

Arcos Gravitacionais: Relações Entre Parâmetros Locais e não Locais das Imagens Através de Simulações

- Projeto de Conclusão do Curso de Astronomia -

Pedro da Cunha Ferreira^{1,2} (Bolsista PIBIC)

Martín Makler²(Orientador)

1- Observatório do Valongo (UFRJ), 2- CBPF

pedro@cbpf.br

À minha família, porque carinho e amor são fundamentais.

Agradecimentos

Agradeço ao Martín Makler, por toda paciência e dedicação.

À minha Fernandinha, pelo amor e compreensão em momentos em que mais precisei.

À Fernanda, que por diversas vezes ofereceu sugestões importantes para os meus programas.

À turma de Astronomia de 2003, que partilhou comigo intensos anos de aprendizado, na qual fiz grandes amigos.

Ao Valongo, por ser um campus sem comparação, apesar de seus problemas.

A todos os professores que participaram de minha formação, em especial à professora Sueli, que me mostrou, talvez sem o saber, o que é ter vocação para ensinar.

Ao Bruno Rossetto, que por muitas vezes sanou dúvidas sobre o Python.

Aos alunos do Martín: Lucas, Marcelo, Maria, Clécio e Samantha por participarem de nossos encontros semanais em que começamos a aprender a teoria de Lentes.

Ao Juan Estrada, que iniciou este estudo de arcos com o `gravlens` junto com meu orientador.

Aos professores Hélio e Ioav que, tendo participado da banca, contribuíram em vários aspectos para tornar este trabalho mais didático.

À minha família e amigos, que entenderam a minha ausência em muitos momentos, enquanto eu me dedicava a este trabalho.

Agradeço à Deus por trazer para minha vida pessoas tão admiráveis.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

O estudo de arcos gravitacionais vem recebendo crescente atenção nos últimos anos, tanto pelo aumento constante no número de objetos detectados, quanto pelos progressos na modelagem da formação desses sistemas. Um caminho para compreender a formação de arcos e melhorar sua modelagem é investigar as relações entre parâmetros locais e não locais das imagens produzidas pelo lenteamento gravitacional. Como parâmetros locais compreendemos aqueles que se referem a um único ponto, como o centro de uma imagem, enquanto os parâmetros não locais estão associados a aspectos macroscópicos da imagem, como comprimento e largura. Neste trabalho investigamos algumas dessas relações como, por exemplo, a conexão entre as magnificações tangencial e radial e a razão comprimento-largura de imagens. Com isto, visamos determinar a validade de uma aproximação muitas vezes utilizadas em cálculos de estatística de arcos, que diz que a razão axial das imagens é igual à razão das magnificações. Também procuramos por relações entre a curvatura e a razão axial das imagens, considerando que a distância entre o centro geométrico e o centro real de uma imagem é uma medida de sua curvatura. Para realizar este trabalho, implementamos programas em Python que controlam todo o processo, desde a geração das imagens — com o uso do aplicativo **gravlens** — até a identificação de imagens individuais com a medida dos parâmetros acima mencionados e a análise dos resultados. Geramos um grande número de fontes para os modelos de lente da esfera isotérmica singular e de Navarro, Frenk e White elípticos e obtemos as posições das imagens e as magnificações calculadas nos seus centros. Percebemos que a razão axial das imagens é, de fato, tanto melhor aproximada pela razão das magnificações quanto menor for a razão axial. Também verificamos uma forte dependência da elipticidade da lente com respeito à dispersão entre as duas grandezas.

Abstract

The study of gravitational arcs has received increasing attention in recent years, both due to the growing number of known clusters that act as gravitational lenses, as well as the progress regarding their modeling. A way to gain a better understanding of arc formation and improve their modeling is to investigate the connection between local and nonlocal parameters of images produced by gravitational lensing. Local parameters are those measured in a single point, such as the center of an image, while nonlocal parameters are those that refer to macroscopic properties of an image, such as length and width. In this work we investigate some of these relations, such as the connection between the ratio of tangential-to-radial magnification with the length-to-width ratio of images. This allows one to determine the validity of an approximation commonly used in arc statistics calculations, which states that image axial ratios are equal to the magnification ratios. We also look for relations between curvature and axial ratio, considering the distance between the geometric center and the real center as a curvature measure. For this sake, we implemented programs written in Python that control all the tasks involved in the process, from the generation of images — through the `gravlens` software — to the identification of individual images, measuring the above mentioned parameters and performing the data analysis. We generated a large number of sources for the singular isothermal sphere and elliptical Navarro, Frenk and White models, and obtained the image positions and the magnifications computed at their centers. We found that the smaller the axial ratio, the better it relates to the magnification ratio. We also noted a strong dependency of the dispersion among these two quantities with the ellipticity of the lens.

