

*Causa Efficiens versus Causa Formalis: origens da  
discussão moderna sobre a dimensionalidade do espaço* <sup>(1)</sup>

*F. Caruso* <sup>1,2)</sup> & *R. Moreira Xavier* <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

R. Dr. Xavier Sigaud 150, 22290-180, Rio de Janeiro, RJ

<sup>2)</sup> Instituto de Física da Universidade do Estado do Rio de Janeiro

R. São Francisco Xavier 524, 20550-013, Rio de Janeiro, RJ

### RESUMO

Discute-se a relação entre os critérios metacientíficos utilizados para explicar, ou impor limites sobre a dimensionalidade do espaço físico e os sistemas de explicação causal dominantes nos correspondentes períodos históricos. Examinam-se as importantes contribuições de Aristóteles, Kant e Ehrenfest ao problema da dimensionalidade, as quais se apóiam em explicações causais distintas: em Aristóteles, *causa materialis*, no jovem Kant, *causa efficiens* e, em Ehrenfest, uma engenhosa combinação de *causa efficiens* e *causa formalis*. Enfatiza-se a crescente valorização da *causa formalis* nas abordagens físicas contemporâneas deste problema.

### ABSTRACT

Metascientific criteria used for explaining or constraining physical space dimensionality and their historical relationship to prevailing causal systems are discussed. The important contributions by Aristotle, Kant and Ehrenfest to the dimensionality of space problem are considered and shown to be grounded on different causal explanations: *causa materialis* for Aristotle, *causa efficiens* for young Kant and an ingenious combination of *causa efficiens* and *causa formalis* for Ehrenfest. The prominent and growing rôle played by *causa formalis* in modern physical approaches to this problem is emphasized.

**Key-words:** Space; Dimensionality; Causality; Aristotle; Kant.

---

<sup>(1)</sup> Trabalho apresentado por R. Moreira Xavier no VIII Colóquio de História da Ciência – *Espaço e Tempo* – realizado em Águas de Lindóia, São Paulo, de 14 a 17 de outubro de 1993.

## I. Introdução

Este trabalho situa-se na confluência de dois problemas. Por um lado, a questão da dimensionalidade do espaço físico, cuja discussão pode ser desenvolvida, de um ponto de vista moderno, a partir da pergunta de Ehrenfest:

*“Qual o papel desempenhado pela tridimensionalidade do espaço nas leis fundamentais da Física?”* (EHRENFEST, 1920, p. 440);

por outro lado, o problema da interdependência entre os conceitos de causa, utilizados pela Física num determinado momento histórico, e o estágio de evolução da própria Física.

Trata-se aqui de discutir os esquemas explicativos (causais) que estão por trás de diversas tentativas de tirar a *tridimensionalidade* do território dos *dados iniciais* (matéria, extensão e espaço) e colocá-la no universo de problemas da Física. Questões históricas e epistemológicas relacionadas às obras de três autores fundamentais — Aristóteles, Kant e Ehrenfest — serão tratadas em certo detalhe. Pretende-se examinar o que eles dizem sobre a dimensionalidade do espaço e, em seguida, discutir as concepções de causa subjacentes às análises destes autores. Antes, entretanto, é preciso situar o problema da dimensionalidade do espaço, em seus aspectos gerais.

## II. A problemática da dimensionalidade do espaço: Física e Matemática

Whitrow chama a atenção de que o problema da dimensionalidade do espaço apresenta um caráter dual, envolvendo a Física e a Matemática (WHITROW, 1955, pp. 13-31). Segundo ele, primeiro é necessário que se questione o significado de um espaço ter um certo número de dimensões — isto diz respeito ao domínio da Matemática. Depois, segue-se a questão de por que este número é precisamente 3 — a este segundo ponto, espera-se, que a Física possa contribuir, de forma significativa, elaborando um conhecimento mais profundo das *peculiaridades que distinguem o espaço tridimensional* de outros, postas em destaque na pergunta de Weyl:

*“... se Deus, ao criar o Mundo, decidiu fazer o espaço tridimensional, pode-se chegar a uma explicação ‘razoável’ deste fato, desvelando tais peculiaridades?”* (WEYL, 1949).

Ora, claro está que, desde a revolução galileana, passa a existir uma notável interdependência entre a Física e a Matemática na descrição da Natureza, passando esta última

a ser vista cada vez mais como a linguagem adequada à Física. No entanto, do ponto de vista lógico, a Matemática tem suas limitações intrínsecas: quando se constroem conceitos fundamentais para qualquer Teoria Física — como o de *espaço físico* — a partir de conceitos matematicamente bem definidos — como o de *espaço geométrico* —, torna-se extremamente complexo e intrincado explicitar os efeitos dessas limitações, inerentes à Matemática, sobre a Física (SCHENBERG, 1985; COSTA & DORIA, 1991; BARROS, 1991), em particular, seus reflexos sobre as qualidades específicas do espaço físico, como a dimensionalidade. *Ipsa facto*, a dualidade a que se refere Whitrow parece-nos hoje injustificada do ponto de vista epistemológico, embora esteja na origem histórica da abordagem moderna do problema da dimensionalidade (JAMMER, 1954). Além disto, injustificada, por exemplo, quando se considera a profunda relação entre Geometria e Física, contida no programa de Einstein. Como observou Jammer:

*“Foi Einstein quem esclareceu como a geometria (...) cessa de ser uma ciência axiomático-dedutiva e torna-se uma entre as ciências naturais; a mais velha de todas, na verdade.”* (JAMMER, 1954, p. 170).

