Sobre a Teoria Quântica de Campos na Interpretação de Bohm-de Broglie

N. Pinto-Neto* e E. Sergio Santini†
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas,
Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Urca 22290-180 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

July 24, 2000

Neste trabalho estudamos algumas características da interpretação de Bohm-de Broglie em teoria de campos. Além de encontrarmos resultados interessantes para a teoria de campos, a saber, a prova da sua consistência geral e a quebra da invariância relativística para processos individuais, a metodologia desenvolvida aqui serve como introdução ao estudo da gravitação e cosmologia quânticas na interpretação de Bohm-de Broglie, veja [1] [2].

PACS numbers: 3.70+k, 03.65.Bz, 04.20.Gz

1 A Interpretação de Bohm-de Broglie

Historicamente a interpretação de Bohm-de Broglie surgiu para proporcionar uma descrição completa e causal de um fenômeno quântico, independentemente do ato de observação. Sabemos que nenhum experimento contradiz as previsões da formulação ortodoxa e que a concordância teoria-experimento se dá com grande precisão (como no caso da Eletrodinâmica Quântica) [3], Mas como a mecânica quântica ortodoxa prediz somente resultados de experimentos realizados com agregados estatísticos, ela não providencia uma descrição dos eventos individuais da experiência, que parecem acontecer ao acaso e dos quais são funções os fenômenos estatísticos. Resulta então um desafio construir uma teoria capaz de descrever os sistemas materiais individuais de forma causal, cada um deles seguindo sua lei de movimento, cujo comportamento em conjunto reproduza as previsões estatísticas da mecânica quântica. Assim, os registros no laboratório poderiam ser explicados como resultado de uma sequência de processos bem definidos ocorridos em sistemas que possuem propriedades que existem independentemente do ato da observação. Um modo de fazer isto foi construído por Louis de Broglie e David Bohm. Além dos artigos originais [4] e dos que se seguiram na literatura, já existe hoje o primeiro livro texto de mecânica quântica nesta interpretação [5].

Nesta seção vamos expor as principais caraterísticas da interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica, que serão úteis no nosso tratamento da teoria de campos. Mostraremos primeiro como esta interpretação se aplica ao caso de uma partícula descrita pela equação de Schrödinger e depois vamos obter, por analogia, a interpretação causal de uma teoria de campos no espaço-tempo plano.

Comecemos com a interpretação de Bohm-de Broglie para a equação de Schrödinger de uma partícula. Na representação de coordenadas, para uma partícula não relativística cujo hamiltoniano é $H = p^2/2m + V(x)$, a equação de Schrödinger é

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]\Psi(x,t). \qquad (1)$$

Podemos transformar esta equação diferencial sobre um campo complexo num par de equações diferenciais acopladas sobre campos reais, escrevendo $\Psi = A\exp(iS/\hbar)$, onde A e S são funções reais, e substituindo-a em (1). Obtemos as seguintes equações

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 A}{A} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \nabla\cdot\left(A^2\frac{\nabla S}{m}\right) = 0. \qquad (3)$$

Na interpretação de Copenhagen, a Eq. (3) é uma equação de continuidade para a densidade de probabilidade A^2 de encontrar a partícula na posição x e tempo t. Toda a informação física do sistema está contida em A^2, e a fase total S da função de onda é completamente irrelevante. Nesta interpretação nada é dito a respeito de S e sua equação de evolução (2). Mas suponhamos

*e-mail address: `nelsonpn@lafex.cbpf.br`
†e-mail address: `santini@lafex.cbpf.br`

que o termo $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 A}{A}$ não esteja presente na equação (2). Então podemos interpretar (2) e (3) como equações para um conjunto estatístico de partículas clássicas submetidas ao potencial clássico V satisfazendo a equação de Hamilton-Jacobi (2), cuja densidade de probabilidade de distribuição no espaço, A^2, verifica a equação de continuidade (3). $\nabla S(x,t)/m$ é o campo de velocidades $v(x,t)$ do conjunto de partículas. Quando o termo $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 A}{A}$, que chamaremos de potencial quântico, está presente, podemos ainda interpretar (2) como uma equação de Hamilton-Jacobi para o conjunto de partículas. Mas agora, as trajetórias não vão ser as clássicas, devido à presença do potencial quântico na (2).

A interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica esta baseada nas *duas* equações (2) e (3) do modo explicado acima, não só na última como a interpretaçào de Copenhagen. O ponto de partida é que a posição x e o momento p estão sempre bem definidos, sendo a partícula guiada por um novo campo: o campo quântico. Este campo Ψ satisfaz a equação de Schrödinger (1) a qual é equivalente às duas equações reais (2) e (3). A equação (2) é interpretada como uma equação tipo Hamilton-Jacobi para a partícula quântica submetida a um potencial externo, o qual é a soma do potencial clássico com o novo potencial quântico:

$$Q \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 A}{A}. \tag{4}$$

O efeito do campo Ψ sobre a trajetória da partícula se dá através do potencial quântico (4). Uma vez obtido Ψ ao resolver a equação de Schrödinger, podemos obter a trajetória da partícula, $x(t)$, integrando a equação diferencial $p = m\dot{x} = \nabla S(x,t)$, a qual é chamada de *relação guia* ou *relação de Bohm* (o ponto acima significa derivada temporal). Claro que vamos precisar conhecer a posição inicial da partícula para obter a trajetória não clássica $x(t)$, a partir desta equação diferencial. No entanto, nós não conhecemos a posição inicial da partícula pois não sabemos como medi-la sem perturbar o sistema (esta é a variavel escondida da teoria). Para estar de acordo com todos os experimentos quânticos, é preciso postular que, para um conjunto estatístico de partículas no mesmo campo quântico Ψ, a densidade de probabilidade de distribuição das posições iniciais x_0 é $P(x_0,t_0) = A^2(x_0, t = t_0)$. A equação (3) garante que $P(x,t) = A^2(x,t)$ para todo tempo. Deste modo, as previsões estatísticas da teoria quântica na interpretação de Bohm-de Broglie são exatamente as mesmas que na interpretação de Copenhaguen.[1]

Resulta interessante notar que o potencial quântico Q depende só da forma de Ψ, não do seu valor absoluto, como vemos da Eq.(4). Este fato coloca em evidência o caráter não local e contextual do potencial quântico[2]. Esta é uma caraterística necessária pois as desigualdades de Bell, junto com os experimentos de Aspect, mostram que, em geral, uma teoria quântica deve ser ou não local ou não ontológica. Dado que a interpretação de Bohm-de Broglie é ontológica, então ela deve ser não local. O potencial quântico não local e contextual causa os efeitos a quânticos. Ele não tem paralelo na fisica clássica.

A função A desempenha um papel duplo na interpretação de Bohm-de Broglie: fornece o potencial quântico e também a densidade de probabilidade de distribuição das posições, mas este último papel é secundário. Se tivermos algum modelo no qual a noção de probabilidade não se aplica, poderíamos ainda assim obter informação utilizando as relações guia. Neste caso, A^2 não precisa ser normalizável. A interpretação de Bohm-de Broglie não é *em essência*, uma interpretação probabilística. Resulta imediata sua aplicação a um sistema individual. O limite clássico pode se obter de uma forma muito simples. Só precisamos achar as condições segundo as quais $Q = 0$[3]. A questão de porque numa medida real nós observamos um colapso efetivo da função de onda é respondida notando que, numa medição, a função de onda se divide numa superposição de ramos que não se intersectam. Então a partícula (que na verdade representa o objeto observado mais o aparelho de medida macroscópico) vai entrar num destes ramos (em qual deles depende das condições iniciais) e será influenciada somente pelo potencial quântico que corresponde a este ramo particular, que é o unico não desprezivel na região onde a partícula realmente está. Os outros ramos vazios continuam existindo, mas eles não tem influência sobre a partícula medida nem sobre qualquer outra [5]. Existe um colapso efetivo mas não real. A equação de Schrödinger é sempre valida. Não é necessario que exista um domínio clássico fora do sistema quântico para poder explicar o proceso de medida, nem é crucial a existência de observadores ja que esta interpretação é objetiva.

É possivel aplicar um raciocínio similar no caso da teoria quântica de campos em espaço-tempo plano. Como exemplo, a equação de Schrödinger funcional para um campo quântico escalar é:

[1] Ja foi mostrado que sob situações caóticas típicas, dentro da interpretação de Bohm-de Broglie, uma distribuição de probabilidade $P \neq A^2$ deve rapidamente convergir ao valor $P = A^2$ [6, 7]. Neste caso, o postulado da probabilidade inicial não seria necessário, e poderiamos ter situações, em intervalos de tempo muito curtos, onde esta interpretação de Bohm-de Broglie modificada poderia diferir da interpretação de Copenhaguen.

