La relativeca tempo – I — O tempo relativista – I

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II

Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

6–a de Marto de 2006

Resumo

La relativeca tempo estas malsama ol la Newtona. Ni revidos iujn el tiuj malsamoj en Doppler-efekto, ĝemel-paradokso, rotacio, rigida stango kaj konstanta akcelo.

O tempo relativista é diferente do Newtoniano. Vamos rever algumas dessas diferenças em efeito Doppler, paradoxo dos gêmeos, rotação, barra rígida, e aceleração constante.

1 Enkonduko

Astronomiaj observoj antaŭ longe montris ke la vakuo-lumo-rapido c ne dependas de la fontrapido nek de la observantrapido; ĉi tiu konstato generis je 1905 la relativecan teorion (specialan) kaj poste la konvencion [1]: la vakuo-lumo-rapido estas senerare $c := 299.792.458 m/s$. Tiu konvencio ŝnurligas *metron* kun *sekundo*, t.e., la ekzistado de la universala konstanto c samestece unuigas tempon kun spaco. Tamen, ĉiutage oni preferas persisti la distingon inter la intertempa kaj la interspaca konceptoj; eble ĉar $1s$, kiu estas intertempo sufiĉe konvena por la homa skalo, samvaloras $299.792.458m$, kiu estas interspaco tro granda por nia skalo.

Aliaj eksperimentoj [2] montris ke la lumo-fonta *rapido* ŝanĝas la observatan lumo-periodon (Doppler-efektojn), sed la *akcelo* ne ŝanĝas ĝin. Tiu lasta fakto forte sugestis la uzon de elektromagneta radi-

1 Introdução

Observações astronômicas há tempos mostraram que a velocidade c da luz no vácuo não depende da velocidade da fonte, nem da velocidade do observador; esta constatação gerou em 1905 a teoria da relatividade (especial), e posteriormente a convenção [1]: a velocidade da luz no vácuo é exatamente $c := 299.792.458 m/s$. Essa convenção amarra *metro* a *segundo*, isto é, a existência da constante universal c torna tempo e espaço uma mesma entidade. Entretanto, no cotidiano prefere-se manter a distinção entre os conceitos de separação temporal e separação espacial; possivelmente porque $1s$, que é um intervalo de tempo bastante conveniente para a escala humana, equivale a $299.792.458m$, que é uma distância grande demais para nossa escala.

Outros experimentos [2] mostraram que a *velocidade* de uma fonte luminosa altera o período observado da luz (efeitos Doppler), porém a *aceleração* não o altera. Esse último fato sugeriu fortemente o uso de radiação eletromagnética para ado por difini tempan normo-unuon [1], [3, paĝo 28]: *sekundo* (intervala unuo $\Delta\tau$ de *propratempo*) estas la daŭro de 9.192.631.770 periodoj de la lumo eligita je la transiro inter du specifaj niveloj de la atomo de cezio-133. Kiel konsekvenco de la difinoj de c kaj de *sekundo*, aŭtomate ekestiĝis ke *metro* estas la interspaco trakurata de la vakuo-lumo dum la frakcio 1/299.792.458 de *sekundo* [1, 4].

Horloĝo fide montranta la sekundo-sinsekvon nomiĝas *normohorloĝo*, kiun ni ofte nomigos simple horloĝo. La fakto je c havi fiksan valoron ebligas horloĝon kiu senpere montras la kvanton $c\Delta\tau$ (havanta longeco-dimension) anstataŭ apenaŭ $\Delta\tau$ (havanta tempo-dimension). La plej fidindaj horloĝoj estas la ellaborataj atomohorloĝoj. Tamen la familiara brakhorloĝo povas esti konsiderata kiel normohorloĝo, kiam oni ne postulas tre precizan tempomezuron.

Konvenas memori ke la horloĝa ritmo ne estas absoluta, laŭ la jena senco. Imagu du komence apudajn sinkronajn horloĝojn. Poste apartigu kaj submetu ilin al malsamaj kondiĉoj de rapido kaj de gravita potencialo. Ĉiu horloĝo daŭrigos registri la paŝon de *sia* propratempo pere de la akumulado de *siaj* sekundoj. Ĉe eventuala renkonto de la horloĝoj, la du akumulitaj registroj probable estos malsamaj.

En la sekvantaj sekcioj ni raportos iujn tempajn fenomenojn ĉe la special-relativeca kunteksto. Ni studos la tempon ĉe eksperiment-rezultoj, Doppler-efekto, ĝemel-paradokso, sinkronigo kiel Einstein, horloĝoj en rekta movo, horloĝoj en cirkla movo, periodo, rigida stango kaj konstanta akcelo.

Indas citi Rindler [5, paĝo 44], kiu emfazis ke "same kiel la spaca malplivastiĝo, ankaŭ la tempa dilato estas *reala*". Sekve ĉiu, kiun ni diras pri horloĝa paŝado, validas ankaŭ por ĉia ajn fizika fenomeno.

definir uma unidade padrão de tempo [1], [3, pág. 28]: *segundo* (uma unidade de intervalo $\Delta\tau$ de *tempo próprio*) é a duração de 9.192.631.770 períodos da luz emitida na transição entre dois níveis específicos do átomo de césio-133. Como conseqüência das definições de c e de *segundo*, automaticamente estabeleceu-se que *metro* é a distância percorrida pela luz no vácuo durante a fração 1/299.792.458 de *segundo* [1, 4].

Um relógio que exiba fielmente a sucessão dos segundos se chama *relógio padrão*, que freqüentemente chamaremos simplesmente de relógio. O fato de c ter valor fixo possibilita um relógio que exiba diretamente a quantidade $c\Delta\tau$ (que tem dimensão de comprimento) ao invés de apenas $\Delta\tau$ (que tem dimensão de tempo). Os relógios mais confiáveis são os sofisticados relógios atômicos. Entretanto o familiar relógio de pulso pode ser considerado relógio padrão, quando não se exija medida do tempo muito precisa.

Convém lembrar que o ritmo dos relógios não é absoluto, no sentido a seguir. Imagine dois relógios inicialmente lado a lado, e sincronizados. Em seguida, separe os relógios e os submeta a diferentes condições de velocidade e potencial gravitacional. Cada relógio continuará a registrar o passar do *seu* tempo próprio, mediante o acumular dos *seus* segundos. Em um eventual reencontro dos relógios, os dois registros acumulados provavelmente serão diferentes.

Nas seções seguintes vamos relatar alguns fenômenos temporais no contexto da relatividade especial. Estudaremos o tempo em resultados experimentais, efeito Doppler, paradoxo dos gêmeos, sincronização *à la* Einstein, relógios em movimento retilíneo, relógios em movimento circular, período, barra rígida e aceleração constante.

Vale a pena citar Rindler [5, pág. 44], que enfatizou que "assim como a contração espacial, também a dilatação temporal é *real*". Por conseguinte tudo o que dizemos sobre andamento de relógios vale também para qualquer outro fenômeno físico.

2 Eksperiment-rezultoj

Ni elmetos du eksperiment-rezultojn kiuj konfirmas special-relativecajn antaŭvidojn.

2 Resultados experimentais

Vamos expor dois resultados experimentais que confirmam previsões da relatividade especial.

2.1 Muona defalo

La malrapideco de moviĝantaj horloĝoj estas observata ĉe la defalo de muonoj kiuj estas kreataj en la alta tera atmosfero kaj desintegriĝas en siaj trajektorioj al detektiloj ĉe malplia altitudo. Ja, la muona meza-vivo estas $\Delta\tau \approx 2,22\mu s$ (propratempo). Laŭ la Newtona kinematiko, tiuj muonoj, eĉ se vojaĝus ĉe la rapido c, trakurus apenaŭ ĉirkaŭ $700m$ antaŭ desintegriĝi; do nur sensignifa procento de ili estus trovata ĉe la marnivelo. Tamen, estas granda la procento detektata ĉe ni, malalte [6, paĝo 702]. La relativeca kialo estas ke muonoj vojaĝantaj ĉe rapido $v = 0,9999c$ vivas, kiel mezurata per ripoza horloĝo, ĉirkaŭ $70\Delta\tau$. Do muonoj povas vojaĝi ĉirkaŭ $50km$ antaŭ desintegriĝi, kio eksplikas ĝian oftan detektadon ĉe malgranda altitudo.

2.1 Decaimento de múon

A lentidão dos relógios em movimento é observada no decaimento de múons que são criados na alta atmosfera terrestre e se desintegram em suas trajetórias rumo a detetores em menor altitude. Com efeito, a vida média do múon é $\Delta\tau \approx 2,22\mu s$ (tempo próprio). Segundo a cinemática Newtoniana aqueles múons, mesmo viajando com velocidade c, percorreriam apenas uns $700m$ antes de se desintegrarem; então somente uma porcentagem insignificante deles seria encontrada ao nível do mar. Entretanto, é grande a porcentagem detetada aqui embaixo [6, pág. 702]. A justificativa relativista é que múons viajando com velocidade $v = 0,9999c$ vivem, conforme medido por um relógio em repouso, aproximadamente $70\Delta\tau$. Então múons podem viajar cerca de $50km$ antes de se desintegrarem, o que explica sua freqüente detecção em uma baixa altitude.

2.2 Ciklotrono

La special-relativeco ankaŭ korekte manipulas la malrapidecon de la evoluo de sistemoj ĉe rapida cirkla movo en la interno de ciklotrono. Ja, nefirmaj partikloj, kun mallongaj meza-vivoj, prezentas grandan postvivon ĉe tiuj kondiĉoj [7], eksplikatan denove per la relativeca tempa dilato.

2.2 Cíclotron

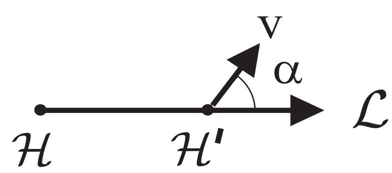
A relatividade especial manipula também corretamente a lentidão da evolução de sistemas em movimento circular rápido no interior de um cíclotron. Com efeito, partículas instáveis, com curtas vidas médias, apresentam uma grande sobrevida nessas condições [7], explicada novamente pela dilatação temporal relativista.

