TESE DE MESTRADO

FORMULAÇÃO SPINORIAL DO PROBLEMA DA RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

Por
NAZIRA MATANIOS ABACHE

Setembro 1971

Tese 10/71

FORMULAÇÃO SPINORIAL DO PROBLEMA DA RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

TESE DE MESTRADO

defendida por

NAZIRA MATANIOS ABACHE

no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Orientador: Prof. Colber Gonçalves de Oliveira

em [illegible] de novembro de 1971

perante a banca integrada pelos senhores professôres

Luiz Adauto da Justa Medeiros
Prof. Titular do C.B.P.F.

Colber Gonçalves de Oliveira
Prof. Titular do C.B.P.F.

Prem Prakash Srivastava
Prof. Titular do C.B.P.F.

Adel da Silveira
Prof. Contratado do C.B.P.F.

Antonio Luciano Leite Videira
Prof. Titular da P.U.C. - RJ - GB

ERRATA

Pág.	Linha	Onde se lê	Leia-se
3	22	$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$	$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$
9	2	$\lambda^{*}_{\mu\nu} = 0$	$\Box \lambda^{*}_{\mu\nu} = 0$
16	24	$\dot{\sigma}_{\mu}{}^{AB}(x)$	$\dot{\sigma}_{\mu}{}^{A\dot{B}}(x)$
18	11	$R_{AEBFCGDH} = \sigma^{\mu}{}_{AE}\sigma^{\nu}{}_{B\dot{F}}\,\sigma^{\lambda}{}_{C\dot{G}}\,\sigma^{\tau}{}_{D\dot{H}}R_{\mu\nu\lambda\tau}$	$R_{A\dot{E}B\dot{F}C\dot{G}D\dot{H}} = \sigma^{\mu}{}_{A\dot{E}}\sigma^{\nu}{}_{B\dot{F}}\sigma^{\lambda}{}_{C\dot{G}}\sigma^{\tau}{}_{D\dot{H}}R_{\mu\nu\lambda\tau}$
	14	$R_{A\dot{E}BFCGDH} = \frac{1}{2}(X_{ABCD}\,\varepsilon_{\dot{E}\dot{F}}\varepsilon_{\dot{G}\dot{H}} +$	$R_{A\dot{E}B\dot{F}C\dot{G}D\dot{H}} = \frac{1}{2}(X_{ABCD}\,\varepsilon_{\dot{E}\dot{F}}\,\varepsilon_{\dot{G}\dot{H}} +$
		$+\phi_{ABGH}\,\varepsilon_{CD}\varepsilon_{\dot{E}\dot{F}} + C.C.)$	$+\phi_{AB\dot{G}\dot{H}}\,\varepsilon_{CD}\,\varepsilon_{\dot{E}\dot{F}} + C.C.)$
20	11	$\partial^{A\dot{E}}\,\Psi_{ABCD} = 0$	$\nabla^{A\dot{E}}\,\Psi_{ABCD} = 0$
21	22	$\Omega_{\rho} = \frac{1}{4}\left[\partial_{\rho}\ \tau^{\delta}+\left\{{\delta \atop \tau\ \rho}\right\}\tau^{\tau}\right]\sigma_{\delta} =$	$\Omega_{\rho} = \frac{1}{4}\left[\partial_{\rho}\ \tau^{\delta}+\left\{{\delta \atop \tau\ \rho}\right\}\tau^{\tau}\right]\sigma_{\delta} =$
		$-\frac{1}{4}\tau_{\delta}\left[\partial_{\delta}\ \sigma^{\delta}+\left\{{\delta \atop \tau\ \rho}\right\}\sigma^{\tau}\right]$	$-\frac{1}{4}\tau_{\delta}\left[\partial_{\rho}\ \sigma^{\delta}+\left\{{\delta \atop \tau\ \rho}\right\}\sigma^{\tau}\right]$
28	1	$\sigma_{\mu}{}^{AB}(x)$	$\sigma_{\mu}{}^{A\dot{B}}(x)$
28	12	$\sigma_{\mu}{}^{AB}(x)$	$\sigma_{\mu}{}^{A\dot{B}}(x)$
30	1	$\tau^{o} = c\ e^{-2^{\beta}}(-\dot{\sigma}_{o} + \sigma_{1})$	$\tau^{o} = c\ e^{-2^{\beta}}(-\dot{\sigma}_{o} + \dot{\sigma}_{1})$
34	5	$\sigma_{\mu}(t\ x\ yz) = \sigma_{\mu}{}^{c} + \Gamma_{\mu}(\bar{r}^{1})$	$\sigma_{\mu}(t,x,y,z) = \dot{\sigma}_{\mu}{}^{c} + \Gamma_{\mu}(\bar{r}^{1})$
36	16	$\Gamma_{o} = \frac{a}{r}\dot{\sigma}_{o} + \frac{xz}{r^2}\dot{\sigma}_{1} - \frac{yz}{\rho r^2}b\ \dot{\sigma}_{2} - \frac{\rho}{2}b\ \dot{\sigma}_{3}$	$\Gamma_{o} = \frac{a}{r}\dot{\sigma}_{o} + \frac{xz}{r^2}b\ \dot{\sigma}_{1} - \frac{yz}{\rho r^2}b\ \dot{\sigma}_{2} - \frac{\rho}{r^2}b\ \dot{\sigma}_{3}$
38	10	$ABCD = -\frac{1}{8}(\dot{\sigma}^{\rho}\dot{\tau}^{\sigma})_{BA}(\dot{\tau}^{\Omega}\dot{\sigma}^{\lambda})_{CD}\delta^{\mu\beta}_{\rho\sigma}\ \delta^{\mu\alpha}_{\lambda\Omega}$	$\Psi_{ABCD} = -\frac{1}{8}(\dot{\sigma}^{\rho}\dot{\tau}^{\sigma})_{AB}(\dot{\tau}^{\Omega}\dot{\sigma}^{\lambda})_{CD}\delta^{\nu\beta}_{\rho\sigma}\ \delta^{\mu\alpha}_{\lambda\Omega}$
		$tr(\Gamma_{\beta}\ \dot{\tau}_{\mu} + \dot{\tau}_{\beta}\ \Gamma_{\alpha}),\ \nu\alpha$	$tr(\Gamma_{\beta}\ \dot{\tau}_{\mu} + \dot{\tau}_{\beta}\ \Gamma_{\mu}),\nu\alpha$
38	15	$\nabla^{AE}\Psi_{ABCD} = \partial^{A\dot{E}}\Psi_{ABCD} = 0\ (\bar{n}^{1})$	$\nabla^{A\dot{E}}\Psi_{ABCD} = \partial^{A\dot{E}}\Psi_{ABCD} = 0\ (\bar{r}^{2})$

Í N D I C E

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Colber G. de Oliveira, pela sua orientação, pela sugestão do tema, pelo seu estímulo, bem como pela acolhida no Departamento de Física Teórica do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, e a quem devo muito de minha formação científica, meu agradecimento especial.

Agradeço ao Professor Antônio Fernandes da Fonseca Teixeira, bem como à colega Penha Maria Cardoso Dias por valiosas sugestões e discussões.

Ao Professor Carlos Marcio do Amaral e ao Professor Idel Wolk, por seus proveitosos ensinamentos.

Ao Conselho Nacional de Pesquisas, que financiou meus cursos universitário e de Pós-Graduação.

Ao Centro Latino Americano de Física pelo apoio que me deu durante meu curso universitário.

A meus pais, ao datilógrafo Carlos Lopes pela confecção da tese, a todos os amigos e âqueles que, direta ou indiretamente, contribuiram para êste trabalho.

RESUMO

Êste trabalho consiste, em sua essência, numa introdução à formulação spinorial da radiação gravitacional, no espaço vazio.

A finalidade do formalismo reside em encontrar um conjunto de objetos spinoriais que satisfaçam à condição de contôrno, de Trautmann, isto é, que descrevam um campo de radiação. Foi possível construí-los, a partir de um campo de tetradas, introduzido na multiplicidade Riemanniana.

Mostrou-se que as equações diferenciais originadas da equação de Sachs (equação do campo na forma spinorial) são as mesmas encontradas por Bondi, através do formalismo tensorial. Uma vez obtida a condição de radiação, de Trautmann, na forma spinorial, verificou-se que é obedecida pelos objetos construídos.

A título complementar, procurou-se uma condição de radiação sôbre o spinor curvatura, semelhante à condição sôbre o tensor de Riemann.

Uma síntese de como o problema de radiação se coloca em Relatividade Geral foi acrescentada, em forma de capítulo, assim como um resumo de alguns conceitos do cálculo spinorial, necessários ao desenvolvimento do trabalho.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Inicialmente, convém lembrar algumas das idéias que fazem parte da teoria relativista da gravitação, de Einstein, conhecida, hoje, como Teoria da Relatividade Geral.

Os postulados básicos da teoria de Einstein são o Princípio da Equivalência e o Princípio da Invariância. O primeiro pode ser enunciado da seguinte forma:

"fôrças gravitacionais e inercias não podem ser distinguidas por experiências locais". Assim, as propriedades do movimento num sistema de referência não inercial são as mesmas que num sistema inercial em presença do campo gravitacional.

O segundo princípio da Relatividade Geral diz que:

"as equações de movimento das partículas e dos campos devem ser expressas numa forma covariante sob transformações gerais de coordenadas". Com êsse princípio, Einstein quis dizer que as leis da física devem ter as mesmas formas em quaisquer sistemas de referência. Dito de outro modo, as leis da Física são covariantes por transformações gerais do M.M.G.

A partir dêsses dois princípios, Einstein propôs, na Teoria da Relatividade Geral, que a geometria do espaço-tempo, caracterizada por uma métrica Riemanniana, fôsse um elemento dinâmico. Assim, o tensor métrico, $g_{\mu\nu}(x^{\alpha})$, depende explìcitamente da distribuição de matéria, o que pode ser visto pelas equações do campo.

As equações de movimento de uma partícula no campo gravitacional são:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\,\frac{dx^\rho}{ds}\,\frac{dx^\sigma}{ds} = 0$$

com

$$\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \left\{ {\mu \atop \rho\ \ \sigma} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\lambda}\{\rho\sigma,\lambda\}$$

onde $\left\{ {\mu \atop \rho\ \ \sigma} \right\}$, símbolos de Christoffel, são os coeficientes da conexão afim n trica e, também, as componentes do campo gravitacional; $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ tem d plo papel. descreve a geometria do espaço-tempo e representa o "potencia gravitacional".

As componentes de $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ podem, por uma transformação não-linear, ser reduzidas simultâneamente, a zero, num ponto arbitrário ao longo de uma curva geodésica aberta, qualquer, no espaço-tempo[1]. Iss corresponde, fisicamente, ao fato do campo gravitacional se anular localme te num sistema de referência em queda livre.

Entretanto, as variações do campo, que determinam as ac lerações relativas de corpos próximos, não se anulam. Essas variações sã descritas pelo tensor curvatura, de Riemann,

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu,\mu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\,\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\,\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}$$

através da equação do desvio geodésico. O tensor de Riemann e não-linear $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ e é inevitável que as equações do campo gravitacional também sej não-lineares em $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$, para que as equações de campo satisfaçam ao P cípio da Invariância Geral[2] A interpretação física dêsse fato é que o campo vitacional atua como sua própria fonte. Por exemplo, considerando uma pa cula sujeita apenas a um campo gravitacional, nas equações do campo aparece o campo gravitacional total, resultante da interação da partícula com seu p prio campo e com outras fontes de campo gravitacional presentes. Devido não linearidade intrínseca das equações de Einstein, essas contribuições interligadas no campo total não havendo nenhum modo simples de eliminar auto-interações. Sòmente no caso limite, em que se pode negligenciar a influência da partícula sôbre as outras fontes, é possível desprezar a auto-interação e o movimento da partícula é, então, o de uma partícula livre no campo gravitacional.

As equações de Einstein são covariantes por transformações gerais de coordenadas e, como já visto anteriormente, o MMG. é o grupo de covariância geral dessa teoria. Os elementos dêsse grupo são caracterizados por uma ou mais funções contínuas no espaço-tempo. Tal grupo será chamado "grupo de gauge", por analogia com o grupo de gauge na Eletrodinâmica (*). As teorias que admitem o grupo de gauge como grupo de covariância são chamadas teorias gauge-invariantes.

Hilbert[3] demonstrou que as equações do movimento numa teoria gauge-invariante não são independentes umas das outras, mas devem satisfazer a certas identidades, em número, em geral, igual ao das funções arbitrárias que definem um elemento do grupo; essas identidades são chamadas identidades de Bianchi e, em Relatividade Geral, assumem a forma

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} \equiv 0$$

Como consequência das equações de campo, o tensor de Einstein, $G^{\mu\nu}$, é proporcional ao tensor de energia-momentum, $T^{\mu\nu}$, e as identidades de Bianchi são escritas

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} \equiv 0$$

que é a generalização das equações $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, da Relatividade Restrita.

Entretanto, essas equações conduzem a resultados diferentes. A lei de conservação, $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$, resulta da invariância da Teoria Eletromagné-

(*) A interpretação dessa propriedade não é completamente evidente, pois, em Eletrodinâmica, o grupo de gauge é independente do grupo de covariância no espaço-tempo plano. Em Relatividade Geral, o grupo de "gauge", conforme foi definido, é o próprio grupo de covariância no espaço-tempo curvo.

tica por uma translação uniforme no espaço-tempo plano (flat), isto é, pelo grupo de simetria relacionado à conservação da energia e do momentum. Na Relatividade Geral, o grupo de simetria é o grupo de gauge, o que leva à identidade

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta} = T^{\beta}_{\alpha,\beta} - T^{\beta}_{\delta} \left\{ {\delta \atop \alpha\ \beta} \right\} = 0 \quad ;$$

a integral dessa equação não representa uma lei de conservação, pois a presença da segunda parcela, que pode ser atribuída ao campo gravitacional, impede que se construam quantidades globalmente conservadas, a partir, sòmente, de T^{β}_{α}.

Um modo de resolver essa dificuldade é procurar um pseudo tensor t^{β}_{α}, que se supõe descrever a distribuição de energia e momentum do campo gravitacional; dessa maneira, a equação da continuidade, na Relatividade Geral, toma a forma

$$(T^{\beta}_{\alpha} + t^{\beta}_{\alpha})_{,\beta} = 0 \tag{1}$$

Encontra-se uma grande variedade de pseudo-tensores, $t_{\alpha}^{\ \beta}$, verificando (1), o que está relacionado ao fato de que as condições de coordenadas, que definem o pseudo-tensor, não são únicas, pois dependem de uma função arbitrária. Em resumo, na Relatividade Geral, como consequência de seu grupo de simetria, existe muitas equações de continuidade e, então, para poder falar em conservação, é preciso definir, em cada problema específico, quais quantidades devem ser usadas em (1), após a fixação de um sistema de coordenadas.

Pode-se concluir, de tudo o que foi dito acima, que as origens das sérias dificuldades, em relação à definição da energia na Relatividade Geral residem no Princípio de Equivalência, que leva à geometrização do campo gravitacional, assim como no fato de que o espaço-tempo dessa teoria é curvo e, em geral, não possui nenhuma simetria. Porém, os sistemas mais usual -

mente considerados em Física possuem certas propriedades especiais, de tal modo que o correspondente espaço-Riemanniano permite um grupo de transformações intrínsecas, por exemplo, para espaços estacionários, i. é, espaços que admitem campo vetorial de Killing tipo tempo, é possível formular uma lei de conservação covariante. Também, se o espaço-tempo fôr assintòticamente plano, pode-se tomar um grupo de transformações que coincida com o grupo das transformações de Lorentz no infinito espacial, sendo possível obter leis de conservação para a energia total, momentum e momentum angular de sistemas isolados.

2. RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

O caráter "fraco" da interação gravitacional torna bastante dificil a observação direta da radiação gravitacional. Porem Weber[15] vem trabalhando extensivamente na parte experimental concernente à isso. Êsse tipo de radiação interessa aos físicos, porque fornece contribuição à Teoria Quântica de Campos que possìvelmente, se ampliaria com a quantização do campo gravitacional. Com respeito a essa quantização, certos esclarecimentos sôbre a possível natureza da radiação gravitacional parecem ser essenciais.

A primeira questão a ser colocada é de conceituar "Radiação Gravitacional", sem referências experimentais. A resposta, explícita ou implìcitamente contida na maior parte da literatura a respeito, é a forte confiança na analogia com o campo eletromagnético, principalmente porque, nêsse contexto, o têrmo "radiação" é mais familiar. Òbviamente, existe importantes diferenças estruturais entre os dois campos e é essencial, portanto, discernir entre as propriedades inerentes ao campo eletromagnético e as que poderiam ser transpostas para a radiação gravitacional. Infortunadamente, a transferência de energia, que é um fenômeno de radiação eletromagnética de suma importância, é de difícil discussão no caso gravitacional.

As características estruturais do campo gravitacional que causam particular dificuldade são: 1) A não linearidade das equações do campo gravitacional; 2) O caráter não tensorial da fôrça gravitacional e 3) A possibilidade de escolha de muitos sistemas de coordenadas. Numa teoria de campos com covariância generalizada, como é o caso do campo gravitacional em Relatividade Geral, um resultado não pode ter significado físico, a menos que seja estabelecido numa forma covariante. Isso corresponde a impor, na Teoria Eletromagnética, que os resultados sejam estabelecidos numa forma Lorentz-invariante e gauge-invariante. Contudo, como consequência do Princípio da Equivalência, o campo gravitacional pode, localmente, ser transformado, o que significa que a fôrça gravitacional não se transforma homogêneamente sob transformações gerais de coordenadas. Em outros têrmos, a fôrça gravitacional não é um tensor (ou um spinor) e, então, não é possível construir expressões tensoriais para as densidades de energia e momentum do campo gravitacional, mas apenas pseudo tensores. Além disso, como as equações de campo não são lineares, é difícil obter informações exatas, de caráter geral, tais como leis de conservação, embora muitas soluções exatas, representando situações físicas particulares, sejam conhecidas. Assim, tenta-se obter informações gerais por métodos aproximados. Contudo, é usualmente difícil colocar o método ou os resultados numa forma covariante e é igualmente difícil prover a convergência das aproximações, de modo que, o significado físico e a confiança em tais resultados são discutíveis.

É possível contornar algumas dessas dificuldades, trabalhando com variações nas quantidades de campo (i. e., derivadas segundas dos potenciais gravitacionais), em vez de lidar com quantidades de campo. Essas variações podem ser descritas, de um modo covariante, em têrmos do tensor curvatura de Riemann, sem dificuldade. Porém, é difícil conciliar tal esquema com os formalismos Lagrangeano e Hamiltoneano, com base nos quais uma dada quantização poderia testar a teoria.

Um outro esquema, seria o de destruir, de início, a covariância geral, impondo condições sôbre as coordenadas. Por transformações entre sistemas de coordenadas, satisfazendo a essas condições, certas expressões, que não são covariantes sob transformações completamente gerais de coordenadas, podem transformar-se covariantemente, por exemplo, a fôrça gravitacional pode adquirir caráter tensorial. Tais condições sôbre as coordenadas têm um duplo papel, pois equivalem a tipos de condições de "gauge" na Teoria Eletromagnética, mas, ao mesmo tempo, são condições sôbre a maneira de "mapear" a geometria do espaço-tempo; é, assim, essencial, atribui-lhes um claro significado físico, o que na prática, é raramente fácil.

A mais séria dificuldade é que, atualmente, não existe critério geral para decidir se uma distribuição de fonte presumìvelmente radiante perde massa, energia, momentum, ou momentum angular. Conforme comentários anteriores, não existe leis exatas de conservação ou, pelo menos, nada que forneça tal critério de uma maneira adequada. Entretanto, se fôr possível seguir a evolução de um sistema material e do campo circundante, de uma condição estática inicial para uma condição estática final, através de uma sequência de movimentos, então, ao se encontrar uma solução exata e apropriada das equações de campo, uma comparação das métricas inicial e final estáticas deve permitir determinar quais mudanças seculares ocorreram. Contudo, tais soluções exatas ainda não são conhecidas; deve-se contentar com aproximações. Nas aproximações em série de potências ou nas aproximações assintóticas, é possível, sob certas condições, construir uma integral representando a massa total do sistema e mostrar que a massa, assim definida, decresce monotônicamente, à medida que o sistema irradia. Portanto, o processo sugerido é tentativa e não conclusivamente respondido.

Um tratamento da radiação gravitacional é feito, estabelecendo-se analogias com o campo eletromagnético. As equações

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|$$

e

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = 0 \tag{1}$$

são as soluções das equações do campo eletromagnético, devido a uma distribuição de carga radiante. As soluções para o campo gravitacional são obtidas, notando-se que o tensor de Riemann, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, na Relatividade Geral, tem um papel semelhante ao tensor $F_{\mu\nu}$, no Eletromagnetismo: Na zona de radiação, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ é gauge invariante, como também o é $F_{\mu\nu}$; por outro lado, $g_{\mu\nu}$ é o potencial dêsse campo, similar ao A_{μ} no Eletromagnetismo. Entretanto, essas analogias são meramente formais, pois $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ depende das segundas derivadas de $g_{\mu\nu}(x^{\alpha})$, enquanto $F_{\mu\nu}$ depende, sòmente, das primeiras derivadas de $A_{\mu}(x^{\alpha})$. Além disso, uma diferença essencial entre êsses dois campos é que as ondas eletromagnéticas, originadas nas cargas, não transportam cargas para fora da fonte, enquanto as ondas gravitacionais, originadas na massa, transportam massa para fora da fonte, já que transportam energia.

Na zona de radiação, como consequência das equações (1), ondas eletromagnéticas planas são caracterizadas pelas condições $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$ e $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = 0$, que são os invariantes do campo, chamado "campo nulo"(porque os invariantes são nulos). Associado a êsse campo nulo, existe um vetor, K_{μ}, de tipo-luz, que satisfaz $K^{\mu} F_{\mu\nu} = 0$ e $F_{\mu[\nu}K_{\lambda]} = 0$. Do mesmo modo, se $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ é do tipo N de Petrov (campo gravitacional nulo), existe um vetor, K_{μ}, de tipo luz, com a propriedade $K^{\mu} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ e $R_{\mu\nu[\rho\sigma k\lambda]} = 0$.

Outra maneira de se discutir a radiação gravitacional, assintòticamente, é a de formular as condições de contôrno sôbre o campo, de tal maneira que se possa definir energia irradiada. Essa contribuição ao problema da radiação gravitacional é devida a Trautman[4], que supôs o campo gravitacional, em questão, definindo um campo escalar sôbre a variedade, cujo gradiente, $u_{,\mu} = K_{\mu}^{(x)}$, é um vetor tipo nulo. Êsse campo vetorial, K_{μ}, é usado para construir uma congruência de raios sôbre a variedade, impondo que a tangente aos raios, num dado ponto, seja igual a K^{μ} nesse ponto. Supôs, ainda, existir uma transformação tal que, assintòticamente,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \lambda_{\mu\nu}(r^{-1}) \quad , \tag{2}$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\ (+1,-1,-1,-1)$ e tal que, definindo $\lambda = \eta^{\mu\nu} \lambda_{\mu\nu}$ e

$$\overset{*}{\lambda}_{\mu\nu} = \lambda_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \lambda$$

ocorre $\quad \overset{*}{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \qquad (3)$

e $\quad \overset{*}{\lambda}_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0 \qquad (4)$

A condição de contôrno por êle imposta foi

$$g_{\mu\nu,\rho} = \lambda_{\mu\nu,\rho} + 0(r^{-2}) = i_{\mu\nu} K_\rho + 0(r^{-2}) \qquad (5)$$

e, usando essa condição em (3), obtém-se:

$$(i_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} i) K^\nu = 0(r^{-2}) \ . \qquad (6)$$

Para mostrar a equivalência dos dois métodos, construindo o tensor de Riemann assintótico a partir de (2) e (5), chega-se às mesmas condições de radiação obtidas com $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ do tipo N de Petrov.

As primeiras tentativas para aplicar as condições de Trautman a exemplos físicos são devidas a Bondi[5] e a seu grupo, que consideraram um sistema material isolado, com simetrias axial no plano equatorial e de reflexão e desenvolveram a métrica em potências de $1/r$. Obtiveram os seguintes resultados:

1. $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ satisfaz às condições de Trautman, portanto corresponde a um campo de radiação;

2. o comportamento do campo gravitacional é determinado por uma única função de duas variáveis, chamada "news function", a que Bondi denotou $\frac{\partial\ \eta(u,\theta)}{\partial u}$. A razão de chamá-la "news function" vem do fato de ser diferente de zero, quando a onda gravitacional atravessa uma hipersuperfície nula; essa função descreve a radiação devido a uma fonte inicialmente estática;

3. o terceiro resultado é o principal e mostra que a massa do sistema é constante, quando não existe a "news function"; se existisse, a massa descresceria monotônicamente com o tempo.

CAPÍTULO 2

SPINORES

1. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO SPINORIAL

Existem duas maneiras de se empregar o formalismo spinorial em Relatividade Geral.

O primeiro método é devido a Weyl[6] e, independentemente, a Infeld e Van der Waerden[7] e foi recentemente revisto por Bade e Jehle[8] e por P. G. Bergmann[9]. Consiste em considerar como grandezas básicas para descrever o campo um conjunto de quatro matrizes hermiteanas, a partir das quais a metrica pode ser univocamente construida. Da lei de transformação da derivada covariante de um spinor sob o grupo de transformações unimodulares de spin constrói-se a conexão afim do espaço do spin e, a partir da expressão da 2^a coderivada, as componentes da curvatura spinorial. Esta última quantidade tem as propriedades de um tensor do 2^a ordem antissimétrico e as de um spinor de 2^a ordem simétrico.

A segunda dessas teorias de campo consiste em considerar as variáveis básicas, que caracterizam o sistema, como sendo definidas por sua lei de transformação sob o grupo de transformações unimodulares de spin[10], i.e., as variáveis não exibem nenhum índice tensorial. Neste formalismo, as matrizes hermiteanas da teoria anterior são, apenas, variáveis intermediárias que permitem relacionar esta última teoria com o cálculo tensorial convencional.

Já foi mostrado[11] que essas duas teorias são conectadas por meio de equações simples.

A seguir, vai-se resumir alguns tópicos relacionados com o cálculo spinorial, de utilidade no próximo capítulo, onde as 4 matrizes hermi teanas, independentes, que descrevem o campo no método de Infeld e Van der Waerden, são consideradas como variáveis básicas. Vai-se supor que a métrica Riemanniana tenha localmente, assinatura - 2, que índices gregos variam de 0 a 3 e índices latinos maiúsculo, de 1 a 2.

2. DEFINIÇÃO DE SPINOR BIDIMENSIONAL E TRANSFORMAÇÃO DE SPIN

Define-se spinor covariante bidimensional, $\psi_A(x)$, como a grandeza que se transforma, sob o grupo das transformações unimodulares (sL_2 : S, "special", unimodular, L, linear; 2, espaço de duas dimensões), segundo a lei

$$\psi'_A(x) = \psi_B \, S^{-1\,B}{}_A \tag{7}$$

onde $S^{-1\,B}{}_A$ é um elemento da matriz de transformação, S; o espaço da representação, P_2, é chamado espaço de spin e uma transformação aí definida, transformação de spin.

Defini-se spinor contravariante bidimensional, $\psi^A(x)$, como uma grandeza tal que

$$\psi^A(x) \quad \psi_A(x)$$

seja invariante sob o sL_2. É fácil ver que

$$\psi'^A(x) = S^A{}_B \, \psi^B(x) \quad , \tag{8}$$

com a condição $\quad S^{-1\,B}{}_A \, S^A{}_C = \delta_C{}^B$

onde o spinor misto $\delta_C{}^B(x)$ é definido, em um referencial específico, como sendo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; entretanto, demonstra-se que $\delta^A{}_B(x)$ é invariante sob o sL_2, visto que tem a forma matricial escolhida em qualquer referencial.

A restrição às transformações unimodulares é fundada no isomorfismo entre o grupo de Lorentz no espaço-plano da Relatividade Restrita e o s L_2, o que permite uma correspondência entre spinores e 4 - vetores de Lorentz: se a condição unimodular (det s = 1) é satisfeita, a matriz S depende de 6 parâmetros reais, que são os mesmos da transformação de Lorentz. Em Relatividade Geral, êsse resultado é valido localmente e equivale a assimilar em cada ponto, a transformação de spin à rotação dos eixos da tetrada (ver seção 8).

Além das unimodulares outras transformações de spin podem ocorrer, por exemplo, a transformação $s^A{}_B = \delta^A{}_B\, e^{\frac{1}{2}\varphi(x)}$, que gera a transformação de gauge de 2ª espécie. Neste trabalho, êsses casos não serão considerados.

Spinores bidimensionais de 2ª ordem contravariantes $\Psi^{AB}_{(x)}$, ou covariantes $\Psi_{AB}(x)$, são definidos como os entes que obedecem, respectivamente, às seguintes leis da transformação:

$$\Psi'^{AB}_{(x)} = s^A{}_C\, s^B{}_D\, \Psi^{CD}_{(x)} \tag{9}$$

$$\Psi'_{AB}(x) = \Psi_{CD}\, S^{-1}{}^C{}_A\, S^{-1}{}^D{}_B \tag{10}$$

Generalizando, spinores de ordem superior se transformam de acôrdo com

$$\Psi'(x)^{AB\ldots}_{C\ldots} = s^A{}_D\, s^B{}_E \ldots S^{-1}{}^F{}_C \ldots \Psi^{DE\ldots}_{F\ldots}(x) \tag{11}$$

3. O SPINOR MÉTRICO FUNDAMENTAL

Sob transformações de Lorentz,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = L^\mu{}_\nu\, x^\nu \quad ,$$

as componentes de tensor métrico, $\eta_{\mu\nu}$, do 4-espaço da Relatividade Restrita, se transformam segundo

χ^A fica relacionada ao objeto χ_B por meio de

$$\chi^A = \gamma^{AB}\, \chi_B \tag{16}$$

Generalizando, um spinor de 2ª ordem, φ_{AB}, pode ser construído a partir do contravariante, φ^{AB}, por meio de

$$\varphi_{AB} = \varphi^{CD}\, \gamma_{CA}\, \gamma_{DB} \tag{17}$$

No caso em que $\varphi_{AB} = \gamma_{AB}$,

vem que

$$\gamma_{AB} = \gamma^{CD}\, \gamma_{CA}\, \gamma_{DB}$$

e, então,

$$\gamma^{CD}\, \gamma_{CA} = \delta^D{}_A \tag{18}$$

Pode se escolher $\gamma_{12} = 1$ e, evidentemente, γ_{AB} continua invariante. Essa escolha é arbitrária e só se justifica por sua simplicidade. Nesse caso, usa-se a notação

$$\gamma_{AB} \equiv \epsilon_{AB} \qquad \text{e} \qquad \gamma^{AB} \equiv \epsilon^{AB}$$

e a expressão matricial se torna

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^{AB}$$

É importante notar que os spinores ϵ^{AB}, ϵ_{AB}, $\delta^A{}_B$ foram usados como levantadores, alteradores e abaixadores de índices, devido à sua invariância por transformações unimodulares de spin. Há, ainda, que tomar cuidado com a antissimetria dos ϵ.

