

# O OPERADOR DE FLUTUAÇÃO DE KINK

(THE KINK FLUCTUATION OPERATOR)

V. Gomes Lima<sup>(a)</sup>, J. Lauro Strapasson<sup>(b)</sup> e R. de Lima Rodrigues<sup>(c)\*</sup>

<sup>(a,c)</sup> Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Rua Dr. Xavier Sigaud, 150, CEP 22290-180, Rio de Janeiro-RJ, Brazil

<sup>(a)</sup> Departamento de Física,

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Antiga Rodovia Rio-São Paulo Km 47, BR 465, CEP 23.890-000, Seropédica-RJ

<sup>(b)</sup> Instituto de Física Teórica da UNESP

Rua Pamplona, 145, CEP 01405-900, São Paulo-SP - Brazil

May, 2001

## RESUMO

Apresentamos uma revisão breve do formalismo lagrangeano para um campo escalar real. Partindo da teoria de campos bidimensionais (1+1 dimensões), no limite estático, encontramos uma equação diferencial de segunda ordem, formalmente análoga à equação de Schrödinger independente do tempo, cujos estados ligados são deduzidos.

## ABSTRACT

We present a review work of the Lagrangian formalism to a real scalar field. Starting of the bidimensional (1+1 dimensions) field theory, in the static limit, we find a second order differential equation formally analogous at time independent Schrödinger equation, whose bound states are deduced.

Typeset using REVTeX

---

\*Permanente endereço: Departamento de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, Cajazeiras – PB, 58.900-000 - Brazil, e-mail:rafael@cfp.ufpb.br

## I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho, fazemos uma introdução à teoria de campos sob o ponto de vista clássico no espaço-tempo quadridimensional da relatividade especial de Einstein [1,2]. Consideramos somente o caso da teoria de campos governada por apenas um único campo escalar real, o qual descreve partículas bosônicas de carga elétrica nula. O campo escalar complexo que descreve partículas bosônicas carregadas não será investigado. Os objetivos principais são a dedução de uma equação diferencial de segunda ordem, formalmente análoga à equação de Schrödinger independente do tempo (equação de Schrödinger para estados estacionários) e a análise das soluções solitônicas em teoria de campos no espaço-tempo bidimensional [(1+1)D] (uma dimensão espacial e uma temporal), ou seja:  $\phi = \phi(x, t)$ . Em (1+1)D, as soluções estáticas, não singulares, classicamente estáveis e de energia finita  $\phi_k(x)$ , da equação de movimento são denominadas sólitons ou kinks [3–6]. No entanto, não há uma única definição para sólitons, em geral, eles são soluções de equações diferenciais não lineares estáticas [7].

Tais configurações podem ser topologicamente estáveis ou instáveis [8]. Especificamente vamos considerar o kink do potencial de poço duplo (também denominado de modelo  $\phi^4$ ), os quais são topologicamente não triviais e desempenham um papel muito importante em fenômenos de tunelamento de sistemas quânticos bi-estáveis e não instáveis [9]. Sólitons são também muito importantes na investigação de equação de onda não-linear, como por exemplo, as equações de Korteweg-de Vries e a equação de Schrödinger não-linear [10]. A estabilidade linear dos sólitons é examinada considerando flutuações discretas em torno da respectiva solução solitônica. A equação de estabilidade para o operador de flutuação é formalmente uma equação de Schrödinger de estados estacionários. As respectivas autofunções são interpretadas como excitações quânticas de partículas.

Para facilitar o entendimento deste trabalho por leitores de outras áreas de pesquisas Físicas, consideramos alguns detalhes do formalismo lagrangeano da teoria clássica de campos, utilizando o princípio da mínima ação, para deduzirmos a Equação de Euler-Lagrange (equação de movimento ou equação de campo).

Agora destacamos a motivação para se estudar teoria quântica de campos (TQC) em (1+1)D. Recentemente vem sendo bastante aplicado na Física conceitos e métodos

de topologia. As considerações de natureza topológica ganharam notoriedade pela sua utilização na demonstração da existência e estabilidade de soluções clássicas de modelos de teoria de campos.

As configurações solitônicas, que recebem a denominação particular de kink quando utilizam-se modelos bidimensionais (espaço-tempo em 1+1 dimensões) são os objetos principais de investigação. Neste trabalho, por comodidade, estamos usando o sistema de unidades natural bastante utilizado em teoria de campos, ou seja,  $\hbar = c = 1$ .

Um exemplo freqüentemente citado na literatura científica é o da existência de correntes topológicas em modelos (1+1)-dimensionais que se conservam independentemente das equações de movimento (equações de campo). Uma corrente desse tipo não é uma corrente de Noether usual<sup>†</sup>. De fato, a densidade de corrente e a densidade de carga está inserida no seguinte bivector definido no espaço-tempo, em 1+1 dimensões:

$$j_T^\mu = (j^0, j_x) = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \Gamma(\phi), \quad (\epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1, \mu, \nu = 0, 1), \quad (1)$$

onde  $j^0 = \rho$  representa a densidade de carga e  $j_1 = j_x$  representa a componente da densidade de corrente unidimensional,  $\vec{j}$ . Neste caso, vemos que a carga total associada seria:

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} dx j_T^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \epsilon^{01} \frac{\partial \Gamma(\phi)}{\partial x} = \Gamma(\phi)_{\phi=+\infty} - \Gamma(\phi)_{\phi=-\infty}. \quad (2)$$

Logo, a carga depende exclusivamente do comportamento assintótico da função  $\Gamma(\phi)$  e, por sua vez, do valor do campo escalar estático  $\phi(x)$  no infinito. Na seção IV, analisamos a carga topológica para o kink do modelo  $\lambda\phi^4$ , correspondente ao potencial de poço duplo.

