

Dopplera efiko de luma ebena vidata per akcelata observanto

Efeito Doppler de plano de luz visto por observador acelerado

F.M. Paiva

Departamento de Física, U.E. Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

15-a de oktobro, 2008

Resumo

Ebena eklumiĝas unukolore kaj tuj poste mallumiĝas, dum observanto ekmoviĝas orĉe el ebena kun konstanta propra akcelo. Special-relativeco antaŭdiras, ke observanto vidos luman cirklon ĉiam en direkto mala al la ebena, sen Dopplera efiko, kaj ke tiu cirklo ŝajnos progresse etigi ĝis punkto.

Um plano acende monocromaticamente e imediatamente após se apaga, enquanto um observador parte perpendicularmente do plano com aceleração própria constante. A relatividade especial prediz que o observador verá um círculo luminoso sempre na direção oposta ao plano, sem efeito Doppler, e que esse círculo parecerá encolher progressivamente até um ponto.

1 Enkonduko

Supozu observanton senmovan en ebena. Subite la tuta ebena eligas unukoloran lumon en ĉiuj direktoj, dum tre mallonga intertempo. Sammomente la observanto ekmoviĝas orĉe el la ebena, kun konstanta propra akcelo. Ni priskribas tion, kion la observanto vidas el tiu ekbrilo, laŭ special-relativeco.

Movadon de objekto kun konstanta propra akcelo studis pluraj aŭtoroj: Møller

1 Introduĉão

Suponha um observador parado em um plano. Subitamente o plano inteiro emite luz monocromática em todas as direções, com duração muito curta. No mesmo momento o observador começa a se mover perpendicularmente ao plano, com aceleração própria constante. Nós descrevemos o que o observador vê desse lampejo, segundo a relatividade especial.

O movimento de um objeto com aceleração própria constante foi estudado por vários au-

[1, paĝo 72], Rindler [2, paĝo 49], Dwayne Hamilton [3], Landau kaj Lifshitz [4, paĝo 22], Cochran [5], kaj ni mem [6, 7, 8, 9, 10]. Propra akcelo de objekto estas la akcelo mezurata per inercia referenca sistemo kie la objekto momente restas. Tiu akcelo \vec{a} malegalas Newtonan akcelon $\vec{a}_N := d^2\vec{x}/dt^2$ kaj pli taŭgas al special-relativeco. Fakte, la rapido v de objekto kun konstanta Newtona akcelo a_N povas matematike superi la liman valoron de vakuo-lumo-rapido c , post sufiĉe da tempo. Kontraŭe, rapido de objekto kun konstanta propra akcelo a neniam estos c .

Por priskribi la fenomenon, difinu $S' := [ct'; z', \rho', \varphi']$ kiel space cilindra sistemo de koordinatoj kie lumfonto estas senmova kaj okupas la tutan ebenon $z' = 0$. Vidu figuron 1. La observanto komence estas senmova en loko $z' = \rho' = 0$, kaj ekde momento $t' = 0$ ĝi moviĝas kun konstanta propra akcelo a en la pozitiva direkto de akso z' . Ĝia movado do estas [1, paĝo 74], [9]

$$z' = \frac{c^2}{a} [\cosh(a\tau/c) - 1], \quad \rho' = 0, \quad \sinh(a\tau/c) = at'/c, \quad (1)$$

estante τ la propra intertempo de observanto ekde $t' = 0$. Rimarku en lasta (1), ke τ egiĝas malpli rapide ol tempa koordinato t' de horloĝaro de S' . Rapido $v := dz'/dt'$ de observanto en S' kaj rilata faktoro γ de tempa dilato pliiĝas kiel

$$v = c \tanh(a\tau/c), \quad \gamma = \cosh(a\tau/c). \quad (2)$$

Kelkaj interesaj rimarkoj pri akceloj indas mencion ĉi tie. Unue, la konstanta propra akcelo a en ĉi tiu artikolo rilatas al malkonstanta Newtona akcelo $a_N(t')$ per $a = \gamma^3 a_N$, estante $\gamma(t') := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ kaj estante $v(t')$ la rapido de objekto. Ĉar $\gamma(t') \geq 1$, tial $a_N(t') \leq a$ ĉi tie.