Toda essa dificuldade que permeia a Física Contemporânea resume-se em outro comentário de Jammer:

*... a estrutura do espaço físico não é, em última análise, nada de dado na natureza ou de independente do pensamento humano. É uma função do nosso esquema conceitual.”* (JAMMER, 1954, p. 171).

Para se ir além na discussão deste problema seria necessário indagar até onde a Matemática e, em particular, o *espaço contínuo* são necessários e adequados à descrição dos fenômenos físicos, questão esta que transcende o escopo deste ensaio. Basta mencionar que continuaremos a nos guiar pelos paradigmas matemáticos vigentes, pelo menos enquanto não tivermos que enfrentar na nossa concepção de espaço-tempo físico os reflexos das limitações, mencionadas acima, inerentes a todos os sistemas axiomatizados como a Matemática. Pretendemos aqui tão somente mostrar que o enfoque dado ao problema da dimensionalidade do espaço depende fortemente da concepção de *causa*<sup>(2)</sup> dominante num certo período histórico, concepção esta que, na Ciência Moderna, está intimamente ligada, como veremos, ao estágio de desenvolvimento da Matemática.

---

<sup>(2)</sup> a palavra causa é usada *lato sensu*, i.e., relacionada à idéia geral de explicação Cf. Sec. (III).

Veremos, na próxima Seção, ainda que de modo bastante esquemático, o segundo ponto a que nos referimos acima, *i.e.*, o impacto dos diversos conceitos de causa sobre a evolução da Física e vice-versa. À luz destas considerações, discutiremos nas Seções IV, V e VI, respectivamente, as contribuições de Aristóteles, Kant e Ehrenfest à questão da dimensionalidade. Algumas considerações finais serão apresentadas na Seção VII.

### III. Das quatro causas às quatro causas

O sistema explicativo de Aristóteles, baseado nas quatro causas, discutido, elaborado e desenvolvido pelos escolásticos (*causa materialis*, *formalis*, *efficiens* e *finalis*), vai ser adotado pela cultura ocidental até o Renascimento (BUNGE, 1979, p. 32; KUHN, 1977, pp. 51-61), pelo menos. Em Galileu, a *causa formalis* passa a ter destaque (MOREIRA XAVIER, 1986), devido ao papel que a geometria tem em seu sistema (KOYRÉ, 1966). Com o surgimento do programa cartesiano de pesquisa, as explicações formais e finais são abandonadas e, a partir dessa época, a *causa efficiens* vai, pouco a pouco, ocupando o lugar central dos esquemas explicativos da Física pelos motivos discutidos em (BUNGE, 1979; KUHN, 1977; MOREIRA XAVIER, 1986). É claro que *causa efficiens*, agora, adquire um sentido diferente do que se encontra em Aristóteles. Já se delinea a visão mecanicista do Mundo (DIJKSTERHUIS, 1959) e *causa efficiens* passa a ser, antes de tudo, ação (*actio*), ou seja, “força”<sup>(3)</sup>.

Para os newtonianos o programa de pesquisa gira em torno da determinação das forças que geram os movimentos. Esquemáticamente, podemos dizer que este programa, originado em Descartes, ganha corpo em Newton, é formalizado por Euler, e culmina em Laplace<sup>(4)</sup>:

*“Nós devemos considerar o estado presente do Universo como efeito de seu estado anterior, e causa do que se deve seguir. Uma Inteligência que, por um dado instante, conhecesse todas as forças de que a natureza é animada e a situação respectiva dos seres que a compõem, se fosse suficientemente vasta para submeter esses dados ao cálculo, abraçaria na mesma fórmula os*

---

<sup>(3)</sup> Note que *força* aqui não tem o significado moderno, mas sim o da época que, visto com os olhos de hoje, tem muito de *energia*, *momentum*, *etc.* (JAMMER, 1957).

<sup>(4)</sup> O leitor interessado em maiores detalhes sobre a evolução do conceito de causa na física pós-newtoniana pode reportar-se, p. ex., a (MOREIRA XAVIER, 1986).

*movimentos dos maiores corpos do universo e os do átomo mais leve: nada seria incerto para ela e o futuro, como o passado, estaria presente aos seus olhos*” (LAPLACE, 1814).

É o predomínio absoluto da *causa efficiens* e do determinismo mecanicista.

A visão atomista da matéria vai se fortalecer nesse ambiente cultural, a ponto de numa conferência intitulada “Os Confins do Conhecimento da Natureza”, em 1880, o fisiólogo du Bois-Reymond afirmar que a autenticidade de uma ciência estaria, sobretudo, na sua fundamentação na mecânica dos átomos:

*“Se imaginássemos todas as transformações do mundo material resolvidas em movimentos de átomos, produzidos por uma força central constante, o universo seria cientificamente conhecido. O estado do mundo durante um diferencial de tempo apareceria como imediato efeito de seu estado durante o diferencial de tempo precedente, e como causa direta do seu estado durante o diferencial de tempo sucessivo. Lei e acaso seriam somente diferentes nomes da necessidade mecânica.”*<sup>(5)</sup> (du BOIS-REYMOND, 1891, p. 18).