3 Doppler-efektoj

Imagu ke mi havas ĉe mi horloĝon $\mathcal{H}$, kiu registras la fluon de mia propratempo τ. Mi estas rigardanta alian horloĝon $\mathcal{H}'$, kiu registras la fluon de sia propratempo τ'. Tiu horloĝo $\mathcal{H}'$ moviĝas ĉe vektora rapido $\mathbf{v}$ rilate al mia. Mi **vidas** (nudokule aŭ dulornete aŭ teleskope) ke dum la $\mathcal{H}'$ reg-

3 Efeitos Doppler

Imagine que eu tenha comigo um relógio $\mathcal{H}$, que marca o fluir do meu tempo próprio τ. Estou olhando para um outro relógio $\mathcal{H}'$, que registra o correr do tempo próprio τ' dele. Aquele relógio $\mathcal{H}'$ está se movendo com velocidade vetorial $\mathbf{v}$ em relação ao meu. Eu **vejo** (a olho nu, ou com binóculos, ou com um telescópio) que enquanto



Figuro 1: La horloĝoj $\mathcal{H}$ (mia, ripozanta) kaj $\mathcal{H}'$ (moviĝanta).
Figura 1: Os relógios $\mathcal{H}$ (meu, em repouso) e $\mathcal{H}'$ (em movimento).

istro antaŭeniras $\Delta\tau'$, mia horloĝa registro antaŭeniras $\Delta\tau_p \neq \Delta\tau'$. Ni uzas la subsignon p (post) en $\Delta\tau_p$ por memori ke dum $\Delta\tau'$ estas la intertempo inter du lumaj eligoj de $\mathcal{H}'$, kontraŭe $\Delta\tau_p$ estas la intertempo inter la alveno de tiuj signaloj al $\mathcal{H}$. Tiu registra malsamo *ĉiam* havas relativecan faktoron ("tempan dilaton") multiplike supermetitan kun ordinara Dopplera faktoro de la Newtona kinematiko. La rilato inter $\Delta\tau_p$ kaj $\Delta\tau'$ dependas de la modulo de la rapido $\mathbf{v}$, kaj de la orientado de $\mathbf{v}$ rilata al la vida rekto $\mathcal{L}$ de $\mathcal{H}$ al $\mathcal{H}'$. Ni nomigu α la angulon inter $\mathcal{L}$ kaj $\mathbf{v}$, kiel sur la figuro 1.

Nun ni rilatos $\Delta\tau'$ al $\Delta\tau_p$ ĉe 5 Doppler-efektaj okazoj. Ni vidos ke en ĉiu el ili la relativeca kaj la Newtona antaŭvidoj koincidas nur ĉe unua ordo de v/c.

o registro de $\mathcal{H}'$ avança $\Delta\tau'$, o registro do meu relógio avança $\Delta\tau_p \neq \Delta\tau'$. Usamos o sub-índice p (posterior) em $\Delta\tau_p$ para lembrar que enquanto $\Delta\tau'$ é o intervalo de tempo entre duas emissões luminosas de $\mathcal{H}'$, contrariamente $\Delta\tau_p$ é o intervalo de tempo entre a chegada dos dois sinais a $\mathcal{H}$. Essa diferença de registros *sempre* tem um fator relativista ("dilatação temporal"), superposto multiplicativamente ao usual fator Doppler da cinemática Newtoniana. A relação entre $\Delta\tau_p$ e $\Delta\tau'$ depende do módulo da velocidade $\mathbf{v}$, e da orientação de $\mathbf{v}$ relativa à linha de visada $\mathcal{L}$ de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}'$. Chamemos de α o ângulo entre $\mathcal{L}$ e $\mathbf{v}$, como na figura 1.

Vamos agora relacionar $\Delta\tau'$ a $\Delta\tau_p$ em 5 casos de efeitos Doppler. Veremos que em todos eles as previsões relativista e Newtoniana coincidem somente em primeira ordem de v/c.

3.1 Transverso, $\alpha = \pi/2$

Ĉe $\alpha = \pi/2$, la horloĝo $\mathcal{H}'$ estas momente "flanke iranta" rilate al mi. En tiu movo, ĝia interspaco rilate al mi estas momente konstanta. Konsideru la specialan okazon en kiu $\mathcal{H}'$ estas ĉe cirkla movo ĉe konstanta rapido v, kaj mi estas en iu punkto de la rotacia akso; ĉe tiu okazo la interspaco inter ni estas konstanta. Do mi **vidas** la $\mathcal{H}'$ registron antaŭeniri pli malrapide ol tiun de mia $\mathcal{H}$. Dum la registro de mia $\mathcal{H}$ antaŭeniras $\Delta\tau_p$, mi **vidas** la registron de $\mathcal{H}'$ antaŭeniri apenaŭ [8, paĝo 118]

3.1 Transverso, $\alpha = \pi/2$

Com $\alpha = \pi/2$, o relógio $\mathcal{H}'$ está momentaneamente "andando de lado" com relação a mim. Nesse movimento, sua distância com relação a mim é momentaneamente invariante. Considere o caso particular em que $\mathcal{H}'$ está em movimento circular com velocidade constante v, e eu estou sobre qualquer ponto do eixo da rotação; nesse caso a distância entre nós se mantém constante. Então eu **vejo** o registro de $\mathcal{H}'$ avançar mais devagar que o do meu $\mathcal{H}$. Enquanto o registro do meu $\mathcal{H}$ avança $\Delta\tau_p$, eu **vejo** o registro do $\mathcal{H}'$ avançar apenas [8, pág. 118]

$$\Delta\tau' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\Delta\tau_p. \tag{1}$$

Tiu malsamo de legoj nomiĝas transversa Doppler-efekto, aŭ ruĝ-delokigo, ĉar lumoradiado eligita el $\mathcal{H}'$ ŝajnas, kiam observata

Essa diferença de leituras se denomina efeito Doppler transversal, ou desvio para o vermelho, pois uma radiação luminosa emitida por $\mathcal{H}'$ paper mi, kvazaŭ delokigata al ruĝo. La Newtona antaŭvido estas $\Delta\tau' = \Delta\tau_p$; tial la transversa Doppler-efekto estas dirita nemikse relativeca.

rece, quando observada por mim, como que desviada para o vermelho. A previsão Newtoniana é $\Delta\tau' = \Delta\tau_p$; por esse motivo o efeito Doppler transversal é dito puramente relativista.

3.2 Foriĝo, $\alpha = 0$

Ĉe $\alpha = 0$, la horloĝo $\mathcal{H}'$ radiuse foriĝas de mi, ĉe konstanta rapido v. Do mi **vidas** la $\mathcal{H}'$ registron antaŭeniri pli malrapide ol tiun de mia $\mathcal{H}$, kaj pli akcente ol la okazo 3.1. Dum la registro de mia $\mathcal{H}$ antaŭeniras $\Delta\tau_p$, mi **vidas** la registron de $\mathcal{H}'$ antaŭeniri apenaŭ [8, paĝo 117]

3.2 Afastamento, $\alpha = 0$

Com $\alpha = 0$, o relógio $\mathcal{H}'$ está se afastando radialmente de mim, com velocidade constante v. Então eu **vejo** o registro de $\mathcal{H}'$ avançar mais devagar que o do meu $\mathcal{H}$, e mais acentuadamente que no caso 3.1. Enquanto o registro do meu $\mathcal{H}$ avança $\Delta\tau_p$, eu **vejo** o registro do $\mathcal{H}'$ avançar apenas [8, pág. 117]

$$\Delta\tau' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}\Delta\tau_p = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\Delta\tau_p. \tag{2}$$

Newtone $\Delta\tau' = \Delta\tau_p/(1 + v/c)$. Ĉar ĉe ambaŭ teorioj, relativeca kaj Newtona, validas $\Delta\tau' < \Delta\tau_p$, tial ambaŭ antaŭvidas ruĝ-delokigon (nun ankaŭ nomatan foriĝan Doppler-efekton). Notu ke la relativeca delokigo $\Delta\tau_p - \Delta\tau'$ estas pli granda ol la Newtona.

Newtonianamente $\Delta\tau' = \Delta\tau_p/(1 + v/c)$. Como em ambas teorias, relativista e Newtoniana, vale $\Delta\tau' < \Delta\tau_p$, ambas prevêem desvio para o vermelho (agora também denominado efeito Doppler de afastamento). Note que o desvio relativista $\Delta\tau_p - \Delta\tau'$ é maior que o Newtoniano.

3.3 Alproksimiĝo, $\alpha = \pi$

Ĉe $\alpha = \pi$, la horloĝo $\mathcal{H}'$ radiuse alproksimiĝas min, ĉe konstanta rapido v. Nun mi **vidas** la $\mathcal{H}'$ registron antaŭeniri pli rapide ol tiun de mia $\mathcal{H}$. Dum la registro de mia $\mathcal{H}$ antaŭeniras $\Delta\tau_p$, mi **vidas** la registron de $\mathcal{H}'$ antaŭeniri pli rapide [8, paĝo 117],

3.3 Aproximação, $\alpha = \pi$

Com $\alpha = \pi$, o relógio $\mathcal{H}'$ está se aproximando radialmente de mim, com velocidade constante v. Agora eu **vejo** o registro de $\mathcal{H}'$ avançar mais depressa do que o do meu $\mathcal{H}$. Enquanto o registro do meu $\mathcal{H}$ avança $\Delta\tau_p$, eu **vejo** o registro do $\mathcal{H}'$ avançar mais rapidamente [8, pág. 117],

$$\Delta\tau' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c}\Delta\tau_p = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}\Delta\tau_p. \tag{3}$$

Newtone $\Delta\tau' = \Delta\tau_p/(1 - v/c)$. Tiu efekto nomiĝas Dopplera de radiusa alproksimiĝo, aŭ viol-delokigo. Kontraŭe okazo 3.2 (foriĝo), la relativeca delokigo $\Delta\tau' - \Delta\tau_p$ estas malpli granda ol la Newtona.

Pasante, notu ĉe (3) la *faktoron* k de Bondi [9, paĝo 387], $\sqrt{(1 + v/c)/(1 - v/c)}$.