Due, ekvacioj (2) kaj (1) kaŭzas $v \approx a_N t'$ kiam $\tau \approx 0$, kvazaŭ la Newtona kine-

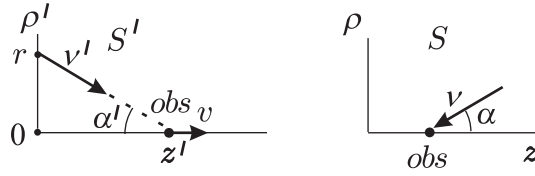
tores: Møller [1, pág.72], Rindler [2, pág.49], Dwayne Hamilton [3], Landau e Lifshitz [4, pág.22], Cochran [5], e nós mesmos [6, 7, 8, 9, 10]. aceleração própria de um objeto é aquela medida em um sistema inercial de referência em que o objeto esteja momentaneamente parado. Essa aceleração \vec{a} difere da aceleração Newtoniana $\vec{a}_N := d^2\vec{x}/dt^2$ e se presta melhor à relatividade especial. Com efeito, a velocidade v de um objeto com aceleração Newtoniana a_N constante pode matematicamente superar o valor limite c da velocidade da luz no vácuo, depois de um tempo suficiente. Ao contrário, a velocidade de um objeto com aceleração própria a constante nunca será c .

Para descrever o fenômeno, defina $S' := [ct'; z', \rho', \varphi']$ como um sistema de coordenadas espacialmente cilíndrico em que a fonte luminosa está parada e ocupa o plano $z' = 0$ inteiro. Veja a figura 1. O observador está inicialmente parado em $z' = \rho' = 0$, e a partir do momento $t' = 0$ ele se move com aceleração própria a constante na direção positiva do eixo z' . Seu movimento é portanto [1, pág.74], [9]

sendo τ o tempo próprio do observador decorrido desde $t' = 0$. Repare na última (1) que τ cresce menos rapidamente que a coordenada temporal t' da coleção de relógios de S' . A velocidade $v := dz'/dt'$ do observador em S' e o correspondente fator γ de dilatação temporal crescem como

Alguns reparos interessantes sobre acelerações merecem menção aqui. Primeiro, a aceleração própria constante a neste artigo se relaciona à aceleração Newtoniana variável $a_N(t')$ via $a = \gamma^3 a_N$, sendo $\gamma(t') := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ e sendo $v(t')$ a velocidade do objeto. Como $\gamma(t') \geq 1$, então $a_N(t') \leq a$ aqui.

Segundo, as equações (2) e (1) causam $v \approx a_N t'$ quando $\tau \approx 0$, como na cinemática Newto-



Figuro 1: En sistemo S' , lumo eligita kun frekvenco ν' incidas sur observanto kun rapido v . En sistemo S de momenta senmovo de observanto, tiu lumo estas perceptata kun frekvenco ν . Ĉe la kinematikaj kondiĉoj supozataj en la teksto, special-relativeco antaŭvidas egalaĵojn $\nu = \nu'$ kaj $\alpha = \alpha'$.

Figura 1: No sistema S' , luz emitida com frequência ν' incide sobre um observador que se move com velocidade v . No sistema S de imobilidade momentânea do observador, essa luz é percebida com frequência ν . Nas condições cinemáticas supostas no texto, a relatividade especial prevê as igualdades $\nu = \nu'$ e $\alpha = \alpha'$.

matiko. Trie, la rapido v apenaŭ proksimiĝas al c , kiam $\tau \rightarrow \infty$. Tion oni komprenas: $\gamma(t')$ multe plivaloras kiam $v(t') \rightarrow c$, tial ĝi multe malfortigas la malkonstantan Newtonan akcelon $a_N = a/\gamma^3$.

niana. Terceiro, a velocidade v apenas se aproxima de c , quando $\tau \rightarrow \infty$. Isso se compreende: o valor de $\gamma(t')$ cresce muito quando $v(t') \rightarrow c$, assim ele torna muito fraca a aceleração Newtoniana variável $a_N = a/\gamma^3$.

