

Yang -Mills- SU(3) via FORM

Patricia M. da Costa Jorge e Patricia Duarte Peres
 Ciência da Computação
 Universidade Católica de Petrópolis (UCP)
 PIBIC - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)
 e
 J.L. Boldo
 DCP-CBPF

1 Introdução

A identificação e o estudo de simetrias de sistemas físicos mostra-se parte fundamental na etapa de resolução da dinâmica dos mesmos. Especialmente, no caso em que a interação que governa tais sistemas não é conhecida a nível fundamental, argumentos de simetria permitem obter um grande número de informações, com base em regras de seleção, por exemplo.

A Física de Altas Energias e Partículas que se faz atualmente é sedimentada sobre a idéia de simetrias. As teorias propostas para a descrição das interações fundamentais, bem como para a unificação destas em um esquema geral (Teorias de Grande Unificação), são todas formuladas em termos das chamadas simetrias locais de gauge.

As interações eletromagnéticas constituem-se numa teoria de gauge Abeliãna, com grupo de simetria U(1). A física das interações nucleares fracas (decaimentos-beta) é construída com base na simetria não-Abeliãna SU(2) (grupo das matrizes unitárias especiais), cuja álgebra é dada pelas relações de comutação

$$[\sigma_i \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k ,$$

onde os σ_i 's denotam as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

As interações nucleares fortes, responsáveis pela coesão entre prótons e nêutrons no interior dos núcleos atômicos, são descritas por uma simetria de gauge não-Abeliãna, com grupo SU(3), onde os constituintes fundamentais são os quarks, (entidades confinadas ao interior dos prótons, nêutrons e dos demais hádrõns), que interagem e se ligam uns aos outros pelos gluõns, que são os bósons vetoriais da QCD- a teoria de gauge SU(3) associada ao número quântico de cor.

Neste trabalho, o propósito será usar recursos do software FORM, a fim de obter uma série de resultados formais no âmbito de uma teoria de gauge não-Abeliãna, com grupo SU(3). São estudadas transformações dos campos, invariância de densidades de Lagrangeano.

equações de campo, distribuição de energia e reparametrização da teoria em termos de campos associados a partículas passíveis de detecção em aceleradores.

Antes porém, com o propósito de esclarecer alguns fatos essenciais a respeito da álgebra de Lie de $SU(3)$, iniciaremos com uma apresentação sucinta de resultados básicos sobre as conhecidas matrizes de Gell-Mann, que constituem uma base para a representação de dimensão-3 da álgebra de Lie $SU(3)$.

2 A álgebra de Lie de $SU(3)$

Uma matriz de $SU(3)$, numa representação arbitrária deste grupo, pode sempre ser parametrizada pela forma exponencial que se segue:

$$u(\omega) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_a\lambda_a\right) \quad a = 1, 2, \dots, 8,$$

onde os ω_a 's são parâmetros reais e os λ_a 's são os geradores de $SU(3)$, que, na representação 3-dimensional, 3, assumem a forma das matrizes de Gell-Mann:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Este conjunto define a chamada representação de Gell-Mann para os geradores de $SU(3)$:

$$\lambda_a^\dagger = \lambda_a ,$$

$$\text{tr } \lambda_a = 0 ,$$

$$\text{tr } (\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}.$$

A álgebra $\mathfrak{su}(3)$ é especificada pelas relações de comutação

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2} ,$$

sendo

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \\ f_{147} &= -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

As constantes de estrutura, f_{abc} , são completamente anti-simétricas em seus três índices e satisfazem à seguinte identidade de Jacobi:

$$f_{abe} f_{cde} - f_{cbe} f_{ade} + f_{ace} f_{dbe} = 0$$

Pode-se, também, introduzir um conjunto de constantes, d_{abc} , em termo das quais são expressos os anti-comutadores das matrizes de Gell - Mann:

$$\left\{ \frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right\} = \frac{1}{3} \delta_{ab} + d_{abc} \frac{\lambda_c}{2}.$$

Os coeficientes d_{abc} , contrariamente às constantes de estrutura, não dependem exclusivamente do grupo: dependem, também, da representação que se adota para os geradores. Assim, não podem, como os f_{abc} 's, ser adotados com os mesmos valores em outras representações das matrizes - λ_a .

Os valores numéricos dos coeficientes d_{abc} na representação fundamental de $SU(3)$ (a representação realizada pelas matrizes $-\lambda_a$) são dados a seguir:

$$\begin{aligned} d_{118} &= d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \\ d_{146} &= d_{157} = d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Os coeficientes d_{abc} são totalmente simétricos nos índices abc , e satisfazem à seguinte identidade de Jacobi:

$$f_{abe} d_{cde} + f_{cbe} d_{ade} + f_{dbe} d_{ace} = 0.$$

Com o auxílio destes coeficientes, pode-se, também, escrever as relações:

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{2}{3} \delta_{ab} + (d_{abc} + i f_{abc}) \lambda_c$$

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = \frac{2}{3} \delta_{ab} \lambda_c + (d_{abm} + i f_{abm}) \lambda_m \lambda_c$$

$$f_{abe} f_{cde} = \frac{2}{3} (\delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{ad} \delta_{bc}) + d_{ace} d_{bde} - d_{ade} d_{bce}$$

$$d_{aab} = 0 \text{ (há soma sobre } a \text{)}$$

$$f_{acd} f_{bcd} = 3\delta_{ab},$$

Expressões idênticas são válidas para os campos dos quarks, Ψ_i .