Os modelos bidimensionais não são apenas um laboratório matemático e conceitual para a Física Teórica. Realmente, esses modelos são menos complexos do que os modelos de potenciais em 2+1 ou em 3+1 dimensões. Especificamente, consideramos o potencial de poço duplo, o qual possui dois estados de vácuo degenerados e uma simetria discreta. Para resolvermos a equação de movimento, no limite estático, usamos a condição de Bogomol'nyi, que transforma o problema de se resolver uma equação diferencial de segunda ordem em uma equação diferencial de primeira ordem [11]. Tais teorias de campos

---

<sup>†</sup>O teorema da Noether será considerado na seção V.

bidimensionais possuem muitas aplicações. Uma delas refere-se a propriedade de condutividade em polímeros lineares como o poliacetileno [12]. As soluções solitônicas em geral ocorrem em modelos de potenciais com quebra espontânea de simetria.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: Na seção II, vemos o formalismo lagrangeano para teoria de campos em (3+1)D. Na seção III, abordamos os sólitons em teoria de campos bidimensionais, que são denominados de kinks. Na seção IV, resolvemos a equação de estabilidade para os modos normais associados ao kink, a qual é formalmente análoga à equação de Schrödinger [13–15] para o potencial de poço duplo, cuja relação com a supersimetria em mecânica quântica [19–21,16] é comentada. O teorema da Noether é sucintamente considerado na seção V. Na seção VI, apresentamos nossas conclusões.

## II. ESTRUTURA MATEMÁTICA DO ESPAÇO-TEMPO

Nesta seção vamos fazer uma introdução da notação, no espaço-tempo quadridimensional, construindo alguns quadrivetores. Em quatro dimensões, podemos escrever as coordenadas  $x^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) para o quadrivetor posição contravariante no espaço-tempo da relatividade especial (de Einstein) com a componente temporal  $x^0 = ct$  e as coordenadas espaciais  $x^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), isto é,  $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$  no seguinte par ordenado  $x^\mu = (ct, \vec{x})$  ou  $x^\mu = (t, \vec{x})$ , onde  $c = 1$  e  $\vec{x}$  é o vetor posição no espaço euclidiano tridimensional [1]. Estamos usando a convenção de que os índices gregos variam de zero a três e os índices arábicos variam de um a três. Vamos adotar também a convenção de soma de Einstein, a saber, quando tivermos dois índices repetidos significa uma soma no respectivo índice.

O "comprimento" invariante do quadrivetor posição é dado por

$$x^2 = x \cdot x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu x^\mu = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (3)$$

onde o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  é uma matriz diagonal com os seguintes elementos

$$\begin{aligned} g_{00} &= -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = +1 \\ g_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{se} \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (4)$$

Note que a Eq. (3) define o tensor-métrico. A partir de (3) vemos que o quadrivetor posição covariante  $x_\mu$  é construído contraindo o tensor-métrico com o quadrivetor posição contravariante, isto é,

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{x}). \quad (5)$$

Neste caso, o produto escalar de dois quadrivetores quaisquer pode ser escrito como:

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (6)$$

Note que nesta equação usamos a convenção da soma de Einstein, na qual os índices repetidos aparecem sempre aos pares, um covariante e um contravariante juntos significando uma soma. E mais ainda, vemos que o produto escalar acima é não-euclidiano, pois ele pode resultar em um valor negativo. Ao contrário, o módulo de um vetor  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$  é sempre positivo no espaço euclidiano, onde o produto escalar, no sistema de coordenadas cartesianas é dado por  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ .

Note também que o tensor métrico contravariante  $g^{\lambda\mu}$  satisfaz a seguinte condição:

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda \quad (7)$$

onde  $\delta_\nu^\lambda$  é o delta de Kronecker  $\delta_\nu^\lambda = 1$  se  $\lambda = \nu$ , e  $\delta_\nu^\lambda = 0$  se  $\lambda \neq \nu$ . Das equações (4) e (5), obviamente vemos que  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ .

As transformações de Lorentz são transformações que mantêm invariantes o produto escalar  $x_\mu x^\mu$  no espaço de Minkowski. As transformações de Lorentz preservam a forma das equações de Maxwell, quando passamos de um referencial inercial para outro. Elas são dadas por uma transformação linear entre os quadrivetores posição  $x'^\mu$  e  $x^\mu$  de dois referenciais inerciais, isto é,

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad (8)$$

onde  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . De acordo com esta equação vemos que as transformações de Lorentz coloca as coordenadas espaciais e o tempo em mesmo pé de igualdade, obedecendo a mesma lei de transformação, na relatividade especial (de Einstein). Nesta teoria é postulado que a velocidade da luz é a mesma para todos os referenciais inerciais, o que resulta

em  $x'^0 = ct'$  e  $x^0 = ct$ , ou seja, a velocidade da luz  $c$  tem o mesmo valor medido em ambos referenciais. Portanto,

$$x^0 = ct, x'^0 = ct'^0 \Rightarrow (ct)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (ct'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 \quad (9)$$

é invariante, isto é,  $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$  é um escalar de Lorentz, como havíamos afirmado acima. Assim, todas as equações da Física quando expressas em termos de um produto escalar no espaço de Minkowski são ditas serem manifestamente covariantes.

As transformações de Lorentz (8) podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\xi' = L\xi, \quad (10)$$

onde  $\xi$  e  $\xi'$  são matrizes colunas, com os elementos sendo as componentes do quadri vetor posição contravariante  $x^\mu$ , e  $L$  é uma matriz 4x4 equivalente à matriz construída pelos coeficientes  $\Lambda_{\nu}^{\mu}$  da transformação de Lorentz.

### III. FORMALISMO LAGRANGEANO EM TEORIA DE CAMPOS EM (3+1)D

Agora, considere um sistema de partículas em mecânica clássica com infinitos graus de liberdade, descrito pela lagrangeana  $L(q_i, \dot{q}_i)$ , onde  $q_i$  são as coordenadas generalizadas para  $i = 1, 2, 3 \dots [1]$ .

Agora na passagem para teoria de campos, considera-se os campos classicamente como coordenadas generalizadas onde, em lugar do índice discreto  $i$ , temos um índice contínuo dado pelo vetor posição tridimensional  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , rotulando a nova variável dinâmica.

$$q_i(t) \longleftrightarrow \phi(\vec{r}, t)$$

A lagrangeana  $L$  no espaço-tempo quadridimensional (3+1)D (3 dimensões espaciais e 1 temporal) é dada por [1]:

$$L = \int d^3\vec{r} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (11)$$

onde  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e  $\mathcal{L}$  é chamada de densidade de lagrangeana, que é um funcional do campo  $\phi$  e suas derivadas  $\partial_\mu \phi$ , definidas nas vizinhanças do ponto  $(\vec{x}, t)$ . Neste caso, a

lagrangeana descreve a teoria de campos chamada de teoria local. Neste trabalho, vamos investigar a aplicação da teoria de campos local no espaço-tempo bidimensional. Note que a equação (11) é uma integral tripla, onde o elemento infinitesimal de volume em coordenadas cartesianas  $d^3\vec{r} = dxdydz$ .