Conteúdo

1	Introdução	7
2	Introdução à Teoria de Lentes Gravitacionais	10
2.1	Introdução Histórica	10
2.2	A Aproximação de Lente Fina	11
2.3	Lente Pontual	11
2.4	Magnificação para uma Fonte Infinitesimal	16
2.5	Densidade Projetada e Densidade Superficial Crítica	18
2.6	Lente com Simetria Axial	20
2.7	O Potencial da Lente	22
2.8	Mapeamento	23
2.8.1	Mudança de Coordenadas e o Jacobiano	24
2.8.2	Matriz de Transformação do Plano das Imagens para o Plano das Fontes	24
2.8.3	Magnificação	27
2.9	Mapeamento do Plano das Fontes para o Plano das Imagens	27
2.10	O Modelo de Navarro, Frenk e White (NFW)	29
3	Gerando, Separando e Medindo Imagens	32
3.1	Gerando as Fontes e Imagens	32
3.2	Separando as Imagens	34
3.3	Fazendo Medidas nas Imagens	38
4	Resultados	45
4.1	Características Gerais	45
4.2	Curvatura e Razão Axial	48
4.3	Propriedades Locais e não Locais	48
5	Conclusões e Perspectivas	58
A	O Aplicativo Gravlens	60

1 Introdução

Hoje *Lentes Gravitacionais* é o termo empregado para qualquer situação em que haja deflexão da luz por um campo gravitacional e sua fenomenologia pode ser dividida em duas áreas: efeito de lente forte e efeito de lente fraco. O fenômeno é dito forte se uma galáxia (ou outra fonte qualquer) dá origem a imagens múltiplas, se sua imagem é altamente distorcida, formando até mesmo anéis ou arcos muito delgados, ou se é muito magnificada. O efeito de lente fraco é bem mais discreto, apenas distorcendo suavemente a imagem da fonte e mudando sua posição muito pouco. Como não há como saber as características da fonte na ausência do efeito de lente gravitacional, só existe a forma estatística de detectar o efeito de lente fraco. Ambos os efeitos permitem fazer medidas ou restringir modelos de distribuição de massa para o corpo que gera o campo gravitacional (de agora em diante, chamado de lente).

A seguir relatamos algumas aplicações e resultados do estudo de lentes gravitacionais, que mostram apenas uma pequena parte do amplo campo atual de pesquisa nesta área, que inclui desde aplicações cosmológicas até a descoberta de planetas em nossa galáxia.

A medida de curvatura de arcos gravitacionais indica que aglomerados de galáxias devem possuir uma quantidade apreciável de matéria escura e esta deve se distribuir de forma muito mais suave do que a matéria visível (de modo que os arcos se formam em torno do aglomerado como um todo e não das galáxias que o compõe), mas, ao mesmo tempo, precisa ser mais concentrada no centro [1, 2], do contrário os arcos não seriam observados tão estreitos, a ponto de raramente serem resolvidos. Em muitas imagens não se vêem contra-arcos, que são arcos que ficam na direção oposta ao primeiro, mostrando que a distribuição de massa do aglomerado deverá ser assimétrica [2]. Ademais, aglomerados que atuam como lentes podem ser um discriminante da densidade cósmica [2]. Além do estudo de aglomerados individuais através de arcos, há pesquisadores envolvidos em investigar a abundância de arcos em diferentes cenários cosmológicos, visando determinar a dependência dessa abundância com o perfil de densidade e elipticidade da lente (veja, por exemplo, a ref. [3]). Outra aplicação é a determinação da constante de Hubble [4], para o caso de imagens múltiplas de um quasar que seja intrinsecamente variável.

A estatística de arcos gravitacionais permite obter informações relevantes sobre a estrutura de aglomerados de galáxias. Além disso, como o fenômeno de lente gravitacional depende das distâncias, essa estatística permite obter informações cosmológicas. Uma grandeza fundamental no estudo de arcos é a seção de choque, que é a área no plano

das fontes que é capaz de gerar imagens com uma dada razão comprimento-largura (por exemplo, 10).

O estudo estatístico de lentes gravitacionais passa por um período de grande avanço, em que muitos aglomerados que atuam como lentes estão sendo detectados. Além disso, a modelagem de lentes gravitacionais está ficando cada vez mais detalhada para acompanhar os avanços observacionais (ver, por exemplo, a ref. [3]). Para estudar a estatística de arcos, simulações numéricas detalhadas têm sido realizadas. No entanto, devido a seu custo computacional, elas não permitem sondar um grande número de aglomerados simulados, nem de modelos cosmológicos. Para contornar esses problemas, abordagens semi-analíticas também têm sido utilizadas. Nesse caso, são feitas algumas aproximações e hipóteses sobre o lenteamento gravitacional. Por exemplo, para não calcular a imagem de cada píxel de uma fonte extensa, é comum utilizar a hipótese de que a razão comprimento-largura das imagens é dada pelo valor local (em um ponto) da razão entre as magnificações tangencial e radial de uma imagem.