Ainda como um exemplo, caso houvésemos introduzido uma família de férmions, X , como triplete na representação $\underline{3}^*$, onde os geradores são dados por

$$G_a = -\frac{1}{2}\lambda_a^t,$$

os campos componentes, χ_I ($I = 1, 2, 3$), apresentariam as transformações:

$$\chi'_1 = \left(1 + 3i + \frac{1}{2}i\omega_3 + \frac{1}{6}i\omega_8\sqrt{3}\right)\chi_1 + \left(\frac{1}{2}i\omega_1 + \frac{1}{2}i\omega_2 i\right)\chi_2 + \left(\frac{1}{2}i\omega_4 + \frac{1}{2}i\omega_5 i\right)\chi_3,$$

$$\chi'_2 = \left(\frac{1}{2}i\omega_1 - \frac{1}{2}i\omega_2 i\right)\chi_1 + \left(1 + 3i - \frac{1}{2}i\omega_3 + \frac{1}{6}i\omega_8\sqrt{3}\right)\chi_2 + \left(\frac{1}{2}i\omega_6 + \frac{1}{2}i\omega_7 i\right)\chi_3,$$

$$\chi'_3 = \left(\frac{1}{2}i\omega_4 - \frac{1}{2}i\omega_5 i\right)\chi_1 + \left(\frac{1}{2}i\omega_6 - \frac{1}{2}i\omega_7 i\right)\chi_2 + \left(1 + \frac{7}{2}i - \frac{2}{6}i\omega_8\right)\chi_3.$$

Tais leis-de-transformação decorrem da matriz \tilde{M} :

$$\tilde{M} = I_3 - \frac{i}{2}\omega_a\lambda_a^t + o(\omega^2),$$

$$X' = \tilde{M} X.$$

Contrariamente ao caso de $SU(2)$, para o qual a representação fundamental (2) é equivalente à sua complexo-conjugada ($\underline{2}^*$), no caso de $SU(3)$, $\underline{3}$ e $\underline{3}^*$ não são equivalentes. Isto significa que não existe uma matriz unitária, \mathcal{U} , para a qual

$$\lambda_a^t = -\mathcal{U}\lambda_a\mathcal{U}^\dagger,$$

para todas as matrizes de Gell-Mann.

O propósito desta seção foi apenas introduzir a idéia de campos de matéria e suas transformações sob o grupo de gauge com o qual se trabalha: no nosso caso, $SU(3)$.

Finalizando, poderíamos deixar proposto o estudo das transformações do octete de campos escalares, T_a ($a = 1, 2, \dots, 8$), parametrizados matricialmente como abaixo:

$$T(x) \equiv T_a(x) \frac{\lambda_a}{2}.$$

Considerando uma transformação infinitesimal de $SU(3)$, seria instrutivo chegar às leis-de-transformação dos campos componentes, T_a , do octete T . Campos que possuem componentes em número igual aos geradores do grupo, como acima, ser colocados em forma matricial são ditos estar na representação adjunta (ou regular) do grupo de gauge.

4 O Lagrangeano e sua Invariância Global

Retomando os multipletes de campos de matéria da seção anterior, passemos à etapa de escrever o Lagrangeano completo para os mesmos:

Os campos - φ_i são denominados quarks escalares, ao passo que aos campos - ψ_i referimo-nos como quarks; isto, no caso de $SU(3)$ representar a simetria de cor das interações nucleares fortes. Não há, ainda, indícios da existência experimental dos squarks (quarks escalares), que são previstos pelo chamado MSSM (Modelo Padrão Minimamente Supersimétrico). Este assinala a possível presença de squarks em uma escala na faixa do TeV , região de energia que poderá ser acessada nas futuras gerações de aceleradores, como o LHC e NLC, onde os primeiros runnings deverão ocorrer, segundo prognósticos, em torno de 2004.

Sendo Φ e Ψ tripletes de $SU(3)$, as transformações de gauge a que estão sujeitos lêem-se como segue:

$$\Phi' = M\Phi$$

e

$$\Psi' = M\Psi,$$

sendo

$$M \equiv \exp\left(i\omega_a \frac{\lambda_a}{2}\right), \quad a = 1, 2, \dots, 8.$$

Os ω_a 's designam os parâmetros globais independentes das transformações - $SU(3)$ e os λ_a 's são as matrizes de Gell-Mann estudadas na seção anterior.