O funcional denominado ação é definido por:

$$S[\phi] = \int Ldt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\vec{r} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi), \quad d^3\vec{r} = dxdydz. \quad (12)$$

Os quadri-derivadas parciais em relação aos quadri-derivados posição contravariante e covariante, respectivamente, são dados por:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (13)$$

Da mesma forma que para uma partícula, entre os quadri-derivados fixos  $x_1^\mu = (t_1, \vec{r}_1)$  e  $x_2^\mu = (t_2, \vec{r}_2)$  a evolução clássica do campo deve ser tal que o Princípio de Hamilton (princípio da mínima ação) seja satisfeito, ou seja,

$$\delta S = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\vec{r} \delta\mathcal{L} = \int d^4x \delta\mathcal{L} = 0. \quad (14)$$

Portanto, calculando a variação da densidade de lagrangeana, obtém-se:

$$\int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\partial_\mu\phi \right] = 0. \quad (15)$$

Como a operação de variação de um funcional comuta com a derivada parcial, isto é,  $\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi$ , obtém-se:

$$\int d^4x \left\{ \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] \delta\phi + \partial_\mu \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right] \right\} = 0. \quad (16)$$

As condições de contorno nas quais o campo deve se anular sobre a superfície muito distante (no infinito) e, por sua vez, com variação nula na fronteira (onde o campo assume valor fixo):

$$\phi \rightarrow 0, \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty \Rightarrow \delta\phi(\infty, t) = 0, \quad \delta\phi|_{\text{superfície}} = 0. \quad (17)$$

Note que o último termo da equação (16) não irá contribuir, pois usando o teorema da divergência, a integral do último termo será proporcional às variações do campo sobre

a superfície. Portanto, como  $\delta\phi$  é uma função arbitrária de  $x_\mu$ , a única maneira de (16) ser satisfeita é:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0. \quad (18)$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange para o caso contínuo, ou seja, para um único campo  $\phi = \phi(x^\mu) = \phi(t, \vec{r})$ , o qual pode ser um campo escalar real ou complexo, ou ainda um campo vetorial.

A generalização para  $N$  campos é óbvia,

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i} \mathcal{L} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_i} = 0, \quad (19)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, N$ . Neste caso, temos  $N$  equações de Euler-Lagrange.

#### IV. CONSTRUÇÃO DO OPERADOR DE FLUTUAÇÃO DO KINK DO MODELO DE POTENCIAL DE POÇO DUPLO

Em teoria de campos bidimensionais, definimos o kink como uma solução estática, não singular e de energia finita da equação de movimento do campo.

A densidade lagrangeana  $\mathcal{L}$  no espaço-tempo bidimensional (1+1)D para um campo escalar real  $\phi = \phi(t, x)$ , é dada por:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu\phi \partial^\mu\phi - V(\phi) \quad (20)$$

com  $\mu = 0, 1$ . Esta densidade de lagrangeana também pode ser escrita na forma não covariante, lembrando-se que temos uma soma nos índices repetidos:

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi') = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - \phi'^2) - V(\phi). \quad (21)$$

onde o ponto significa uma derivada parcial em relação ao tempo e o apóstrofo, derivada parcial em relação a coordenada de posição  $x$ .

Substituindo a densidade lagrangeana acima na equação de Euler-Lagrange, obtém-se a equação de movimento para o campo  $\phi$ ,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{d}{d\phi}V(\phi) = 0, \quad (22)$$

a qual no limite estático ( $\dot{\phi} = 0$ ), torna-se:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d}{d\phi}V. \quad (23)$$

Esta equação diferencial de segunda ordem pode ser não-linear dependendo exclusivamente da forma do potencial. Desde que o potencial pode ser escrito como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}U^2(\phi) \quad (24)$$

e multiplicando a Eq. (23) por  $\phi'$ , obtemos:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\phi'^2}{2} - \frac{U^2(\phi)}{2} \right] = 0, \quad (25)$$

onde estamos usando a regra da cadeia. Integrando esta equação, obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem denominada, na literatura, de condição de Bogomol'nyi para a energia mínima do kink (sinal negativo) ou anti-kink (sinal positivo), ou seja,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm U(\phi) = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (26)$$

Neste estágio, devemos destacar que a solução desta equação resolve também a equação de movimento que, no limite estático é uma equação diferencial de segunda ordem nas coordenadas de posição. Isso simplifica bastante as respectivas deduções do kink associado a certo potencial (1+1)-dimensional. Neste caso, ao invés de se resolver uma equação diferencial de segunda ordem resolvemos uma equação diferencial de primeira ordem. Para verificar se a solução da equação diferencial de primeira ordem é também solução da equação de movimento, basta o leitor derivar a condição de Bogomol'nyi em relação a  $x$  e, usando a regra da cadeia, restaurará a equação de movimento.

Integrando a condição de Bogomol'nyi, obtemos:

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\tilde{\phi}}{U(\tilde{\phi})}, \quad (27)$$

onde  $x_0$  será o centro do kink (sinal negativo) e do anti-kink (sinal positivo).

Considerando o caso do potencial de poço duplo em (1+1)D, cujo potencial é dado por [3]:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2 \Rightarrow U(\phi) = \sqrt{\lambda} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right), \quad (28)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro real que é chamado de constante de acoplamento. O termo quadrático em  $\phi$ , em geral, é interpretado como termo de massa ( $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$  como, por exemplo, na lagrangeana de Klein-Gordon). Note, contudo, que o sinal desse termo, no potencial de poço duplo, é negativo. Portanto, a priori,  $m$  não pode ser encarado como massa, mas como parâmetro.

