ISSN 0029-3865

CBPF-NF-001/88

SUR LES ÉQUATIONS DE DISTRIBUTIONS (II)

par

F.M. de Oliveira Castro

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Resumé

On fait l'extension d'un théorème de Riesz à l'espace R^n et on géneralise l'equation classique d'Euler au sens des distributions. On fait une application à l'equation de Klein et Gordon.

Mots-clefs: Théorème de Riesz; Distributions; Equation d'Euler généralisée.

SUR LES ÉQUATIONS DE DISTRIBUTION (II)

Cet article est la continuation d'un autre [1]. Il s'agit de faire l'extension à l'espace R^n de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des resultats obtenus dans l'article précédent pour l'espace R^1.

Pour cela, il faut d'abord faire l'extension à l'espace R^n du théorème de Riesz [2] qui a eté démontré seulement pour l'espace R^1. Nous ferons ici une fois pour toutes les conventions suivantes (avec L. Schwartz [3]):

1) chaque point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'espace R^n on designera simplement par x.
2) $x \geq 0$ signifiera $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$.
   $x \geq y$ signifiera $x-y \geq 0$.
3) $|x|$ designera la norme euclidienne $\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2+..+x_n{}^2}$.
4) D^p sera le symbole de dérivation partielle

$$D^p = \frac{\partial p_1+p_2+\ldots+p_n}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}$$

   oü p est un système d'entiers $p_i \geq 0$: $\{p_1, p_2, \ldots p_n\}$.Nous appellerons $|p|$ la somme $p_1+p_2+\ldots+p_n$ (rang de p).
5) L'élement de volume $dx_1, dx_2 \ldots dx_k$, sera simplement $d^k x$.

L'extension du théorème de Riesz, qui a joué un rôle fondamental dans les démonstrations de l'article précédent, peut être obtenue immediatement utilisant le théorème suivant, d'ont la demonstration se trouve dans le traité bien connu de Hobson [4],

"Théorème. Si $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ est un ensemble fini de fonctions mesurables sur un domaine G mesurable,d'une ou de plusieurs di - mensions et si F $(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$ est une fonction continue de $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, pour tous les valeurs de $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, la fonction $F(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ est mesurable sur G".

Théorème de Riesz.

Demonstration. Si $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ est un ensemble fini de fonctions sommables sur G, comme toutes ces fonctions sont necéssairement mesurables sur G, le théorème de Hobson nous dit que la fonction $F(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ est mesurable sur G.

Si de plus il existe une fonction $h(x) \geq 0$, sommable sur G telle que

$$|K(x)| = |F[\phi_1(x),\phi_2(x),\ldots,\phi_n(x)]| \leq h(x) \quad , \quad x \in G$$

la fonction F est sommable sur G, ce qui démontre le théorème.

Considerons maintenant la fonction

$$\mathcal{L}(\phi(x),D^p\phi(x)) \qquad x \in R^n \qquad |p| \leq m$$

et supposons

1) que $\phi(x)$ et $D^p\phi(x)$ soient des fonctions continues et dérivables pour $|p| \leq m$, sur un domaine Ω borné de l'R^n.
2) que $\mathcal{L}$ soit une fonction continue de tous les valeurs de $\phi(x)$ et $D^p\phi(x)$, pour $|p| \leq m$.

3) Que $D^m\phi(x)$ soit sommable sur Ω.

4) Qu'il existe une fonction $h(x) \geq 0$ sommable sur Ω telle que

$$|K(x)| = |\mathcal{L}(\phi(x), D^p\phi(x))| \leq h(x) \qquad (x \in \Omega,\ |p| \leq m)$$

Dans ces conditions, le théorème de Riesz, assure l'existence de la fonctionnelle

$$I(\phi) = \int_\Omega \mathcal{L}\, d^n x \qquad (x \in R^n)$$

En imposant à la fonction $\mathcal{L}$ la condition supplementaire d'existence et de sommabilité de ses derivées partielles par rapport à tous ses arguments, cherchons une condition necéssaire pour l'existence d'une extremale $\phi(x)$ continue sur Ω.