Por exemplo, para efeito de ilustração, tomemos uma transformação infinitesimal, $|\omega_a| \ll 1$,

$$M \cong I_3 + i\omega_a \frac{\lambda_a}{2}, \quad \text{onde } I \text{ representa a matriz identidade.}$$

Com a representação explícita da Seção 2, M escreve-se como se segue:

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}i\omega_3 + \frac{1}{6}i\omega_8\sqrt{3} & \frac{1}{2}i\omega_1 - \frac{1}{2}i\omega_2i & \frac{1}{2}i\omega_4 - \frac{1}{2}i\omega_5i \\ \frac{1}{2}i\omega_1 + \frac{1}{2}i\omega_2i & 1 - \frac{1}{2}i\omega_3 + \frac{1}{6}i\omega_8\sqrt{3} & \frac{1}{2}i\omega_6 - \frac{1}{2}i\omega_7i \\ \frac{1}{2}i\omega_4 + \frac{1}{2}i\omega_5i & \frac{1}{2}i\omega_6 + \frac{1}{2}i\omega_7i & 1 - \frac{1}{3}i\omega_8\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

A partir da expressão acima, pode-se transcrever como as componentes φ_i e ψ_i transformam-se sob a ação de $SU(3)$:

$$\begin{bmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \\ \varphi'_3 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

do que decorrem as leis-de-transformação dos campos:

$$\varphi'_1 = \left(1 + \frac{1}{2}i\omega_3 + \frac{1}{6}i\omega_8\sqrt{3}\right) \varphi_1 + \left(\frac{1}{2}i\omega_1 - \frac{1}{2}i\omega_2i\right) \varphi_2 + \left(\frac{1}{2}i\omega_4 - \frac{1}{2}i\omega_5i\right) \varphi_3,$$

$$\varphi'_2 = \left(\frac{1}{2}i\omega_1 + \frac{1}{2}i\omega_2i\right) \varphi_1 + \left(1 + \frac{1}{2}i\omega_3 + \frac{1}{6}i\omega_8\sqrt{3}\right) \varphi_2 + \left(\frac{1}{2}i\omega_6 - \frac{1}{2}i\omega_7i\right) \varphi_3,$$

$$\varphi'_3 = \left(\frac{1}{2}i\omega_4 + \frac{1}{2}i\omega_5i\right) \varphi_1 + \left(\frac{1}{2}i\omega_6 + \frac{1}{2}i\omega_7i\right) \varphi_2 + \left(1 - \frac{1}{3}i\omega_8\sqrt{3}\right) \varphi_3.$$

$$f_{acd} d_{bcd} = 0,$$

$$d_{acd} d_{bcd} = \frac{5}{3} \delta_{ab}.$$

Dá-se, a seguir, uma série de relações bastante úteis para traços envolvendo produto das matrizes de Gell-Mann. Tais expressões são frequentemente usadas nos cálculos de gráficos de Feynman para a QCD:

$$\text{tr } \lambda_a = 0,$$

$$\text{tr } (\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab},$$

$$\text{tr } (\lambda_a \lambda_b \lambda_c) = 2(d_{abc} + if_{abc}),$$

$$\text{tr } (\lambda_a \lambda_b \lambda_a \lambda_c) = -\frac{4}{3} \delta_{bc},$$

$$\begin{aligned} \text{tr } (\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d) &= \frac{4}{3} (\delta_{ab} \delta_{cd} - \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) + 2(d_{abe} d_{cde} - d_{ace} d_{dbe} + d_{ade} d_{bce}) + \\ &+ 2i(d_{abe} f_{cde} - d_{ace} f_{ade} + d_{ade} f_{bce}) \end{aligned}$$

Finalmente, uma outra relação a que se recorre nos cálculos perturbativos da QCD é dada abaixo:

$$\sum_{a=1}^8 (\lambda_a)_{\alpha\beta} (\lambda_a)_{\gamma\delta} = 2 \left(\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right).$$

3 Campos de matéria e suas Transformações - SU(3)

Consideremos duas famílias de campos de matéria: uma de natureza escalar, Φ , e outra de natureza fermiônica, Ψ . Suponhamos que ambas se transformem como tripletes de SU(3) :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \in \underline{\mathfrak{3}}$$

e

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \in \underline{\mathfrak{3}}.$$

Uma vez que a invariância do Lagrangeano ficou estabelecida, seria instrutivo apresentá-lo em termos dos campos componentes dos multipletes $\underline{3}$, $\underline{3}^*$ e $\underline{8}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \varphi_i^* \partial^\mu \varphi_i - m_1^2 \varphi_i^* \varphi_i + \bar{\Psi}_i i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i - m_2 \bar{\Psi}_i \Psi_i + \bar{X}_I i \gamma^\mu \partial_\mu X_I - m_3 \bar{X}_I X_I \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu T_a \partial^\mu T_a + -\frac{1}{2} m_4^2 T_a T_a - h_1 (\varphi_i^* \varphi_i)^2 - \frac{1}{4} h_2 (T_a T_a)^2 + \\ & - \frac{1}{12} h_3 T_a T_a T_b T_b - \frac{1}{8} h_3 d_{abe} d_{cde} T_a T_b T_c T_d - \frac{1}{2} h_4 \bar{\Psi}_i (\lambda_a)_{ij} \Psi_j T_a, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} i, j &= 1, 2, 3 \in \underline{3}, \\ I &= 1, 2, 3, \in \underline{3}^* \\ a &= 1, \dots, 8 \in \underline{8}. \end{aligned}$$

e os campos T_a foram considerados reais.

