CBPF-NF-069/98

Alguns Teoremas Básicos da Teoria de Aproximação e a Transformada de Fourier em Espaços Vetoriais de Dimensão Infinita

Luiz C.L. Botelho

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Departamento de Física
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
23851–180 – Itaguaí, RJ, Brasil

Abstract

Um dos mais importantes tópicos da Análise Matemática é aquele relacionado ao problema de caracterizar o fecho topológico de importantes sub-conjuntos de funções provenientes da Análise matemática.

O objetivo desta nota é apresentar alguns Teoremas de aproximação fundamentais com demonstrações detalhadas e algumas delas, acreditamos serem novas na literatura. Este material é apresentado no Capítulo 1 e Capítulo 2. No Capítulo 3, apresentamos uma Teoria de Transformada de Fourier e Espaços Vetoriais de Dimensão Infinita que forneça base do nosso esquema de formalizar matematicamente a Teoria das Integrais Funcionais na Física Quântica.

Capítulo 1 – Teoremas de Aproximação Uniforme para Funções Reais Contínuas e Funções Analíticas Complexas

Introdução

Um dos mais importantes resultados obtidos em Análise Matemática (Real e Complexa) são aqueles resultados relacionados a construção de conjuntos enumeráveis de funções que sejam densos na Topologia no Espaço de Funções que está sendo objeto de estudo. Neste Capítulo apresentamos os teoremas de aproximação baseados na Álgebra das Funções Polinomiais mais usadas na Análise Matemática.

Na seção 1 apresentamos o Teorema de Weirstrass no Espaço de Funções Contínuas no intervalo $[0,1]$. Na seção 2 apresentamos teoremas análogos para o Espaço das Funções Analíticas.

1 - O Teorema Clássico de Aproximação de Weirstrass e Generalizações.

Consideremos a álgebra real de Funções Geradas pelas funções polinomiais $\{1, x\}$ no intervalo $[0,1]$ a qual coincide com o Espaço Vetorial de Polinômios em $[0,1]$. Um dos mais importantes resultados matemáticos é que qualquer função real contínua no intervalo $[0,1]$ é o limite no sentido de convergência uniforme de Polinômios, o qual passaremos a demonstrá-lo usando os polinômios de Bernstein associados a uma dada função contínua ([1]).

Teorema de Weirstrass – seja $f(x)$ uma função real contínua definida no intervalo $[0,1]$. Então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um Polinômio Real $P_n(x)$

$$\text{tal que} \quad \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

Demonstração: Seja $f(x)\varepsilon C([0,1]R)$, consideremos os seguintes polinômios

$$P_n(x;f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, f(k/n)x^k(1-x)^{n-k} \tag{1}$$

observemos a validade das seguintes identidades algébricas

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, x^k(1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1 \tag{2}$$

e

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n} \tag{3}$$

Estimemos então, a diferença para um dado ponto $x \in [0,1]$ fixo:

$$|f(x) - P_n(x;f)| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, x^k(1-x)^{n-k} \left| f(x) - \left(\frac{k}{n}\right) \right| \tag{4}$$

Desde que $[0,1]$ é um conjunto compacto da reta, a função $f(x)$ será uniformemente contínua em $[0,1]$. Logo dado um $\varepsilon > 0$, existirá um $\delta > 0$ tal que $|x - k/n| < \delta$ para $k = 0, \cdots n$: implicará que $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \varepsilon/2$. Analisemos a desigualdade eq. (4) para um dado ponto fixo $x \in [0,1]$. Temos, então, duas situações: valores do inteiro k, tais que $\left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta$. Neste caso

$$|f(x) - P_n(x;f)| \le \frac{\varepsilon}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, x^k(1-x)^{n-k} \right) \le \varepsilon/2 \tag{5}$$

No segundo caso, observemos que sendo $[0,1]$ compacto, $f(x)$, é uma função limitada, isto é: Existe um $M > 0$ tal que $\sup_{x\varepsilon[0,1]} |f(x)| \le M$. E, assim, a diferença eq. (4) toma a forma para aqueles valores de k tais que $|x - k/n| \ge \delta$ e denotados por k'

$$|f(x) - P_n(x,f)| \le 2M \sum_{k\in\{k'\}} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, x^k(1-x)^{n-k} \tag{6}$$

Pela identidade eq. (3)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, x^k(1-x)^{n-k}(x - \frac{k}{n})^2 = \frac{x(1-x)}{n} \ge \left[\sum_{k\in\{k'\}} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, x^k(1-x)^{n-k} \right] (\delta^2). \tag{7}$$

Deste modo a estimativa eq. (6) toma a forma para aqueles valores de k'

$$|f(x) - P_n(x,f)| \le 2M \left(\sum_{k'=0} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, x^k(1-x)^{n-k} \right)$$
$$\le \frac{2M}{\delta^2} \sup_{x\varepsilon[0,1]} \left| \frac{x(1-x)}{n} \right| \le \frac{2n}{\delta^2} \cdot \frac{1}{4n} \tag{8}$$

Escolhendo n suficientemente grande tal que $\frac{2M}{4n\delta^2} < \varepsilon/2$, teremos que para cada $x \in [0,1]$ a validade de estimativa

$$|f(x) - P_n(x,f)| \leq \varepsilon \tag{9}$$

Observando a uniformidade da eq. (9), obtemos a demonstração do Teorema 1.

A generalização ao caso do espaço de funções contínuas reais de n variáveis $C([0,1]^L, I\!R)$ é feita considerando os Polinômios de Berstein de n-variáveis

$$P_{N=n_1+\cdots n_N}(x_1,\cdots,x_L,f) = \sum \frac{n_1!\cdots n_N!}{k_1!(n_1-k_1)!\cdots(k_N)!(n_N-k_N)!}$$
$$f\left(\frac{k_1}{n_1},\cdots\frac{k_N}{n_N}\right)[x_1^{k_1}(1-x_1)^{n_1-k_1}\ x_N^{k_N}(1-x_N)^{n_N-k_N}] \tag{10}$$

Uma pergunta importante é sobre a possibilidade de reduzir o conjunto dos polinômios a um seu sub-espaço, sem alterar o resultado do Teorema de Weirstrass. Temos então, o seguinte resultado nesta direção:

Teorema 2 - (de Müntz-Szäsz) - suponhamos que a sequência de inteiros positivos $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots\}$ seja tal que $\sum 1/\lambda_n = +\infty$. Então o Sub-Espaço Vetorial gerado pelos monômios $\{1,x^{\lambda_1},x^{\lambda_2},\cdots,x^{\lambda_n},\cdots\}$ aproxima uniformemente qualquer função contínua no intervalo $[0,1]$, ([2]).