[2] A não localidade de Q resulta evidente ao generalizarmos a interpretação causal para um sistema de muitas partículas.

[3] Seria interessante estudar a coneção entre este limite clássico bohmiano e o fenômeno de descoerência. Até onde sabemos, não foi feito nehum trabalho nesta direção, o qual poderia iluminar tanto a interpretação de Bohm-de Broglie quanto a comprensão do fenômeno da descoerência.

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\phi,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\int d^3x\left\{-\hbar^2\frac{\delta^2}{\delta\phi^2}+(\nabla\phi)^2+U(\phi)\right\}\Psi(\phi,t). \tag{5}$$

Escrevendo de novo o funcional de onda na forma polar $\Psi=A\exp(iS/\hbar)$, obtemos:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\int d^3x\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\delta S}{\delta\phi}\right)^2+(\nabla\phi)^2+U(\phi)\right]+\mathcal{Q}(\phi)\right\}=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t}+\int d^3x\frac{\delta}{\delta\phi}\left(A^2\frac{\delta S}{\delta\phi}\right)=0, \tag{7}$$

onde $\mathcal{Q}(\phi)=-\hbar^2\frac{1}{2A}\frac{\delta^2 A}{\delta\phi^2}$ é o correspondente potencial quântico (não regulado). A primeira equação é interpretada como uma equação de Hamilton-Jacobi que governa a evolução de certa configuração inicial de campo no tempo, a qual vai ser diferente da clássica devido a presença do potencial quântico. A relação guia será dada por:

$$\Pi_\phi=\dot{\phi}=\frac{\delta S}{\delta\phi}. \tag{8}$$

A segunda equação é a equação de continuidade para a densidade de probabilidade $A^2[\phi(x),t_0]$ de que a configuração de campo inicial a t_0 esteja dada por $\phi(x)$.

Um estudo detalhado da interpretação de Bohm-de Broglie na teoria quântica de campos pode ser encontrado na Ref. [8] para o caso da eletrodinâmica quântica.

2 Teoria de Campos Parametrizada

Uma característica essencial da Teoria da Relatividade Geral (TRG) é a existência dos vínculos super-hamiltoniano e super-momento, presentes, como sabemos, devido a invariância desta teoria sob transformações gerais de coordenadas [9].

É possível encontrar (ou simular) uma situação parecida em sistemas mecânicos com finitos graus de liberdade e tambem em teoria de campos no espaço-tempo plano, por meio de um processo conhecido como *parametrização* [9] [10]. Isto vai permitir construir a teoria de modo que os estados do campo estejam definidos numa hipersuperfície espacial geral. Deste modo, resulta manifesta a invariancia relativística do formalismo hamiltoniano. Ademais, esta forma parametrizada de se escrever a ação de campos no espaço-tempo plano facilitará a implementação da interpretação de Bohm-de Broglie em gravitação quântica, onde a ação é parametrizada de inicio. De fato, a TRG já é uma teoria parametrizada e até agora revelou-se impossível desparametrizá-la em geral no sentido de separar os graus de liberdade dinâmicos (genuínos) dos redundantes (cinemáticos). Na TRG, estamos forçados a usar variáveis redundantes como coordenadas canônicas e por isso aparecem os vínculos.

Concretamente, seja um campo escalar $\phi(X^\alpha)$ propagando-se num espaço-tempo plano de dimensão 4 com coordenadas minkowskianas $X^\alpha\equiv(T,X^i)$. Os indices gregos vão de 0 a 3 e os indices latinos de 1 a 3. Consideremos as coordenadas curvilíneas $x^\beta=(t,x^i)$ e seja a transformação:

$$X^\alpha=X^\alpha(x^\beta) \tag{9}$$

Deixando t fixo esta equação representa uma hipersuperfície com um sistema de coordenadas espaciais x^i definido sobre ela. Para diferentes valores do parâmetro t teremos uma família de hipersuperfícies rotuladas por t.

A ação dada em coordenadas minkowskianas é:

$$S=\int d^4X\mathcal{L}_o\left(\phi,\frac{\partial\phi}{\partial X^\alpha}\right) \tag{10}$$

onde $\mathcal{L}_o$ representa a densidade lagrangeana em coordenadas minkowskianas. A ação pode ser escrita nas coordenadas curvilíneas resultando em:

$$S=\int d^4xJ\mathcal{L}_o\left(\phi,\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{X^\alpha}\right)=\int d^4x\mathcal{L}\left(\phi,\phi_{,i},\dot{\phi},X^\alpha_{,i},\dot{X}^\alpha\right) \tag{11}$$

onde $\dot{\phi}\equiv\frac{\partial\phi}{\partial x^0}$ e $_{,k}\equiv\frac{\partial}{\partial x^k}$ e

$$J\equiv\frac{\partial(X^0..X^3)}{\partial(x^0..x^3)} \tag{12}$$

é o jacobiano da transformação. Deste modo $\mathcal{L}$ indica a densidade lagrangeana em coordenadas curvilineas. Definindo o momento canônico conjugado a ϕ, π_ϕ na forma usual:

$$\pi_\phi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \tag{13}$$

obtemos a densidade hamiltoniana

$$\mathbf{h} = \pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \tag{14}$$

que é possível escrever como

$$\mathbf{h} = \frac{\partial x^0}{\partial X^\alpha} J T^\alpha_\beta \dot{X}^\beta \equiv K_\beta \dot{X}^\beta \tag{15}$$

sendo T^α_β o tensor energia-momento nas coordenadas minkowskianas, dado por

$$T^\alpha_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}_o}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial X^\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial X^\beta} - \eta^\alpha_\beta \mathcal{L}_o \tag{16}$$

e K_β foi definido como

$$K_\beta \equiv \frac{\partial x^0}{\partial X^\alpha} J T^\alpha_\beta \tag{17}$$

A densidade hamiltoniana $\mathbf{h}$ resulta ter uma dependência linear nas 'velocidades cinematicas' $\dot{X}^\beta$, já que K_β independe delas. A densidade lagrangeana será então dada por:

$$\mathcal{L} = \pi_\phi \dot{\phi} - K_\beta \dot{X}^\beta \tag{18}$$

Podemos definir os momentos 'cinemáticos' como

$$\Pi_\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\alpha} = -K_\alpha, \tag{19}$$

o que produz na verdade o vínculo

$$\Pi_\alpha + K_\alpha = 0, \tag{20}$$

ou seja,

$$\mathcal{H}_\alpha \equiv \Pi_\alpha + \frac{\partial x^0}{\partial X^\beta} J T^\beta_\alpha = 0. \tag{21}$$

Deste modo é possivel escrever a ação numa forma linear tanto nas velocidades dinâmicas $\dot{\phi}$ quanto nas velocidades cinemáticas $\dot{X}^\beta$, a saber

$$S = \int d^4x (\pi_\phi \dot{\phi} + \Pi_\beta \dot{X}^\beta). \tag{22}$$

Para que possamos variar livremente a ação sem nos preocuparmos com o vínculo (21), devemos acrecentar à mesma o termo $N^\alpha \mathcal{H}_\alpha$ sendo N^α multiplicadores de Lagrange. Assim

$$S = \int d^4x (\pi_\phi \dot{\phi} + \Pi_\beta \dot{X}^\beta - N^\alpha \mathcal{H}_\alpha). \tag{23}$$

Os vínculos (21) podem ser projetados nas direções normal e paralela á hipersuperfícies $t = cte$

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_\alpha n^\alpha \tag{24}$$

$$\mathcal{H}_i \equiv \mathcal{H}_\alpha X^\alpha_i \tag{25}$$

onde X^α_i são as componentes dos vetores tangentes à hipersuperficie na base $\frac{\partial}{\partial X^\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial X^\alpha}$ e o vetor normal é definido por

$$\eta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \epsilon = \mp 1 \tag{26}$$

$$n_\alpha X^\alpha_i = 0 \tag{27}$$

($-$ para assinatura hiperbólica e $+$ para euclideana).