Constata-se que a prova da simetria de gauge é sempre mais simples quando se opera com o Lagrangeano expresso diretamente em termos dos multipletes, e não quando se trabalha com os campos componentes. Entretanto, as duas formas são perfeitamente equivalentes. A forma explícita em termos das componentes, φ_i , ψ_i , χ_I e T_a , é adotada para fins mais práticos, como os cálculos de gráficos de Feynman.

5 Tensor Energia- Momento

Sabe-se que a contribuição do setor de campos escalares ao tensor de energia- momento "improved" (simétrico e gauge- invariante) é dada por :

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{sc}}{\partial \partial^\mu \Phi} \partial_\nu \Phi + \partial_\nu \Phi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}_{sc}}{\partial \partial^\mu \Phi^\dagger} - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}_{sc}$$

onde \mathcal{L}_{sc} designa a parte do Lagrangeano restrita exclusivamente aos campos escalares do modelo e Φ representa um escalar genérico. Cabe ressaltar que a expressão acima é válida se o Lagrangeano dos escalares depender, no máximo, de primeiras derivadas destes campos.

Assim, concentrando-se apenas nos escalares, chega-se à expressão seguinte para $\theta_{\mu\nu}^{sc}$:

$$\theta_{\mu\nu}^{sc} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial_\nu \Phi + \partial_\nu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + tr \left(\partial_\mu T^\dagger \partial_\nu T + \partial_\nu T^\dagger \partial_\mu T \right) - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}_{sc}$$

Em termos das componentes φ_i e T_a , obtém-se:

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu}^{sc} = & \partial_\mu \varphi_i^* \partial_\nu \varphi_i + \partial_\nu \varphi_i^* \partial_\mu \varphi_i + \partial_\mu T_a \partial_\nu T_a - \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \varphi_i^* \partial^\alpha \varphi_i - m_1^2 \varphi_i^* \varphi_i + \frac{1}{2} \partial_\alpha T_a \partial^\alpha T_a + \\ & - \frac{1}{2} m_4^2 T_a T_a - h_1 (\varphi_i^* \varphi_i)^2 - \frac{1}{4} h_2 (T_a T_a) - \frac{1}{12} h_3 T_a^2 T_b^2 - \frac{1}{8} h_3 d_{abc} d_{cde} T_a T_b T_c T_d). \end{aligned}$$

As componentes relevantes no cômputo da energia e do momento totais do setor de excitações escalares são θ^{00} e θ^{0i} , identificadas, respectivamente, com as densidades de energia e momento do sistema. Estas podem ser explicitadas de acordo com o programa FORM que se segue:

```

argument;
id [Phi] = M*Phi;
id [Psi] = M*Psi;
id [Ki] = Mt*Ki;
id [T] = M*T*H([M]);
id H([T]) =H(M*T*H([M]));
id H(M*T*H([M]))=H(M)*H(T)*H(H([M]));
id H(H([M])) = M;
id H(T)*M*T = M*H(T)*T;
id H(M)*H(T)*M =H(M)*M*H(T);
id H(M)*M=1;

endargument;
id H(M?*Phi?)=H(Phi)*H(M);
id P(mu)*M*Phi = M*P(mu)*Phi;
id Ga(mu)*P(mu)*M*Phi? = M*Ga(mu)*P(mu)*Phi;
id Ga(mu)*P(mu)*Mt*Phi? = Mt*Ga(mu)*P(mu)*Phi;
id H(M)*M=1;
id H(Mt)*Mt=1;
id H([M])*M=1;
Print +s;
.end

Lag =
+ P(mu)*H(Phi)*P(mu)*Phi
+ H(Psi)*Ga(mu)*P(mu)*Psi*i_
+ H(Ki)*Ga(mu)*P(mu)*Ki*i_
- m(1)*m(1)*H(Phi)*Phi
- m(2)*H(Psi)*Psi
- m(3)*H(Ki)*Ki
+ tr(P(mu)*H(T)*P(mu)*T - m(4)*m(4)*H(T)*T)
- h(1)*H(Phi)*Phi*H(Phi)*Phi
- h(2)*tr(H(T)*T)*tr(H(T)*T)
- h(3)*tr(H(T)*T*H(T)*T)
- h(4)*H(Psi)*T*Psi
;

```

O resultado final apresentado pelo FORM mostra que, de fato, chega-se a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' = & \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m_1^2 \Phi^\dagger \Phi + \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m_2 \bar{\Psi} \Psi + \bar{X} i \gamma^\mu \partial_\mu X - m_3 \bar{X} X + \\
& + tr \left(\partial_\mu T^\dagger \partial^\mu T - m_4^2 T^\dagger T \right) - h_1 \left(\Phi^\dagger \Phi \right)^2 - h_2 \left[tr \left(T^\dagger T \right) \right]^2 - h_3 tr \left(T^\dagger T \right)^2 + \\
& - h_4 \bar{\Psi} T \Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi &\in \underline{3}, \\ \Psi &\in \underline{3}, \\ X &\in \underline{3}^*, \\ T &\in \underline{8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m_1^2 \Phi^\dagger \Phi + \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m_2 \bar{\Psi} \Psi + \bar{X} i \gamma^\mu \partial_\mu X - m_3 \bar{X} X + \\ & + \text{tr} \left(\partial_\mu T^\dagger \partial^\mu T - m_4^2 T^\dagger T \right) - h_1 \left(\Phi^\dagger \Phi \right)^2 - h_2 \left[\text{tr} \left(T^\dagger T \right) \right]^2 - h_3 \text{tr} \left(T^\dagger T \right)^2 \\ & - h_4 \bar{\Psi} T \Psi\end{aligned}$$