Demonstração: Suponhamos que o teorema seja falso. Então existirá um funcional linear contínuo $L(f)$ no Espaço $C([0,1],R)$ tal que anula-se identicamente no sub-espaço acima citado, mas não se anula em todo o Espaço $C([0,1],R)$, ou equivalente:

$$L(x^{\lambda_n}) = 0 \tag{11}$$

para $n = 0,1,2$

e

$$L(x^m) \neq 0 \tag{12}$$

para algum $m \notin \{\lambda_n\}$, já que pelo Teorema 1 os polinômios são densos em $C([0,1],R)$.

Consideremos a função de variável complexa no semi-plano direito $z = u + iv$, $u \geq 0$

$$f(z) = L(e^{z\ell g x}) = L(x^z) \tag{13}$$

Observemos que $f(z)$ é uma função analítica na região acima considerada já que x^z é também analítica aí. Também observemos que $f(z)$ é limitado no semi-plano direito

$$\begin{aligned} &\sup_{z\in\text{Semi-Plano Direito}=H^+} |f(z)| \leq ||L|| \sup_{z\in H^+} |x^z| \\ &\leq ||L|| \sup_{\substack{x\in[0,1] \\ U\in[0,\infty]}} |x^u| \leq ||L|| < \infty \end{aligned}$$

onde $||L||$ é a norma do funcional linear em questão.

Observe que a função $f(z)$ eq. (13) se anula no conjunto $z \in \{\lambda_n\}$ pela hipótese eq. (11). Definamos a função no Disco Unitário

$$\begin{aligned} D(0,1) &= \{z| \ |z| < 1\} \\ g(z) &= f\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

A função $g(z)$ é holomorfa no Disco Unitário $D(0,1)$ nos pontos $\alpha_n = \lambda_n - 1/\lambda_n + 1$. Por um teorema (teorema 15.23 - [2]) da teoria das Funções de Variáveis Complexas, caso $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - (\alpha_n)) = \infty$, então a função $g(z)$ é identicamente nula e assim o mesmo acontecendo para $f(z)$. Observando que a condição de divergência acima é equivalente a condição $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = +\infty$. Temos então que não existe tal funcional L e assim a validade do enunciado do Teorema 2. Observe que a extensão ao caso R^n é imediata.

Um importante ponto a ser ressaltado no estudo acima apresentado é que o sub-espaço $\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_n}, \cdots\}$ será uma sub-álgebra densa de $C([0,1], R)$ se o conjunto dos inteiros $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots\}$ satisfazer sempre a condição: Dados p e q inteiros positivos, existirá sempre s tal que

$$\lambda_p + \lambda_q = \lambda_s \tag{15}$$

(caso $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n = +\infty$).

A assertativa acima será sempre verdade se os $\{\lambda_n\}$ pertencerem a um reticulado, isto é $\lambda_n = \ell_1^{(n)} p_1 + \cdots \ell_k^{(n)} p_k$ com $\{\ell_k^{(n)}\}$ variando nos inteiros e $\{p_1, \cdots, p_k\}$ sendo um conjunto de números primos fixos.

2 - O Teorema de Weirstrass para Polinômios de Variável Complexa

Outro importante teorema do tipo de Weirstrass é o seu análogo estabelecido para funções contínuas $F(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ aproximado por Polinômios de variavél complexa (Funções Analíticas). É importante ressaltar que caso $U(x,y)$ e $V(x,y)$ satisfaçam as equações de Cauchy-Rieman, $f(z)$ ela própria será uma função analítica na região em que estas equações de Caucly-Riemman são verificadas, e assim, pelo Teorema de Caucly teremos a validade do Teorema de Weirstrass neste caso analítico.

Temos, então, o seguinte resultado de aproximação por Polinômios Complexos em *uma variável* tipo do Teorema de Mergelyan ([2]) - Theorem 20.5).

Teorema 3 (Mergelyan restrito) - Seja K um conjunto compacto no Plano Complexo e *imagem analítica do Disco Fechado.* Suponhamos que f é uma Função Complexa Contínua em K e que seja holomorfa no *interior de* K Então $f(z)$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios de variável complexa z em K.

Demonstração: (caso particular em que o interior de K é conexo)

Suponhamos que K seja a imagem por uma aplicação holomorfa do Disco Fechado $\bar{D}(0,1)$ e que a fronteira do disco seja aplicada na fronteira de K, isto é, $K = \phi(\bar{D}(0,1))$ com $\phi(\partial\bar{D}(0,1) = \partial K$ (veja §2.9 – ref. [3]).

Neste caso, bastará aplicarmos a fórmula de Poisson para representar a função no interior de K pelos seus valores na fronteira deste conjunto

$$f(z) = f(\phi(w)) = F(w) = F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{i\bar{\theta}})P_r(\theta - \bar{\theta})d\bar{\theta} \tag{16}$$

onde

$$P_r(\theta - \bar{\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in(\theta-\bar{\theta})} = \frac{1-r^2}{1-2r(\theta-\bar{\theta})+r^2} \tag{17}$$

Substituindo a eq. (18) na eq. (17), veremos que os polinômios $\tilde{P}_n(z)$ para $|z| < 1$, isto é:

$$P_n(w) = \sum_{n=0}^{N} C_n(w)^m \qquad C_n = \frac{1}{2n}\int_0^{2\pi} F(e^{i\bar{\theta}})e^{-in\bar{\theta}}d\bar{\theta} \tag{18.a}$$

definimos

$$\tilde{P}_n(z) = \sum_{n=0}^{N} C_n \left[\sum_{\ell=0}^{K} \frac{\phi^{(\ell)}(0)}{\ell!} z^{\ell} \right]^n \tag{18.b}$$

convergem uniformemente nas partes compactas do $D(0,1)$ (ou K), desde que as integrais C_{-n} são nulas pela hipótese de analiticidade no interior de K. A convergência uniforme na fronteira é consequência da forma explícita do núcleo de Poisson eq. (18) ([4]).