2 Percepto de lumo

Por studi percepton de ekbrilo de ebena estiĝo, en sistemo S' , lumo eligita el cirklo $[z', \rho', \varphi'] = [0, r, \forall]$ en momento $t' = 0$, kun onda 4-vektoro (vidu figuron 1)

2 Percepção da luz

Para estudar a percepção do lampejo do plano seja, no sistema S' , a luz emitida do círculo $[z', \rho', \varphi'] = [0, r, \forall]$ no momento $t' = 0$, com 4-vetor de onda (veja a figura 1)

$$k^{\mu'} := \nu' [1; \cos \alpha', -\sin \alpha', 0] . \quad (3)$$

Tiu lumo incidas sur la observanto en (t', z') se $ct' = \sqrt{z'^2 + r^2}$. Uzante $z'(\tau)$ kaj $t'(\tau)$ el (1), kaj uzante $\cos \alpha' = z'/(ct')$ el figuro 1, rezultiĝas

Essa luz incide sobre o observador em (t', z') se $ct' = \sqrt{z'^2 + r^2}$. Usando $z'(\tau)$ e $t'(\tau)$ da (1), e usando $\cos \alpha' = z'/(ct')$ da figura 1, resulta em

$$r = \frac{2c^2}{a} \sinh(a\tau/2c), \quad \cos \alpha' = \tanh(a\tau/2c) . \quad (4)$$

La unua esprimo indikas tiun cirklon de la ebena, kiun vidas la observanto en propratempo τ . Ĉar $dr/d\tau \approx c$ kiam $\tau \approx 0$, tial la radiuso r de luma cirklo komence egiĝas kun rapido c . Poste r egiĝas ankoraŭ pli rapide. Pro la dua esprimo, la angulo α' en figuro 1 etiĝas ekde

A primeira expressão indica o círculo do plano que o observador vê no tempo próprio τ . Como $dr/d\tau \approx c$ quando $\tau \approx 0$, então o raio r do círculo luminoso inicialmente cresce com velocidade c . Depois r cresce ainda mais rapidamente. Pela segunda expressão, o ângulo α' na figura 1 diminui desde $\pi/2$ até 0, enquanto o

$\pi/2$ ĝis 0, dum la propratempo τ kaj la loko z' de observanto egiĝas ambaŭ de 0 ĝis ∞ .

Por priskribi luman percepton, la observanto kun rapido v uzas inercian sistemon kie ĝi momente estas senmova, en momento de percepto. Do ni elektas sistemon S kun rapido v rilate al S' , kaj havante akson z sur akso z' , kiel en figuro 1.

En sistemo S , komponantoj de onda 4-vektoro de lumo eligita el r estas kalkulitaj el komponantoj (3) per Lorentzaj transformoj, kiel

$$\nu = \gamma \nu' [1 - (v/c) \cos \alpha'], \quad k^z = \gamma \nu' (\cos \alpha' - v/c), \quad k^p = -\nu' \sin \alpha', \quad k^\varphi = 0. \quad (5)$$

Ĉar la observanto foriras de fonto, oni naive povus esperi, ke frekvenco ν de perceptata lumo estus plieta ol frekvenco ν' de eligita lumo. Tamen tio ne veriĝas, kiel ni konstatas uzante la unuan el (3), kaj poste (2) kaj (4):

$$\frac{\nu}{\nu'} = \gamma \left[1 - \frac{v}{c} \cos \alpha' \right] = \cosh \left(\frac{a\tau}{c} \right) \left[1 - \tanh \left(\frac{a\tau}{c} \right) \tanh \left(\frac{a\tau}{2c} \right) \right] \equiv 1. \quad (6)$$

Do la Dopplera faktoro $D := \nu/\nu'$ estas 1, t.e., ne estas Dopplera efiko. Tiu fakto ne estus esperata, precipe ĉar ĝi okazas en ĉiu momento τ , kaj por iu ajn valoro de konstanta propra akcelo a .