Por outro lado, é na descrição do calor, visto como algo que se propaga no contínuo, que vamos encontrar a origem de um novo estilo de fazer Ciência: Fourier preocupa-se em descrever o modo pelo qual o calor se propaga — através de *leis simples e constantes* — sem discutir a essência do calor — as suas *causas primárias* — como se depreende do Discurso Preliminar da *Teoria Analítica do Calor*:

*“As causas primárias nos são desconhecidas, mas estão sujeitas a leis simples e constantes, que podem ser descobertas pela observação, cujo estudo constitui o objeto da filosofia natural. O calor, como a gravidade, penetra todas as substâncias do Universo, seus raios ocupam todas as partes do espaço. O objetivo de nosso trabalho é estabelecer as leis matemáticas a que este elemento obedece. A teoria do calor, daqui em diante, constituirá um dos ramos mais importantes da física geral (...). Qualquer que seja o âmbito das teorias mecânicas, elas não se aplicam aos efeitos do calor. Estes constituem um tipo especial de fenômeno, e não podem ser explicados pelos princípios do movimento e do equilíbrio.”*<sup>(5)</sup> (FOURIER, 1822).

---

<sup>(5)</sup> Os grifos são nossos.

Mas note que, de certa forma, Newton também faz algo semelhante: na sua *Opticks* (NEWTON, 1730, p. 400) ele admite a existência dos átomos e procura, nos *Principia* (NEWTON, 1726), descrever as interações da matéria e não explicar suas origens. Tanto em Newton quanto em Fourier há claramente um deslocamento da pergunta do *porquê* ao *como*. Sendo assim em que, então, os dois programas vão diferir? É justamente a introdução de um fluido imponderável e sutil — o calórico — que vai fazer a diferença: a propagação de uma substância fluida no espaço contínuo irá envolver variações de certa grandeza no espaço e no tempo, e, além disto, as coordenadas espaciais passam a ser também um parâmetro como o tempo: isto implicará no uso de equações diferenciais parciais. O enfoque do problema é assim desviado para a busca de uma equação diferencial que descreva o fenômeno físico, ou seja, para a busca da *forma*. Em outras palavras, a equação diferencial é a *causa formalis* do fenômeno em questão. Note que a física dos fluidos imponderáveis e sutis (fluido elétrico, calórico, *etc.*) representou uma certa desmaterialização das explicações, que preparou o terreno para a introdução de conceitos como linhas de força, no caso elétrico, e em última instância, do conceito de *campo*. Isto marca o retorno da *causa formalis* ao primeiro plano das explicações científicas.

Além de Fourier, também Lagrange teve um papel fundamental na afirmação desse sistema explicativo (MOREIRA XAVIER, 1986). Ao utilizarmos as equações de Lagrange (obtidas a partir do chamado *princípio de mínima ação*), para resolver um problema específico e explicar um fenômeno (LANCZOS, 1986), estamos atribuindo a ele, além da *causa formalis* dada pela lagrangeana, uma *causa finalis* expressa pelo princípio variacional. Foi o estudo de sistemas complexos — propagação de calor, mecânica dos fluidos e teoria dos campos — que exigiu o uso de um sistema explicativo complexo (quatro causas) e o abandono do mecanicismo *stricto sensu*, baseado exclusivamente na *causa efficiens* (MOREIRA XAVIER, 1993).

Ainda no interior da Física Clássica, o Eletromagnetismo oferece, também, um exemplo interessante. Embora as equações de Maxwell tenham sido obtidas a partir de um modelo mecânico do éter — no fundo, portanto, de um esquema baseado na *causa efficiens* — Hertz percebeu que este esquema tinha que ser abandonado, em benefício da *causa formalis*, ao nos ensinar que as Equações de Maxwell *são* a Teoria de Maxwell. Em suas palavras:

“O que é a teoria de Maxwell?” Não conheço resposta mais sucinta nem mais definitiva do que a seguinte: — a teoria de Maxwell é o sistema de equações de Maxwell.” (HERTZ, 1893).

A Física Contemporânea está repleta de exemplos de utilização da *causa formalis*. Várias propriedades quânticas da matéria, como spin, paridade, isospin, estranheza, charme, cor dos quarks, dentre outras, são passíveis de descrição apenas em termos matemáticos. A relação entre os teoremas de conservação e as propriedades de simetria é outro exemplo: quando se diz que uma grandeza se conserva, como resultado de uma determinada simetria, o que se está a fazer é atribuir a conservação a uma *causa formalis*. Na teoria da Relatividade de Einstein, o programa de geometrização da Física é claramente calcado na primazia dos aspectos formais, ou seja, na valorização da *causa formalis*.