Este contexto motiva estudar a validade da aproximação de que a razão axial das imagens pode ser substituída pela razão entre as magnificações tangencial e radial. Também procuramos por alguma relação entre a curvatura das imagens e a razão axial, pois é observado que arcos muito longos normalmente são mais curvados do que arcos mais curtos. Além disso, é interessante investigar em que medida as propriedades da lente afetam essas relações entre as propriedades locais e não locais das imagens. De modo geral, o foco deste trabalho consiste em comparar as propriedades locais com as não locais da imagem. São parâmetros não locais de nosso interesse o comprimento, largura, e curvatura das imagens, enquanto os parâmetros locais são as magnificações radial e tangencial calculadas no centro de cada imagem.

Para realizar esses estudos iremos gerar um grande número de galáxias (fontes elípticas), distribuídas num plano, cujas imagens têm sua forma e tamanho distorcidos pela ação gravitacional de outros corpos (as lentes) e fazer uma análise nos objetos resultantes dessa distorção (as imagens). Para executar essa tarefa, utilizamos o aplicativo `gravlens`, um programa desenvolvido por C. Keeton, com a finalidade de estudar lentes gravitacionais (veja as refs. [5, 6, 7] e apêndice A). Com o `gravlens` é possível gerar uma fonte, escolher um modelo de massa para a lente (dentre os muitos pré-definidos) e, então, resolver a equação da lente, obtendo informações sobre as imagens (posição, magnificação, etc). Em todo este trabalho utilizamos programas (“scripts”) que escrevemos em `Python`

[8, 9, 10], os quais controlam todo o processo, desde a geração dos arquivos de entrada, até a execução do `gravlens` com os parâmetros desejados e a análise dos resultados. Todos os gráficos são feitos com o `matplotlib` [11, 12], que permite perfeita integração com o `Python`.

2 Introdução à Teoria de Lentes Gravitacionais

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma introdução à teoria de lentes gravitacionais que será utilizada neste trabalho e proporcionar uma introdução àquele que deseja começar a estudar o assunto.

2.1 Introdução Histórica

O fenômeno do desvio da luz causado por um campo gravitacional foi previsto pela Relatividade Geral e observado em 1919, oferecendo uma importante confirmação da teoria de Einstein. Porém, a possibilidade de a luz sofrer deflexão por um campo gravitacional foi estudada muito anteriormente por outros pesquisadores, como Henry Cavendish (em torno de 1784) e Johann von Soldner (em 1801).

Em 1783, John Michell enviou a seu amigo Henry Cavendish um trabalho em que calculava a massa de estrelas através da redução da velocidade da luz emitida por elas, devido à gravitação newtoniana, ao percorrer o trajeto da estrela até a Terra. Esse trabalho e a correspondência posterior entre os dois levaram Cavendish a considerar o desvio da trajetória da luz, possivelmente também para medir a massa de estrelas. Em torno de 1784 ele obteve o valor da deflexão da luz, mas nunca publicou seu resultado.

Em 1796, Laplace, independentemente de Michell, realizou as mesmas estimativas de massa de estrelas e foi este trabalho que motivou Soldner a calcular o desvio da luz [13].

Em 1911, Einstein obteve o mesmo resultado que Soldner e Michell para o ângulo de deflexão $\tilde{\alpha}$ utilizando o princípio de equivalência e supondo uma métrica Euclideana:

$$\tilde{\alpha} = \frac{2GM}{c^2} \frac{1}{\xi}, \quad (1)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, ξ o parâmetro de impacto do feixe de luz, M a massa do corpo e c a velocidade da luz. Einstein também propôs que este ângulo poderia ser medido durante um eclipse solar e a primeira expedição com esse propósito foi realizada no Brasil, na cidade de Cristina, em Minas Gerais, pelo astrônomo Carlos Perrine do observatório de Cordoba (Argentina). No entanto, no dia do eclipse choveu [14]. Uma outra expedição foi organizada, desta vez à Rússia (onde aconteceria outro eclipse total), para tentar comprovar o desvio da luz. Porém, antes que a observação pudesse ser realizada, a Primeira Guerra Mundial eclodiu e os membros da expedição liderada pelo astrônomo alemão Erwin Freundlich foram presos, perdendo o eclipse. Este

fato favoreceu Einstein, que alguns anos mais tarde, com a teoria da relatividade geral completa, obteve o valor correto para a deflexão da luz, o dobro da obtida anteriormente:

$$\tilde{\alpha} = \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{\xi}. \quad (2)$$

A equação acima é obtida utilizando a aproximação de campo fraco: o potencial Newtoniano da lente deverá ser muito menor do que o quadrado da velocidade da luz ($\phi \ll c^2$). Além disso, as velocidades relativas da lente, fonte e observador devem ser muito menores do que a velocidade da luz. Para o caso de um feixe de luz passando rente ao Sol, a equação (2) fornece um desvio de 1,74". Este valor é consistente com o obtido em 1919 por duas expedições para observar eclipses solares, uma em Sobral (Ceará) e outra na Ilha de Príncipe. Para uma dedução da equação (2), baseada no princípio de Fermat, ver as referências [15] ou [1].