4. DEFINIÇÃO DOS SPINORES PONTUADOS

Define-se o spinor bidimensional covariante, $\psi_{\dot{A}}$, como a grandeza que se transforma de acôrdo com

$$\psi'_{\dot{A}} = \psi_{\dot{C}}\, S^{-1}\,{}^{\dot{C}}{}_{\dot{A}} \tag{19}$$

sendo

$$S^{-1}\,{}^{\dot{C}}{}_{\dot{A}} = \left(S^{-1}\,{}^{C}{}_{A}\right)^{*} \quad \text{e} \quad \psi_{\dot{A}} = (\psi_{A})^{*}$$

onde o asterisco indica complexo conjugado. Anàlogamente, define-se o spinor bidimensional contravariante, $\psi^{\dot{A}}$, como a grandeza tal que $X_{\dot{A}}\ \psi^{\dot{A}}$ seja um invariante, o que leva a

$$\psi'^{\dot{A}} = S^{\dot{A}}{}_{\dot{B}}\ \psi^{\dot{B}} \tag{20}$$

Exigindo que o processo de erguer ou abaixar índices pontuados seja semelhante ao de índices sem pontos, é necessário, então, definir os objetos que estabelecem essas operações. As definições dos objetos $\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}$ $\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}$, $\delta^{\dot{A}}{}_{\dot{B}}$ são análogas às dos objetos ϵ_{AB} , ϵ^{AB} , $\delta^{A}{}_{B}$. Verifica-se que os primeiros são invariantes sob transformações unimodulares e podem ser usados como levantadores, alteradores e abaixadores de índices, vindo

$$X_{\dot{A}} = X^{\dot{B}}\epsilon_{\dot{B}\dot{A}} \quad \text{e} \tag{21}$$

$$X^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\ X_{\dot{B}} \tag{22}$$

Verifica-se, por cálculo direto, que as relações (21) e (22) são compatíveis com (19) e (20).

Anàlogamente, para spinores "mistos", por exemplo, $A_{R\dot{S}}$ a operação de erguer os índices é dada por:

$$A_{R\dot{S}} = A^{E\dot{F}}\,\epsilon_{ER}\,\epsilon_{\dot{F}\dot{S}} \tag{23}$$

Por definição o objeto $A_{\dot{S}R}$ é complexo conjugado de $A_{S\dot{R}}$, i. e.

$$A_{\dot{S}R} = (A_{S\dot{R}})^{*}$$

5. RELAÇÃO ENTRE SPINORES E VETORES DE LORENTZ

Um spinor de 2^a ordem, $V_{R\dot{S}}$, pode ser representado por meio de uma matriz (2 x 2). Se essa matriz fôr hermiteana, seus elementos poderão ser as componentes de um 4-vetor real e é possível, então, relacionar o espaço de Minkowski com o espaço de spin, usando "quantidades mistas", $\sigma_\mu^{\ A\dot{B}}(x)$, por meio da relação linear

$$V^{A\dot{B}} = \dot{\sigma}_\mu^{\ A\dot{B}}\, V^\mu \tag{24}$$

onde $V^{A\dot{B}}$ é um spinor e V^μ , um 4-vetor de Lorentz. A matriz $(V^{A\dot{B}})$ é suposta hermiteana e como V^μ é real, segue-se que a representação matricial de $\dot{\sigma}_\mu^{\ A\dot{B}}$ é hermiteana.

É fácil ver que, para a relação (24) ter um significado independente de um sistema particular de coordenadas, $\dot{\sigma}_\mu^{\ A\dot{B}}$ deve-se transformar como um 4-vetor covariante, sob transformações de Lorentz e independentemente, como um spinor de 2^a ordem em relação as transformações unimodulares de spin. Com esta condição, uma transformação de Lorentz em (24) leva

$$V'^{A\dot{B}}(x') = \dot{\sigma}_\mu^{\ A\dot{B}}(x')\, V'^\mu(x') = \dot{\sigma}_\mu^{\ A\dot{B}}(x)\, V^\mu(x) = V^{A\dot{B}}(x) \quad , \tag{24-a}$$

significando que o objeto $V^{A\dot{B}}$ é um escalar do espaço de Minkowski.

Além do mais, como a invariância de (24) sob transformações de Lorentz e de spin, resulta de se considerar os objetos $\dot{\sigma}_\mu^{\ A\dot{B}}$ como 4-vetores covariantes e como spinores de 2^a ordem, concluiu-se que êstes objetos devem-se transformar, simultâneamente, sob os grupos de Lorentz e SL_2 de acôrdo com

$$\dot{\sigma}'^{\ E\dot{F}}_\mu(x') = (L^{-1})^\nu_{\ \mu}\ \dot{\sigma}_\nu^{\ A\dot{B}}(x)\ S^E_{\ A}\, S^{\dot{F}}_{\ \dot{B}} \tag{25}$$

Consegue-se especificação da matriz de transformação impondo a invariância de $\dot{\sigma}_\mu^{\ AB}(x)$ em (25), o que é usualmente feito na literatura es pecialização, a partir de argumentos sôbre a covariância da equação de Dirac. Uma possível escolha dos objetos invariantes, é

$$\dot{\sigma}_\mu(x') = \dot{\sigma}_\mu(x) = \dot{\sigma}_\mu$$

$$\dot{\sigma}_0 = I_{2x2}$$
$$\dot{\sigma}_K = \sigma_K \text{ de Pauli.}$$

A partir dos objetos $\dot{\sigma}_\mu^{A\dot{B}}$ é possível construir objetos $\dot{\sigma}^{\mu A\dot{B}}$ tendo por componentes

$$\dot{\sigma}^0 = \dot{\sigma}_0 = I_{2x2}$$
$$\sigma^{K} = -\dot{\sigma}_K$$

Especificadas as matrizes $\dot{\sigma}_\mu^{A\dot{B}}$, consegue-se determinar unìvocamente a métrica do espaço-plano, por meio de matrizes $\dot{\tau}_{\mu \dot{E} F}$, assim definidas:

$$\dot{\tau}_{\mu \dot{E} F} = (\varepsilon \, \dot{\sigma}_\mu^{*} \, \varepsilon)_{\dot{E} F} = (\dot{\tau}_0 = -\dot{\sigma}_0 \quad , \quad \dot{\tau}_K = \dot{\sigma}_K \text{ , de Pauli}) \tag{26}$$

$$(\dot{\sigma}_\mu^{*})^{E\dot{F}} = (\dot{\sigma}_0 = I_{2x2} \; , \; \dot{\sigma}_K^{*} = \text{c.c. de } \sigma_K \text{ de Pauli}) \; ;$$

a relação encontrada é

$$\dot{\sigma}_\mu^{A\dot{C}} \, \dot{\tau}_{\nu \dot{C} F} + \dot{\sigma}_\nu^{A\dot{C}} \, \dot{\tau}_{\mu \dot{C} F} = -2 \, \eta_{\mu\nu} \, \delta^A{}_F \tag{27}$$

A inversa da (24) é obtida, fac̀ilmente, pelo emprego da (27)

$$V_\nu(x) = -\frac{1}{2} V^{A\dot{C}}(x) \; \dot{\tau}_{\nu \dot{C} A} = \frac{1}{2} V^{A\dot{C}} \; \dot{\tau}_{\nu \dot{C} A} \tag{28}$$

com

$$\dot{\tau}_{\nu \dot{C} A} = -\dot{\tau}_{\nu \dot{C} A}$$

As definições (24) e suas inversas, (28) podem ser generalizadas para spinores de ordem superior, vindo

$$V^{A\dot{B} \, R\dot{S} \ldots} = \dot{\sigma}_\mu^{A\dot{B}} \; \dot{\sigma}_\nu^{R\dot{S}} \ldots \; V^{\mu\nu} \tag{29}$$

$$V_{\mu\nu\ldots} = \frac{1}{2}^{n} \; \dot{\tau}_{\nu \dot{C} F} \; \dot{\tau}_{\mu \dot{A} B \ldots} \; V^{B\dot{A} \; F\dot{C}}{}_{\ldots} \tag{30}$$

6. SPINORES NA RELATIVIDADE GERAL

Até agora, o estudo dos spinores foi tratado apenas no espaço-plano; entretanto, semelhante estudo pode ser feito no espaço curvo, generalizando as quatro matrizes hermiteanas, constantes, para um conjunto de quatro matrizes hermiteanas, $\sigma_\mu^{\;A\dot{B}}(x)$, definidas em cada ponto do espaço-tempo, i.e., passando-se a tratar com quatro campos representados por matrizes hermiteanas.

7. REPRESENTAÇÃO SPINORIAL DA CURVATURA

A partir de resultados obtidos por Witten[10] e usando o formalismo de Infeld e Van der Waerden, Penrose[12] deduziu a forma spinorial do tensor de curvatura, $R_{AEBFCGDH}$, achando que

$$R_{A\dot{E}B\dot{F}C\dot{G}D\dot{H}} = \sigma^{\mu}_{\;A\dot{E}} \; \sigma^{\nu}_{\;B\dot{F}} \; \sigma^{\lambda}_{\;C\dot{G}} \; \sigma^{\tau}_{\;D\dot{H}} \; R_{\mu\nu\lambda\tau}$$

A curvatura spinorial pode, ainda, ser escrita como combinação de dois spinores, χ_{ABCD} e $\varphi_{AB\dot{C}\dot{D}}$, segundo a relação[12]

$$R_{AEBFCGDH} = \frac{1}{2} (\chi_{ABCD} \; \varepsilon_{\dot{E}\dot{F}} \; \varepsilon_{\dot{G}\dot{H}} + \varphi_{ABGH} \; \varepsilon_{CD} \; \varepsilon_{\dot{E}\dot{F}} + \text{C. C.}) \,, \tag{31}$$

onde c. c. indica complexo conjugado.

Como consequência das simetrias de $R_{\mu\nu\lambda\tau}$ os spinores χ_{ABCD} e φ_{ABCD} possuem as simetrias:

$$\chi_{ABCD} = \chi_{BACD} = \chi_{ABDC} = \chi_{CDAB} \,, \tag{32}$$

e

$$\varphi_{AB\dot{C}\dot{D}} = \varphi_{BA\dot{C}\dot{D}} = \varphi_{AB\dot{D}\dot{C}} = \varphi_{\dot{C}\dot{D}\,AB} \,. \tag{33}$$

Analogamente ao formalismo tensorial, as expressões do tensor de Ricci e da curvatura escalar são calculadas por meio de contrações da curvatura spinorial, observando-se que a generalização da equação (27) é

$$\sigma^{\mu}{}_{(x)}{}^{MN} \quad \tau^{\nu}(x)_{\dot{N}V} + \sigma^{\nu}{}^{MN}_{(x)} \quad \tau^{\mu}{}_{\dot{N}V}(x) = - 2g^{\mu\nu}(x)\ \delta_V{}^M \tag{34}$$

Resulta que o tensor de Ricci tem a seguinte forma spinorial:

$$R_{B\dot{F}\,D\dot{H}} = \sigma^{\mu}{}_{B\dot{F}} \quad \sigma^{\nu}{}_{D\dot{H}} \quad R_{\mu\nu} \tag{35}$$

ou, equivalentemente,

$$R_{B\dot{F}\,D\dot{H}} = \frac{1}{4}\,\varepsilon^{AC} \quad \varepsilon^{\dot{F}\dot{G}} \quad R_{A\dot{E}B\dot{F}C\dot{G}\,D\dot{H}} \tag{36}$$

Então, a curvatura escalar é:

$$R = \frac{1}{2} \quad \varepsilon^{BD} \quad \varepsilon^{\dot{F}\dot{H}} \quad R_{B\dot{F}\,D\dot{H}} \tag{37}$$

Entretanto, Penrose[12] mostrou que as contrações do spinor X_{ABCD} são reais e assumem as formas

$$X_{AB}{}^{AB} = X_{\dot{A}\dot{B}}{}^{AB} = 2\,\lambda \tag{38}$$

e

$$X_{ABC}{}^{B} = \lambda\,\varepsilon_{A\,C} \tag{39}$$

Consequentemente, a partir de (31), (36),

$$R_{B\dot{F}D\dot{H}} = \frac{1}{2}\left[\lambda\,\varepsilon_{BD} \quad \varepsilon_{\dot{F}\dot{H}} - \varphi_{BD\dot{F}\dot{H}}\right] \tag{40}$$

e

$$R = \lambda \tag{41}$$

No espaço vazio, aparecem condições de simetria adicionais, o que simplifica a forma do spinor curvatura. Para mostrá-lo, observa-se que as equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu} \quad R \quad ,$$

têm a forma spinorial

$$G_{A\dot{C}B\dot{D}} = \frac{1}{2}\left[\lambda \quad \varepsilon_{AB} \quad \varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \varphi_{AB\,\dot{C}\dot{D}}\right]$$

e como, no caso, $G_{\mu\nu} = 0$ (espaço vazio) segue-se da independência de $\varphi_{AB\dot{C}\dot{D}}$ e λ que

$$\varphi_{AB\dot{C}\dot{D}} = 0 \tag{42}$$

e

$$\lambda = 0 \tag{43}$$

Portanto, de (31), a curvatura spinorial depende, apenas de X_{ABCD} ; de (30) e (43) resulta que, além das propriedades de simetria (32) e (33) X_{ABCD} é, também simétrico em BD ou seja, X_{ABCD} é totalmente simétrica. Vai-se designar o spinor de curvatura totalmente simétrico por Ψ_{ABCD} ($X_{ABCD} = \Psi_{ABCD}$) , para distingui-lo da situação geral em que existe matéria. Então, o campo gravitacional no espaço vazio é descrito completamente em têrmos de um spinor da quarta ordem totalmente simétrico, o que torna claro que se trata de uma teoria de campo de spin 2.

Das identidades de Bianchi, segue-se que o spinor Ψ_{ABCD} satisfaz à equação

$$\partial^{A\dot{E}} \Psi_{ABCD} = 0$$

Esta equação é formalmente semelhante às equações spinoriais de Maxwell no espaço, vazio, $\partial^{A\dot{E}} \varphi_{AB}=0$, onde, em lugar do spinor simétrico de 4ª ordem , se tem um spinor simétrico de 2ª ordem.

8. FORMA SPINORIAL DA EQUAÇÃO DE EINSTEIN

8.1 INTRODUÇÃO: OS OBJETOS FUNDAMENTAIS σ_μ e τ_μ

Logo após a utilização do spinor de duas componentes na Relatividade Restrita, muitas investigações foram iniciadas, tentando descrever as equações do campo gravitacional, usando como objetos fundamentais as variáveis spinoriais $\sigma_\mu^{A\dot{B}}(x)$ e $\tau_{\mu\dot{A}B}^{(x)}$ (indicadas por $\sigma_\mu(x)$ e $\tau_\mu(x)$), em lugar de $g_{\mu\nu}(x)$. Como resultado dessas investigações, chegou-se a conclusão de que a variedade Riemanniana poderia ser descrita em têrmos de quatro 4-vetores do campo, unitários normalizados e linearmente independentes, definidos em cada ponto do espaço-tempo; ao conjunto dêsses quatro 4-vetores num ponto P chama-se tetrada em P. No próximo capítulo, êsse campo será construido para um dado problema.

8.2 DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO CAMPO A PARTIR DO PRINCÍPIO DA AÇÃO MÍNIMA

É bem conhecido que as equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = K\, T_{\mu\nu}$$

são derivadas a partir do princípio da ação mínima, usando a técnica de Palatini, onde a densidade Lagrangeana é função das variáveis independentes $g^{\mu\nu}(x)$ e $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}(x)$ Esta técnica leva a dois conjuntos de equações: o primeiro, em $g^{\mu\nu}(x)$, não relaciona o tensor métrico com a conexão afim; o segundo, em $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}(x)$, leva à anulação da coderivada do tensor métrico, o que, por sua vez, implica numa relação matemática entre $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}(x)$ e $g^{\mu\nu}(x)$

A densidade Legrangeana do método, que dá origem às equações de Einstein, é

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\; R$$

e, agora, o problema é escrevê-la em têrmos das variáveis de campo, σ_{μ} e τ_{μ}, e da afinidade de spin, Ω_{μ}, a fim de aplicar a técnica de Palatini ao formalismo spinorial.