Si nous adotons comme variations admissibles $\delta(\phi) = \alpha\eta(x)$ oü $\alpha \in R^1$ est un paramêtre réel, defini dans un Voisinage v de $\alpha = 0$ et adotons pour les $\eta(x)$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact contenu dans Ω, le même procedé suivi dans l'article [1], nous donne la condition cherchée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D\phi)} D\eta + \ldots + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D^p\phi)} D^p\eta + \ldots + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D^m\phi)} D^m\eta\right] d^n x = 0 \qquad (|p| \leq m)$$

qui n'est autre que la distribution de Schwartz

$$\left\langle\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \ldots + (-1)^p \hat{D}^p \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D^p\phi)} + \ldots + (-1)^m \hat{D}^m \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(D^m\phi)}, \eta\right\rangle = 0$$

où $\hat{D}$ est la derivée de distribution de Schwartz.

D'une maniere plus concise, on peut écrire

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \ldots + (-1)^p \hat{D}^p \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D^p \phi)} + \ldots + (-1)^m \hat{D}^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D^m \phi)} = 0$$

$$(p = 1,2,\ldots, m-1) \quad .$$

Il faut remarquer que, dans la déduction de cette équation le lemma fondamental de P. Du Bois Reymond n'intervient pas et que la continuité des derivées partielles $D^m\phi$ du rang le plus élevé n'est pas non plus necéssaire.

Montrons maintenant comme on peut employer cette équation pour obtenir une équation géneralisée de distribution.

Exemple. Soit $\mathcal{L}$ la densité Lagrangiénne

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}\right)^2 + m^2\phi^2 \right] \qquad \begin{matrix} (x \in R^4) \\ (\mu = 0,1,2,3) \end{matrix}$$

l'équation d'Euler géneralisée est la distribution

$$< - m^2\phi + \frac{\hat{\partial}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \, , \eta> = 0$$

cest à dire

$$< (\hat{\Box} - m^2)\phi, \eta> = 0$$

où

$$\hat{\Box} = \frac{\hat{\partial}}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = - \frac{\hat{\partial}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hat{\partial}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad i = (1,2,3)$$

on reconnait dans cette équation l'equation de Klein et Gordon d'un champ réel de spin zéro, au sens des distributions (avec les unités naturelles c = 1 et $\hbar$ = 1). Pour obtenir l'équation inhomogêne

$$(\hat{\Box} - m^2)\langle\phi,\eta\rangle = \langle\delta^4,\eta\rangle \tag{1}$$

où δ^4 est la distribution de Dirac il suffit de supposer que $\mathcal{L}$ dépend aussi de la fonction $y^4(x)\,\frac{\partial^4 f}{\partial x_0 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$, où $y^4(x)$ = = $y(x_0).y(x_1).y(x_2).y(x_3)$ est le produit de quatre fonctions d'Heaviside,avec $y(x_0) = y(t)$, et $f(x)$ est une fonction arbitraire ayant une dérivée partielle de quatrième ordre continue et differente de zéro. On a ainsi la nouvelle densité Lagrangiènne

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right)^2 + m^2\phi^2\right] - y^4(x)\,\frac{\partial^4 f}{\partial x_0 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$$

Si on fait varier la fonction f avec la même variation $\delta(f)$ = = $\alpha\eta(x)$ qui fut donné à la fonction ϕ, la nouvelle équation d'Euler est justement l'équation (1). La solution de l'équation usuelle

$$(\Box - m^2)\phi = \delta^4$$

est classique.

Reprenons, toutefois, ce probléme avec les methodes des distributions. Il faut trouver une distribution $\langle\phi,\eta\rangle$ que soit une solution de l'équation (1). Cela se fait aisément avec les transformées de Fourier des distributions que nous prenons ici, sous la forme de Schwartz

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\exp(-2\pi i\sigma.x)\,d^4x = g(\sigma)$$

$$\tilde{F}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma)\ \exp(+2\pi i\sigma.x) d^4\sigma = f(x)$$

Rappelons que $F\delta^4 = 1$, $\tilde{F}1 = \delta^4$ et les relations

$$<Ff,\eta> = <f,F\eta>$$

$$<\tilde{F}g,\eta> = <g,\tilde{F}\eta>$$

et transformons successivement le premier membre de l'équation (1), en posant $\tilde{F}g = \phi$ on a

$$(\hat{\Box} - m^2)<\phi,\eta> = (\hat{\Box} - m^2) <\tilde{F}g,\eta> = (\hat{\Box} - m^2)<g,\tilde{F}\eta> =$$

$$= <g,(\Box - m^2)\tilde{F}\eta> = <g,(4\pi^2(\sigma_0^2 - |\partial|^2) - m^2)\tilde{F}\eta> =$$

$$= (4\pi^2(\sigma_0^2 - |\sigma|^2) - m^2)g,\ \tilde{F}\eta> =$$

$$= <(p_0^2 - |\vec{p}|^2 - m^2)g,\ \tilde{F}\eta> \qquad \text{où} \quad 4\pi^2\sigma^2 = p^2$$

