1)^{s_A}\left(\frac{\partial A}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial B}{\partial \xi_\alpha}\right) \qquad (2.2.16)$$

onde s_A é o índice de paridade de A. Podemos resumir as propriedades algébricas dos parênteses de Poisson nas expressões

$$\{A, B+C\} = \{A,B\} + \{A,C\} \quad , \quad \{A+B,C\} = \{A,C\} + \{B,C\} ,$$
$$\{A,B\} = (-1)^{s_A s_B} \{B,A\} ,$$
$$\{A,BC\} = (-1)^{s_A s_B} B\{A,C\} + \{A,B\}C , \qquad (2.2.17)$$
$$\{AB,C\} = A\{B,C\} + (-1)^{s_B s_C}\{A,C\}B ,$$
$$(-1)^{s_A s_C}\{A,\{B,C\}\} + (-1)^{s_C s_B}\{C,\{A,B\}\} + (-1)^{s_A s_B}\{B,\{C,A\}\} = 0$$

onde s_A, s_B, s_C são os índices de paridade de A, B, C respectivamente.

2.3. TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Vamos considerar uma transformação canônica das coordenadas e momentos

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= \bar{q}_i(q_j, p^j, \xi_\beta, \pi^\beta) , \\ \bar{p}^i &= \bar{p}^i(q_j, p^j, \xi_\beta, \pi^\beta) , \\ \bar{\xi}_\alpha &= \bar{\xi}_\alpha(q_j, p^j, \xi_\beta, \pi^\beta) , \\ \bar{\pi}^\alpha &= \bar{\pi}^\alpha(q_j, p^j, \xi_\beta, \pi^\beta) \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

que não altere a paridade da lagrangiana e definida pela exigência que a lagrangiana transformada difira da original por uma derivada total em relação ao tempo (15):

$$\bar{L}(\bar{q}_i, \dot{\bar{q}}_i, \bar{\xi}_\alpha, \dot{\bar{\xi}}_\alpha, t) = L(q_i, \dot{q}_i, \xi_\alpha, \dot{\xi}_\alpha, t) - \frac{d}{dt}\phi(q_i, \bar{q}_i, \xi_\alpha, \bar{\xi}_\alpha, t) . \qquad (2.3.2)$$

Para que a lagrangiana transformada permaneça par, ϕ deve ser par. Usando (2.1.8) e calculando explicitamente $\frac{d\phi}{dt}$ resulta que

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}}_i \bar{p}^i + \dot{\bar{\xi}}_\alpha \bar{\pi}^\alpha - \bar{H} &= \dot{q}_i p^i + \dot{\xi}_\alpha \pi^\alpha - H - \frac{\partial\phi}{\partial t} - \\ &- \dot{q}_i \frac{\partial\phi}{\partial q_i} - \dot{\bar{q}}_i \frac{\partial\phi}{\partial \bar{q}_i} - \dot{\xi}_\alpha \frac{\partial\phi}{\partial \xi_\alpha} - \dot{\bar{\xi}}_\alpha \frac{\partial\phi}{\partial \bar{\xi}_\alpha} . \end{aligned} \qquad (2.3.3)$$

Comparando os coeficientes de $\dot{q}_i$, $\dot{\bar{q}}_i$, $\dot{\xi}_\alpha$, $\dot{\bar{\xi}}_\alpha$ nos dois lados de (2.3.3) obtemos as relações entre as variáveis originais e as transformadas:

$$\begin{aligned} \bar{p}^i &= -\frac{\partial \phi}{\partial \bar{q}_i} , \quad p^i = \frac{\partial \phi}{\partial q_i} , \\ \bar{\pi}^\alpha &= -\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\xi}_\alpha} , \quad \pi^\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_\alpha} , \\ \bar{H} &= H + \frac{\partial \phi}{\partial t} . \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

A função ϕ é chamada de função geradora da transformação canônica.

As expressões (2.3.4) foram obtidas supondo que a função geradora depende apenas das coordenadas originais e transformadas. Podemos ter, também, funções geradoras dependentes dos momentos e momentos transformados. Vamos considerar cada um dos casos.

a) Supomos que a função geradora F_1 depende de q_i, $\bar{p}^i$, ξ_α, $\bar{\pi}^\alpha$. Vamos definir (15)

$$F_1(q_i, \bar{p}^i, \xi_\alpha, \bar{\pi}^\alpha, t) = \bar{q}_i \bar{p}^i + \bar{\xi}_\alpha \bar{\pi}^\alpha + \phi(q_i, \bar{q}_i, \xi_\alpha, \bar{\xi}_\alpha, t) . \tag{2.3.5}$$

Levando (2.3.5) em (2.3.3) obtemos:

$$\begin{aligned} -\bar{H} = \dot{q}_i p^i + \dot{\xi}_\alpha \pi^\alpha - H - \dot{q}_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} - \dot{\bar{p}}^i \frac{\partial F_1}{\partial \bar{p}^i} - \dot{\xi}_\alpha \frac{\partial F_1}{\partial \xi_\alpha} - \dot{\bar{\pi}}^\alpha \frac{\partial F_1}{\partial \bar{\pi}_\alpha} - \\ - \frac{\partial F_1}{\partial t} + \bar{q}_i \dot{\bar{p}}^i + \bar{\xi}_\alpha \dot{\bar{\pi}}^\alpha . \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Comparando os coeficientes de $\dot{q}_i$, $\dot{\bar{p}}^i$, $\dot{\xi}_\alpha$, $\dot{\bar{\pi}}^\alpha$ nos dois lados de (2.3.6) resulta que

$$\begin{aligned} p^i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} , \quad \bar{q}_i = \frac{\partial F_1}{\partial \bar{p}^i} , \\ \pi^\alpha &= \frac{\partial F_1}{\partial \xi_\alpha} , \quad \bar{\xi}_\alpha = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{\pi}^\alpha} , \\ \bar{H} &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} . \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

b) Supomos que a função geradora F_2 depende de $\bar{q}^i$, p^i, $\bar{\xi}_\alpha$, Π^α. Vamos definir

$$F_2(\bar{q}_i, p^i, \bar{\xi}_\alpha, \Pi^\alpha, t) = -q_i p^i - \xi_\alpha \Pi^\alpha + \phi(q_i, \bar{q}_i, \xi_\alpha, \bar{\xi}_\alpha, t). \quad (2.3.8)$$

Levando (2.3.8) em (2.3.3) obtemos:

$$\dot{\bar{q}}_i \bar{p}^i + \dot{\bar{\xi}}_\alpha \bar{\Pi}^\alpha - \bar{H} = -H - \frac{\partial F_2}{\partial t} - \dot{\bar{q}}_i \frac{\partial F_2}{\partial \bar{q}_i} - \dot{p}^i \frac{\partial F_2}{\partial p^i} - \dot{\bar{\xi}}_\alpha \frac{\partial F_2}{\partial \bar{\xi}_\alpha} - \dot{\Pi}^\alpha \frac{\partial F_2}{\partial \Pi^\alpha} - \xi_\alpha \dot{\Pi}^\alpha - q_i \dot{p}^i. \quad (2.3.9)$$

Comparando os coeficientes de $\dot{\bar{q}}_i$, $\dot{p}^i$, $\dot{\bar{\xi}}_\alpha$ e $\dot{\Pi}^\alpha$ nos dois lados de (2.3.9) resulta que

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_2}{\partial p^i}, \quad \bar{p}^i = -\frac{\partial F_2}{\partial \bar{q}_i}, \\ \xi_\alpha &= \frac{\partial F_2}{\partial \Pi^\alpha}, \quad \bar{\Pi}^\alpha = -\frac{\partial F_2}{\partial \bar{\xi}_\alpha}, \\ \bar{H} &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

c) Finalmente, supomos que a função geradora F_3 depende de p^i, $\bar{p}^i$, Π^α, $\bar{\Pi}^\alpha$. Definimos

$$F_3(p^i, \bar{p}^i, \Pi^\alpha, \bar{\Pi}^\alpha, t) = \phi(q_i, \bar{q}_i, \xi_\alpha, \bar{\xi}_\alpha, t) + \bar{q}_i \bar{p}^i + \bar{\xi}_\alpha \bar{\Pi}^\alpha - q_i p^i - \xi_\alpha \Pi^\alpha. \quad (2.3.11)$$

A substituição de (2.3.11) em (2.3.3) conduz a:

$$-\bar{H} = -H - \frac{\partial F_3}{\partial t} - \dot{p}^i \frac{\partial F_3}{\partial p^i} - \dot{\bar{p}}^i \frac{\partial F_3}{\partial \bar{p}^i} - \dot{\Pi}^\alpha \frac{\partial F_3}{\partial \Pi^\alpha} - \dot{\bar{\Pi}}^\alpha \frac{\partial F_3}{\partial \bar{\Pi}^\alpha} + \bar{q}_i \dot{\bar{p}}^i + \bar{\xi}_\alpha \dot{\bar{\Pi}}^\alpha - q_i \dot{p}^i - \xi_\alpha \dot{\Pi}^\alpha. \quad (2.3.12)$$

Comparando os coeficientes de $\dot{p}^i$, $\dot{\bar{p}}^i$, $\dot{\Pi}^\alpha$, $\dot{\bar{\Pi}}^\alpha$ nos dois lados de (2.3.12) resulta que

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p^i} \; , \quad \bar{q}_i = \frac{\partial F_3}{\partial \bar{p}^i} \; ,$$
$$\xi_\alpha = \frac{\partial F_3}{\partial \pi^\alpha} \; , \quad \bar{\xi}_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial \bar{\pi}^\alpha} \; , \qquad (2.3.13)$$
$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \; .$$

Na obtenção das equações de transformação para as variáveis de Grassmann levamos em conta que as funções geradoras ϕ , F_1, F_2, F_3 são pares, de modo que suas derivadas em relação às variáveis de Grassmann são ímpares.

Consideremos agora uma transformação canônica infinitesimal:

$$\begin{aligned} q_i &= \bar{q}_i + \delta q_i = \bar{q}_i + \epsilon Q_i \; , \\ p^i &= \bar{p}^i + \delta p^i = \bar{p}^i + \epsilon P^i \; , \\ \xi_\alpha &= \bar{\xi}_\alpha + \delta \xi_\alpha = \bar{\xi}_\alpha + \epsilon K_\alpha \; , \\ \pi^\alpha &= \bar{\pi}^\alpha + \delta \pi^\alpha = \bar{\pi}^\alpha + \epsilon T^\alpha \; , \end{aligned} \qquad (2.3.14)$$

onde ϵ é um número real infinitesimal. Vamos nos restringir a transformações que mantenham a paridade de todas as variáveis. Assim $\delta\xi_\alpha$ e $\delta\pi^\alpha$ são ímpares enquanto δq_i e δp^i são pares.

As eqs.(2.3.4) podem ser resumidas escrevendo

$$d\phi = p^i dq_i - \bar{p}^i d\bar{q}_i + d\xi_\alpha \pi^\alpha - d\bar{\xi}_\alpha \bar{\pi}^\alpha + (H - \bar{H}) dt \; . \qquad (2.3.15)$$

Vamos definir (10)

$$F = \delta q_i p^i + \delta \xi_\alpha \pi^\alpha - \phi = (q_i - \bar{q}_i) p^i + (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha) \pi^\alpha - \phi \; . \qquad (2.3.16)$$

Então

$$dF = dq_i p^i - d\bar{q}_i p^i + (q_i - \bar{q}_i) dp^i + d\xi_\alpha \Pi^\alpha - d\bar{\xi}_\alpha \Pi^\alpha + (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha) d\Pi^\alpha -$$
$$- dq_i p^i + d\bar{q}_i \bar{p}^i - d\xi_\alpha \Pi^\alpha - d\bar{\xi}_\alpha \bar{\Pi}^\alpha - (H - \bar{H}) dt = \qquad (2.3.17)$$
$$= (q_i - \bar{q}_i) dp^i - (p^i - \bar{p}^i) d\bar{q}_i - d\Pi^\alpha (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha) - d\bar{\xi}_\alpha (\Pi^\alpha - \bar{\Pi}^\alpha) + (H - \bar{H}) dt.$$

Desprezando infinitésimos de segunda ordem em ϵ podemos colocar

$$d\bar{q}_i = dq_i \quad \text{e} \quad d\bar{\xi}_\alpha = d\xi_\alpha .$$

Portanto

$$dF = \delta q_i dp^i - \delta p^i dq_i - d\Pi^\alpha \delta\xi_\alpha - d\xi_\alpha \delta\Pi^\alpha + (H - \bar{H}) dt, \qquad (2.3.18)$$

e somos conduzidos a:

$$\delta q_i = \frac{\partial F}{\partial p^i}, \qquad \delta p^i = -\frac{\partial F}{\partial q_i},$$
$$\delta\xi_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial \Pi^\alpha}, \qquad \delta\Pi^\alpha = -\frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}, \qquad (2.3.19)$$
$$\bar{H} = H - \frac{\partial F}{\partial t}.$$

A função $F(q_i, p^i, \xi_\alpha, \Pi^\alpha, t)$ é chamada de geradora da transformação canônica infinitesimal (2.3.14). Nossa restrição sobre a transformação quanto à paridade pode ser agora expressa pela exigência que F seja um elemento par da álgebra de Grassmann.

A partir dos resultados (2.3.19) podemos determinar a variação de qualquer variável dinâmica sob uma transformação canônica infinitesimal:

$$\delta A(q_i, p^i, \xi_\alpha, \Pi^\alpha, t) = \delta q_i \frac{\partial A}{\partial q_i} + \delta p^i \frac{\partial A}{\partial p^i} + \delta\xi_\alpha \frac{\partial A}{\partial \xi_\alpha} +$$
$$+ \delta\Pi^\alpha \frac{\partial A}{\partial \Pi^\alpha} = \left(\frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p^i} \right) -$$
$$- \left(\frac{\partial F}{\partial \Pi^\alpha} \frac{\partial A}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial A}{\partial \Pi^\alpha} \right).$$

Levando em conta a eq.(2.2.16) e o fato que F é par concluímos que

$$\delta A = - \{F, A\} = \{A, F\} . \qquad (2.3.20)$$

CAPÍTULO 3

TRATAMENTO HAMILTONIANO DE SISTEMAS COM VÍNCULOS

Neste capítulo vamos expor a teoria desenvolvida por Dirac(16,17) para o tratamento hamiltoniano de sistemas com vínculos. Os vínculos que consideraremos são relações que aparecem entre as coordenadas que descrevem o sistema e que se devem à forma funcional da lagrangiana ou às próprias equações de movimento. Consideraremos apenas sistemas clássicos descritos por variáveis comutativas. Veremos nos capítulos subseqüentes, entretanto, que os resultados aqui obtidos podem ser estendidos para alguns sistemas pseudoclássicos.

Analisaremos apenas a formulação hamiltoniana de sistemas com vínculos. Para uma análise detalhada da formulação lagrangiana, ver a referência (17).

3.1. VÍNCULOS PRIMÁRIOS

Suponhamos que nosso sistema é descrito pelas variáveis dinâmicas reais $q_i(t)$, $i=1,\ldots,N$ e pela lagrangiana $L(q_i,\dot{q}_i)$. O ponto de partida da teoria hamiltoniana é a definição dos momentos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad i = 1,\ldots,N \, . \tag{3.1.1}$$

Na teoria dinâmica usual faz-se a hipótese que as eqs.(3.1.1) determinam todas as velocidades como funções independentes dos q's e p's.

Segundo o teorema da função implícita (18) as eqs.(3.1.1) só podem ser resolvidas para todos os $\dot{q}_i$ em termos dos q_i, p_i se a matriz W com elementos

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \tag{3.1.2}$$

for não singular. Queremos examinar o caso em que esta matriz é singular e nem todas as velocidades podem ser expressas em termos dos q's e p's.

Se a matriz W tiver posto $R<N$ então os p_i são funcionalmente dependentes e o teorema da função implicita se aplica apenas a algumas das eqs.(3.1.1). Já que W tem posto R, as R primeiras das eqs.(3.1.1) podem ser univocamente resolvidas para as R componentes $\dot{q}_i$ em termos das R primeiras componentes p_i e das últimas N-R componentes $\dot{q}_i$. Substitua estas expressões para as R componentes $\dot{q}_i$ nas últimas N-R equações de (3.1.1). Então, por causa do posto de W, as equações resultantes dão N-R relações completamente independentes dos $\dot{q}_i$. Estas relações, que são conseqüência direta da definição dos p's, podem ser escritas como

$$F_m(q_i,p_i) = 0 \quad , \quad m = R+1,\dots,N \,. \tag{3.1.3}$$

Como os q's e p's são as variáveis independentes da teoria hamiltoniana, estas relações representam vínculos e mostram que das 2N variáveis q_i, p_i apenas N+R são independentes. Estas relações são chamadas de vínculos primários, o adjetivo primário denotando o fato que as equações de movimento não foram usadas para obtê-las.

Vamos admitir somente vínculos primários que não gerem vínculos que envolvam os q's apenas. Isto implica que as eqs.(3.1.3) nos permitem exprimir os momentos $p_{R+1},\dots,p_N$ em função de $p_1,\dots,p_N$ e dos q's:

$$p_m = \psi_m(q_i,p_j) \;;\; i=1,\dots,N \;;\; m=R+1,\dots,N \;;\; j=1,\dots,R. \tag{3.1.4}$$

Voltando às eqs.(3.1.1) vamos chamar de $\dot{q}_\alpha$ as R velocidades para as quais podemos resolver e de $\dot{q}_A$ as velocidades restantes; α toma R valores no conjunto $1,\dots,N$ e A toma os valores que sobrarem. Assim,

$$\dot{q}_\alpha = G_\alpha(q_i,p_j,\dot{q}_A) \,. \tag{3.1.5}$$

As eqs.(3.1.4) e (3.1.5), que são N ao todo, são idênticas em conteúdo às eqs.(3.1.11). Para o espaço S de 2N dimensões com variáveis q_i, $\dot{q}_i$ temos agora um outro sistema de coordenadas constituído pelas variáveis $q_i (i=1,\ldots,N)$, $p_j (j=1,\ldots,R)$, $\dot{q}_A$.

Vamos considerar agora a quantidade $\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - L$. Esta expressão é uma função bem definida no espaço de fase S e podemos reescrevê-la em termos de q_i, p_j, $\dot{q}_A$:

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - L = H_0(q_i, p_j, \dot{q}_A). \tag{3.1.6}$$

Calculemos as derivadas parciais de H_0 em relação a seus argumentos independentes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} &= \sum_{\rho=R+1}^{N} \dot{q}_\rho \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial q_i} + \sum_{\alpha} p_\alpha \frac{\partial G_\alpha}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial G_\alpha}{\partial q_i} = \\ &= \sum_{\rho=R+1}^{N} \dot{q}_\rho \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{\rho=R+1}^{N} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial p_j} \dot{q}_\rho, \tag{3.1.8}$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}_A} = p_A + \sum_{\alpha} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \dot{q}_A} p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} - \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \dot{q}_A} = 0. \tag{3.1.9}$$

Assim, embora em princípio H_0 pudesse depender dos $\dot{q}_A$, vemos que a estrutura da eq.(3.1.6) conduz a que H_0 seja independente das velocidades $\dot{q}_A$. Portanto, mesmo em presença de vínculos, a hamiltoniana usual da teoria independe das velocidades. Assim temos

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - L = H_0(q_i, p_j), \tag{3.1.10}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial H_0}{\partial q_i} - \sum_{\rho=R+1}^{N} \dot{q}_\rho \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial q_i}, \tag{3.1.11}$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H_0}{\partial p_j} - \sum_{\rho=R+1}^{N} \dot{q}_\rho \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial p_j}, \quad j=1,\ldots,R. \tag{3.1.12}$$

De acordo com as equações lagrangianas de movimento, $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$. Levando isto em (3.1.11) obtemos o sistema hamiltoniano equivalente:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H_0}{\partial p_j} - \sum_{\rho=R+1}^{N} \dot{q}_\rho \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial p_j} \ , \ j = 1,\ldots,R \ ; \tag{3.1.13a}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} + \sum_{\rho=R+1}^{N} \dot{q}_\rho \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial q_i} \ , \ i = 1,\ldots,N. \tag{3.1.13b}$$

Estas equações não representam a forma final da teoria porque ainda não garantem que os vínculos primários serão preservados durante todo o movimento do sistema. Devemos analisar a situação mais profundamente.

Temos um certo número de velocidades indeterminadas $\dot{q}_A$ e um certo número de vínculos sobre as variáveis hamiltonianas, eq.(3.1.3). Quando consideramos derivadas em relação ao tempo dos vínculos primários podemos obter tanto novos vínculos entre os p's e q's quanto equações ligando os $\dot{q}_A$ aos q's e p's. Atingiremos uma forma final quando derivadas dos vínculos em relação ao tempo não levarem a novas relações entre os p's, q's e $\dot{q}_A$. Cada velocidade $\dot{q}_A$ que permanecer indeterminada neste estágio final da teoria aparece como uma função arbitrária do tempo na solução geral das equações de movimento.