Alia malesperata fakto estas, ke malkonstantaj komponantoj k^z kaj $k^{z'}$ ĉiam havas kontraŭajn signumojn, kaj saman modulon. Tion oni konstatas uzante k^z el (5) kaj $k^{z'}$ el (3), poste (2) kaj (4):

$$\frac{k^z}{k^{z'}} = \frac{\gamma [\cos \alpha' - v/c]}{\cos \alpha'} = \frac{\cosh(a\tau/c) [\tanh(a\tau/2c) - \tanh(a\tau/c)]}{\tanh(a\tau/2c)} \equiv -1. \quad (7)$$

Ĉar ankaŭ okazas $k^p = k^{p'}$, tial la observanto en S la fonton vidas antaŭen, kun angulo α sama al la angulo α' ĉe S' , kiel montras figuro 1. El (4), α' etiĝas dum la movado, tial ankaŭ α etiĝas dum

tempo próprio τ e a posição z' do observador crescem ambos de 0 até ∞ .

Para descrever a percepção da luz, o observador com velocidade v usa um sistema inercial em que ele está momentaneamente parado, no momento da percepção. Então nós escolhemos um sistema S com velocidade v relativamente a S' , e tendo eixo z sobre o eixo z' , como na figura 1.

No sistema S , as componentes do 4-vektor de onda da luz emitida de r são calculadas das componentes (3) por transformações de Lorentz, como

Como o observador se afasta da fonte, poder-se-ia ingenuamente esperar que a frequência ν da luz percebida fosse menor que a frequência ν' da luz emitida. Entretanto isso não é verdade, como nós constatamos usando a primeira das (3), e depois (2) e (4):

Portanto o fator Doppler $D := \nu/\nu'$ é 1, i.e., não há efeito Doppler. Esse fato não seria esperado, principalmente porque ele ocorre em todos os momentos τ , e para qualquer valor da aceleração própria constante a .

Outro fato inesperado é que as componentes variáveis k^z e $k^{z'}$ sempre têm sinais opostos, e mesmo módulo. Isso se constata usando k^z da (5) e $k^{z'}$ da (3), depois (2) e (4):

Como ocorre também $k^p = k^{p'}$, então o observador em S vê a fonte à sua dianteira, com ângulo α igual ao ângulo α' em S' , como a figura 1 mostra. Em (4), α' diminui durante o movimento, daí também α diminui durante o movimento,

la movado, kaj do la observanto vidas la human cirklon progrese nuliĝi.

Ripetinde, la observanto vidas la lumon nur se li estas dorse al eliganta ebena. Nomiĝas aberacio, iu ajn ŝanĝo de ŝajna direkto de objekto pro movado de observanto. Aberacion de objekto ni nomu *forta*, se la objekto estas malantaŭ la moviĝanta observanto en sistemo S' sed estas vidata antaŭen per observanto en sistemo S . El (7), *forta* aberacio okazas se $v > c \cos \alpha'$, t.e., se la rapido de observanto estas pligranda ol la projekcio de rapido de lumo sur vojo de observanto (vidu figuron 1).

Speciale, fortan aberacion de objekto oni nomu *simetria* se anguloj α kaj α' estas samaj. Pro (2) kaj (4), ĉi tie fariĝas simetria aberacio de ĉiu vidata cirklo. Estas mirinda, ke tiu fenomeno okazas ekde komenco de movado de observanto, eĉ kun iu ajn valoro de konstanta propra akcelo.

3 Konkludo

Ni montris ke ne okazas Dopplera efiko sed estas simetria *forta* aberacio, tiel ke la lumaj cirkloj estas simetrie vidataj en la direkto mala al la ekbrilanta ebena. Komence la observanto vidas malgrandan cirklon ĉe $\alpha = 90^\circ$, poste la angulo progrese etiĝas ĝis nuli.

La metodo, kiun ni uzis ĉi tie por kalkuli Doppleran efikon, estas tre kompakta. Tamen la metodo uzata en niaj antaŭaj artikoloj [6, 7, 8, 9, 10] malkaŝas gravan prorecon de propra akcelo.