De acordo com o cálculo diferencial, para encontrarmos os valores de máximo e mínimo do potencial, devemos derivar  $V(\phi)$  em relação a  $\phi$  e igualar a zero, de modo que obtemos:

$$V'(\phi) = \frac{d}{d\phi}V(\phi) = 2\lambda \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right) \phi = 0, \quad (29)$$

isto é,

$$\left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right) = 0 \Rightarrow \phi_{v_1} = +\frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \quad \phi_{v_2} = -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \quad (30)$$

ou

$$\phi_{v_3} = 0. \quad (31)$$

Note que somente dois desses três valores para o vácuo do potencial de poço duplo são raízes da equação (28), isto é,  $V(\phi_{v_1}) = V(\phi_{v_2}) = 0$ . De fato em geral, o potencial se anula nos estados clássicos de menor energia, o que nos permite deduzir imediatamente os valores do campo no vácuo. A derivada segunda de  $V(\phi)$  nos diz se os pontos encontrados são de máximo ou mínimo, então, derivando novamente em relação a  $\phi$ , temos:

$$V''(\phi) = 6\phi^2\lambda - 2m^2. \quad (32)$$

Portanto, obtemos:

$$V''(\phi_{v_1}) > 0, \quad V''(\phi_{v_2}) > 0 \quad \text{e} \quad V''(\phi_{v_3}) < 0. \quad (33)$$

Neste caso, a densidade de energia potencial tem dois mínimos degenerados, que são os estados de vácuo<sup>‡</sup>, quando  $\phi = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ . Por outro lado, como  $V''(\phi_{v_3}) < 0$ , então o potencial tem um máximo em  $\phi = 0$ . Note que, impondo  $V(\phi) = 0$  obteríamos os estados de vácuos.

---

<sup>‡</sup>Em teoria de campos, o estado de menor energia é denominado de vácuo.

De fato, em teoria de clássica de campos, o campo de menor energia é aquele que anula o potencial. Agora, estamos em condições de esboçarmos a curva da energia potencial, o qual está na figura I, no final deste trabalho.

O cálculo da solução solitônica. Relacionando as equações (26) e (28), utilizando a condição de Bogomol'nyi com a constante de acoplamento ( $\lambda$ ) não nula, o kink (sinal positivo) ou o anti-kink (sinal negativo) pode ser explicitado da seguinte forma:

$$\phi(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{tgh}[m(x - a)], \quad (34)$$

onde  $a$  é a constante de integração que representa o centro do kink, isto é, o kink é centrado no ponto  $x = a$ . Na teoria clássica,  $a$  pode ser feito igual a zero. O gráfico do kink está plotado na figura II, no final deste trabalho.

No modelo de potencial considerado aqui existem quatro setores topológicos, gerando dois espaços  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  contendo os estados de vácuos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  e dois espaços  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  contendo o kink e o antikink. A união dos dois espaços  $\{\Gamma_1 : \phi \rightarrow \phi_1 \text{ quando } x \rightarrow \pm\infty\} \cup \{\Gamma_2 : \phi \rightarrow \phi_2 \text{ quando } x \rightarrow \pm\infty\} \cup \{\Gamma_3 : \phi \rightarrow \phi_1 \text{ quando } x \rightarrow \infty \text{ e } \phi \rightarrow \phi_2 \text{ quando } x \rightarrow -\infty\} \cup \{\Gamma_4 : \phi \rightarrow \phi_2 \text{ quando } x \rightarrow \infty \text{ e } \phi \rightarrow \phi_1 \text{ quando } x \rightarrow -\infty\}$ , fornece o conjunto de todas as configurações de campos de energia finita em um tempo fixo. Realmente, assumindo que o kink está centrado na origem, isto é fazendo  $a = 0$  na Eq.(34), a densidade de energia do kink do potencial de poço duplo

$$E(x) = \frac{1}{2} \phi_k'^2 + V(\phi_k) = \frac{m^4}{\lambda} \operatorname{sech}^4(mx) \quad (35)$$

nos fornece uma energia finita e localizada, a massa do kink, também chamada de massa clássica da pseudopartícula:

$$M_{cl} = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) dx = \frac{4m^3}{3\lambda}, \quad (36)$$

onde usamos a seguinte integral indefinida  $\int \operatorname{sech}^4(y) dy = \operatorname{tgh}(y) - \frac{1}{3} \operatorname{tgh}^3(y)$ . Note que a massa do kink cresce indefinidamente quando  $\lambda$  se aproxima de zero. Logo, não podemos efetivar a teoria de perturbação na constante de acoplamento  $\lambda$ . O kink é, essencialmente, um fenômeno não-perturbativo. No entanto, a estabilidade clássica do kink está assegurada considerando pequenas perturbações ao redor da solução estática, cujo procedimento nos fornece o operador de flutuação, ou seja,

$$\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t), \quad (37)$$

onde  $\phi(x)$  é a solução estática que representa o kink e  $\eta(x, t)$  é uma flutuação em torno desta solução. Para linearizar a equação de movimento, a flutuação é considerada em ordem mais baixa, isto é, até a ordem linear. Assim, substituindo a equação (37) na equação de Euler-Lagrange, após expandirmos o potencial em série de Taylor até a primeira ordem em  $\eta$ , obtemos:

$$\frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) = 0. \quad (38)$$

Sabemos que a solução clássica  $\phi(x)$  é estática, o que nos permite escrever

$$G(x) \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=\phi(x)}, \quad (39)$$

sem dependência explícita do tempo.

Agora, expandindo a flutuação em termos de modos normais, podemos reescrevê-la na forma

$$\eta(x, t) = \sum_n \epsilon_n \eta_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad (40)$$

onde  $\epsilon_n$  é escolhido de modo a deixar  $\eta_n$  real. Neste caso, obtemos:

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + G(x) \right\} \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x) \quad (41)$$

ou

$$\hat{O}_F \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x), \quad \hat{O}_F = -\frac{d^2}{dx^2} + G(x) \quad (42)$$

onde

$$G(x) = 6\lambda\phi^2(x) - 2m^2. \quad (43)$$

Note que  $\hat{O}_F$  é um operador de flutuação do tipo do hamiltoniano que aparece em mecânica quântica não-relativística. Devemos destacar que estamos fazendo uma abordagem clássica, mas obtemos os estados excitados governados formalmente por uma equação de Schrödinger independente do tempo para uma partícula no potencial  $G(x)$ . Logo, substituindo a expressão da solução kink dado pela Eq. (34), obtemos a energia potencial da pseudo-partícula, a saber,

$$G(x) = m^2[4 - 6\operatorname{sech}^2(mx)], \quad (44)$$

a qual nos fornece a seguinte equação de flutuação:

$$\left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + m^2[4 - 6\operatorname{sech}^2(mx)] \right\} \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x). \quad (45)$$

Na referência [13], encontramos uma equação de Schrödinger para uma energia potencial que generaliza o termo de potencial da equação de estabilidade. Fazendo a mudança de variáveis  $z = mx \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} = m^2 \frac{d^2}{dz^2}$ . Portanto, comparando a nova equação na nova variável deduzida de (45) com a equação diferencial de segunda ordem (12.3.22) da referência [13],

$$\left\{ -\frac{d^2}{dz^2} + v \cosh(2\mu) + v \operatorname{senh}(2\mu) \operatorname{tgh}(z) - v \cosh^2(\mu) \operatorname{sech}^2(z) - \epsilon \right\} \psi = 0, \quad (46)$$

obtemos as seguintes correspondências:

- i)  $\psi = \eta_n(x)$ ,
- ii)  $-\epsilon + v \cosh 2\mu = 4 - \frac{\omega_n^2}{m^2}$ ,
- iii)  $v \cosh^2(\mu) = 6$ ,
- iv)  $\operatorname{senh}(2\mu) = 0$ ,

onde o lado esquerdo pertence à equação da referência [13] e o lado direito foi obtido de nossa equação.

