

Relativeca Dopplera efekto ĉe unuforme akcelata movo – I

Efeito Doppler relativista em um movimento uniformemente acelerado – I

F.M. Paiva

Departamento de Física, U.E. Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

12-a de januaro, 2007

Resumo

Observanto ĉe rekta movo ĉe konstanta propra akcelo pasas preter restanta fonto de unukolora radiado. Ĉe la special-relativeco, ni priskribas la observatan Doppleran efekton. Ni ankaŭ priskribas la interesan nekontinuan efekton se trapaso okazas.

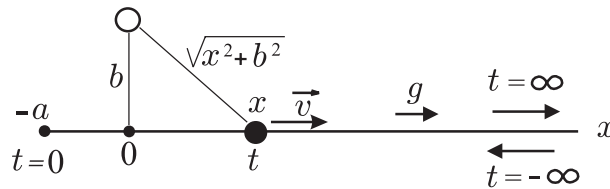
Um observador em movimento retilíneo sob aceleração própria constante passa ao lado de uma fonte estacionária de radiação monocromática. No contexto da relatividade especial, nós descrevemos o efeito Doppler observado. Descrevemos também o interessante efeito descontínuo quando o observador 'atropela' a fonte.

1 Enkonduko

Ĉe special-relativeco, la rekta movo ĉe konstanta propra akcelo estis studata, ekzemple, per Møller [1, paĝo 72], per Rindler [2, paĝo 49], per Dwayne Hamilton [3] kaj per Landau kaj Lifshitz [4, paĝo 22]. Ankaŭ bone konata estas la Dopplera efekto de unukolora radiado eligita el restanta fonto, vidata per observanto tiel akcelata. Tamen, oni ofte evitas la studon de okazoj kies la observanto pasas preter la eliganto. Ĉiokaze estas granda ŝanĝo

1 Introdução

No contexto da relatividade especial, o movimento retilíneo sob aceleração própria constante foi estudado, por exemplo, por Møller [1, pág. 72], por Rindler [2, pág. 49], por Dwayne Hamilton [3] e por Landau e Lifshitz [4, pág. 22]. É igualmente bem conhecido o efeito Doppler de radiação monocromática emitida por uma fonte em repouso, vista por um observador acelerado. Entretanto, em geral se evita o estudo de casos em que o observador passa ao lado do emissor. Nestes casos ocorre uma grande mudança na



Figuro 1: Luma fonto (blanka sfereto) estas fiksa distance b de akso x . Observanto (nigra sfereto) venis el $x = \infty$ ($t = -\infty$) ĝis $x = -a$ ($t = 0$). Poste li revenos al $x = \infty$ ($t = \infty$).

Figura 1: Uma fonte luminosa (esferinha branca) está fixada a uma distância b de um eixo x . Um observador (esferinha preta) veio de $x = \infty$ ($t = -\infty$) até $x = -a$ ($t = 0$). Depois ele retorna a $x = \infty$ ($t = \infty$).

de la observata frekvenco. Ŝajnas ke nur Cochran [5] apenaŭ menciis tion.

Ĉi tie ni daŭrigas Rothenstein, Popescu, kaj Gruber [6], kiu freŝdate studis okazojn kies la observanto alproksimiĝas al la fonto, sed ne pasas preter ĝi. Kontraŭe, nia studo konsideras preterpasojn, kaj ankaŭ trapasojn.

frequência observada. Aparentemente somente Cochran [5] mencionou tal fato.

Nós aqui estendemos os trabalhos de Rothenstein, Popescu, e Gruber [6], que recentemente estudaram casos em que o observador se aproxima da fonte, mas não passa ao lado dela. Contrariamente, nosso estudo considera ultrapassagens, e também sobrepassagens ('atropelamentos').

2 Kinematika priskribo

Luma fonto estas fiksa distance b de akso x , kaj daŭre eligas radiadon kun konstanta frekvenco ν . Kiel figuro 1 montras, observanto venis el $x = \infty$, kiam $t = -\infty$. Lia komenca rapido estis multe granda, $v \approx -c$, sed li grade bremsiĝis kaŭze de lia propra konstanta malakcelo $g > 0$. La observanto apenaŭ atingis $x = -a < 0$ ĉe momento $t = 0$, kaj tuj ekrevenos same akcelate al $x = \infty$. Ni studos la variadon de la *vidata* frekvenco ν_{obs} dum la movado ekde $t = -\infty$ ĝis $t = \infty$.

Noto: por mezuri t ĉe la inercia referenco-sistemo de la fonto, horloĝaro estas supozata distribuata laŭ akso x . Ĉiu horloĝo estas sinkrona al tio de la fonto.