Le second membre peut s'écrire

$$<\delta^4,\eta> = <\tilde{F}1,\eta> = <1,\tilde{F}\eta> \tag{2}$$

l'égalité des deux membres est satisfaite si on a

$$g = \frac{1}{p_0^2 - \lambda^2} \qquad \text{où} \qquad \lambda = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$$

donc

$$\phi = \tilde{F}g = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma)\exp(+2\pi i x\sigma) d^4\sigma =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{p_0^2 - \lambda^2}\ d^4p$$

et, finalement

$$<\phi,\eta> \;=\; <\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ipx}}{p_0^2-\lambda^2}\,d^4p,\eta> \qquad (3)$$

est la solution cherchée.

Pour calculer l'integrale relative a p_0, avec la methode des residus il faut définir le chemin d'integration et son orientation dans le plan complexe.

Si on fait le choix indiqué dans la figure 1,on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ip_0t}}{p_0^2-\lambda^2}\,dp_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\sin(\lambda t) \qquad \text{où} \quad \lambda = \sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}$$

et on peut écrire

$$<\phi,\eta> \;=\; <\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{p}.\vec{x}}\,\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,d^3p,\ \eta> \qquad (4)$$

que est au sens des distributions la solution bien connue $D(\vec{x},t)$ [5,6], écrite avec les unités naturelles $c = \hbar = 1$. Cette solution satisfait aux conditions aux limites suivantes:

1) $<\phi(t,\vec{x}),\eta>_{t=0} = 0$ quelque soit $\vec{x}$.

2) $$< \left[\frac{\partial}{\partial t}\,\phi(t,\vec{x})\right]_{t=0},\eta > \;=\; <\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{+i\vec{p}.\vec{x}}\,d^3p,\eta> =$$

$$= <\delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3),\eta> \;=\; <\delta^3,\eta>$$

on voit que la seconde condition a un sens bien défini,au sens des distributions.

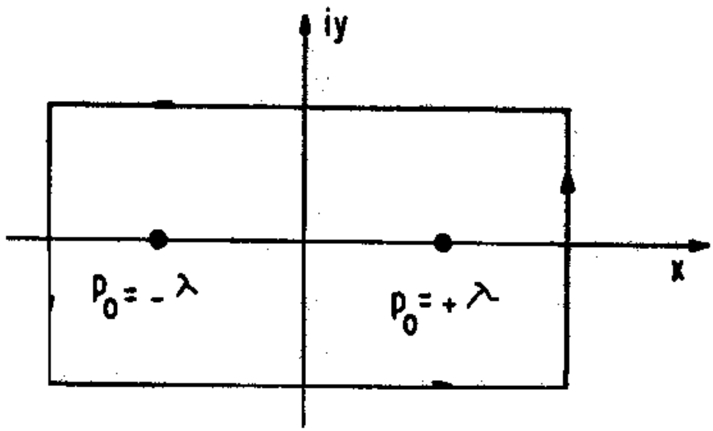
Cette condition obtenue par les méthodes usuelles

$$\left[\frac{\partial\phi(t,\vec{x})}{\partial t}\right]_{t=0} = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$$

ne peut avoir qu'un sens purement symbolique.

Remerciement

Nous tenons à exprimer ici nos vifs remerciements à Mlle. Helena de Souza Ferreira par son travail de dactylographie.



$p_0 = x + iy$

FIG.1

REFERENCES

[1] F.M. de Oliveira Castro, CBPF-NF-050/87.

[2] Fréderic Riesz et Béla Sz. Nagy, Leçons d'Analyse Fonctionelle, pg. 39, Gauthier-Villars, Paris (1955).

[3] L. Schwartz - Thèorie des Distributions, Hermann, Paris, (1950).

[4] E.W. Hobson - Theory of Functions of a Real Variable, Vol. 1, pg. 563, Dover Publications, New York, Third Ed.(1927).

[5] G. Wentzel - Einführung in der Quantentheorie der Wellenfelder, Franz Deuticke Wien (1943), pg. 23.

[6] Mario Shonberg - Revista de la Unión Matématica Argentina, Vol. XII, págs. 238-296, Buenos Aires, 1974.