Devemos levar em conta os vínculos primários expressos através da eq.(3.1.3). Isto significa que se começamos com um espaço de fase de 2N dimensões definido pelas coordenadas q_i, p_i o movimento vai ficar restrito a uma hipersuperfície de dimensão menor que 2N definida pelas equações de vínculo. Entretanto, para tornar a teoria mais flexível e podermos trabalhar com entidades definidas sobre todo o espaço de fase (tais como parênteses de Poisson), é desejável trabalhar em todo o espaço de fase de 2N dimensões. Isto nos permite pensar sempre nas funções como definidas sobre todo o espaço de fase, calcular suas derivadas em relação aos p's e q's e adiar até o fim a restrição destas variáveis à hipersuperfície definida pelos vínculos. Com este objetivo Dirac introduziu os conceitos de equações "fortes" e "fracas".

Chamemos de U a hipersuperfície definida pelos vínculos e sejam f(q,p) e g(q,p) funções definidas em todo o espaço de fase. Os valores de f e g sobre U são obtidos substituindo os p_m por $\varphi_m(q_i,p_j)$ conforme a equação (3.1.4). Se depois da substituição f e g se tornarem iguais, isto é, se f=g sobre U, então dizemos que f e g são fracamente iguais e escrevemos

$$f(q,p) \approx g(q,p)\,. \tag{3.1.14}$$

Dizemos que f e g são fortemente iguais se forem iguais sobre todo o espaço de fase e escrevemos simplesmente f=g.

A hipersuperfície U pode ser definida por um conjunto de equações fracas. Vamos definir o conjunto de funções no espaço de fase

$$\phi_m(q,p) = p_m - \varphi_m(q_i,p_j) \quad , m = R+1,\dots,N\,. \tag{3.1.15}$$

Podemos então definir U pelas equações fracas

$$\phi_m(q,p) \approx 0\,. \tag{3.1.16}$$

É fácil ver que os ϕ_m não se anulam fortemente porque, se n > R, $\dfrac{\partial \phi_m}{\partial p_n} = \delta_{mn}$ que não é zero.

Se f e g forem fracamente iguais então as seguintes equações são válidas sobre U:

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_m \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i} = \frac{\partial g}{\partial q_i} + \sum_m \frac{\partial g}{\partial p_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial q_i} \;, \quad i=1,\dots,N\,; \tag{3.1.17a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_j} + \sum_m \frac{\partial f}{\partial p_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_j} = \frac{\partial g}{\partial p_j} + \sum_m \frac{\partial g}{\partial p_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial p_j} \;, \quad j=1,\dots,R\,. \tag{3.1.17b}$$

Podemos converter estas igualdades em equações fracas reescrevendo-as em termos dos ϕ_m :

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(f-\sum_m \phi_m \frac{\partial f}{\partial p_m}\right) \approx \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g-\sum_m \phi_m \frac{\partial g}{\partial p_m}\right), \quad i=1,\ldots,N; \tag{3.1.18a}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left(f-\sum_m \phi_m \frac{\partial f}{\partial p_m}\right) \approx \frac{\partial}{\partial p_j}\left(g-\sum_m \phi_m \frac{\partial g}{\partial p_m}\right), \quad j=1,\ldots,R. \tag{3.1.18b}$$

Em (3.1.18b) j está restrito aos valores 1,...,R. Entretanto se j assumir qualquer valor de R+1 a N a igualdade fraca é mantida, cada lado se anulando porque $\frac{\partial \phi_m}{\partial p_j}=\delta_{mj}$. Assim temos na realidade o sistema de equações fracas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(f-\sum_m \phi_m \frac{\partial f}{\partial p_m}\right) &\approx \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g-\sum_m \phi_m \frac{\partial g}{\partial p_m}\right),\\ \frac{\partial}{\partial p_i}\left(f-\sum_m \phi_m \frac{\partial f}{\partial p_m}\right) &\approx \frac{\partial}{\partial p_i}\left(g-\sum_m \phi_m \frac{\partial g}{\partial p_m}\right),\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

onde i varia de 1 a N.

Se supusermos que as funções ϕ_m são pelo menos de classe $C^{(1)}$ em todo o espaço de fase, as relações (3.1.16) definem uma variedade no espaço de fase (q,p) de 2N dimensões. Suponhamos que todas as funções ϕ_m são independentes, isto é, que a variedade tem 2N-(N-R)=N+R dimensões. Qualquer função que se anule sobre a variedade definida por (3.1.16) pode ser escrita na forma

$$\sum_{m=R+1}^{N} c_m(q,p)\,\phi_m(q,p)$$

onde os $c_m(q,p)$ são funções apropriadas (19).

Vamos utilizar estes resultados para examinar as equações de movimento (3.1.13). Nestas equações a função $H_0(q_i,p_j)$ desempenha o papel de hamiltoniana. Entretanto nosso formalismo nos permite usar em lugar de H_0 qualquer função $W(q,p)$ definida em todo o espaço de fase que seja fracamente igual a H_0. O fato de W e H_0 serem fracamente iguais, $W-H_0\approx 0$, implica a existência de funções $c_m(q,p)$ tais que $W-H_0=\sum_m c_m\phi_m$ ou

$$W = H_0 + \sum_m c_m \phi_m . \tag{3.1.20}$$

Em (3.1.20) os coeficientes c_m são arbitrários. A igualdade fraca de W e H_0 conduz, segundo (3.1.19), às equações fracas

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} &\approx \frac{\partial}{\partial q_i}\left(W - \sum_m \phi_m \frac{\partial W}{\partial p_m}\right) , \quad i=1,\dots,N ; \\ \frac{\partial H_0}{\partial p_i} &\approx \frac{\partial}{\partial p_i}\left(W - \sum_m \phi_m \frac{\partial W}{\partial p_m}\right) , \quad i=1,\dots,N , \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

já que H_0 não depende dos p_m. Se usarmos os resultados (3.1.21) e ϕ_m no lugar de φ_m nas equações de Hamilton (3.1.13) obtemos:

$$\dot{q}_j \approx \frac{\partial}{\partial p_j}\left(W - \sum_m \phi_m \frac{\partial W}{\partial p_m}\right) + \sum_m \dot{q}_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_j} , \quad j=1,\dots,R ; \tag{3.1.22a}$$

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial}{\partial q_i}\left(W - \sum_m \phi_m \frac{\partial W}{\partial p_m}\right) - \sum_m \dot{q}_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} , \quad i=1,\dots,N . \tag{3.1.22b}$$

Como ocorreu com a eq.(3.1.18b), aqui também podemos permitir que j varie de 1 até N. Se $j > R$ ambos os lados de (3.1.22a) tornam-se simplesmente iguais a $\dot{q}_j$, as velocidades indeterminadas. Assim podemos, na realidade, escrever estas equações como

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\approx \frac{\partial}{\partial p_i}\left(W - \sum_m \phi_m \frac{\partial W}{\partial p_m}\right) + \sum_m \dot{q}_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} , \\ \dot{p}_i &\approx -\frac{\partial}{\partial q_i}\left(W - \sum_m \phi_m \frac{\partial W}{\partial p_m}\right) - \sum_m \dot{q}_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} , \quad i=1,\dots,N. \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Definimos H(q,p) por

$$H(q,p) = W(q,p) - \sum_m \phi_m \frac{\partial W}{\partial p_m} . \tag{3.1.24}$$

Se usarmos a eq.(3.1.20) vemos que

$$H = H_0 + \sum_m b_m \phi_m \tag{3.1.25}$$

onde os b_m são novos coeficientes arbitrários. Introduzindo H e usando a notação dos parênteses de Poisson podemos escrever as equações de Hamilton na forma elegante:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\approx \{q_i, H\} + \sum_m \{q_i, \phi_m\} \dot{q}_m \,, \\ \dot{p}_i &\approx \{p_i, H\} + \sum_m \{p_i, \phi_m\} \dot{q}_m \,. \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Estas equações devem ser suplementadas pelos vínculos primários

$$\phi_m(q,p) \approx 0 \quad , \quad m = R+1, \ldots, N.$$

Assim as equações lagrangianas originais foram recolocadas numa forma no espaço de fase usando parênteses de Poisson e equações fracas. As variáveis $\dot{q}_m$ e os coeficientes b_m permanecem no formalismo e seus parênteses de Poisson com funções dos q's e p's devem ser considerados indefinidos. De qualquer modo os parênteses de Poisson destas variáveis sempre aparecem multiplicados pelos ϕ_m que se anulam fracamente. Com isto em mente podemos redefinir

$$H = H_0 + \sum_m u_m \phi_m \tag{3.1.27}$$

onde $u_m = b_m + \dot{q}_m$ e escrever as eqs.(3.1.26) na forma

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\approx \{q_i, H\} \approx \{q_i, H_0\} + \sum_m \{q_i, \phi_m\} u_m \,, \\ \dot{p}_i &\approx \{p_i, H\} \approx \{p_i, H_0\} + \sum_m \{p_i, \phi_m\} u_m \,. \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

onde os u_m são funções arbitrárias dos p's, q's e $\dot{q}_m$. A partir destas equações podemos estudar a evolução temporal dos vínculos e ver se isto gera novos vínculos ou restrições sobre os u_m.

3.2. CONDIÇÕES DE CONSISTÊNCIA

A evolução temporal de qualquer variável dinâmica g(q,p) no espaço de fase é regida por

$$\frac{d}{dt}\, g(q,p) \approx \{g, H\} \approx \{g, H_0\} + \sum_m \{g, \phi_m\}\, u_m . \tag{3.2.1}$$

Impondo que os vínculos primários sejam constantes de movimento somos conduzidos ao conjunto de equações

$$\{\phi_n, H_0\} + \sum_m \{\phi_n, \phi_m\}\, u_m \approx 0 \;, \quad m,n = R+1,\dots,N . \tag{3.2.2}$$

O sistema de equações (3.2.2) pode ser dividido em três tipos.

O primeiro tipo se reduz a um conjunto de identidades se usarmos os vínculos primários. Com este tipo não precisamos nos preocupar.

O segundo tipo determina todos os coeficientes indeterminados u_m. Isto pode acontecer se e somente se a matriz $\|\{\phi_n, \phi_m\}\|$ for não singular, isto é, se

$$\det \|\{\phi_n, \phi_m\}\| \neq 0 \tag{3.2.3}$$

sobre U. Se C_{mn} for a matriz inversa fraca desta matriz, isto é, se

$$\sum_n C_{mn} \{\phi_n, \phi_{m'}\} = \delta_{mm'} \tag{3.2.4}$$

então temos

$$u_m \approx -\sum C_{mn} \{\phi_n, H_0\} \tag{3.2.5}$$

e a equação geral de movimento é

$$\frac{d}{dt}\, g(q,p) \approx \{g, H_0\} - \sum_{m,n} \{g, \phi_m\}\, C_{mn} \{\phi_n, H_0\} . \tag{3.2.6}$$

Esta equação deve, como sempre, ser suplementada pelos vínculos primários. Vemos que neste caso as equações de movimento não contêm funções arbitrárias, de modo que não aparecem funções arbitrárias do tempo na solução geral das equações de movimento. Devemos apenas atribuir valores iniciais aos p's e q's em t=0 que sejam compatíveis com os vínculos primários. Uma vez feito isto, as equações de movimento nos permitem determinar os p's e q's de maneira única em qualquer tempo e os vínculos são obedecidos durante todo o tempo.

Com a definição (3.1.15) das funções ϕ_m vemos que os parênteses de Poisson $\{\phi_m,\phi_n\}$ são funções apenas dos q_i e p_j, estando definidos, portanto, sobre todo o espaço de fase. Assim, se a matriz $\|\{\phi_m,\phi_n\}\|$ não for singular sobre U, ela será não singular sobre todo o espaço de fase. Assim a matriz inversa (C_{mn}) existirá em todo o espaço de fase. Conseqüentemente o lado direito de (3.2.6) está definido para todo q,p e se anula identicamente se g for um dos ϕ's . Esta expressão introduzida pela primeira vez por Dirac é chamada de "parênteses de Dirac" de g e H_0:

$$\{g,H_0\}^* = \{g,H_0\} - \sum_{m,n} \{g,\phi_m\} C_{mn} \{\phi_n,H_0\} . \qquad (3.2.7)$$

Deste modo podemos escrever as equações de movimento na forma

$$\frac{d}{dt} g(q,p) \approx \{g,H_0\}^* . \qquad (3.2.8)$$

A terceira possibilidade em relação ao sistema (3.2.2) é que ele não determine todos os u_m e, com isto, gere novos vínculos primários da forma

$$\chi_a(q,p) = 0 \quad , \; a = 1,\ldots,A . \qquad (3.2.9)$$

Vínculos que aparecem desta maneira são chamados de vínculos secundários. Eles diferem dos vínculos primários em que estes são conseqüências meramente das eqs.(3.1.1) que definem os momentos, enquanto que para obter os vínculos secundários temos que usar as equações de movimento.

Se tivermos vínculos secundários em nossa teoria obtemos novas condições de consistência porque podemos calcular os $\dot{\chi}_a$ de acordo com as equações de movimento (3.2.1). Se exigirmos que $\dot{\chi}_a = 0$ obtemos o sistema

$$\{\dot{\chi}_a, H_o\} + \sum_m \{\chi_a, \phi_m\} u_m \approx 0. \tag{3.2.10}$$

Este sistema deve ser tratado em pé de igualdade com (3.2.2). Se ele for do terceiro tipo temos que continuar o processo porque teremos novos vínculos secundários. Continuamos desta maneira até exaurirmos todas as condições de consistência. O resultado final é que ficamos com um número de vínculos secundários e um número de condições sobre os u_m.

Para muitos propósitos os vínculos secundários serão tratados em pé de igualdade com os vínculos primários. Assim escrevemos

$$\phi_s \approx 0 \;, \quad s = N+1, \ldots, N+M \tag{3.2.11}$$

onde M é o número de vínculos secundários. Podemos escrever todos os vínculos juntos como

$$\phi_\ell \approx 0 \;, \quad \ell = R+1, \ldots, N, \ldots, N+M \,. \tag{3.2.12}$$

Voltemos às eqs.(3.2.2) e vejamos que condições elas impõem sobre os u_m. As equações são

$$\{\phi_\ell, H_o\} + \sum_{m=R+1}^{N} \{\phi_\ell, \phi_m\} u_m \approx 0 \tag{3.2.13}$$

onde ℓ varia de R+1 até N+M. Por hipótese estas equações impõem condições sobre os u_m já que não se reduzem meramente a equações de vínculo.

Deve existir uma solução $u_m = U_m(q,p)$ do sistema (3.2.13) pois caso contrário as equações lagrangianas de movimento não teriam solução, hipótese que excluímos. A solução, entretanto, não é única. Podemos adicionar a uma dada solução qualquer solução $V_m(q,p)$ das equações homogêneas associadas com (3.2.13)

$$\sum_{m=R+1}^{N} \{\phi_\ell , \phi_m\} V_m \approx 0 , \qquad (3.2.14)$$

e isto nos dará uma nova solução de (3.2.13). Como nós queremos a solução mais geral de (3.2.13) devemos considerar todas as soluções independentes de (3.2.14) que denotaremos por $V_m^b(q,p)$, b=1,...,B. A solução geral de (3.2.13) é, então,

$$u_m = U_m(q,p) + \sum_{b=1}^{B} v_b V_m^b(q,p) \qquad (3.2.15)$$

onde os v_b são coeficientes arbitrários.

Isto nos dá a hamiltoniana total

$$H_T = H_0 + \sum_{m=R+1}^{N} U_m \phi_m + \sum_{m=R+1}^{N} \sum_{b=1}^{B} v_b V_m^b \phi_m . \qquad (3.2.16)$$

Podemos escrever isto como

$$H_T = H' + \sum_{b=1}^{B} v_b \Phi_b , \qquad (3.2.17)$$

onde

$$H' = H_0 + \sum_{m=R+1}^{N} U_m \phi_m \qquad (3.2.18)$$

e

$$\Phi_b = \sum_{m=R+1}^{N} V_m^b \phi_m . \qquad (3.2.19)$$

Os coeficientes v_b são arbitrários, o que mostra que a solução geral das equações de movimento envolverá funções arbitrárias do tempo. As variáveis dinâmicas em tempos futuros não serão completamente determinadas pelas condições iniciais.

Dizemos que uma variável dinâmica A(q,p) é de primeira classe se ela tiver parênteses de Poisson nulos com todos os vínculos (primários e secundários). Caso contrário, A é dita de segunda classe.

Notemos que H' dada por (3.2.18) e os Φ_b definidos em (3.2.19) são de primeira classe porque U_m e V_m^b satisfazem (3.2.13) e (3.2.14) respectivamente. Assim (3.2.17) dá a hamiltoniana total em termos de uma hamiltoniana de primeira classe H' mais uma combinação linear de vínculos de primeira classe.

Naturalmente qualquer combinação linear dos ϕ's é outro vínculo, e se tomarmos combinações lineares dos vínculos primários obtemos outros vínculos primários. Desta forma cada Φ_b é um vínculo primário e é de primeira classe. Portanto <u>a hamiltoniana total é expressa como a soma de uma hamiltoniana de primeira classe com uma combinação linear dos vínculos primários de primeira classe</u>.

O número de funções arbitrárias do tempo que ocorre na solução geral das equações de movimento é igual ao número de valores que o índice b pode tomar. Este número é igual ao número de vínculos primários de primeira classe porque todos os vínculos de primeira classe independentes estão incluídos na soma (3.2.17).

Os valores iniciais das variáveis q,p determinam o estado inicial do sistema físico. Entretanto o aparecimento de funções arbitrárias do tempo na solução geral das equações de movimento mostra que o estado do sistema num dado tempo não determina os p's e q's univocamente, embora os p's e q's determinem univocamente o estado. Assim várias escolhas dos p's e q's determinam um único estado. Temos então o problema de procurar os conjuntos de p's e q's que correspondem a um mesmo estado físico do sistema (16).

Todos os valores dos p's e q's num dado tempo que são resultado da evolução a partir de um dado estado inicial devem corresponder a um mesmo estado físico naquele tempo. Suponhamos que em t=0 os p's e q's tomam valores particulares e consideremos a situação depois de um intervalo de tempo infinitesimal δt. Se g for uma variável dinâmica qualquer com valor inicial g_0, seu valor no instante δt será

$$g(\delta t) = g_0 + \dot{g}\,\delta t = g_0 + \{g, H_T\}\,\delta t =$$
$$= g_0 + \delta t\left[\{g, H'\} + \sum_{b=1}^{B} v_b \{g, \Phi_b\}\right] . \tag{3.2.20}$$

Os coeficientes v_b são arbitrários. Se tomássemos valores diferentes v_b' para estes coeficientes, $g(\delta t)$ seria diferente, a diferença sendo

$$\Delta g(\delta t) = \delta t \sum_{b=1}^{B} (v_b - v_b') \{g, \Phi_b\} . \tag{3.2.21}$$

Isto pode ser escrito como

$$\Delta g(\delta t) = \sum_b \{g, \epsilon_b \Phi_b\} \tag{3.2.22}$$

onde

$$\epsilon_b = (v_b - v_b')\,\delta t . \tag{3.2.23}$$

Podemos alterar nossas variáveis dinâmicas conforme (3.2.22) e as novas variáveis descreverão o mesmo estado. Esta mudança consiste na aplicação de uma transformação canônica infinitesimal com função geradora $\sum_b \epsilon_b \Phi_b$. Concluímos que os vínculos de primeira classe Φ_b têm o seguinte significado: <u>são funções geradoras de transformações canônicas infinitesimais que levam a mudanças nos q's e p's que não mudam o estado físico do sistema</u>.