Existe um exemplo interessante em Teoria de Campos onde se pode mostrar que *causa formalis et causa efficiens* coexistem num esquema explicativo mais complexo: é o processo dinâmico de quebra espontânea de simetria, onde a densidade de *lagrangeana* apresenta explicitamente uma certa *simetria — causa formalis —* que não mais se manifesta nas equações de movimento devido a alguma *particularidade das interações* entre os campos que compõem a densidade de lagrangeana — a *causa efficiens* da quebra de simetria (que não é obviamente devida a uma força no sentido newtoniano).

Por último, o *princípio de exclusão* de Pauli, que vale para um só tipo de matéria — de spin semi-inteiro, *i. e.*, os férmions — e não para partículas de spin inteiro — os bósons — pode estar, de alguma forma, relacionado à *causa materialis* (MOREIRA XAVIER, 1986). Usar o princípio de Pauli para explicar a impenetrabilidade da matéria significa invocar uma *causa materialis* para este fenômeno.

Esta lista de exemplos, ainda que bastante incompleta, serve, entretanto, para ilustrar como as explicações de que a Física lança mão hoje em dia são mais variadas (e, em geral, mais complexas), do que as concebidas nos estreitos limites do programa mecanicista, na medida em que incorporam todos os quatro tipos de causa.

Gostaríamos de concluir esta Seção reafirmando que, no diversificado sistema explicativo da Física Contemporânea, *causa* readquire um sentido lato (KUHN, 1977), cujas raízes remotas podem ser encontradas no esquema aristotélico–escolástico de quatro causas. Este fato não chega a surpreender se nos lembrarmos, por exemplo, do caráter neo–aristotélico

da Física de Einstein, assinalado por Koyré (KOYRÉ, 1971, p. 269).

#### IV. Aristóteles

Que a tridimensionalidade é para Aristóteles um atributo do corpóreo — suposto completo em magnitude e imutável — se aprende no primeiro capítulo do seu *De Caelo*:

*Se uma magnitude é divisível de um modo, é uma linha, se de dois modos, é uma superfície e se de três, um corpo. Além dessas, não há outra magnitude, porque três são todas as dimensões que existem, e o que é divisível em três direções é divisível em todas. (...) posto que ‘todas’ e ‘tudo’ e ‘completo’ [são conceitos que] não diferem entre si no que diz respeito à forma, mas apenas, quando muito, diferem nas suas matérias e naquilo a que eles são aplicados, só o corpo, entre as magnitudes, pode ser completo. Pois, somente ele é determinado por três dimensões, isto é, em um ‘todo’ (...) Nós não podemos passar do corpo para outra coisa, como passamos da linha para a superfície, e da superfície para o corpo. Pois, se pudéssemos, não seria mais verdade que o corpo é magnitude completa. Poderíamos passar além dele apenas em virtude de um defeito nele existente, e o que é completo não pode ser deficiente, pois se estende em todas as direções.” (tradução e grifos dos autores)<sup>(6)</sup>.*

Portanto, da leitura de Aristóteles, concluímos que o *Ser* — o corpóreo em sua completude — é a *causa materialis* da tridimensionalidade, negada ao *topos*, que é uma extensão bidimensional, como notou *Simplicius* (SIMPLICIUS, *apud* JAMMER, 1954).

#### V. Kant

É difundida na literatura a opinião de que Kant apresentou a primeira solução física para a questão da dimensionalidade (JAMMER, 1954; BRITTAN, 1978; BARROW, 1983;

---

<sup>(6)</sup> *A magnitude if divisible one way is a line, if two ways a surface, and if three a body. Beyond these there is no other magnitude, because the three dimensions are all that there are, and that which is divisible in three directions is divisible in all. (...) since ‘every’ and ‘all’ and ‘complete’ do not differ from one another in respect of form, but only, if at all, in their matter and in that to which they are applied, body alone among magnitudes can be complete. For it alone is determined by the three dimensions, that is, in an ‘all’ (...) We cannot pass beyond body to a further kind, as we passed from length to surface, and from surface to body. For if we could, it would cease to be true that body is complete magnitude. We could pass beyond it only in virtue of a defect in it and that which is complete cannot be defective, since it extends in every directions” (ARISTÓTELES, in BARNES, 1985)*



BARROW & TIPLER, 1986; CARUSO & MOREIRA XAVIER, 1987). A ele é atribuído o argumento de que a *razão da tridimensionalidade do espaço poderia ser encontrada na lei da gravitação de Newton, segundo a qual a força entre dois corpos decresce com o quadrado da distância que os separa*. Tal concepção se apóia, provavelmente, no título do décimo parágrafo do escrito *Considerações Sobre a Verdadeira Estimativa das Forças Vivas*, de Kant, a saber:

*“É provável que a tridimensionalidade seja devida à lei que define as forças que as substâncias exercem umas sobre as outras”* (KANT, 1747, p. 11).

Entretanto, veremos nesta Seção, que uma leitura mais cuidadosa da obra acima citada, como um todo, leva-nos a concluir que seu raciocínio não conduz a uma resposta satisfatória sobre a dimensionalidade do *espaço* — como se insinua no título e é normalmente aceito — mas limita-se, na verdade, a justificar a tridimensionalidade da *extensão*. Esta questão será examinada em outro trabalho (CARUSO & MOREIRA XAVIER, 1994).

