CBPF-NF-025/99

Os Teoremas de Banach-Stone e de Brower

Luiz C.L. Botelho

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF/CNPq
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290-180 – Rio de Janeiro,RJ – Brasil

Departamento de Física
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
23851–180 – Itaguaí, RJ, Brasil

Abstract

Apresentamos uma demonstração simples do Teorema de Banach-Stone.

Um dos mais importantes resultados da Análise Funcional é o famoso Teorema de Banach-Stone ([1],[2]). O objetivo desta nota é complementar a nota "Alguns Teoremas Básicos da Teoria de Aproximação e a Transformada de Fourier em Espaços Vetoriais de Dimensão Infinita" – CBPF-NF-069/98 ([3]), via a da exposição de uma demonstração simples de tal teorema no contexto dos métodos topológicos apresentados na nota acima mencionada. Adicionalmente, aplicamos o teorema de Banach-Stone para produzir uma demonstração imediata do famoso Teorema de Brower da Topologia Diferencial.

1 O Teorema de Banach-Stone

Seja, então, X e Y espaços compactos, $C(X,R)$ e $C(Y,R)$ os respectivos espaços de Banach das funções reais, definidas nos espaços topológicos acima considerados.

Suponhamos que exista um isomorfismo isométrico entre $C(X,R)$ e $C(Y,R)$, isto é:

$$\begin{aligned} I : C(X,R) &\to C(Y,R) \\ f &\mapsto I(f) \end{aligned} \tag{1}$$

Vamos mostrar que X e Y são espaços topológicos homeomorfos (o Teorema de Banach-Stone).

Para este fim, consideremos o seguinte funcional linear e multiplicativo em $C(Y,R)$ para cada ponto $x \in X$ fixo.

$$I^{-1}(g)(x) \tag{2}$$

Pelo teorema de representação de Riez aplicado ao funcional linear acima definido, existe uma medida de Dirac (com suporte em um ponto $y \in Y$) tal que (veja o Apêndice) para toda $g \in C(Y,R)$

$$I^{-1}(g)(x) = \int_Y \; g(y) d^{\delta}(y - \bar{y}) = g(\bar{y}) \tag{3}$$

Consideremos a relação de X em Y definido pela relação acima para cada $x \in X$.

$$\begin{aligned} I : X &\to Y \\ x &\to \bar{y} \end{aligned} \tag{4}$$

Observemos que I é uma função de X e Y, já que caso existam 2 pontos y_1 e y_2 imagem de um único $x \in X$ pelas relações eq. (3) e eq. (4), teremos que para *toda* função $y \in C(Y,R)$

$$I^{-1}(g)(x) = g(y_1) = g(y_2) \tag{5}$$

uma contradição já que existem funções $g \in C(Y,R)$ que separam os pontos de Y.

A função $h : X \to Y$ é injetiva, já que caso existam (por simplicidade do argumento) 2 pontos x_1 e x_2 $(x_1 \neq x_2)$ em X aplicados por h em um mesmo ponto $y \in Y$, então

$$I^{-1}(g)(x_1) = I^{-1}(g)(x_2) \tag{6}$$

para toda função $I^{-1}(g)$ em $C(X, R)$. Como I é um isomorfismo isométrico, esta conclusão nos leva ao fato de que $C(X, R)$ não separará pontos, uma contradição.

Temos, também, trivialmente que h é uma aplicação contínua e que h é sobre (bastando para isso considerar o isomorfismo inverso para vermos que X é homeomorfo a um espaço de Y e que Y é homeomorfo a um subespaço de X).

Concluimos então que $h : X \to Y$ definida pelas eqs. (4)-(5) define um homeomorfismo de X em Y.

Como consequência imediata do teorema acima e do teorema de Weierstrass em $C([0,1]^N, R)$ podemos ver que caso dois cubos de dimensão N e M sejam homeomorfos, então os espaços de funções $C([0,1]^N, R)$ e $C([0,1]^M, R)$ serão trivialmente isometricamente isomorfos.

Como a imagem dos N projeções por este isomorfismo isométrico, também devem gerar $C([0,1]^M, R)$, pelo Teorema de Weirstress-Stone, concluimos que N (o número de projeções ortogonais em $[0,1]^N$) deve ser igual a M (o número de projeções ortogonais em $[0,1]^M$).

Finalmente, observando que uma variedade compacta é a união encaixante de cubos, podemos concluir facilmente que caso uma variedade compacta de dimensão N seja homeomorfo a uma variedade compacta de dimensão M, então $N = M$ (Teorema de Brower).

Agradecimentos – O autor agradece a Professora Titular do I.M.-USP Ofélia Alas pelas importantes discussões sobre os Tópicos de Topologia Geral utilizados nestas pesquisas e aos Professores Jacob Palis e Carlos Isnard do I.M.P.A. – CNPq pela hospitalidade durante a visita deste autor ao I.M.P.A. – 1996.

References

[1] G.F. Simmons, *"Introduction to Topology and Modern Analysis"*, McGraw Hill, (1977).

[2] N. Dumford and J. Schwartz, *"Linear Operators"* (part I), Interscience, NY, 1958.

[3] Luiz C.L. Botelho, Notas de Física, CBPF-NF-069/98.

Apêndice

Neste apêndice, mostraremos que caso uma medida μ em uma dada σ-álgebra m em um conjunto X satisfaz a condição

$$\mu(A) \cdot \mu(B) = 0 \tag{A.1}$$

sempre que $A \wedge B = \emptyset$ para A e B pertecendo a m, então μ é concentrada em um ponto (a famosa medida de Dirac). Para isto seja $X \in m$. Sabemos que $\mu(X) > 0$, por hipótese. Consideremos uma partição de X, isto é: $X = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ com $A_i \wedge A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e $\mu(A_i) > 0$ para cada índice i. Devido a condição (A-1), teremos que a medida de X é concentrada em único $A_{\bar{i}}$. Procedendo analogamente para este $A_{\bar{i}}$, chegaremos a conclusão que a medida de A está concentrada em um único ponto $x \in X$.

Considerando, agora, a medida associada a um funcional linear *multiplicativo* $I(f)$ em $C(X)$, sendo X um espaço compacto (o Teorema de Riesz). Teremos, como resultado da multiplicatividade do funcional, que a sua medida de Riesz associada sempre satisfaz a condição (A-1) para m sendo a σ-álgebra dos Borelianos de X, bastando para verificar este resultado a consideração da relação abaixo

$$I(\chi_{A \wedge B}(x)) = I(\chi_A(x)\chi_B(x)) = I(\chi_A(x))I(\chi_B(x))$$

para A e B conjuntos mensuráveis disjuntos. Aqui, $\chi_C(x)$ denota genericamente função característica associada a um dado conjunto boreliano $C \in X$.