onde os m 's e os h 's designam, respectivamente, parâmetros de massa e constantes de acoplamento da matéria em auto-interação. Convém observar que, no caso em que os campos T_a do octete são reais, devido à Hermiticidade das matrizes- λ_a , segue que

$$T^\dagger = T.$$

Entretando, mantivemos os T^\dagger 's a fim de levarmos em conta, automaticamente, o caso de T_a 's complexos.

Pode-se verificar que esta densidade de Lagrangeano é invariante face às transformações dos campos, isto é,

$$\mathcal{L}'(\Phi', \Psi', X', T') = \mathcal{L}(\Phi', \Psi', X', T') = \mathcal{L}(\Phi, \Psi, X, T)$$

Vamos utilizar o seguinte programa FORM para constatar a simetria - $SU(3)$ do Lagrangeano:

FORM version 2.1 Aug 21 1992

```
NW Stat;
NFunctions P, [Phi], Phi, H, M, [Psi], Psi, [Ki], Ki, [T], T, m, tr, h, Ga, Mt, tr, [M];
Indices mu;
Local Lag = P(mu)*H([Phi])*P(mu)*Phi - m(1)^2*H([Phi])*Phi
+H([Psi])*i_*Ga(mu)*P(mu)*Psi - m(2)*H([Psi])*Psi+
H([Ki])*i_*Ga(mu)*P(mu)*Ki - m(3)*H([Ki])*Ki+
tr(P(mu)*H([T])*P(mu)*T - m(4)^2*H([T])*T)-
h(1)*(H([Phi])*Phi)^2 - h(2)*(tr(H([T])*T))^2 -
h(3)*tr(H([T])*T*H([T])*T) -h(4)*H([Psi])*T*Psi;

id Phi = M*Phi;
id Psi = M*Psi;
id Ki = Mt*Ki;
id T = M*T*H([M]);
```

```

NW Stat;
NFunctions P,[Phi],Phi,H,M,[Psi],Psi,[Ki],Ki,[T],T,m,tr,h,Ga,Mt,tr,[M];
Indices mu;
Local Lag = P(mu)*H([Phi])*P(mu)*Phi - m(1)^2*H([Phi])*Phi
            +H([Psi])*i_*Ga(mu)*P(mu)*Psi - m(2)*H([Psi])*Psi+
            H([Ki])*i_*Ga(mu)*P(mu)*Ki - m(3)*H([Ki])*Ki+
            tr(P(mu)*H([T])*P(mu)*T - m(4)^2*H([T])*T)-
            h(1)*(H([Phi])*Phi)^2 - h(2)*(tr(H([T])*T))^2 -
            h(3)*tr(H([T])*T*H([T])*T) -h(4)*H([Psi])*T*Psi;

id Phi = M*Phi;
id Psi = M*Psi;
id Ki = Mt*Ki;
id T = M*T*H([M]);

argument;
id [Phi] = M*Phi;
id [Psi] = M*Psi;
id [Ki] = Mt*Ki;
id [T] = M*T*H([M]);
id H([T]) =H(M*T*H([M]));
id H(M*T*H([M]))=H(M)*H(T)*H(H([M]));
id H(H([M])) = M;
id H(T)*M*T = M*H(T)*T;
id H(M)*H(T)*M =H(M)*M*H(T);
id H(M)*M=1;

endargument;
id H(M?*Phi?)=H(Phi)*H(M);
id P(mu)*M*Phi = M*P(mu)*Phi;
id Ga(mu)*P(mu)*M*Phi? = M*Ga(mu)*P(mu)*Phi;
id Ga(mu)*P(mu)*Mt*Phi? = Mt*Ga(mu)*P(mu)*Phi;
id H(M)*M=1;
id H(Mt)*Mt=1;
id H([M])*M=1;
Print +s;
.end

Lag =
+ P(mu)*H(Phi)*P(mu)*Phi
+ H(Psi)*Ga(mu)*P(mu)*Psi*i_
+ H(Ki)*Ga(mu)*P(mu)*Ki*i_

```

$$\begin{aligned}
& - m(1)*m(1)*\dot{H}(\text{Phi})*\text{Phi} \\
& - m(2)*H(\text{Psi})*\text{Psi} \\
& - m(3)*H(\text{Ki})*\text{Ki} \\
& + \text{tr}(\text{P}(\mu)*H(\text{T})*\text{P}(\mu)*\text{T} - m(4)*m(4)*H(\text{T})*\text{T}) \\
& - h(1)*H(\text{Phi})*\text{Phi}*H(\text{Phi})*\text{Phi} \\
& - h(2)*\text{tr}(H(\text{T})*\text{T})*\text{tr}(H(\text{T})*\text{T}) \\
& - h(3)*\text{tr}(H(\text{T})*\text{T}*H(\text{T})*\text{T}) \\
& - h(4)*H(\text{Psi})*\text{T}*\text{Psi}
\end{aligned}$$