Newtonianamente $\Delta\tau' = \Delta\tau_p/(1 - v/c)$. Esse efeito chama-se Doppler de aproximação radial, ou desvio para o violeta. Contrariamente ao caso 3.2 (afastamento), o desvio relativista $\Delta\tau' - \Delta\tau_p$ é menor que o Newtoniano.

En passant, note na (3) o *fator* k de Bondi [9, pág. 387], $\sqrt{(1 + v/c)/(1 - v/c)}$.

3.4 Ĝeneralo, $\alpha =$ iom ajn

Ĉi tiu okazo kunigas la 3 antaŭajn okazojn kaj ilin ĝeneraligas. Dum la registro de mia $\mathcal{H}$ antaŭeniras $\mathrm{d}\tau_p$, mi **vidas** tiun de $\mathcal{H}'$ antaŭeniri [8, paĝo 118]

3.4 Geral, $\alpha =$ qualquer

Este caso engloba os 3 casos anteriores, e os generaliza. Enquanto o registro do meu $\mathcal{H}$ avança $\mathrm{d}\tau_p$, eu **vejo** o do $\mathcal{H}'$ avançar [8, pág. 118]

$$\mathrm{d}\tau' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c)\cos\alpha}\mathrm{d}\tau_p. \tag{4}$$

Newtone $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau_p/[1 + (v/c)\cos\alpha]$. Simpla kalkulo montras ke se $0 \leq |\alpha| < \pi/2$, la Newtona kaj la relativeca antaŭvidoj ambaŭ estas ruĝ-delokigo ($\mathrm{d}\tau' < \mathrm{d}\tau_p$). Sed se $\pi/2 < |\alpha| \leq \pi$, la analizo estas malpli simpla: Newtone ĉiam okazas viol-delokigon ($\mathrm{d}\tau' > \mathrm{d}\tau_p$), kontraŭe relativece okazas viol-delokigon nur se la rapido de $\mathcal{H}'$ estas sufiĉe malgranda, $v/c < 2/|\cos\alpha + \sec\alpha|$; se la rapido estas pli granda, la relativeco antaŭvidas ruĝ-delokigon ($\mathrm{d}\tau' < \mathrm{d}\tau_p$), kvankam la interspaco de $\mathcal{H}'$ al $\mathcal{H}$ malgrandiĝas.

Newtonianamente $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau_p/[1 + (v/c)\cos\alpha]$. Um cálculo simples mostra que se $0 \leq |\alpha| < \pi/2$, as previsões Newtoniana e relativista são ambas desvio para o vermelho ($\mathrm{d}\tau' < \mathrm{d}\tau_p$). Mas se $\pi/2 < |\alpha| \leq \pi$, a análise é menos simples: Newtonianamente sempre ocorre desvio para o violeta ($\mathrm{d}\tau' > \mathrm{d}\tau_p$), enquanto que relativistamente ocorre desvio para o violeta só se a velocidade de $\mathcal{H}'$ for suficientemente baixa, $v/c < 2/|\cos\alpha + \sec\alpha|$; se a velocidade for mais alta, a relatividade prevê desvio para o vermelho ($\mathrm{d}\tau' < \mathrm{d}\tau_p$), embora a distância de $\mathcal{H}'$ a $\mathcal{H}$ esteja diminuindo.

3.5 Logaritma spiralo

Ni notas ke ĉe (1), en kiu $\alpha = \pi/2$, validas $\mathrm{d}\tau' < \mathrm{d}\tau_p$, kaj ke ĉe (3), en kiu $\alpha = \pi$, validas $\mathrm{d}\tau' > \mathrm{d}\tau_p$. Do surmetante $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau_p$ ĉe (4), ni trovas la valoron de α en la intervalo $(\pi/2, \pi)$ kiu momente nuligas la relativecan Doppler-efekton:

3.5 Espiral logarítmica

Percebemos que na (1), em que $\alpha = \pi/2$, vale $\mathrm{d}\tau' < \mathrm{d}\tau_p$, e que na (3), em que $\alpha = \pi$, vale $\mathrm{d}\tau' > \mathrm{d}\tau_p$. Então impondo $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau_p$ na (4), encontramos o valor de α no intervalo $(\pi/2, \pi)$ que momentaneamente anula o efeito Doppler relativista:

$$\cos\alpha = -\frac{c}{v}(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}) \quad \Longleftrightarrow \quad \tan^2(\alpha/2) = 1 + v/c. \tag{5}$$

Ĝi dependas nur de la rilato v/c, kaj povas esti skribata ankaŭ kiel

Ele depende unicamente da razão v/c, e pode ser escrito também como

$$\cos\alpha = -\tanh(\xi/2), \quad \tanh\xi := v/c. \tag{6}$$

Por daŭre esti $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau_p$ kun v konstanta, α bezonas esti konstanta. En tiu okazo, estante $\mathcal{H}$ ĉe la origino $r = 0$, la $\mathcal{H}'$ trajektorio estas konverĝa logaritma spiralo, donata per

Para ser permanentemente $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau_p$ com v constante, α precisa ser constante. Nesse caso, estando $\mathcal{H}$ na origem $r = 0$, a trajetória de $\mathcal{H}'$ é uma espiral logarítmica convergente, dada por

$$r = r_0 \exp[-|\varphi| \sinh(\xi/2)]. \tag{7}$$

La Newtona kinematiko antaŭvidas ke nur se la lumo-fonto plenumas cirklan movon, $\alpha = \pm\pi/2$, tial la Doppler efekto nuliĝas, $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau_p$.

A cinemática Newtoniana prevê que somente se a fonte luminosa estiver em movimento circular, $\alpha = \pm\pi/2$, então o efeito Doppler será nulo, $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau_p$.

4 Ĝemel-paradokso

Multe klarigan analizon de la horloĝ-paradokso (aŭ ĝemel-) faris Darwin [10], uzante la esprimojn (2) kaj (3). Estiĝu du apudaj, ripozantaj horloĝoj $\mathcal{H}$ kaj $\mathcal{H}'$, kaj ripozanta punkto P ĉe 4 lumjaroj for.

Ĉe la momento $\tau = \tau' = 0$ per ambaŭ horloĝoj, $\mathcal{H}'$ ekforiras direkte al P, ĉe konstanta rapido $v = 4c/5$, dum $\mathcal{H}$ daŭre ripozas. Dum la foriro, ĉiu horloĝo **vidas** (nudokule aŭ dulornete aŭ teleskope) la alion antaŭeniri pli malrapide ol sin, ĉe la rilato $\sqrt{1-v/c} \div \sqrt{1+v/c} = \cdots = 1/3$, kiel ĉe ek. (2); t.e., horloĝo kiu antaŭeniras 1 horon **vidas** la alion antaŭeniri apenaŭ 20 minutojn.

Atingante al P, $\mathcal{H}'$ tuj revenas direkte al $\mathcal{H}$, ĉe rapido $4c/5$ denove. Kaj *poste iom da tempo*, dum la alproksimiĝo, ĉiu horloĝo **vidos** la alion antaŭeniri pli rapide ol sin, ĉe la rilato $\sqrt{1+v/c} \div \sqrt{1-v/c} = \cdots = 3/1$, kiel ĉe ek. (3); t.e., horloĝo kiu antaŭeniros 1 horon **vidos** la alion antaŭeniri 3 horojn.

Ĉio ŝajnas simetria, do la du horloĝoj ŝajne montrus la saman registron ĉe la renkontro; sed ni sekvu la pli detalegajn malkunajn analizojn de $\mathcal{H}'$ kaj de $\mathcal{H}$.

La horloĝo $\mathcal{H}'$ pensas tiel: mi ekforiras ĉe vojaĝo, kies forira daŭro estos sama kiel la revena, ambaŭ mezurataj per mi. Dum la unua duono de mia vojaĝo mi **vidos** la $\mathcal{H}$ registron antaŭeniri pli malrapide ol mian, ĉe la rilato $1/3$; kaj dum la dua duono mi **vidos** $\mathcal{H}$ antaŭeniri pli rapide ol min, ĉe la rilato $3/1$. Meznombre mi konstatos ke $\mathcal{H}$ havis paŝadon kiu estas $(1/2)(1/3) + (1/2)3 = 5/3$ de mia.

La horloĝo $\mathcal{H}$ same konkludas per la

4 Paradoxo dos gêmeos

Um exame muito elucidativo do paradoxo do relógio (ou dos gêmeos) foi feito por Darwin [10], usando as expressões (2) e (3). Estejam em repouso dois relógios $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$, lado a lado, e um ponto P em repouso a 4 anos-luz.

No instante $\tau = \tau' = 0$ de ambos os relógios, $\mathcal{H}'$ parte em direção a P, com velocidade uniforme $v = 4c/5$, enquanto $\mathcal{H}$ permanece em repouso. Durante o afastamento, cada relógio **vê** (a olho nu, ou com binóculos, ou com telescópio) o outro avançar mais lentamente que ele, na razão $\sqrt{1-v/c} \div \sqrt{1+v/c} = \cdots = 1/3$, como na eq. (2); ou seja, um relógio que avance 1 hora **vê** o outro avançar apenas 20 minutos.

Chegando a P, $\mathcal{H}'$ retorna imediatamente em direção a $\mathcal{H}$, com velocidade novamente $4c/5$. E *após algum tempo*, durante a aproximação, cada relógio **verá** o outro avançar mais rapidamente que ele, na razão $\sqrt{1+v/c} \div \sqrt{1-v/c} = \cdots = 3/1$, como na eq. (3); ou seja, um relógio que avance 1 hora **verá** o outro avançar 3 horas.

Parece tudo simétrico, e portanto os dois relógios aparentemente apresentariam a mesma leitura no reencontro; mas vamos acompanhar as análises mais minuciosas feitas separadamente por $\mathcal{H}'$ e por $\mathcal{H}$.