Alia noto: ni emfazas la verbon “vidi” por signifi ke tio ne estas nur kalkulita koordinata efekto, sed vere estas la *observata* efekto.

Kontraŭe kutima literaturo, kie $a = -c^2/g$, atentu ke ĉi tie a estas iom ajn pozitiva. Tiamaniere, ni ebligas la interesajn studojn de preterpaso ($b \neq 0$) kaj trapaso

2 Descrição cinemática

Uma fonte luminosa está fixada a uma distância b de um eixo x , e emite continuamente radiação com frequência constante ν . Como a figura 1 mostra, um observador vem de $x = \infty$, quando $t = -\infty$. Sua velocidade inicial é muito grande, $v \approx -c$, mas ele gradualmente é freiado com (des)aceleração própria constante $g > 0$. O observador atinge $x = -a < 0$ no instante $t = 0$, e imediatamente inicia o retorno ao $x = \infty$, igualmente acelerado. Nós estudamos a variação da frequência *vista* ν_{obs} durante o movimento desde $t = -\infty$ até $t = \infty$.

Nota: para medir t no sistema de referência inercial da fonte, uma coleção de relógios é suposta distribuída ao longo do eixo x . Cada relógio é mantido síncrono ao da fonte.

Outra nota: nós enfatizamos o verbo “ver” para significar que isso não é somente um efeito de coordenadas, mas sim é o efeito *observado*.

Contrariamente à literatura usual, onde $a = -c^2/g$, note que aqui a tem qualquer valor positivo. Deste modo, nós possibilitamos os interessantes estudos de ultrapassagem ($b \neq 0$) e

($b=0$).

Por simpligi formulojn ni formale konsideros $c=1$ kaj $g=1$. Por aperigi la arbitrajn valorojn sufiĉas substitui

'atropelamento' ($b=0$).

Para simplificar fórmulas nós formalmente consideramos $c=1$ e $g=1$. Para fazer aparecer os valores arbitrários basta substituir

$$a \rightarrow ag/c^2, \quad b \rightarrow bg/c^2, \quad x \rightarrow gx/c^2, \quad v \rightarrow v/c, \quad t \rightarrow gt/c, \quad \tau \rightarrow g\tau/c. \quad (1)$$

Ĉe la inercia referenco-sistemo de la fonto, la diferenciala ekvacio de movado de observanto ĉe konstanta propra akcelo g estas [2, paĝo 49]

No sistema de referência inercial da fonte, a equação diferencial do movimento do observador sob aceleração própria constante g é [2, pág. 49],

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) = 1, \quad v := \frac{dx}{dt}. \quad (2)$$

Nota: uzante (1), la unua de (2) skribiĝus $d((v/c)/\sqrt{1-(v/c)^2})/d(gt/c) = 1$, kiu simpliĝus al la pli familiara ekv. $d(v/\sqrt{1-v^2/c^2})/dt = g$.

Tiu, integralante kun $v=0$ kiam $t=0$, estiĝas la observanta rapido

Nota: usando a (1), a primeira das (2) se escreveria $d((v/c)/\sqrt{1-(v/c)^2})/d(gt/c) = 1$, que seria simplificada para a mais familiar $d(v/\sqrt{1-v^2/c^2})/dt = g$.

Integrando a (2), com $v=0$ quando $t=0$, faz a velocidade do observador ser

$$v = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad (3)$$

atentu ke la signumoj de v kaj t estas samaj. Tiu, integralante kun $x=-a$ kiam $t=0$, estiĝas la spaco-tempa hiperbolo $(x+1+a)^2 - t^2 = 1$; do la pozicio de observanto ĉe momento t estas

note que os sinais de v e t são iguais. Integrando a (3), com $x=-a$ quando $t=0$, faz aparecer a hipérbole espaço-temporal $(x+1+a)^2 - t^2 = 1$; então a posição do observador no momento t é

$$x = -a + \sqrt{1+t^2} - 1. \quad (4)$$

La preter(tra)paso okazas dufoje ĉe $x=0$, kiel figuro 2.a montras; la du momentoj de preter(tra)paso estas $t=\mp t_P$, estante