No caso do interior de K ser multiplamente conexo ou totalmente disconexo acreditamos que raciocínio análogo poderá ser implementado (parágrafo 51 - [5]).

Uma demonstração mais geral baseada no teorema extensão de Tietze pode ser encontrada na ref. [2] - Chapter 20.

A generalização destes teoremas a funções de várias variáveis complexas ainda não foi sistematizada (Teorema de Müntz-Szazt e Teoremas do tipo Mergelyan).

O último resultado a ser exposto neste capítulo é o elegante Teorema de Bürman-Lagrange ([3]).

Teorema 4 - Seja Ω uma região de analiticidade para uma função $w(z)$ unívoca e a $\in \Omega$, um ponto que é um zero de ordem 1 desta função. Então existirá uma vizinhança $V(a)$ tal que a Álgebra das Funções Analíticas em $V(a)$ é gerada pelos polinômios na variável $w(z)$ (Série de Taylor Generalizada).

Demonstração: Consideremos um contorno fechado C_a, cujo interior contém o ponto a como único zero de $w(z)$ e estudemos a integral abaixo para uma função analítica $f(z)$ no interior de C_a

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{f(\zeta) \cdot w'(\zeta)}{w(\zeta) - w(z)}\, d\zeta \tag{19}$$

Em virtude das hipóteses feitas sobre $w(z)$, podemos calcular a integral (20) pelo método dos resíduos (polo simples em $z = \zeta$, já que a função é unívoca)

$$I(z) = f(z) \tag{20}$$

Escolhamos a vizinhança $V(a)$ tal que $|w(z)/w(\zeta)| \leq q < 1$ para $\zeta \in C_a$.

Podemos, então, desenvolver o integrando em uma série uniformemente de funções analíticas em $V(a)$

$$\frac{f(\zeta)\cdot w'(\zeta)}{w(\zeta)}\left(\frac{1}{1-\frac{w(z)}{w(\zeta)}}\right)=$$
$$=\frac{f(\zeta)\cdot w'(\zeta)}{w(\zeta)}\left\{1+\frac{w(z)}{w(\zeta)}+\left(\frac{w(z)}{w(\zeta)}\right)^{n}+\cdots\right\} \tag{21}$$

Substituindo a eq. (21) e eq. (19), obtemos o nosso resultado

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(w(z))^n \tag{22}$$

com

$$d_n=\frac{1}{n!}\lim_{z\to w}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{f(z)w'(z)(z-a)^{n+1}}{w^{n+1}(z)}\right\} \tag{23}$$

Referências para o Capítulo 1

1) Lorentz, G.C. – *"Bernstein Polynomials"*, University of Toronto Press, Toronto, 1953.

2) Walter Rudin – *"Real and Complex Analysis"* – Tata McGraw-Hill (1977).

3) M. Lovrenntiev et B. Chabat – *"Methods de La Théorique des Fonctions d'une Variable Complexe"* – Editions MIR – Moscow – 1972.

4) Hoffman – *"Banach Spaces of Analytic Functions"* – Prentice-Hall Series in Modern Analysis – 1962.

5) Lars V. Ahlfors – *"Complex Analysis"* – Mc Graw-Hill Int. Editions – 1979.

Capítulo 2 – O Teorema Abstrato de Stone-Weirstrass

Introdução

Neste capítulo, apresentaremos o Teorema Central da Teoria de Aproximação em sua forma topológica.

Consideremos X um Espaço de Hausdorff *Compacto* não trivial e $C(X,R)$ o Espaço de Banach com a norma do supremo formado pelas funções contínuas reais. Consideremos um sub-conjunto $LcC(X,R)$ satisfazendo as seguintes condições . Se $f \in L$ e $g \in L$, então

$$(f \vee g) = \frac{f+y+(f-g)}{2} \text{ e } (f \wedge g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

pertence a L. Suponhamos que L separa pontos, isto é: Se x e y são pontos distintos de X e a e b números reais arbitrários, então existe uma função f e L tal que $f(x) = a$ e $f(y) = b$.

Teorema 1 - (Stone) O fecho de um conjunto L na topologia da convergência uniforme com as propriedades acima, coincide com todo o Espaço $C(X,R)$.

Demonstração: Seja então $f \in C(X,R)$ e $\varepsilon > 0$ e $x \in X$ fixo. Seja $y \neq x$. Pelas nossas hipóteses, existe uma função $F_y \in L$ tal que $F_y(x) = f(x)$ e $F_y(y) = f(y)$. Consideremos um conjunto aberto $G_y = \{z \in X : F_y(z) < f(z) + \varepsilon\}$. Deste modo $X \subset \bigcup_{\substack{y \in X \\ y \neq x}} G_y$ (desde que $x \in G_y$ por construção). Como X é compacto, existe uma sub-cobertura finita de $X \subset \{G_{y_1}, \cdots, G_{y_n}\}$. A função $g_x = F_{y_1} \wedge \cdots \wedge F_{y_n}$ satisfaz as seguintes propriedades

$$g_x(x) = f(x) \quad \text{e} \quad g_x(z) < f(z) + \varepsilon \quad \text{para} \quad z \in X$$

Considerando agora o conjunto aberto $H_x = \{z : y_x(z) > f(z) - \varepsilon\}$ definido pela função contínua anteriormente obtida, obteremos uma função $g = g_{x_1} \vee \cdot \vee g_{x_m}$ em L tal que $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$ para todos os pontos z em X. Logo $f(z)$ é o limite uniforme de uma sequência de funções em L. Como L, é fechado temos o resultado do Teorema 1.