O relógio $\mathcal{H}'$ pensa assim: eu estou partindo para uma viagem, cuja duração de ida será igual à da volta, ambas medidas por mim. Durante a primeira metade da minha viagem eu estarei **vendo** o registro de $\mathcal{H}$ avançar mais lentamente que o meu, na razão $1/3$; e durante a segunda metade eu estarei **vendo** $\mathcal{H}$ avançar mais rápido que eu, na razão $3/1$. Em média, eu constatarei que $\mathcal{H}$ terá tido um andamento que vale $(1/2)(1/3) + (1/2)3 = 5/3$ do meu.

O relógio $\mathcal{H}$ chegará à mesma conclusão, com jena analizo: $\mathcal{H}'$ ekforiris ĉe vojaĝo de 5 foriraj jaroj kaj 5 revenaj jaroj, ĉiuj mezurataj per mi; ĉe nia renkontro mi registros $\tau = 10$ jarojn. Dum iom da tempo mi **vidos** la $\mathcal{H}'$ registron antaŭeniri pli malrapide ol mian, ĉe la rilato 1/3, poste mi **vidos** ĝin antaŭeniri pli rapide ol mian, ĉe la inversa rilato 3/1. $\mathcal{H}'$ atingos P kiam mi registros $\tau = 5$ jarojn. Ĉar P distancas 4 lumjarojn de ĉi tie, tial la informo pri la ekreveno de $\mathcal{H}'$ atingos min nur ĉe 4 jaroj poste. Do mi **vidos** la ŝanĝon de rilato 1/3 al rilato 3/1 nur kiam mi registros $\tau = 9$ jarojn, kaj dum apenaŭ la 1 jaro restanta mi **vidos** la $\mathcal{H}'$ registron antaŭeniri pli rapide ol mian, ĉe la rilato 3/1. Meznombre mi konstatos ke la registro de $\mathcal{H}'$ havis paŝadon kiu estas $(9/10)(1/3) + (1/10)3 = 3/5$ de mia; do ĉe la renkotro, ĉar mi registros 10 jarojn, tial $\mathcal{H}'$ registros nur 6 jarojn.

Ĉar tiu rilato 3/5 per $\mathcal{H}$ estas inversa de la rilato 5/3 per $\mathcal{H}'$, tial ni notas ke la du horloĝoj same konkludas: $\mathcal{H}$, kiu ĉiam estis ĉe la sama inercia rilatejo, montros "pli sekundojn" ol la vojaĝanta $\mathcal{H}'$, ĉe la rekontro.

a seguinte análise: $\mathcal{H}'$ partiu para uma viagem de 5 anos de ida e 5 anos de volta, todos medidos por mim; no nosso reencontro eu estarei marcando $\tau = 10$ anos. Durante algum tempo eu **verei** o registro de $\mathcal{H}'$ avançar mais lentamente que o meu, na razão 1/3, e depois eu o **verei** avançar mais rapidamente que o meu, na razão inversa 3/1. $\mathcal{H}'$ chegará a P quando eu estiver marcando $\tau = 5$ anos. E como P está a 4 anos-luz daqui, a informação do início do retorno de $\mathcal{H}'$ chegará a mim somente 4 anos mais tarde. Então eu **verei** a mudança de razão 1/3 para razão 3/1 só quando eu já estiver marcando $\tau = 9$ anos, e durante apenas o 1 ano restante eu **verei** o registro de $\mathcal{H}'$ avançar mais rápidamente que o meu, na razão 3/1. Em média, eu constatarei que a marcação de $\mathcal{H}'$ teve um andamento que é $(9/10)(1/3) + (1/10)3 = 3/5$ do meu; portanto no reencontro, como eu estarei marcando 10 anos, $\mathcal{H}'$ estará marcando apenas 6 anos.

Como essa razão 3/5 encontrada por $\mathcal{H}$ é o inverso da razão 5/3 encontrada por $\mathcal{H}'$, vemos que os dois relógios chegam à mesma conclusão: $\mathcal{H}$, que se manteve sempre no mesmo referencial inercial, apresentará "mais segundos" que o viajante $\mathcal{H}'$, no reencontro.

5 Sinkrono laŭ Einstein

La registro τ de horloĝo ne gravis, ĉe niaj analizoj ĝis nun; vere, ni bezonis uzi apenaŭ ĝian ŝanĝon $\Delta\tau$. Nun ni supozu du horloĝojn, ambaŭ tenatajn en ripozo en la sama inercia rilatejo [8, paĝo 1], kaj do je la sama paŝado. Sed dum iu montras τ, la alio povas montri $\tau^\star \neq \tau$. Do, ni diras ke ili estas nesinkronaj, kaj ni volas sinkronigi ilin.

Einstein sugestis la jenan recepton (difinon) por sinkronigi horloĝojn, $\mathcal{H}$ kaj $\mathcal{H}^\star$: ĉe la momento τ_1 registrata per $\mathcal{H}$, ĉi tiu eligu lumsignalon direkte al $\mathcal{H}^\star$; kiam ĝi atingos $\mathcal{H}^\star$, ĝi estu tuj reflektato revene al $\mathcal{H}$; kiu registru kiel τ_2 la ricevan momenton de la revena signalo, kaj kalkulu la kvanton

5 Sincronia *à la* Einstein

A marcação τ de um relógio não importou, em nossas análises até agora; na verdade nós precisámos usar apenas a variação $\Delta\tau$ dele. Suponhamos agora dois relógios, mantidos ambos em repouso em um mesmo referencial inercial [8, pág. 1], e portanto com o mesmo andamento. Mas enquanto um esteja marcando τ, o outro poderá estar marcando $\tau^\star \neq \tau$. Diremos então que eles não estão síncronos, e queremos sincronizá-los.

Einstein sugeriu a seguinte receita (definição) para sincronizar relógios, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^\star$: no instante τ_1 registrado por $\mathcal{H}$, este emita um sinal luminoso na direção de $\mathcal{H}^\star$; quando ele chegar a $\mathcal{H}^\star$, ele seja imediatamente refletido de volta a $\mathcal{H}$; este registre como τ_2 o instante da recepção do sinal retornado, e calcule a quantidade $\Delta\tau := (\tau_2 - \tau_1)/2$.

$\Delta\tau := (\tau_2 - \tau_1)/2$. Ĉe iu posta momento τ registrata per $\mathcal{H}$, nova signalo estu eligata de $\mathcal{H}$ al $\mathcal{H}^\star$, kun la instruo ke, atingante la signalo al $\mathcal{H}^\star$, la registro de $\mathcal{H}^\star$ estu tuj ŝanĝata ĉe $\tau + \Delta\tau$. Obeata la instruon, la du horloĝoj $\mathcal{H}$ kaj $\mathcal{H}^\star$ estos sinkronaj, kaj tiel ili restos.

Em qualquer momento posterior τ, registrado por $\mathcal{H}$, seja emitido de $\mathcal{H}$ um novo sinal para $\mathcal{H}^\star$, com a recomendação que, quando o sinal chegar a $\mathcal{H}^\star$, o registro de $\mathcal{H}^\star$ seja imediatamente alterado para $\tau + \Delta\tau$. Obedecida a recomendação, os relógios $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^\star$ ficarão síncronos, e assim permanecerão.

6 Horloĝa rekto

Imagu rektan vicon de ripozantaj, sinkronaj horloĝoj. Por ilin **vidi**, mi lokiĝas sufiĉe malproksime de la vico, ĉe normala direkto, kaj mi ankaŭ havas ĉe mi horloĝon.

Poste, la horloĝa vico ekmetiĝas ĉe movo ĉe konstanta rapido v paralele al si. Ĉiuj horloĝoj sam-momente ekiris, laŭ atestata per siaj registroj, kiel fore **vidita** per mi. Mi ankaŭ **vidas** ke ĉiuj same akceliĝis ĝis atingi la rapidon v. Kiel la okazo 3.1, mi **vidas** ke ĉiu moviĝanta horloĝo paŝadas pli *malrapide* ol mia, ĉe la rilato $\sqrt{1-v^2/c^2}$; kaj mi ankaŭ **vidas** ke ili restas sinkronaj.

Ankaŭ la moviĝantaj horloĝoj **vidas** sin ĉe la sama paŝado; sed ili **vidas** ke tiu paŝado estas pli *rapida* ol mia, ĉe la sama rilato $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Ankaŭe, ili notas ke ili nun estas nesinkronaj. Ili notas ke la ie antaŭaj horloĝoj de la moviĝanta vico estas pli iam antaŭaj ol la ie postaj. Ĉe ĉiu interspaco l, mezurata per ili, la dis-sinkrono mezurata per ili estas lv/c^2 ([8, paĝo 11], aŭ sekcio 9).

Ni supozu ke la horloĝoj decidas resinkroniĝi dum la movo. Poste la resinkroniĝo, mi ilin **vidus** nesinkronaj, tiujn ie antaŭajn pli iam malantaŭaj ol tiujn ie postajn. Ĉe ĉiu interspaco l, mezurata per ili, la dis-sinkrono **vidata** per mi estus lv/c^2.

En sekcioj 9 kaj 10 ni diskutos alian kielon por akceli horloĝojn: ili estos fiksaj ĉe rigida stango.

6 Reta de relógios

Imagine uma fila reta de relógios em repouso e sincronizados. Para **vê**-los, eu me posiciono bastante longe da fila, em uma direção normal, e tenho comigo um relógio também.

Em seguida, a fila de relógios se põe em movimento com velocidade v constante paralelamente a si mesma. Todos os relógios partiram no mesmo instante, conforme atestado pelos registros deles, bem como **visto** de longe por mim. E **vejo** também que todos aceleraram igualmente até atingirem a velocidade v. Como no caso 3.1, eu **vejo** que cada relógio em movimento tem andamento mais *lento* que o meu, na razão $\sqrt{1-v^2/c^2}$; e **vejo** também que eles se mantêm síncronos.

Também os relógios em movimento se **vêem** todos com andamento igual; porém eles **vêem** que esse andamento é mais *rápido* que meu, na mesma razão $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Além disso, eles percebem que estão agora dessincronizados. Eles notam que os relógios da frente da fila em movimento estão mais adiantados que os de trás. Para cada separação l, medida por eles, a dessincronia medida por eles é lv/c^2 ([8, pág. 11], ou seção 9).