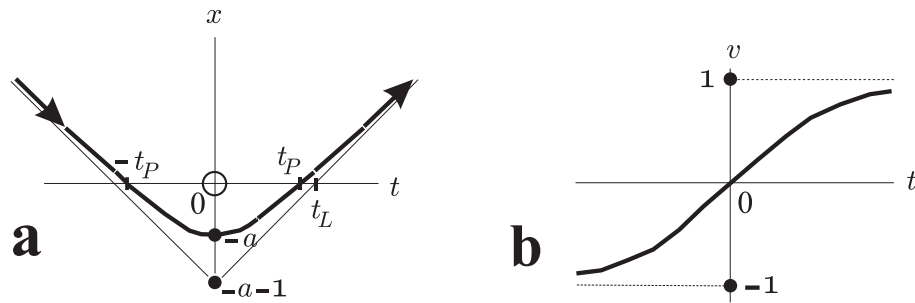
A ultrapassagem (e 'atropelamento') ocorre duas vezes em $x=0$, como a figura 2.a mostra; os dois momentos de ultrapassagem (e 'atropelamento') são $t=\mp t_P$, sendo

$$t_P := \sqrt{a^2 + 2a}. \quad (5)$$

Figuro 2.a montras ankaŭ, ke lumo atinganta observanton devas estiĝi je $t < t_L$, estante

A figura 2.a mostra ainda que para uma luz atingir o observador, ela deve ser emitida em $t < t_L$, sendo

$$t_L := a + 1; \quad (6)$$



Figuro 2: Funkcioj $x(t)$ kaj $v(t)$. **2.a** La radianta fonto (blanka sfereto) estas fiksa en $x=0$, kaj la observanto estas ĉe hiperbola movado (4); li venis el $x=\infty$, pasas preter la fonto kiam $t=-t_P$, atingas $x=-a<0$ kiam $t=0$, denove pasas preter la fonto kiam $t=t_P$, kaj fine revenos al $x=\infty$. **2.b** La observanta rapido (3), kiu kontinue varias de $-c$ (kiam $t=-\infty$) ĝis c (kiam $t=\infty$).

Figura 2: Funções $x(t)$ e $v(t)$. **2.a** A fonte radiante (esferinha branca) está fixa em $x=0$, e o observador está em movimento retilíneo (4); ele veio de $x=\infty$, passa ao lado da fonte quando $t=-t_P$, atinge $x=-a<0$ quando $t=0$, de novo passa ao lado da fonte quando $t=t_P$, e finalmente retorna a $x=\infty$. **2.b** A velocidade (3) do observador, que varia continuamente de $-c$ (quando $t=-\infty$) até c (quando $t=\infty$).

atentu ke $t_L^2 = t_P^2 + 1$, kaj ke nek t_P nek t_L dependas de b .

note que $t_L^2 = t_P^2 + 1$, e que nem t_P nem t_L dependem de b .

3 Dopplera efekto kun preterpaso

Supozu ke moviĝanta observanto ricevas du lumajn signalojn, je momentoj t kaj $t+dt$, ĉe pozicioj x kaj $x+dx$. Tiuj signaloj estis eligataj je la antaŭaj momentoj t_E kaj t_E+dt_E . Figuro 1 montras ke

3 Efeito Doppler com ultrapassagem

Suponha que o observador em movimento receba dois sinais luminosos, nos momentos t e $t+dt$, nas posições x e $x+dx$. Esses sinais terão sido emitidos nos momentos anteriores t_E e t_E+dt_E . A figura 1 mostra que

$$t_E = t - \sqrt{x^2 + b^2}. \quad (7)$$

Ĉe la horloĝo de moviĝanta observanto, la *propr*tempo inter la du ricevoj estas $d\tau = \sqrt{1-v^2}dt$, estante $v(t) = dx/dt$ la rapido de la observanto. La frekvenco ν_{obs} vidata per observanto rilatas, al la frekvenco ν de la lumo eligata, kiel $\nu_{obs}/\nu = dt_E/d\tau$. Simplaj kalkuloj donas

No relógio do observador em movimento, o intervalo de tempo *próprio* entre os dois recebimentos é $d\tau = \sqrt{1-v^2}dt$, sendo $v(t) = dx/dt$ a velocidade do observador. A frequência ν_{obs} vista pelo observador se relaciona à frequência ν da luz emitida como $\nu_{obs}/\nu = dt_E/d\tau$. Cálculos simples dão

$$\nu_{obs}/\nu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(1 - \frac{xv}{\sqrt{x^2 + b^2}} \right), \quad (8)$$

kiu uzante (3) kaj (4) skribiĝas

que usando (3) e (4) se escrevem

$$\nu_{obs}/\nu = \sqrt{1+t^2} - \frac{tx}{\sqrt{x^2+b^2}} . \quad (9)$$

Atentu ke tiuj t kaj x estas la momento kaj pozicio de *ricevo* de radiado. Por havi ν_{obs}/ν kiel funkcio de nur t , uzu (4); kaj por havi ν_{obs}/ν kiel funkcio de nur x , uzu la inverso de (4),