3.3. QUANTIZAÇÃO

Vamos considerar como quantizar uma teoria que contém vínculos de segunda classe. O processo de quantização consiste (16) em estabelecer a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \hat{H}_T \Psi \tag{3.3.1}$$

e impor condições subsidiárias ao vetor de estado:

$$\hat{\phi}_j \Psi = 0, \tag{3.3.2}$$

onde os $\hat{\phi}_j$ são os operadores correspondentes a <u>todos os vínculos</u> e $\hat{H}_T$ é o operador correspondente à hamiltoniana (3.2.17). A quantização usual consiste em fazer $i\hbar\{A,B\}$ corresponder ao comutador $[\hat{A},\hat{B}]_-$ ao mesmo tempo que as variáveis dinâmicas se transformam em operadores. Das condições sobre os estados (3.3.2) obtemos

$$[\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j]_- \Psi = (\hat{\phi}_i \hat{\phi}_j - \hat{\phi}_j \hat{\phi}_i)\Psi = 0. \tag{3.3.3}$$

Como não queremos impor novas condições sobre os estados, as eqs.(3.3.3) devem ser uma conseqüência de (3.3.2). Se os operadores $\hat{\phi}_i$, $\hat{\phi}_j$ forem bem ordenados em relação aos operadores $\hat{q}_i$, $\hat{p}_i$ teremos

$$[\hat{\phi}_i, \hat{\phi}_j]_- \longrightarrow i\hbar\{\phi_i, \phi_j\} \not\approx 0 \tag{3.3.4}$$

para algum j se ϕ_i for vínculo de segunda classe. Para este par de vínculos $\hat{\phi}_i$, $\hat{\phi}_j$ a eq.(3.3.3) não poderá ser satisfeita e levará a novas condições sobre Ψ. Portanto os vínculos de segunda classe não podem ser impostos como condições sobre os estados. Neste caso podemos tomar combinações lineares de nossos vínculos de modo a tornar de primeira classe o maior número possível deles. Podem sobrar alguns vínculos χ_s tais que nenhuma combinação linear deles seja de primeira classe. Isto implica que o determinante da matriz $\|\{\chi_s, \chi_{s'}\}\|$ não é nulo, pois neste caso a única combinação linear dos χ_s que é de primeira classe é a combinação linear trivial com todos os coeficiente nulos. Portanto existe a matriz inversa $\|C_{ss'}\|$ da matriz $\|\{\chi_s, \chi_{s'}\}\|$ e definimos $\|C_{ss'}\|$ através de

$$\sum_{s'} C_{ss'}\{\chi_{s'}, \chi_{s''}\} = \delta_{ss''}. \tag{3.3.5}$$

Agora definimos os parênteses de Dirac

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} - \sum_{s,s'} \{A,\chi_s\} C_{ss'} \{\chi_{s'},B\} . \tag{3.3.6}$$

As equações de movimento são tão válidas para estes parênteses quanto para os parênteses de Poisson originais:

$$\{g,H_T\}^* = \{g,H_T\} - \sum_{s,s'} \{g,\chi_s\} C_{ss'} \{\chi_{s'},H_T\} \approx \{g,H_T\} \tag{3.3.7}$$

porque **os termos** $\{\chi_{s'},H_T\}$ são nulos devido ao fato de H_T ser de primeira classe.

Se calcularmos os parênteses de Dirac dos vínculos de segunda classe com qualquer variável dinâmica obtemos

$$\{A,\chi_{s''}\}^* = \{A,\chi_{s''}\} - \sum_{s,s'} \{A,\chi_s\} C_{ss'} \{\chi_{s'},\chi_{s''}\} =$$

$$= \{A,\chi_{s''}\} - \sum_{s} \{A,\chi_s\} \delta_{ss''} = 0 . \tag{3.3.8}$$

Assim podemos colocar os χ's iguais a zero antes de calcular os parênteses de Dirac. Isto significa que as equações $\chi_s = 0$ podem ser consideradas equações fortes que podem ser efetivamente usadas para eliminar completamente da teoria o número correspondente de p's e q's.

Deste modo a quantização do sistema consiste em fazer $i\hbar\{A,B\}^*$ corresponder a $[\hat{A},\hat{B}]_-$, impor os vínculos de primeira classe como condições sobre os estados e tomar os vínculos de segunda classe como equações entre operadores.

Veremos nos capítulos seguintes que para quantizar sistemas pseudoclássicos descritos por variáveis de Grassmann teremos de, em alguns casos, fazer corresponder o anticomutador $[\hat{A},\hat{B}]_+$ aos parênteses de Dirac $i\hbar\{A,B\}^*$.

CAPÍTULO 4

EQUAÇÕES DE ONDA RELATIVÍSTICAS

Vamos rever, neste capítulo, as propriedades essenciais do grupo de Poincaré necessárias à formulação de equações de onda relativísticas para partículas livres de qualquer spin. Apresentaremos as equações de onda relativísticas na formulação de Bargmann-Wigner. Ignoraremos certas sutilezas matemáticas envolvidas no estudo das representações do grupo de Poincaré. Para uma análise cuidadosa destas questões sugerimos a referência (20) e a bibliografia lá citada.

4.1. SPINORES

Considere (21,22) o espaço vetorial bidimensional S_2 sobre o corpo C dos números complexos e o conjunto de todas as matrizes 2X2, complexas e não singulares A que transformam S_2 em si mesmo:

$$\psi' = A\psi \tag{4.1.1}$$

ou

$$\psi'^{k} = A^{k}{}_{\ell}\,\psi^{\ell} \quad (k,\ell = 1,2) \tag{4.1.2}$$

onde ψ, $\psi' \in S_2$ e está implícita a soma sobre os índices repetidos. Impomos a condição adicional

$$\det A = 1. \tag{4.1.3}$$

O conjunto destas matrizes A forma o grupo linear especial ou grupo unimodular que será denotado por SL(2,C). Os vetores ψ que se transformam segundo os elementos deste grupo são chamados de spinores.

Spinores de ordem superior são definidos pela transformação

$$\psi'^{k_1\dots k_m} = A^{k_1}{}_{\ell_1}\dots A^{k_m}{}_{\ell_m}\,\psi^{\ell_1\dots\ell_m} . \qquad (4.1.4)$$

Considere dois spinores ψ e ϕ :

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix} \quad , \quad \phi = \begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix}$$

Então, segundo (4.1.2),

$$\begin{pmatrix}\psi'^1 & \phi'^1\\ \psi'^2 & \phi'^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A^1{}_1 & A^1{}_2\\ A^2{}_1 & A^2{}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^1 & \phi^1\\ \psi^2 & \phi^2\end{pmatrix} ,$$

donde segue-se que

$$\psi'^1\phi'^2 - \psi'^2\phi'^1 = (\det A)(\psi^1\phi^2 - \psi^2\phi^1) .$$

Como detA=1 concluímos que

$$\psi'^1\phi'^2 - \psi'^2\phi'^1 = \psi^1\phi^2 - \psi^2\phi^1 = \text{invariante.} \qquad (4.1.5)$$

Vamos definir um novo spinor ϕ_i :

$$\phi_1 = \phi^2 \quad , \quad \phi_2 = -\phi^1 . \qquad (4.1.6)$$

Então

$$\psi^1\phi_1 + \psi^2\phi_2 = \text{invariante.} \qquad (4.1.7)$$

Chamaremos os spinores com índices inferiores de <u>spinores covariantes</u> e os com índices superiores de <u>spinores contravariantes</u>.

Definimos também um <u>spinor contravariante pontuado</u> $\dot{\varphi} = \begin{pmatrix}\varphi^{\dot 1}\\ \varphi^{\dot 2}\end{pmatrix}$ através da transformação

$$\dot{\varphi}' = A^*\dot{\varphi} \quad \text{ou} \quad \varphi'^{\dot k} = A^{\dot k}{}_{\dot \ell}\,\varphi^{\dot \ell} \qquad (4.1.8)$$

onde $*$ representa conjugação complexa e $A^{\dot{k}}{}_{\dot{\ell}} = (A^{k}{}_{\ell})^{*}$. Vemos que um spinor pontuado se transforma como o complexo conjugado de um spinor usual. Tensores com índices pontuados e não pontuados se transformam como produtos de spinores pontuados e não pontuados. Por exemplo:

$$\psi'^{k\dot{\ell}} = A^{k}{}_{m} A^{\dot{\ell}}{}_{\dot{n}} \psi^{m\dot{n}} . \qquad (4.1.9)$$

Vamos introduzir no espaço dos spinores as métricas antissimétricas ϵ_{rs}, $\epsilon_{\dot{r}\dot{s}}$, ϵ^{rs}, $\epsilon^{\dot{r}\dot{s}}$ definidas por

$$\epsilon = (\epsilon^{rs}) = (\epsilon^{\dot{r}\dot{s}}) = -(\epsilon_{rs}) = -(\epsilon_{\dot{r}\dot{s}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.1.10)$$

Utilizando estas métricas podemos passar das componentes covariantes às contravariantes dos spinores:

$$\begin{aligned} \psi^{r} &= \epsilon^{rs}\psi_{s} \quad , \quad \psi_{s} = \epsilon_{sr}\psi^{r} , \\ \psi^{\dot{r}} &= \epsilon^{\dot{r}\dot{s}}\psi_{\dot{s}} \quad , \quad \psi_{\dot{s}} = \epsilon_{\dot{s}\dot{r}}\psi^{\dot{r}} . \end{aligned} \qquad (4.1.11)$$

É fácil ver que (4.1.11) coincide com (4.1.6) e que $\psi_{\dot{\ell}}\varphi^{\dot{\ell}}$ é invariante porque $\det A^{*} = (\det A)^{*} = 1$. Verifica-se facilmente que

$$\epsilon^{k\ell}\epsilon^{\ell m} = \epsilon^{\dot{k}\dot{\ell}}\epsilon^{\dot{\ell}\dot{m}} = \epsilon_{k\ell}\epsilon_{\ell m} = \epsilon_{\dot{k}\dot{\ell}}\epsilon_{\dot{\ell}\dot{m}} = -\delta_{km} ,$$

ou seja, $\epsilon^{2} = -\mathbb{1}$ e $\epsilon^{-1} = -\epsilon$. Portanto

$$\psi_{k}\phi^{k} = \epsilon_{k\ell}\psi^{\ell}\epsilon^{kr}\phi_{r} = \epsilon^{\ell k}\epsilon^{kr}\psi^{\ell}\phi_{r} = -\delta_{\ell r}\psi^{\ell}\phi_{r} = -\psi^{r}\phi_{r} .$$

Então

$$\psi_{k}\psi^{k} = 0 .$$

Analogamente vemos que

$$\psi_{\dot{k}}\psi^{\dot{k}} = 0 .$$

Para encontrar como se transformam os spinores covariantes observamos que, se A for uma matriz 2X2 não singular,

$$\epsilon A \epsilon^{-1} = (\det A)(A^{-1})^T \tag{4.1.12}$$

onde T denota transposição. A verificação direta de (4.1.12) é imediata. Podemos escrever

$$\psi'_r = \epsilon_{rs} \psi'^s = \epsilon_{rs} A^s{}_\ell \psi^\ell ,$$

$$\psi'_{\dot r} = \epsilon_{\dot r \dot s} \psi'^{\dot s} = \epsilon_{\dot r \dot s} A^{\dot s}{}_{\dot \ell} \psi^{\dot \ell} ,$$

donde

$$\psi'_r = -(\epsilon)^{rs} A^s{}_\ell (\epsilon^{-1})^{\ell k} \epsilon^{km} \psi^n ,$$

$$\psi'_{\dot r} = -(\epsilon)^{\dot r \dot s} A^{\dot s}{}_{\dot \ell} (\epsilon^{-1})^{\dot \ell \dot k} \epsilon^{\dot k \dot m} \psi^{\dot n} .$$

Usando (4.1.12), lembrando que $\epsilon^{km} = -\epsilon_{km}$, $A^{\dot s}{}_{\dot \ell} = (A^s{}_\ell)^*$ e que $\det A = \det A^* = 1$, concluímos que os spinores covariantes se transformam da seginte forma:

$$\psi'_r = \left[(A^{-1})^T\right]_r{}^s \psi_s , \tag{4.1.13}$$

$$\psi'_{\dot r} = \left[(A^+)^{-1}\right]_r{}^s \psi_{\dot s} . \tag{4.1.14}$$

4.2. O GRUPO DE LORENTZ

O grupo de Lorentz L é definido como o conjunto de todas as transformações lineares reais no espaço dos quadrivetores reais x , y , ... que deixam invariante a forma bilinear

$$xy = x^0 y^0 - \vec{x}\cdot\vec{y} = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu x^\mu .$$

O tensor métrico $G = (g_{\mu\nu})$ tem a forma

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1) .$$

Cada transformação de Lorentz $\Lambda \in L$ é definida por uma matriz 4X4 com elementos reais:

$$x'^{\mu} = (\Lambda x)^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} .$$

A condição de invariância da forma (4.2.1) é equivalente a

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \, g_{\alpha\beta} \, \Lambda^{\beta}{}_{\nu} = g_{\mu\nu} \tag{4.2.1}$$

ou, em forma matricial,

$$\Lambda^{T} G \Lambda = G . \tag{4.2.2}$$

onde $\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ e $(\Lambda^{T})^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}$. Tomando o determinante em (4.2.2) obtemos

$$(\det \Lambda)^{2} = 1 \quad \text{ou} \quad \det \Lambda = \pm 1 .$$

Tomando $\mu = \nu = 0$ em (4.2.1) resulta que

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^{2} - \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^{i}{}_{0})^{2} = 1 .$$

Só há, portanto, duas gamas de valores para $\Lambda^{0}{}_{0}$:

$$\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1 \quad \text{ou} \quad \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1 .$$

Se $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$ a transformação é dita ortócrona. Se $\Lambda^{0}{}_{0} \leq -1$ a transformação é não ortócrona(reverte o tempo). Assim o grupo de Lorentz consiste em quatro componentes denotadas da seguinte forma:

$$L_{+}^{\uparrow} \quad (\det \Lambda = 1 \quad e \quad \Lambda^{0}{}_{0} \geq 1) ,$$
$$L_{+}^{\downarrow} \quad (\det \Lambda = 1 \quad e \quad \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1) ,$$
$$L_{-}^{\uparrow} \quad (\det \Lambda = -1 \quad e \quad \Lambda^{0}{}_{0} \geq 1) ,$$
$$L_{-}^{\downarrow} \quad (\det \Lambda = -1 \quad e \quad \Lambda^{0}{}_{0} \leq -1) .$$

O elemento identidade pertence a $L_+^\uparrow$ que é um subgrupo de L. O subgrupo $L_+^\uparrow$ é chamado de grupo de Lorentz restrito.

4.3. REPRESENTAÇÃO SPINORIAL DO GRUPO DE LORENTZ

O grupo de Lorentz restrito $L_+^\uparrow$ é localmente isomorfo ao grupo SL(2,C), isto é, a cada matriz $A \in SL(2,C)$ corresponde uma única transformação de Lorentz $\Lambda(A)$ tal que

$$\Lambda(A_1 A_2) = \Lambda(A_1)\Lambda(A_2).$$

Além disso $\Lambda(A_1) = \Lambda(A_2)$ se e somente se $A_1 = \pm A_2$. A correspondência $\Lambda \leftrightarrow \pm A$ define uma representação do grupo de Lorentz, a representação spinorial.

A cada quadrivetor x associamos uma matriz hermitiana

$$\underset{\sim}{x} = x^\mu \sigma_\mu = x^0 \sigma_0 + x^i \sigma_i = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \qquad (4.3.1)$$

onde σ_0 é a matriz identidade e σ_i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Vemos facilmente de (4.3.1) que

$$\det \underset{\sim}{x} = x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - (\vec{x})^2. \qquad (4.3.2)$$

Inversamente, a cada matriz hermitiana 2X2 corresponde, de acordo com a eq.(4.3.1), um quadrivetor com componentes

$$x^\mu = \frac{1}{2} \, Tr(\sigma_\mu \underset{\sim}{x}) . \qquad (4.3.3)$$

Para obter (4.3.3) usamos a relação $Tr(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}$ onde $Tr A$ designa o traço da matriz A.

A transformação

$$\underset{\sim}{x}' = A \underset{\sim}{x} A^+ , \tag{4.3.4}$$

onde $A \in SL(2,C)$ e A^+ é a matriz hermitiana conjugada, preserva a hermiticidade da matriz $\underset{\sim}{x}$. Por causa de (4.3.2) temos que

$$x'^\mu x'_\mu = \det \underset{\sim}{x}' = (\det A)(\det \underset{\sim}{x})(\det A^+) = x_\mu x^\mu ,$$

o que mostra que os quadrados dos vetores x_μ e x'_μ coincidem. A cada transformação matricial (4.3.4) corresponde uma única transformação de Lorentz restrita $\Lambda(A)$. Multiplicando (4.3.4) por σ_μ , tomando o traço e usando (4.3.3) e (4.3.1) resulta:

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_\mu A x^\nu \sigma_\nu A^+) .$$

Como $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ e os x^ν são números arbitrários, concluímos que

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^+) . \tag{4.3.5}$$

Tomando $\mu = \nu = 0$ em (4.3.5) obtemos

$$\Lambda^0{}_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(A A^+) \geq 0 .$$

Pode-se demonstrar (23) que $\det \Lambda = 1$, o que prova que $\Lambda \in L_+^\uparrow$.

Podemos escrever (4.3.4) como

$$\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu = A \sigma_\nu x^\nu A^+$$

donde

$$A \sigma_\nu A^+ = \Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \tag{4.3.6}$$

ou

$$A^{r}{}_{\ell}\, A^{\dot{s}}{}_{\dot{k}}\, (\sigma_{\nu})^{\ell \dot{k}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, (\sigma_{\mu})^{r\dot{s}} \; . \tag{4.3.7}$$

Uma transformação nos índices spinoriais de $(\sigma_{\mu})^{r\dot{s}}$ induz uma transformação de Lorentz no índice vetorial. Este resultado será usado no Apêndice A para demonstrar que as equaçõesde onda em forma spinorial são relativisticamente invariantes.

4.4. GERADORES DO GRUPO DE POINCARÉ

O grupo de Poincaré consiste em todas as transformações da forma

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu} \tag{4.4.1}$$

onde $\Lambda \in L$ e a^{μ} é um quadrivetor real. O grupo de Poincaré, como o grupo de Lorentz, tem quatro componentes: $P_{+}^{\uparrow}$, $P_{+}^{\downarrow}$, $P_{-}^{\uparrow}$ e $P_{-}^{\downarrow}$. O subgrupo $P_{+}^{\uparrow}$, para o qual $\Lambda \in L_{+}^{\uparrow}$, é chamado de grupo de Poincaré restrito. Vamos denotar a transformação (4.4.1) por $\{a, \Lambda\}$. O produto de duas transformações de Poincaré é uma nova transformação de Poincaré cujos parâmetros são dados por

$$\{a_2, \Lambda_2\}\{a_1, \Lambda_1\} = \{ a_2 + \Lambda_2 a_1 \, , \, \Lambda_2 \Lambda_1 \} . \tag{4.4.2}$$

A transformação $\{0, \mathbb{1}\}$ é a identidade, $\{0, \Lambda\}$ é uma transformação de Lorentz e $\{a, \mathbb{1}\}$ representa uma translação pura.

Vamos examinar as representações unitárias do grupo de Poincaré . Denotaremos por $U(a, \Lambda)$ a transformação unitária correspondente à transformação (4.4.1). Segue-se de (4.4.2) que teremos

$$U(a_2, \Lambda_2)\, U(a_1, \Lambda_1) = U(a_2 + \Lambda_2 a_1 \, , \, \Lambda_2 \Lambda_1) .$$

Em particular temos as identidades

$$U(0,\Lambda^{-1})\,U(a_1,\Lambda_1)\,U(0,\Lambda) = U(\Lambda^{-1}a_1,\Lambda^{-1}\Lambda_1\Lambda)$$

ou

$$U(0,\Lambda)^{-1}\,U(a_1,\Lambda_1)\,U(0,\Lambda) = U(\Lambda^{-1}a_1,\Lambda^{-1}\Lambda_1\Lambda) \tag{4.4.3}$$

e

$$U(-a_2,\mathbb{1})\,U(a_1,\mathbb{1})\,U(a_2,\mathbb{1}) = U(a_1,\mathbb{1}). \tag{4.4.4}$$

Se considerarmos transformações infinitesimais

$$x'^{\mu} = a^{\mu} + (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu})\,x^{\nu} \tag{4.4.5}$$

onde a^{μ} e $\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$ são infinitésimos de primeira ordem e $\epsilon_{\mu\nu}=-\epsilon_{\nu\mu}$, podemos colocar

$$U(a,\mathbb{1}+\epsilon) = \mathbb{1} + i\,a_{\mu}P^{\mu} - \frac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \tag{4.4.6}$$

onde P^{μ} e $M^{\mu\nu}$ são operadores hermitianos e $M^{\mu\nu}=-M^{\nu\mu}$. Tomando a_1 infinitesimal e $\Lambda_1=\mathbb{1}$ em (4.4.3) resulta

$$U(0,\Lambda)^{-1}(\mathbb{1}+i\,a^{(1)}_{\mu}P^{\mu})\,U(0,\Lambda) = \mathbb{1} + i(\Lambda^{-1})_{\mu}{}^{\nu}\,a^{(1)}_{\nu}P^{\mu},$$

donde

$$U(0,\Lambda)^{-1}P^{\mu}\,U(0,\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}P^{\nu} \tag{4.4.7}$$

já que $(\Lambda^{-1})_{\nu}{}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ devido à eq.(4.2.1). Portanto P^{μ} é um quadrivetor. Tomando $a_1=0$ e $\Lambda_1=\mathbb{1}+\epsilon$ com ϵ infinitesimal em (4.4.3) encontramos

$$U(0,\Lambda)^{-1}(\mathbb{1}-\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}M^{\mu\nu})\,U(0,\Lambda) = \mathbb{1} - \frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\epsilon\Lambda)_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$$

donde

$$U^{-1}(0,\Lambda)\, M^{\mu\nu}\, U(0,\Lambda) = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\, \Lambda^{\nu}{}_{\beta}\, M^{\alpha\beta}. \tag{4.4.8}$$

Logo $M^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico de segunda ordem. Tomando a_1 infinitesimal em (4.4.4) obtemos

$$U(-a_2, \mathbb{1})\, P^{\mu}\, U(a_2, \mathbb{1}) = P^{\mu}. \tag{4.4.9}$$

Tomando Λ infinitesimalmente próximo à identidade em (4.4.7) e (4.4.8) e fazendo a_2 infinitesimal em (4.4.9) obtemos

$$(\mathbb{1} + \tfrac{i}{2}\epsilon_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta})\, P^{\mu}\, (\mathbb{1} - \tfrac{i}{2}\epsilon_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}) = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu})\, P^{\nu},$$

$$(\mathbb{1} + \tfrac{i}{2}\epsilon_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta})\, M^{\mu\nu}\, (\mathbb{1} - \tfrac{i}{2}\epsilon_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}) = (\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \epsilon^{\mu}{}_{\alpha})\, (\delta^{\nu}{}_{\beta} + \epsilon^{\nu}{}_{\beta})\, M^{\alpha\beta},$$

$$(\mathbb{1} - i a^{(2)}_{\alpha} P^{\alpha})\, P^{\mu}\, (\mathbb{1} + i a^{(2)}_{\beta} P^{\beta}) = P^{\mu}.$$

Igualando as partes antissimétricas dos coeficientes de $\epsilon_{\alpha\beta}$ em ambos os lados destas equações achamos as seguintes relações de comutação para os geradores do grupo de Poincaré:

$$[M^{\alpha\beta}, P^{\mu}]_- = i(g^{\mu\beta}P^{\alpha} - g^{\mu\alpha}P^{\beta}), \tag{4.4.10}$$

$$[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}]_- = i(g^{\nu\beta}M^{\mu\alpha} - g^{\nu\alpha}M^{\mu\beta} + g^{\mu\beta}M^{\alpha\nu} - g^{\mu\alpha}M^{\beta\nu}), \tag{4.4.11}$$

$$[P^{\mu}, P^{\nu}]_- = 0. \tag{4.4.12}$$

No caso do grupo de Lorentz os únicos geradores são $M^{\mu\nu}$, que satisfazem as relações de comutação (4.4.11). Neste caso as representações irredutíveis são rotuladas por dois índices (j,j') onde j,j'=0,1/2,1,3/2,... (24). A matriz $D^{(j,j')}(\Lambda)$ que representa qualquer dada transformação de Lorentz não é unitária. Estas representações são todas de dimensão finita. Pode-se demonstrar (ver ref.(21), página 33) que as representações unitárias do grupo de Lorentz são necessariamente de dimensão infinita.