Teorema 2 – Seja X um Espaço Topológico Arbitrário. Então toda sub-Álgebra fechada de $C(X, R)$ é um sub-conjunto L de $C(X, R)$ satisfazendo as propriedades do Teorema 1.

Demonstração: Seja A uma sub-álgebra fechada de $C(X, R)$. Devemos, então, mostrar que se $f \in A$, então $|f| \in A$. Seja então $\varepsilon > 0$ dado. Desde que $|t|$ é uma função contínua no intervalo $[-\|f\|, +\|f\|]$ existirá um polinômio $\bar{p}(t)$ com a propriedade que $\sup\limits_{t\in[-\|f\|,+\|f\|]} \||t| - \bar{p}(t)| < \varepsilon/2$. Mas A é uma álgebra e, assim, $\sup\limits_{x\in X} \||f(x)| - \bar{p}(f(x))| < \varepsilon$. Concluimos, então, que $|f| \in A$ já que $\bar{p}(f) \in A$ e A é fechada.

Teorema 3 – (Teorema de Stone) – Seja X um Espaço de Hausdorff Compacto e A uma sub-álgebra fechada de $C(X, R)$ que separa pontos em X e que contém as funções constantes. Então $A = C(X, R)$.

Apliquemos o resultado do Teorema 3 a seguinte construção de Funções de Infinitas Variáveis a ser utilizado no Capítulo 3 da presente nota. Seja X um Espaço Compacto $X^\infty = \prod\limits_{x\in A} X_\alpha$, o Espaço - Produto na Topologia de Tychnoff que também é compacto. Consideremos $\wedge_F$ o conjunto dos sub-conjuntos $\wedge^{FIN}$ do conjunto índice A. Observemos que $C(\prod\limits_{\alpha\in\wedge^{FIN}} X^\alpha, R)$ pode ser identificado com uma sub-algebra de $C(\prod\limits_{x\in\wedge} X^\alpha, R)$ via a seguinte identificação. Seja $\hat{\prod}_{\Lambda^{FIN}} : \prod\limits_{x\in A} X^\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in\wedge^{FIN}} X^\alpha$, a projeção do Espaço $\prod\limits_{x\in A} X^\alpha$ no Espaço $\prod\limits_{\alpha\in\wedge^{FIN}} X^\alpha$. Para cada $\phi \in C(\prod\limits_{\alpha\in\Lambda^{FIN}} X^\alpha, R)$ podemos identificar uma função de finita variáveis em $C(\prod\limits_{\alpha\in\wedge} X^\alpha, R)$ via a relação

$$\phi \mapsto \phi 0 \hat{\prod}_{\Lambda^{FIN}} \tag{24}$$

Via esta identificação o conjunto abaixo é uma sub-álgebra separante, fechada e contendo a identidade

$$\overline{\bigcup_{\Lambda^{FIN} C \Lambda} C\left(\prod_{\alpha\in\Lambda^{FIN}} X^\alpha, R\right)} \tag{25}$$

Logo pelo Teorema de Stone-Weirstrass

$$C(X^\infty, R) = \overline{\bigcup_{\Lambda^{FIN} C \Lambda} C\left(\prod_{\alpha\in\wedge^{FIN}} X^\alpha, R\right)} \tag{26}$$

Neste ponto podemos generalizar ao caso complexo os teoremas acima demonstrados.

Teorema 4 (Stone Complexo) - Seja X um Espaço Compacto e A uma sub-álgebra separante de $C(X, ?)$ e suponhamos que para toda função $f \in A$, *a complexa conjulgada* $\bar{f}$ também pertença a A. Então o fecho de A é $C(X, C)$

Demonstração: As funções reais Real $f = \frac{1}{2}(\ell + \bar{f})$ e $Imf = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$ pertencem a Real (A). Dada uma função $g \in C(X, C)$, $\|g - (f_1 + if_2)\| < \varepsilon$, já que $Realg$ e Img pertencem a $C(X, R)$ com f_1 e f_2 pertencentes a Real (A) (a sub-algebra de A formado pelas funções contínuas e X a valores reais).

Um exemplo interessante e relacionado ao Teorema (Müntz-Szäsz) é aquele relacionado a álgebra gerado por uma função positiva e separante $f : X \to R$ e as constantes. Temos, então o seguinte teorema Generalizado de Müntz-Szäsz devido a este autor.

Teorema de Müntz-Szäsz Abstrato 5 – Suponhamos que a sequência de inteiro positivos $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots\}$ seja tal que $\sum 1/\lambda = +\infty_n$. Então o Sub-Espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{1, f(x)^{\lambda_1}, \cdots (f(x))^{\lambda_n} \cdots\}$ aproxima uniformemente qualquer função $f \in C(X, R)$.

A demonstração é a mesam do Teorema 2 do capítulo usando o fato de que $\sup_{x \in X} |f(x)| \leq M < \infty$ e que $L(z\ell g f(x))$ continua a ser uma função analítica no semi-plano direito.

No caso em que X é uma variedade compacta de dimensão n e $f(x)$ um difeomorfismo de X em um aberto do R^n, este teorema poderá ter interessantes aplicações geométricas topológicas.

Um resultado abstrato importante do Teorema 2 capítulo 1 de Müntz-Szäsz será agora apresentado. Para esta apresentação precisaremos do seguinte lema ([3]) o qual *não necessite do Teorema de Stone-Weirstrass para a sua demonstração.*

Lema (Nachbin) – Seja $X = \prod_{\alpha \in \wedge} [a_\alpha, b_\alpha]$ o espaço-produto de intervalos compactos. O sub conjunto de $C(X, R)$ de todas as funções da forma $\phi 0 \hat{\prod}_{\wedge^{FIN}}$, onde $\hat{\prod}_{\wedge^{FIN}}$ denota a projeção natural de X sobre $\prod_{\alpha \in \wedge_{FIN}} [a_\alpha, b_\alpha]$, é denso em $C(X, R)$.

Deste modo, considerando o teorema de Müntz-Szäsz aplicado a cada sub-espaço de funções de finita variáveis $\phi 0 \hat{\prod}_{\wedge^{FIN}}$ em $C(X, R)$, obteremos uma versão mais fraca do teorema de aproximação por polinômio para uma dada função de $C(X, R)$. No caso de X ser um Espaço completamente regular abstrato podemos transferir a análise acima para o seu compatificado de Stone-Cehc ([3]).