Os resultados obtidos são transcritos abaixo:

$$\begin{aligned}
\theta^{00} \equiv \mathcal{E}_{sc} = & \dot{\varphi}_i^* \varphi_i + \vec{\nabla} \varphi_i^* \cdot \vec{\nabla} \varphi_i + \frac{1}{2} \dot{T}_a \dot{T}_a + \frac{1}{2} \vec{\nabla} T_a \cdot \vec{\nabla} T_a + m_1^2 |\varphi_i|^2 + \\
& + \frac{1}{2} m_4^2 T_a T_a + h_1 |\varphi_i|^4 + \frac{1}{4} h_2 (T_a T_a)^2 + \frac{1}{12} h_3 T_a^2 T_b^2 + \frac{1}{8} h_3 d_{abe} d_{cde} T_a T_b T_c T_d
\end{aligned}$$

e

$$\theta_{sc}^{0i} \equiv \vec{\mathcal{P}}_{sc} = - \dot{\varphi}_i^* \vec{\nabla} \varphi_i - \dot{\varphi}_i \vec{\nabla} \varphi_i^* - \dot{T}_a \vec{\nabla} T_a,$$

sendo \mathcal{E}_{sc} e $\vec{\mathcal{P}}_{sc}$ as densidades de energia e momento, respectivamente, advindas dos escalares presentes.

Com os parâmetros de massa e as constantes de acoplamento tais que

$$m_1^2 \geq 0, m_4^2 \geq 0$$

e

$$h_1, h_2, h_3 \geq 0,$$

garante-se a não-negatividade da energia e, conseqüentemente, a existência de um ground state estável, em torno do qual serão quantizadas as excitações do sistema.

A energia, \mathcal{E}_{sc} e o momento, $\vec{\mathcal{P}}_{sc}$, advindas dos escalares são simplesmente

$$\mathcal{E}_{sc} = \int d^3 \vec{x} \mathcal{E}_{sc} \geq 0$$

e

$$\vec{\mathcal{P}}_{sc} = \int d^3 \vec{x} \vec{\mathcal{P}}_{sc}$$

O estudo da configuração de ground state de um sistema de campos envolve apenas os escalares, visto que campos com spin $\neq 0$ não podem desenvolver valor esperado no vácuo (v.e.v), devido à invariância de Lorentz. Por esta razão não foi estudada a contribuição dos férmions ao tensor de energia-momento.

6 Gauging da Simetria SU(3)

De acordo com a prescrição de gauging de simetrias via covariantização das derivadas dos campos, o Lagrangeano da Seção 3 passará a apresentar simetria SU(3) local,

$$\Phi' = M\Phi,$$

$$\Psi' = M\Psi,$$

$$X' = NX,$$

$$T' = MTM^\dagger,$$

$$M \equiv e^{\frac{i}{2} \omega_a(x) \lambda_a}$$

e

$$N \equiv e^{-\frac{i}{2} \omega_a(x) \lambda_a^t}.$$

Se as derivadas espaço-temporais dos campos forem substituídas segundo as relações abaixo:

$$\partial_\mu \Phi \mapsto D_\mu \Phi \equiv \partial_\mu \Phi + ig A_\mu^\alpha \frac{\lambda_\alpha}{2} \Phi,$$

$$\partial_\mu \Psi \mapsto D_\mu \Psi \equiv \partial_\mu \Psi + ig A_\mu^\alpha \frac{\lambda_\alpha}{2} \Psi,$$

$$\partial_\mu X \mapsto D_\mu X \equiv \partial_\mu X + ig A_\mu^\alpha \left(-\frac{\lambda_\alpha^t}{2} \right) X,$$

$$\partial_\mu T \mapsto D_\mu T \equiv \partial_\mu T + ig A_\mu^\alpha \left[\frac{\lambda_\alpha}{2}, T \right],$$

tem-se que, para cada um dos campos acima, a derivada D_μ transforma-se covariantemente:

$$\text{para } \Phi \text{ e } \Psi, D'_\mu = MD_\mu M^\dagger,$$

$$\text{para } X, D'_\mu = ND_\mu N^\dagger,$$

$$\text{para } T, D'_\mu = MD_\mu M^\dagger.$$

Convém observar que, muito comumente, o campo-de-gauge, A_μ^α , é parametrizado em forma Lie-algebra-valued, o que consiste em contraí-lo com os geradores da representação de campo cuja derivada covariante é considerada. Assim:

$$\text{para } \Phi \text{ e } \Psi, D_\mu \equiv \partial_\mu + ig A_\mu$$

$$\text{sendo } A_\mu \equiv A_\mu^\alpha \frac{\lambda_\alpha}{2};$$

$$\text{para } X, D_\mu \equiv \partial_\mu + ig A_\mu$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{2}tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + (D_\mu\Phi)^\dagger (D_\mu\Phi) - m_1^2\Phi^\dagger\Phi + \bar{\Psi}i\gamma^\mu (D_\mu\Psi) \\
& - m_2\bar{\Psi}\Psi + \bar{X}i\gamma^\mu (D_\mu X) - m_3\bar{X}X + tr\left[(D_\mu T)^\dagger (D^\mu T) - m_4^2 T^\dagger T\right] \\
& - h_1(\Phi^\dagger\Phi)^2 - h_2\left[tr(T^\dagger T)\right]^2 - h_3 tr(T^\dagger T)^2 - h_4\bar{\Psi}T\Psi.
\end{aligned}$$

Este é o Lagrangeano que descreve a propagação e a auto-interação dos campos de Yang-Mills, $A_{\mu a}$, bem como a propagação, as auto-interações e as interações de gauge dos multipletes de matéria.

Para efeitos de manipulações práticas, como na derivação das regras de Feynman, é conveniente substituir as derivadas covariantes e expressar o Lagrangeano em termos dos campos componentes, o que nos leva à expressão:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu a} F_a^{\mu\nu} + (\partial_\mu\Phi)^\dagger (\partial^\mu\Phi) - m_1^2\Phi^\dagger\Phi + \bar{\Psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m_2\bar{\Psi}\Psi + \\
& + \bar{X}i\gamma^\mu\partial_\mu X - m_3\bar{X}X + tr\left[(\partial_\mu T^\dagger) (\partial^\mu T) - m_4^2 T^\dagger T\right] + \frac{ig}{2}A_{\mu a} (\partial^\mu\Phi)^\dagger \lambda_a\Phi + \\
& - \frac{ig}{2}A_{\mu a}\Phi^\dagger \lambda_a \partial^\mu\Phi - \frac{g}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu\lambda_a\Psi A_{\mu a} + \frac{g}{2}\bar{X}\gamma^\mu\lambda_a^t X A_{\mu a} + \\
& + ig tr\left(\partial_\mu T^\dagger [A^\mu, T] - [A_\mu, T^\dagger] \partial^\mu T\right) + \frac{1}{4}g^2 A_{\mu a} A_b^\mu \Phi^\dagger \lambda_a \lambda_b \Phi + \\
& + \frac{1}{2}g^2 tr\left([A_\mu, T^\dagger] [A^\mu, T]\right) - h_1(\Phi^\dagger\Phi)^2 - h_2\left[tr(T^\dagger T)\right]^2 - h_3 tr(T^\dagger T)^2 - \\
& - h_4\bar{\Psi}T\Psi.
\end{aligned}$$

Para se chegar às equações de campos para os potenciais de Yang-Mills e para os campos de matéria, aplica-se o princípio variacional sobre o Lagrangeano manifestamente gauge-invariante. Obtém-se :

$$D_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

onde J^ν é corrente gauge-covariante expressa em termos dos campos de matéria, como abaixo:

$$\begin{aligned}
J_\nu = & J_{\nu a} \frac{\lambda_a}{2}, \\
J_{\nu a} = & ig \left[\Phi^\dagger \lambda_a (D_\nu\Phi) - (D_\nu\Phi)^\dagger \lambda_a \Phi \right] + g (\bar{\Psi}\gamma_\nu\lambda_a\Psi - \bar{X}\gamma_\nu\lambda_a^t X) + \\
& + g f_{abc} (T_b\partial_\nu T_c - T_c\partial_\nu T_b) + 2g^2 f_{abc} f_{ade} A_{\nu d} T_b T_e.
\end{aligned}$$

Alternativamente, a equação de Yang-Mills acima pode ser recolocada sob a forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu,$$

sendo $A_\mu \equiv A_\mu^a \left(-\frac{\lambda_a}{2} \right)$;

para T , $D_\mu \equiv \partial_\mu + ig [A_\mu, \cdot]$
sendo A_μ o mesmo que para $\underline{3}$.

Da imposição de covariância das derivadas dos campos, chega-se às leis-de-transformação:
para Φ e Ψ :

$$A'_\mu = M A_\mu M^\dagger + \frac{i}{g} M \partial_\mu M^\dagger;$$

para X :

$$A'_\mu = N A_\mu N^\dagger + \frac{i}{g} N \partial_\mu N^\dagger;$$

para T :

$$A'_\mu = M A_\mu M^\dagger + \frac{i}{g} M \partial_\mu M^\dagger.$$

De qualquer destas transformações, decorre que, no caso infinitesimal ($\omega^2 \rightarrow 0$),

$$A'_{\mu a} = A_{\mu a} + f_{abc} A_{\mu b} \omega_c - \frac{1}{g} \partial_\mu \omega_a,$$

ou seja,

$$\delta_{gauge} A_{\mu a} = f_{abc} A_{\mu b} \omega_c - \frac{1}{g} \partial_\mu \omega_a$$