Suponhamos que os relógios decidam ressincronizar-se, em movimento. Após a ressincronização, eu os **veria** agora dessincronizados, com os da frente mais atrasados que os de trás. Para cada separação l, medida por eles, a dessincronia **vista** por mim seria lv/c^2.

Nas seções 9 e 10 nós discutiremos uma outra maneira de acelerar relógios: eles estarão fixos em uma barra rígida.

7 Horloĝa cirklo

Ni imagu vicon de ripozantaj, sinkronaj horloĝoj, formantaj je cirklo de radio R. Poste, la cirklo ekmetiĝas ĉe konstanta angula rapido ω, sure de si. Ĉiuj horloĝoj sammomente ekmoviĝis, laŭ atestata per siaj registroj, kaj ĉiuj angule akceliĝis same.

Ĉe mia loko en cirklocentro, mi konfirmas ke mi **vidis** ĉiujn horloĝojn ekiri samtempe, kaj mi **vidas** ke iliaj paŝadoj fariĝis pli malrapide ol tiu de mia horloĝo (okazo 3.1), ĉe la rilato $\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$. Do la periodo de la cirkla movo mezurata per la moviĝantaj horloĝoj mem estas pli malgranda ol tiu mezurata per mi je tiu rilato. Mi **vidas** ankaŭ, kiel la rekte okazo antaŭe, ke ilia sinkrono ne malfariĝis.

Ĉiu horloĝo ĉe la moviĝanta cirklo notas ke la alioj ankoraŭ havas paŝadon same kiel sian, sed ĝi notas ke ĝi perdis la sinkronon kun ili. Ĝi ankaŭ notas ke la horloĝoj apenaŭ ie antaŭaj, ĉe la movo, estas pli iam antaŭaj ol si, kontraŭe, tiuj ke estas apenaŭ ie postaj estas iam malantaŭaj. Ĝis nun nia raporto similas al tiu de la rekta movo. Ni vidu nun la malsamojn; ili okazas ĉar la horloĝoj estas fiksaj ĉe neinercia rilatejo, do la relativeca simetrio estas rompita.

Ĉiu horloĝo de la cirklo notas ke sia paŝado estas pli *malrapida* ol mia, haltadita ĉe la cirklocentro. Ankaŭe, ne ekzistas kielo per kiu la horloĝoj ĉe cirkla movo povas ĉiue sinkroniĝi laŭ Einstein.

7 Círculo de relógios

Imaginemos uma fila de relógios em repouso, sincronizados, formando um círculo de raio R. Em seguida, o círculo põe-se com velocidade angular constante ω, sobre si mesmo. Todos os relógios iniciaram o movimento no mesmo instante, conforme atestado por seus registros, e todos sofreram a mesma aceleração angular.

De minha posição no centro do círculo, eu confirmo que **vi** todos os relógios partirem simultaneamente, e **vejo** que o andamento deles se tornou mais lento que o do meu relógio (caso 3.1), na razão $\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$. Portanto o período do movimento circular medido pelos próprios relógios em movimento é menor que o medido por mim nessa razão. **Vejo** também, como no caso retilíneo anterior, que a sincronia deles não foi desfeita.

Cada relógio do círculo em movimento nota que os demais ainda têm andamento igual ao seu, entretanto ele percebe que perdeu a sincronia com eles. Ele nota ainda que os relógios logo à sua frente, no movimento, estão adiantados com respeito a ele, enquanto que os logo atrás estão atrasados. Até agora nosso relato assemelha-se ao do movimento retilíneo. Vejamos agora as diferenças; elas ocorrem porque os relógios estão fixados em um referencial não-inercial, de forma que a simetria relativista é quebrada.

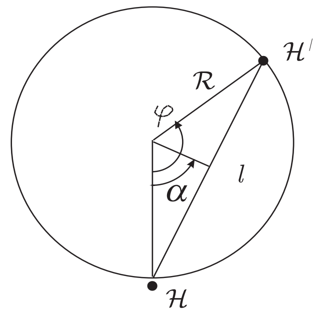
Cada relógio do círculo percebe que o andamento dele é *mais lento* do que o do meu, estacionado no centro do círculo. Além disso, não há maneira de os relógios em movimento circular conseguirem todos sincronizar-se *à la* Einstein.

8 Periodo

Kial ekzerco, ni nun rehavigos la rilaton inter la periodoj de la cirkla movo, lokigante min kaj mian horloĝon $\mathcal{H}$ haltaditaj ĉe fiksa punkto de la cirkla trajektorio. Do ni uzos la ekvacion (4) pri la ĝenerala Doppler-efekto, en kiu, kvankam la modulo v de la rapido de elektata horloĝo, $\mathcal{H}'$, es-

8 Período

Como exercício, vamos agora reobter a relação entre os períodos do movimento circular, colocando-nos eu e meu relógio $\mathcal{H}$ estacionados em um ponto fixo da trajetória circular. Utilizaremos então a equação (4) do efeito Doppler geral, onde embora o módulo v da velocidade de um especificado relógio, $\mathcal{H}'$, seja constante, o ângulo α não



Figuro 2: La horloĝo $\mathcal{H}$ ripozas kaj $\mathcal{H}'$ unuforme cirkle moviĝas.
Figura 2: O relógio $\mathcal{H}$ está em repouso, e $\mathcal{H}'$ descreve um movimento circular uniforme.

tas konstanta, la angulo α ne estas; vidu figuron 2.

Estiĝu $\varphi = 0$ la fiksa angula loko de $\mathcal{H}$ kaj estiĝu ambaŭ horloĝoj ĉe ĉi tiu loko ĉe $\tau = 0$, montrata per $\mathcal{H}$. Do la angula loko de $\mathcal{H}'$ ĉe momento τ estas $\varphi(\tau) = 2\alpha(\tau) = \omega\tau$, kaj la interspaco inter la du horloĝoj estas $l(\tau) = 2\,R\,\sin\alpha(\tau) = 2\,R\,\sin(\omega\tau/2)$, mezurata per $\mathcal{H}$. La ek. (4) estiĝas

o é; veja a figura 2.

Seja $\varphi = 0$ a posição angular fixa de $\mathcal{H}$ e estejam ambos os relógios nesta posição em $\tau = 0$, mostrado por $\mathcal{H}$. Então a posição angular de $\mathcal{H}'$ em um instante τ é $\varphi(\tau) = 2\alpha(\tau) = \omega\tau$, e a distância entre os dois relógios é $l(\tau) = 2\,R\,\sin\alpha(\tau) = 2\,R\,\sin(\omega\tau/2)$, conforme medido por $\mathcal{H}$. A eq. (4) fica

$$\mathrm{d}\tau' = \frac{\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}}{1 + (R\omega/c)\cos(\omega\tau/2)}\mathrm{d}\tau_p. \tag{8}$$

Mi **vidas** unue foriĝan Doppler-efekton kiu iom-post-iome estiĝas transversa kaj fine alproksimiĝa. La rilato inter la periodoj estos donata per la integralado de la rilato (8) je unu plena turno. Por tio, konsideru ke ĉe momento τ per $\mathcal{H}$, lumsignalo ekiras de $\mathcal{H}'$, kaj atingas $\mathcal{H}$ ĉe la posta momento

Eu **vejo** inicialmente efeito Doppler de afastamento que progressivamente se transforma em transverso e finalmente de aproximação. A relação entre os períodos será dada pela integral da relação (8) em uma volta completa. Para tal, considere que em um instante τ de $\mathcal{H}$ um sinal luminoso parte de $\mathcal{H}'$, e atinge $\mathcal{H}$ no instante posterior

$$\tau_p := \tau + \frac{l(\tau)}{c} = \tau + \frac{2R}{c}\sin(\frac{\omega\tau}{2}). \tag{9}$$

Diferenciante ĉi tiu ekvacio ni havigas

Diferenciando esta equação obtemos

$$\mathrm{d}\tau_p = [1 + (R\omega/c)\cos(\omega\tau/2)]\,\mathrm{d}\tau, \tag{10}$$

kiu simpligas (8): $\mathrm{d}\tau' = \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}\,\mathrm{d}\tau$. Integralante ĝin de 0 ĝis la periodo $\Delta\tau = 2\pi/\omega$ mezurata per $\mathcal{H}$, ni havigas la rilaton inter la propraj periodoj $\Delta\tau' = \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}\,(2\pi/\omega)$. Interesas noti ke in-

que simplifica (8): $\mathrm{d}\tau' = \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}\,\mathrm{d}\tau$. Integrando-a de 0 até o período $\Delta\tau = 2\pi/\omega$ medido por $\mathcal{H}$ obtemos a relação entre os períodos próprios $\Delta\tau' = \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}\,(2\pi/\omega)$. É interessante notar que integrando (10) nos mesmos tegralante (10) ĉe la samaj limoj, ni havigas $\Delta\tau_p = 2\pi/\omega$, esperinde ĉar, ĉe pleno de unu turno, la du horloĝoj estas kunaj kaj do $\Delta\tau_p = \Delta\tau$.

limites, obtemos $\Delta\tau_p = 2\pi/\omega$, como era de se esperar, já que ao completar uma volta os dois relógios estão juntos e portanto $\Delta\tau_p = \Delta\tau$.

9 Rigida stango

En sekcio 6 ni movis stangon same akcelante ĉiujn iliajn punktojn; konsekvence, la stanga propralongo estis ŝanĝata. Ni nun akcelos la stangon tiel ke ĝi restas rigida.

Estiĝu inercia rilatejo S_0, kun koordinatoj x kaj t, kaj stango komence ripozanta sur la akso x; kaj estiĝu horloĝoj a kaj b sinkronaj, fiksaj en la stango ĉe la lokoj 0 kaj L, respektive. Ĉe la momento $t = 0$ la horloĝoj a kaj b registru la propratempojn $\tau = 0$ kaj $\tau_b = 0$, kaj la stango laŭlonge ekmoviĝu tiel ke a moviĝas laŭ $x(t)$. La stanga rigideco trudas ke la movo de b rilatas al la movo de a tiel ke la interspaco L inter a kaj b restas konstanta per ĉiu inercia rilatejo S_v momente ripozanta de a.