Referências

1) G.F. Simons – *"Introduction to Topology and Modern Analysis"*, Mc Graw Hill Kogakusha Ltda, (1977).

2) Stone, M.H. – *"A Generalized Weirstrass Approximation Theorem"*, vol. 1, Mathematical Association of America, 1962.

3) Nachbin, Leopoldo – *"Elements of Approximation Theory"*, Notas de Matemática, IMPA, $n^{\underline{o}}$ 33 (1965).

Capítulo 3 – Uma Transformada de Fourier em Espaços Vetoriais de Dimensão Infinita

Introdução: Um dos mais importantes métodos na Física Quântica dos Campos é a construção de Transformadas de Fourier em Espaços Vetoriais de Dimensão Algébrica Infinita ([1], [2], [3]) e neste capítulo será exposta uma teoria destas transformadas devidas ao autor.

1 – O Teorema de Kolmogorov-Riesz-Nelson em Espaços Produtos

Seja $\{L_A\}_{A\in A^{FIN}}$ uma *família uniformemente limitada* de Funcionais Lineares Positivos nos Espaços de Funções de Finita Variáveis do Cap. 2. Suponhamos que $\{L_A\}_{A\in\wedge^{FIN}}$ forma uma família "encaixante" de funcionais, isto é, se $A^{(1)}\subset A^{(2)}$, com $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$ pertencentes a $\wedge^{FIN}$, teremos que

$$L_{A^{(2)}}(f\cdot\prod_{A^{(1)}}^{A^{(1)}})=L_{A^{(1)}}(f)\quad\text{com}\quad f\in C(\prod_{\alpha\in A^{(1)}}X^\alpha,R),$$

onde a projeção

$$\prod_{A^{(2)}}^{A^{(1)}}:\prod_{\alpha\in A^{(2)}}X^\alpha\to\prod_{\alpha\in A^{(1)}}X^\alpha$$

Temos então que existe um *único funcional linear positivo* no Espaço de Funções de Infinitas Variáveis $C(\prod_{\alpha\in A}X^\alpha,R)$ que coincide com cada $L_{A^{(k)}}(A^{(k)}\in A^{FIN})$ no sub-espaço $C(\prod_{\alpha\in A^{(k)}}X^\alpha,R)$, por um simples argumento de densidade utilizando a eq. (26) do Capítulo 2.

Por uma aplicação do Teorema de Representação de Riesz apêndice 1 desta nota existirá uma medida contendo os Borelianos de $X^\infty=\prod_{\alpha\in A}X^\alpha[(d^\infty\mu)]$ no Espaço Produto X^∞ e representando a ação do funcional linear positivo L^∞ em $C(X^\infty,R)$

$$L^\infty(f(x^\infty))=\int_{X^\infty}f(x^\infty)\cdot d^\infty\mu((x^\infty))\tag{27}$$

e tal que a restrição de tal medida a qualquer espaço produto $\prod_{\alpha\in A}X^\alpha$ coincide com aquela medida: associada ao funcional $L_{A^{(k)}}$ da família considerada acima, isto é

$$L^\infty(f(\prod_A^{A(k)}))=L_{A^{(k)}}(f)\tag{28}$$

onde f é uma função em $C(\prod_{\alpha\in A^{(k)}}X^\infty,R)$.

Temos, agora, o Teorema Principal deste capítulo ([1]).

Teorema – Seja $f:E\to R$, uma função real definida em todo um Espaço Vetorial E satisfazendo as seguintes propriedades:

a) $f(0) = 1$

b) A restrição de f a qualquer sub-espaço vetorial de dimensão finita de E é a Transformada de Fourier de uma função contínua de *suporte compacto.*

Então existirá uma medida $d\mu(h)$ no Espaço dos Funcionais Lineares de E munidos da topologia da convergência pontual e denotado por E^{alg} (Dual Algébrico de E) tal que para qualquer $v \in E$

$$f(v) = \int_{E^{alg}} exp(ih(v))d\mu(h) \tag{29}$$

Demonstração: Seja $\{\hat{e}_\lambda\}_{\lambda \in A}$ uma base vetorial (Hamel) de E e $E^{(N)}$ um dado sub-espaço de dimensão finita N. Note que $dimE$ = cardinalidade de A. Pela hipótese do Teorema, f restrita ao sub-espaço $E^{(N)}$ é dada pela Transformada de Fourier

$$f\left(\sum_{e=1}^{N} \phi_{p_e} \hat{e}_{p_e}\right) = \int_{\left(\prod_{\lambda \in \{p_1, \cdots, p_N\}}\right)} (dk_{p_1} \cdots dk_{p_n}) \hat{e}(k_{p_1}, \cdots, k_{p_N}) \ exp \ i(\sum_{e=1}^{N} a_{p_e} k_{p_e}) \tag{30}$$

com $\hat{e}(k_{p_1}, \cdots, k_{p_n})$ de suporte compacto em $C(R^N, R)$ observemos que se $E^{(M)} C \ E^{(N)}$, então a restrição a $E^{(M)}$ da restrição de f a $E^{(N)}$ coincide com a restrição de f a $E^{(M)}$, isto é

$$\int_{\prod_{\lambda \in \{p_1, \cdots, p_N\}} R^\lambda} dk_{p_s} \cdots dk_{p_n} \hat{e}(k_{p_1}, \cdots, k_{p_n}) = \hat{e}(k_{p_1}, \cdots, \hat{k}_{p_{s-1}}) \tag{31}$$

para qualquer $1 \leq s < N$ já que trivialmente

$$f\left(\sum_{\ell=1}^{N} a_{p_e} \hat{e}_{p_e}\right) = f\left(\sum_{\ell=1}^{N} a_{p_e} \hat{e}_{p_e} + \sum_{\ell=N+1}^{M} O \cdot \hat{e}_{p_e}\right) \tag{32}$$