Os autovalores ( $\epsilon$ ) da equação de Schrödinger da referência [13], página 1653, são dados por

$$\epsilon = v \cosh(2\mu) - \left[ \sqrt{v \cosh^2(\mu) + \frac{1}{4}} - \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 - \frac{v^2 \operatorname{senh}^2(2\mu)}{\left[ \sqrt{v \cosh^2(\mu) + \frac{1}{4}} - \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2}, \quad (47)$$

onde  $n = 0, 1, \dots, < \left[ \sqrt{v \cosh^2(\mu) + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2} v \operatorname{senh}(2\mu)} \right]$ . Conseqüentemente os modos normais da equação de estabilidade do kink estão associados aos seguintes autovalores:

$$\omega_n^2 = \left\{ 4 - \left[ \sqrt{6 + \frac{1}{4}} - \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2 \right\} m^2, \quad (48)$$

onde  $n = 0, 1, \dots, < \sqrt{6 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = 2$ . Logo, temos somente dois estados ligados: o estado fundamental com o autovalor  $\omega_0^2 = 0$  associado à autofunção normalizável  $\eta_0(x) = c_0 \operatorname{sech}^2(mx)$  e um estado excitado com o autovalor  $\omega_1^2 = 3m^2$  associado à autofunção também normalizável  $\eta_1(x) = c_1 \operatorname{senh}(mx) \operatorname{sech}^2(mx)$ . Obviamente, notamos que

os modos normais satisfazem a condição que garante a estabilidade linear do kink do potencial de poço duplo, a saber  $\omega_n^2 \geq 0$ .

As constantes de normalização são determinadas por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \eta_i^2 = 1, \quad (i = 0, 1) \Rightarrow c_0 = \left( \frac{\sqrt{3m}}{2} \right), \quad c_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{3m}{2} \right)^{1/2}.$$

Note que impomos a condição de normalização sobre as autofunções  $\eta_i$ , mas se essas integrais fossem divergentes as soluções da equação de estabilidade não seriam aceitas fisicamente.

Agora faremos uma análise da estabilidade linear para um potencial genérico que envolve o potencial do poço duplo. De fato, mostraremos que a estabilidade linear do kink é sempre garantida quando o potencial for positivo, ou seja, da forma dada por  $V(\phi) = \frac{1}{2}U^2(\phi)$ . Definindo

$$A = \phi'(x) \left( -\frac{d}{dx} \right) \frac{1}{\phi'(x)} \Rightarrow A = -\frac{d}{dx} + F(x)$$

$$F(x) = \frac{d}{dx} \ln(\phi'(x)) = \frac{\phi''}{\phi'}, \quad (49)$$

é um bom exercício mostrar que o operador hamiltoniano de flutuação tipo-Schrödinger da equação de estabilidade pode ser escrito em termos de dois operadores diferenciais de primeira ordem, isto é,

$$\hat{O}_F = A^\dagger A = -\frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi_k), \quad (50)$$

onde as duas linhas em  $V$  significam derivada de segunda ordem em relação a  $\phi$  tomando valores em  $\phi = \phi_k(x)$ . Em particular, no caso do potencial de poço duplo, vemos que  $V''(\phi_k)$  é dado pela Eq. (43) ou Eq. (44).

Agora, como os operadores  $A^\pm$  são mutuamente adjuntos é fácil de mostrar que  $\omega^2 \geq 0$ , ou seja, o valor esperado de  $\omega^2$  é dado por:

$$\langle \omega^2 \rangle = \langle \eta | A^\dagger A | \eta \rangle = (A | \eta \rangle)^2 \geq 0. \quad (51)$$

Portanto, provamos a estabilidade linear clássica para qualquer potencial positivo.

Além do mais, note que o modo zero satisfaz a seguinte condição de aniquilação:

$$A^- \eta_0(x) = 0 \Rightarrow \frac{d\eta_0}{dx} = F(x) \Rightarrow \eta_0 \propto \frac{d\phi}{dx}.$$

A fatorização para o operador de flutuação em termos do produto de dois operadores diferenciais mutuamente adjuntos está na forma de um companheiro supersimétrico da técnica algébrica de supersimetria em mecânica quântica [19]. Uma aplicação bastante interessante que gostaríamos de registrar é a realização da álgebra graduada de Lie da supersimetria com configurações topológicas, que tem sido destaque na literatura científica para ambos casos de sistemas relativísticos, envolvendo dois campos escalares reais acoplados [20] e um único campo escalar real [17,21]. Recentemente foi realizado um trabalho sobre a conexão de setores topológicos de configurações kinks de dois campos reais acoplados com uma rede hexagonal regular, marcando o plano sem supersimetria. As três junções que aparecem no modelo de potencial de dois campos escalares reais acoplados com simetria  $Z(3)$  permitiu construir uma rede de defeito na forma de uma rede hexagonal [22].

Para maiores discussões sobre as interpretações da equação de Schrödinger da mecânica quântica não-relativística veja as referências [14–16].