Portanto a forma geral dos vínculos será dada pela soma de uma parte cinemática e de uma parte dinâmica ou de campo:

$$\mathcal{H} \equiv \Pi_\alpha n^\alpha + \frac{\partial x^0}{\partial X^\beta} J T^\beta_\alpha n^\alpha = 0 \tag{28}$$

$$\mathcal{H}_i \equiv \Pi_\alpha X^\alpha_i + \frac{\partial x^0}{\partial X^\beta} J T^\beta_\alpha X^\alpha_i = 0 \tag{29}$$

O vínculo $\mathcal{H}$ é chamado de super-hamiltoniano e o vínculo $\mathcal{H}_i$ de super-momento. Expandindo N^α na base (n^α, X^α_i), $N^\alpha = N n^\alpha + N^i X^\alpha_i$, teremos, para a ação,

$$S = \int d^4x (\pi_\phi \dot{\phi} + \Pi_\beta \dot{X}^\beta - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i) \tag{30}$$

Nesta ação, as variáveis canônicas $\phi, \pi_\phi, X^\alpha, \Pi_\alpha$ são variadas, como já dissemos, independentemente. As equações de Hamilton que resultam vão determinar a evolução dessas variáveis canônicas com o tempo t. Ao variar com respeito aos multiplicadores de Lagrange N e N^i obtemos os vínculos

$$\mathcal{H} \approx 0, \qquad \mathcal{H}_i \approx 0 \tag{31}$$

Utilizamos, nestas últimas equações, a notação e terminologia de Dirac: os vínculos são fracamente iguais a zero, indicando com isso que os parênteses de Poisson de uma quantidade $A(\phi, \pi_\phi, X^\alpha, \Pi_\alpha)$ com um vínculo fracamente zero, não é zero necessariamente. Para que a teoria resulte consistente, os vínculos devem ser preservados no tempo t, o qual significa que seus parênteses de Poisson com a hamiltoniana devem se anular, quer dizer, devem ser fracamente zero. A hamiltoniana está dada por

$$H = \int d^3x (N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i)\,, \tag{32}$$

Os vínculos $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_i$ só se conservarão no tempo somente se os colchetes de Poisson dos vínculos avaliados em dois pontos x e y da hipersuperfície $\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\}$, $\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\}$ e $\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(y)\}$ forem fracamente zero. Este cálculo foi feito por Dirac (com $\epsilon = -1$), que mostrou que este colchetes se escrevem como uma certa combinação linear dos vínculos originais (isto é, não aparecem novos vínculos) e satisfazem a seguinte álgebra (chamada de 'álgebra de Dirac')[4][9] [11]:

$$\{\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(y)\} = \mathcal{H}^i(x)\partial_i\delta^3(x,y) - \mathcal{H}^i(y)\partial_i\delta^3(y,x) \tag{33}$$

$$\{\mathcal{H}_i(x),\mathcal{H}(y)\} = \mathcal{H}(x)\partial_i\delta^3(x,y) \tag{34}$$

$$\{\mathcal{H}_i(x),\mathcal{H}_j(y)\} = \mathcal{H}_i(x)\partial_j\delta^3(x,y) - \mathcal{H}_j(y)\partial_i\delta^3(y,x) \tag{35}$$

onde os índices dos super-momentos sobem com a métrica h_{ij} induzida na hipersuperfície $t = cte$, a qual está dada por $h_{ij} = \eta_{\alpha\beta}X^\alpha_{,i}X^\alpha_{,j}$. Dirac obteve este resultado com os vínculos dados na forma (21).

Neste ponto resulta apropriado colocar um resultado, que será de importância fundamental no nosso estudo, e que foi obtido por Claudio Teitelboim [13]. Ele obteve esta álgebra (mas com a assinatura aparecendo explicitamente como vamos ver a seguir) de uma forma bem geral que independe da forma dos vínculos e sem ter assumido necessariamente um espaço-tempo de Minkowski . Nesse trabalho são estudadas as deformações de uma hipersuperfície embutida num espaço-tempo riemanniano. Intuitivamente, uma hipersuperfície rotulada pode ser deformada em geral segundo duas operações: deixar ela fixa no espaço-tempo no qual está embutida e simplesmente re-rotular seus pontos, ou bem manter os rótulos e deformá-la. A primeira operação representa uma deformação $\delta t N^i$, tangencial à hipersuperfície, sendo governada por $\bar{\mathcal{H}}_i$. A segunda operação representa uma deformação $\delta t N$, ortogonal à hipersuperfície e está governada por $\bar{\mathcal{H}}$. Qualquer funcional F das variáveis canônicas (campos e variáveis cinemáticas) definidos na hipersuperfície vão mudar quando esta é deformada, de acordo com o hamiltoniano dado por

$$\bar{H} = \int d^3x(N\bar{\mathcal{H}} + N^i\bar{\mathcal{H}}_i)\,, \tag{36}$$

de modo que

$$\delta F = \int d^3x\{F, \delta N\bar{\mathcal{H}} + \delta N^i\bar{\mathcal{H}}_i\}\,. \tag{37}$$

que escrevemos

$$\delta F = \int d^3x\{F, \delta N^\alpha\bar{\mathcal{H}}_\alpha\}\,. \tag{38}$$

onde $\bar{\mathcal{H}}_0 \equiv \bar{\mathcal{H}}$ e $\delta N^0 \equiv \delta N$. Teitelboim utiliza um argumento puramente geométrico, baseado na 'independência de caminho' da evolução dinâmica: a mudança nas variáveis canônicas durante a evolução desde uma dada hipersuperfície inicial até uma dada hipersuperfície final deve ser independente da sequência particular de hipersuperfícies intermediárias utilizadas na avaliação desta mudança. Vamos ver isto com algum detalhe. Partindo de uma dada hipersuperfície σ chegamos primeiro a uma hipersuperfície intermediária σ_1 por meio de uma deformação $\delta\xi$. Depois vamos desde σ_1 até uma outra hipersuperfície final σ' por meio de uma segunda deformação $\delta\eta$. Se as duas deformações são feitas no ordem inverso então vamos chegar a uma hipersuperfície final σ'' que será em geral diferente da hipersuperfície σ'. Deve existir então uma deformação compensadora $\delta\zeta$ que permite deformar σ' em σ''. Esta deformação pode ser escrita como [13]:

$$\delta\zeta^\nu(x") = \int d^3x \int d^3x'\kappa^\nu{}_{\alpha\beta}(x", x, x')\delta\xi^\alpha(x)\delta\eta^\beta + o((\delta\xi)^2) + o((\delta\zeta)^2) \tag{39}$$

As quantidades $\kappa^\nu_{\alpha\beta}(x", x, x')$ ("constantes de estrutura") podem ser calculadas usando o fato de que as hipersuperfícies estão embutidas numa 4-geometria não degenerada, isto é:

$$g^{\mu\nu} = \epsilon n^\mu n^\nu + h^{ij}X^\mu_i X^\nu_j \tag{40}$$

Consideramos agora um funcional arbitrário $F[\sigma]$ avaliado na hipersuperfície σ. Usando repetidamente e Eq.(38) temos que a mudança ao puxar a hipersuperfície σ atê σ' é

$$F[\sigma'] = F[\sigma] + \int d^3x\{F[\sigma], (\delta\xi^\alpha(x) + \delta\eta^\alpha(x))\bar{\mathcal{H}}_\alpha(x)\}$$
$$+ \int d^3x \int d^3x'\{\{F[\sigma], \delta\eta^\beta(x')\bar{\mathcal{H}}_\beta(x')\}, \delta\xi^\alpha(x)\bar{\mathcal{H}}_\alpha(x)\} \tag{41}$$

Agora, trocando as deformações $\delta\eta$ e $\delta\xi$ obtemos $F[\sigma"]$, e usando a identidade de Jacobi é possivel escrever para a diferença $F[\sigma"] - F[\sigma']$

$$F[\sigma"] - F[\sigma'] = \int d^3x \int d^3x'\delta\xi^\alpha(x)\delta\eta^\beta(x')\{F, \{\bar{\mathcal{H}}_\alpha(x), \bar{\mathcal{H}}_\beta(x')\}\} \tag{42}$$

[4]Rigurosamente nao é uma álgebra ja que as constantes de estrutura dependem da métrica[12]

que tambem se escreve

$$F[\sigma"] - F[\sigma'] = \int d^3x" \delta\zeta^\nu(x")\{F, \bar{\mathcal{H}}_\nu(x")\} = \tag{43}$$

$$\int d^3x" d^3x d^3x' \delta\xi^\alpha(x)\delta\eta^\beta(x')\kappa^\nu_{\alpha\beta}(x"; x, x')\{F, \bar{\mathcal{H}}_\nu(x")\} \tag{44}$$

Na última igualdade usamos a Eq. (39).