Consideremos a Família de Funcionais Lineares definidas pelas funções $\hat{\phi}(k_{p_1}, \cdots, k_{p_N})$ para cada sub-conjunto finito $\{p_1, \cdots, p_N\}$ do conjunto indexante da Base de Hamel A do Espaço E

$$L_{\{p_1, \cdots, p_N\}}(f) = \int_{\prod_{\alpha \in \{p_1, \cdots, p_N\}} (R^w)^\alpha} f(k_{p_1}, \cdots, k_{p_N}) \ , \ \hat{e}(k_{p_1}, \cdots, k_{p_N})(dk_{p_1} \ dk_{p_N}) \tag{33}$$

onde os funcionais lineares tem como domínio o Espaço Produto Compactificado de Alexandrov, com w o ponto de compactificação de R, já que $\hat{\phi}(k_{p_1}, \cdots, k_{p_N})$ são funções de suporte compacto por hipótese e, portanto faz sentido considerar na eq. (31) estes Domínions Espaços Compactos. Pela eq. (27), existirá uma medida definida em uma álgebra *contendo* os Borelianos em $\prod_{\alpha\in A}(R^w)^\alpha$ denotado por $d^\infty\bar{\mu}$ (veja o apêndice 1).

Observando que dado um $v\in E$ arbitrário, sempre existirá um número *finito* de elementos de $\{\hat{e}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ gerando v e que para cada ponto $\bar{h}\in\prod_{\alpha\in A}(R^w)^\alpha$ existirá um *único* ponto $h\in\prod_{\alpha\in A}R^\alpha$ e, ainda, que a medida $d^\infty\bar{\mu}$ induz uma medida $d^\infty\mu$ em $\prod_{\alpha\in A}R^\alpha$, teremos que

$$f(v)=\int_{\prod_{\alpha\in A}R^\alpha} e^{i(h(v))}d\mu(h) \tag{34}$$

O resultado do Teorema será consequência da representação do Espaço dos Funcionais Lineares Algébricos como o Espaço Produto $\prod_{\lambda\in A}R^\lambda$, com A o conjunto indexante da Base de Hamel de E.

Finalizando este capítulo é conveniente ressaltar que a utilização direta do teorema acima demonstrado é exatamente difícil devido a não existência de um algoritmo exibindo uma Base de Hamel em Espaços de Funções ou de Distribuições. A utilização de tal Teorema é sempre feita em conexão via o uso de teoremas do tipo Minlos-Dao-Xing ([1], [2], [3]).

Referências

1) Xia Dao Xing – *"Measure and Integration Theory an Infinite Dimension Spaces"*, Academic Press, 1972.

2) L. Schwartz – *"Randon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures"*, Tata Institute, Oxford University Press, 1973.

3) Luiz Carlos C.L. Botelho – *"Domains of Bosonic Functional Integrals"*, CBPF-NF-052/98, July 1998.

Apêndice A – Um Teorema de Representação para Funcionais Lineares Contínuos em $C(X,R)$ com X sendo um Espaço Topológico Métrico Compacto.

Neste apêndice apresentaremos uma nova representação devida a este autor de uma versão do famoso Teorema de Representação de Riesz para funcionais lineares atuando em Espaço de Funções Contínuas no R^N usando o Teorema de Weirstrass. Exporemos então, a seguinte versão do Teorema de Representação de Riesz para o Espaço $C(R^N,R)$.

Teorema 1 – Seja L um funcional linear positivo contínuo no Espaço das funções contínuas no R^N com a norma do supremo $C(R^N,R)$, e tal que $L(e^{i(\sum_{j=1}^{N} z_1 x_j)}) = f(z_1,\cdots,z_N)$ seja uma função pertencente a $L^1(R^N,d^N z)$. Então, existe uma única função $\phi_L(x_1,\cdots,x_N)$ se anulando no infinito e representando L na forma do Teorema de Riesz-Markov

$$L(g(x_1,\cdots,x_N)) = \int_{R^N} g(x_1,\cdots,x_N)\phi_L(x_1,\cdots,x_N)d^N x \tag{1}$$

Demonstração: – Por hipótese $L\left(exp\left(i\sum_{j=1}^{N} z_j x_j\right)\right)$ pertence a $L^1(R^N,d^N z)$ e, assim, por uma aplicação do Teorema de Fourier

$$L(e^{i(\sum_{j=1}^{N} z_1 x_j)}) = f^{(L)}(z_1,\cdots,z_N) = \int_{R^N} exp\left(+i\sum_{j=1}^{N} p_j z_j\right)\tilde{f}^{(L)}(p_1,\cdots,p_n)d^N p \tag{2}$$

onde $\tilde{f}^{(L)}(p_1,\cdots,p_n)\in C_0(R^N,R)$ (funções contínuas que se anulam no infinito).

Desde que o Funcional Linear L é *contínuo* por hipótese, teremos a diferenciabilidade da função $f^{(L)}(z_1,\cdots,z_N)$ com $M=\ell_1+\cdots+\ell_N$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^M}{\partial z_1^{\ell_1}\cdots\partial z_N^{\ell_N}} f^{(L)}(z_1,\cdots,z_N) &= \lim_{\substack{h\rightarrow\\ 0h\in R^N}} \frac{1}{|h|}\{L(e^{i\sum_{j=1}^{N}(z_j+h_j)x_j}) \\ &-L(e^{i\sum_{j=1}^{N} z_j x_j})\} = L\left\{\frac{\partial^M}{\partial z_1^{\ell_1}\cdots\partial z_N^{\ell_N}}\, exp\left(i\sum_{j=1}^{N}(z_j+h_j)x_j\right)\right\} = \\ &L\left\{(ix_j)^{\ell_1}\cdots(ix_N)^{\ell_N}\, exp\left(i\sum_{j=1}^{N} z_j x_j\right)\right\}\end{aligned} \tag{3}$$

assim para $z_j \to 0$, obteremos a ação do Funcional Linear nso Polinômios $P(x_1, \cdots, x_N)$ em R^N

$$L[(x_1^{\ell_1}) \cdots (x_N^{\ell_N})] = \int_{R^N} (p_1)^{\ell_1} \cdots (p_N)^{\ell_N} \ \tilde{f}^{(L)}(p_1, \cdots, p_N)(dp_1 \cdots dp_N) \tag{4}$$

Pelo Teorema de Weirstrass do Capítulo 1 e usando a hipótese de continuidade do Funcional Linear L, obtemos a representação para funções contínuas em R^N

$$L(g(x_1, \cdots, x_N)) = \int_{R^N} g(p_1, \cdots, p_N) \tilde{f}^{(L)}(p_1, \cdots, p_N)(dp_1 \cdots dp_N) \tag{5}$$

A versão abstrata utilizada no texto é a seguinte (Teorema 2.14 - ref. [2] do capítulo 1).