Veremos que os estados que descrevem partículas elementares são vetores num espaço de Hilbert que devem constituir a base de uma representação unitária de dimensão infinita do grupo de Lorentz. Entretanto, as representações deste grupo que agem sobre os índices spinoriais dos vetores de estado são finitas e não unitárias.

Os operadores P^μ e $M^{\mu\nu}$ são hermitianos e correspondem a quantidades fisicamente observáveis (25). P^μ corresponde ao quadrivetor energia-momento do sistema físico e o vetor $\vec{M} = (M^{23}, M^{31}, M^{12})$ representa o momento angular total do sistema.

4.5. INVARIANTES DO GRUPO DE POINCARÉ

Vamos definir (21) os seguintes operadores:

$$\Gamma_\nu = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\, P^\alpha M^{\beta\mu}. \tag{4.5.1}$$

Vemos que se $\vec{P} = 0$ (sistema de repouso) temos

$$\Gamma_0 = 0 \qquad e \qquad \Gamma_i = P^0 M^i \tag{4.5.2}$$

onde $\vec{M} = (M^{23}, M^{31}, M^{12})$. Portanto $\frac{\Gamma_i}{P_0}$ é o momento angular intrínsico(spin) do sistema físico, já que o momento angular orbital é nulo porque $\vec{P} = 0$. Note que

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu P^\mu &= 0, \\ [M^{\mu\nu}, \Gamma^\sigma]_- &= i(g^{\nu\sigma}\Gamma^\mu - g^{\mu\sigma}\Gamma^\nu), \\ [P^\mu, \Gamma^\sigma]_- &= 0 \\ [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]_- &= -i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\Gamma^\rho P^\sigma. \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Podemos verificar facilmente que o grupo de Poincaré tem dois operadores invariantes

$$P^2 = P_\mu P^\mu \tag{4.5.4}$$

e

$$W = -\Pi_\sigma \Pi^\sigma = \frac{1}{2} M^{\mu\lambda} M_{\mu\lambda} P_\nu P^\nu - M^{\lambda\mu} M_{\lambda\nu} P_\mu P^\nu \tag{4.5.5}$$

que comutam com todos os geradores. Portanto P^2 e W comutam com todos os operadores da representação do grupo. Se a representação for irredutível W e P^2 são múltiplos da identidade pelo lema de Schur(26). Todas as representações irredutíveis podem ser classificadas através dos autovalores dos invariantes P^2 e W . Realmente, se Ψ for um elemento do espaço de representação temos

$$U(a,\Lambda)\, W\, \Psi = W\, U(a,\Lambda)\, \Psi .$$

Mas $W = \omega \mathbb{1}$ onde ω é um número e, portanto, $W\Psi = \omega\Psi$. Assim

$$W\, U(a,\Lambda)\, \Psi = \omega\, U(a,\Lambda)\, \Psi ,$$

o que significa que todos os vetores transformados $U(a,\Lambda)\Psi$ pertencem ao mesmo autovalor ω . Deste modo U é caracterizada pelos espectros de P^2 e W : $U(a,\Lambda) = U_{wp}(a,\Lambda)$ ou

$$U(a,\Lambda) = U_{sm}(a,\Lambda)$$

onde fizemos

$$P^2 = m^2\, \mathbb{1} , \tag{4.5.6}$$

$$W = m^2\, s(s+1)\, \mathbb{1} \tag{4.5.7}$$

e s=0,1/2,1,3/2,... se $m \neq 0$ devido a (4.5.2) e porque os M^i satisfazem relações de comutação de momento angular. Por definição s é o momento angutotal do sistema ou o spin da partícula se o sistema consistir em apenas uma partícula.

4.6. EQUAÇÕES DE ONDA RELATIVÍSTICAS

As funções de onda que descrevem os estados físicos de partículas livres relativísticas formam um espaço vetorial. Chamemos de ψ_L e $\psi_{L'}$ as funções de onda do mesmo estado de uma partícula livre vistas dos referenciais inerciais L e L'. Então há uma relação linear entre ψ_L e $\psi_{L'}$:

$$\psi_{L'} = D(L',L)\,\psi_L .$$

A exigência que os referenciais L e L' sejam fisicamente equivalentes implica que $D(L',L)$ forme uma representação do grupo de Poincaré.

Já que todos os referenciais inerciais são equivalentes, $D(L',L)\psi$ deve ser um estado possível da partícula visto do referencial L. O espaço dos estados deve conter ψ e todas as transformadas $D(L',L)\psi$. Isto significa que a representação $D(L',L)$ pode substituir as equações de onda do sistema. A cada sistema relativisticamente invariante de equações de onda corresponde uma representação do grupo de Poincaré. Podemos classificar todas as equações de onda relativísticas através da classificação de todas as representações irredutíveis do grupo de Poincaré, isto é, por um estudo do espectro dos operadores invariantes

$$W = -\Gamma_\sigma \Gamma^\sigma \quad e \quad P^2 = P_\mu P^\mu .$$

Já que os P^μ comutam entre si e com todos os Γ^σ , podemos escolher as funções de onda como autofunções dos P^μ. Além disso elas podem ser escolhidas como autofunções de uma das componentes de Γ_σ , digamos Γ_3 (com autovalores ξ). Assim as funções de onda dependem dos quatro números p_μ e do parâmetro ξ , que só pode assumir um número finito de valores:

$$\Psi = \Psi(p, \xi) .$$

Uma transformação de Poincaré

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} + a^{\mu}$$

induz (27) a transformação

$$U(a,\Lambda)\,\Psi(p,\xi) = e^{-i a_{\mu} p^{\mu}}\, Q(p^{\mu},\Lambda)\,\Psi(\Lambda^{-1}p,\xi) \qquad (4.6.1)$$

no espaço de representação, onde o operador unitário $Q(p,\Lambda)$ pode depender de p , mas só afeta a variável ξ . O produto interno (ϕ,Ψ) é definido por uma integração sobre a variedade $p_{\mu}p^{\mu}=m^2$ e por uma somação sobre a variável ξ (27).

Podemos escrever

$$M^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu} \qquad (4.6.2)$$

onde $M^{\mu\nu}$ só atua sobre p_{μ} e $S^{\mu\nu}$ só afeta ξ . Vamos estudar o efeito de $L^{\mu\nu}$ sobre $\Psi(p,0)$, isto é, ignorando os efeitos de spin. Neste caso $a_{\mu}=0$ e $Q = \mathbb{1}$. Portanto

$$U(0,\Lambda)\,\Psi(p,0) = \Psi(\Lambda^{-1}p,0) = \Psi(\,p^{\mu} - \epsilon^{\mu}{}_{\nu}\,p^{\nu},\,0) =$$

$$= \Psi(p,0) - \frac{\partial\Psi}{\partial p^{\mu}}\,\epsilon^{\mu}{}_{\nu}\,p^{\nu}. \qquad (4.6.3)$$

Por outro lado

$$U(0,\Lambda)\,\Psi(p,0) = \left(\mathbb{1} - \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\nu}\,M^{\mu\nu}\right)\Psi(p,0) . \qquad (4.6.4)$$

Comparando (4.6.3) com (4.6.4) resulta

$$L^{\mu\nu} = i\left(p^{\mu}\frac{\partial}{\partial p_{\nu}} - p^{\nu}\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}\right) , \qquad (4.6.5)$$

já que neste caso $M^{\mu\nu} = L^{\mu\nu}$. É fácil verificar que

$$p^{\alpha} L^{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\mu\nu\sigma} = 0 . \tag{4.6.6}$$

Também,

$$\left[S^{\mu\nu}, P^{\alpha} \right]_{-} = 0 . \tag{4.6.7}$$

porque $S^{\mu\nu}$ age apenas sobre ξ . Devido a (4.6.6) podemos escrever

$$\Gamma_{\sigma} = \frac{1}{2} p^{\mu} S^{\nu\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \tag{4.6.8}$$

Definimos

$$\vec{S} = (S^{23}, S^{31}, S^{12}) \quad , \quad \vec{S}' = (S^{01}, S^{02}, S^{03}) .$$

Então

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 = -\vec{p} \cdot \vec{S} \;, \quad \vec{\Gamma} = p^0 \vec{S} - \vec{p} \times \vec{S}' , \\ &W = -\Gamma_{\mu} \Gamma^{\mu} = \frac{1}{2} S^{\mu\lambda} S_{\mu\lambda} p^{\nu} p_{\nu} - S^{\lambda\mu} S_{\lambda\nu} p_{\mu} p^{\nu} . \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

De (4.6.9) vemos que o spin de uma partícula de massa não nula é dado por $\vec{S} = \dfrac{\vec{\Gamma}}{p_0}$ no referencial de repouso.

O subgrupo das transformações de Lorentz que deixam um dado quadrivetor p^c_{μ} invariante é chamado de grupo pequeno. No caso especial do sistema de repouso ($\vec{p}^{\,c} = 0$) o grupo pequeno é o grupo de rotações tridimensionais. Se as funções de onda pertencentes a representações irredutíveis deste grupo tiverem 2s+1 componentes independentes, então o spin correspondente é s. Se a partícula tiver massa nula não há referencial de repouso, mas, neste caso, definimos o spin como o módulo do maior autovalor do operador momento angular de spin.

Podemos classificar as equações de onda relativísticas segundo o espectro do operador invariante

$$P^2 = P_\mu P^\mu = m^2 \mathbb{1},$$

e temos a seguinte classificação:

a) $m^2 > 0$; p^μ é do tipo tempo.

b) $m = 0$; $p^2=0$ mas $p^\mu \neq 0$.

c) $m = 0$; $p^\mu = 0$ (μ =0,1,2,3).

d) $m^2 < 0$; p^μ é do tipo espaço.

Apenas os casos a) e b) correspondem a situações físicas conhecidas.

A) PARTÍCULAS DE MASSA NÃO NULA

Spin s=0. Neste caso ψ só depende de p (ξ =0) e satisfaz a a equação de Klein-Gordon

$$p^\mu p_\mu \psi = m^2 \psi \quad , \quad W\psi = 0 . \tag{4.6.10}$$

Spin s=N/2 (N=1,2,3,...). No caso N=1 a função de onda satisfaz a equação de Dirac. Para construir funções de onda para um spin geral seguimos o modelo usado para obter a equação de Dirac.

Escolhemos como função de onda

$$\psi = \psi(p, \xi_1, \ldots, \xi_N)$$

que exigimos que seja simétrica nas variáveis ξ_i (a razão desta exigência se tornará clara mais adiante). Cada ξ_i pode assumir quatro valores, isto é, ξ_i =1,2,3,4. Para cada ξ_i introduzimos (27) as matrizes 4X4 $\gamma^\mu_{(i)}$ que satisfazem

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu_{(i)} \gamma^\nu_{(i)} + \gamma^\nu_{(i)} \gamma^\mu_{(i)} = 2 g^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad , \quad i = 1, \ldots, N , \\ &\gamma^\mu_{(i)} \gamma^\nu_{(j)} = \gamma^\nu_{(j)} \gamma^\mu_{(i)} \quad , \quad i \neq j . \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

Cada $\gamma^{\mu}_{(i)}$ age sobre a variável ξ_i. As equações de onda são

$$\gamma^{\mu}_{(i)} p_{\mu} \psi = m \psi \quad , \quad i = 1, \ldots, N . \tag{4.6.12}$$

De (4.6.12) e (4.6.11) resulta imediatamente que cada componente de ψ satisfaz a equação de Klein-Gordon. Vamos demonstrar que as eqs.(4.6.12) descrevem realmente uma partícula com spin s=N/2.

Vamos encontrar os operadores $M^{\mu\nu}$ a partir da invariância relativística das equações de onda. De

$$(\gamma^{\mu}_{(i)} p'_{\mu} - m)\, \psi'(p', \xi) = 0 \quad , \quad p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, p^{\nu}$$

e

$$\psi'(p', \xi) = U(0, \Lambda)\, \psi(p, \xi)$$

obtemos

$$(\gamma^{\mu}_{(i)} \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, p_{\nu} - m)\, U(0,\Lambda)\, \psi(p,\xi) = 0 \; ,$$

donde

$$\left(U^{-1}(0,\Lambda)\, \gamma^{\mu}_{(i)}\, U(0,\Lambda)\, \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, p_{\nu} - m \right) \psi(p, \xi) = 0 \, .$$

Obteremos a equação de onda no sistema não transformado se

$$U^{-1}(0,\Lambda)\, \gamma^{\mu}_{(i)}\, U(0,\Lambda)\, \Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \gamma^{\nu}_{(i)}$$

ou

$$U(0,\Lambda)\, \gamma^{\nu}_{(i)}\, U^{-1}(0,\Lambda) = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\, \gamma^{\mu}_{(i)} \, . \tag{4.6.13}$$

Para uma transformação infinitesimal

$$U(0, \mathbb{1} + \epsilon) = \mathbb{1} - \sum_{j=1}^{N} \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}_{(i)} \quad , \quad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu} \; ,$$

obtemos

$$i \sum_j \left[M^{\mu\nu}_{(j)}, \gamma^{\lambda}_{(i)} \right]_- = \gamma^{\nu}_{(i)} g^{\lambda\mu} - \gamma^{\mu}_{(i)} g^{\nu\lambda} \qquad (4.6.14)$$

As eqs.(4.6.14) são satisfeitas por

$$M^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + \sum_{i=1}^{N} S^{\mu\nu}_{(i)} \qquad (4.6.15)$$

onde

$$L^{\mu\nu} = i\left(p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p_{\nu}} - p^{\nu} \frac{\partial}{\partial p_{\mu}}\right) \qquad (4.6.16)$$

e

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left(\gamma^{\mu}_{(i)} \gamma^{\nu}_{(i)} - \gamma^{\nu}_{(i)} \gamma^{\mu}_{(i)}\right). \qquad (4.6.17)$$

O spin total é

$$S^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{N} S^{\mu\nu}_{(i)} .$$

Como $m \neq 0$, escolhemos o sistema em relação ao qual a partícula está em repouso caracterizado por $\vec{p}=0$ e $p_0 = m$ para definir o grupo pequeno. De (4.6.17) e (4.6.11) vemos que

$$\left[\gamma^{0}_{(j)}, S^{il}_{(j)}\right]_- = 0 \qquad (i, l = 1, 2, 3) .$$

Como os S^{il} são os geradores do grupo pequeno (já que $L^{il} = 0$ porque $\vec{p} = 0$), podemos escolher os $\gamma^{0}_{(j)}$ diagonais. Escolhemos

$$\gamma^{0}_{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, N) .$$

As equações de onda se escrevem

$$\gamma^{0}_{(i)} p_0 \Psi = m \Psi$$

ou

$$\gamma^{0}_{(i)}\,\psi = \psi\,,$$

já que $p_0 = m$. Destas últimas equações concluímos que as componentes de ψ correspondentes à terceira e quarta linhas dos $\gamma^{0}_{(i)}$ são nulas. As componentes de ψ só não são nulas quando os ξ_i assumem os valores 1,2. Só há 2^N componentes não nulas. Entretanto o número de componentes independentes é menor porque ψ é simétrica nos ξ's. É fácil mostrar por indução que ψ tem apenas N+1 componentes independentes. Portanto a partícula descrita por esta função de onda tem spin s=N/2. A formulação (4.6.12) das equações de onda relativísticas para partículas de spin arbitrário é conhecida como formulação de Bargmann-Wigner.

B) PARTÍCULAS DE MASSA NULA

Esta classe é definida por

$$p_\mu p^\mu = 0 \quad \text{mas} \quad p^\mu \neq 0\,.$$

As equações de onda para spin $s \geqslant 1/2$ são

$$\gamma^{\mu}_{(i)}\, p_\mu \psi = 0 \quad , \; i = 1, \ldots, N. \tag{4.6.18}$$

Pode-se demonstrar (21,27) que as funções ψ que satisfazem as eqs.(4.6.18) descrevem partículas de spin s=N/2. A função de onda tem apenas duas componentes independentes que correspondem a estados de polarização circular à esquerda e à direita.

As equações de Bargmann-Wigner (4.6.12) podem ser postas numa forma spinorial equivalente(ver Apêndice A). As eqs.(4.6.12) ou seu equivalente spinorial são inconsistentes se introduzirmos a interação com um campo eletromagnético externo via acoplamento mínimo (28). Na ref.(29) são construídas equações relativísticas para partículas de qualquer spin que perma-

necem consistentes em presença de uma campo eletromagnético minimamente aco
plado.

CAPÍTULO 5

PARTÍCULA NÃO RELATIVÍSTICA COM SPIN

Apresentamos neste capítulo uma aplicação das variáveis de Grassmann na descrição não relativística de partículas de spin 1/2. No capítulo seguinte consideraremos partículas relativísticas de spin arbitrário.

5.1. PARTÍCULA EM REPOUSO

Suponhamos que as variáveis que descrevem o spin de uma partícula não relativística sejam elementos de uma álgebra de Grassmann G_3 com três geradores $\xi_i(t)$ e que $\vec{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ se transforme como um vetor sob o grupo O(3) de rotações tridimensionais.

A ação mais geral que se pode construir com estas variáveis que seja par e invariante sob O(3) é (13)

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{i}{2} \vec{\xi} . \dot{\vec{\xi}} + \frac{i}{2} \epsilon_{k\ell m} B_k \xi_\ell \xi_m \right) dt \tag{5.1.1}$$

onde os B_k são números reais componentes de um vetor $\vec{B}$. Como (5.1.1) não envolve os graus de liberdade translacionais, estamos estudando o spin de uma partícula em repouso.

Nossa lagrangiana é, portanto,

$$L(\vec{\xi}, \dot{\vec{\xi}}) = \frac{i}{2} \vec{\xi} . \dot{\vec{\xi}} + \frac{i}{2} \vec{B} . (\vec{\xi} \times \vec{\xi}) . \tag{5.1.2}$$

As equações de movimento são

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} .$$

Em notação vetorial temos

$$\dot{\vec{\xi}} = \vec{B} \times \vec{\xi} . \tag{5.1.3}$$

Se $\vec{B}$ for independente do tempo a solução de (5.1.3) pode ser escrita na forma

$$\xi_i(t) = R_{ij}(t)\,\xi_j(0) \tag{5.1.4}$$

com

$$R(t) = e^{At}\,, \tag{5.1.5}$$

onde a matriz A tem elementos

$$A_{ij} = \epsilon_{i\ell j}\,B_\ell\,. \tag{5.1.6}$$

A eq.(5.1.3) descreve a precessão do spin num campo magnético externo $\vec{H}$ onde $\vec{B}=\mu\vec{H}$ e μ é o momento magnético da partícula.