A expressão de R em função das variáveis spinoriais foi encontrada por Sachs[13] e aqui vai-se apresentar tão sòmente um esbôço do cálculo.

Define-se coderivada de um spinor U^{A} como

$$U^{A}{}_{;\rho} = U^{A}{}_{,\rho} + \Omega_{\rho}{}^{A}{}_{B}\, U^{B}$$

onde $\Omega_{\rho}{}^{A}{}_{B}$ é a conexão de spin. Impondo que a coderivada de $\sigma_{\mu}{}^{A\dot{B}}(x)$ seja zero, obtém-se a forma explícita da afinidade de spin como função dos símbolos de Christoffel[9]:

$$\Omega_{\rho} = \frac{1}{4}\left[\partial_{\rho}\, \tau^{\delta} + \left\{ {\delta \atop \tau\ \rho} \right\} \tau^{\tau}\right]\sigma_{\delta} = -\frac{1}{4}\, \tau_{\delta}\left[\left(\partial_{\delta}\, \sigma^{\delta} + \left\{ {\delta \atop \tau\ \rho} \right\} \sigma^{\tau}\right)\right]. \tag{45}$$

Da definição de curvatura de spin,

$$U^{A}{}_{;\alpha\beta} - U^{A}{}_{;\beta\alpha} = P^{A}_{\alpha\beta\ B}\, U^{B}$$

é fácil deduzir que

$$P^{A}_{\alpha\beta\ B} = \Omega^{A}_{\alpha,\beta\ \ B} - \Omega^{A}_{\beta,\alpha B} - \Omega_{\alpha}{}^{A}{}_{K}\, \Omega^{K}_{\beta\ B} + \Omega^{A}_{\beta\ K}\, \Omega_{\alpha}{}^{K}{}_{B} \tag{46}$$

Como existe uma relação entre a curvatura de Riemann e a curvatura de spin é possível obter o tensor de Ricci em têrmos das variáveis spinoriais. Tal expressão é

$$R_{\mu\beta} = \frac{1}{4}\, tr\left[P^{+}_{\lambda\mu}\, (\sigma^{\lambda}\ \tau_{\beta} - \sigma_{\beta}\ \tau^{\lambda}) + (\ \tau_{\beta}\ \sigma^{\lambda} - \tau^{\lambda}\ \sigma_{\beta})\ P_{\lambda\mu}\right] ; \tag{47}$$

portanto, a cruvatura escalar no espaço de Riemann é dada por

$$R = g^{\chi\rho}\, R_{\chi\rho} = \frac{1}{4}\ tr\left[P_{\rho\lambda}\ (\sigma^{\lambda}\ \ \tau_{\rho} - \sigma^{\rho}\ \tau^{\lambda}) + \mathbf{h.\ c.}\right] , \tag{48}$$

onde h. c. indica a conjugada hermiteana das matrizes do campo.

É claro que, com a espressão (48) da curvatura escalar, a densidade Lagrangeana é uma função das variáveis independentes

$$\sigma_{\mu},\ \sigma^{\mu},\ \ \tau_{\mu},\ \ \tau^{\mu}, \Omega_{\mu}, \Omega_{\mu;\rho}$$

Pelo procedimento usual dos métodos variacionais, as equações de Euler e Lagrange resultam nas equações de campo

$$\frac{1}{4}\ \left[P_{\rho\lambda}\ \sigma^{\lambda} + \sigma^{\lambda}\ P^{+}_{\rho\lambda}\right] + \frac{1}{8}\, R\ \sigma_{\rho} = 0\ , \tag{49}$$

e

$$-\frac{1}{4}\ \left[P^{+}_{\rho\lambda}\ \tau^{\lambda} + \tau^{\lambda}\ P_{\rho\lambda}\right] + \frac{1}{8}\, R\ \tau\ \ \rho = 0\ . \tag{50}$$

Observa-se que o segundo membro é nulo, pois não se supôs a existência de nenhum outro campo, além do gravitacional.

No problema em questão, interessa obter as equações do campo na região exterior, onde $T_{\mu\nu} = 0$; consequentemente, da equação de Einstein segue-se que

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{e} \qquad R = g^{\mu\nu}\ R_{\mu\nu} = 0\ .$$

Então, as equações do campo (49) e (50) se reescrevem, no espaço vazio,

$$P_{\rho\lambda}\ \sigma^{\lambda} + \sigma^{\lambda}\ P^{\dagger}_{\rho\lambda} = 0$$

e

$$P^{\dagger}_{\rho\lambda}\ \tau^{\lambda} + \tau^{\lambda}\ P_{\rho\lambda} = 0$$

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO SPINORIAL DO PROBLEMA DA RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

1. OBTENÇÃO DA MÉTRICA DE RADIAÇÃO A PARTIR DO CAMPO DE TETRADAS

Associa-se a cada ponto P do 4-espaço Riemanniano um conjunto de quatro 4-vetores K_μ, n_μ, m_μ, $\bar{m}_\mu$, tais que K_μ e n_μ sejam reais e nulos; m_μ e $\bar{m}_\mu$, complexos e nulos e $\bar{m}_\mu$ seja o complexo conjugado de m_μ. Define-se os vetores m_μ e $\bar{m}_\mu$ a partir de dois vetores tipo-espaço, reais, ortogonais e unitários ξ_μ e η_μ como

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_\mu - i\, \eta_\mu) \quad \text{e}$$

$$\bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_\mu + i\, \eta_\mu)$$

Ao conjunto dos quatro 4-vetores, num ponto P, chama-se tetrada em P. É conveniente introduzir a notação de tetrada

$$h_{\mu(\alpha)} = (K_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu) \quad , \quad \alpha,\mu = 0, 1, 2, 3 \; . \tag{51}$$

Os vetores da tetrada obedecem às condições da ortogonalidade:

$$K_\mu K^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0$$

$$K_\mu n^\mu = - m_\mu \bar{m}^\mu = 1$$

$$K_\mu m^\mu = k_\mu \bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0$$

O índice de tetrada, (α), pode ser abaixado e levantado por meio da métrica do espaço chato, $\tilde{\eta}_{(\alpha)(\beta)}$, obtida da métrica $\eta_{\mu\nu} =$ $=$ diag $(+1,-1,-1-1)$ por meio da transformação

$$x'^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1) \qquad\qquad x^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'^0 + x'^1)$$

$$x'^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1) \qquad \text{ou} \qquad x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'^0 - x'^1)$$

$$x'^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + i\,x^3) \qquad\qquad x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'^2 + x'^3) \tag{52}$$

$$x'^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - i\,x^3) \qquad\qquad x^3 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(x'^2 - x'^3)\ .$$

Da lei de transformação de $\eta_{\alpha\beta}$,

$$\eta'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\,\eta_{\alpha\beta}(x) \quad ,$$

resulta

$$\eta'_{\mu\nu}(x') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 0 & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \tilde{\eta}_{(\mu)(\nu)} \equiv \tilde{\eta}^{(\mu)(\nu)} \quad .$$

A métrica $g_{\mu\nu}$ é definida, por meio da tetrada, como

$$g_{\mu\nu}(x) = h_{\mu(\alpha)}(x)\; h_{\nu(\rho)}(x)\; \tilde{\eta}^{(\alpha)(\beta)} \tag{53}$$

e, usando a convenção (51), obtém-se:

$$g_{\mu\nu}(x) = K_\mu\, n_\nu + n_\mu\, K_\nu - m_\mu\, \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu\, m_\nu$$

Define-se $g^{\mu\nu}$, inversa de $g_{\mu\nu}$, por meio das equações

$$g^{\mu\nu}\; g_{\nu\alpha} = \delta^\mu{}_\alpha$$

É importante notar que o campo de tetradas, $h_{\mu(\alpha)}(x)$, não é uma solução única para $g_{\mu\nu}(x)$. Com efeito, com

$$h_{\mu(\alpha)}(x) = \hat{h}_{\mu(\gamma)}(x)\, M^{(\gamma)}{}_{(\alpha)} \quad ,$$

onde $\hat{h}_{\mu(\gamma)}$ é, também, um campo de tetradas.

Resulta, de (53),

$$g_{\mu\nu}(x) = \hat{h}_{\mu(\gamma)}^{(x)} \, M^{(\gamma)}_{(\alpha)} \, \hat{h}_{\nu(\varepsilon)} \, M^{(\varepsilon)}_{(\beta)} \, \tilde{\eta}^{(\alpha)(\beta)} = \hat{h}_{\mu(\gamma)} M^{(\gamma)}_{(\alpha)} \, \tilde{\eta}^{(\alpha)(\beta)} \left(M^T\right)_{(\beta)}^{(\varepsilon)} \hat{h}_{\nu(\varepsilon)}$$

Se M satisfizer à condição

$$M \, \tilde{\eta} \, M^T = \tilde{\eta} \, ,$$

então $$g_{\mu\nu}(x) = \hat{h}_{\mu(\gamma)} \, \hat{h}_{\nu(\varepsilon)} \, \tilde{\eta}^{(\gamma)(\varepsilon)}$$

e $\hat{h}_{\mu(\gamma)}$ será, também, uma solução associada à mesma métrica $g_{\mu\nu}(x)$

Em resumo, entendendo que o campo de tetradas determina uma base local da variedade Riemanniana, o que se fêz foi uma mudança do campo de tetradas, de um caracterizado por três direções tipo-espaço e uma tipo tempo, para um caracterizado por quatro direções nulas (em relação à antiga base). Note-se que uma hipersuperficie nula tem dimensão três, de modo que só existem 3 vetores nulos independente em cada ponto, e de fato, dos 4 vetores da tetrada nula, dois são auto-conjugados entre sí.

Definir a tetrada em cada ponto P do espaço-tempo corresponde a definir dezesseis funções reais. Com essas funções, pode-se construir o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$, através das equações (53). Como $g_{\mu\nu}(x)$ só tem dez componentes independente e os $h_{\mu(\alpha)}$, dezesseis segue-se que existe 6 graus de liberdade extras, que podem ser conectados a seis parâmetros contínuos. Êsses parâmetros permitem definir diferentes tetradas em P, Obtidas umas das outras por rotações locais, internas. O número de funções independentes na tetrada pode, ainda, ser consideràvelmente reduzido, usando-se propriedades de simetria de um problema específico; nesse trabalho, como será visto posteriormente, $h_{\mu(\alpha)}$ vai depender de quatro funções, o que corresponde às particulares orientações dos eixos das tetradas consistentes com a simetria considerada.

2. CAMPO DE TETRADAS NA HIPERSUPERFICIE NULA

É sempre possível introduzir na variedade Riemanniana uma família de hipersuperfícies nulas.

Uma hipersuperfície tridimensional imersa na variedade quadridimensional é definda pela equação

$$\omega\ (x) = 0 \tag{54}$$

e a normal em um ponto, como um covetor proporcional a $\omega,_{\mu}(x) \equiv \frac{\partial \omega(x)}{\partial x^{\mu}}$.

Da equação (54) resulta

$$d_H\, x^{\mu}\ \omega,_{\mu}\ (x) = 0 \quad , \tag{55}$$

$d_H\, x^{\mu}$ sendo um deslocamento sôbre a hipersuperfície. Considerando deslocamentos proporcionais à normal, isto é, $d_H\, x^{\mu} \propto g^{\mu\nu}\omega,_{\nu}$, segue-se de (55) que

$$g^{\mu\nu}\ \omega,_{\mu}\ \omega,_{\nu} = 0 \tag{56}$$

e, então, a normal será um vetor nulo. A hipersuperfície que a admite normal nula em cada ponto é dita nula. Uma hipersuperfície nula define, portanto, uma congruência de raios nulos, isto é, de curvas tais que a tangente em cada ponto seja proporcional à normal à hipersuperfície nesse ponto. Se os pontos sôbre um raio da família são dados paramètricamente, por

$$X^{\mu} = Z^{\mu}\ (\lambda) \quad , \tag{57}$$

então, por uma escolha adequada do parâmetro λ , tem-se

$$U^{\mu} \equiv \frac{dZ^{\mu}}{d\lambda} = g^{\mu\nu}\ \omega,_{\nu} \tag{58}$$

segue-se da equação (55) que

$$\frac{d_R\ Z^{\mu}}{d\lambda}\ \omega,_{\mu} = 0 \tag{59}$$

A equação do raio é facilmente derivável a partir das equações (58) e (56), obtendo-se

$$\frac{d^2 z^\mu}{d\lambda^2} + \left\{ {\mu \atop \rho\ \sigma} \right\} \frac{d\, z^\rho}{d\lambda} \frac{d\, z^\sigma}{d\lambda} = 0 \tag{60}$$

portanto, o raio é uma geodésica nula.

No primeiro capítulo viu-se que Bondi e seu grupo foram os primeiros a encontrar solução das equações de Einstein, aplicando as condições de contôrno de Trautman no caso de radiação de uma fonte limitada. As condições iniciais foram dadas sôbre uma hipersuperfície nula e não sôbre uma hipersuperfície tipo espaço. Então, para encontrar soluções do tipo Bondi, deve-se, inicialmente, contruir uma família de hipersuperfícies nulas.

Robinson e Trautman[14] mostraram que, com a escolha de coordenadas $\omega\ (x) = x^0$, $r = x^1$, parâmetro afim ao longo das geodésicas e x_2 , x_3 classificando a geodésica sôbre cada hipersuperfície, a métrica toma a forma simples

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ 0 & g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ 0 & g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix}$$

quando $K^\mu = (0,1,0,0)$, $n^\mu = (1,\alpha,x^3,x^4)$, $m^\mu = (0,\omega,\beta^3,\beta^4)$, $\bar{m}^\mu = (0,\bar{\omega},\bar{\beta}^3,\bar{\beta}^4)$

e $$h^{\mu(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & x^3 & x^4 \\ 0 & \omega & \beta^3 & \beta^4 \\ 0 & \bar{\omega} & \bar{\beta}^3 & \bar{\beta}^4 \end{pmatrix}$$

Não é sempre conveniente usar o parâmetro afim $r = x^1$ e é possível tomar como parâmetro a "distância luminosa", $r = 2/K^\mu{}_{;\mu}$, o que implica $g^{01} \neq 1$.

3. SPINORES FUNDAMENTAIS PARA O CAMPO DE RADIAÇÃO COM SIMETRIA AXIAL

Os objetos $\sigma_\mu^{A\dot{B}}(x)$, definidos no capítulo 2, serão introduzidos como os objetos fundamentais da geometria Riemanniana. Além disso, é de interêsse prático no problema em questão, que o 4-espaço tenha simetrias axial e de reflexão.

Escolha-se um sistema de coordenadas em que $x^0=\omega(x^\alpha)=u$, $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$, onde r é a "distância luminosa", φ a latitude e θ, longitude; da simetria axial, o ângulo φ é prontamente definido de um modo uniforme. Na zona de radiação, deve-se verificar se os $\sigma_\mu^{A\dot{B}}(x)$ obedecem às condições de Trautman; como essas condições assumem formas mais simples no sistema de coordenadas cartesiano, convém que, assintòticamente, os $\sigma_\mu^{A\dot{B}}(x)$ sejam escritos neste sistema.