Note que esses t e x são o momento e posição do *recebimento* da radiação. Para se ter ν_{obs}/ν como função de somente t , use-se (4); e para se ter ν_{obs}/ν como função de somente x , use-se a inversa da (4),

$$t = \epsilon \sqrt{(a+1+x)^2 - 1} , \quad \epsilon := t/|t| . \quad (10)$$

Figuro 3 montras tiujn du funkciojn. Memoru ke se $\nu_{obs}/\nu > 1$, okazas viol-delokigon; se $\nu_{obs}/\nu < 1$, okazas ruĝ-delokigon; kaj se $\nu_{obs}/\nu = 1$, la Dopplera efekto estas nula.

Tri rimarkoj ŝajnas gravaj pri tiuj grafikoj. Unue, ĉe figuro 3.a vidu asimptoton $\nu_{obs}/\nu = -2t$ kiam $t \rightarrow -\infty$, kaj hiperbolon $\nu_{obs}/\nu = (1+b^2)/(2t)$ kiam $t \rightarrow \infty$. Kaj ĉe figuro 3.b la asimptoto estas $2(x+a+1)$ kiam $t \rightarrow -\infty$, kaj la hiperbolo estas $(1+b^2)/(2x)$ kiam $t \rightarrow \infty$.

Due, ni kalkulas la Doppleran efekton ĉe la momentoj de preterpaso (ortan Doppleran efekton). Uzante $\{t = \mp t_P, x = 0\}$ kaj (5) ĉe (9), la efekto estiĝas $1+a$, kiun ni nomas P :

A figura 3 mostra essas duas funções. Relembre que se $\nu_{obs}/\nu > 1$, então ocorre deslocamento para o violeta; se $\nu_{obs}/\nu < 1$, então ocorre deslocamento para o vermelho; e se $\nu_{obs}/\nu = 1$, então o efeito Doppler é nulo.

Três observações parecem importantes a respeito destes gráficos. Primeira, veja na figura 3.a a assíntota $\nu_{obs}/\nu = -2t$ quando $t \rightarrow -\infty$, e a hipérbole $\nu_{obs}/\nu = (1+b^2)/(2t)$ quando $t \rightarrow \infty$. E na figura 3.b a assíntota é $2(x+a+1)$ quando $t \rightarrow -\infty$, e a hipérbole é $(1+b^2)/(2x)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Segunda, nós calculamos o efeito Doppler nos momentos da ultrapassagem, (efeito Doppler transversal). Usando $\{t = \mp t_P, x = 0\}$ em (9), o efeito se torna $1+a$, que nós denominamos P :

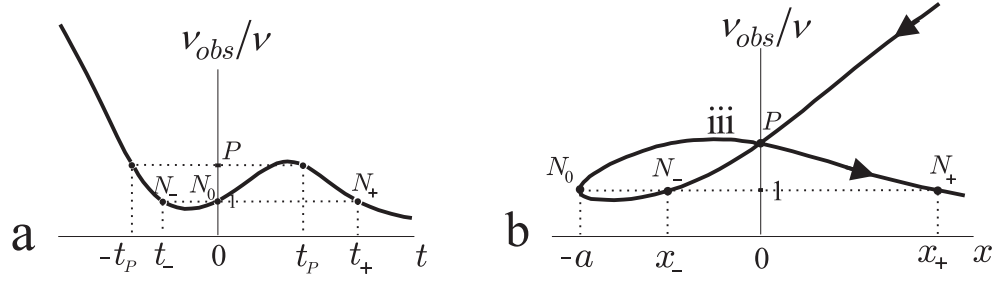
$$P := 1 + a . \quad (11)$$

Atentu ke ĝi ne dependas de b , kaj ke la orta Dopplera efekto pri preterpasanta observanto estas *viol*-delokigo. Estas interesa noti ke pri preterpasanta fonto kaj restanta observanto, la orta Dopplera efekto estas *ruĝ*-delokigo, kion ni vidos ĉe estonta artikolo.

Trie, ni kalkulas la momentojn kaj poziciojn de nula Dopplera efekto, farante $\nu_{obs}/\nu = 1$ ĉe (9), kun $b \neq 0$. Tiu okazas trifoje, kiel figuro 3 montras. Krom la bonkonata $N_0\{t=0, x=-a\}$ de momente haltata observanto ($v=0$), ankaŭ okazas N_- kaj N_+ , en kiuj la observanto estas

Note que ele não depende de b , e que o efeito Doppler transversal para observador em movimento é deslocamento para o *violeta*. É interessante notar que para fonte em movimento, passando por observador em repouso, o efeito Doppler transversal é desvio para o *vermelho*, o que nós veremos em artigo por vir.