Tion celante, konsideru en sistemo S' de figuro 1 lumsignalon eligitan en momento t'_f kaj perceptatan en momento t'_o . Do la elig-eniga ekvacio estas $c(t'_o - t'_f) = \sqrt{z'^2(t'_o) + r^2}$; ĉi tie $z'(t'_o)$ estas kiel en (1), kaj r estas radiuso de cirklo vidata per observanto en momento t'_o . Diferencianta kaj poste farante $t'_f = 0$ kaj $dt'_f = d\tau_f$, ni

e portanto o observador vê o círculo luminoso progressivamente se anular.

Vale repetir, o observador vê a luz somente se ele está de costas para o plano emissor. Chama-se *aberração*, qualquer mudança de direção aparente de um objeto devido à movimentação do observador. Vamos chamar de *forte* a aberração, se o objeto está atrás do observador em movimento no sistema S' mas é visto de frente pelo observador no sistema S . Pela (7), a aberração forte ocorre se $v > c \cos \alpha'$, i.e., se a velocidade do observador for maior que a projeção da velocidade da luz sobre o caminho do observador (veja a figura 1).

Em particular, chame-se *simétrica* a aberração forte se os ângulos α e α' forem iguais. Devido a (2) e (4), aqui ocorre aberração simétrica de todo círculo visto. É admirável que esse fenômeno ocorra desde o começo do movimento do observador, e com qualquer valor da aceleração própria constante.

3 Conclusão

Nós mostramos que não ocorre efeito Doppler mas ocorre aberração forte simétrica, tal que os círculos luminosos são vistos simetricamente na direção oposta ao plano brilhante. Inicialmente o observador vê um círculo pequeno em $\alpha = 90^\circ$, depois o ângulo progressivamente diminui até se anular.

O método que nós usamos aqui para calcular o efeito Doppler é bastante compacto. Entretanto o método usado em nossos artigos anteriores [6, 7, 8, 9, 10] revela uma propriedade importante da aceleração própria.

Com isso em vista, considere no sistema S' da figura 1 um sinal de luz emitido no momento t'_f e percebido no momento t'_o . Então a equação de emissão-recepção é $c(t'_o - t'_f) = \sqrt{z'^2(t'_o) + r^2}$; aqui $z'(t'_o)$ é como em (1), e r é o raio do círculo visto pelo observador no momento t'_o . Diferenciando e depois fazendo $t'_f = 0$ e $dt'_f = d\tau_f$, nós recebemos $d\tau_f = d\tau_o$, e portanto $D = d\tau_f/d\tau_o =$

ricevas $d\tau_f = d\tau_o$, kaj do $D = d\tau_f/d\tau_o = 1$. Tiu rezulto aperas kaŝita en antaŭa artikolo [9]. Fakte, ĉiu lumsignalo en nuna artikolo estas kiel la signalo en limo inter fazoj 1 kaj 2 en sekcio 5 de [9].

Simile oni povus ricevi ĉiujn ajn rezultojn el antaŭaj sekcioj en ĉi tiu artikolo. Sed nun interesas nur la kompreno de graveco de konstanteco de propra akcelo al nuligo de Dopplera efiko.

Do, konsideru lumsignalon eligitan je $t'_f = 0$, kaj inercian sistemon de momenta senmovo de observanto je tiu momento. En tiu sistemo, observanto havas konstantan propran akcelon a en direkto z' , kaj fonto restas en la sama $z' = 0$ kaj distancas r perpendikulare.

Plu, konsideru duan signalon eligitan je momento dt'_f , kaj inercian sistemon de momenta senmovo de observanto je tiu momento. En tiu dua sistemo, observanto havas konstantan propran akcelon a en direkto z' , estas en loko dz' , kaj la fonto havas infiniteziman rapidon en direkto malpozitiva de z' kaj distancas r perpendikulare. Ĉar la interspaco trakurata per la observanto estas duagrada en dt'_f , tial la observanto estas konsiderata ankoraŭ en la komenca loko.