Os objetos $\sigma_\mu^{A\dot{B}}(x)$ serão introduzidos na variedade Riemanniana através da definição

$$\sigma_\mu(x^\alpha) = h_\mu(x)^{(\alpha)}\,\mathring{\sigma}_\alpha \quad ,$$

$$\mathring{\sigma}_\alpha = (\, I_{2x2},\ \sigma_K \text{ de Pauli} \,) \quad ,$$

onde, por facilidade, os índices spinoriais foram omitidos(*). No sistema de coordenadas escolhido, as $h_\mu(x)$, construídas como indicado na seção II, são funções de u, r e θ sòmente, e as $g_{\mu\nu}(x)$ são obtidas a partir de

$$g_{\mu\nu}(x) = h_{\mu(\alpha)}^{\;(x)}\, h^{(x)}_{\;(\beta)}\, \tilde{\eta}^{(\alpha)(\beta)} \qquad (61)$$

(*) Daqui por diante, os índices spinoriais serão sempre omitidos em qualquer expressão que deveria contê-los.

Já foi mostrado por Bondi [5] que as $g_{\mu\nu}$ obedecendo às propriedades de simetrias axial e de reflexão dependem de quatro funções U, β, γ, V que, por sua vez, são funções de $u, r,$ e θ. Uma possível escolha da $h_\mu^{(\alpha)}$, que resulta numa $g_{\mu\nu}^{(x)}$ dêsse tipo é

$$h_\mu^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} a & b & b & 0 \\ c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \qquad (62)$$

Por conseguintes, os objetos $\sigma_\mu^{AB}(x)$ tomarão a forma

$$\begin{aligned}
\sigma_o &= a\,\dot\sigma_o + b\,(\dot\sigma_1 + \dot\sigma_2) & \qquad & \tau_o = -\,a\,\dot\sigma_o + b\,(\dot\sigma_1 + \sigma_2) \\
\sigma_1 &= c(\dot\sigma_o + \dot\sigma_1) & \text{e} \qquad & \tau_1 = c(-\sigma_o^o + \dot\sigma_1) \qquad (63) \\
\sigma_2 &= d\,\dot\sigma_2 & & \tau_2 = d\,\sigma_2 \\
\sigma_3 &= e\,\dot\sigma_3 & & \tau_3 = e\,\dot\sigma_3
\end{aligned}$$

De (61) obtém-se a relação entre as funções U, V, β, γ e as funções a, b, c, d, e. É importante lembrar (seção I) que as $h_\mu^{(\alpha)}$ não são únicas.

De (63), com a métrica $g^{\mu\nu}$, obtém-se as componentes contravariantes σ^μ e τ^μ

$$\sigma^o = c\,e^{-2\beta}(\dot\sigma_o^o + \sigma_1)$$

$$\sigma^1 = (a\,e^{-2\beta} - v\,e^{-2\beta}r^{-1}c)\,\dot\sigma_o + (b\,e^{-2\beta} - v\,e^{-2\beta}r^{-1}c)\,\dot\sigma_1$$

$$\sigma^2 = U\,c\,e^{-2\beta}(\dot\sigma_o + \dot\sigma_1) - e^{-2\gamma}\,r^{-2}\,d\,\dot\sigma_2$$

$$\sigma^3 = -\frac{e^2\,r^{-2}}{\sin^2\theta}\,\dot\sigma_3$$

$$\tau^{0} = c\,\bar{e}^{\,2\beta}\,(-\dot{\sigma}_0 + \sigma_1 [illegible]$$

$$\tau^{1} = -\,(a\,\bar{e}^{\,2\beta} - v\,\bar{e}^{\,2\beta}\,\bar{r}^{-1} [illegible])\,\dot{\sigma}_0 [illegible]\,\bar{e}^{\,2\beta} - v\,\bar{e}^{\,2\beta}\,\bar{r}^{-1} c)\,\dot{\sigma}_1$$

$$\tau^{2} = U\,c\,\bar{e}^{\,2\beta}\,(-\dot{\sigma}_0 + \dot{\sigma}_1) - [illegible]\;\bar{r}^{-2} [illegible]\,\sigma_2$$

$$\tau^{3} = -\frac{e^{2\gamma}\,\bar{r}^{\,2}}{\sin^2\theta}\;[illegible]$$

4. SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE S[illegible]

No capítulo 2, seção 8, [illegible] de um princípio variacional, Sachs obteve as equações de campo em que σ_μ e τ_μ aparecem como objetos dinâmicos. O objet[illegible] a resolução dessas equações.

A expressão das equações de S[illegible]

$$P^{+}_{\mu\alpha}\,\sigma^{\alpha} + \sigma^{\alpha}\,P_{\mu\alpha} = 0$$

$$P_{\mu\alpha} = \Omega_{\mu,\alpha} - \Omega_{\alpha,\mu} + \left[\Omega_\mu, \Omega_\alpha\right] \; ,$$

$$\Omega_\mu = -\frac{1}{4}\left[\sigma^{\lambda}_{\;,\mu} [illegible] \left\{ {[illegible] \atop [illegible]} \right\} \sigma^{\nu} [illegible]_{\lambda}\right]$$

e $\left\{ {\lambda \atop \mu\,\nu} \right\}$ são os símbolos de Christoffel,

então, uma vez calcula[illegible] os coeficientes d[illegible] e, após, as componentes da curvatura de spin, torna-se possível proceder à resolução de ([illegible]

Êsses coeficientes são (cfr. Apêndice [illegible]

$$\Omega_o = -\frac{1}{4}\left[A^{(o)}\dot{\sigma}_o + B^{(o)}\sigma_1 + D^{(o)}\dot{\sigma}_2 + i\,E^{(o)}\dot{\sigma}_3\right]$$

$$\Omega_1 = -\frac{1}{4}\left[A^{(1)}\dot{\sigma}_o + B^{(1)}\sigma_1 + D^{(1)}\dot{\sigma}_2 + i\,E^{(1)}\dot{\sigma}_3\right]$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{4}\left[A^{(2)}\dot{\sigma}_o + B^{(2)}\dot{\sigma}_1 + D^{(2)}\dot{\sigma}_2 + i\,E^{(2)}\dot{\sigma}_3\right]$$

$$\Omega_3 = -\frac{1}{4}\left[i\,B^{(3)}\dot{\sigma}_1 + i\,D^{(3)}\dot{\sigma}_2 + E^{(3)}\dot{\sigma}_3\right]$$

Por sua vez, as componentes da curvatura de spin, $P_{\mu\alpha}$, são calculadas de (65), com o uso de (66); acha-se que:

$$P_{10} = \frac{1}{4}\left[(A^{(0)}_{,1} - A^{(1)}_{,o})\dot{\sigma}_o + (B^{(0)}_{,1} - B^{(1)}_{,o} + \frac{1}{2}E^{(1)}D^{(0)} - \frac{1}{2}E^{(0)}D^{(1)})\dot{\sigma}_1 + \right.$$
$$+ (D^{(0)}_{,1} - D^{(1)}_{,o} + \frac{1}{2}E^{(0)}B^{(1)} - \frac{1}{2}B^{(0)}E^{(1)})\dot{\sigma}_2 +$$
$$\left. + i\,(E^{(1)}_{,o} - E^{(0)}_{,1} + \frac{1}{2}D^{(1)}B^{(0)} - \frac{1}{2}B^{(1)}D^{(0)})\sigma_3\right]$$

$$P_{20} = \frac{1}{4}\left[(A^{(0)}_{,2} - A^{(2)}_{,o})\dot{\sigma}_o + (B^{(0)}_{,2} - B^{(2)}_{,o} + \frac{1}{2}E^{(2)}D^{(0)} - \frac{1}{2}E^{(0)}D^{(2)})\dot{\sigma}_1 + \right.$$
$$+ (D^{(0)}_{,2} - D^{(2)}_{,o} + \frac{1}{2}E^{(0)}B^{(2)} - \frac{1}{2}B^{(0)}E^{(2)})\dot{\sigma}_2 +$$
$$\left. + i\,(E^{(2)}_{,o} - E^{(0)}_{,2} + \frac{1}{2}B^{(0)}D^{(2)} - \frac{1}{2}B^{(2)}D^{(0)})\dot{\sigma}_3\right]$$

$$P_{30} = \frac{1}{4}\left[i\,(B^{(3)}_{,o} + \frac{1}{2}D^{(3)}E^{(0)} + \frac{1}{2}D^{(0)}E^{(3)})\dot{\sigma}_1 + \right.$$
$$+ i\,(D^{(3)}_{,o} - \frac{1}{2}E^{(0)}B^{(3)} - \frac{1}{2}B^{(0)}E^{(3)})\dot{\sigma}_2 +$$
$$\left. + (-E^{(3)}_{,o} + \frac{1}{2}B^{(0)}D^{(3)} - \frac{1}{2}D^{(0)}B^{(3)})\dot{\sigma}_3\right]$$

$$P_{31} = \frac{1}{4}\Big[i\ (B^{(3)}_{,1} + \frac{1}{2} E^{(1)} D^{(3)} + \frac{1}{2} E^{(3)} D^{(1)})\ \dot{\sigma}_1\ +$$

$$+\ i\ (D^{(3)}_{,1} - \frac{1}{2} B^{(3)} E^{(1)} - \frac{1}{2} E^{(3)} B^{(1)})\ \dot{\sigma}_2\ +$$

$$+\ (\ -\ E^{(3)}_{,1}\ + \frac{1}{2} D^{(3)}\ B^{(1)}\ - \frac{1}{2} D^{(1)}\ D^{(3)})\ \dot{\sigma}_3 \Big]$$

Com a substituição dessas expressões em (64), a equação para $\mu = 0$ se escreve (cf. Apêndice I-b)

$$\mathcal{A}^{(o)}\dot{\sigma}_o + \mathcal{B}^{(o)}\dot{\sigma}_1 + \mathcal{C}^{(o)}\dot{\sigma}_2 = 0 \quad ; \tag{67}$$

devido á independência linear das $\dot{\sigma}_\mu$,

$$\mathcal{A}^{(o)} = \mathcal{B}^{(o)} = \mathcal{C}^{(o)} = 0$$

e, analogamente, para $\mu = 1, 2, 3$ (cf. Apêndice I-b).

Obtém-se o número total de dez equações; porém, como já mencionado no capítulo primeiro, a Teoria da Relatividade Geral, admitindo o grupo de gauge simultâneamente como grupo de simetria e como de invariância, será descrita por equações de campo não inteiramente independentes; como consequência do número das identidades de Bianchi, haverá, apenas, quatro equações independentes, que são:

$$(\beta_{,1} - \frac{1}{2} r\ \gamma_1{}^2)\ r^{-1} = 0$$

$$\left[r^4\ e^{2(\gamma-\beta)} U_{,1}\right]_{,1} - 2r^2\left[\beta_{,12} - \gamma_{,12} + 2\gamma_{,1}\ \gamma_{,2} - 2\beta_{,2} r^{-1} - 2\gamma_{,1}\cot\theta\right] = 0\ ,$$

$$2\ V_{,1} + \frac{1}{2} r^4\ e^{2(\gamma-\beta)} U_{,1}{}^2 - r^2 U_{,12} - 4\ r\ U_{,2} - r^2\ U_{,1}\cot\theta\ -$$

$$-\ 4\ r\ U\cot\theta + 2\ e^{2(\beta-\gamma)}\Big[-1-(3\ \gamma_{,2} - \beta_{,2})\cot\theta\ -$$

$$-\ \gamma_{,22} + \beta_{,22} + \beta_{,2}{}^2 + 2\ \gamma_{,2}\ (\gamma_{,2} - \beta_{,2})\Big] = 0\ , \tag{68}$$

$$2r\,(r\gamma)_{,0\,1} + (1-r\gamma_{,1})\gamma_{,1} - (r\gamma_{,11} + \gamma_{,1})\,V - r(1-r\,\gamma_{,1})\,U_{,2} -$$

$$- r^2(\cot\theta - \gamma_{,2})\,U_{,1} + r(2r\,\gamma_{,12} + 2\gamma_{,2} + r\,\gamma_{,1}\cot\theta - 3\cot\theta)\,U +$$

$$+ e^{2(\beta-\gamma)}\left[-1 - (3\,\gamma_{,2} - 2\,\beta_{,2})\cot\theta - \gamma_{,22} + 2\,\gamma_{,2}\,(\gamma_{,2} - \beta_{,2})\right] = 0\,.$$

Observa-se que êsse conjunto de equações, obtido por um formalismo spinorial, é o mesmo a que Bondi chegou, usando o formalismo tensorial.

No próximo parágrafo, vai-se procurar a condição de contôrno de Trautman[4], usando o formalismo spinorial e exemplificar em têrmos dos σ_μ que foram usados para obter as equações acima.

5. FORMA SPINORIAL DAS CONDIÇÕES DE CONTÔRNO DE TRAUTMAN

Trautman supôs um sistema de coordenadas, no qual $g_{\mu\nu}(x)$ pudesse ser escrita, assintòticamente, sob a forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \lambda_{\mu\nu}(r^{-1}) \tag{69}$$

com $\eta_{\mu\nu}$ = diag (+ ‒ ‒ ‒) e r, "distância luminosa" ao longo do raio. Supôs, ainda que $g_{\mu\nu}$, obtido de (69), satisfize-se a

$$g_{\mu\nu,\rho} = \lambda_{\mu\nu,\rho} + 0(r^{-2}) = i_{\mu\nu}\,K_\rho + 0(r^{-2}) \tag{70}$$

onde $i_{\mu\nu}$ obedece à condição

$$(i_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\,i)\,K^\nu = 0(r^{-2}) \tag{71}$$

Presentemente, deseja-se determinar a forma spinorial correspondente às condições assintóticas, (70) e (71), do campo de radiação.

Admite-se que, assintòticamente, existe um sistema cartesiano de coordenadas, no qual σ_μ pode ser escrito

$$\sigma_\mu (t\ x\ yz) = \sigma_\mu{}^{C} + \Gamma_\mu (\bar{r}^{\,1}) \tag{72}$$

onde $\dot{\sigma}_\mu{}^{C}$ são as componentes cartesianas de σ_μ ; por comodidade de notação, $\dot{\sigma}_\mu{}^{C}$ passará a ser indicada por $\dot{\sigma}_\mu$, até o final do trabalho.

Definindo, então,

$$\tilde{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu + \frac{1}{4}\,\dot{\sigma}_\mu\ \mathrm{tr}(\dot{\tau}_\alpha\ \Gamma^\alpha) \tag{73}$$

impondo que, assintòticamente,

$$\tilde{\Gamma}_{\mu,\nu} = \tilde{\Gamma}_\mu\ K_\nu + 0\ (\bar{r}^{\,2}) \tag{74}$$

e, usando as relações (69), (70), (71) e (72), chega-se a (cfr. Apêndice II):

$$\mathrm{tr}(\tilde{\Gamma}_\nu{}^{,\nu}\ \dot{\tau}_\mu + \tilde{\Gamma}_\mu{}^{,\nu}\ \dot{\tau}_\nu) = 0\ (\bar{r}^{\,2}) \quad ; \tag{75}$$

com a ajuda de (74) , (75) se escreve

$$\mathrm{tr}\left[(\tilde{\Gamma}_\nu\ \dot{\tau}_\mu + \tilde{\Gamma}_\mu\ \dot{\tau}_\nu)\ K^\nu\right] = 0\ (\bar{r}^{\,2}) \ , \tag{76}$$

que é a forma spinorial das condições de Trautman.

6. APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE TRAUTMAN AOS OBJETOS FUNDAMENTAIS

Para que os objetos σ_μ e τ_μ, definidos na seção 3, correspondam a um campo de radiação é preciso que verifiquem as condições de Trautman.