Terceira, nós calculamos os momentos e posições de efeito Doppler nulo, fazendo $\nu_{obs}/\nu = 1$ na (9), com $b \neq 0$. Isso ocorre três vezes, como a figura 3 mostra. Além do bem conhecido $N_0\{t=0, x=-a\}$ de observador momentaneamente parado ($v=0$), ocorrem também N_- e N_+ , nos quais o observador está em movi-



Figuro 3: **3.a** ν_{obs}/ν kiel funkcio de fonta horloĝaro t . **3.b** ν_{obs}/ν kiel funkcio de observanta pozicio x . Sagoj montras la pozitivan tempan fluan. Se b estas sufiĉe granda ($b > ct_P$), la inklino de **iii** ĉe P estas pozitiva.

Figura 3: **3.a** ν_{obs}/ν como função do tempo t da coleção de relógios da fonte. **3.b** ν_{obs}/ν como função da posição x do observador. As setas mostram o fluxo positivo do tempo. Se b for suficientemente grande ($b > ct_P$), a inclinação de **iii** em P é positiva.

moviĝanta [7]. La du novaj pozicioj, momentoj, kaj rapidoj estas (memoru, $\epsilon = \mp 1$ estas la signumo de t)

mento [7]. As duas novas posições, momentos, e velocidades são (relembre, $\epsilon = \mp 1$ é o sinal de t)

$$x_\epsilon = \frac{b^2}{4} \left(1 + \epsilon \sqrt{1 + 8a/b^2} \right), \quad t_\epsilon = \epsilon \sqrt{(a + 1 + x_\epsilon)^2 - 1}, \quad v_\epsilon = \frac{t_\epsilon}{a + 1 + x_\epsilon}; \quad (12)$$

atentu ke $x_+ > |x_-|$, $t_+ > |t_-|$, kaj $v_+ > |v_-|$.

Nun ni resumas tiujn rezultojn. La observanto unue *vidas* malgrandiĝantan viol-delokigon ĝis $\{t_-, x_-\}$. Je t_- estas nula Dopplera efekto. De t_- ĝis $\{t = 0, x = -a\}$ li *vidas* grandiĝantan kaj poste malgrandiĝantan ruĝ-delokigon. Je $\{t = 0, x = -a\}$ li estas momente haltata kaj do *vidas* nulan Doppleran efekton. De $\{t = 0, x = -a\}$ ĝis $\{t_+, x_+\}$ li *vidas* viol-delokigon, kiu grandiĝas kaj poste malgrandiĝas. En $\{t_+, x_+\}$ li *vidas* nulan efekton. Poste li *vidas* ruĝ-delokigon kiu grandiĝas. Atentu ke ĉe la momentoj $\mp t_P$ de preterpaso ($b \neq 0$) ne okazas speciala ŝanĝo de Dopplera efekto.

note que $x_+ > |x_-|$, $t_+ > |t_-|$, e $v_+ > |v_-|$.

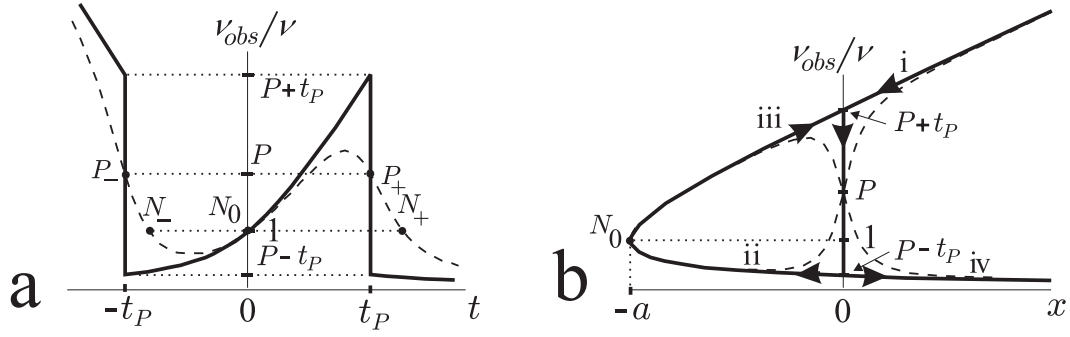
Vamos agora resumir esses resultados. O observador primeiramente *vê* um deslocamento para o violeta enfraquecendo, até $\{t_-, x_-\}$. Em t_- ocorre efeito Doppler nulo. De t_- até $\{t = 0, x = -a\}$ ele *vê* deslocamento para o vermelho inicialmente crescente e depois enfraquecendo. Em $\{t = 0, x = -a\}$ ele está momentaneamente parado e portanto *vê* efeito Doppler nulo. De $\{t = 0, x = -a\}$ até $\{t_+, x_+\}$ ele *vê* deslocamento para o violeta, que aumenta e depois diminui. Em $\{t_+, x_+\}$ ele *vê* efeito nulo. Depois ele *vê* deslocamento para o vermelho que cresce. Note que nos momentos $\mp t_P$ de ultrapassagem ($b \neq 0$) não ocorre mudança radical de efeito Doppler.