Aqui cabe, apenas, mencionar dois pontos: em primeiro lugar, que essa idéia de Kant — elaborada no período pré-crítico — de procurar determinar a dimensionalidade do espaço a partir de uma lei física é, sem dúvida, um marco importantíssimo para a discussão moderna deste problema, embora não se sustente no período crítico da filosofia kantiana<sup>(7)</sup>; em segundo lugar, que há um ponto pacífico, qualquer que seja a leitura que se faça desses textos pré-críticos de Kant: a grande importância da lei de Newton em seu argumento, ou em outras palavras o papel fundamental que a *força* desempenha em sua explicação. Esta afirmativa é corroborada pelas citações abaixo:

*“Todo corpo tem uma força que lhe é essencial.”* (KANT, 1747, p. 3);

*“Prova-se facilmente que não haveria espaço nem extensão se as substâncias não tivessem forças pelas quais atuassem fora de seus limites. Pois sem uma força deste tipo não há conexão, sem esta conexão não há ordem e sem esta ordem não há espaço.”* (KANT, 1747, p. 10);

*“Posto que devemos ser capazes de deduzir tudo que se encontre entre as qualidades de uma coisa a partir daquela que contenha em si o fundamento mais completo da própria coisa, as qualidades da extensão, e consequente-*

---

<sup>(7)</sup> Esta delicada questão é tratada em (VUILLEMIN, 1967) e discutida pelos autores (CARUSO & MOREIRA XAVIER, 1994)

*mente sua tridimensionalidade, fundamentar-se-ão nas qualidades da força que as substâncias possuem na presença das coisas com as quais elas estão relacionadas.”* (KANT, 1747, p. 11).

A força à qual Kant se refere nestes textos é dada pela lei de atração de Newton que depende do inverso do quadrado das distâncias.

Este fato indica que a *causa efficiens* tem um papel fundamental na explicação que Kant apresenta para a tridimensionalidade e pode ser considerado uma indicação de quanto ele não compartilha das idéias galileanas de geometrização da Física. Seu sistema explicativo é essencialmente newtoniano, e toda a sua argumentação é construída a partir das leis de força. É como se ele entendesse que o estudo de espaços mais genéricos devesse preceder a discussão da dimensionalidade do espaço no âmbito da Física, antecipando uma interrelação dos dois problemas. Mesmo que sua conjectura refira-se às dimensões da *extensão*, Kant foi obrigado a imaginar a possibilidade de existência de espaços com um número diferente de dimensões, antes que houvesse uma teoria para estes tipos de espaço. Será a descoberta das geometrias não-euclidianas, no século XIX, que dará impulso a estas questões (JAMMER, 1954). Parece-nos, portanto, que Kant não só tinha consciência, já em 1747, da dualidade a que se referiu Whitrow (WHITROW, 1955, pp. 13-31), mas, sobretudo, lançou as suas bases.

Por outro lado, Kant rompe também com a concepção aristotélica do problema — no seu aspecto geral (causa do espaço) e particular (causa da dimensionalidade) — através da introdução da *força* como *causa efficiens* do espaço, via o conceito de *ordem*<sup>(8)</sup>. Embora aristotélico no papel que a *substância* desempenha em seu sistema explicativo, note que Kant considera, aqui, *força* como geradora de ordem (KANT, 1747, p. 10), ao contrário de Aristóteles, em cujo sistema, *força (dynamis)* conduz à ruptura de ordem cósmica.

Esta dupla ruptura — com Galileu e Aristóteles — demonstra a originalidade de Kant e, no fundo, aponta para a grande importância que sua idéia terá depois da invenção dos conceitos de linha de força e de campo. De fato, do ponto de vista da Física, uma compreensão mais profunda da conjectura de Kant só pode ser alcançada com o conceito de campo, com suas implicações já mencionadas na Seção III. É através da solução da equação

---

<sup>(8)</sup> O fato de Kant considerar a força como essencial ao corpo sugere que esta possa ter ainda, para ele, um certo caráter de essência (ou forma), reminiscência talvez aristotélica, que nos permitiria imaginar a força também como uma espécie de *causa formalis*.

de Laplace–Poisson em um espaço euclidiano de  $n$ –dimensões (ou, equivalentemente, pela aplicação do teorema de Gauss ao campo gravitacional produzido por uma massa) que se põe em evidência a relação entre o expoente do potencial newtoniano e a dimensionalidade do espaço.

Até onde sabemos — com o aval de Brittan (BRITTAN, 1978, pp. 96-97) —, não há outra tentativa de Kant para fornecer uma base física à questão da dimensionalidade. Sabe-se que Kant voltou a este problema, como atestam os manuscritos coligidos no *Opus Postumum* (KANT, 1986), mas, ironicamente, há uma interrupção no texto, num ponto fundamental, tornando impossível descobrir como o Kant maduro revisitaria o problema da dimensionalidade do espaço. Concluiremos esta Seção com esta reticente citação de Kant:

*“A qualidade do espaço e do tempo, por exemplo que o primeiro tenha três dimensões, o segundo somente uma, que a revolução seja regida pelo quadrado das distâncias são princípios que ... [interrupção]”* (KANT, 1986, p. 131).