Por movado de lumsignalo, la rapido de fonto ne gravas. Ankaŭ rimarku, ke la infinitezima rapido de la fonto kontribuas duagrade al γ , do $d\tau_f = dt'_f$. Tial la intertempo inter eligo kaj percepto estas la sama por la du signaloj, t.e., $\tau_o - 0 = (\tau_o + d\tau_o) - (0 + d\tau_f)$. Do $d\tau_o = d\tau_f$ kaj do $D := d\tau_f/d\tau_o = 1$, t.e., Dopplera efiko ne estas. Rimarku, ke tiu argumento nur validas kun propra akcelo, ĉar ĉi tiu estas difinata en inerciaj sistemoj de momenta senmovo.

Ni opinias, ke la rezultoj de ĉi tiu artikolo evidentigas la mirindan gravecon de konstanta propra akcelo ĉe specialrelativeco.

1. Esse rezultado aperas escondido em um artigo anterior [9]. Com efeito, todo sinal luminoso no atual artigo é como o sinal no limite entre as fases 1 e 2 na seção 5 de [9].

Semelhantemente se poderia reobter todos os resultados das seções anteriores neste artigo. Porém agora interessa somente a compreensão da importância da constância da aceleração própria para a anulação do efeito Doppler.

Considere então um sinal luminoso emitido em $t'_f = 0$, e um sistema inercial de imobilidade momentânea do observador naquele momento. Nesse sistema o observador tem aceleração própria constante a na direção z' , e a fonte está parada no mesmo $z' = 0$ e dista r na perpendicular.

Considere ainda um segundo sinal, emitido no momento dt'_f , e um sistema inercial de imobilidade momentânea do observador naquele momento. Nesse segundo sistema o observador tem aceleração própria constante a na direção z' , está na posição dz' , e a fonte tem uma velocidade infinitesimal na direção negativa de z' e dista r perpendicularmente. Como a distância percorrida pelo observador é quadrática em dt'_f , então o observador é considerado ainda na posição inicial.

Para o movimento do sinal luminoso, a velocidade da fonte não importa. Repare também que a velocidade infinitesimal da fonte contribui quadraticamente ao γ , portanto $d\tau_f = dt'_f$. Então o intervalo de tempo entre a emissão e a percepção é o mesmo para os dois sinais, i.e., $\tau_o - 0 = (\tau_o + d\tau_o) - (0 + d\tau_f)$. Daí $d\tau_o = d\tau_f$ e portanto $D := d\tau_f/d\tau_o = 1$, i.e., não há efeito Doppler. Repare que esse argumento vale somente com aceleração própria, porque esta é definida em sistemas inerciais de imobilidade momentânea.

Nós achamos que os resultados deste artigo evidenciam a admirável importância da aceleração própria constante na relatividade especial.

Citaĵoj

- [1] C. Møller, *The theory of relativity*, 2nd ed., Oxford U P, 1972.
- [2] W. Rindler, *Essential relativity*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1977.
- [3] J. Dwayne Hamilton, *The uniformly accelerated reference frame*, Am. J. Phys. **46** 83-9, 1978.
- [4] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, 4th rev. English ed., Butterworth-Heinemann, 1996.
- [5] W. Cochran, *Some results on the relativistic Doppler effect for accelerated motion*, Am. J. Phys. **57** 1039-41, 1989.
- [6] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *La relativeca tempo – I*, Notas de Física, CBPF-NF-006/06, 2006; <http://arxiv.org/abs/physics/0603053>.
- [7] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – I*, Notas de Física, CBPF-NF-002/07, 2007; <http://arxiv.org/abs/physics/0701092>.
- [8] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – II*, Notas de Física, CBPF-NF-011/07, 2007; <http://arxiv.org/abs/0704.1130>.
- [9] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko inter du akcelataj korpoj – I*, Notas de Física, CBPF-NF-001/08, 2008; <http://arxiv.org/abs/0801.2290>.
- [10] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – III*, Notas de Física, CBPF-NF-018/08, 2008; <http://arxiv.org/abs/0808.0126>.