Teorema de Representação de Riesz – Seja X um Espaço de Hausdorff Localmente Compacto e L um funcional linear positivo no Espaço $C_c(X)$ (funções contínuas de suporte compacto). Então existe uma σ-álgebra em X contendo os Borelianos de X e uma medida $d\mu$ em X positiva representando L no seguinte sentido

$$L(f) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

Vamos, agora, estudar uma versão concreta deste teorema para o caso de X ser um Espaço Métrico Compacto e devida a este autor.

Seja então, $\delta > 0$ e $\{V_\delta^{(n)},\ 1 \leq n \leq N(\delta)\}$ uma cobertura finita do Espaço X por abertos $V_\delta^{(n)}$ de diâmetro δ. Como X é compacto, existirá um conjunto de funções $\{\phi_\ell^{(\sigma)}(x), \ell = 1, \cdots, N_{(\sigma)}\}$ com $0 \leq \phi_\ell^{(\delta)}(x) \leq 1$ e tal que para qualquer $x \in X$ temos que $\sum_{\ell=1}^{\tilde{N}(\sigma)} \phi_\ell^{(\sigma)}(x) = 1$ e o suporte de cada função $\phi_\ell^{(\delta)}(x)$ está contido no aberto $V_\delta^{(\ell)}$ (a chamada partição da unidade subordinada a cobertura $\{V_\delta^{(n)},\ 1 \leq n \leq N(\delta))$. Consideremos o seguinte sub-álgebra de $C(X,R)$, $A^{(\sigma)} = \{f \in C(X,R)$ tal que exista uma $g \in C([0,1]^{N(\sigma)}, R)$ com $f(x) = g(\phi_1^{(\delta)}(x), \cdots, \phi_{N(\delta)}^{(\delta)})$. Consideremos $\delta = 1/p$ para cada p-positivo e a Álgebra União

$$A^\infty = \bigcup_{p=1}^{\infty} A^{(1/p)} \tag{6}$$

Vamos agora, aplicar o Teorema de Stone do Capítulo II ao fecho da sub-álgebra acima na topologia da convergência uniforme.

Em primeiro lugar, a sub-álgebra eq. (6) separa pontos, já que dado $\bar{x}$ e $\bar{y}$ em X com $d(\bar{x},\bar{y}) = \varepsilon$, existirá um $P(\varepsilon)$ tal que $1/p(\varepsilon) < \varepsilon$ tal que x e y pertencem a abertos disjuntos da cobertura de X associado, denotadas por $V_\varepsilon^{(k'(\varepsilon))}$ e $V_\varepsilon^{(k''(\varepsilon))}$. Obviamente a função

$$g(\phi^{(\varepsilon)}_{k'(\varepsilon)}(x), \phi^{(\varepsilon)}_{k''(\varepsilon)}(x)) = \frac{\phi^{(\varepsilon)}_{k'(\varepsilon)}(x)}{\phi^{(\varepsilon)}_{k'(\varepsilon)}(\bar{x})} + \frac{\phi^{(\varepsilon)}_{k''(\varepsilon)}(x)}{\phi^{(\varepsilon)}_{k''(\varepsilon)}(\bar{y})} \tag{7}$$

pertence a $A^{(1/p(\varepsilon)}$ e separa os pontos dados $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

As constantes estão na Álgebra A^∞, já que por construção, a função $g(x) = \sum_{\ell=1}^{N(\sigma)} \phi_\ell^{(\ell)}(x) \equiv 1$. Pelo Teorema de Stone

$$\overline{A^{(\infty)}} = C(X,R) \tag{8}$$

Seja então, L um funcional linear Positivo em $C(X,R)$ e $f(x)$ uma dada função neste espaço. Pelo teorema anterior, existirá uma sequência de funções $g^{(N)}(x_1,\cdots,x_{_N}) \in C([0,1]^N,R)$ tal que

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} g^{(N)}(\phi_1^{\delta(N)}(x),\cdots,\phi_N^{(\delta)}(x))$$

uniformemente em X. Deste modo, devido a continuidade de L, teremos que

$$\begin{aligned} L(f(x)) &= \lim_{n\to\infty} L(g^{(N)}(\phi_1^{\delta(N)}(x),\cdots,\phi_N^{(\delta)}(x)) \\ &\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^N} g^{(N)}(p_1,\cdots,p_{_N})\tilde{\ell}^{(L)}_{(\delta(N))}(p_1,\cdots,p_{_N})(dp_1\cdots dp_{_N}) \end{aligned} \tag{9}$$

onde utilizamos o teorema anterior eq. (5) para representar concretamente a ação do Funcional Abstrato L na sub-álgebra $A^{\delta(N)}$ por integrais no R^N.

Este é o resultado citado anteriormente representando a ação de um funcional linear positivo (contínuo) em $C(X,R)$ por Funcionais em Espaço de Funções no R^N.

Temos, a seguinte conjectura, ainda não demonstrada de que, a medida produto será uma medida cilíndrica usual como no cap. 3.

Teorema – Existe uma medida Boreliana no Espaço Produto $\prod_{k=1}^{\infty}[0,1^k$, formalmente dada por

$$d^\infty\mu(p_1,p_2,p_N,\cdots) = \lim_{N\to\infty} \tilde{e}^{(L)}_{\delta(N)}(p_1,\cdots,p_N)$$

tal que

$$L(f(x)) = \int_{\prod_{k=1}^{\infty}[0,1]^k} g^{(\infty)}(p_1,p_2,p_N\cdots) = d^\infty\mu(p_1,p_2,p_N,\cdots) \tag{10}$$

com

$$g^{(\infty)}(p_1,\cdots,p_\infty) = \lim_{N\to\infty} g^{(N)}(p_1,\cdots,p_N) \tag{11}$$

O teorema abstrato de representação de Riesz em Espaço completamente regulares, uma demonstração construtiva.