## V. TEOREMA DE NOETHER

Analogamente ao caso da partícula define-se o parêntese de Poisson para dois funcionais dos campos bosônicos  $\phi$  e  $\pi$ , como sendo:

$$\{R, Z\} = \frac{\partial R}{\partial \phi} \frac{\partial Z}{\partial \pi} - \frac{\partial R}{\partial \pi} \frac{\partial Z}{\partial \phi}, \quad (52)$$

onde

$$R = R(\phi, \pi), \quad Z = Z(\phi, \pi) \quad (53)$$

e  $\pi$  é dado por:

$$\pi = \pi(\vec{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi(\vec{r}, t)} \quad (54)$$

é o campo canônico conjugado a  $\phi$ . A evolução temporal de um funcional que não depende explicitamente do tempo  $Z = Z(\phi, \pi)$  pode ser escrita em termos do parêntese de Poisson de tal funcional com a hamiltoniana

$$H = \int d^3 \vec{r} \mathcal{H} = \int d^3 \vec{r} \{ \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi) \}, \quad (55)$$

ou seja,

$$\frac{dZ}{dt} = \{Z, H\} = -\{H, Z\}, \quad (56)$$

onde temos usado as equações de Hamilton, a saber,

$$\phi = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \quad \pi = -\frac{\delta H}{\delta \phi}.$$

Por conseguinte, quando o parêntese de Poisson de  $Z$  com  $H$  for nulo, o funcional  $Z$  será uma constante de movimento se  $Z$  não depender explicitamente do tempo.

O teorema da Noether é um dos teoremas mais belo da Física clássica, ele estabelece que para cada simetria contínua da lagrangeana ou da ação, que preservam as mesmas formas das equações de campo, implica numa lei de conservação. No caso da supersimetria a lagrangeana é não-invariante, enquanto que a ação é invariante sob as transformações de supertranslações no espaço-tempo.

No caso de um campo escalar sem supersimetria, vemos que uma variação da densidade de lagrangeana resulta em:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi \right\} \epsilon_\nu. \quad (57)$$

Como exemplo, considere uma translação infinitesimal no espaço-tempo, dada por:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \Rightarrow \delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = \epsilon^\mu, \quad \delta S[\phi] = 0, \quad (58)$$

onde  $\epsilon^\mu$  é um quadrivetor muito pequeno. Veremos que a translação no espaço gera a conservação do momento linear e a translação temporal gera a conservação da energia.

De fato, a translação do quadrivetor posição acarreta a seguinte variação do campo escalar  $\phi$ :

$$\delta \phi = \phi(x + \epsilon) - \phi(x) = \epsilon^\mu \partial_\mu \phi \quad (59)$$

onde expandimos  $\phi(x + \epsilon)$  em série de Taylor. Analogamente, obtém-se:

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \quad (60)$$

Note que usando o tensor-métrico podemos escrever esta variação em termos do quadrivetor infinitesimal covariante  $\epsilon_\nu$ , ou seja,  $\delta \mathcal{L} = \epsilon_\nu g^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{L}$ , o que nos permite comparar com a equação da variação da densidade de lagrangeana vista em (57). Portanto,

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (61)$$

onde  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia simétrico pela troca dos índices, o qual é dado por:

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (62)$$

Fazendo  $\nu = 0$ , obtemos:

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu 0} = 0, \quad (63)$$

onde

$$\mathcal{T}^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{H} \quad (64)$$

é a densidade de energia do campo  $\phi$ . Logo, a equação (63) representa a conservação de energia contínua do campo. No caso em 1+1 dimensões, a componente temporal do tensor densidade de momento-energia, torna-se:  $\mathcal{T}^{00} = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + \phi'^2) + V(\phi)$ . Para o potencial de poço duplo o tensor momento-energia, no limite estático, torna-se:

$$\mathcal{T}_{kink}^{00} = \frac{m^4}{\lambda} \operatorname{sech}^4(mx) = E(x). \quad (65)$$

Sabemos que a energia total do kink é exatamente a integral da densidade de energia no limite estático. Agora vamos mostrar que esse valor da energia corresponde ao valor mínimo da energia de acordo com a condição de Bogomol'nyi. De fato, a energia total para o kink, no limite estático, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi'^2(x) + U^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{(\phi'(x) + U)^2 - 2\phi'(x)U\} dx. \end{aligned} \quad (66)$$

Portanto, a energia mínima acontece quando  $\phi'(x) = -U$ , que é exatamente a condição de energia mínima de Bogomol'nyi [11].

$$\begin{aligned} E_{min} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \phi'^2(x) + \frac{1}{2} U^2 \right) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi' U dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \Gamma(\phi(x)) = T, \end{aligned} \quad (67)$$

onde  $T = \Gamma|_{x \rightarrow \infty} - \Gamma|_{x \rightarrow -\infty}$  e a função  $\Gamma(x)$  satisfaz a seguinte condição:  $\frac{d\Gamma}{d\phi} = U$ . A função gama associada ao modelo de potencial de poço duplo é dada por:  $\Gamma = \frac{\sqrt{\lambda}}{3} \phi^3 - \frac{m^2}{\sqrt{\lambda}} \phi$ . Note

que  $T$  é exatamente o valor da energia mínima que nesse caso coincide com a energia total pois a solução kink foi calculada usando a condição de Bogomol'nyi. Portanto, a carga topológica definida na introdução corresponde ao valor da energia mínima do kink. Neste caso, vemos também que a energia mínima depende somente do comportamento assintótico do kink em  $\pm\infty$ . Este fato caracteriza a configuração estática como um kink topológico ou defeito topológico. Realmente, o kink proporciona um defeito topológico, de acordo com a figura 2, ele interpola os dois estados de vácuo do potencial de poço duplo.

Por outro lado, fazendo  $\mu = 0$  e  $\nu = i$ , obtém-se a lei de conservação da densidade de momento linear do campo. Num trabalho didático foi mostrado a relação entre o tensor de momento-energia métrico e o canônico [18].

## VI. CONCLUSÃO

Neste trabalho, mostramos uma introdução do aparato matemático necessário para aplicações da análise de estabilidade de sólitons em 1+1 dimensões a partir da auto-interação de um campo escalar real. Abordamos a estrutura matemática do espaço-tempo (3+1)-dimensional dando ênfase às transformações de Lorentz. O espaço-tempo é denominado de espaço de Minkowski, o qual é não-euclidiano. No espaço-tempo, as transformações de Lorentz são construídas tal que quando passamos de um referencial inercial para outro referencial inercial, elas deixam o quadrado do quadrivetor posição ( $x^2 = x^\mu x_\mu$ ) invariante. Um bom exercício para o leitor iniciante seria verificar que as transformações de Lorentz preservam a forma das equações de Maxwell. Usamos o sistema de unidades natural, ou seja,  $\hbar = c = 1$ , onde  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$  e  $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$  é a velocidade da luz no vácuo.