## VI. Ehrenfest

Em seu artigo sobre a dimensionalidade do espaço, Ehrenfest introduz um novo enfoque para o problema, dando-lhe uma base física mais sólida (EHRENFEST, 1920, p. 440). Considera, como ponto de partida, a hipótese de que a dinâmica de um sistema planetário em um espaço de  $n$ –dimensões, seja regida pelo potencial solução da equação de Laplace–Poisson neste espaço, obtida por uma extensão formal do operador laplaciano de três a  $n$ –dimensões. Desse modo, mostra que o sistema planetário só admite soluções mecanicamente estáveis para  $n = 3$ . Em suma, Ehrenfest busca identificar diferenças entre alguns fenômenos físicos em um espaço tridimensional ( $\mathbb{R}^3$ ) e n-dimensional ( $\mathbb{R}^n$ ). A estes aspectos que distinguem a Física em  $\mathbb{R}^3$  daquela em  $\mathbb{R}^n$  ele dá o nome de *aspectos singulares*, e seu trabalho é dedicado a pô-los em evidência. O ponto central da abordagem de Ehrenfest consiste nas seguintes hipóteses: (i) é possível fazer uma extensão formal de certas leis físicas estabelecidas no  $\mathbb{R}^3$  para o  $\mathbb{R}^n$ ; (ii) a partir daí, podem-se buscar um ou mais princípios — por exemplo, o princípio da estabilidade — que, junto com esta lei, permitirão determinar o número de dimensões do espaço físico. Este tipo de abordagem foi seguido por outros autores, que mostraram que o átomo hidrogenóide de Bohr–Schrödinger e a solução de Schwarzschild das equações de Einstein apresentam também

aspectos singulares para  $n = 3$  (WHITROW, 1959; TANGHERLINI, 1963 e 1986). Uma crítica epistemológica à essência destes trabalhos foi apresentada pelos autores (CARUSO & MOREIRA XAVIER, 1987).

Gostaríamos de enfatizar que, para a idéia de Ehrenfest ser implementada, em geral é a *estrutura matemática* de certo formalismo físico, ou simplesmente a *forma* de uma equação física<sup>(9)</sup>, que é mantida, e sua validade em um espaço com um número arbitrário de dimensões, *postulada*. Isto revela o papel da *causa formalis* na resposta que dá Ehrenfest à questão: por que o espaço tem três dimensões? Porém há mais ingredientes no argumento de Ehrenfest: é preciso invocar também a *causa efficiens* para se entender a instabilidade dos sistemas dinâmicos considerados (planetário e hidrogenóide) para  $n \neq 3$ . Este fato, mais uma vez ilustra a complexidade das modernas explicações causais.

## VII. Considerações Finais e Conclusões

A dimensionalidade do espaço vem sendo problematizada desde Platão e Aristóteles, mas com grande descontinuidade (WEYL, 1949; JAMMER, 1954; REICHENBACH, 1957; GRÜNBAUM, 1974; BARROW & TIPLER, 1986; CARUSO & MOREIRA XAVIER, 1987). No século XIX, com o surgimento da geometria não-euclidiana, este assunto começa a deixar de ser objeto de especulação filosófica e passa a ser considerado um problema físico ou lógico (JAMMER, 1954). Nas primeiras décadas do século XX, sem dúvida, é a Teoria da Relatividade que vai reacender a discussão em torno deste tema (REICHENBACH, 1957; GRÜNBAUM, 1974). Nos últimos anos, esta questão vem adquirindo novo interesse na Física devido, principalmente, ao desenvolvimento de dois programas, a saber: tentativas de unificação das quatro interações fundamentais através de teorias construídas em espaços com maior número de dimensões, como supergravidade e *superstrings* (Cf., por ex., SRIVASTAVA, 1986; DAVIES & BROWN, 1988), e o estudo de sistemas não lineares envolvendo estruturas fractais (MANDELBROT, 1987). Portanto, a questão da dimensionalidade do espaço está longe de ser uma questão fechada, ou meramente acadêmica, e é ainda objeto de intensa investigação científica.

Além disso, existem numerosas questões epistemológicas referentes à dimensionalidade do espaço, que precisam ser elucidadas. Neste ensaio, discutiu-se a relação entre os critérios utilizados para explicar ou impor limites sobre a dimensionalidade do espaço e o sis-

---

<sup>(9)</sup> Não é demais repetir, estabelecida pressupondo a tridimensionalidade.

tema de explicação causal dominante no correspondente período histórico, focalizando-se as contribuições marcantes de Aristóteles, Kant e Ehrenfest ao problema da dimensionalidade. Vimos que os argumentos (e conseqüentes limitações) dos três sedimentam-se em explicações causais distintas: em Aristóteles a tridimensionalidade é um atributo das substâncias corpóreas (*causa materialis*); Kant parte de uma concepção newtoniana de força, que se torna basicamente a *causa efficiens* da tridimensionalidade (KANT, 1747), enquanto Ehrenfest admite, como ponto de partida de sua argumentação (na passagem  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) (EHRENFEST, 1920, p. 440), um referencial teórico construído, principalmente, a partir da idéia de *causa formalis*.