Com o intuito de quantizá-la, vamos reformular a teoria na forma hamiltoniana. Definimos, como sempre, os momentos conjugados às variáveis ξ_i :

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = -\frac{i}{2}\,\xi_i\,. \tag{5.1.7}$$

A hamiltoniana usual H_0 é dada por

$$H_0 = \dot{\xi}_i \pi_i - L = -\frac{i}{2}\,\epsilon_{n\ell m} B_n \xi_\ell \xi_m = -\frac{i}{2}\,\vec{B}\cdot(\vec{\xi}\times\vec{\xi}). \tag{5.1.8}$$

Os parênteses de Poisson entre as variáveis e os momentos conjugados são(ver a eq.(2.2.11))

$$\{\xi_i\,,\pi_j\} = \{\pi_j\,,\xi_i\} = -\delta_{ij}\,, \tag{5.1.9}$$

já que ξ_i e π_j são ambos ímpares.

As eqs.(5.1.7) representam vínculos, já que exprimem os momentos em função apenas das coordenadas sem que apareçam as velocidades. Vamos representar os vínculos através de

$$\varphi_i = \pi_i + \frac{i}{2}\xi_i \approx 0 . \tag{5.1.10}$$

Os parênteses de Poisson entre os vínculos são

$$\{\varphi_i, \varphi_j\} = \{\pi_i + \frac{i}{2}\xi_i, \pi_j + \frac{i}{2}\xi_j\} = -i\,\delta_{ij} . \tag{5.1.11}$$

Como det $\|\{\varphi_i,\varphi_j\}\| \neq 0$, não há combinação linear dos vínculos que seja de primeira classe. Todos os vínculos φ_i são de segunda classe. Para que possamos usar as relações (5.1.10) como equações fortes e assim eliminar os momentos π_i , introduzimos os parênteses de Dirac

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} - \{A,\varphi_i\}\, C_{ij}\, \{\varphi_j, B\}$$

onde (C_{ij}) é a matriz inversa de $\|\{\varphi_i,\varphi_j\}\|$, isto é, $C_{ij}=i\,\delta_{ij}$. Portanto

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} - i\,\{A,\varphi_i\}\{\varphi_i, B\} . \tag{5.1.12}$$

Os parênteses de Dirac das variáveis ξ_i são

$$\{\xi_i, \xi_j\}^* = -i\,\delta_{ij} . \tag{5.1.13}$$

A hamiltoniana total H_T é igual a H_0 mais uma combinação linear dos vínculos de primeira classe. Já que não há vínculos de primeira classe,

$$H_T = H_0 = -\frac{i}{2}\epsilon_{klm} B_k \xi_l \xi_m . \tag{5.1.14}$$

Este sistema pode ser quantizado pela correspondência

$$[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j]_+ \longleftrightarrow i\hbar\,\{\xi_i, \xi_j\}^* \tag{5.1.15}$$

onde escolhemos o anticomutador por razões de consistência, pois o lado direito de (5.1.15) é simétrico em ξ_i , ξ_j . Então,usando (5.1.13),

$$[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j]_+ = \hbar\,\delta_{ij} . \tag{5.1.16}$$

Os operadores $\hat{\xi}_i$ podem ser representados pelas matrizes de Pauli da seguinte maneira:

$$\hat{\xi}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\, \sigma_i \ . \qquad (5.1.17)$$

Os σ_i são geradores da álgebra de Clifford K_3 e satisfazem as relações de anticomutação

$$[\sigma_n , \sigma_\ell]_+ = 2\,\delta_{n\ell} \ . \qquad (5.1.18)$$

Usando (5.1.17) temos que o momento angular de spin $\hat{\vec{S}}$ é dado por

$$\hat{S}_n = -\frac{i}{2}\,\epsilon_{n\ell m}\,\hat{\xi}_\ell\,\hat{\xi}_m = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_n \ , \qquad (5.1.19)$$

o que mostra que a partícula em questão tem spin 1/2. A hamiltoniana total quantizada torna-se

$$\hat{H}_T = \vec{B}.\hat{\vec{S}} = \mu\,\vec{H}.\hat{\vec{S}} \ . \qquad (5.1.20)$$

Esta hamiltoniana representa a energia de interação de um campo magnético $\vec{H}$ com uma partícula de spin 1/2 cujo vetor momento magnético é $-\mu\,\hat{\vec{S}}$.

5.2. MOVIMENTO EM CAMPOS EXTERNOS

Vamos considerar agora os graus de liberdade translacionais de uma partícula com spin. A partícula se desloca sobre uma curva num "superespaço de fase" que consiste num subspaço orbital $(\vec{q},\vec{p})$ e no subspaço tri-dimensional $(\vec{\xi})$ das variáveis de Grassmann.

A ação mais geral que descreve uma partícula em presença de campos externos é (13)

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{i}{2}\,\vec{\xi}.\dot{\vec{\xi}} + \vec{p}.\dot{\vec{q}} - \frac{p^2}{2m} - V_0(\vec{q}) - \vec{L}.\vec{S}\,V_1(\vec{q}) - \vec{S}.\vec{B}(\vec{q}) \right) dt \qquad (5.2.1)$$

onde $\vec{L}=\vec{q}\times\vec{p}$ é o momento angular orbital, $V_0(\vec{q})$ e $V_1(\vec{q})$ são funções reais es calares, $\vec{B}(\vec{q})$ é um campo vetorial real e $\vec{S}=-\frac{i}{2}\vec{\xi}\times\vec{\xi}$ é o momento angular de spin. A ação é uma função par das variáveis de Grassmann porque $\vec{S}$ é par. Note que escrevemos a ação na forma lagrangiana em relação às variáveis ξ_i e na forma hamiltoniana em relação às variáveis orbitais. O termo $\vec{L}.\vec{S}V_1(\vec{q})$ representa a interação spin-órbita. Não há possibilidade de introduzir auto-interação do spin porque $\vec{S}.\vec{S}=0$. Variando $\vec{\xi}$,$\vec{q}$, e $\vec{p}$ independentemente e fazendo $\delta S=0$ obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} &= \frac{\vec{p}}{m} + (\vec{S}\times\vec{q})\,V_1(\vec{q}) , \\ \dot{\vec{p}} &= -\vec{\nabla}V_0(\vec{q}) - (\vec{L}.\vec{S})\vec{\nabla}V_1(\vec{q}) + (\vec{S}\times\vec{p})\,V_1(\vec{q}) - \vec{\nabla}(\vec{S}.\vec{B}) , \\ \dot{\vec{\xi}} &= (\vec{L}\times\vec{\xi})\,V_1(\vec{q}) + \vec{B}\times\vec{\xi} . \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

O caso de campos centrais, isto é, quando $\vec{B}=0$ e V_0, V_1 são funções apenas de $R=|\vec{q}|$ é analisado na referência (13). Verifica-se que o problema se reduz ao do movimento num potencial efetivo $U(R)=V_0+\frac{L^2}{2mR^2}+\Lambda V_1$ onde $\Lambda=\vec{L}.\vec{S}$. Encontra-se que $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$, L^2 e $\vec{L}.\vec{S}$ são constantes de movimento. O potencial $U(R)$ contém a perturbação ΛV_1 que é nilpotente, já que $\Lambda^2=0$. Isto permite resolver as equações de movimento pelo método das perturbações sendo que, pelo fato de Λ^2 ser nulo, a solução obtida em primeira ordem é exata.

Though this be madness, yet there is method in't.

Hamlet, Act II Sc. II, William Shakespeare.

CAPÍTULO 6

DINÂMICA PSEUDOCLÁSSICA RELATIVÍSTICA DE PARTÍCULAS COM QUALQUER SPIN

Neste capítulo vamos estender o tratamento do capítulo anterior a partículas relativísticas de spin arbitrário. Como fizemos anteriormente, os graus de liberdade de spin serão descritos por variáveis de Grassmann. Nossos resultados são uma generalização do trabalho de Casalbuoni et al.(12) em relação a partículas de spin 1/2. As transformações de supersimetria, que relacionam entre si os graus de liberdade bosônicos e fermiônicos, serão usadas como guia para a construção da lagrangiana da teoria.

6.1. SUPERSIMETRIA

O conceito de uma simetria fundamental entre bósons e férmions foi introduzido inicialmente nos modelos duais em sua formulação como teorias de campo em duas dimensões (4). Estas transformações, chamadas inicialmente de transformações de "supergauge", transformam entre si campos bosônicos e fermiônicos. Isto é possível porque os parâmetros das transformações são spinores anticomutativos. As transformações de "supergauge" em quatro dimensões foram formuladas pela primeira vez por Wess e Zumino(6). Uma abordagem diferente foi proposta por Salam e Strathdee(7) que introduziram os supercampos definidos num espaço de oito dimensões (x,θ) que é o produto do espaço-tempo quadridimensional por um espaço cujos pontos são rotulados pelas quatro variáveis anticomutativas θ_α que constituem um spinor de Majorana(*).

(*) Um spinor de Majorana é igual a seu conjugado de carga, $\psi^c=\psi$, onde $\psi^c=C\bar{\psi}^T$. O spinor adjunto é definido por $\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$. A matriz C de conjugação de carga satisfaz $C^T=-C$ e $C^{-1}\gamma_\mu C=-\gamma_\mu^T$. As matrizes $\gamma_\mu C$ são simétricas. Disto segue-se que $\bar{\theta}\gamma_\mu\theta=0$.

Vamos reproduzir rapidamente a parte que nos interessa da abordagem de Salám e Strathdee (30).

Os supercampos são definidos sobre o espaço (x,θ) de oito dimensões. As variáveis θ_α são componentes de um spinor de Majorana e anticomutam:

$$\theta_\alpha \theta_\beta + \theta_\beta \theta_\alpha = 0 , \tag{6.1.1}$$

isto é, os θ_α são geradores da álgebra de Grassmann G_4.

A ação do grupo de Poincaré sobre o espaço (x,θ) é definida por

$$\begin{aligned} x^{\mu\prime} &= \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu + a_\mu , \\ \theta'_\alpha &= A_\alpha{}^\beta(\Lambda)\, \theta_\beta , \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

onde $A(\Lambda)$ denota a representação da transformação de Lorentz Λ no espaço de spinores de Dirac(spinores a quatro componentes).

A ação de uma transformação de "supergauge" sobre o espaço (x,θ) define-se por

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \frac{i}{2}\, \bar{\epsilon}\, \gamma_\mu \theta , \\ \theta'_\alpha &= \theta_\alpha + \epsilon_\alpha , \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

onde os parâmetros ϵ_α são anticomutativos e componentes de um spinor de Majorana. Estas transformações formam um grupo (se acrescentarmos ao lado direito da primeira das eqs.(6.1.3) um quadrivetor constante comutativo) e deixam invariante a forma diferencial

$$d\Omega_\mu = dx_\mu - \frac{i}{2}\, \bar{\theta}\, \gamma_\mu d\theta . \tag{6.1.4}$$

Um supercampo escalar é definido pelas seguintes propriedades de transformação:

$$\phi'(x',\theta') = \phi(x,\theta) . \qquad (6.1.5)$$

Podem ser definidos também supercampos tensoriais e spinoriais. Por exemplo, um supercampo spinorial se transformaria como

$$\Psi'_\alpha(x',\theta') = A_\alpha{}^\beta(\Lambda)\, \Psi_\beta(x,\theta) , \qquad (6.1.6)$$

Qualquer supercampo é um polinômio do quarto grau nas variáveis θ_α porque os monômios $\theta_{\alpha_1}\theta_{\alpha_2}\dots\theta_{\alpha_n}$ são nulos se $n>4$. Um supercampo escalar pode ser expandido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\phi(x,\theta) = {} & A(x) + \bar\theta\Psi(x) + \frac{1}{4}\bar\theta\theta F(x) + \frac{1}{4}\bar\theta\gamma_5\theta\, G(x) + \\ & + \frac{i}{4}\bar\theta\gamma_\mu\gamma_5\bar\theta A^\mu(x) + \frac{1}{4}(\bar\theta\theta)\bar\theta\chi(x) + \\ & + \frac{1}{32}(\bar\theta\theta)^2 D(x) ,\end{aligned} \qquad (6.1.7)$$

onde A, F, D são campos escalares, G é pseudoescalar, A^μ é um vetor axial, χ e Ψ são spinores de Dirac. Um supercampo escalar corresponde a um campo de dezesseis componentes definido no espaço-tempo.

Usando (6.1.3) e (6.1.5) podemos encontrar a variação de um supercampo escalar sob uma transformação de "supergauge" infinitesimal:

$$\delta\phi(x,\theta) = \bar\epsilon_\alpha \left[\frac{\partial\phi}{\partial\bar\theta_\alpha} + \frac{i}{2}(\gamma_\mu\theta_\alpha)\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \right] . \qquad (6.1.8)$$

Substituindo a expansão (6.1.7) em (6.1.8) obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta A &= \bar\epsilon\Psi , \\
\delta\Psi &= \frac{1}{2}\left[F + \gamma_5 G + i\gamma_\mu\gamma_5 A^\mu - i\gamma^\mu\partial_\mu A\right]\epsilon , \\
\delta F &= \frac{1}{2}\bar\epsilon\chi - \frac{i}{2}\bar\epsilon\gamma^\mu\partial_\mu\Psi , \\
\delta G &= \frac{1}{2}\bar\epsilon\gamma_5\chi - \frac{i}{2}\bar\epsilon\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\Psi , \\
\delta A_\nu &= \frac{1}{2}\bar\epsilon i\gamma_\nu\gamma_5\chi + \frac{i}{2}\bar\epsilon\gamma^\mu i\gamma_\nu\gamma_5\partial_\mu\Psi , \\
\delta\chi &= \frac{1}{2}\left[D - i\gamma^\mu\partial_\mu F - i\gamma^\mu\gamma_5\partial_\mu G - i\gamma_\nu\gamma_5 i\gamma^\mu\partial_\mu A^\nu\right]\epsilon , \\
\delta D &= -i\bar\epsilon\gamma^\mu\partial_\mu\chi .
\end{aligned} \qquad (6.1.9)$$

Transformações semelhantes a (6.1.3), mas usando spinores a duas componentes, já haviam sido introduzidas por Volkov e Akulov (31) no estudo das interações do neutrino. As transformações (6.1.3) podem ser generalizadas com a inclusão de termos da forma $\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma_\mu\theta$ ao quadrivetor adicionado a x_μ(32).

As transformações de "supergauge" (6.1.3) passaram a ser chamadas de transformações de supersimetria por sugestão de Salam e Strathdee (33). Elas foram usadas para construir lagrangianas supersimétricas(30,33). A geometria riemanniana no superespaço tem sido também considerada recentemente numa tentativa de unificação das interações fundamentais numa única estrutura teórica (34).

6.2. SUPERSIMETRIA PSEUDOCLÁSSICA

Na tentativa de descrever classicamente o spin do elétron relativístico através de variáveis de Grassmann, Casalbuoni et al. (12) tomaram por base as transformações de supersimetria para construir uma lagrangiana. Eles generalizaram a forma diferencial (6.1.4) escolhendo uma realização diferente do quadrivetor adicionado a x_μ. Foram introduzidas cinco variáveis reais anticomutativas: um pseudovetor ξ_μ e um pseudoescalar ξ_5 . Eles definiram a forma diferencial

$$d\Omega_\mu = dx_\mu + \frac{i\beta}{mc}\xi_\mu d\xi_5 + \frac{i\gamma}{mc}d\xi_\mu \xi_5 \,, \qquad (6.2.1)$$

que é invariante sob a transformação

$$\begin{aligned} &\xi_\mu \to \xi_\mu + \epsilon_\mu \quad , \quad \xi_5 \to \xi_5 + \epsilon_5 \,, \\ &x_\mu \to x_\mu - \frac{i\beta}{mc}\epsilon_\mu \xi_5 - \frac{i\gamma}{mc}\xi_\mu \epsilon_5 \,, \end{aligned} \qquad (6.2.2)$$

que é análoga à transformação de supersimetria (6.1.3). Nas eqs.(6.2.1) e

(6.2.2) ϵ_μ e ϵ_5 são constantes reais anticomutativas, β e γ são números reais, m é a massa da partícula e c é a velocidade da luz. As variáveis ξ_μ, ξ_5 têm dimensão de $(\text{ação})^{1/2}$ (10).

Considerando x_μ, ξ_μ e ξ_5 como funções de um parâmetro invariante que descreve a trajetória, eles constroem uma lagrangiana quase-invariante sob (6.2.2). Esta lagrangiana é singular e gera vínculos. Um dos vínculos se transforma na equação de Dirac após a quantização. Eles verificam, também, que só é possível a introdução da interação com um campo eletromagnético externo via acoplamento mínimo se o momento magnético anômalo da partícula for nulo.

Nosso propósito é generalizar estes resultados para partículas de qualquer spin com massa não nula.

Para formular a pseudomecânica de uma partícula de massa $m>0$ e spin s=1/2, 1, 3/2, ... introduzimos 2s conjuntos de variáveis de Grassmann reais (ξ_μ^a, ξ_5^a) $a=1,\ldots,2s$ onde os ξ_μ^a são pseudovetores e os ξ_5^a pseudoescalares. Eles comutam com as variáveis do espaço-tempo x_μ.

Introduzimos um grupo linear de transformações sobre estas variáveis definido por

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu - \frac{i\beta^a}{mc}\epsilon_\mu^a \xi_5^a - \frac{i\gamma^a}{mc}\xi_\mu^a \epsilon_5^a + b_\mu , \\ \xi_\mu^{a\,\prime} &= \xi_\mu^a + \epsilon_\mu^a , \\ \xi_5^{a\,\prime} &= \xi_5^a + \epsilon_5^a \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

onde está subentendida soma sobre o índice repetido a, os ϵ's são constantes reais anticomutativas, os b_μ são constantes de Grassmann reais pares, enquanto que β^a e γ^a são números reais usuais. A invariância sob este grupo será tomada como guia inicial para a construção de uma dinâmica lagrangiana para a partícula. Estas transformações deixam invariantes as formas diferenciais $d\xi_\mu^a$, $d\xi_5^a$ e

$$d\Omega_\mu = dx_\mu + \frac{i\beta^a}{mc}\xi^a_\mu d\xi^a_5 + \frac{i\gamma^a}{mc} d\xi^a_\mu \xi^a_5 = \\ = d\left(x_\mu + \frac{i\gamma^a}{mc}\xi^a_\mu \xi^a_5\right) + i\frac{\beta^a-\gamma^a}{mc}\xi^a_\mu d\xi^a_5 \,. \tag{6.2.4}$$

Antecipando nosso interesse pela teoria quantizada podemos introduzir os operadores geradores da transformação (6.2.3) $\hat{G}^a_\mu$, $\hat{G}^a_5$, $\hat{P}_\mu$ através de

$$\delta\hat{x}_\mu = -i\left[\epsilon^a.\hat{G}^a + \epsilon^a_5\hat{G}^a_5 + b.\hat{P}, \hat{x}_\mu\right]_- , \tag{6.2.5}$$

onde supomos que os parâmetros ϵ^a_μ, ϵ^a_5 anticomutam com os geradores $\hat{G}^a_\mu$, $\hat{G}^a_5$ e comutam com $\hat{P}_\mu$. Os comutadores de duas transformações infinitesimais sucessivas são

$$\begin{aligned} \delta_1(\delta_2\hat{x}_\mu)-\delta_2(\delta_1\hat{x}_\mu) &= -\frac{i(\beta^a-\gamma^a)}{mc}\left[(\epsilon^a_\mu)^{(1)}(\epsilon^a_5)^{(2)}-(\epsilon^a_\mu)^{(2)}(\epsilon^a_5)^{(1)}\right], \\ \delta_1(\delta_2\hat{\xi}^a_\mu)-\delta_2(\delta_1\hat{\xi}^a_\mu) &= 0\,, \\ \delta_1(\delta_2\hat{\xi}^a_5)-\delta_2(\delta_1\hat{\xi}^a_5) &= 0\,. \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Usando a identidade de Jacobi, (6.2.5) e (6.2.6) obtemos

$$\left[\hat{x}_\mu, \left[\epsilon^{(1)}_a.\hat{G}^a + (\epsilon^a_5)^{(1)}\hat{G}^a_5 + b^{(1)}.\hat{P}, \epsilon^{(2)}_a.\hat{G}^a + (\epsilon^a_5)^{(2)}\hat{G}^a_5 + b^{(2)}.\hat{P}\right]_-\right]_- = \\ = -\frac{i}{mc}(\beta^a-\gamma^a)\left[(\epsilon^a_\mu)^{(1)}(\epsilon^a_5)^{(2)}-(\epsilon^a_\mu)^{(2)}(\epsilon^a_5)^{(1)}\right]. \tag{6.2.7}$$

Se em (6.2.7) usarmos a identidade $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]_- = [\hat{A},\hat{B}]_+\hat{C} - \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]_+$, obtemos um resultado que sugere que as seguintes relações de comutação devem ser satisfeitas pelos geradores:

$$\begin{aligned} &[\hat{G}^a_\mu, \hat{G}^b_\nu]_+ = k\, g_{\mu\nu}\delta_{ab}\,, \\ &[\hat{G}^a_5, \hat{G}^b_5]_+ = \ell\,\delta_{ab}\,, \\ &[\hat{G}^a_\mu, \hat{G}^b_5]_+ = \frac{\beta^a-\gamma^a}{mc}\delta_{ab}\hat{P}_\mu\,, \\ &[\hat{G}, \hat{P}_\mu]_- = 0\,, \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

onde k, ℓ são constantes arbitrárias e $\hat{G}$ representa $\hat{G}^a_\mu$ ou $\hat{G}^a_5$. A álgebra dos geradores é uma álgebra de Lie graduada. Pode-se obter uma representação desta álgebra através de parênteses de Poisson no espaço de fase correspondente a uma lagrangiana clássica que seja invariante ou quase-invariante sob as transformações de supersimetria (6.2.3). Isto ocorre porque na quantização os parênteses de Poisson vão em comutadores ou anticomutadores dos operadores correspondentes.