A evolução será consistente se e somente se esta duas últimas equações forem iguais para deformações $\delta\xi$ e $\delta\eta$ arbitrárias. Vamos ter então:

$$\{\bar{\mathcal{H}}_\alpha(x), \bar{\mathcal{H}}_\beta(x')\} = \int d^3x" \kappa^\nu_{\alpha\beta}(x"; x, x')\bar{\mathcal{H}}_\nu(x") \approx 0 \tag{45}$$

Avaliando as constantes de estrutura $\kappa^\nu_{\alpha\beta}(x"; x, x')$, cálculo feito em [13], vamos ter que os vínculos $\bar{\mathcal{H}} \approx 0$ e $\bar{\mathcal{H}}_i \approx 0$ devem satisfazer a seguinte álgebra ('álgebra de Dirac-Teitelboim')

$$\{\bar{\mathcal{H}}(x), \bar{\mathcal{H}}(x')\} = -\epsilon[\bar{\mathcal{H}}^i(x)\partial_i\delta^3(x', x) - \bar{\mathcal{H}}^i(x')\partial_i\delta^3(x', x)]\,, \tag{46}$$

$$\{\bar{\mathcal{H}}_i(x), \bar{\mathcal{H}}(x')\} = \bar{\mathcal{H}}(x)\partial_i\delta^3(x, x')\,, \tag{47}$$

$$\{\bar{\mathcal{H}}_i(x), \bar{\mathcal{H}}_j(x')\} = \bar{\mathcal{H}}_i(x)\partial_j\delta^3(x, x') - \bar{\mathcal{H}}_j(x')\partial_i\delta^3(x', x)\,, \tag{48}$$

onde os índices dos super-momentos sobem com a métrica h_{ij} induzida na hipersuperfíicie $t = cte$, a qual está dada agora por $h_{ij} = g_{\alpha\beta}X^\alpha_{,i}X^\alpha_{,j}$, sendo $g_{\alpha\beta}$ a métrica do espaço de fundo onde as hipersuperfícies estão embutidas. A constante ϵ na Eq.(46) pode ser ± 1 dependendo se a 4-geometria na qual as 3-geometrias estão imersas, é euclideana ($\epsilon = 1$) ou hiperbólica ($\epsilon = -1$). Esta análise se aplica tanto para uma teoria de campos num fundo riemanniano já dado, quanto para o caso em que o fundo é gerado pela evolução, como na TRG. No primeiro caso a estrutura da álgebra dos vínculos impõe condições para que a invariância de Lorentz não seja quebrada. No caso da TRG a álgebra fornece as condições para a existência de um espaço-tempo: condições de imersibilidade que asseguram que a evolução das 3-geometrias possa ser interpretada como o movimento de um 'corte' 3-dimensional num espaço-tempo 4-dimensional com assinatura lorentziana. Este resultado aplicado ao caso da teoria de campos parametrizada no espaço-tempo plano que estamos estudando, implica que os vínculos da teoria devam satisfazer justamente a álgebra dada por (33) (34) (35).

Vamos considerar o caso de um campo escalar em espaço-tempo plano, cujo lagrangeano está dado por

$$\mathcal{L}_o = -\frac{1}{2}\left(\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial X^\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial X^\beta} + U(\phi)\right)\,, \tag{49}$$

onde $\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = diag(-1, 1, 1, 1)$ Calculando com este lagrangeano o tensor momento-energia, Eq.(16), e substituindo nas (28) e (29) vamos obter os vínculos super-hamiltoniano e super-momento na forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\nu}(\Pi_\alpha\nu^\alpha + \frac{1}{2}\pi^2_\phi + \frac{1}{2}\nu^2(h^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + U(\phi))) = 0\,, \tag{50}$$

$$\mathcal{H}_i = \Pi_\alpha X^\alpha_i + \pi_\phi\phi_{,i} = 0\,, \tag{51}$$

onde o vetor normal à hipersuperfíicie foi escrito na forma (veja[14] cap.7) $n^\alpha = \frac{\nu^\alpha}{\nu}$, sendo

$$\nu_\alpha \equiv -\frac{1}{3!}\epsilon_{\alpha\alpha1\alpha2\alpha3}\frac{\partial(X^{\alpha1}X^{\alpha2}X^{\alpha3})}{\partial(x^1x^2x^3)} \tag{52}$$

e ν é a norma de ν^α

$$\nu = \sqrt{-\nu^\alpha \nu_\alpha} \tag{53}$$

Pode se mostrar que $-\nu^\alpha \nu_\alpha = h$ onde $h \equiv det(h_{ij})$ é o determinante da métrica induzida na hipersuperfície.

Os vínculos satisfazem, como vimos, a álgebra de Dirac. Na seção seguinte vamos quantizar este modelo e interpretar segundo Bohm-de Broglie, mas pasando a uma visão hamiltoniana da mesma.

3 Teoria de campos parametrizada na interpretação de Bohm-de Broglie

Nesta seção vamos estudar a interpretação de Bohm-de Broglie da teoria de campos parametrizada, desenvolvida na seção anterior. Primeiramente quantizaremos seguindo a prescrição de Dirac. As coordenadas $\phi^A \equiv (X^0, X^1, X^2, X^3, \phi)$ e os momentos $\pi_A \equiv (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \pi_\phi)$ se tornam operadores, satisfazendo as relações de comutação

$$[\phi^A(x), \phi^B(y)] = 0, [\pi_A(x), \pi^B(y)] = 0 \tag{54}$$

$$[\phi^A(x), \pi_B(y)] = i\hbar \delta^A_B \delta(x,y) \tag{55}$$

e x, y são dois pontos da hipersuperfície. Os vínculos atuam aniquilando o estado, produzindo condições sobre os estados possíveis:

$$\hat{\mathcal{H}}_i \mid \Psi >= 0 \tag{56}$$

$$\hat{\mathcal{H}} \mid \Psi >= 0 \tag{57}$$

Na representação $\phi^A(x)$ ('de coordenadas') o estado do campo escalar está descrito pelo funcional $\Psi[\phi^A(x)]$ e o operador momento é uma derivada funcional: $\pi_A(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \phi^A(x)}$. Substituindo na Eq. (56) e levando em conta o super-momento Eq.(51) temos

$$-i\hbar X^\alpha_i \frac{\delta \Psi}{\delta X^\alpha(x)} - i\hbar \phi_{,i} \frac{\delta \Psi}{\delta \phi(x)} = 0 \tag{58}$$

Esta equação implica que Ψ é um invariante sob transformações de coordenadas espaciais na hipersuperfície.

Substituindo na Eq. (57) o super-hamiltoniano, dado na seção anterior na Eq. (50), temos

$$\mathcal{H}(x)\Psi = \frac{1}{\nu}\left(-i\hbar \nu^\alpha \frac{\delta \Psi}{\delta X^\alpha(x)} - (\hbar)^2 \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta \phi(x)^2} + \frac{1}{2}\nu^2 \left(h^{ij}(x)\phi(x)_{,i}\phi(x)_{,j} + U(\phi(x))\right)\Psi\right) = 0 \tag{59}$$

Para interpretar segundo Bohm-de Broglie fazemos como é usual, escrevemos o funcional de onda em forma polar $\Psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}S}$. Substituindo na (58) vamos obter duas equações que indicam que tanto S quanto A são invariantes sob transformações gerais de coordenadas espaciais

$$X^\alpha_i \frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)} + \phi_{,i} \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = 0 \tag{60}$$

$$X^\alpha_i \frac{\delta A}{\delta X^\alpha(x)} + \phi_{,i} \frac{\delta A}{\delta \phi(x)} = 0 \tag{61}$$

Substituindo a forma polar da Ψ na Eq.(59) vamos obter duas equações que dependerão do ordenamento escolhido. Porém, a equação que sai da parte real, depois de dividir pela amplitude A, será

$$\frac{1}{\nu}\left(\nu^\alpha \frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta S}{\delta \phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\nu^2 (h^{ij}(x)\phi(x)_{,i}\phi(x)_{,j} + U(\phi(x)))\right) + \mathcal{Q} = 0 \tag{62}$$

Esta é uma equação tipo Hamilton-Jacobi modificada pelo potencial quântico, dado pelo último termo. Vemos que somente este termo vai depender da regularização e ordenamento, já que os outros termos desta equação estão bem definidos. Segundo a forma não regulada dada na Eq (59), $\mathcal{Q}$ resulta:

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{\nu} \frac{\hbar^2}{2A} \frac{\delta^2 A}{\delta \phi(x)^2} \, . \tag{63}$$

A outra equação, que sai reordenando a parte imaginaria, é

$$\nu^\alpha \frac{\delta A^2}{\delta X^\alpha} + \frac{\delta (A^2 \frac{\delta S}{\delta \phi})}{\delta \phi} = 0 \tag{64}$$