4 Dopplera efekto kun trapaso

Se $b = 0$ trapaso okazas ĉe $x = 0$, kaj pluraj variabloj malkontinuigas je la du momentoj $\mp t_P$ de trapaso. Fakte, la (9) kun $b = 0$ simpliĝas al

4 Efeito Doppler com atropelamento

Se $b = 0$, o 'atropelamento' ocorre em $x = 0$ e provoca descontinuidade em umas tantas variáveis nos dois momentos $\mp t_P$ de 'atropelamento'. Com efeito, a (9) com $b = 0$ se simplifica para



Figuro 4: **4.a** montras ν_{obs}/ν kiel funkcio de horloĝara tempo t . La plenlinio rilatas al trapaso ($b=0$, ekvacioj (14)). Por komparado, la streklinio rilatas al preterpaso (9), kun $b=a/2$. **4.b** montras ν_{obs}/ν kiel funkcio de observanta pozicio x . La plenlinio rilatas al trapaso ($b=0$, ekvacio (15)); atentu la tempan ordon **i**, **ii**, **iii**, **iv**. Por komparado, la streklinio rilatas al preterpaso (9), kun $b=a/10$.

Figura 4: **4.a** mostra ν_{obs}/ν como função do tempo t da coleção. A linha cheia se refere a atropelamento ($b=0$, equações (14)); para comparação, a linha tracejada se refere à ultrapassagem (9), com $b=a/2$. **4.b** mostra ν_{obs}/ν como função da posição x do observador. A linha cheia se refere a atropelamento ($b=0$, equação (15)); note a ordem temporal **i**, **ii**, **iii**, **iv**. Para comparação, a linha tracejada se refere à ultrapassagem (9), com $b=a/10$.

$$\nu_{obs}/\nu = \sqrt{1+t^2} - \epsilon_x t, \quad (13)$$

estante $\epsilon_x := x/|x|$ la signumo de x . Uzante ekvaciojn (4) kaj (5) ni konkludas ke la signumo de x estas sama al la signumo de $t^2 - t_P^2$, tial (13) estas skribebbla kiel funkcio de nur t ,

sendo $\epsilon_x := x/|x|$ o sinal de x . Usando as equações (4) e (5) nós concluímos que o sinal de x é igual ao sinal de $t^2 - t_P^2$, portanto (13) pode ser escrita como função de apenas t ,

$$\nu_{obs}/\nu = \begin{cases} \sqrt{1+t^2} - t, & |t| > t_P, \\ \sqrt{1+t^2} + t, & |t| < t_P. \end{cases} \quad (14)$$

Por skribi ν_{obs}/ν kiel funkcio de nur x kaj ϵ , ni uzas (10) en (13),

Para escrever ν_{obs}/ν como função de apenas x e ϵ , nós usamos (10) em (13),

$$\nu_{obs}/\nu = 1 + a + x - \epsilon \epsilon_x \sqrt{(a+1+x)^2 - 1}. \quad (15)$$

Figuro 4 montras la malkontinuecon de ν_{obs}/ν je la momentoj $-t_P$ kaj t_P . La valoro de tiu malkontinueco estas, de (14), $2t_P$.

A figura 4 mostra a descontinuidade de ν_{obs}/ν nos momentos $-t_P$ e t_P . O valor dessa descontinuidade é, de (14), $2t_P$.