6.3. LAGRANGIANA PSEUDOCLÁSSICA

Os pontos da trajetória da partícula serão identificados pelo parâmetro monótono τ que não muda sob transformações de Poincaré ou supersimetria. Exigimos que a lagrangiana seja par nas variáveis de Grassmann, homogênea do primeiro grau nas derivadas em relação a τ (ver a ref.(16), páginas 46 a 48) e quase-invariante sob transformações de supersimetria. A forma mais geral que satisfaz estas condições é

$$L = -i\alpha_1^a \xi_5^a \dot{\xi}_5^a - i\alpha_2^a \xi_\mu^a \dot{\xi}^\mu_a - mc\sqrt{(\dot{x}_\mu + V_\mu)^2} , \tag{6.3.1}$$

onde o ponto denota diferenciação em relação a τ , α_1^a e α_2^a são números reais e

$$V_\mu = \frac{i\beta^a}{mc} \xi_\mu^a \dot{\xi}_5^a + \frac{i\gamma^a}{mc} \dot{\xi}_\mu^a \xi_5^a . \tag{6.3.2}$$

Sob supersimetria

$$\delta L = L - L' = \frac{d}{d\tau}\left(i\alpha_1^a \epsilon_5^a \xi_5^a + i\alpha_2^a \epsilon_\mu^a \xi^\mu_a\right) , \tag{6.3.3}$$

isto é, as transformações de supersimetria são canônicas deixando a ação

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} L \, d\tau \tag{6.3.4}$$

invariante. A ação é também invariante sob a reparametrização $\tau' = \tau'(\tau)$ onde τ'

é uma função monótona.

O gerador infinitesimal das transformações canônicas de supersimetria e de Poincaré é dado por (ver a eq.(2.3.16))

$$F = -\delta x_\mu P^\mu + \delta \xi_\mu^a \Pi_a^\mu + \delta \xi_5^a \Pi_5^a - i(\alpha_1^a \epsilon_5^a \xi_5^a + \alpha_2^a \epsilon_\mu^a \xi_a^\mu) \equiv$$
$$\equiv b_\mu P^\mu + \epsilon_\mu^a G_a^\mu + \epsilon_5^a G_5^a + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \tag{6.3.5}$$

onde P^μ, Π_a^μ e Π_5^a são os momentos canônicos conjugados a x_μ, ξ_μ^a, ξ_5^a respectivamente, $\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$ são os parâmetros infinitesimais das transformações de Lorentz, $M_{\mu\nu}$ os geradores correspondentes e $\delta x_\mu = x_\mu - x'_\mu$, $\delta\xi_\mu^a = \xi_\mu^a - \xi_\mu^{a\prime}$,etc. Os G_μ^a e G_5^a são geradores da supersimetria. O termo $-\delta x_\mu P^\mu$ em (6.3.5) aparece com este sinal porque mais adiante definiremos $P^\mu = -\frac{\partial L}{\partial x_\mu}$ para concordar com a notação utilizada nas refs. (11,12). O sinal negativo na definição de P^μ é necessário para que tenhamos $P^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$ no caso de uma partícula livre sem spin. Em todas as equações deduzidas no Capítulo 2 devemos fazer $P_\mu \to -P_\mu$ e $\bar{P}_\mu \to -\bar{P}_\mu$ para obter os resultados deste capítulo.

Usando (6.2.3) em (6.3.5) obtemos:

$$G_5^a = -\left(\Pi_5^a + i\alpha_1^a \xi_5^a - \frac{i\gamma^a}{mc} P.\xi^a\right),$$
$$G_\mu^a = -\left(\Pi_\mu^a + i\alpha_2^a \xi_\mu^a + \frac{i\beta^a}{mc} P_\mu \xi_5^a\right). \tag{6.3.6}$$

Como vimos na Seção 2.3, a variação de qualquer variável dinâmica sob uma transformação(canônica) de supersimetria infinitesimal é dada por $\delta A = \{A,F\}$ onde $\{\ \}$ indica parênteses de Poisson. De acordo com a Seção 2.2, e observando que x_μ, P_μ são pares enquanto ξ_μ^a, ξ_5^a, Π_μ^a, Π_5^a são ímpares, temos os seguintes parênteses não nulos:

$$\{x_\mu, P_\nu\} = -\{P_\nu, x_\mu\} = -g_{\mu\nu},$$
$$\{\Pi_\mu^a, \xi_\nu^b\} = \{\xi_\nu^b, \Pi_\mu^a\} = -g_{\mu\nu}\delta_{ab}, \tag{6.3.7}$$
$$\{\Pi_5^a, \xi_5^b\} = \{\xi_5^b, \Pi_5^a\} = -\delta_{ab}.$$

Usando estes parênteses encontramos

$$\begin{aligned} \{G_5^a, G_5^b\} &= -2i\alpha_1^{(a)}\delta_{ab} \,, \\ \{G_\mu^a, G_\nu^b\} &= -2i\alpha_2^{(a)}\delta_{ab}\, g_{\mu\nu} \,, \\ \{G_\mu^a, G_5^b\} &= -\frac{i}{mc}(\beta^{(a)}-\gamma^{(a)})\, P_\mu \,\delta_{ab} \,, \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

que é uma realização via parênteses de Poisson da álgebra de Lie graduada das eqs. (6.2.9). Nas eqs.(6.3.8), e daqui por diante, colocamos um índice repetido entre parênteses para indicar que não há soma sobre ele.

A lagrangiana (6.3.1) é singular e empregaremos o método de Dirac(ver Capítulo 3) para obter a dinâmica hamiltoniana. É conveniente primeiro simplificar a lagrangiana fazendo uma transformação canônica das coordenadas sugerida pela eq.(6.2.4):

$$\begin{aligned} \bar{x}_\mu &= x_\mu + \frac{i\gamma^a}{mc}\,\xi_\mu^a\,\xi_5^a \,, \\ \bar{\xi}_\mu^a &= \xi_\mu^a \,, \\ \bar{\xi}_5^a &= \xi_5^a \,, \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

que é gerada por

$$F_1 = -\left(x_\mu + \frac{i\gamma^a}{mc}\,\xi_\mu^a\,\xi_5^a\right)\bar{P}^\mu + \xi_\mu^a\,\bar{\Pi}_a^\mu + \xi_5^a\,\bar{\Pi}_5^a \,. \tag{6.3.10}$$

Segue-se da eq.(2.3.7) que

$$\begin{aligned} P^\mu &= -\frac{\partial F_1}{\partial x_\mu} = \bar{P}^\mu \,, \\ \Pi_\mu^a &= \frac{\partial F_1}{\partial \xi_a^\mu} = \bar{\Pi}_\mu^a - \frac{i\gamma^a}{mc}\,\xi_5^a\,P_\mu \,, \\ \Pi_5^a &= \frac{\partial F_1}{\partial \xi_5^a} = \bar{\Pi}_5^a + \frac{i\gamma^a}{mc}\,P.\,\xi^a \,. \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

Sob supersimetria $\bar{x}_\mu \rightarrow \bar{x}_\mu - \frac{i}{mc}(\beta^a-\gamma^a)\epsilon_\mu^a\,\xi_5^a$ e podemos redefinir ξ_5^a de modo que $\beta^a-\gamma^a = -1$. Abandonaremos as barras daqui por diante e trabalharemos daqui por diante com a lagrangiana

$$L = -i\alpha_1^a \xi_5^a \dot{\xi}_5^a - i\alpha_2^a \xi_\mu^a \dot{\xi}_a^\mu - mc\sqrt{\left(\dot{x}_\mu - \frac{i}{mc}\xi_\mu^a \dot{\xi}_5^a\right)^2}\ , \tag{6.3.12}$$

enquanto a transformação de supersimetria torna-se

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \frac{i}{mc}\epsilon_\mu^a \xi_5^a\ , \\ \xi_\mu^{a\prime} &= \xi_\mu^a + \epsilon_\mu^a\ , \\ \xi_5^{a\prime} &= \xi_5^a + \epsilon_5^a\ . \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

Os momentos canônicos são

$$\begin{aligned} P^\mu &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = mc\,\frac{\dot{x}^\mu - \frac{i}{mc}\xi_a^\mu \dot{\xi}_5^a}{\sqrt{(\dot{x}_\mu - \frac{i}{mc}\xi_\mu^a \dot{\xi}_5^a)^2}}\ , \\ \Pi_\mu^a &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_a^\mu} = i\,\alpha_2^{(a)} \xi_\mu^a\ , \\ \Pi_5^a &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_5^a} = -i\,\alpha_1^{(a)} \xi_5^a - \frac{i}{mc} P.\xi^a\ . \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

As equações de Lagrange são

$$\begin{aligned} \dot{P}_\mu &= 0\ , \\ 2\,\alpha_2^{(a)} \dot{\xi}_\mu^a &= \frac{1}{mc} P_\mu \dot{\xi}_5^a\ , \\ 2\,\alpha_1^{(a)} \dot{\xi}_5^a &= \frac{1}{mc} P.\dot{\xi}^a\ . \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

Para que (6.3.15) tenha soluções não nulas para $\dot{\xi}_\mu^a$ e $\dot{\xi}_5^a$ exigimos que

$$4\,\alpha_1^{(a)}\alpha_2^{(a)} = \frac{P^2}{m^2c^2} = 1\ , \tag{6.3.16}$$

a última igualdade seguindo-se da primeira das eqs.(6.3.14). Daqui para a frente tomaremos $\alpha_1^a = \alpha_2^a = 1/2$. Com esta escolha as eqs.(6.3.15) mostram que os ξ_5^a são funções arbitrárias de τ . De (6.3.14) obtemos os seguintes vínculos primários(ver Capítulo 3):

$$\begin{aligned}
\chi_\mu^a &= \Pi_\mu^a - \frac{i}{2}\,\xi_\mu^a \approx 0\,,\\
\chi_5^a &= \Pi_5^a - \frac{i}{2}\,\xi_5^a + \frac{i}{mc}\,P.\,\xi^a \approx 0\,,\\
\chi &= P^2 - m^2c^2 \approx 0\,,
\end{aligned} \tag{6.3.17}$$

onde $\approx$ é para nos lembrar que, quando calcularmos parênteses de Poisson, estas igualdades devem ser usadas apenas no fim do cálculo.

Para que os vínculos sejam constantes de movimento exigimos que

$$\dot{\chi}_\mu^a \approx 0 \quad e \quad \dot{\chi}_5^a \approx 0\,. \tag{6.3.18}$$

Destas exigências resulta que

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}_\mu^a &= \frac{i}{2}\,\dot{\xi}_\mu^a\,,\\
\dot{\Pi}_5^a &= \frac{i}{2}\,\dot{\xi}_5^a - \frac{i}{mc}\,P.\,\dot{\xi}^a\,.
\end{aligned} \tag{6.3.19}$$

As eqs.(6.3.19) e as equações de Lagrange (6.3.15) implicam que

$$\chi_5^{a\,\prime} = \Pi_5^a + \frac{i}{2}\,\xi_5^a \tag{6.3.20}$$

são constantes de movimento. Voltaremos a elas mais tarde.

Se calcularmos a hamiltoniana usual H_0 obtemos

$$H_0 = -\dot{x}_\mu P^\mu + \dot{\xi}_\mu^a \Pi_a^\mu + \dot{\xi}_5^a \Pi_5^a - L = 0$$

porque a lagrangiana é homogênea de primeiro grau nas velocidades. Para podermos construir uma hamiltoniana não trivial vamos usar o procedimento de Dirac.

6.4. DINÂMICA HAMILTONIANA

Seguindo Dirac, vamos calcular agora os parênteses de Poisson entre os vínculos:

$$
\begin{aligned}
&\{\chi,\chi\} = \{\chi,\chi_5^a\} = \{\chi,\chi_\mu^a\} = 0\,,\\
&\{\chi_5^a,\,\chi_5^b\} = i\,\delta_{ab}\,,\\
&\{\chi_5^a,\,\chi_\mu^b\} = -\frac{i}{mc}\,P_\mu\,\delta_{ab}\,,\\
&\{\chi_\mu^a,\,\chi_\nu^b\} = i g_{\mu\nu}\,\delta_{ab}\,.
\end{aligned}
\tag{6.4.1}
$$

Segundo a terminologia de Dirac, χ é de primeira classe. Tomando combinações lineares dos conjuntos $\chi_A^a=(\chi_5^a,\chi_\mu^a)$ procuraremos formar outros vínculos de primeira classe. Para que estes existam é necessário que

$$\det\|\{\chi_A^{(a)},\,\chi_B^a\}\| \approx 0\,. \tag{6.4.2}$$

Temos que

$$\|\{\chi_A^{(a)},\chi_B^a\}\| = \begin{pmatrix} i & -\frac{i}{mc}P_\mu \\ -\frac{i}{mc}P_\nu & i g_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -\frac{i}{mc}P_0 & -\frac{i}{mc}P_1 & -\frac{i}{mc}P_2 & -\frac{i}{mc}P_3 \\ -\frac{i}{mc}P_0 & i & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{mc}P_1 & 0 & -i & 0 & 0 \\ -\frac{i}{mc}P_2 & 0 & 0 & -i & 0 \\ -\frac{i}{mc}P_3 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

e

$$\det\|\{\chi_A^{(a)},\chi_B^a\}\| = -i\left[-1+\frac{P^2}{m^2c^2}\right]\approx 0$$

em virtude do vínculo $\chi\approx 0$. Observamos também que (6.4.2) só é válida devido à escolha que fizemos para os parâmetros α_1^a, α_2^a. De fato, podemos calcular os parênteses de Poisson dos vínculos com α_1^a, α_2^a não especificados e, em seguida, calcular o determinante (6.4.2). O resultado é:

$$\det\|\{\chi_A^{(a)},\chi_B^a\}\| = (2i\,\alpha_2^{(a)})^3\left[\frac{P^2}{m^2c^2}-4\,\alpha_1^{(a)}\alpha_2^a\right].$$

Usando o vínculo $\chi\approx 0$ e impondo que o determinante seja nulo obtemos novamente as eqs.(6.3.16) como condições sobre as constantes α_1^a, α_2^a.

Vamos definir as combinações lineares

$$\chi_D^a = u_{(a)}\chi_5^a + v_{(a)}^\mu \chi_\mu^a . \qquad (6.4.3)$$

Exigimos que $\{\chi_D^a,\chi_D^b\}\approx 0$, $\{\chi_D^a,\chi_5^b\}\approx 0$ e $\{\chi_D^a,\chi_\mu^b\}\approx 0$. Obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} &i u_a^2 - \frac{2i}{mc} u_a v_{(a)}^\mu P_\mu + i v_\mu^{(a)} v_a^\mu = 0 , \\ &i u_a - \frac{i}{mc} v_a^\mu P_\mu = 0 , \\ &-\frac{i}{mc} u_a P_\mu + i v_\mu^a = 0 . \end{aligned} \qquad (6.4.4)$$

A última das eqs.(6.4.4) dá $v_\mu^a = \frac{1}{mc} P_\mu u_a$. Dado este valor para v_μ^a as outras equações são identicamente satisfeitas com os u_a permanecendo arbitrários. Assim as combinações

$$\chi_D^a = \chi_5^a + \frac{1}{mc} P.\chi^a \approx 0 \qquad (6.4.5)$$

são de primeira classe.

Vamos tomar χ , χ_D^a, χ_μ^a como um conjunto mais conveniente de vínculos primários. Já que $H_0=0$, a hamiltoniana total é simplesmente uma combinação linear dos vínculos primários:

$$H_T = \rho_1 \chi + \rho_2^a \chi_D^a + u_a^\mu \chi_\mu^a , \qquad (6.4.6)$$

onde ρ_1 é um número real e ρ_2^a , u_a^μ são funções ímpares das variáveis de Grassmann para que H_T seja par. A evolução temporal de qualquer variável dinâmica é regida pela equação

$$\dot{A} = \{A, H_T\} \qquad (6.4.7)$$

e obtemos condições de consistência impondo que $\dot{\chi} \approx 0$, $\dot{\chi}^a_D \approx 0$ e $\dot{\chi}^\mu_a \approx 0$, isto é, que os vínculos primários sejam constantes de movimento. Como χ e χ^a_D são de primeira classe, resulta que a única condição de consistência que impõe restrições a ρ_1 , ρ^a_2 e μ^μ_a é $\dot{\chi}^\mu_a \approx 0$. De fato temos

$$\dot{\chi}^a_\mu = \{\chi^a_\mu, H_T\} \approx -\mu^\nu_b \{\chi^a_\mu, \chi^b_\nu\} = -i\mu^a_\mu ,$$

de modo que devemos ter $\mu^a_\mu = 0$. Pelo fato de H_0 ser nula não aparecem vínculos secundários e a hamiltoniana é de primeira classe assumindo a forma

$$H_T = \rho_1 \chi + \rho^a_2 \chi^a_D . \qquad (6.4.8)$$

Os vínculos $\chi^a_\mu \approx 0$ são de segunda classe. Eles podem ser transformados nas equações fortes $\chi^a_\mu = 0$, eliminando os π^a_μ , se usarmos no lugar dos parênteses de Poisson os parênteses de Dirac relativos a estes vínculos. Os parênteses de Dirac são dados por

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} - \{A,\chi^\mu_a\} C^{ab}_{\mu\nu} \{\chi^\nu_b , B\} ,$$

onde $(C^{ab}_{\mu\nu})$ é a inversa da matriz $\|\{\chi^\mu_a , \chi^\nu_b\}\|$,isto é, conforme a eq. (6.4.1), $C^{ab}_{\mu\nu} = -i\delta_{ab} g_{\mu\nu}$. Portanto

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} + i \{A,\chi^a_\mu\}\{\chi^\mu_a , B\} . \qquad (6.4.9)$$

É importante observar que embora os χ^a_μ sejam elementos de uma álgebra de Grassmann,os parênteses de Poisson $\{\chi^a_\mu , \chi^b_\nu\}$ são números complexos usuais. Isto permite definir sem problemas a matriz inversa de $\|\{\chi^a_\mu , \chi^b_\nu\}\|$ que é usada na definição dos parênteses de Dirac. Este fato fortuito nos permite utilizar os resultados do Capítulo 3 embora nossa mecânica contenha variáveis anticomutativas.

As equações de movimento são obtidas usando

$$\dot{A} \approx \{A, H_T\}^* \approx \{A, H_T\} \tag{6.4.10}$$

e

$$\pi_\mu^a = \frac{i}{2}\xi_\mu^a . \tag{6.4.11}$$

As equações de Hamilton são

$$\begin{aligned}
\dot{x}_\mu &\approx -2P_1 P_\mu - \frac{i}{mc}\rho_2^a \xi_\mu^a ,\\
\dot{\xi}_\mu^a &\approx \frac{\rho_2^a}{mc} P_\mu ,\\
\dot{\xi}_5^a &\approx \rho_2^a ,\\
\dot{\pi}_5^a &\approx -\frac{i}{2}\rho_2^a ,\\
\dot{P}_\mu &\approx 0 .
\end{aligned} \tag{6.4.12}$$

Observemos que estas equações contêm as equações de Lagrange (6.3.15), como não poderia deixar de acontecer. A evolução em τ mistura as coordenadas do espaço-tempo com os graus de liberdade de spin; o espaço de fase de uma partícula com spin é um "superespaço".