De acôrdo com o procedimento descrito na seção anterior, deve-se efetuar uma transformação de coordenadas, de modo que se tenha as componentes cartesianas dos objetos fundamentais. A transformação do sistema (u, r, θ, φ) para o sistema (t, x, y, z) é dada por

$$\sigma_\mu(x') = A^\alpha{}_\mu \, \sigma_\alpha(x) \quad ,$$

onde $x' \equiv (t,x,y,z)$; $x \equiv (u,r,\theta,\varphi)$; $u = t - r$; $c = 1$

ou por $\sigma_\mu(x') = (A^T)_\mu{}^\alpha \, \sigma_\alpha(x)$;

explicitamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -x/r & -y/r & -z/r \\ 0 & x/r & y/r & z/r \\ 0 & xz/\rho r^2 & \dfrac{yz}{\rho r^2} & -\rho/r^2 \\ 0 & -y/\rho^2 & x/\rho^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x/r & x/r & xz/\rho r^2 & y/\rho^2 \\ -y/r & y/r & yz/\rho r^2 & x/\rho^2 \\ -z/r & z/r & -\rho/r^2 & 0 \end{pmatrix}$$

com $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$

Daí,

$$\sigma_o(x') = \sigma_o(x)$$

$$\sigma_1(x') = -\frac{x}{r}\sigma_o(x) + \frac{x}{r}\sigma_1(x) + \frac{xz}{\rho r^2}\sigma_2(x) - \frac{y}{\rho^2}\sigma_3(x)$$

$$\sigma_2(x') = -\frac{y}{r}\sigma_o(x) + \frac{y}{r}\sigma_1(x) + \frac{yz}{\rho r^2}\sigma_2(x) + \frac{x}{\rho^2}\sigma_3(x)$$

$$\sigma_3(x') = -\frac{z}{r}\sigma_o(x) + \frac{z}{r}\sigma_1(x) - \frac{\rho}{r^2}\sigma_2(x) \; . \tag{77}$$

Anàlogamente, as matrizes $\dot{\sigma}_\mu(x)$ são relacionadas com $\dot{\sigma}_\mu(x')$ por

$$\dot{\sigma}_o(x) = \dot{\sigma}_o(x')$$

$$\dot{\sigma}_1(x) = \frac{x}{r}\dot{\sigma}_1 + \frac{y}{r}\dot{\sigma}_2 + \frac{z}{r}\dot{\sigma}_3$$

$$\dot{\sigma}_2(x) = \frac{xz}{\rho}\dot{\sigma}_1 + \frac{yz}{\rho}\dot{\sigma}_2 - \rho\dot{\sigma}_3$$

$$\dot{\sigma}_3(x) = -y\dot{\sigma}_1 + x\dot{\sigma}_2 \tag{78}$$

Substituindo (78) em (77), com os valores de σ_μ e τ_μ dados por (63), acha-se

$$\dot{\sigma}_o(x') = \dot{\sigma}_o + \Gamma_o$$

$$\dot{\sigma}_1(x') = \dot{\sigma}_1 + \Gamma_1$$

$$\sigma_2(x') = \dot{\sigma}_2 + \Gamma_2$$

$$\sigma_3(x') = \dot{\sigma}_3 + \Gamma_3 \tag{79}$$

onde

$$\Gamma_o = \frac{a}{r}\dot{\sigma}_o + \frac{xz}{r^2}\dot{\sigma}_1 - \frac{yz}{\rho r^2} b\,\dot{\sigma}_2 - \frac{\rho}{r^2} b\,\dot{\sigma}_3$$

$$\Gamma_1 = \left(-\frac{x}{r}\frac{a}{r} + \frac{x}{r}\frac{c}{r}\right)\dot{\sigma}_o + \left(-\frac{x^2 z}{\rho r^3} b + \frac{x^2}{r^2}\frac{c}{r} + \frac{x^2 z^2}{\rho^2 r^3} d + \frac{y^2}{\rho^2}\frac{e}{r}\right)\dot{\sigma}_1 +$$

$$+\left(-\frac{xyz}{\rho r^3} b + \frac{xy}{r^3} c + \frac{xyz^2}{\rho^2 r^3} d - \frac{xy}{\rho^2 r} e\right)\dot{\sigma}_2 + \left(-\frac{xz}{r^3} b + \frac{x\rho}{r^3} b + \frac{xz}{r^3} c - \frac{xz}{r^3} d\right)\dot{\sigma}_3 \tag{80}$$

$$\Gamma_2 = (-\frac{y}{r}\frac{a}{r} + \frac{y}{r}\frac{c}{r})\dot{\sigma}_o + (-\frac{yxz}{\rho r^3} b + \frac{xy}{r^3} c + \frac{xyz^2}{\rho^2 r^3} d - \frac{xy}{\rho^2 r} c)\ \dot{\sigma}_1 +$$

$$+ (-\frac{y^2 z}{\rho r^3}\ d + \frac{y^2}{r^3} c + \frac{y^2 z^2}{\rho^2 r^3}\ d + \frac{x^2}{\rho 2}\ \frac{c}{r})\dot{\sigma}_2 + (\frac{y\rho}{r^3} b + \frac{yz}{r^3} c - \frac{yz}{r^3} d)\ \dot{\sigma}_3$$

$$\Gamma_3 = (-\frac{z}{r}\frac{a}{r} + \frac{z}{r}\frac{c}{r})\dot{\sigma}_o + (-\frac{xz}{\rho r^3} b + \frac{xz}{r^3} c - \frac{yz}{r^3} d)\ \dot{\sigma}_1 +$$

$$+ (-\frac{yz^2}{\rho r^3} d + \frac{yz}{r^3} c - \frac{yz}{r^3} d)\ \dot{\sigma}_2 + (\ \frac{z\rho}{r^3} b + \frac{z^2}{r^3} c + \frac{\rho^2}{r^3} d)\ \dot{\sigma}_3 .$$

Então, foi possível cuma expansão assintótica dos objetos fundamentais, na forma procurada. Embora os Γ_μ como expressos acima, não sejam, ainda, de ordem $\overline{r}^{1}$, é possível contornar essa dificuldade, impondo que sejam dessa ordem, o que vai trazer restrições sôbre as funções a, b, c, d, e.

Uma vez obtida a forma assintótica (79), a verificação da condição de contôrno é pura questão de cálculo.

Viu-se no capítulo I, que, se $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, do tipo N de Petrov, satisfaz, assintòticamente, a uma equação do tipo

$$K^\mu\ R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0\ (\overline{r}^2) \qquad (81)$$

K^μ do tipo luz, o campo descrito por $g_{\mu\nu}$ é de radiação; além do mais, o tensor de Riemann, construído com $g_{\mu\nu}$ na forma suposta por Trautman, satisfaz à equação (81) e, portanto, os dois métodos são equivalentes para verificar se um dado campo é de radiação. Uma equação análoga será procurada no formalismo spinorial, de modo que seja verificada pela curvatura spinorial construída com os σ_μ que obedecem à condição de Trautman.

Segue-se das identidades de Bianchi que o spinor de curvatura, X_{ABCD}, deve satisfazer à equação

$$\Delta^{A\dot{E}} X_{ABCD} = 0 \tag{82}$$

onde
$$\Delta^{A\dot{E}} = \sigma^{\mu A\dot{E}} \partial_{;\mu} \quad ;$$

no espaço vazio, X_{ABCD} é indicado por Ψ_{ABCD} e a (82) se torna

$$\Delta^{A\dot{E}} \Psi_{ABCD} = 0 \tag{83}$$

Já foi mostrado[5] que o spinor de curvatura e a curvatura de spin, $P_{\mu\alpha CD}$, estão relacionados por meio de

$$X_{ABCD} = -2\sigma^{\mu\dot{F}}{}_{A}\, \sigma^{\alpha}{}_{B\dot{F}}\, P_{\mu\alpha CD} \tag{84}$$

O valor de Ψ_{ABCD} calculado a partir de (84) com a aproximação (72) é (cfr. Apêndice III):

$$_{ABCD} = -\frac{1}{8} (\mathring{\sigma}^{\rho} \mathring{\tau}^{\sigma})_{BA} (\mathring{\tau}^{\Omega} \mathring{\sigma}^{\lambda})_{CD}\, \delta^{\nu\beta}_{\rho\sigma}\, \delta^{\mu\alpha}_{\lambda\Omega}\, \mathrm{tr}(\Gamma_{\beta} \mathring{\tau}_{\mu} + \mathring{\tau}_{\beta} \Gamma_{\alpha})_{,\nu\alpha} \tag{85}$$

Então,

$$\partial^{AE} \Psi_{ABCD} = -\frac{1}{8} (\mathring{\sigma}^{\rho} \mathring{\tau}^{\sigma})_{CD} (\mathring{\tau}^{\Omega} \mathring{\sigma}^{\lambda})_{AB}\, \delta^{\nu\beta}_{\rho\sigma}\, \delta^{\mu\alpha}_{\lambda\Omega}\, \sigma^{\varepsilon\, A\dot{E}}\, \mathrm{tr}(\Gamma_{\beta} \mathring{\tau}_{\mu} + \mathring{\tau}_{\beta} \Gamma_{\mu})_{,\nu\alpha\varepsilon} = 0(\bar{r}^{2}) \ .$$

Como, na aproximação usada, (72), a derivada e a coderivada coincidem, acabou-se de mostrar, portanto, que Ψ_{ABCD}, construído com σ_{μ} na forma necessária ao método de Trautman, satisfaz à equação

$$\Delta^{AE} \Psi_{ABCD} = \partial^{A\dot{E}} \Psi_{ABCD} = 0 \quad (\bar{r}^{1}) \tag{87}$$

que é a análoga de (81), para que (86) resulte em (87) vai ser preciso impor que Γ seja de ordem $\bar{r}^{1}$, implicando, novamente, em restrição sôbre as funções a, b, c, d, e, o que era de se esperar. Pelo processo da construção da equação (87) é claro que, ainda aqui, as duas teorias são eqüivalentes.

APÊNDICE I

CÁLCULO DOS COEFICIENTES DA CONEXÃO AFIM E DOS COEFICIENTES DAS EQUAÇÕES DE SACHS

a) Coeficientes da conexão afim

Substituindo os valores de σ_μ e τ_μ dados em (3-3) na expressão $u_\mu = -\frac{1}{4}\left[\sigma^{\lambda}{}_{\mu}\,\tau_\lambda \quad \left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\} \sigma^{\nu}\tau_\lambda\right]$, acha-se que

$$A^{(o)} = -(ca\, e^{-2\beta} - bc\, e^{-2\beta})\Gamma^0_{00} + ce^{-2\beta}(b-a)\Gamma^1_{10} + (-acU\, e^{-2\beta} + bcU\, e^{-2\beta} - bd\, e^{-2\gamma}\, r^{-2})\Gamma^0_{02} -$$

$$- d^2 e^{-\gamma}\, r^{-2}\, \Gamma^2_{02} - e^{2\gamma}\, r^{-2}\, s^{-2}\, \theta\, e^2\, \Gamma^3_{03} - a(ce^{-2\beta})_{,o} + b(ce^{-2\beta})_{,o} - c(ae^{-2\beta})_{,o} +$$

$$+ c(be^{-2\beta})_{,o} - d(e^{-2\gamma} r^{-2}\, d)_{,o} - e(e^{2\gamma}\, r^{-2}\, s^{-2}\, \theta\, e)_{,o}$$

$$B^{(o)} = -\ (ac\, e^{-2\beta} - bc\, e^{-2\beta})\Gamma^0_{00} + ce^{-2\beta}(a-b)\Gamma^1_{01} + (-aUce^{-2\beta} + bcU\, e^{-2\beta})\Gamma^0_{02} - a(ce^{-2\beta})_{,o} +$$

$$+ b(ce^{-2\beta})_{,0} + c(ae^{-2\beta})_{,0} - c(be^{-2\beta})_{,0}$$

$$D^{(o)} = bc\, e^{-2\beta}\, \Gamma^0_{00} + dc\, e^{-2\beta}\, \Gamma^2_{00} + de^{-2\beta}(a - Vr^{-1}\, c)\ \Gamma^2_{01} + (ad\, e^{-2\gamma}\, r^{-2} + bcU\, e^{-2\beta})\ \Gamma^0_{02} +$$

$$+ cd\, e^{-2\gamma}\, r^{-2}\, \Gamma^1_{02} + cd\, e^{-2\beta}\, \Gamma^2_{02} + b(ce^{-2\beta})_{,o} - c(be^{-2\beta})_{,o} - c(Ude^{-2\beta})_{,o} + d(Uce^{-2\beta})_{,o}$$

$$E^{(o)} = bce^{-2\beta}\, \Gamma^0_{00} + dce^{-2\beta}\Gamma^2_{00} + de^{-2\beta}(b - Vr^{-1}\, c)\ \Gamma^2_{01} + (bcUe^{-2\beta} + dbe^{-2\gamma}\, r^{-2})\ \Gamma^0_{02} +$$

$$+ cde^{-2\gamma}\, r^{-2}\ \Gamma^1_{02} + dUce^{-2\beta}\, \Gamma^2_{02} + b(ce^{-2\beta})_{,o} - c(be^{-2\beta})_{,o} - c(Ude^{-2\beta})_{,o} + d(Uce^{-2\beta})_{,o}$$

$$A^{(1)} = ce^{-2\beta}(b-a)\ \Gamma^1_{11} - d^2 e^{-2\gamma} r^{-2}\ \Gamma^2_{21} - e^{2\gamma} r^{-2}\, s^{-2}\, \theta\, e^2\ \Gamma^3_{31} - a(ce^{-2\beta})_{,1} +$$

$$+ b(ce^{-2\beta})_{,1} - c(ae^{-2\beta})_{,1} + c(be^{-2\beta})_{,1} - d(e^{-2\gamma}\, r^{-2} d)_{,1} - e(e^{2\gamma}\, r^{-2}\, s^{-2}\, \theta)_{,1}$$

$$B^{(1)} = ce^{-2\beta}\ (a-b)\ \Gamma^1_{11} - a(ce^{-2\beta})_{,1} + b(ce^{-2\beta})_{,1} + c(ae^{-2\beta})_{,1} - c(be^{-2\beta})_{,1}$$

$$D^{(1)} = dUc\, e^{-2\beta}\Gamma^{2}_{21} + cd\, e^{-2\gamma}\, r^{-2}\, \Gamma^{1}_{21} + dc\, e^{-2\beta}\Gamma^{2}_{01} + b(c\, e^{-2\beta})_{,1} - c(b\, e^{-2\beta})_{,1} -$$
$$- c(Ud\, e^{-2\beta})_{,1} + d(cU\, e^{-2\beta})_{,1}$$

$$E^{(1)} = dc\, e^{-2\beta}\, \Gamma^{2}_{01} + cd\, e^{-2\gamma}\, r^{-2}\, \Gamma^{1}_{21} + cd\, e^{-2\beta}\, \Gamma^{2}_{21} + b(c\, e^{-2\beta})_{,1} - c(b\, e^{-2\beta})_{,1} -$$
$$- c(Ud\, e^{-2\beta})_{,1} + d(cU\, e^{-2\beta})_{,1}$$

$$A^{(2)} = (-ca\, e^{-2\beta} + bc\, e^{-2\beta})\Gamma^{0}_{02} + c\, e^{-2\beta}(b-a)\, \Gamma^{1}_{12} + (-acU\, e^{-2\beta} + bcU\, e^{-2\beta} - db\, e^{-2\gamma} r^{-2})\Gamma^{0}_{22} -$$
$$- d^{2} e^{-2\gamma}\, r^{-2}\, \Gamma^{2}_{22} - e^{2\gamma}\, r^{-2}\, s^{-2}\, \theta\, e^{2}\, \Gamma^{3}_{32} - a(c e^{-2\beta})_{,2} + b(c\, e^{-2\beta})_{,2} - c(a\, e^{-2\beta})_{,2} +$$
$$+ c(b\, e^{-2\beta})_{,2} - d(e^{-2\gamma}\, r^{-2}\, d)_{,2} - e(e^{2\gamma}\, r^{-2}\, s^{-2}\, \theta\, e)_{,2}$$