Consideramos a dedução da equação de Euler-Lagrange, para a teoria de campos em (3+1) dimensões (três espaciais e uma temporal) para um campo escalar real, utilizando uma abordagem clássica do princípio da mínima ação. Vimos que a teoria de campos é uma teoria relativística. Definimos a densidade de lagrangeana somente para o caso do campo escalar real, em 3+1 dimensões e 1+1 dimensões.

Analizamos os sólitons clássicos e as ondas solitárias, onde discutimos as soluções kinks (sólitons em 1+1 dimensões). Não há uma única definição para sólitons. De um modo geral, os sólitons são soluções de equações diferenciais não lineares na forma de ondas solitárias. Sólitons genuínos são ondas solitárias que mantêm sua forma mesmo após colisões [4,7].

Entretanto, existe uma definição precisa para o kink. Em 1+1 dimensões, as soluções estáticas, não singulares, classicamente estáveis e de energia finita, da equação de movimento são denominadas de kinks [3,5,4]. Vimos que o kink satisfaz a uma equação diferencial de segunda ordem, obtida diretamente da equação de Euler-Lagrange, a qual foi transformada numa equação diferencial de primeira ordem, denominada de condição de Bogomol'nyi. A solução da condição de Bogomol'nyi é também solução da equação de movimento do kink.

Neste trabalho, construímos o tensor momento-energia associado ao kink do potencial

de poço duplo. Recentemente foi abordada a relação entre o tensor de momento-energia métrico e o canônico [18] Especificamente, consideramos as soluções analíticas para o kink  $\phi_k(x)$  do potencial de poço duplo. Usando o cálculo diferencial e integral mostramos que esse potencial tem dois estados de vácuo degenerados e um estado de energia máxima.

Em seguida, resolvemos a equação de estabilidade do kink, a qual é formalmente análoga à equação de Schrödinger unidimensional que corresponde à primeira quantização, encontramos as soluções dos modos normais, o modo de translação e investigamos a estabilidade do kink. Usando a referência [13], mostramos que o operador de flutuação para a equação de estabilidade do kink do potencial de poço duplo tem somente dois estados normalizados associados aos autovalores nulo e positivo, os quais garantem a estabilidade linear clássica.

Mostramos também que, no caso de modelos de potenciais que depende de um único campo, a estabilidade linear clássica estará sempre garantida desde que a energia potencial seja uma função positiva, ou seja,  $V(\phi) = \frac{1}{2}U^2(\phi)$ . Esta forma de potencial possibilita a aplicação da técnica algébrica de supersimetria em mecânica quântica [19,21] na solução da respectiva equação de estabilidade. No entanto, esta análise fica fora do objetivo deste trabalho.

Finalizamos este trabalho, registrando que o operador de flutuação aparece também em Mecânica Estatística via o formalismo de integrais de trajetória de uma partícula em  $\mathbf{D}$  dimensões [23].

## AGRADECIMENTOS

O autores agradecem aos Intitutos de Pesquisas Físicas IFT, São Paulo-SP e o CBPF, Rio de Janeiro-RJ, pelo apoio. JLS agradece a FAPESP pela bolsa de estudo de mestrado. RLR agradece ao Prof. J. A. Helayel pelo convite para fazer o estágio de Pós-Doutorado na CCP-CBPF e principalmente pelos incentivos.

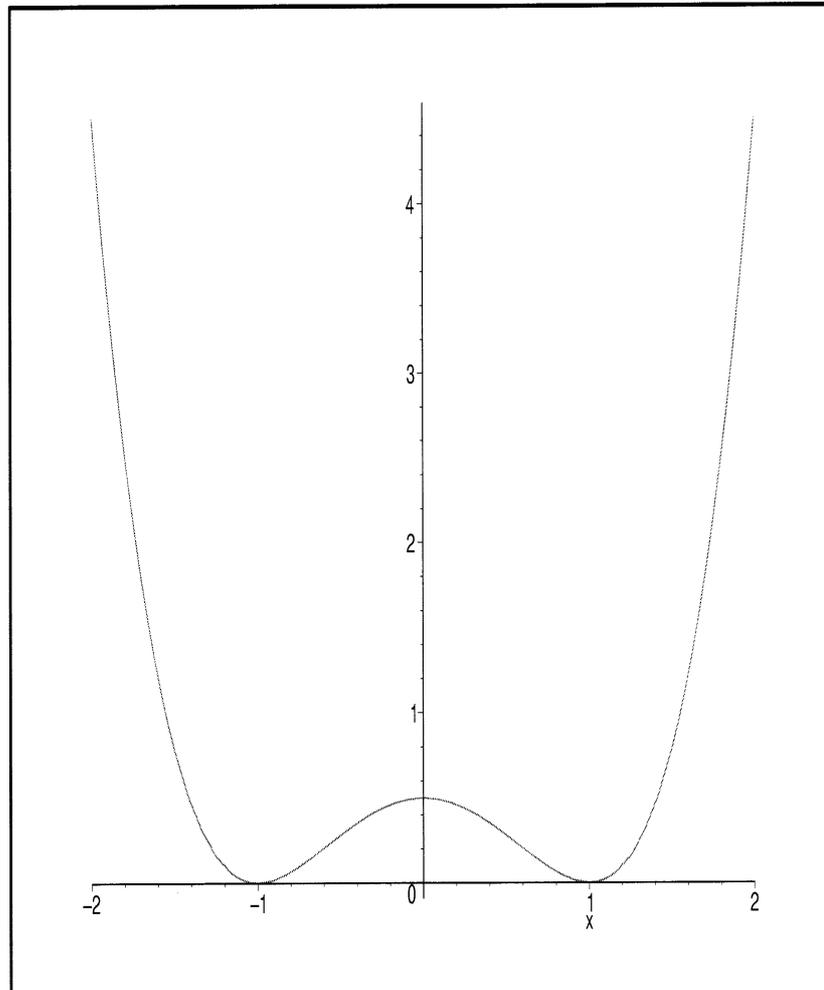


Fig. 1 – Gráfico da energia potencial  $V(y) = \frac{1}{8}(y^2 - 4)^2$ , para  $\lambda = \frac{1}{4}$ ,  $m = 1$ . O eixo vertical representa o potencial e o eixo horizontal representa o campo escalar.