Nós nos propomos a construir uma pseudomecânica que não envolva π_μ^a e π_5^a, mas apenas as variáveis de spin ξ_μ^a e ξ_5^a. A invariância sob supersimetria que nos levou a escrever a lagrangiana na forma (6.3.12) nos permitiu remover π_μ^a mas não π_5^a. Assim procuramos por alguns outros vínculos que sejam de segunda classe mas deixem os vínculos restantes χ, χ_D^a de primeira classe. Podemos então ir para novos parênteses de Dirac usando sua propriedade iterativa (11). Um candidato é a constante de movimento $\chi_5^{a'} = \pi_5^a + \frac{i}{2}\xi_5^a$. As equações de Lagrange (6.3.15) com $\alpha_1^a = \alpha_2^a = 1/2$ nos informam que os ξ_5^a são funções arbitrárias de τ. Podemos, portanto, impor os vínculos

$$\chi_5^{a'} = \Pi_5^a + \frac{i}{2}\xi_5^a \approx 0 . \qquad (6.4.13)$$

De

$$\begin{aligned} &\{\chi_5^{a'}, \chi_5^{b'}\} = -i\delta_{ab} , \\ &\{\chi_D^a, \chi_5^{b'}\} = \{\chi, \chi_5^{a'}\} = \{\chi_\mu^a, \chi_5^{b'}\} = 0 , \\ &\{\chi_5^a, \chi_5^{b'}\} = 0 , \end{aligned} \qquad (6.4.14)$$

vemos que eles têm as propriedades desejadas. Definindo

$$\{A,B\}^{**} = \{A,B\}^* - i\{A,\chi_5^{a'}\}^*\{\chi_5^{a'}, B\}^* \qquad (6.4.15)$$

podemos usar $\chi_5^{a'}=0$ como relações fortes se usarmos estes novos parênteses de Dirac no lugar dos antigos. Claramente

$$\{A,B\}^{**} = \{A,B\} + i\{A,\chi_\mu^a\}\{\chi_\mu^a, B\} - i\{A,\chi_5^{a'}\}\{\chi_5^{a'}, B\} \qquad (6.4.16)$$

e

$$\dot{A} = \{A, H_T\}^{**} \approx \{A, H_T\}^* \approx \{A, H_T\} . \qquad (6.4.17)$$

É fácil ver que obteríamos o mesmo resultado (6.4.16) se impuséssemos de início os vínculos $\chi_5^{a'}\approx 0$ e construíssemos parênteses de Dirac relativos aos vínculos χ_μ^a e $\chi_5^{a'}$ juntos. Isto ocorre porque $\{\chi_\mu^a, \chi_5^{b'}\}=0$. Além disso é fácil verificar que estes parênteses têm as mesmas propriedades algébricas que os parênteses de Poisson originais. Por exemplo, se A e B forem variáveis dinâmicas ímpares, então $\{A,B\}^{**} = \{B,A\}^{**}$.

Notamos que ao nível das eqs.(6.4.9) a invariância da teoria sob supersimetria foi mantida, mas a imposição dos vínculos (6.4.13) pode tê-la destruído. Discutiremos a covariância da teoria na Seção 6.6.

Os novos parênteses de Dirac das variáveis sobreviventes x_μ , P_μ,

ξ_μ^a , ξ_5^a podem agora ser calculados. Eles são

$$\begin{aligned} &\{x_\mu, P_\nu\}^{**} = \{x_\mu, P_\nu\}^{*} = \{x_\mu, P_\nu\} = -g_{\mu\nu} , \\ &\{\xi_5^a, \xi_5^b\}^{**} = -i\,\delta_{ab} , \\ &\{\xi_\mu^a, \xi_5^b\}^{**} = 0 , \\ &\{\xi_\mu^a, \xi_\nu^b\}^{**} = i\,g_{\mu\nu}\,\delta_{ab} . \end{aligned} \tag{6.4.18}$$

Além disso temos que

$$\begin{aligned} &\chi_D^a = \chi_5^a = -imc(P.\xi^a - mc\,\xi_5^a) \approx 0 , \\ &\chi = P^2 - m^2c^2 \approx 0 , \\ &\{\chi_D^a, \chi_D^b\}^{**} \approx 0 , \\ &\{\chi, \chi_D^a\}^{**} \approx 0 . \end{aligned} \tag{6.4.19}$$

Agora que eliminamos todos os vínculos de segunda classe, estamos em condições de quantizar a teoria.

6.5. QUANTIZAÇÃO

Para quantizar nosso sistema procedemos da forma descrita na Seção 3.3. Estabelecemos a correspondência

$$i\hbar\{A, B\}^{**} \longleftrightarrow [\hat{A}, \hat{B}]_- \text{ ou } [\hat{A}, \hat{B}]_+ \tag{6.5.1}$$

e exigimos que os vínculos de primeira classe tornem-se condições sobre os estados (c=1) :

$$\begin{aligned} &\hat{\chi}\,\Psi = (\hat{P}^2 - m^2)\,\Psi = 0 , \\ &\hat{\chi}_D^a\,\Psi = (\hat{P}.\hat{\xi}^a - m\,\hat{\xi}_5^a)\,\Psi = 0 , \quad a = 1, \ldots, 2s , \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

onde $\hat{A}$ designa o operador correspondente à variável dinâmica A. Na eq. (6.5.1) vamos escolher o comutador ou anticomutador exigindo que as eqs. (6.5.1) e (6.5.2) sejam consistentes. Nosso método de escolha do comutador ou anticomutador difere da prescrição dada na referência (9). De qualquer forma os argumentos lá utilizados não são válidos aqui porque depois da quantização a estrutura da álgebra de Lie graduada não é mantida para os operadores correspondentes.

Escrevemos, então,

$$\begin{aligned} [\hat{\xi}^a_\mu, \hat{\xi}^b_\nu]_\pm &= -\hbar\, g_{\mu\nu}\, \delta_{ab} \,, \\ [\hat{\xi}^a_5, \hat{\xi}^b_5]_\pm &= \hbar\, \delta_{ab} \,, \\ [\hat{\xi}^a_\mu, \hat{\xi}^b_5]_\pm &= 0 \,, \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

e, por razões óbvias,

$$\begin{aligned} [\hat{\xi}^a_\nu, \hat{P}_\mu]_- &= [\hat{\xi}^a_5, \hat{P}_\mu]_- = 0 \,, \\ [\hat{x}_\mu, \hat{P}_\nu]_- &= -i\hbar\, g_{\mu\nu} \,, \\ [\hat{x}_\mu, \hat{\xi}^a_\nu]_- &= [\hat{x}_\mu, \hat{\xi}^a_5]_- = 0. \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

O sinal nas eqs.(6.5.3) será determinado por argumentos de consistência. Devemos exigir também que

$$[\hat{\chi}, \hat{\chi}^a_D]_\pm \Psi = 0 \tag{6.5.6}$$

e

$$\begin{aligned} [\hat{\chi}^a_D, \hat{\chi}^b_D]_\pm \Psi = \Big\{ & [\hat{\xi}^a_\mu, \xi^b_\nu]_\pm \hat{P}^\mu \hat{P}^\nu - m\, [\hat{\xi}^a_\mu, \hat{\xi}^b_5]_\pm \hat{P}^\mu - \\ & - m\, [\hat{\xi}^a_5, \hat{\xi}^b_\mu]_\pm \hat{P}^\mu + m^2 [\hat{\xi}^a_5, \hat{\xi}^b_5]_\pm \Big\} \Psi = 0 . \end{aligned} \tag{6.5.7}$$

A eq.(6.5.6) é identicamente satisfeita por causa de (6.5.4) se escolhermos o comutador. Das eqs.(6.5.2) deduzimos:

$$\begin{aligned} m\, \hat{P}^\mu (\hat{\xi}^b_\mu \hat{\xi}^a_5 \pm \hat{\xi}^a_\mu \hat{\xi}^b_5) \Psi &= [\hat{\xi}^b_\mu, \hat{\xi}^a_\nu]_\pm \hat{P}^\mu \hat{P}^\nu \Psi \,, \\ \hat{P}^\mu (\hat{\xi}^b_5 \hat{\xi}^a_\mu \pm \hat{\xi}^a_5 \hat{\xi}^b_\mu) \Psi &= m\, [\hat{\xi}^b_5, \hat{\xi}^a_5]_\pm \Psi . \end{aligned} \tag{6.5.8}$$

Considere o caso $a = b$. De (6.5.3) segue-se que devemos escolher(abandonan do os superescritos)

$$[\hat{\xi}_5, \hat{\xi}_5]_+ = \hbar ,$$
$$[\hat{\xi}_\mu, \hat{\xi}_\nu]_+ = -\hbar g_{\mu\nu} , \tag{6.5.9}$$

já que a escolha do comutador geraria inconsistências do tipo $\hbar = 0$. Da eq. (6.5.8) obtemos

$$2\hat{P}^\mu \hat{\xi}_\mu \hat{\xi}_5 \Psi = -m\hbar \Psi ,$$
$$2\hat{P}^\mu \hat{\xi}_5 \hat{\xi}_\mu \Psi = m\hbar \Psi , \tag{6.5.10}$$

conduzindo a

$$\hat{P}^\mu [\hat{\xi}_\mu, \hat{\xi}_5]_+ \Psi = 0 . \tag{6.5.11}$$

Devemos, portanto, exigir que

$$[\hat{\xi}_\mu, \hat{\xi}_5]_+ = 0 \tag{6.5.12}$$

para que (6.5.11) não imponha condições adicionais sobre os estados . Portanto os $\hat{\xi}_\mu^a$, $\hat{\xi}_5^a$ geram uma álgebra de Clifford K_5. Podemos representar os $\hat{\xi}_\mu^a$, $\hat{\xi}_5^a$ através das matrizes γ^a escrevendo

$$\hat{\xi}_\mu^a = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\, \gamma_5^{(a)} \gamma_\mu^a \quad , \quad \hat{\xi}_5^a = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\, \gamma_5^a \tag{6.5.13}$$

onde $\gamma_5^a = i\gamma_0^{(a)} \gamma_1^a \gamma_2^a \gamma_3^a$. Os γ's satisfazem a álgebra

$$\gamma_\mu^{(a)} \gamma_\nu^a + \gamma_\nu^{(a)} \gamma_\mu^a = 2 g_{\mu\nu} \mathbb{1} , \quad a = 1, \ldots, 2s , \tag{6.5.14}$$

os γ_0^a são hermitianos e os γ_i^a são anti-hermitianos. As eqs.(6.5.2) assumem a forma

$$(\hat{P}.\gamma^a - m)\Psi = 0 , \quad a = 1, \ldots, 2s . \tag{6.5.15}$$

Para que estas equações sejam satisfeitas simultaneamente exigimos que, para $a \neq b$,

$$[\gamma_\mu^a, \gamma_\nu^b]_- = 0 \tag{6.5.16}$$

e, conseqüentemente,

$$[\gamma_5^a, \gamma_5^b]_- = 0 \tag{6.5.17}$$

embora os ξ_5^a fossem originalmente números anticomutativos. Para satisfazer (6.5.16) e (6.5.17) escolhemos o comutador nas eqs.(6.5.3) quando $a \neq b$. Com esta escolha as exigências de consistência $[\hat{\chi}_D^a, \hat{\chi}_D^b]_\pm \Psi = 0$ (o sinal positivo é para o caso $a=b$ e o negativo para o caso $a\neq b$) não levam a quaisquer novas condições e são satisfeitas identicamente. Assim, obtemos em (6.5.15) as equações de onda relativísticas que descrevem uma partícula livre de spin s na formulação de Bargmann-Wigner.

6.6 COVARIÂNCIA RELATIVÍSTICA E SOB SUPERSIMETRIA

Da eq.(6.3.5) identificamos

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \tag{6.6.1}$$

onde

$$L_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu \tag{6.6.2}$$

e

$$S_{\mu\nu} = \Pi_\nu^a \xi_\mu^a - \Pi_\mu^a \xi_\nu^a , \tag{6.6.3}$$

que se transforma em

$$S_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\left(\xi_\mu^a \xi_\nu^a - \xi_\nu^a \xi_\mu^a\right) \tag{6.6.4}$$

se usarmos os vínculos de segunda classe $\chi_\mu^a = 0$. Quantizando formalmente a expressão (6.6.4) obtemos $S_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{4}(\gamma_\mu^a \gamma_\nu^a - \gamma_\nu^a \gamma_\mu^a)$ que coincide com o operador de momento angular de spin dado pela eq.(4.6.17) com $\hbar = 1$.

Fazendo uso da eq.(6.4.16) obtemos os seguintes resultados:

$$
\begin{aligned}
&\{L_{\rho\lambda}, L_{\mu\nu}\}^{**} = \{L_{\rho\lambda}, L_{\mu\nu}\}^{*} = \{L_{\rho\lambda}, L_{\mu\nu}\} = \\
&\qquad = g_{\lambda\mu} L_{\rho\nu} - g_{\rho\mu} L_{\lambda\nu} + g_{\rho\nu} L_{\lambda\mu} - g_{\lambda\nu} L_{\rho\mu}, \\
&\{S_{\rho\lambda}, S_{\mu\nu}\}^{**} = g_{\lambda\mu} S_{\rho\nu} - g_{\rho\mu} S_{\lambda\nu} + g_{\rho\nu} S_{\lambda\mu} - g_{\lambda\nu} S_{\rho\mu}, \\
&\{M_{\mu\nu}, x_\lambda\}^{**} = \{M_{\mu\nu}, x_\lambda\}^{*} = \{M_{\mu\nu}, x_\lambda\} = \\
&\qquad = x_\mu g_{\nu\lambda} - x_\nu g_{\mu\lambda}, \\
&\{M_{\mu\nu}, \xi_\lambda^a\}^{**} = \{M_{\mu\nu}, \xi_\lambda^a\}^{*} = \xi_\mu^a g_{\nu\lambda} - \xi_\nu^a g_{\mu\lambda}, \\
&\{M_{\mu\nu}, G_\lambda^a\}^{**} = \{M_{\mu\nu}, G_\lambda^a\}^{*} = G_\mu^a g_{\nu\lambda} - G_\nu^a g_{\mu\lambda}, \\
&\{G_\mu^a, G_\nu^b\}^{**} = -i\left(g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{m^2c^2}\right)\delta_{ab}, \\
&\{G_\mu^a, G_\nu^b\}^{*} = -i\, g_{\mu\nu}\,\delta_{ab}, \\
&\{G_\mu^a, G_5^b\}^{*} = \frac{i}{mc} P_\mu \delta_{ab}, \\
&\{G_5^a, G_5^b\}^{*} = -i\,\delta_{ab}, \\
&\{G_\mu^a, \chi_D^b\}^{**} = \{G_\mu^a, \chi\}^{**} = 0 .
\end{aligned}
\tag{6.6.5}
$$

Ao nível dos parênteses $\{\ \}^{**}$ os geradores $G_5^a = 0$ em virtude das equações fortes $\chi_5^{a'} = 0$, mostrando que a imposição destes vínculos quebra a invariância geral(canônica) sob transformações de supersimetria, as eqs(6.3.13) que tomamos como ponto de partida. A invariância sob supersimetria sobrevivente é a gerada por $F = \eta^a(\tau)\frac{G^a \cdot P}{mc}$ onde fizemos $\epsilon_\mu^a = \eta^a(\tau)\frac{P_\mu}{mc}$. As transformações correspondentes são dadas por

$$
\begin{aligned}
x'_\mu &= x_\mu + \frac{i}{m^2c^2} P_\mu \eta^a(\tau)\, \xi_5^a \,, \\
\xi_\mu^{a\prime} &= \xi_\mu^a + \frac{P_\mu}{mc} \eta^a(\tau) \,, \\
\xi_5^{a\prime} &= \xi_5^a + \eta^a(\tau) \,,
\end{aligned}
\tag{6.6.6}
$$

onde os $\eta^a(\tau)$ são parâmetros infinitesimais reais e anticomutativos. Que é possível permitir que os parâmetros pseudoescalares η^a dependam de τ pode ser visto diretamente introduzindo (6.6.6) nas equações de Lagrange dadas por (6.3.15) e verificando que elas permanecem invariantes. Isto implica que a lagrangiana deve ser quase-invariante sob (6.6.6). De fato,

$$
\delta L = L - L' = \frac{d}{d\tau}\left[-\frac{i}{2} \eta^a(\tau)\, \xi_5^a + \frac{i}{2mc} P . \xi^a \eta^a(\tau) \right] , \tag{6.6.7}
$$

o que demonstra a invariância das equações de movimento. Ao nível dos parênteses $\{\ \}^*$ a teoria é covariante em relação à supersimetria geral bem como em relação às transformações que acabamos de discutir. De fato, os vínculos χ , χ_D^a e χ_μ^a são invariantes sob supersimetria geral. Entretanto

$$
\delta \chi_5^{a\prime} = -\{F, \chi_5^{a\prime}\} = -i\left(\epsilon_5^a - \frac{\epsilon^a . P}{mc}\right) \tag{6.6.8}
$$

é zero se $\epsilon_\mu^a = \epsilon_5^a \frac{P_\mu}{mc}$. Assim os geradores correspondentes

$$
G^a = G_5^a + \frac{G^a . P}{mc} \tag{6.6.9}
$$

deixam invariantes todos os vínculos e as equações de movimento.

6.7 VÍNCULO DE "GAUGE"

Mencionamos no início da Seção 6.3 que nossa ação é invariante sob reparametrização da trajetória. Podemos estudar outro "gauge" impondo o vínculo

$$
\chi_0 = x^0(\tau) - \tau \approx 0 . \tag{6.7.1}
$$

Neste "gauge" a hamiltoniana gera evolução na coordenada temporal x^o. Os outros vínculos restantes são χ , χ_D^a . Temos os parênteses de Dirac

$$\begin{aligned} &\{\chi, \chi_o\}^{**} = 2P_o , \\ &\{\chi_D^a, \chi_o\}^{**} \approx \xi_o^a , \\ &\{\chi_D^a, \chi_D^b\}^{**} = i\chi\,\delta_{ab} \approx 0 , \end{aligned} \tag{6.7.2}$$

isto é, χ , χ_o e χ_D^a são todos de segunda classe. Vamos tentar construir vínculos de primeira classe $\chi_E^a = u\chi + u_o\chi_o + u_D^a\chi_D^a$ a partir dos vínculos de segunda classe. Exigimos que

$$\{\chi_E^a, \chi_o\}^{**} \approx \{\chi_E^a, \chi\}^{**} \approx \{\chi_E^a, \chi_D^b\}^{**} \approx 0$$

e obtemos as equações

$$\begin{aligned} &2uP_o + u_D^a\xi_o^a = 0 , \\ &-2u_oP_o = 0 , \\ &-u_o\xi_o^a + i\chi u_D^a \approx -u_o\xi_o^a = 0 , \end{aligned} \tag{6.7.3}$$

implicando que $u_o = 0$. Uma solução de (6.7.3) é $u=0$ e $u_D^a = \xi_o^a$; os vínculos de primeira classe correspondentes são $\chi_E^a = \xi_o^{(a)}\chi_D^a$. Realmente,

$$\begin{aligned} &\{\xi_o^{(a)}\chi_D^a, \chi_o\}^{**} = (\xi_o^a)^2 = 0 , \\ &\{\xi_o^{(a)}\chi_D^a, \xi_o^b\}^{**} = -i(\chi_D^{(a)})^2\delta_{ab} \approx 0 , \\ &\{\xi_o^{(a)}\chi_D^a, \chi\}^{**} = 0 . \end{aligned} \tag{6.7.4}$$

Definimos, então, novos parênteses de Dirac relativos aos vínculos de segunda classe χ e χ_o , isto é,

$$\{A,B\}^{***} = \{A,B\}^{**} + \frac{1}{2P_o}\left[\{A,P^2\}^{**}\{x^o,B\}^{**} - \{A,x^o\}^{**}\{P^2,B\}^{**}\right] \tag{6.7.5}$$

e podemos usar os vínculos (c=1)

$$x^0 = \tau \,, \qquad P^2 = m^2 \,, \tag{6.7.6}$$

como equações fortes. Além disso, para qualquer variável dinâmica A, temos que

$$\{A, P^2\}^{***} = \{A, x^0\}^{***} = 0 \,. \tag{6.7.7}$$

Assim a variável x^0 se comporta como um parâmetro da teoria.