Notamos que na interpretação de Bohm-de Broglie as variáveis canônicas existem independentemente da observação, e, como vimos na seção **1**, a evolução das coordenadas canônicas ϕ e X^α é obtida das relações guia de Bohm, dadas por:

$$\Pi_\alpha = \frac{\delta S(\phi, X^\alpha)}{\delta X^\alpha} \tag{65}$$

$$\pi_\phi = \frac{\delta S(\phi, X^\alpha)}{\delta \phi} \tag{66}$$

Dados os valores iniciais do campo $\phi(t_0, x^i)$ e das variáveis cinemâticas $X^\alpha(t_0, x^i)$ numa hipersuperfície inicial $x^0 = t_0 = cte$, podemos integrar estas equações de primeiro ordem e obter assim as trajetórias bohmianas, isto é, os valores do campo $\phi(t, x^i)$ e das $X^\alpha(t, x^i)$ para todo valor do parâmetro t. A evolução desses campos será differente da clássica devido à presença do potencial quântico na Eq. de Hamilton-Jacobi da teoria de Bohm-de Broglie, Eq. (62). Como sabemos, o limite clássico é obtido exigindo-se que $\mathcal{Q} = 0$. Neste caso o funcional S é solução da equação de Hamilton -Jacobi clássica, e sabemos que ao integrar as equações (65) e (66), as soluções que se obtem representam um campo ϕ evoluindo num espaco-tempo de Minkowski. Isto segue do fato de que os vínculos da teoria clássica satisfazem a algebra de Dirac (46) (47) (48) com $\epsilon = -1$. Mas, se o potencial quântico não é zero, então S é solução da equação de Hamilton-Jacobi *modificada* (62) e, portanto, não podemos assegurar que a solução obtida para ϕ^A represente todavia um campo num espaço tempo de Minkowski. Os efeitos quânticos poderiam quebrar a invariância de Lorentz e modificar assim a causalidade einsteniana da relatividade especial. Então perguntamos: qual tipo de estrutura corresponderá à este caso?. Para encarar esta questão vamos re-escrever a teoria de Bohm-de Broglie, que está formulada usualmente em termos da equação de Hamilton-Jacobi, numa forma Hamiltoniana.

As relações de Bohm (65) (66) permitem escrever (62) na forma:

$$\frac{1}{\nu}\left(\nu^\alpha \Pi_\alpha + \frac{1}{2}{\pi_\phi}^2 + \frac{1}{2}\nu^2\left(h^{ij}(x)\phi(x)_{,i}\phi(x)_{,j} + U(\phi(x))\right)\right) + \mathcal{Q} = 0 \tag{67}$$

O potencial quântico $\mathcal{Q}$ resulta ser uma densidade escalar de peso 1. Isto pode ser visto considerando a expresão para $\mathcal{Q}$ que se obtem da equação de Hamilton-Jacobi modificada, Eq.(62)

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{\nu}\left(\nu^\alpha \frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)} + \frac{1}{2}(\frac{\delta S}{\delta \phi})^2 + \frac{1}{2}\nu^2\left(h^{ij}(x)\phi(x)_{,i}\phi(x)_{,j} + U(\phi(x))\right)\right) \tag{68}$$

Lembramos que $\nu = \sqrt{h}$ é uma densidade escalar de peso 1, e que a fase S é um invariante perante transformações gerais de coordenadas na hipersuperfície (isto resulta do vínculo super-momento aplicado a Ψ, Eq.(60)). Então $\frac{\delta S}{\delta X^\alpha}$ é uma densidade vetorial, que estando contraída com o vetor normal, resulta em uma densidade escalar de peso 1. Para o segundo termo usamos o mesmo raciocínio e o terceiro é obviamente uma densidade de peso 1. Assim $\mathcal{Q}$ é uma soma de densidades escalares de peso 1, e portanto ele também é.

Podemos escrever a Eq.(67) da seguinte forma

$$\mathcal{H} + \mathcal{Q} = 0 \tag{69}$$

onde $\mathcal{H}$ é o super-hamiltoniano clássico dado por (50). Então, o super-hamiltoniano quântico ou de Bohm vai ser:

$$\mathcal{H}_Q \equiv \mathcal{H} + \mathcal{Q} \tag{70}$$

O hamiltoniano que gera as trajetorias bohmianas, uma vez satisfeitas inicialmente as relações guia (65) e (66) será:

$$H_Q = \int d^3x \left[N\mathcal{H}_Q + N^i\mathcal{H}_i\right]. \tag{71}$$

Isto pode-se ver notando que as relações guia são consistentes com os vínculos $\mathcal{H}_Q \approx 0$ e $\mathcal{H}_i \approx 0$, pois S satisfaz (60) e (62). Ademais elas são conservadas na evolução gerada pelo hamiltoniano (71). Vamos mostrar isto. Escrevemos primeiramente as relações de Bohm (65) (66) de uma forma adaptada ao formalismo hamiltoniano, a saber

$$\Phi_\alpha \equiv \Pi_\alpha - \frac{\delta S}{\delta X^\alpha} \approx 0\,, \tag{72}$$

$$\Phi_\phi \equiv \pi_\phi - \frac{\delta S}{\delta \phi} \approx 0\,. \tag{73}$$

A conservação no tempo das relações de Bohm significa que $\dot{\Phi}_\phi \equiv \{\Phi_\phi, H_Q\} = 0$ e $\dot{\Phi}_\alpha \equiv \{\Phi_\alpha, H_Q\} = 0$. Isto por sua vez equivale a provar que os parênteses de Poisson com os vínculos $\mathcal{H}_Q$ e $\mathcal{H}_i$ se anulam. Calculemos então $\{\Phi_\phi, \mathcal{H}_Q\}$, $\{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_Q\}$, $\{\Phi_\phi, \mathcal{H}_i\}$ e

$\{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_i\}$. Para simplificar a notação, definimos $W \equiv h^{ij}(x)\phi(x)_{,i}\phi(x)_{,j} + U(\phi(x))$, de modo que o hamiltoniano quântico se escreve

$$\mathcal{H}_Q \equiv \mathcal{H} + \mathcal{Q} = \frac{1}{\nu}\left(\nu^\alpha \Pi_\alpha + \frac{1}{2}{\pi_\phi}^2 + \frac{1}{2}\nu^2 W\right) + \mathcal{Q} \quad (74)$$

Calculando temos

$$\{\Phi_\phi(y), \mathcal{H}_Q(x)\} = \left\{\Pi_\alpha - \frac{\delta S}{\delta X^\alpha}, \frac{1}{\nu}\left(\nu^\alpha \Pi_\alpha + \frac{1}{2}{\pi_\phi}^2 + \frac{1}{2}\nu^2 W\right) + \mathcal{Q}\right\} =$$
$$-\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\left\{\frac{1}{\nu}\left(\nu^\alpha \frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\nu^2 W\right) + \mathcal{Q}\right\} - \frac{1}{\nu}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi^2}\Phi_\phi \quad (75)$$

onde o primeiro termo do lado direito desta equação respresenta a derivada funcional com relação a $\phi(y)$, do lado esquerdo da da equação de Hamilton-Jacobi modificada, Eq (62). Por tanto é identicamente zero. O segundo termo do lado direito resulta ser fracamente zero em virtude da relação de Bohm (73). Temos então que

$$\{\Phi_\phi(y), \mathcal{H}_Q(x)\} = -\frac{1}{\nu}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(y)^2}\Phi_\phi(x) \approx 0 \quad (76)$$

Para o parênteses $\{\Phi_\alpha(y), \mathcal{H}_Q(x)\}$ temos

$$\{\Phi_\alpha(y), \mathcal{H}_Q(x)\} = -\frac{\delta}{\delta X^\alpha(y)}\left\{\frac{1}{\nu}\left(\nu^\alpha \frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\right)^2 + \frac{1}{2}\nu^2 W\right) + \mathcal{Q}\right\}$$
$$-\frac{1}{\nu}\frac{\delta\nu^\beta}{\delta X^\alpha(y)}\Phi_\beta - \frac{\delta\nu^{-1}}{\delta X^\alpha(y)}\nu^\beta\Phi_\beta - \frac{1}{2}\frac{\delta\nu^{-1}}{\delta X^\alpha(y)}\left(\Phi_\phi^2 + 2\frac{\delta S}{\delta\phi}\Phi_\phi\right) - \frac{1}{\nu}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta X^\alpha(y)}\Phi_\phi \approx 0 \quad (77)$$

onde o primeiro termo do lado direito desta equação respresenta a derivada funcional com relação a $X^\alpha(y)$, do lado esquerdo da equação de Hamilton-Jacobi modificada, Eq (62), sendo, portanto, identicamente zero. Os outros termos são fracamente zero em virtude das relações de Bohm (72) (73).