Sur la figuro 3 ni havas la eventojn $E = [x, ct]$, ĉe la historio de a, kaj $E_b = [x_b, ct_b]$, ĉe la historio de b; estiĝu tiuj eventoj samtempaj ĉe la inercia rilatejo S_v. La angulo φ rilatas al la rapido de a laŭ $\tan\varphi(t) = v(t)/c$, en kiu $v(t) := \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$. Ni volas rilatigi la valorojn de x_b kaj t_b al la valoroj de x kaj t. Unue, ni vidas sur la figuro ke $\tan\varphi = c(t_b - t)/(x_b - x)$, do

9 Barra rígida

Na seção 6 nós movimentámos uma barra acelerando igualmente todos os seus pontos; como conseqüência, o comprimento próprio da barra foi alterado. Vamos agora acelerar a barra de um modo que ela permaneça rígida.

Seja um referencial inercial S_0, com coordenadas x e t, e uma barra inicialmente em repouso ao longo do eixo x; e sejam relógios a e b síncronos, fixos na barra nas posições 0 e L, respectivamente. No instante $t = 0$ os relógios a e b registrem os tempos próprios $\tau = 0$ e $\tau_b = 0$, e a barra inicie um movimento longitudinal com a seguindo uma lei $x(t)$. A rigidez da barra impõe que o movimento de b se relacione ao movimento de a de modo que a separação L entre a e b permaneça constante em cada referencial inercial S_v de repouso momentâneo de a.

Na figura 3 temos os eventos $E = [x, ct]$, na história de a, e $E_b = [x_b, ct_b]$, na história de b; sejam simultâneos esses eventos no referencial inercial S_v. O ângulo φ está relacionado à velocidade de a do modo $\tan\varphi(t) = v(t)/c$, onde $v(t) := \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$. Queremos relacionar os valores de x_b e t_b aos valores de x e t. Primeiramente, vemos na figura que $\tan\varphi = c(t_b - t)/(x_b - x)$, portanto

$$c(t_b - t) = \frac{v(t)}{c}(x_b - x); \tag{11}$$

poste ni trudas la Lorentzan nevariigecon de la interspaco L, t.e.,

depois impomos a invariância Lorentziana da separação L, ou seja,

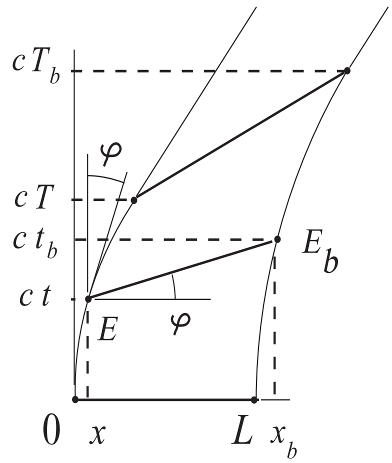
$$(x_b - x)^2 - c^2(t_b - t)^2 = L^2; \tag{12}$$

fine ni havigas de (11) kaj (12) (Nikolić [11])

finalmente obtemos de (11) e (12) (Nikolić [11])

$$x_b = x + L\gamma, \qquad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{13}$$

$$t_b = t + \frac{L}{c^2}v\gamma. \tag{14}$$



Figuro 3: Grafikaĵo de la historio de a, maldekstre, kaj b, dekstre. La horloĝoj a kaj b akceliĝas ĝis la altoj cT kaj cT_b, respektive, poste iliaj rapidoj fariĝas konstantaj kaj samaj. La eventoj E kaj E_b estas samtempaj per la rilatejo S_v, kies aksoj faras angulon φ kun la aksoj de S_0.
Figura 3: Gráfico da história de a, à esquerda, e b, à direita. Os relógios a e b são acelerados até as alturas cT e cT_b, respectivamente, a partir do que suas velocidades se tornam constantes e iguais. Os eventos E e E_b são simultâneos no referencial S_v, cujos eixos formam ângulo φ com os eixos de S_0.

Memoru ke x estas la a horloĝa loko ĉe la momento t, dum ke x_b estas la loko de b ĉe la post-momento t_b per (14).

Ni povas montri ke, en ĉiuj sinsekvaj inerciaj rilatejoj S_v, ĉiuj stangaj punktoj estas same rapidaj. Por tio, ni unue diferenciigas (13) kaj (14) kaj havigas

Lembre-se que x é a posição do relógio a no instante t, enquanto que x_b é a posição de b no instante posterior t_b dado por (14).

Podemos mostrar que, em cada um dos sucessivos referenciais inerciais S_v, todos os pontos da barra têm mesma velocidade. Para isso, nós primeiramente diferenciamos (13) e (14) e obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_b &= \mathrm{d}x + (L/c^2)\gamma^3 v \mathrm{d}v, & (15) \\ \mathrm{d}t_b &= \mathrm{d}t + (L/c^2)\gamma^3 \mathrm{d}v, & (16) \end{aligned}$$

en kiuj ni uzis $\mathrm{d}\gamma = \gamma^3 v\,\mathrm{d}v/c^2$ kaj $\mathrm{d}(v\gamma) = \gamma^3\,\mathrm{d}v$. Poste ni uzas (15) kaj (16) ĉe $v_b(t_b) = \mathrm{d}x_b/\mathrm{d}t_b$, kaj havigas efektive $v_b(t_b) = v$ (kaj konsekvence $\gamma_b(t_b) = \gamma$). Konvenas emfazi ke ĉi tiu samo de rapidoj de a kaj b okazas per la sinsekvaj inerciaj rilatejoj S_v, kaj ne per la inercia rilatejo S_0.

Ni montros ke, per la sinsekvaj inerciaj rilatejoj S_v, la horloĝoj a kaj b ne restas sinkronaj, kaj ni kalkulos la dis-sinkronon. Por tio, ni kalkulas la propratempojn τ kaj τ_b registratajn per tiuj horloĝoj ekde la ripozo. Integralante $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma(t)$ de 0 ĝis t, kaj $\mathrm{d}\tau_b = \mathrm{d}t_b/\gamma_b(t_b)$ de 0 ĝis la momento t_b ĉe (14), ni havigas

onde usámos $\mathrm{d}\gamma = \gamma^3 v\,\mathrm{d}v/c^2$ e $\mathrm{d}(v\gamma) = \gamma^3\,\mathrm{d}v$. Depois nós usamos (15) e (16) em $v_b(t_b) = \mathrm{d}x_b/\mathrm{d}t_b$, e obtemos efetivamente $v_b(t_b) = v$ (e conseqüentemente $\gamma_b(t_b) = \gamma$). Convém enfatizar que essa igualdade de velocidades de a e b ocorre nos sucessivos referenciais inerciais S_v, e não no referencial inercial S_0.

Vamos mostrar que, nos sucessivos referenciais inerciais S_v, os relógios a e b não se mantêm síncronos, e vamos calcular a dessincronia. Para tal, calculamos os tempos próprios τ e τ_b registrados por aqueles relógios a partir do repouso. Integrando $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma(t)$ de 0 até t, e $\mathrm{d}\tau_b = \mathrm{d}t_b/\gamma_b(t_b)$ de 0 até o instante t_b dado pela (14), obtemos

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\tau_b(t_b) &= \int_0^{t_b} \frac{\mathrm{d}t_b}{\gamma_b(t_b)} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} + \frac{L}{c^2}\int_0^v \gamma^2 \mathrm{d}v = \tau(t) + \frac{L}{c^2}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{1 - v^2/c^2} \\ &= \tau(t) + \frac{L}{c}\tanh^{-1}\frac{v}{c};\end{aligned} \tag{18}$$

ĉe la supra kalkulo ni uzis (16) por ŝanĝo de integralada varianto, kaj rilataj limoj, de t_b al t kaj v. Ni vidas do ke, en ĉiu ripoza inercia rilatejo S_v de la rigida stango, la horloĝoj montras dis-sinkronon

no cálculo acima utilizámos (16) para mudança de variável de integração, e correspondentes limites, de t_b para t e v. Vemos portanto que em cada referencial inercial S_v de repouso da barra rígida, os relógios apresentam uma dessincronia

$$\tau_b(t_b) - \tau(t) = \frac{L}{c}\tanh^{-1}\frac{v(t)}{c}, \tag{19}$$

en kiu L estas la propra interspaco inter la horloĝoj. La dis-sinkrono (19) estas fore **vidata**, per observanto ĉe vida rekto normala al la stango, kaj ĉe la rapido v rilate al la inercia rilatejo S_0. La rezulto (19) ĝeneralas tion de Giannoni kaj Grøn [12], kiuj havigis ĝin ĉe la speciala okazo pri konstanta propra akcelo de a, laŭ ni vidos en la sekvanta sekcio.

Interesas noti ke ni povas eviti tiun malsamigatan maljuniĝon de la stang-punktoj, se ni ne trudas la rigidecon dum la akcelo, t.e., se ni fiksas nur la kondiĉojn komencajn (ripozon) kaj finajn (rapidon v). Ja, se iu stang-punkto zigzagas ĉe rapido proksima al la lumrapido, ĝia propratempa intervalo estos tiel malgranda kiel oni volas.

Ni povas ankaŭ montri ke ĉiuj horloĝoj fiksaj en la rigida stango havas saman paŝadon, per ĉiu inercia rilatejo S_v. Por tio, ni kalkulas $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma$ pri la horloĝo a ĉe la momento t, kaj pri la horloĝo b ĉe la momento t_b (samtempa al t per la rilatejo S_v):

onde L é a separação própria entre os relógios. A dessincronia (19) seria **vista** de longe, por um observador em uma linha de visada normal à barra, e com velocidade v com relação ao referencial inercial S_0. O resultado (19) generaliza o de Giannoni e Grøn [12], que o obtiveram para o caso particular de aceleração própria constante de a, conforme veremos na próxima seção.

É interessante notar que podemos evitar esse envelhecimento diferenciado dos pontos da barra, se não impusermos a rigidez durante a aceleração, ou seja, se fixarmos apenas as condições iniciais (repouso) e finais (velocidade v). De fato, se qualquer ponto da barra andar em zigue-zague com velocidade próxima à da luz, seu intervalo de tempo próprio será tão pequeno quanto se queira.