$$B^{(2)} = bc\, e^{-2\beta}\, \Gamma^{0}_{02} + dc\, e^{-2\beta}\, \Gamma^{2}_{02} + d\, e^{-2\beta}\, (a - v\, r^{-1}\, c)\, \Gamma^{2}_{12} + (a e^{-2\gamma}\, r^{-2}\, d + bcU\, e^{-2\beta})\Gamma^{0}_{22} +$$
$$+ cd\, e^{-2\gamma}\, r^{-2}\, \Gamma^{1}_{22} + dUc\, e^{-2\beta}\Gamma^{2}_{22} + b(c e^{-2\beta})_{,2} - c(b e^{-2\beta})_{,2} - c(Ud e^{-2\beta})_{,2} + d(Uc e^{-2\beta})_{,2}$$

$$D^{(2)} = bc\, e^{-2\beta}\, \Gamma^{0}_{02} + dc\, e^{-2\beta}\Gamma^{2}_{02} + d e^{-2\beta}(a - v\, r^{-1} c)\Gamma^{2}_{12} - (a e^{-2\gamma}\, r^{-2}\, d + bc\, U\, e^{-2\beta})\, \Gamma^{0}_{22} +$$
$$+ cd\, e^{-2\gamma}\, r^{-2}\, \Gamma^{1}_{22} + dUc\, e^{-2\beta}\, \Gamma^{2}_{22} + b(c\, e^{-2\beta})_{,2} - c(b e^{-2\beta})_{,2} - c(Ud e^{-2\beta})_{,2} + d(Uc e^{-2\beta})_{,2}$$

$$E^{(2)} = bc e^{-2\beta}\, \Gamma^{0}_{02} + dc e^{-2\beta}\Gamma^{2}_{02} + d e^{-2\beta}(b - v r^{-1} c)\, \Gamma^{2}_{12} + (bcU e^{-2\beta} + bd e^{-2\gamma}\, r^{-2})\, \Gamma^{0}_{22} +$$
$$+ cd\, e^{-2\gamma}\, r^{-2}\, \Gamma^{1}_{22} + dUc\, e^{-2\beta}\, \Gamma^{2}_{22} + b(c e^{-2\beta})_{,2} - c(b e^{-2\beta})_{,2} - c(Ud e^{-2\beta})_{,2} + d(Uc e^{-2\beta})_{,2}$$

$$B^{(3)} = - e^{-2\gamma} de\, r^{-2}\, \Gamma^{3}_{23} + b\, e^{2\gamma}\, r^{-2}\, s^{-2}\, \theta\, e\, \Gamma^{0}_{33} + e^{2\gamma}\, r^{-2}\, s^{-2}\, \theta\, de\, \Gamma^{2}_{33}$$

$$D^{(3)} = - ec e^{-2\beta}\, \Gamma^{3}_{03} + e^{-2\beta}\, e(v r^{-1}\, c - b)\, \Gamma^{3}_{13} - Uec\, e^{-2\beta}\Gamma^{3}_{23} - be^{2\gamma}\, r^{-2}\, s^{-2}\, \theta\, e\, \Gamma^{0}_{33} -$$
$$- ce\, r^{-2}\, e^{2\gamma}\, s^{-2}\, \theta\, \Gamma^{1}_{33}$$

$$E^{(3)} = ec e^{-2\beta}\, \Gamma^{3}_{03} + ea e^{-2\beta}\, \Gamma^{3}_{13} - ev r^{-1}\, c e^{-2\beta}\, \Gamma^{3}_{13} + ecU\, e^{-2\beta}\, \Gamma^{3}_{23} + a\, e^{2\gamma}\, r^{-2}\, s^{-2}\, \theta\, e\, \Gamma^{0}_{33} +$$
$$+ ce\, r^{-2}\, e^{2\gamma}\, s^{-2}\, \theta\, \Gamma^{1}_{33}$$

b - Coeficientes das equações de Sachs

Os coeficientes das equações de Sachs são obtidos por substituição de (4-4) em (4-1), vindo:

$$\mathcal{A}^{(0)} = (A^{(1)}_{,0} - A^{(0)}_{,1})(a e^{-2\beta} - v e^{-2\beta} r^{-1} c) + (B^{(1)}_{,0} - B^{(0)}_{,1} + \tfrac{1}{2} H^{(0)} E^{(0)} - \tfrac{1}{2} D^{(0)} E^{(1)}) \cdot$$

$$\cdot (b e^{-2\beta} - v e^{-2\beta} r^{-1} c) + (B^{(0)}_{,0} - B^{(0)}_{,2} - B^{(0)}_{,2} + \tfrac{1}{2} E^{(0)} D^{(2)} - \tfrac{1}{2} D^{(0)} E^{(2)})\, U c e^{-2\beta} +$$

$$(D^{(0)}_{,2} - D^{(2)}_{,0} + \tfrac{1}{2} E^{(0)} B^{(2)} - \tfrac{1}{2} B^{(0)} E^{(2)}) - e^{2\gamma} r^{-2} s^{-2} \theta e (E^{(3)}_{,0} - \tfrac{1}{2} B^{(0)} D^{(3)} + \tfrac{1}{2} D^{(0)} B^{(3)}) +$$

$$+ (A^{(2)}_{,0} - A^{(2)}_{o})\, U c e^{-2\beta} = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\mathcal{B}^{(0)} = (A^{(1)}_{,0} - A^{(0)}_{,1})(b e^{-2\beta} - v e^{-2\beta} r^{-1} c) + (B^{(1)}_{,0} - B^{(0)}_{,1} + \tfrac{1}{2} H^{(0)} E^{(0)} - \tfrac{1}{2} D^{(0)} E^{(1)}) \cdot$$

$$(a e^{-2\beta} - v e^{-2\beta} r^{-1} c) + (A^{(2)}_{,0} - A^{(0)}_{,2})\, U c e^{-2\beta} + (B^{(2)}_{,0} - B^{(0)}_{,2} + \tfrac{1}{2} E^{(0)} D^{(2)} - \tfrac{1}{2} D^{(0)} E^{(2)})\, U c e^{-2\beta} -$$

$$- (E^{(2)}_{,0} - E^{(0)}_{,2} + \tfrac{1}{2} B^{(0)} D^{(2)} - \tfrac{1}{2} D^{(0)} B^{(2)})\, e^{-2\gamma} r^{-2} d +$$

$$+ (D^{(3)}_{,0} - \tfrac{1}{2} E^{(0)} B^{(3)} - \tfrac{1}{2} B^{(0)} E^{(3)})\, e^{2\gamma} r^{-2} s^{-2} \theta e = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\mathcal{C}^{(0)} = (D^{(1)}_{,0} - D^{(0)}_{,1} - \tfrac{1}{2} E^{(0)} B^{(1)} + \tfrac{1}{2} B^{(0)} E^{(1)})(a e^{-2\beta} - v e^{-2\beta} r^{-1} c) +$$

$$+ (E^{(0)}_{,1} - E^{(1)}_{,0} - \tfrac{1}{2} B^{(0)} E^{(1)} + \tfrac{1}{2} D^{(0)} B^{(1)})(b e^{-2\beta} - v e^{-2\beta} r^{-1} c) -$$

$$- (A^{(2)}_{,0} - A^{(0)}_{,2})\, e^{-2\gamma} r^{-1} d - (D^{(0)}_{,2} - D^{(2)}_{,0} + \tfrac{1}{2} E^{(0)} B^{(2)} - \tfrac{1}{2} B^{(0)} E^{(2)})\, U c e^{-2\beta} -$$

$$- (E^{(2)}_{,0} - E^{(0)}_{,2} + \tfrac{1}{2} B^{(0)} D^{(2)} - \tfrac{1}{2} D^{(0)} B^{(2)}\, U c e^{-2\beta} -$$

$$- (B^{(3)}_{,0} + \tfrac{1}{2} E^{(0)} D^{(3)} + \tfrac{1}{2} D^{(0)} E^{(3)})\, e^{2\gamma} r^{-2} s^{-2} \theta e = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\mathcal{A}^{(1)} = (A^{(0)}_{,1} - A^{(1)}_{,0})\, c e^{-2\beta} + (B^{(0)}_{,1} - B^{(1)}_{,0} + \tfrac{1}{2} D^{(0)} E^{(1)} - \tfrac{1}{2} E^{(0)} D^{(1)})\, c e^{-2\beta} +$$

$$+ (A^{(2)}_{,1} - A^{(1)}_{,2})\, U c e^{-2\beta} - (E^{(2)}_{,1} - E^{(1)}_{,2} - \tfrac{1}{2} B^{(2)} D^{(1)} + \tfrac{1}{2} D^{(2)} B^{(1)})\, r^{-2} e^{-2\gamma} d +$$

$$+ (D^{(3)}_{,1} - \tfrac{1}{2} B^{(3)} E^{(1)} - \tfrac{1}{2} E^{(3)} B^{(1)})\, e^{2\gamma} r^{-2} s^{-2} \theta e = 0 \qquad \text{(IV)}$$

$$\mathcal{B}^{(1)} \equiv (A^{(0)}_{,1} - A^{(1)}_{,o} - A^{(1)}_{,o})\, c e^{-2\beta} + (B^{(0)}_{,1} - B^{(1)}_{,o} + \tfrac{1}{2} D^{(0)}E^{(1)} - \tfrac{1}{2} E^{(0)}D^{(1)})\, c e^{-2\beta} +$$

$$+ (A^{(2)}_{,1} - A^{(1)}_{,2})\, U c e^{-2\beta} - (E^{(2)}_{,1} - E^{(1)}_{,2} - \tfrac{1}{2} B^{(2)}D^{(1)} + \tfrac{1}{2} D^{(2)}B^{(1)})\, r^{-2} e^{-2\gamma} d \; +$$

$$+ (D^{(3)}_{,1} - \tfrac{1}{2} B^{(3)}E^{(1)} - \tfrac{1}{2} E^{(3)}B^{(1)})\, e^{2\gamma} r^{-2} s^{-2} \theta \; e = 0 \qquad \text{(V)}$$

$$\mathcal{C}^{(1)} \equiv (D^{(0)}_{,1} - D^{(1)}_{,o} - \tfrac{1}{2} E^{(0)}B^{(1)} - \tfrac{1}{2} B^{(0)}E^{(1)})\, c e^{-2\beta} +$$

$$+ (E^{(1)}_{o} - E^{(0)}_{,1} + \tfrac{1}{2} B^{(0)}D^{(1)} - \tfrac{1}{2} D^{(0)}B^{(1)})\, c e^{-2\beta} - (A^{(2)}_{,1} - A^{(1)}_{,2})\, e^{-2\gamma} r^{-2} d \; -$$

$$- (D^{(1)}_{,2} - D^{(2)}_{,1} + \tfrac{1}{2} E^{(1)}B^{(2)} - \tfrac{1}{2} E^{(2)}B^{(1)})\, c U e^{-2\beta} \; -$$

$$- (E^{(2)}_{,1} - E^{(1)}_{,2} - \tfrac{1}{2} B^{(2)}D^{(1)} + \tfrac{1}{2} D^{(2)}B^{(1)})\, c U e^{-2\beta} \; -$$

$$- (B^{(3)}_{,1} + \tfrac{1}{2} D^{(3)}E^{(1)} + \tfrac{1}{2} E^{(3)}D^{(1)})\, e^{2\gamma} r^{-2} s^{-2} \theta \; e = 0 \qquad \text{(VI)}$$

$$\mathcal{A}^{(2)} \equiv (A^{(0)}_{,2} - A^{(2)}_{,o})\, c e^{-2\beta} + (B^{(0)}_{,2} - B^{(2)}_{,o} + \tfrac{1}{2} E^{(2)}D^{(0)} - \tfrac{1}{2} D^{(2)}E^{(0)})\, c e^{-2\beta} +$$

$$+ (B^{(1)}_{,2} - B^{(2)}_{,1} + \tfrac{1}{2} E^{(2)}D^{(1)} - \tfrac{1}{2} E^{(1)}D^{(2)})\, (b e^{-2\beta} - v r c^{-1} e^{-2\beta}) \; +$$

$$- (E^{(3)}_{,2} - \tfrac{1}{2} D^{(3)}B^{(2)} + \tfrac{1}{2} B^{(3)}D^{(2)})\, e^{2\gamma} r^{-2} s^{-2} \theta \; e = 0 \qquad \text{(VII)}$$

$$\mathcal{B}^{(2)} \equiv (A^{(0)}_{,2} - A^{(2)}_{,o})\, c e^{-2\beta} + (B^{(0)}_{,2} - B^{(2)}_{,o} + \tfrac{1}{2} D^{(0)}E^{(2)} - \tfrac{1}{2} E^{(0)}D^{(2)})\, c e^{-2\beta} +$$

$$+ (B^{(1)}_{,2} - B^{(1)}_{,1} - B^{(2)}_{,1} + \tfrac{1}{2} E^{(2)}D^{(1)} - \tfrac{1}{2} E^{(1)}D^{(2)})\, (a e^{-2\beta} - v r^{-1} c e^{-2}) \; +$$

$$+ (D^{(3)}_{,2} - \tfrac{1}{2} B^{(3)}E^{(2)} - \tfrac{1}{2} E^{(3)}B^{(2)})\, e^{2} r^{-2} s^{-2} \theta \; e = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

$$\mathcal{C}^{(2)} \equiv (D^{(0)}_{,2} - D^{(2)}_{,o} + \tfrac{1}{2} E^{(0)}B^{(2)} - \tfrac{1}{2} B^{(0)}E^{(2)})\, c e^{-2\beta} +$$

$$+ (E^{(2)}_{,o} - E^{(0)}_{,2} + \tfrac{1}{2} B^{(0)}D^{(2)} - \tfrac{1}{2} D^{(0)}B^{(2)})\, c e^{-2\beta} +$$

$$+ (D^{(1)}_{,2} - D^{(2)}_{,1} + \tfrac{1}{2} E^{(1)}B^{(2)} - \tfrac{1}{2} E^{(2)}B^{(1)})\, (a e^{-2\beta} - v r^{-1} c e^{-2\beta}) \; +$$

$$+ (E^{(2)}_{,1} - E^{(1)}_{,2} - \tfrac{1}{2} B^{(2)}D^{(1)} + \tfrac{1}{2} D^{(2)}B^{(1)})\, (b e^{-2\beta} - v e^{-2\beta} r^{-1} c) \; +$$

$$+ (B^{(3)}_{,2} + \tfrac{1}{2} D^{(3)}E^{(2)} + \tfrac{1}{2} E^{(3)}D^{(2)})\, e^{2\gamma} r^{-2} s^{-2} \theta \; e = 0 \qquad \text{(IX)}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(3)} \equiv & - \left(D^{(3)}_{,1} - \frac{1}{2} B^{(3)} E^{(1)} - \frac{1}{2} E^{(3)} B^{(1)}\right) \left(b e^{-2\beta} - v r^{-1} c e^{-2\beta}\right) + \\
& + \left(-E^{(3)}_{,1} + \frac{1}{2} D^{(3)} B^{(1)} - \frac{1}{2} B^{(3)} D^{(1)}\right) \left(a e^{-2\beta} - v r^{-1} e^{-2\beta} c\right) + \\
& + \left[- \left(D^{(3)} + E^{(3)}\right)_{,o} + \frac{1}{2} B^{(0)} \left(D^{(3)} + E^{(3)}\right) + \frac{1}{2} B^{(3)} \left(E^{(0)} - D^{(0)}\right)\right] c e^{-2\beta} - \\
& - D^{(3)}_{,2} - \frac{1}{2} E^{(2)} B^{(3)} - \frac{1}{2} E^{(3)} B^{(2)} + E^{(3)}_{,2} - \frac{1}{2} D^{(3)} B^{(2)} + \frac{1}{2} B^{(3)} D^{(2)} \quad c U e^{-2\beta} + \\
& - \frac{1}{2} \left(E^{(2)} D^{(3)} + E^{(3)} D^{(2)}\right) e^{-2\gamma} r^{-2} d - B^{(3)}_{,2} r^{-2} e^{-2\gamma} d = 0
\end{aligned}
$$