Excetuando-se alguns argumentos de natureza topológica (fundamentados na teoria dos nós, por exemplo), não encontramos na literatura especializada recente nenhum procedimento que não se baseie explicitamente em *equações diferenciais*. E mais: toda vez que se consegue obter vínculos sobre a dimensionalidade topológica do espaço, as equações em questão são lineares (não importando o método utilizado). Alguns exemplos são as equações de Laplace-Poisson (EHRENFEST, 1920, p. 440), de d'Alembert (HADAMARD, 1923; BÜCHEL, 1963), de Schrödinger (TANGHERLINI, 1963; CARUSO & MOREIRA XAVIER, 1987), de Klein-Gordon (CARUSO, NETO, SVAITER & SVAITER, 1991) e de Dirac (CARUSO & MOREIRA XAVIER, 1987; LÄMMERZahl, 1993). Espera-se que equações não-lineares dêem vínculos sobre a dimensionalidade fractal do espaço. Além disso, é de se supor que as teorias de campo unificadas sejam capazes de iluminar certos aspectos da questão da dimensionalidade do espaço físico. Se esta perspectiva se confirmar, mais uma vez verificaremos que a Matemática desempenha um papel fundamental na tentativa de se compreender esta questão, não como ciência pura, mas como único modo aceito, desde a revolução galileana, de formalizar um certo conhecimento do mundo fenomenológico. Este fato aponta para uma crescente valorização da *causa formalis* na abordagem do problema da dimensionalidade do espaço físico.

**Agradecimento:** Um de nós (F.C.) agradece ao CNPq, pela bolsa de pesquisa vigente durante o período no qual este trabalho foi realizado.

REFERÊNCIAS

- 1 ARISTÓTELES, *De Caelo*, Livro I, 268a, 5 e sq., in BARNES, J. (ed.) *The Complete Works of Aristotle*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1985.
- 2 BARROS, J.A. de. *Dois exemplos de indecidibilidade e incompletude em Física*, Tese de Doutorado. Rio de Janeiro: CBPF, 1991.
- 3 BARROW, J.D. “Dimensionality”, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* v. A310, p. 337, 1983.
- 4 BARROW, J.D. & TIPLER, F.J. *The Anthropic Cosmological Principle*. Oxford: Clarendon Press, 1986.
- 5 BOIS-REYMOND, E du. *Über die Grenzen des Naturerkennens*. Leipzig: Verlag von Veit & Comp., 1891; tradução italiana aos cuidados de CAPPELLETTI, V. *I confini della conoscenza della natura*. Milano: Feltrinelli Editore, 1973.
- 6 BRITTAN Jr., G.G. *Kant’s Theory of Science*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1978.
- 7 BÜCHEL, W. “Warum hat der Raum drei Dimensionen?”, *Physikalische Blätter* v. 19, pp. 547-49, 1963; traduzido e adaptado por FREEMAN, I.M. com o título “Why is Space Three-Dimensional”, *American Journal of Physics* v. 37, p. 1222, 1969.
- 8 BUNGE, M. *Causality and Modern Science*, 3<sup>a</sup> ed. revisada. New York: Dover, 1979.
- 9 CARUSO, F. & MOREIRA XAVIER, R. “On the physical problem of spatial dimensions: an alternative procedure to stability arguments”, *Fundamenta Scientiae*, v. 8. n. 1, pp. 73-91, 1987.
- 10 —. “Notas sobre o problema da dimensionalidade nos primeiros textos do jovem Kant”, *Notas de Física* CBPF-NF-050/94. Rio de Janeiro: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 1994.
- 11 CARUSO, F., NETO, N.P., SVAITER, B. & SVAITER, N. “Attractive or Repulsive Nature of Casimir Force in D-Dimensional Minkowski Spacetime”, *Physical Review D* v. 43, n. 4, pp. 1300-6, 1991.
- 12 COSTA, N.C.A. da & DORIA, F.A. “Undecidability and incompleteness in Classical Mechanics”, *Int. J. Theor. Phys.* v. 30, p. 1041 (1991).