Devido à covariância do operador de derivada covariante,

$$D'_\mu = M D_\mu M^\dagger,$$

define-se, em perfeita analogia ao caso da simetria - $U(1)$, o field-strength de Yang - Mills:

$$\frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] \equiv F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu a} \frac{\lambda_a}{2},$$

do que se obtém

$$F_{\mu\nu a} \equiv \partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - g f_{abc} A_{\mu b} A_{\nu c}.$$

Do field - strength acima, é imediato verificar que

$$F'_{\mu\nu} = M F_{\mu\nu} M^\dagger,$$

ou equivalentemente,

$$F'_{\mu\nu a} = f_{abc} F_{\mu\nu b} \omega_c.$$

Em vista dos resultados acima, propõe-se a seguinte densidade de Lagrangeano, invariante sob a simetria - $SU(3)$ local:

com

$$j^\nu \equiv J^\nu - ig [A_\mu, F^{\mu\nu}].$$

Cabe, aqui, chamar a atenção para a distinção entre as duas correntes que figuram nas equações de Yang-Mills. J^μ é a corrente covariante,

$$J^{\mu\nu} = M J^\mu M^\dagger,$$

sendo covariantemente conservada :

$$D_\mu J^\mu = \partial_\mu J^\mu + ig [A_\mu, J^\mu] = 0.$$

Por outro lado, j^μ não é covariante segundo transformações SU(3), mas é a corrente estritamente conservada, e inclui a auto-interação dos campos de Yang-Mills:

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0.$$

Das equações de campo para o setor de campos de gauge,

$$D_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu,$$

procede-se, analogamente ao que se faz no caso do Eletromagnetismo, à definição dos campos elétrico e magnético não-Abelianos, \vec{E}_a e \vec{B}_a , respectivamente, para os quais podemos escrever equações correspondentes às leis de Gauss e de Amperè.

Ainda, em analogia ao caso U(1) de Maxwell, deve-se recorrer às identidades de Bianchi,

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\rho]] + [D_\nu, [D_\rho, D_\mu]] + [D_\rho, [D_\mu, D_\nu]] = 0,$$

que levam a

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\rho F_{\mu\nu} = 0,$$

de onde decorrem as equações homogêneas, que correspondem às leis de Faraday e de Gauss do Magnetismo.

Assim, identificando

$$\vec{E}_a \equiv F_{0ia} = -\vec{\nabla} \Phi_a - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_a + g f_{abc} \Phi_b \vec{A}_c,$$

e

$$\vec{B}_a \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jka} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_a + \frac{1}{2} g f_{abc} \vec{A}_b \times \vec{A}_c,$$

chega-se ao conjunto de equações tipo - Maxwell para os campos elétricos e magnético de Yang - Mills:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_a + g f_{abc} \vec{A}_b \cdot \vec{E}_c &= \rho_a, \\
\vec{\nabla} \times \vec{E}_a + g f_{abc} \vec{A}_b \times \vec{E}_c &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_a + g f_{abc} \Phi_b \vec{B}_c, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_a + g f_{abc} \vec{A}_b \cdot \vec{B}_c &= 0 \\
\text{e} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B}_a + g f_{abc} \vec{A}_b \times \vec{B}_c &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_a - g f_{abc} \Phi_b \vec{E}_c + \vec{J}_a.
\end{aligned}$$

A não-linearidade das teorias de Yang - Mills é evidente em termos das equações acima, onde os potenciais, Φ_a e \vec{A}_a , e os campos, \vec{E}_a e \vec{B}_a , aparecem em termos bilineares.

O estudo de solução das equações de Yang-Mills mostra a existência de soluções com características matemáticas interessantes, como os **instantons** de **monopólos magnéticos**. Os instantons podem emergir das equações no vácuo ($\rho = 0, \vec{J} = \vec{0}$) e decorrem da auto-interação dos campos de Yang - Mills. Já os monopólos magnéticos (conhecidos como monopólos de 't-Hooft e Polyakov) necessitam da presença de matéria para serem configurados. Outra classe de soluções de grande relevo são os chamados **mérons**, que são caracterizados por se configurarem por curtíssimo intervalo de tempo.

Uma discussão mais detalhada destas configurações deverá ser apresentada em estudo a ser realizado posteriormente.

Como sugestão, seria instrutivo escrever, em forma manifestamente covariante de gauge, as equação de campo para o setor de matéria.

7 Conclusão

Procurou-se demonstrar aqui a eficiência da linguagem FORM no estudo de uma teoria de gauge não-Abeliana, com grupo de simetria $SU(3)$. De fato, a verificação da invariância e a obtenção de grandezas relevantes para a física do problema são rápidas e claramente realizadas com este software. Como sugestão para aprofundamento do estudo apresentado neste trabalho, fica a incorporação do modelo $SU(3)$ no contexto do Modelo Padrão ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$), onde as interações de Yukawa entre os escalares de Higgs e os quarks induzem massa para estes últimos, mediante o mecanismo de quebra espontânea da simetria $SU(2)$. Todas as manipulações algébricas advindas deste mecanismo prestam-se a uma aplicação eficaz do FORM.

8 Agradecimentos

Ao Dr. J. A. Helayel pelas discussões e ao CNPq pelas bolsas concedidas.