A P Ê N D I C E I I

CÁLCULO DA EXPRESSÃO DAS CONDIÇÕES DE TRAUTMAN:

Substituindo (5-4) em (5-1) e sabendo que

$$-2\, g_{\mu\nu} = tr\,(\sigma_\mu\ \tau_\nu)$$

vem:

$$-2(\eta_{\mu\nu}+\lambda_{\mu\nu}) = tr\left[(\dot\sigma_\mu+\Gamma_\mu)\ (\dot\tau_\nu+\tilde\Gamma_\nu)\right] = tr\left[\dot\sigma_\mu\dot\tau_\nu+\dot\sigma_\mu\tilde\Gamma_\nu+\Gamma_\mu\dot\tau_\nu+0\ (\Gamma^2)\right]$$

de onde se tira

$$-2\,\lambda_{\mu\nu} = tr(\dot\sigma_\mu\tilde\Gamma_\nu + \Gamma_\mu\dot\tau_\nu) \tag{1-A}$$

$$\tilde\Gamma_\nu = \varepsilon\ \Gamma_\nu^*\ \varepsilon$$

verifica-se facilmente que

$$tr(\dot\sigma_\mu\tilde\Gamma_\nu) = tr(\Gamma_\nu\dot\tau_\mu) \quad ;$$

portanto, (1-A) se torna:

$$-2\,\lambda_{\mu\nu} = tr(\Gamma_\nu\dot\tau_\mu + \Gamma_\mu\dot\tau_\nu) \quad . \tag{2-A}$$

Define-se por conveniência, como indicada no 1º capítulo,

$$\tilde\lambda_{\mu\nu} \quad \lambda_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ \eta_{\mu\nu}\ \lambda \quad . \tag{3-A}$$

De (2-A),

$$\lambda = -\ tr(\Gamma_\nu\dot\tau^\nu) \ . \tag{4.A}$$

Substituindo (2-A) e (4-A) em (3-A), obtém-se

$$-2\,\tilde\lambda_{\mu\nu} = tr(\Gamma_\nu\dot\tau_\mu + \Gamma_\mu\dot\tau_\nu) - \eta_{\mu\nu}\ tr(\Gamma_\alpha\dot\tau^\alpha) \quad . \tag{5-A}$$

Agora, definindo

$$\tilde\Gamma_\mu = \Gamma_\mu + \frac{1}{4}\,\dot\sigma_\mu\ tr(\dot\tau_\alpha\Gamma^\alpha) \tag{6-A}$$

e substituindo em (5-A),

$$-2\,\tilde{\lambda}_{\mu\nu} = \mathrm{tr}(\tilde{\Gamma}_{\mu}\dot{\tau}_{\nu} + \tilde{\Gamma}_{\nu}\dot{\tau}_{\mu})$$

No 1º capítulo viu-se que

$$\tilde{\lambda}_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0\ (\bar{r}^{2})$$

donde

$$\mathrm{tr}\ (\tilde{\Gamma}_{\mu}{}^{,\nu}\ \dot{\tau}_{\nu} + \tilde{\Gamma}_{\nu}{}^{,\nu}\ \dot{\tau}_{\mu}) = 0\ (\bar{r}^{2})$$

ou

$$\mathrm{tr}\left[(\tilde{\Gamma}_{\mu}\dot{\tau}_{\nu} + \tilde{\Gamma}_{\nu}\dot{\tau}_{\mu})\ k^{\nu}\right] = 0\ (\bar{r}^{2})$$

APÊNDICE III

EXPRESSÃO ASSINTOTICA DA CURVATURA SPINORIAL

De (4.2) $$P_{\mu\alpha} = \Omega_{\mu\alpha} - \Omega_{\alpha,\mu} + \left[\Omega_{\mu},\ \Omega_{\alpha}\right] \qquad e$$

$$\Omega_{\mu} = -\frac{1}{4}\left[\sigma^{\lambda}_{\ \mu}\ \tau_{\lambda} + \left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\} \sigma^{\nu}\ \tau_{\lambda}\right]$$

Derivando

$$\Omega_{\mu,\alpha} = -\frac{1}{4}\left[\sigma^{\lambda}_{\ ,\mu\alpha}\tau_{\lambda} + \sigma^{\lambda}_{\ ,\mu}\tau_{\lambda,\alpha} + \left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\}_{,\alpha} \sigma^{\nu}\tau_{\lambda} + \left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\} \left(\sigma^{\nu}_{\ ,\alpha}\tau_{\lambda} + \sigma^{\nu}\tau_{\lambda,\alpha}\right)\right]$$

$$\Omega_{\alpha,\mu} = -\frac{1}{4}\left[\sigma^{\lambda}_{\ ,\alpha\mu}\tau_{\lambda} + \alpha^{\lambda}_{\ ,\alpha}\tau_{\lambda,\mu} + \left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\}_{,\mu} \alpha^{\nu}\tau_{\lambda} + \left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\}\left(\alpha^{\nu}_{\ ,\mu}\tau_{\lambda} + \sigma^{\nu}\tau_{\lambda\ \mu}\right)\right]$$

Então,

$$\Omega_{\mu}\Omega_{\alpha} = \frac{1}{16}\left[\sigma^{\lambda}_{\ ,\mu}\tau_{\lambda}\ \sigma^{\beta}_{\ ,\alpha}\tau_{\beta} + \left\{ {\delta \atop \alpha\ \varepsilon} \right\} \sigma^{\lambda}_{\ ,\mu}\tau_{\lambda}\ \sigma^{\varepsilon}\tau_{\delta} + \left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\}\sigma^{\nu}\tau_{\lambda}\ \sigma^{\beta}_{\ ,\alpha}\tau_{\beta} + \left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\}\left\{ {\delta \atop \alpha\ \varepsilon} \right\}\sigma^{\nu}\tau_{\lambda}\sigma^{\varepsilon}\tau_{\delta}\right]$$

$$e \quad \Omega_{\alpha}\Omega_{\mu} = \frac{1}{16}\left[\sigma^{\lambda}_{\ ,\alpha}\tau_{\lambda}\alpha^{\beta}_{\ ,\mu}\tau_{\beta} + \left\{ {\delta \atop \mu\ \varepsilon} \right\} \sigma^{\lambda}_{\ ,\alpha}\tau_{\lambda}\sigma^{\varepsilon}\tau_{\delta} + \left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\} \sigma^{\nu}\tau_{\lambda}\sigma^{\beta}_{\ ,\mu}\tau_{\beta} + \left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\}\left\{ {\delta \atop \mu\ \varepsilon} \right\}\sigma^{\nu}\tau_{\lambda}\sigma^{\varepsilon}\tau_{\delta}\right]$$

substituindo em (4-2) :

$$P_{\mu\alpha} = -\frac{1}{4}\Bigg[\sigma^{\lambda}_{\ ,\mu\alpha}\tau_{\lambda} - \sigma^{\lambda}_{\ ,\alpha\mu}\tau_{\lambda} + \sigma^{\lambda}_{\ ,\mu}\tau_{\lambda\ \alpha} - \sigma^{\lambda}_{\ ,\alpha}\tau_{\lambda,\mu} + \left(\left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\}_{,\alpha} - \left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\}_{,\mu}\right) \sigma^{\nu}\tau_{\lambda} \ +$$

$$+\left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\} \left(\sigma^{\nu}_{\ ,\alpha}\tau_{\lambda} + \sigma^{\nu}\tau_{\lambda,\alpha}\right) - \left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\}\left(\sigma^{\nu}_{\ ,\mu}\tau_{\lambda} + \sigma^{\nu}\tau_{\lambda,\mu}\right)\Bigg] \ -$$

$$-\frac{1}{16}\Bigg[\left(\sigma^{\lambda}_{\ ,\alpha}\tau_{\lambda}\sigma^{\beta}_{\ ,\mu}\tau_{\beta} - \sigma^{\lambda}_{\ ,\mu}\tau_{\lambda}\sigma^{\beta}_{\ ,\alpha}\tau_{\beta}\right) + \left(\left\{ {\delta \atop \mu\ \varepsilon} \right\} \sigma^{\lambda}_{\ ,\alpha} - \left\{ {\delta \atop \alpha\ \varepsilon} \right\} \sigma^{\lambda}_{\ ,\mu}\right) \sigma^{\varepsilon}\tau_{\delta}$$

$$+\left(\left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\} \sigma^{\nu}\tau_{\lambda}\sigma^{\beta}_{\ ,\mu} - \left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\} \sigma^{\nu}\tau_{\lambda}\sigma^{\beta}_{\ ,\alpha}\right) \tau_{\beta} + \left(\left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\} \left\{ {\delta \atop \mu\ \varepsilon} \right\} - \left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\}\left\{ {\delta \atop \alpha\ \varepsilon} \right\}\right)\sigma^{\nu}\tau_{\lambda}\sigma^{\varepsilon}\tau_{\delta}\Bigg].$$

Assintòticamente o único têrmo diferente de zero na aproximação (5.4) é:

$$- \frac{1}{4} \left(\left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\}_{,\alpha} - \left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\}_{,\mu} \right) \sigma^{\nu} \tau_{\lambda}$$

então

$$P_{\mu\alpha} \simeq - \frac{1}{4} \left(\left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\}_{,\alpha} - \left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\}_{,\mu} \right) \sigma^{\nu} \tau_{\lambda}$$

$$= - \frac{1}{4} \left[\left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\}_{,\alpha} - \left\{ {\lambda \atop \alpha\ \nu} \right\}_{,\mu} \right] \eta^{\nu\varepsilon} \dot{\sigma}_{\varepsilon} \dot{\tau}_{\lambda} \ .$$

O símbolo de Christoffel tem a forma assintótica.

$$\left\{ {\lambda \atop \mu\ \nu} \right\} \simeq \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \{\mu\nu,\rho\} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left(\lambda\mu\rho,\nu + \lambda\rho\nu,\mu - \lambda\mu\nu,\rho\right)$$

Logo, $\quad P_{\mu\alpha} = - \frac{1}{8} \dot{\sigma}^{\nu} \dot{\tau}^{\beta} \left(\lambda\mu\beta,\nu\alpha - \lambda\mu\nu,\alpha\beta - \lambda\alpha\beta,\nu\mu + \lambda\alpha\nu,\beta\mu\right) \ ;$ (1-A)

recolocando os índices spinoriais:

$$P_{\mu\alpha CD} \simeq - \frac{1}{8} (\dot{\sigma}^{\nu} \dot{\tau}^{\beta})_{CD} (\lambda\mu\beta,\nu\alpha - \lambda\mu\nu,\alpha\beta - \lambda\alpha\beta,\nu\mu + \lambda\alpha\nu,\beta\mu) \qquad (2\text{-A})$$

A (5-8), assintóticamente, se escreve:

$$X_{ABCD} \simeq - 2 \dot{\sigma}^{\mu F}{}_{A} \dot{\sigma}^{\alpha}{}_{B\dot{F}} P_{\mu\alpha CD} \ , \quad P_{\mu\alpha CD} \ \text{assintótico.}$$

substituindo $P_{\mu\alpha}$ dado por (2-A)

$$X_{ABCD} \simeq \frac{1}{4} (\dot{\sigma}^{\nu} \dot{\tau}^{\beta})_{CD} \dot{\sigma}^{\mu\dot{F}}{}_{A} \dot{\sigma}^{\alpha}{}_{B\dot{F}} (\lambda\mu\beta,\nu\alpha - \lambda\mu\nu,\alpha\beta - \lambda\alpha\beta,\nu\mu + \lambda\alpha\nu,\beta\mu) .$$

Com o valor da $\lambda_{\mu\nu}$ dado por (A-II, 1),

$$X_{ABCD} \simeq \frac{1}{4} (\dot{\sigma}_{\varepsilon} \dot{\tau}_{\lambda})_{CD} \dot{\sigma}^{\alpha}{}_{B\dot{F}} \dot{\sigma}^{\mu\dot{F}}{}_{A} \ \mathrm{tr} \Big[(\Gamma_{\beta} \dot{\tau}_{\mu} + \dot{\tau}_{\beta} \Gamma_{\mu})_{,\alpha\nu} -$$

$$- (\Gamma_{\nu} \dot{\tau}_{\mu} + \dot{\tau}_{\nu} \Gamma_{\mu})_{,\alpha\beta} - (\Gamma_{\beta} \dot{\tau}_{\alpha} + \dot{\tau}_{\beta} \Gamma_{\alpha})_{,\mu\nu} + (\Gamma_{\nu} \dot{\tau}_{\alpha} + \dot{\tau}_{\nu} \Gamma_{\alpha})_{,\beta\mu} \Big] \qquad (3\text{-A})$$

Pode-se escrever (3-A), usando o tensor $\delta^{\mu\nu}_{\rho\sigma}$, definido por

$$\delta^{\mu\nu}_{\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \mu \neq \nu \ , \ \rho = \mu \ , \ \sigma = \nu \\ -1 & \mu \neq \nu \ , \ \rho = \nu \ , \ \sigma = \mu \\ 0 \ \text{nos outros casos;} \end{cases}$$

vem:

$$X_{ABCD} \simeq \frac{1}{4} (\dot{\sigma}^{\rho} \dot{\tau}^{\sigma})_{CD} (\dot{\tau}^{\Omega} \dot{\sigma}^{\lambda})_{BA} \delta^{\nu\beta}_{\rho\sigma} \delta^{\alpha\mu}_{\lambda\Omega} \lambda\nu\beta,\nu\alpha$$

$$= - \frac{1}{8} (\dot{\sigma}^{\rho} \dot{\tau}^{\sigma})_{CD} (\dot{\tau}^{\Omega} \dot{\sigma}^{\lambda})_{BA} \delta^{\nu\beta}_{\rho\sigma} \delta^{\mu\alpha}_{\lambda\Omega} \ \mathrm{tr}(\Gamma_{\beta} \dot{\tau}_{\mu} + \dot{\tau}_{\beta} \Gamma_{\mu})_{,\nu\alpha}$$

BIBLIOGRAFIA

1. T.L. Civita: Ann. Math., 97, 921 (1962)
2. S.N. Gupta: Phys. Rev., 96, 1683 (1954)
3. D. Hilbert: Grundlagen der Physik, I, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 395 (1915)
4. A. Trautman: Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astron. Phys., 6, 403 (1958)
5. H. Bondi, M. Van Der Burg and A. Metzner: Proc. Royal Soc., A 269, 21, (1962)
6. H. Weyl: Zeits. Phys., 56, 330 (1929)
7. L. Infeld and B.L. Van der Waerden: Sitzbert, Preuss. Akad, Wiss. Physik., math. Kl.; 9, 380 (1933)
8. W. L. Bade and H. Jehle: Rev. Mod. Phys., 25, 714 (1953)
9. P.G. Bergmann: Phys. Rev., 107, 624 (1957)
10. L. Witten: Phys. Rev., 113, 357 (1959)
11. C.G. Oliveira, C. Marcio do Amaral: Nuovo Cimento, Serie X, 47, 9 (1967)
12. R. Penrose: Ann. of Phys., 10, 171 (1960)
13. M. Sachs: Nuovo Cimento, XLVII A, nº 4, 759 (1967)
14. I. Robinson and A. Trautman: Phys. Rev., 4, 431 (1960)
15. J. Weber - Gravitational waves - Em "Gravitation and Relativity" H. Chiu, W. Hoffmann - Eds. 1964 - pg. 90

    - Phys. Rev. Letters 17, 1228 (1966)
      22, 1320 (1969)
      25, 180 (1970)

    - Preprint de comunicação à 6º Conferência Internacional de Relatividade e Gravitação - Advances in gravitational radiation detection - Julho de 1971.