- 13** DAVIES, P.C.W. & BROWN, J. (Eds.), *Superstrings: a theory of everything?*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
- 14** DIJKSTERHUIS, E.J. *De Mechanisering van het Wereldbeeld*. Amsterdam: 1959; tradução inglesa de DIKSOORN, C. *The Mechanization of the World Picture: Pythagoras to Newton*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1986.
- 15** EHRENFEST, P. “Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik?”, *Ann. Physik* v. 61, p. 440, 1920. Cf. também seu “In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?”, *Proc. Amsterdam Acad.* v. 20, p. 200, 1917. (Reimpresso em KLEIN, M.J. (ed.) *Paul Ehrenfest – Collected Scientific Papers*. Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1959. pp. 400-409).
- 16** FOURIER, J.B.J. *La Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822, in *Œuvres* publicadas por DARBOUX, G. Paris: édition Gauthier–Villars, t. I, 1888, t. II 1890. (Tradução inglesa in vol. 45, *Great Books*. Chicago: Enc. Britannica, 1952. p. 169).
- 17** GRÜNBAUM, A. *Philosophical Problems of Space and Time*, second, enlarged edition. Dordrecht: D. Reidel Publ., 1974.
- 18** HADAMARD, J. *Lectures on Cauchy’s problem in linear partial differential equations*. New Haven: Yale Univ. Press, 1923. pp. 53-54, 175-177 e 235-236.
- 19** HERTZ, H. *Electric Waves — being Researches on the Propagation of Electric Action with Finite Velocity through Space*. Macmillan and Co., 1893. (Reeditado em New York: Dover, 1962, p. 21).
- 20** JAMMER, M. *Concepts of Space: the History of Theories of Space in Physics*. Cambridge: Harvard Univ. Press, 1954.
- 21** —. *Concepts of Force: a Study in the Foundations of Dynamics*. Cambridge: Harvard Univ. Press, 1957. (Tradução italiana de BELLONE, E. *Storia del Concetto do Forza: Studio sulle Fondazioni della Dinamica*. Milano: Feltrinelli Editore, seconda edizione, 1979).
- 22** KANT, I. *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*. Königsberg: 1747. (Tradução inglesa de HANDYSIDE, J. in *Kant’s inaugural dissertation and the early writings on space*. Chicago: Open Court, 1929).

- 23** —. *Opus Postumum — passage des principes métaphysiques de la science de la nature à la physique*, tradução, apresentação e notas de MARTY, F. Paris: Presses Universitaires de France, 1986.
- 24** KOYRÉ, A. *Etudes galiléennes*. Paris: Hermann, 1966.
- 25** —. *Études d'histoire de la pensée philosophique*. Paris: Gallimard, 1971.
- 26** KUHN, T. *The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change*. Chicago: Univ. Chicago, 1977. (Tradução portuguesa de PACHECO, R. *A Tensão Essencial*, Lisboa, Edições 70, s/d. Cf. o artigo “Conceitos de causa no desenvolvimento da Física”, pp. 51-61).
- 27** LÄMMERZAHN, C. & MACIAS, A. “On the dimensionality of space-time”, *Journal of Mathematical Physics* v. 34, 4540, 1993.
- 28** C. LANZOS, C. *The Variational Principles of Mechanics*, quarta edição. New York: Dover, 1986.
- 29** LAPLACE, P.S. *Teoria Analítica das Probabilidades — Prefácio*, 1814. *apud* FER-RATER MORA, J. *Diccionario de Filosofia*. Madrid: Alianza, 1982.
- 30** MANDELBROT, B.B. *Les Objets Fractals*; edição italiana aos cuidados de R. Pignoni, *Gli Oggetti Frattali: Forma, Caso e Dimensione*. Torino: G. Einaudi, 1987.
- 31** MOREIRA XAVIER, R. “Notas sobre a evolução do conceito de causa na física pós-newtoniana: da causa eficiente à causa formal”. *Notas de Física* CBPF-NF-053/86. Rio de Janeiro: Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 1986.
- 32** —. “Bachelard e o Livro do Calor: o Nascimento da Física Matemática na Época da Articulação Causal do Mundo”, *Revista Filosófica Brasileira* v. 6, n. 1, pp. 100-113, 1993.
- 33** NEWTON, I. *Opticks or A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections & Colors of Light* (baseada na quarta edição, Londres, 1730). New York: Dover, 1952, *Query* 31.
- 34** —. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. The third editon (1726) with variant readings assembled and edited by KOYRÉ, A. and COHEN, I.B. Cambridge: Harvard University Press, 1972, *Rule 3 Book 3*.



- 35 REICHENBACH, H. *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*. (Tradução inglesa de REICHENBACH, M. & FREUND, J. *The Philosophy of Space & Time*. New York: Dover, 1957, pp. 273-83).
- 36 SCHENBERG, M. *Pensando a Física*. São Paulo: Ed. Brasiliense, 2<sup>a</sup> Ed, 1985.
- 37 SIMPLICIUS, *Física*, 601, *apud* (JAMMER, 1954).
- 38 SRIVASTAVA, P.P. *Supersymmetry, Superfields and Supergravity: an Introduction*. Bristol: Adam Hilger, 1986.
- 39 TANGHERLINI, F.R. “Schwarzschild Field in n-Dimensions and the Dimensionality of Space Problem”, *in Nuovo Cimento* v. 27, p. 636, 1963.
- 40 —. “Dimensionality of Space and the Pulsating Universe”, *ibid* v. 91B, p. 209, 1986.
- 41 VUILLEMIN, J. “La théorie kantienne de l’espace à la lumière de la théorie des groupes de transformations”, *The Monist*, v. 51, No. 3, pp. 332-351, 1967; reimpresso *In L’Intuitionnisme Kantien*. Paris: Vrin, 1994.
- 42 WEYL, H. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton: Princeton University Press, 1949.
- 43 WHITROW, G.J. “Why Physical Space has three Dimensions”, *Brit. J. Phil. Sci.* v. 6, pp. 13-31, 1955.
- 44 —. *The Structure and Evolution of the Universe*. New York: Harper and Row, 1959; *Cf.* também (WHITROW, 1955, pp. 13-31).