Para calcular os parênteses de Poisson que envolvem o vínculo super-momento usamos o fato de que este é gerador de transformações espaciais de coordenadas. Temos que, sendo S um invariante, então Φ_α é uma densidade vetorial e Φ_ϕ uma densidade escalar. Portanto temos

$$\{\Phi_\phi(y), \mathcal{H}_i(x)\} = -\Phi_\phi(x)\partial_i\delta(y,x) \approx 0\,, \quad (78)$$

$$\{\Phi_\alpha(y), \mathcal{H}_i(x)\} = \Phi_i(x)\partial_\alpha\delta(y,x) - \Phi_\alpha(y)\partial_i\delta(y,x) \approx 0\,. \quad (79)$$

Combinando estes resultados obtemos

$$\dot{\Phi}_\phi = \{\Phi_\phi, H_Q\} \approx 0\,, \quad (80)$$

$$\dot{\Phi}_{\alpha,} = \{\Phi_\alpha, H_Q\} \approx 0\,. \quad (81)$$

Ou seja, as relações guia de Bohm são conservadas.

Dado que o potencial quântico não depende dos momentos, temos que as definições dos momentos em termos das velocidades continuam sendo as mesmas do caso clássico:

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_Q\} = \{\phi, H\}\,, \quad (82)$$

$$\dot{X^\alpha} = \{X^\alpha, H_Q\} = \{X^\alpha, H\}\,. \quad (83)$$

Expressamos a teoria de Bohm-de Broglie em forma hamiltoniana, e estamos interesados em estudar que tipo de estrutura vai corresponder à evolução bohmiana gerada pelo hamiltoniano (71). Os vínculos $\mathcal{H}_i \approx 0$ e $\mathcal{H}_Q \approx 0$ devem se manter no tempo para que a teoria resulte consistente. A consistência da teoria equivale a que os vínculos tenham parênteses de Poisson fracamente zero entre eles. No contexto do trabalho de Teitelboim explicado na seção II, vamos analizar a álgebra satisfeita pelos vínculos $\mathcal{H}_i \approx 0$ e $\mathcal{H}_Q \approx 0$. O parênteses de Poisson $\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(y)\}$ satisfaz a Eq. (35) ja que o $\mathcal{H}_i$ de H_Q definido na Eq. (71) é o mesmo que na teoria clássica. Da mesma forma, $\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_Q(y)\}$ satisfaz a Eq. (34) pois $\mathcal{H}_i$ é o gerador de transformações espaciais de coordenadas, e como $\mathcal{H}_Q$ é uma densidade escalar de peso 1 pois Q é uma densidade escalar de peso 1, então ele deve satisfazer esta relação de colchetes de Poisson com $\mathcal{H}_i$. O que resta ser verificado é se o colchete de Poisson $\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(y)\}$ fecha e se é como na Eq. (33). Vamos ver que efetivamente este colchete resulta fracamente zero independentemente do potencial quântico. Este fato significa que a teoria é consistente para qualquer $\mathcal{Q}$ e, portanto, para qualquer estado. Assim,

$$\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(y)\} = \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} + \{\mathcal{H}(x), Q(y)\} + \{Q(x), \mathcal{H}(y)\}\,. \tag{84}$$

Da equação (62) podemos escrever o potencial quântico como:

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{\nu}\left(\nu^\alpha \frac{\delta S}{\delta X^\alpha(x)} + \frac{1}{2}(\frac{\delta S}{\delta\phi})^2 + \frac{1}{2}\nu^2\left(h^{ij}(x)\phi(x)_{,i}\phi(x)_{,j} + U(\phi(x))\right)\right) \tag{85}$$

Substituindo esta última na Eq.(84) e usando as relações guia de Bohm dadas por (72) (73) encontramos que

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(y)\} = \frac{1}{\nu(x)\nu(y)}\Bigg(\bigg(\frac{\delta S}{\delta\phi(y)}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} + \\ \nu^\alpha(y)\frac{\delta^2 S}{\delta X^\alpha(y)\delta\phi(x)}\bigg)\Phi_\phi(x) - \bigg(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(y)\delta\phi(x)} + \\ \nu^\alpha(x)\frac{\delta^2 S}{\delta X^\alpha(x)\delta\phi(y)}\bigg)\Phi_\phi(y) + \nu^\alpha(y)\frac{\delta\nu^\beta(x)}{\delta X^\alpha(y)}\Phi_\beta(y) - \nu^\alpha(x)\frac{\delta\nu^\beta(y)}{\delta X^\alpha(x)}\Phi_\beta(y)\Bigg) \approx 0\end{aligned} \tag{86}$$

O lado direito desta equação é fracamente zero em virtude das relações de Bohm (72) e (73).

Vemos, portanto, que a interpretação de Bohm-de Broglie de um campo escalar num fundo de Minkowski, é uma teoria consistente. Mas a álgebra dos vínculos não fecha necessariamente segundo a álgebra de Dirac. Isto vai depender da forma do Q. Se o potencial quântico quebra a álgebra de Dirac então, de acordo com o trabalho de Teitelboim sintetizado na seção anterior, a estrutura do espaço-tempo de fundo vai ser modificada, não será mais Minkowski. Isto significa que a invariância de Lorentz será quebrada. Uma situação análoga é mostrada no caso da geometrodinâmica quântica, onde o potencial quântico vai determinar a estrutura quântica do Universo [1] [2]. A seguir mostraremos que já o estado de vácuo do campo escalar livre produz um potencial quântico que quebra a álgebra de Dirac. O cálculo deste potencial quântico é presentado no apendice A, onde estudamos um campo escalar livre num espaço-tempo de Minkowski. Ali é mostrado que o potencial quântico para o estado de vácuo é

$$Q = -\frac{1}{2}\int d^3X\left(\int d^3Y\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k \cos k.(X-Y)\phi(Y)\right)^2 + \frac{1}{2}\int d^3X\int d^3k\omega_k \tag{87}$$

que escrevemos como

$$Q = \int d^3X f(X^i, \phi)\,, \tag{88}$$

onde f é uma função de X^i e um funcional de ϕ dado por

$$f \equiv -\frac{1}{2}\left(\int d^3Y \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k \cos\{k.(X-Y)\}\phi(Y)\right)^2 + \frac{1}{2}\int d^3k\omega_k\,. \tag{89}$$

Escreveremos f como

$$f = -B^2 + E_0\,, \tag{90}$$

onde

$$B \equiv \sqrt{\frac{1}{2}}\int d^3Y \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k \cos\{k.(X-Y)\}\phi(Y)\,, \tag{91}$$

$$E_0 \equiv \frac{1}{2}\int d^3X \int d^3k\omega_k \tag{92}$$

Pasando às coordenadas da hipersuperfície x^i temos

$$Q = \int d^3x J f(X^i(x^j), \phi)\,, \tag{93}$$

sendo J o jacobiano $J = \frac{1}{3!}\epsilon_{ijk}\epsilon^{abc}\frac{\partial X^i}{\partial x^a}\frac{\partial X^j}{\partial x^b}\frac{\partial X^k}{\partial x^c}$. Assim, o $\mathcal{Q}$ (a densidade) que entra no super-hamiltoniano quântico Eq. (70) será:

$$\mathcal{Q} = J f(X^i(x^j), \phi) \tag{94}$$

Calculemos o parênteses de Poisson $\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(y)\}$. Temos

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}_Q(x), \mathcal{H}_Q(y)\} = \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} + \{\mathcal{H}(x), Q(y)\} + \{Q(x), \mathcal{H}(y)\} = \\ \mathcal{H}^i(x)\partial_i\delta^3(x,y) - \mathcal{H}^i(y)\partial_i\delta^3(y,x) + \{\mathcal{H}(x), Q(y)\} + \{Q(x), \mathcal{H}(y)\}\end{aligned} \tag{95}$$

onde os dois primeiros termos do lado direito são exatamente aqueles que aparecem na álgebra de Dirac Eq.(33). Portanto, para que a álgebra de Dirac se mantenha, é necessário que $\{\mathcal{H}(x), Q(y)\} + \{Q(x), \mathcal{H}(y)\}$ seja fortemente zero. Entretanto,