5 Observanta propratem-po

La observanto povas preferi uzi sian propratempon τ , anstataŭ uzi la tempon t de

5 Tempo próprio do observador

O observador pode preferir usar o seu tempo próprio τ , em vez de usar o tempo t da coleção

la fonta horloĝaro. La taktoj de tiuj du tempoj rilatas kiel $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$; integralante uzante la rapidon v de (3) kaj la kondiĉon $\tau=0$ kiam $t=0$, tiu estiĝas	de relógios da fonte. Os andamentos desses dois tempos se relacionam como $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$; integrando $d\tau$ usando a velocidade v de (3) e a condição $\tau=0$ quando $t=0$ dá
--	---

$$t = \sinh \tau . \quad (16)$$

Uzante τ , la pozicio (4) kaj la rapido (3) de la observanto skribiĝas	Usando τ , la posição (4) e a velocidade (3) do observador se escrevem
---	---

$$x = -a + \cosh \tau - 1, \quad v = \tanh \tau , \quad (17)$$

kaj la momentoj (5) de preter(tra)paso estiĝas $\mp \tau_P$, estante	e os momentos (5) de ultrapassagem (e 'atropelamento') serão $\mp \tau_P$, em que
---	--

$$\tau_P = \cosh^{-1}(1 + a) . \quad (18)$$

Ĉe preterpaso ($b \neq 0$) la Dopplera efekto (9) kiel funkcio de τ skribiĝas	Em uma ultrapassagem ($b \neq 0$) o efeito Doppler (9) como função de τ se escreve
--	---

$$\nu_{obs}/\nu = \cosh \tau - \frac{x \sinh \tau}{\sqrt{x^2 + b^2}} , \quad (19)$$

kie $x(\tau)$ estas ĉe (17). Atentu ke ĉe trapaso ($b=0$), la (19) multe simpliĝas:	onde $x(\tau)$ está em (17). Note que em um atropelamento ($b=0$), a (19) se simplifica bastante:
---	---

$$\nu_{obs}/\nu = \begin{cases} e^{-\tau}, & |\tau| > \tau_P , \\ e^{\tau}, & |\tau| < \tau_P . \end{cases} \quad (20)$$

Figuro 5.b montras kontinuan funkcion (19) kaj nekontinuan funkcion (20).	A figura 5.b mostra a função contínua (19) e a função descontínua (20).
---	---

6 Komentoj

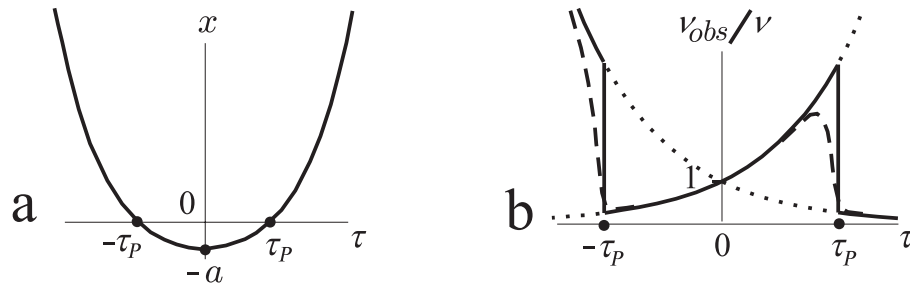
La grafiko 3.a montras onduman formon; tio okazas, ĉar la ekvacio (8) de Dopplera efekto havas du faktorojn. La unua faktoro dependas kvadratale de la rapido v , kaj kaŭzas ĉiam viol-delokigon. La dua faktoro dependas lineare de la rapido, kaj dependas ankaŭ de la pozicio x ; ĉi tiu faktoro povas kaŭzi ruĝ- aŭ viol-delokigon. Estas la batalo inter tiuj du faktoroj kiu determinas la onduman formon de la Dopplera efekto.

Nova artikolo estas skribonta, *Relativeca Dopplera efekto ĉe unuforme akce-*

6 Comentários

O gráfico 3.a tem forma oscilante; isso ocorre porque a equação (8) de efeito Doppler tem dois fatores multiplicativos. O primeiro fator depende quadraticamente da velocidade v , e causa sempre deslocamento para o violeta. O segundo fator depende linearmente da velocidade, e depende também da posição x ; este fator pode causar deslocamento tanto para o vermelho como para o violeta. É a batalha entre esses dois fatores que determina a forma do efeito Doppler.

Um novo artigo está por ser escrito, *Efeito Doppler relativista em movimento uniforme-*



Figuro 5: **5.a** Katenario montranta pozicion x kiel funkcio (17) de observanta propratempo τ . **5.b** montras ν_{obs}/ν kiel funkcio de observanta propratempo τ . La plenlinio rilatas al trapaso ($b=0$), kaj la streklinio rilatas al preterpaso (19) kun $b=a/10$. Punktlinioj montras eksponencialojn $e^{-\tau}$ kaj e^{τ} .