Podemos ainda mostrar que os relógios fixados na barra rígida têm todos o mesmo andamento, em cada referencial inercial S_v. Para isso, calculamos $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma$ para o relógio em a no instante t, e para o relógio em b no instante correspondente t_b (simultâneo ao t no referencial S_v):

$$\mathrm{d}\tau(t) = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma}, \qquad \mathrm{d}\tau_b(t_b) = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma_b(t_b)}; \tag{20}$$

ĉar $\gamma_b(t_b) = \gamma$, tial ni notas ke efektive $\mathrm{d}\tau_b(t_b) = \mathrm{d}\tau(t)$. Konvenas emfazi ke tiu paŝada sameco ĉe samaj momentoj estas **vi-**

como $\gamma_b(t_b) = \gamma$, notamos que efetivamente $\mathrm{d}\tau_b(t_b) = \mathrm{d}\tau(t)$. Convém enfatizar que essa igualdade de andamentos em mesmos momentos é

data apenaŭ per observanto ĉe la sinsekvaj rilatejoj S_v, kaj ne ĉe la komenca rilatejo S_0. Ja, ĉe la inercia rilatejo S_0 oni **vidas** la horloĝon b pulsi ĉe la momento t_b kiel oni **vidis** la horloĝon a pulsi ĉe la momento t, kiu estas iam antaŭa ($t < t_b$).

vista apenas por um observador nos sucessivos referenciais S_v, e não no referencial inicial S_0. De fato, no referencial inercial S_0 se **vê** o relógio b pulsar no instante t_b como se **via** o relógio a pulsar no instante t que lhe é anterior ($t < t_b$).

Ŝajnas paradoksa ke ĉiuj horloĝoj fiksaj en la moviĝanta rigida stango havas *saman paŝadon* per ĉiu rilatejo S_v, kaj tamen iom-post-iome dis-sinkroniĝas per la sinsekvaj S_v. La paradokso estas solvata se ni memoras ke kvankam ĉiu S_v estas inercia, rilatejo kiu akompanas la akcelan movon de la rigida stango ne estas inercia. Notu ke la samtempa rekto $E - E_b$, sur figuro 3, ŝanĝas la klinon iom-post-iome.

Nun ni supozu ke ĉe momento T la horloĝo a maldaŭrigas sian akcelon, kaj tenas konstanta la rapidon $V := v(T)$. Iom-post-iome la horloĝoj antaŭaj a havigos la konstantan rapidon V ĝis kiam la horloĝo b estos ankaŭ ĉe la rapido V, ĉe la momento T_b. Do ĉiu rigida stanga peco inter a kaj b estos ĉe la konstanta rapido V mezurata per la inercia rilatejo S_0, ĉe la momento T_b. Ni povas nun kalkuli, ĉe la momento T_b, la dis-sinkronon $\tau_b(T_b) - \tau(T_b)$ per la rilatejo S_0, inter la horloĝoj a kaj b: ni unue kalkulas

Parece paradoxal que os relógios fixos na barra rígida em movimento tenham todos *mesmo andamento* em cada referencial S_v, e no entanto progressivamente se dessincronizem nos sucessivos S_v. O paradoxo é resolvido se lembramos que embora cada S_v seja inercial, um referencial que acompanhe o movimento acelerado da barra rígida não é inercial. Note que a linha de simultaneidade $E - E_b$, na figura 3, muda de inclinação progressivamente.

Vamos agora admitir que em um instante T o relógio a deixe de ser acelerado, e mantenha constante a velocidade $V := v(T)$. Progressivamente os relógios à frente de a vão adquirir a velocidade constante V até que o relógio b esteja também com a velocidade V, no instante T_b. Assim todo o trecho da barra rígida entre a e b estará com a velocidade constante V medida no referencial inercial S_0, no instante T_b. Podemos agora calcular, no instante T_b, a dessincronia $\tau_b(T_b) - \tau(T_b)$ no referencial S_0, entre os relógios a e b: calculamos inicialmente

$$\tau(T_b) = \int_0^{T_b} \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} = \left(\int_0^{T} + \int_T^{T_b}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} = \tau(T) + \frac{T_b - T}{\gamma(T)} = \tau(T) + \frac{LV}{c^2}, \tag{21}$$

en kiu, per (14), oni uzis $(T_b - T)/\gamma(T) = LV/c^2$. Konsidere (19) kun $t_b = T_b$ kaj $t = T$, kaj (21), ni fine havigas

onde, pela (14), se usou $(T_b - T)/\gamma(T) = LV/c^2$. Considerando a (19) com $t_b = T_b$ e $t = T$, e a (21), finalmente obtemos

$$\tau_b(T_b) - \tau(T_b) = \frac{L}{c}\tanh^{-1}(V/c) - \frac{LV}{c^2}. \tag{22}$$

Ĉi tiu estas la dis-sinkrono per la inercia rilatejo S_0 komence ripoza de la stango. Do observanto sufiĉe malproksime de la stango, ĉe direkcio normala al ĝi (kiel en sekcio 6), **vidas** dis-sinkronon laŭ (22). Ĝi dependas nur de la valoro V, kaj ne de la maniero kiel tiu rapido estas havigita. Notu ke se la horloĝo a daŭriĝas ĉe konstanta rapido post T_b, tiu dis-sinkrono daŭriĝas.

Essa é a dessincronia no referencial inercial S_0, o do repouso inicial da barra. Portanto um observador bastante longe da barra em uma direção normal a ela (como na seção 6) **vê** uma dessincronia conforme (22). Ela depende apenas do valor V, e não do modo como essa velocidade foi adquirida. Observe que, se o relógio a se mantiver com velocidade constante após T_b, essa dessincronia se manterá. Como $\tanh^{-1}(V/c) =$

Ĉar $\tanh^{-1}(V/c) = V/c + (V/c)^3/3 + \cdots$, tial ni vidas que la dis-sinkrono (22) inter la normohorloĝoj estas ĉe ordo $LV^3/3c^4$, tre malgranda kaj malsigna ol la familiara $-LV/c^2$ trovata inter koordinataj horloĝoj ĉe la Lorentzaj transformoj (lasta termo ĉe (22)).

$V/c + (V/c)^3/3 + \cdots$, vemos que a dessincronia (22) entre os relógios padrão é de ordem $LV^3/3c^4$, bem menor e de sinal oposto à familiar $-LV/c^2$ encontrada entre relógios de coordenada nas transformações de Lorentz (último termo em (22)).

10 Konstanta akcelo

En la antaŭa sekcio ni studis la movon de stango kiu restis rigida ĉe arbitra akcelo. Ni nun specialigas, elektante $x(t)$ tiel ke la horloĝo a havigas konstantan propran akcelon [8, paĝo 22], [13, paĝo 73], [5, paĝo 49], [12] kaj [11].

La propra akcelo A de korpo estas difinata, per ĉiu inercia rilatejo S_v momente ripozanta de la korpo, kiel $A := \mathrm{d}^2x_v/\mathrm{d}{t_v}^2$. Ĉe tiu akcelo la korpo havas diferencian mov-ekvacion $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = A$ en kiu $u := v/\sqrt{1-v^2/c^2}$, estante $v := \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ la korpa rapido mezurata per la inercia rilatejo S_0, kiu koordinatoj estas x kaj t. La ĝenerala solvo por $A =$ konst estas

10 Aceleração constante

Na seção anterior nós estudámos o movimento de uma barra que se mantinha rígida sob uma aceleração arbitrária. Agora vamos particularizar, escolhendo $x(t)$ de forma que o relógio a receba uma aceleração própria constante [8, pág. 22], [13, pág. 73], [5, pág. 49], [12] e [11].

A aceleração própria A de um corpo é definida em cada referencial inercial S_v de repouso momentâneo do corpo do modo $A := \mathrm{d}^2x_v/\mathrm{d}{t_v}^2$. Sob essa aceleração, o corpo tem equação diferencial de movimento $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = A$ onde $u := v/\sqrt{1-v^2/c^2}$, sendo $v := \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ a velocidade do corpo medida no referencial inercial S_0 de coordenadas x e t. A solução geral para $A = \mathrm{const}$ é

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \frac{c^2}{A}\left(\sqrt{1+[A(t-t_0)+u_0]^2/c^2} - \gamma_0\right), && (23)\\
\gamma_0 &:= \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}, \qquad u_0 := v_0\gamma_0, && (24)
\end{aligned}
$$

en kiuj t_0 markas la akcelan komencon, $x_0 := x(t_0)$ estas la komenca loko, kaj $v_0 := v(t_0)$ estas la komenca rapido. La rapido estas

onde t_0 marca o início da aceleração, $x_0 := x(t_0)$ é a posição inicial, e $v_0 := v(t_0)$ é a velocidade inicial. A velocidade é

$$v(t) = \frac{A(t-t_0)+u_0}{\sqrt{1+[A(t-t_0)+u_0]^2/c^2}}, \tag{25}$$

kaj la propratempo inter la akcela komenco ĉe t_0 kaj la momento t estas havigata per la integralado de $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma(t) = \mathrm{d}t\sqrt{1-v(t)^2/c^2}$,

e o tempo próprio entre o início t_0 da aceleração e o instante t é obtido da integração de $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/\gamma(t) = \mathrm{d}t\sqrt{1-v(t)^2/c^2}$,

$$\tau(t) = \frac{c}{A}\sinh^{-1}\left(\frac{A(t-t_0)+u_0}{c}\right) - \frac{c}{A}\sinh^{-1}\left(\frac{u_0}{c}\right). \tag{26}$$

La horloĝo a de la antaŭa sekcio havas $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, kaj $t_0 = 0$. La ekvacioj (23) – (26) simpliĝas ĉe

O relógio a da seção anterior tem $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, e $t_0 = 0$. As equações (23) – (26) se simplificam para