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}(x), Q(y)\} + \{Q(x), \mathcal{H}(y)\} = +2\frac{\nu^\alpha(y)}{\nu(y)} f(y)\epsilon_{\alpha jk}\epsilon^{abc}\frac{\partial X^j}{\partial y_b}\frac{\partial X^k}{\partial y_c}\frac{\partial\delta(y,x)}{\partial y_a} + \\ 2\frac{J(y)}{\nu(x)}\pi_\phi B(y)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k \cos k.(X(y)-x) - 2\frac{\nu^\alpha(x)}{\nu(x)} f(x)\epsilon_{\alpha jk}\epsilon^{abc}\frac{\partial X^j}{\partial x_b}\frac{\partial X^k}{\partial x_c}\frac{\partial\delta(x,y)}{\partial x_a} + \\ 2\frac{J(x)}{\nu(y)}\pi_\phi(y)B(x)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k \cos k.(X(x)-y)\end{aligned} \tag{96}$$

e o lado direito desta equação é evidentemente $\not\approx 0$ (fracamente diferente de zero). Assim a álgebra de Dirac não é satisfeita neste exemplo particular. Isto está nos dizendo, no contexto geometrodinâmico do trabalho de Teitelboim já discutido, que as trajetórias bohmianas estão gerando uma estrutura que não corresponde a um campo relativístico no espaço-tempo de Minkowski. Em outras palavras, mostramos a quebra da invariância de Lorentz da teoria em termos da quebra da álgebra de Dirac dos vínculos. Ressaltamos que a invariância relativística é perdida a nível de eventos individuais. As propriedades observáveis do campo são básicamente estatísticas e estão contidas nos valores esperados dos operadores

$$< \Psi \mid \hat{A} \mid \Psi >= \int \Psi * [\phi](\hat{A}\Psi)[\phi] D\phi \qquad (97)$$

os quais continuam sendo invariantes. Enquanto a invariância dos eventos individuais pode em geral ser quebrada, como vimos explicitamente no exemplo acima, a relatividade especial vai ser verificada nos experimentos que testem e confirmem o formalismo probabilístico. A invariância Lorentz é um efeito estatístico [5] [15]. Salientamos que os resultados obtidos neste trabalho não dependem de se ter assumido dimensão 4 e são válidos para um espaço-tempo de Minkowski de qualquer dimensão $n \geq 2$.

Apêndice A – A quebra da invariância de Lorentz

Aqui vamos mostrar de outra manera que a invariância de Lorentz é quebrada a nível de eventos individuais, segundo a interpretação de Bohm-de Broglie da teoria de campos no espaço-tempo plano, estudada na seção 2. Para mostrar isto vamos primeiramente desparametrizar a teoria, isto é, voltar às coordenadas de Minkowski. Partimos da Eq.(59)

$$\frac{1}{\nu}\Bigg(- i\hbar\nu^{\alpha}\frac{\delta\Psi}{\delta X^{\alpha}(x)} - (\hbar)^2\frac{1}{2}\frac{\delta^2\Psi}{\delta\phi(x)^2} + \frac{1}{2}\nu^2(h^{ij}(x)\phi(x)_{,i}\phi(x)_{,j} + U(\phi(x)))\Psi\Bigg) = 0\,. \qquad (98)$$

O funcional Ψ não depende do rotulamento da hipersuperfície, já que, como foi visto, é invariante perante transformações espaciais de coordenadas. Então podemos escolher as coordenadas x na hipersuperficie como sendo as de Minkowsi $x^i = X^i$. As hipersuperfícies serão descritas em forma desparametrizada por $X^0 = X^0(X^i)$ e o funcional de onda $\Psi(\phi(X), X^{\alpha})$ se escreve $\Psi = \Psi(\phi(X), X^0(X^i))$. Podemos escolher uma familia de hipersuperficies plana uniparamétrica, de modo que $X^0(X^i) = T$ com $-\infty < T < \infty$ e $\frac{\partial T}{\partial X^i} = 0$. O funcional $\Psi = \Psi(\phi(X), X^0(X^i))$ sob esta família de hipersuperfícies é agora um funcional de $\phi(X)$ que depende de T como um parâmetro $\Psi = \Psi(\phi(X), T)$. Temos então para a derivada temporal

$$\frac{\partial\Psi}{\partial T} = \int d^3X \frac{\delta\Psi}{\delta X^0(X)}\frac{\partial X^0(X)}{\partial T} = \int dX^3 \frac{\delta\Psi}{\delta X^0(X)} \qquad (99)$$

Com estas definições, ν_{α}, dado na Eq. (52), tem componentes $\nu_0 = -1, \nu_i = 0$. ($\nu^0 = 1$). Substituindo tudo isto na equação (98) temos:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\phi,t)}{\partial T} = \int d^3X \frac{1}{2}\left[-\hbar^2\frac{\delta^2}{\delta\phi^2} + (\nabla\phi)^2 + U(\phi)\right]\Psi(\phi,T)\,, \qquad (100)$$

que é a equação funcional de Schrödinger para o campo escalar ϕ no potencial $U(\phi)$. Esta equação tem problemas de regularização, já que o operador de derivação funcional está aplicado no mesmo ponto. Acima ela está escrita em forma não regularizada. Ela deve, portanto, ser regularizada e em seguida ser escolhido um ordenamento que deixe a teoria livre de anomalias. As soluções desta equação regularizada serão interpretadas segundo Bohm-de Broglie. Escrevendo o funcional de onda na forma polar $\Psi = A\exp(iS/\hbar)$, e substituindo na Eq. (100), obtemos:

$$\frac{\partial S}{\partial T} + \frac{1}{2}\int d^3X\left[\left(\frac{\delta S}{\delta\phi}\right)^2 + (\nabla\phi)^2 + U(\phi)\right] + Q(\phi, T) = 0, \qquad (101)$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \int d^3X \frac{\delta}{\delta\phi}\left(A^2\frac{\delta S}{\delta\phi}\right) = 0, \qquad (102)$$

onde

$$Q(\phi) = -\hbar^2\frac{1}{2A}\int d^3X \frac{\delta^2 A}{\delta\phi^2}\,, \qquad (103)$$

é o correspondente potencial quântico, que depende da regularização e ordenamento escolhido na (100). Acima ele está escrito em forma não regularizada. A primeira equação Eq.(101) é interpretada como uma equação de Hamilton-Jacobi que governa a evolução de certa configuração inicial do campo no tempo, a qual vai ser diferente da clássica devido a presença do potencial quântico. A Eq. (102) é uma lei de conservação que justifica a suposição de que, a tempo T, $A^2 D\phi$ é a probabilidade de que o campo ϕ esteja num elemento de 'volume' $D\phi$ ao redor da configuração $\phi(X)$ para todo X. A notação $D\phi$ significa o produto infinito $\Pi_X d\phi$ dos elementos de volume do campo $d\phi$ para cada valor de X. O funcional pode-se supor normalizado:

$$\int |\Psi|^2 D\phi = 1 \qquad (104)$$

A evolução quântica pode ser obtida integrando-se a relação guia de Bohm, dada agora por

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \phi}{\partial T} = \frac{\delta S[\phi(X),T]}{\delta \phi(X)}|_{\phi(X)=\phi(X,T)} \qquad (105)$$

uma vez dada a configuração inicial $\phi_0(X)$. A equação de movimento da coordenada ϕ pode se obtida tomando a derivada funcional da equação de Hamilton-Jacobi modificada (101). Temos

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(X)}\right)+\frac{1}{2}\int d^3Y\left[2\frac{\delta S}{\delta\phi(Y)}\frac{\delta}{\delta\phi(X)}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi}\right)+2(\nabla\phi)\frac{\delta(\nabla\phi(Y))}{\delta\phi(X)}+\frac{\delta U(\phi)}{\delta\phi(X)}\right]+\frac{\delta Q(\phi,T)}{\delta\phi(X)}=0, \qquad (106)$$

e usando que $\frac{\partial\phi}{\partial T} = \frac{\delta S[\phi(X),T]}{\delta\phi(X)}$ e denotando $\dot\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial T}$ segue que

$$\frac{\partial\dot\phi}{\partial T}+\int d^3Y\dot\phi(Y)\frac{\delta\Pi_\phi(Y)}{\delta\phi(X)}+\int d^3Y\nabla\phi.\nabla\delta(X,Y)+\frac{1}{2}\int d^3Y\frac{\delta U(\phi)}{\delta\phi(X)}+\frac{\delta Q(\phi,T)}{\delta\phi(X)}=0 \qquad (107)$$

O segundo termo do lado esquerdo é nulo ja que $\frac{\delta\Pi_\phi}{\delta\phi} = 0$, então, integrando por partes e desprezando um termo de fronteira

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial T^2}-\nabla^2\phi+\frac{1}{2}\int d^3Y\frac{\delta U(\phi)}{\delta\phi(X)}+\frac{\delta Q(\phi,T)}{\delta\phi(X)}=0, \qquad (108)$$

que podemos escrever

$$\Box\phi(X,T)+\frac{1}{2}\int d^3Y\frac{\delta U(\phi)}{\delta\phi(X)}=-\frac{\delta Q[\phi(X),T]}{\delta\phi(X)}|_{\phi(X)=\phi(X,T)}\,. \qquad (109)$$

onde $\Box \equiv -\partial_\mu\partial^\mu$. No caso de um campo escalar livre temos $U(\phi)=m^2\phi^2$, e esta última equação se reduz a

$$\Box\phi(X,T)+m^2\phi(X,T)=-\frac{\delta Q[\phi(X),T]}{\delta\phi(X)}|_{\phi(X)=\phi(X,T)} \qquad (110)$$

Esta equação, é a versão quântica da equação de onda clássica:

$$\Box\phi(X,T)+m^2\phi(X,T)=0\,. \qquad (111)$$

A "força quântica" que aparece no lado direito de (109) é responsavel por todos os efeitos quânticos da teoria.