Verificamos que a álgebra de Poincaré de P_μ , $M_{\mu\nu}$ é preservada:

$$\begin{aligned}
&\{x_\mu, P_\nu\}^{***} = -g_{\mu\nu} + \frac{P_\mu}{P_0} g_{0\nu} \,, \\
&\{x_\mu, x_\nu\}^{***} = \{P_\mu, P_\nu\}^{***} = 0 \,, \\
&\{M_{\mu\nu}, P_\lambda\}^{***} = \{x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu , P_\lambda\}^{***} = \\
&\qquad = -g_{\mu\lambda} P_\nu + \frac{P_\mu}{P_0} g_{0\lambda} P_\nu + g_{\nu\lambda} P_\mu - \frac{P_\nu}{P_0} g_{0\lambda} P_\mu = \\
&\qquad = P_\mu g_{\nu\lambda} - P_\nu g_{\mu\lambda} \,, \\
&\{M_{\rho\lambda}, M_{\mu\nu}\}^{***} = g_{\lambda\mu} M_{\rho\nu} - g_{\rho\mu} M_{\lambda\nu} + g_{\rho\nu} M_{\lambda\mu} - g_{\lambda\nu} M_{\rho\mu} \,.
\end{aligned} \tag{6.7.8}$$

O mesmo é verdadeem relação à álgebra de supersimetria (6.4.18). A hamiltoniana total é uma combinação linear dos vínculos de primeira classe:

$$H_T = P_0 + \lambda^a \xi_0^a \chi_D^a \tag{6.7.9}$$

onde $\chi_D^a = P.\xi^a - m\,\xi_5^a$. Em (6.7.9) a presença do termo P_0 é necessária para que a hamiltoniana se reduza ao operador de evolução em x^0 quando todos os vínculos forem satisfeitos. Além disso a forma (6.7.9) se reduz à hamiltoniana usual $H = \sqrt{\vec{P}^2 + m^2}$ quando a partícula não tem spin (11). As constantes λ^a devem ser puramente imaginárias para assegurar que H_T seja um elemento real da álgebra de Grassmann gerada por ξ_μ^a , ξ_5^a .As equações de movimento são dadas por

$$\dot{A} = \frac{dA}{dx^0} = \frac{\partial A}{\partial x^0} + \{A, H_T\}^{***} \tag{6.7.10}$$

onde o termo $\frac{\partial A}{\partial x^0}$ é necessário porque as variáveis dinâmicas podem ser funções explícitas de x^0. Encontramos

$$\begin{aligned}
&\dot{x}^0 = 1 + \{x^0, H_T\}^{***} = 1, \\
&\dot{P}_\mu = 0, \\
&\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{P}}{P_0} - \lambda^a \xi_0^a \vec{\xi}^a, \\
&\dot{\xi}_0^a = -i\lambda^{(a)}(\vec{P}.\vec{\xi}^a + m\,\xi_5^a) \approx -i\lambda^{(a)} P_0 \xi_0^a, \\
&\dot{\vec{\xi}}^a = -i\lambda^{(a)} \vec{P} \xi_0^a, \\
&\dot{\xi}_5^a = -i m \lambda^{(a)} \xi_0^a, \\
&\dot{M}_{0i} = \lambda^a (P.\xi^a - m\,\xi_5^a)\xi_i^a \approx 0, \\
&\dot{M}_{ij} = 0.
\end{aligned} \tag{6.7.11}$$

As equações para ξ_0^a e $\vec{\xi}^a$ podem ser imediatamente integradas dando ($x^0 = t$)

$$\begin{aligned}
&\xi_0^a(t) = \xi_0^{(a)}(0)\, e^{-i\lambda^a P_0 t}, \\
&\vec{\xi}^a(t) = \vec{\xi}^a(0) + \frac{\vec{P}}{P_0}\, \xi_0^{(a)}(0) \left(e^{-i\lambda^a P_0 t} - 1\right),
\end{aligned} \tag{6.7.12}$$

onde $\xi_0^a(0)$, $\vec{\xi}^a(0)$ são os valores das variáveis correspondentes para $t = 0$. Segue-se, então, que

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{P}}{P_0} - \lambda^a \xi_0^a(0) \vec{\xi}^a(0)\, e^{-i\lambda^a P_0 t}, \tag{6.7.13}$$

cuja solução é dada por

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{\vec{P}}{P_0} t - \frac{i}{P_0} \xi_0^a(0) \vec{\xi}^a(0) \left(e^{-i\lambda^a P_0 t} - 1\right). \tag{6.7.14}$$

Vemos deste resultado que a partícula se move com a velocidade clássica $\frac{\vec{P}}{P_0}$, mas superposto a este movimento há um análogo pseudoclássico, mas com exponenciais reais, do "zitterbewegung" quântico (ver ref.(35), pág. 263).

Quantizando formalmente a hamiltoniana (6.7.9) obtemos um operador que não é hermitiano porque os λ^a são imaginários puros. Para que $\hat{H}_T$ seja hermitiana devemos redefinir os λ^a como números reais. Com a escolha de $\lambda^a = \frac{1}{s\hbar}$ obtemos $\hat{H}_T = \frac{1}{2s}\sum_{a=1}^{2s}(\vec{P}.\vec{\alpha}^a + m\beta^a)$ onde $\beta^a = \gamma_0^a$ e $\vec{\alpha}^a = \gamma_0^{(a)}\vec{\gamma}^a$.

6.8. INTERAÇÃO COM O CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Vamos tentar introduzir a interação de nossa partícula com um campo eletromagnético externo via acoplamento mínino, isto é, através da substituição de P_μ por $P_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$ onde os A_μ são os potenciais do campo eletromagnético. Queremos introduzir a interação de modo que a teoria se reduza à de uma partícula livre quando fizermos $e=0$. Para que isto ocorra é necessário que a interação não transforme vínculos de primeira classe em vínculos de segunda classe. Se a interação transformar vínculos de primeira classe em vínculos de segunda classe teremos que introduzir parênteses de Dirac relativos a estes últimos. Estes parênteses, entretanto, serão singulares quando desligarmos a interação e a teoria não se reduzirá à de uma partícula livre no limite em que $e=0$.

Supomos, portanto, que os vínculos χ_5^a permanecem de primeira classe e se transformam em

$$\chi_5^a = \left(P_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\xi_a^\mu - mc\,\xi_5^a . \tag{6.8.1}$$

Supomos também que a interação não muda os vínculos de segunda classe:

$$\begin{aligned} \chi_\mu^a &= \Pi_\mu^a - \frac{i}{2}\xi_\mu^a , \\ \chi_5^{a'} &= \Pi_5^a + \frac{i}{2}\xi_5^a . \end{aligned} \tag{6.8.2}$$

No caso da partícula livre os parênteses de Dirac dos χ^a_D com eles mesmos dão o outro vínculo χ (veja a eq.(6.7.2)). Assim, exigimos que $\{\chi^{(a)}_5, \chi^{(a)}_5\}^{**}$ sejam vínculos de nossa teoria. Usando (6.4.18) obtemos

$$\{\chi^{(a)}_5, \chi^a_5\}^{**} = i\left[\left(P - \frac{e}{c}A\right)^2 - m^2c^2 + \frac{ie}{c} F_{\mu\nu}\, \xi^\mu_{(a)}\, \xi^\nu_{(a)}\right] \tag{6.8.3}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor do campo eletromagnético. Entretanto se $a \neq b$

$$\{\chi^a_5, \chi^b_5\}^{**} = -\frac{e}{c} F_{\mu\nu}\, \xi^\mu_a\, \xi^\nu_b\,, \tag{6.8.4}$$

que não é zero.

Concluímos que os vínculos χ^a_5 não permanecem de primeira classe após a introdução da interação. Por conseguinte é inconsistente introduzir a interação desta maneira. Este resultado não é surpreendente porque nosso modelo, após a quantização, reproduz as equações de Bargmann-Wigner para partículas de qualquer spin e estas equações são inconsistentes se introduzirmos a interação com um campo eletromagnético externo via acoplamento mínimo (28).

6.9 CONCLUSÕES

Da tentativa de descrever classicamente o spin através de variáveis anticomutativas chegamos a algumas conclusões.

1. Pelo menos para partículas livres a descrição dos graus de liberdade de spin por meio de variáveis anticomutativas conduz a equações de movimento clássicas com propriedades análogas à do sistema quântico correspondente. O fenômeno quântico bem conhecido do "zitterbewegung" aparece na solução das equações clássicas de movimento com a notável diferença que, no modelo pseudoclássico, os termos oscilatórios são substituídos por exponenciais reais. Isto ocorre porque os parâmetros λ^a que aparecem na hamil-

toniana pseudoclássica devem ser imaginários puros para que a hamiltoniana seja real. Isto, por sua vez, se deve à propriedade (ii) da involução numa álgebra de Grassmann, que é essencial para a segunda quantização. Os parâmetros citados acima, entretanto, devem ser redefinidos como números reais para que a hamiltoniana quantizada seja um operador hermitiano.

2. O fato de as transformações de supersimetria terem sido usadas como guia para a construção da lagrangiana de um modelo clássico para partículas com spin parece atribuir a esta simetria entre bósons e férmions um novo significado físico, insuspeitado quando de sua formulação.

3. Em nosso modelo a tentativa de introduzir a interação com um campo eletromagnético externo pelo processo usual do acoplamento mínimo é inconsistente. Este resultado já era esperado tendo em vista que a quantização de nosso modelo conduz às equações de Bargmann-Wigner que são inconsistentes em presença de um campo eletromagnético. Em 1971 Hurley (29) encontrou equações de onda relativísticas para partículas de qualquer spin que permanecem consistentes em presença de um campo eletromagnético externo minimamente acoplado. Talvez seja possível encontrar um modelo, com uma outra representação para as variáveis anticomutativas de spin, que após a quantização reproduza as equações de Hurley. Neste caso espera-se que as equações pseudoclássicas também permaneçam consistentes em presença de um campo eletromagnético externo.

4. Em nosso modelo as variáveis de spin são anticomutativas e, em conseqüência, não são fisicamente mensuráveis. Uma sugestão sobre como atacar o problema da interpretação destas variáveis é dada na ref. (13). Neste trabalho é introduzida uma distribuição no espaço de fase que satisfaz uma equação de Liouville e são considerados fisicamente mensuráveis apenas os valores médios (que são números reais) das variáveis de Grassmann, valores

médios estes que são calculados através da função de distribuição. Após a quantização a função de distribuição se transforma na matriz densidade do sistema. Esta abordagem é incompleta, todavia, devido à arbitrariedade que existe na definição da função de distribuição.

A P Ê N D I C E A

FORMA SPINORIAL DAS EQUAÇÕES DE ONDA RELATIVÍSTICAS

Vamos definir as quantidades mistas com índices tensoriais e spinoriais

$$(\sigma_\mu)^{k\dot{l}} \quad (\mu = 0,1,2,3 \ ; \ k,l = 1,2)$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(\sigma_0)^{k\dot{l}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (\sigma_1)^{k\dot{l}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \\ (\sigma_2)^{k\dot{l}} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\sigma_3)^{k\dot{l}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .\end{aligned} \tag{A.1}$$

Usando (A.1) achamos que

$$(\sigma_\mu)^{r\dot{s}} (\sigma^\nu)_{r\dot{t}} = 2\, \delta^{s}{}_{t}\, \delta_\mu{}^\nu . \tag{A.2}$$

Vamos definir as seguintes relações invariantes entre os spinores $\chi_{\dot{s}}$ e φ^r :

$$\begin{cases} p^\mu (\sigma_\mu)^{r\dot{s}} \chi_{\dot{s}} = m \varphi^r \\ p^\mu (\sigma_\mu)_{r\dot{s}} \varphi^r = m \chi_{\dot{s}} . \end{cases} \tag{A.3}$$

Estas relações são realmente invariantes sob $L_+^\uparrow$. Vamos escrever a primeira das eqs.(A.3) na forma

$$p^\mu \sigma_\mu \chi = m \varphi$$

onde devemos ter em mente que χ é um spinor pontuado covariante e φ é um spinor contravariante. Desta equação deduzimos

$$p^\mu A \sigma_\mu A^+ (A^+)^{-1} \chi = m A \varphi .$$

Usando (4.1.2), (4.1.14) e (4.3.6) obtemos

$$p^{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu}\,\sigma_{\nu}\,\chi' = m\,\varphi'$$

ou

$$p'^{\nu}\sigma_{\nu}\,\chi' = m\,\varphi' ,$$

o que demonstra a invariância da equação. De modo inteiramente análogo se demonstra que a segunda das eqs.(A.3) é também invariante.

Multiplicando a primeira das eqs.(A.3) por $p_{\nu}(\sigma^{\nu})_{r\dot{\ell}}$ e usando (A.2) resulta que

$$(p^2 - m^2)\,\chi_{\dot{s}} = 0 .$$

Analogamente mostra-se que φ^{r} satisfaz a equação de Klein-Gordon. Demonstremos que o sistema (A.3) é equivalente à equação de Dirac. Já que

$$(\sigma_{\mu})^{r\dot{s}} \equiv (\mathbb{1}\,,\,\vec{\sigma}) ,$$

onde $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli, podemos escrever (A.3) na forma

$$\begin{cases} (p^0 - \vec{p}.\vec{\sigma})\,\dot{\chi} = m\,\varphi \\ \varphi^{T}(p^0 - \vec{p}.\,\epsilon\,\vec{\sigma}\,\epsilon^{T}) = m\,\dot{\chi} \end{cases} \tag{A.4}$$

onde $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi^1\\ \varphi^2\end{pmatrix}$ e $\dot{\chi} = \begin{pmatrix}\chi_{\dot{1}}\\ \chi_{\dot{2}}\end{pmatrix}$. Como $\epsilon\vec{\sigma}\epsilon^{T} = -\vec{\sigma}^{T}$ (ver (4.1.12)) obtemos

$$\begin{cases} (p^0 - \vec{p}.\vec{\sigma})\,\dot{\chi} = m\,\varphi \\ (p^0 + \vec{p}.\vec{\sigma})\,\varphi = m\,\dot{\chi} \end{cases} \tag{A.5}$$

Somando e subtraindo as eqs.(A.5) obtemos

$$\begin{cases} p^0\,\psi_{\ell} - \vec{p}.\vec{\sigma}\,\psi_{0} = m\,\psi_{\ell} \\ p^0\,\psi_{0} - \vec{p}.\vec{\sigma}\,\psi_{\ell} = -m\,\psi_{0} \end{cases} \tag{A.6}$$

onde $\psi_\ell = \dot{\chi} + \varphi$ e $\psi_0 = \dot{\chi} - \varphi$. Podemos escrever (A.6) na forma

$$(\gamma^0 p_0 - \vec{\gamma}.\vec{p})\,\psi = m\,\psi$$

ou

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{A.7}$$

onde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_\ell \\ \psi_0 \end{pmatrix} . \tag{A.8}$$

As matrizes γ^μ satisfazem as relações de comutação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}\,\mathbb{1} .$$

Portanto (A.7) é a equação de Dirac para ψ .

Podemos generalizar as eqs.(A.3) para o caso de spin s=N/2 introduzindo os spinores $\chi^{t\ldots}_{\dot{s}\dot{u}\ldots}$ e $\varphi^{rt\ldots}_{\dot{u}\ldots}$ de ordem N e que são soluções de (36,37)

$$\begin{cases} p^\mu (\sigma_\mu)^{r\dot{s}}\, \chi^{t\ldots}_{\dot{s}\dot{u}\ldots} = m\, \varphi^{rt\ldots}_{\dot{u}\ldots} \\ p^\mu (\sigma_\mu)_{r\dot{s}}\, \varphi^{rt\ldots}_{\dot{u}\ldots} = m\, \chi^{t\ldots}_{\dot{s}\dot{u}\ldots} \end{cases} \tag{A.9}$$

Se φ e χ forem simétricos separadamente nos índices pontuados e não pontuados as eqs.(A.9) descrevem partículas de spin s=N/2.

Realmente, para uma partícula de massa $m \neq 0$, escrevemos (A.9) no referencial de repouso na forma

$$\begin{cases} \chi^{t\ldots}_{\dot{r}\dot{u}\ldots} = \varphi^{rt\ldots}_{\dot{u}\ldots} \\ \varphi^{st\ldots}_{\dot{u}\ldots} = \chi^{t\ldots}_{\dot{s}\dot{u}\ldots} \end{cases}$$

Estas equações conduzem a

$$\varphi^{st\ldots}_{\dot{u}\ldots} = \chi^{t\ldots}_{\dot{u}\dot{s}\ldots} = \varphi^{ut\ldots}_{\dot{s}\ldots} \quad .$$

Em outras palavras, φ é simétrico também sob troca de índices pontuados e não pontuados. Como cada índice pode tomar dois valores, o número de componentes independentes é N+1. A partícula descrita pelos spinores φ e χ tem spin N/2.

REFERÊNCIAS

(1) - F. A. Berezin, The Method of Second Quantization. Academic Press, New York (1966).

(2) - P. T. Matthews e A. Salam, Propagators of Quantized Field, Nuovo Cim., 2, (1955), 120.

(3) - J. L. Martin, The Feynman Principle for a Fermi System, Proc. Roy. Soc. (London), A251, (1959), 543.

(4) - P. Ramond, Dual Theory for Free Fermions, Phys. Rev. D3, (1971), 2415.

A. Neveu e J. H. Schwarz, Factorizable Dual Model of Pions, Nucl. Phys. B31, (1971), 86.

J. L. Gervais e B. Sakita, Field Theory Interpretation of Supergauges in Dual Models, Nucl. Phys. B34, (1971), 633.

Yoichi Iwasaki e K. Kikkawa, Quantization of a String of Spinning Material - Hamiltonian and Lagrangian Formulations, Phys. Rev. D8, (1973), 440.

(5) - F. A. Berezin e G. I. Kac, Lie Groups with Commuting and Anticommuting Parameters, Math. Sbornik (USSR), 11, (1970), 311.

(6) - J. Wess e B. Zumino, Supergauge Transformations in Four Dimensions, Nucl. Phys. B70, (1974), 39.

(7) - Abdus Salam e J. Strathdee, Super-gauge Transformations, Nucl. Phys. B76, (1974), 477.

(8) - J. L. Martin, Generalized Classical Dynamics, and the "Classical Analogue" of a Fermi Oscillator, Proc. Roy. Soc. (London), A251, (1959), 536.

(9) - R. Casalbuoni, On the Quantization of Systems with Anticommuting Variables, Nuovo Cim., 33A, (1976), 115.

(10) - R. Casalbuoni, The Classical Mechanics for Bose-Fermi Systems, CERN TH2139(1976).

(11) - A. J. Hanson e T. Regge, The Relativistic Spherical Top, Ann. Phys. (N. Y.) 87,(1974), 498.

(12) - A. Barducci, R. Casalbuoni e L. Lusanna, Supersymmetries and the Pseudoclassical Relativistic Electron. Firenze Preprint, July 1976.

(13) - F. A. Berezin e M. S. Marinov, Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of Classical Mechanics. ITEP-43, Moscow(1976).

(14) - Prem P. Srivastava e Nivaldo A. Lemos, Supersymmetry and Classical Particle Spin Dynamics. Pré-publicação do CBPF A0036/76. (*)

(15) - H. Goldstein, Classical Mechanics. Addison-Wesley(1971), cap. 8. Ver, também, H. C. Corben e P. Stehle, Classical Mechanics. John Wiley and Sons, 2ª Edição(1960), cap. 12.

(16) - P.A.M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, N.Y.(1964).

(17) - E.C.G. Sudarshan e N. Mukunda, Classical Dynamics: A Modern Perspective. John Wiley and Sons(1974), cap. 8.

(18) - Michael Spivak, Calculus on Manifolds. W.A. Benjamin Inc.(1965), teoremas 2-12 e 2-13.

(19) - S. Shanmugadhasan, Canonical Formalism for Degenerate Lagrangians, J. Math. Phys. 14, (1973), 677.

(20) - N.N. Bogolubov, A.A. Logunov e I.T. Todorov, Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory. W.A. Benjamin Inc.(1975), capítulos 5 e 6. Esta referência contém uma extensa bibliografia e notas bibliográficas que dão o devido crédito aos trabalhos originais.

(*) A sair no Physical Review D15, junho de 1977.

(21) - J. Leite Lopes, Lectures on Relativistic Wave Equations. Monografias de Física IX, CBPF(1962). Esta referência contém uma exposição didática das representações do grupo de Poincaré e equações de onda relativísticas com algumas referências aos trabalhos originais.

(22) - W.L. Bade e E.H. Jehle, An Introduction to Spinors, Rev. Mod. Phys. 25, (1953), 714.

(23) - A.S. Wightman, "L'Invariance Dans la Mécanique Quantique Relativiste" in Dispersion Relations and Elementary Particles. Wiley(1960).

(24) - Ver, por exemplo, S.S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. Harper and Row, N.Y.(1961), cap. 2.

(25) - Ver, por exemplo, L. Fonda e G.C. Ghirardi, Symmetry Principles in Quantum Physics. Marcel Dekker Inc., N.Y.(1970).

(26) - Ver, por exemplo, E.P. Wigner; Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra. Academic Press, N.Y.(1959), pag. 75, teorema 2.

(27) - V. Bargmann e E.P. Wigner, Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34, (1948), 211.

(28) - M. Fierz e W. Pauli, On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field, Proc. Roy. Soc.(London), A173, (1939), 211.

(29) - William J. Hurley, Relativistic Wave Equations for Particles with Arbitrary Spin, Phys. Rev. D4, (1971), 3605.

(30) - Abdus Salam e J. Strathdee, Superfields and Fermi-Bose Symmetry,Phys. Rev. D11, (1975), 1521.

(31) - D.V. Volkov e V.P. Akulov, Is the Neutrino a Goldstone Particle ?, Phys. Lett. 46B, (1973), 109.

(32) - P.P. Srivastava, On a Generalized Supergauge Transformation and Superfields, Lett. Nuovo Cimento 12,(1975), 161.

(33) - A. Salam e J. Strathdee, Super-Symmetry and Non-Abelian Gauges , Phys. Lett. 51B,(1974), 353.

(34) - P. Nath e R. Arnowitt, Generalized Super-Gauge Symmetry as a New Framework for Unified Gauge Theories, Phys. Lett. 56B,(1975), 177.
L.N. Chang, K.I. Macrae e F. Mansouri, Geometrical Approach to Local Gauge and Supergauge Invariance: Local Gauge Theories and Supersymmetric Strings, Phys. Rev. D13,(1976), 235.

(35) - P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press, 4ª Edição Revista(1967).

(36) - P.A.M. Dirac, Relativistic Wave Equations, Proc. Roy. Soc. (London), A155,(1936), 447.

(37) - H. Umezawa, Quantum Field Theory. North Holland(1956).