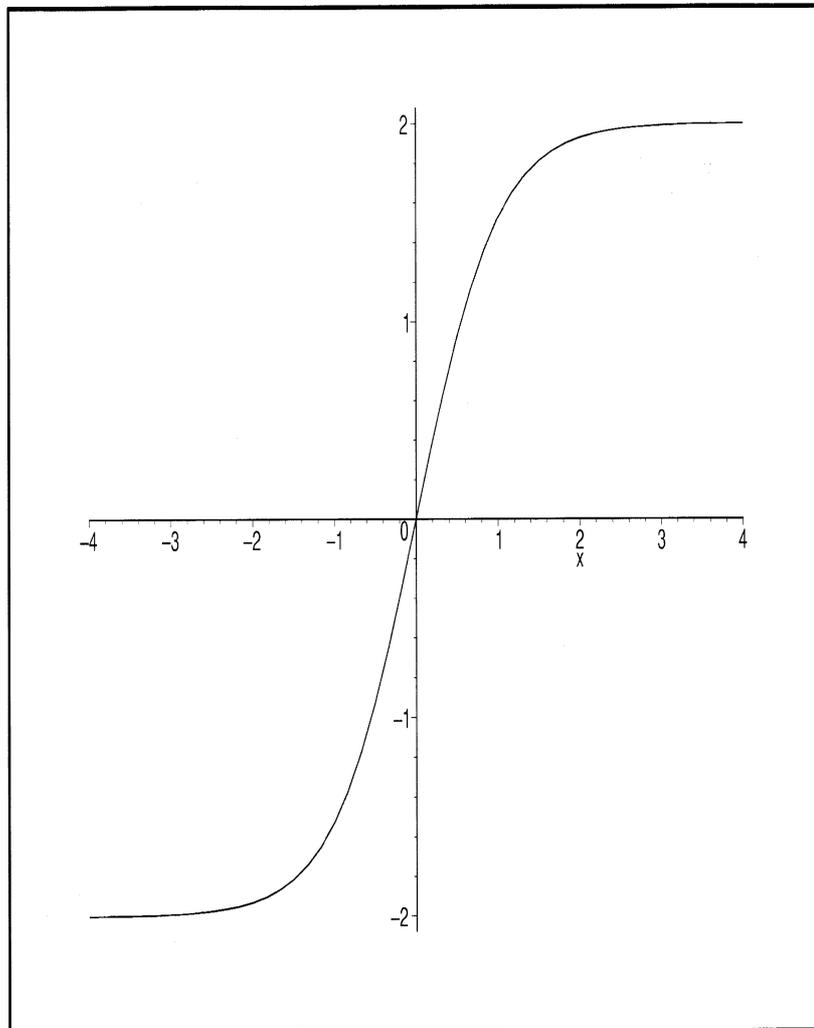


Fig. 2 – Gráfico do Kink do potencial de poço duplo, para  $\lambda = \frac{1}{4}$ ,  $m = 1$ . Nesta figura, o eixo vertical representa o kink e o eixo horizontal representa a coordenada de posição.

## REFERENCES

- [1] P. Ramond, **Field Theory: A Modern Primer**, The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981.
- [2] J. Barcelos Neto, **Introdução (mais conceitual que matemática) à teoria de campos**, mini-curso ministrado durante a 46<sup>a</sup> *Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC)*, julho/94, realizada em Vitória-ES.
- [3] R. Rajaraman, **Solitons and Instantons**, (North-Holland, Amsterdam, 1982), p. 20-21; S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, London, (1985), p. 190-191.
- [4] S. Coleman, **Aspects of Symmetry**, Cambridge University Press, London, (1985).
- [5] A. P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam and A. Stern, **Classical Topology and Quantum States**, (World Scientific, Singapore, 1991), p. 104-106.
- [6] E. J. Weinberg, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **42**, 177 (1992).
- [7] P. G. Drazin and R. S. Johnson, **Solitons: an introduction**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1993).
- [8] V. L. Vieira Baltar, J. Llambías and L. Masperi, *Phys. Rev.* **D44**, 1214 (1991).
- [9] S. Coleman, em **The Whys of Subnuclear Physics**, Plenum Press, New York, (1977), página 805; B. Felsager, **Geometry, Particle and Fields**, quarta edição, Odense Univ. Press, Odense, 1981.
- [10] G. L. Lamb, **Elements of Soliton Theory**, Wiley, New York, 1980; R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, **Solitons and Nonlinear Wave Equations**, Academic Press, London, 1982.
- [11] E. B. Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 489 (1976).
- [12] C. A. Aragão de Carvalho, **Aplicação de Teoria de Campos na Física da Matéria Condensada**, *Excelente notas de aula do mini-curso ministrado na*

*Primeira Escola de Pós-Graduação em Física do Nordeste, João Pessoa, 1987.* RLR, o último autor deste trabalho participou como ouvinte deste curso.

- [13] P. M. Morse and H. Feshbach, **Methods of Mathematical Physics, Vol. II**, McGraw-Hill Book, New York, p. 1650 (1953).
- [14] R. W. Robonit, **Quantum Mechanics**, Oxford University Press, 1nd edition, New York (1997).
- [15] P. M. Mathews e K. Venkatesan, **A Text Book of Quantum Mechanics**, Tata McGraw. Hill, New Delhi (1987).
- [16] R. de Lima Rodrigues, **Mecânica Quântica na Descrição de Schrödinger**, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **19**, 68 (1997).
- [17] R. de Lima Rodrigues in Proceedings (in Portuguese) of the *XIV Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos*, Caxambu-MG, Brazil, p. 410-413 (1993).
- [18] H. Fleming, *Rev. Bras. de Ens. de Física*, **16**, 48, (1994).
- [19] R. de Lima Rodrigues e A. N. Vaidya, *Rev. Bras. de Ens. de Física* **19**, 374 (1997).
- [20] R. de Lima Rodrigues, P. B. da Silva Filho e A. N. Vaidya, *Phys. Rev.* **D58**, 125023 (1998) e referências contidas neste artigo.
- [21] P. B. da Silva Filho, R. de Lima Rodrigues e A. N. Vaidya, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 2395 (1999) e referências citadas neste artigo.
- [22] D. Bazeia e F. A. Brito, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1094 (2000). Este artigo fez parte da tese de doutorado do segundo autor, sob orientação do primeiro autor desta referência, dentro do programa de pós-graduação do Departamento de Física da UFPB-Campus I-João Pessoa-PB.
- [23] C. A. A. de Carvalho, R. M. Cavalcanti, E. S. Fraga e S. E. Jorás, *Phys. Rev.* **E61**, 6392 (2000).