Vamos mostrar que já o estado de vácuo do campo escalar livre produz um potencial quântico que quebra a invariancia Lorentz dos campos. A solução para o estado de vácuo da equação (100) no caso livre, está dada por ([16] cap. 10):

$$\Psi_0[\phi,T]=e^{-\frac{iE_0T}{\hbar}}\eta e^{-\int d^3Xd^3Y\phi(X)g(X,Y)\phi(Y)} \qquad (112)$$

onde

$$g(X,Y)=\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k e^{ik.(X-Y)} \qquad (113)$$

e $\omega_k=\hbar\sqrt{k^2+m^2}$

Calculando a amplitude de (112) e usando (103), o potencial quântico fica

$$Q=-\frac{1}{2}\int d^3X(\int d^3Y\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k\cos\{k.(X-Y)\}\phi(Y))^2+\frac{1}{2}\int d^3X\int d^3k\omega_k. \qquad (114)$$

O ultimo termo é a energia do vácuo. Derivando funcionalmente esta expressão com respeito a ϕ, tendo em conta que a energia do vácuo não depende funcionalmente de ϕ e usando que ([16] cap.10)

$$\int d^3Xg(Z,X)g(X,Y)=\frac{1}{4}(-\nabla^2+m^2)\delta(Z,Y), \qquad (115)$$

segue que

$$\frac{\delta Q}{\delta\phi(X)}=-(-\nabla^2+m^2)\phi(X) \qquad (116)$$

Substituindo na equação do campo ϕ (110) temos

$$\Box\phi(X,T)+m^2\phi(X,T)=(-\nabla^2+m^2)\phi(X)|_{\phi(X)=\phi(X,T)} \tag{117}$$

a qual não é uma equação invariante de Lorentz.

Apêndice B – Cálculo de $\{\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(y)\}$ no caso da teoria de campos parametrizada

Apresentamos aqui o cálculo de $\{\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(y)\}$ no caso da teoria de campos parametrizada. O super-hamiltoniano é dado por (50)

$$\mathcal{H}=\frac{1}{\nu}(\Pi_\alpha\nu^\alpha+\frac{1}{2}\pi_\phi^2+\frac{1}{2}\nu^2(h^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}+U(\phi)))\,, \tag{118}$$

que escrevemos, para simplificar, como

$$\mathcal{H}=\nu^{-1}\mathrm{H}\,, \tag{119}$$

onde definimos

$$\mathrm{H}\equiv\Pi_\alpha\nu^\alpha+\frac{1}{2}\pi_\phi^2+\frac{1}{2}\nu^2(h^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}+U(\phi))\,. \tag{120}$$

Então temos

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(y)\}=\frac{1}{\nu(x)}\frac{1}{\nu(y)}\{\mathrm{H}(x),\mathrm{H}(y)\}+\frac{1}{\nu(x)}\mathrm{H}(y)\{\mathrm{H}(x),\frac{1}{\nu(y)}\}+&\\ \frac{1}{\nu(y)}\mathrm{H}(x)\{\frac{1}{\nu(x)},\mathrm{H}(y)\}\,.&\end{aligned} \tag{121}$$

Utilizando o fato de que $\frac{\delta\nu_\alpha(x)}{\delta X^\beta(y)}=-\frac{\delta\nu_\beta(x)}{\delta X^\alpha(y)}$, que vem de (52), e as propriedades básicas da $\delta(x,y)$, é possível ver que cada um dos últimos dois parênteses do lado direito desta equação se anulam idénticamente. Usando este mesmo argumento e o fato de que o potencial $U(\phi)$ não contem derivadas da métrica, a última equação fica:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(y)\}=-\frac{1}{\nu^2(y)}\Pi_\beta(y)\nu^\alpha(y)\frac{\partial\nu^\beta(y)}{\partial X_i^\alpha(x)}\frac{\partial}{\partial y^i}\delta(y,x)&\\ +\frac{1}{\nu^2(x)}\Pi_\alpha(x)\nu^\beta(x)\frac{\partial\nu^\alpha(x)}{\partial X_i^\beta(y)}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(x,y)-&\\ h^{ij}(y)\Pi_\phi(y)\frac{\partial\phi}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^i}\delta(y,x)+h^{ij}(x)\Pi_\phi(x)\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(x,y)\,.&\end{aligned} \tag{122}$$

Finalmente é possível provar que o primeiro termo do lado direito é igual a

$$-h^{ij}(y)\Pi_\alpha(y)\frac{\partial X^\alpha}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial y^i}\delta(y,x) \tag{123}$$

e o segundo é igual a

$$+h^{ij}(x)\Pi_\alpha(x)\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(x,y) \tag{124}$$

onde novamente usamos a Eq. (52). Então temos

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}(x),\mathcal{H}(y)\}=h^{ij}(x)\left(\Pi_\alpha(x)\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^j}+\Pi_\phi(x)\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(x,y)&\\ -h^{ij}(y)\left(\Pi_\alpha(y)\frac{\partial X^\alpha}{\partial y^j}+\Pi_\phi(y)\frac{\partial\phi}{\partial y^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^i}\delta(y,x)\,,&\end{aligned} \tag{125}$$

isto é,

$$\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} = \mathcal{H}^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(x,y) - \mathcal{H}^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}\delta(y,x) \quad (126)$$

Referências

[1] N. Pinto-Neto and E. Sergio Santini, *Must quantum spacetimes be Euclidean?*, Phys.Rev. D **59** 123517 (1999).(gr-qc/9811067);

[2] Eduardo Sergio Santini, **Geometrodinâmica quântica na interpretação de Bohm-de Broglie** Tese de Doutorado CBPF, (maio 2000).

[3] S. Schweber, **QED and the men who made it: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga**, (Princeton University Press, Princeton, 1994).

[4] David Bohm, *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables I e II*, Phys. Rev. **85**, 166 (1952) e Phys. Rev. **85**, 180 (1952).

[5] P. R. Holland, **The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics** (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).

[6] D. Bohm and J. P. Vigier,*Model of the causal interpretation of Quantum Theory in terms of a fluid with irregular fluctuations*, Phys. Rev. **96**, 208 (1954).

[7] A. Valentini, *Signal-locality , uncertainty and the subquantum H-theorem.I* Phys. Lett. **A156**, 5 (1991).

[8] P. N. Kaloyerou, *The causal interpretation of the electromagnetic field*, Phys. Rep. **244**, 287 (1994).

[9] Karel Kuchař, *Canonical quantum gravity*, em **Relativity, Groups and Cosmology** ed. Werner Israel (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland 1973).

[10] Cornelius Lanczos, **The Variational Principles of Mechanics** (Dover, New York, 1986)

[11] Paul A.M. Dirac **Lectures on Quantum Mechanics** Yeshiva University (1964), Generalized hamiltonian dynamics, Can.J.Math.2:129-148,(1950)

[12] S. A. Hojman, K. Kuchař and C. Teitelboim, *Geometrodynamics Regained* Ann. Phys. **96**, 88 (1976).

[13] Claudio Teitelboim, *How commutators of constraints reflect the space-time structure*, Ann. Phys. **80**, 542 (1973).

[14] David Lovelock, Hanno Rund, **Tensors, Differential Forms and Variational Principles**, (Dover, New York, 1989)

[15] D. Bohm, B. J. Hiley and P. N. Kaloyerou, *An ontological basis for the Quantum Theory*, Phys. Rep. **144**, 349 (1987).

[16] Brian Hatfield, **Quantum Field Theory of Point Particles and Strings** (Addison Wesley, 1992).