Figura 5: **5.a** Catenária mostrando a posição x como função (17) do tempo próprio τ do observador. **5.b** mostra ν_{obs}/ν como função do tempo próprio τ do observador. A linha cheia se refere a atropelamentos ($b=0$), e a linha tracejada se refere à ultrapassagem (19) com $b=a/10$. As linhas pontuadas mostram as exponenciais $e^{-\tau}$ e e^{τ} .

lata movo – II. Tie ni studos okazojn kies la observanto restas, kaj la eliganta fonto moviĝas pasante preter aŭ tra la observanto.

Fine, ŝajnas interesa vidu kiel interrilatiĝas, la pluraj tempoj uzataj en ĉi tiu artikolo. Figuro 6 montras $t_E(t)$ kaj $t_E(\tau)$, por kaj preterpaso kaj trapaso. Vidu ĉe 6.b ke la inklinacioj $dt_E/d\tau$ estas la Dopplera faktoro ν_{obs}/ν , kiel ĉe figuro 5.b.

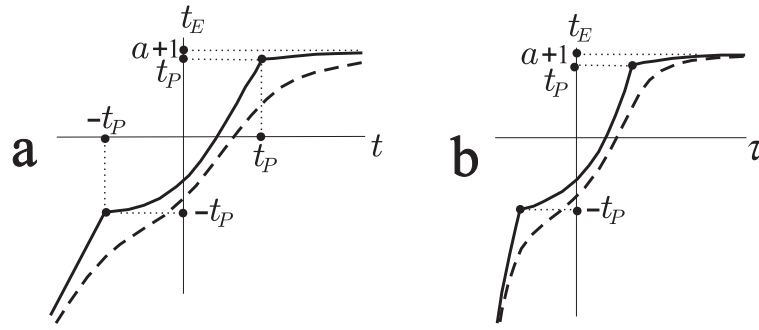
mente acelerado – II. Ali nós vamos estudar casos em que o observador está parado, e a fonte emissora se move passando por perto ou 'através' do observador.

Finalmente, parece interessante ver como se relacionam os vários tempos usados neste artigo. A figura 6 mostra $t_E(t)$ e $t_E(\tau)$, tanto para ultrapassagem como para 'atropelamento'. Veja na 6.b que a inclinação $dt_E/d\tau$ é o fator Doppler ν_{obs}/ν , como na figura 5.b.

Citaĵoj

Referências

- [1] C Møller, *The theory of relativity*, 2nd ed., Oxford U P, 1972;
- [2] W Rindler, *Essential relativity*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1977;
- [3] J Dwayne Hamilton, *The uniformly accelerated reference frame*, Am J Phys **46** 83-9 (1978);
- [4] L D Landau, E M Lifshitz, *The classical theory of fields*, 4th rev. English ed., Butterworth-Heinemann, 1996;
- [5] W Cochran, *Some results on the relativistic Doppler effect for accelerated motion*, Am J Phys **57** 1039-41 (1989);
- [6] B Rothenstein, S Popescu, *Period measurements by accelerating observers*, <http://arxiv.org/abs/physics/0607030>, 13 paĝoj;
Time interval measurements by uniformly accelerating observers (non-longitudinal case), physics/0607288, 14 paĝoj;



Figuro 6: **6.a** Funkcio $t_E(t)$, ekvacio (7). La plenlinio rilatas al trapaso ($b=0$), kaj la streklinio rilatas al preterpaso kun $b = a$. Vidu asimptoton $t_E = a + 1$ kiam $t \rightarrow \infty$. **6.b** Funkcio $t_E(\tau)$, ekvacioj (16) kaj (7). La plenlinio rilatas al trapaso ($b=0$), kaj la streklinio rilatas al preterpaso kun $b=a$. Vidu asimptoton $t_E = a + 1$ kiam $\tau \rightarrow \infty$.

Figura 6: **6.a** Função $t_E(t)$, equação (7). A linha cheia se refere a atropelamento ($b=0$), e a linha tracejada se refere a ultrapassagem com $b = a$. Veja a assíntota $t_E = 2t + (a + 1)$ quando $t \rightarrow -\infty$, e a assíntota $t_E = a + 1$ quando $t \rightarrow \infty$. **6.b** Função $t_E(\tau)$, equações (16) e (7). A linha cheia se refere a atropelamento ($b=0$), e a linha tracejada se refere a ultrapassagem com $b = a$. Veja a única assíntota $t_E = a + 1$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

The system of uniformly accelerating observers, physics/0610049, 17 paĝoj;

+ R P Gruber, *Landing the uniformly accelerating observers*, physics/0610226, 8 paĝoj;

- [7] F M Paiva, A F F Teixeira (2006), *La relativeca tempo - I*, <http://arxiv.org/abs/physics/0603053>, 12 paĝoj.