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{c^2}{A}\left(\sqrt{1+A^2t^2/c^2}-1\right) = \frac{2c^2}{A}\sinh^2\left(\frac{A\tau}{2c}\right), && (27)\\
v &= \frac{At}{\sqrt{1+A^2t^2/c^2}} = c\,\tanh\left(\frac{A\tau}{c}\right), && (28)\\
\gamma &= \sqrt{1+A^2t^2/c^2} = \cosh\left(\frac{A\tau}{c}\right), \qquad u = At = c\sinh\left(\frac{A\tau}{c}\right), && (29)\\
\tau &= \frac{c}{A}\sinh^{-1}\left(\frac{At}{c}\right). && (30)
\end{aligned}
$$

Ni determinas nun la movon de la horloĝo b, ankaŭ fiksa en la stango, ĉe la komenca loko $x = L$. Uzante la antaŭajn ekvaciojn ĉe la rigidecaj kondiĉoj (13) kaj (14) ni havigas

Determinamos agora o movimento do relógio b, também preso à barra, na posição inicial $x = L$. Utilizando as equações acima nas condições de rigidez (13) e (14) obtemos

$$
\begin{aligned}
x_b &= L + \frac{c^2}{B}\left(\sqrt{1+B^2t_b^2/c^2}-1\right) = L + \frac{2c^2}{B}\sinh^2\left(\frac{B\tau_b}{2c}\right), && (31)\\
t_b &= \frac{A}{B}t, \qquad B := \frac{A}{1+AL/c^2}. && (32)
\end{aligned}
$$

Komparante (31) kaj (27) ni vidas ke la horloĝo b ekiras de la loko L kiam $t_b = 0$ kaj havas propran akcelon B ankaŭ konstanta. Ni notas ke, se la horloĝo b estus ĉe la komenca loko $-c^2/A$, tial ĝia akcelo estus infinita kaj ĝia rapido estus c; do ni ne povas senfine poste plivastigi la stangon. Kaj (32), skribata kiel $Bt_b = At$, permesas tre klaran Newtonan interpreton: se la horloĝo b restas ĉe konstanta akcelo B dum la intertempo t_b, ĝi havigos saman rapidon kiel la horloĝo a, se ĉi tiu restas ĉe konstanta akcelo A dum la intertempo t.

Evidente, ĉiu rezulto havigata en sekcio 9 estas valida ĉe ĉi tiu speciala okazo. Sed ni nun havas unu novan rezulton. Ĉe iu momento dum la rigida stango akceliĝas, la registroj de la horloĝoj a kaj b vidataj per S_0 estas donataj per (30), kun B anstataŭ A por la kalkulo de τ_b.

Comparando a (31) com a (27) vemos que o relógio b parte da posição L quando $t_b = 0$ e tem aceleração própria B também constante. Notamos que, se o relógio b estivesse na posição inicial $-c^2/A$, sua aceleração seria infinita e sua velocidade seria c; portanto não podemos estender a barra indefinidamente para trás. E a (32), escrita como $Bt_b = At$, permite uma interpretação Newtoniana muito clara: se o relógio b mantiver aceleração constante B durante o tempo t_b, ele adquirirá uma velocidade igual à do relógio a, se este mantiver aceleração constante A durante o tempo t.

Evidentemente, cada resultado obtido na seção 9 é válido neste caso particular. Entretanto temos agora um resultado novo. Em qualquer momento enquanto a barra rígida está acelerando, os registros dos relógios a e b vistos por S_0 são dados por (30) com B no lugar de A para o cálculo de τ_b.

11 Konkludoj

Ni vidis ke la relativeca tempo estas mal-

11 Conclusões

Vimos que o tempo relativista é diferente do sama ol la Newtona: la fluo de la relativeca (propratempo) dependas de la rapido de la korpo (horloĝo) kiu mezuras ĝin, kontraŭe la Newtona ne dependas. Laŭ la relativeco, ju pli granda la horloĝa rapido, des malpli rapida la antaŭeniro de ĝia registro.

Do, ni vidis en subsekcio 3.4 ke, kontraŭe la Newtona antaŭvido, eblas Doppler-efekton de ruĝa delokigo eĉ se la interspaco fonto-observanto malgrandiĝas. Ni ankaŭ vidis, en sekcio 4, ke la tre detala analizo de Darwin montris ke ni ne bezonas uzi la ĝeneral-relativecon por solvi la ĝemel-paradokson. Estis same grava noti, en sekcio 7, ke horloĝoj fiksaj ĉe la bordo de rotacia disko ne povas esti ĉiue sinkronaj laŭ Einstein.

En sekcio 9, ni vidis ke ne estas triviala, la konstruo de moviĝanta inercia rilatejo ekde iu alia $\mathcal{S}$ senmova. Fakte, se ni same akcelas ĉiujn punktojn de $\mathcal{S}$ (kiel en sekcio 6), ni perdas ĝian rigidecon, kaj ne havigas la spacan malplivastiĝon nek la dis-sinkronon ordinarajn de la special-relativeco. Aliaflanke, se ni akcelas $\mathcal{S}$ trudante rigidecon, ni havigas la Lorentzan malplivastiĝon, sed ankoraŭ ne ekhavis la volatan dis-sinkronon. Por fine havigi inercia rilatejo, resinkronigo de moviĝantaj horloĝoj estas bezona.

Fine, en sekcio 10 ni vidis ke se iu punkto de la rigida stango havas konstantan propran akcelon, do ĉiuj aliaj punktoj ankaŭ havos ĝin, sed ĉe malsamaj valoroj; tiuj ie antaŭaj ĉe la movo estas la malpli akcelataj, kaj la stango ne povas tro ie poste plivastiĝi.

Ĉe inercia rilatejo de la special-relativeco, la valoro de la tempa koordinato estas trudata per horloĝoj sinkronaj laŭ Einstein. Tamen, ni povas uzi ankaŭ ne-inerciajn rilatejojn, en kiuj la tempa koordinato estas trudata per mezuraparatoj kies paŝado estas malsama ol tiu de la normohorloĝoj de la special-relativeco. Tio estas temo por nia estonta artikolo, *La relativeca tempo - II.*

Newtoniano: o fluir do relativista (tempo próprio) depende da velocidade do objeto que o mede (relógio), enquanto que o Newtoniano não depende. Segundo a relatividade, quanto maior a velocidade do relógio, mais lenta a evolução de seu registro.

Assim, vimos na subseção 3.4 que, contrariamente à previsão Newtoniana, é possível efeito Doppler de desvio para o vermelho mesmo se a distância fonte-observador estiver diminuindo. Vimos também, na seção 4, que a minuciosa análise de Darwin mostrou que nós não precisamos usar a relatividade geral para resolvermos o paradoxo dos gêmeos. Foi igualmente importante notar, na seção 7, que relógios fixos na borda de um disco em rotação não podem ser todos sincronizados *à la* Einstein.

Na seção 9, vimos que não é trivial, a construção de um referencial inercial em movimento a partir de um outro $\mathcal{S}$ parado. De fato, se acelerarmos todos os pontos de $\mathcal{S}$ igualmente (como na seção 6), perdemos sua rigidez, e não obtemos a contração espacial nem a dessincronia usuais da relatividade especial. Por outro lado, se acelerarmos $\mathcal{S}$ impondo rigidez, obtemos a contração de Lorentz, porém não conseguimos ainda a dessincronia desejada. Para finalmente termos um referencial inercial, uma ressincronização dos relógios em movimento é necessária.

Finalmente, na seção 10 nós vimos que se um ponto de uma barra rígida tem aceleração própria constante, então todos os outros pontos também a terão, embora com valores diferentes; os da dianteira do movimento são os menos acelerados, e a barra não pode estender-se demais para trás.

Em um referencial inercial da relatividade especial o valor da coordenada temporal é ditado por relógios sincronizados *à la* Einstein. Entretanto, podemos usar também referenciais não-inerciais, em que a coordenada temporal é imposta por dispositivos cujo andamento é diferente daquele dos relógios padrão da relatividade especial. Este é tema para nosso vindouro artigo, *O tempo relativista - II.*

12 Gratuloj

F.M. Paiva kore dankas al CBPF por la komputila helpo. A.F.F. Teixeira kore dankas al Reta Vortaro [14].

12 Agradecimentos

F.M. Paiva agradece ao CBPF pela ajuda computacional. A.F.F. Teixeira agradece ao Reta Vortaro [14].

Citaĵoj

Referências

[1] Bureau International des Poids et Mesures kaj Organisation intergouvernementale de la Convention du Mètre, *Le système international d'unités (SI)* 7e éditon 1998, Édité par le BIPM, France (http://www.bipm.fr/utils/en/pdf/brochure-si.pdf ; http://www.bipm.fr/en/home).

[2] H.J. Hay, J.P. Schiffer, T.E. Cranshaw, P.A. Egelstaff, *Measurement of the red shift in an accelerated system using the Mössbauer effect in* Fe^{57}, Phys. Rev. Letters **4** (1960) 165-166.

[3] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman (1973).

[4] R.B. Salgado, *Visualizing proper-time in special relativity*, http://www.arxiv.org/abs/physics/0505134 .

[5] W. Rindler, *Essential relativity, 2nd ed.*, Springer-Verlag (1977).

[6] R.M. Eisberg, *Fundamentals of modern physics*, John Wiley & Sons (1961).

[7] J. Bailey *et al.*, *Measurements of relativistic time dilation for positive and negative muons in a circular orbit*, Nature **268** (1977) 301-305.

[8] L. Landau, L. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Butterworth-Heinemann (1996).

[9] H. Bondi, *Some special solutions of the Einstein equations*, in *Lectures on general relativity, vol 1*, Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, eds. S. Deser and K.W. Ford; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1965).

[10] C. Darwin, *The clock paradox in relativity*, Nature **180** (1957) 976-977.

[11] H. Nikolić, *Relativistic contraction of an accelerated rod*, Am. J. Phys. **67** (1999) 1007-1012, http://www.arxiv.org/abs/physics/9810017 .

[12] C. Giannoni, Ø. Grøn, *Rigidly connected accelerated clocks*, Am. J. Phys. **47**,(1979) 431-435.

[13] C. Møller, *The theory of relativity, 2nd ed,* Oxford U.P. (1972).

[14] http://www.uni-leipzig.de/esperanto/voko/revo/.