Seja X um espaço topológico *abstrato* completamente regular. Sabemos que X é homeomorfo a um sub-espaço compacto $X^\infty \subset [0,1]^J$, onde J denota o conjunto indexante de todas as funções reais contínuas em X com valores em $[0,1]$. Pelo teorema de Banach Stone, o espaço $C(X)$ será isomorfo ao espaço $C(X^\infty$. Consideramos um funcional linear contínuo positivo de norma 1 em $C^*(X)$ denotado por L. Sabemos que L induz um funcional linear positivo contínuo L^∞ em $C(X^\infty)$, o qual é definido pela relação abaixo

$$L^\infty(f(x^\infty) \equiv L(f\cdot h^{-1}) \tag{12}$$

onde $h : X \to X^\infty$ é o homeomorfismo acima citado e $f \in C(X)$.

Pelo teorema de Habin-Banach $L^{(\infty)}$ admite uma extensão (não única!) a *um funcional de mesma massa* e positivo a $C([0,1]^J]$ e denotado no que segue símbolo $L^{(\infty)}_{(J)}$. Como $L^{(\infty)}_{(J)}$ restrito a cada sub-espaço $C([0,1]^{J_{finito}})$ pode ser representado por uma medida satisfazendo as condições do teorema de representação de Riesz não-abstrato *teorema 1-Apêndice A*; e que estas medidas formam uma sequência encaixante, teremos o resultado que podemos representar $L^{(\infty)}_{(J)}$ por uma medida-produto $d^{(\infty)}\mu(x^\infty)$ em $[0,1]^J$ satisfazendo as condições visuais do teorema de representação de Riesz. Observando que a restrição desta medida a $X^{(\infty)} \cap [0,1]^J$ é não trivial, já que estes conjuntos tem a mesma medida $(\|L^{(\infty)}_J\| = \|L^{(\infty)}\|)$, esta mesma medida induz uma medida em X e representando o funcional abstrato inicialmente considerado $L^{\subset C^*(X)}$, isto é:

$$L(f) = \int_X f(x) d\nu(x) \equiv \int_{X^{(\infty)} \Lambda [0,1]^J} (f \cdot h^{-1}(x^\infty) d^{(\infty)} \mu(x^\infty) \tag{13}$$

ou simbolicamente

$$d\nu(x) = d^{(\infty)} \mu(h^{-1}) \tag{14}$$

e a σ-álgebra em X, onde é definido tal medida é a imagem inversa pelo homeomorfismo h da σ-álgebra gerada pelos cilindros em $[0,1]$.

Note que o homeomorfismo $h : X \to X^\infty$ é definido pela relação

$$x \to h(\tau) = \{f(x)\}_{f \in C(X,[0,1] \equiv J} \tag{15}$$

e que

$$\int_X d\nu(x) = \|L\| = 1 \tag{16}$$

Agradecimentos – O autor agradece a Professora Titular do I.M.-USP Ofélia Alas pelas importantes discussões sobre os Tópicos de Topologia Geral utilizados nestas pesquisas e aos Professores Jacob Palis e Carlos Isnard do I.M.P.A. – CNPq pela hospitalidade durante a visita deste autor ao I.M.P.A. – 1996.

Apêndice B – O Teorema de Weirstrass para Funções Matriciais

Seja $T : C^N \to C^N$, um operador linear. Sabemos por uma aplicação imediata do teorema de Cayley-Hamilton que sendo o seu polinômio característica associado conhecido

$$det(w^q - T) = w^N + a_{n-1}w^{N-1} + \cdots a_1 w + a_0 = p(w) \tag{1}$$

então a inversa do operador T tem a seguinte expressão explícita, caso T seja inversível

$$T^{-1} = -\frac{1}{a_0}\{T^{N-1} + a_{N-2}T^{N-2} + \cdots a_1) \tag{2}$$

e assim para z não pertecendo ao espectro de T (z sendo um número complexo imaginário puro), teremos que

$$(T - z\mathbb{1}\ )^{-1} = -\frac{1}{p(z)}[T^{N-1} + (a_{N_1} + z)T^{N-3} + (z^2 + a_{N-1}z + a_{N-2})T^{N-3} + \cdots a_1] \tag{3}$$

Por uma aplicação direta do cálculo espectral, *qualquer função integrável* $\phi(x)$ em $[-\|T\|, \|T\|]$ com o argumento sendo T será dada por:

$$\begin{aligned}
&\phi(T) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\mu|=||T||} d\mu \frac{\phi(\mu)}{(\mu\mathbb{1}\ - T)} = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\mu|=||T||} d\mu\ \phi(\mu)\left\{-\frac{1}{p(\mu)}\left[T^{N-1} + (a_{N-1} + \mu)T^{N-2}\right] + \right. \\
&\left. +((\mu)^2 + a_{N-1}(\mu) + a_{N-2})T^{N-3} + \cdots a_1\right\} \\
&= C_{N-1}(\phi)T^{N-1} + C_{N-2}(\phi)T^{N-2} + \cdots C_1(\phi)
\end{aligned} \tag{4}$$

Teremos, então, que o Espaço (vetorial) das funções $\sigma(T)$ definido pelas relações (com $0 \leq k \leq N-1$)

$$\oint_{|\mu|=||T||} \frac{\mu^k\phi(\mu)d\mu}{P(\mu)} < \infty \tag{5}$$

é de dimensão finita N e gerado pelos polinômios de grau $N-1$ na variável T.

Finalmente, observamos que recentemente, Ronaldo Rodrigues Silva (CBPF-NF-031/98 nota a ser publicada no Journal of Mathematical Physics) construiu um algorítmo para calcular os coeficientes do polinômio característico em termos do traço das potências de T.