2.2 A Aproximação de Lente Fina

Na maioria das situações que envolvem lentes gravitacionais (excetuando-se a deflexão da luz pela estrutura em grande escala do universo), as dimensões da lente são muito menores do que as distâncias envolvidas (observador-lente e lente-fonte), assim, é possível utilizar a aproximação de lente fina. Esta diz que o efeito da lente é tal que o raio de luz sofre alteração em sua trajetória em um único ponto, no plano da lente (plano que passa pelo centro da lente e é perpendicular à linha de visada).

A figura 1 mostra algumas das grandezas utilizadas neste trabalho, além do esquema básico de um sistema com lente pontual e fonte infinitesimal, a qual pode ser considerada como um elemento de um objeto extenso. Neste estudo, as distâncias utilizadas serão sempre a distância de diâmetro angular, definida por $d = \frac{D}{\phi}$, onde D é diâmetro do corpo em questão e ϕ o ângulo por ele subtendido ($\phi \ll 1$).

2.3 Lente Pontual

Nesta seção estudamos o caso idealizado em que a lente e a fonte são massas pontuais. Este caso tem como objetivo familiarizar o leitor com a teoria em uma situação cujo tratamento matemático é bastante simples.

Da figura 1 podemos perceber que

$$\theta D_S = \beta D_S + \tilde{\alpha} D_{LS}, \quad (3)$$

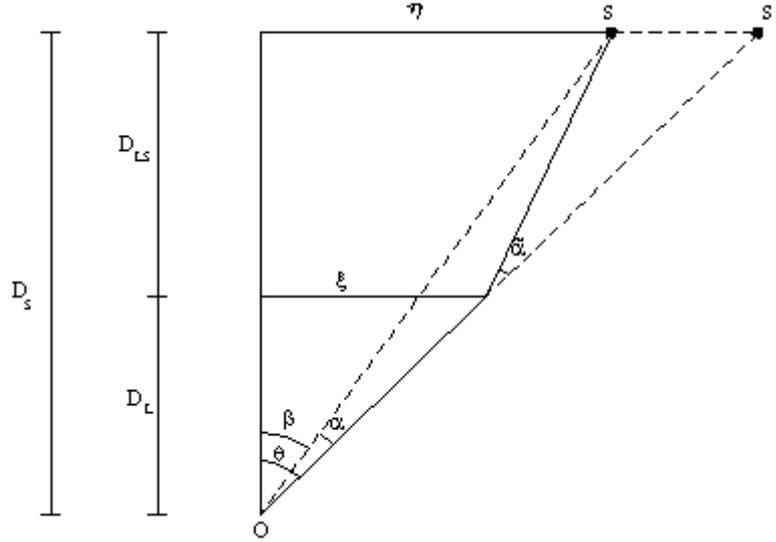


Figura 1: Esquema de uma fonte pontual S , à distância D_S do observador, que é vista em outra posição, S_1 , devido à deflexão da luz pela lente. A lente está à distância D_L do observador. Esta é apenas uma ilustração - os ângulos estão exageradamente acentuados.

que pode ser reescrita como

$$(\theta - \beta) = \frac{D_{LS}}{D_S} \tilde{\alpha}, \quad (4)$$

lembrando que $\beta, \theta, \tilde{\alpha} \ll 1$. Assim, pela figura 1, podemos concluir que

$$\alpha(\theta) = \frac{D_{LS}}{D_S} \tilde{\alpha}. \quad (5)$$

A equação (5) relaciona o ângulo de deflexão $\tilde{\alpha}$ (dado pela equação 2) com o ângulo α . Agora podemos escrever a chamada Equação da Lente, que na sua forma vetorial é dada por

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}, \quad (6)$$

e seu significado é óbvio: a posição da fonte é dada pela posição da imagem subtraída do ângulo de deflexão (conforme visto pelo observador). A figura 2 ilustra as grandezas consideradas em um esquema de lentes tridimensional. Combinando (2), (5) e (6), obtemos uma equação de 2º grau em θ (lembrando que $\xi = \theta D_L$):

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_S D_L} \frac{4GM}{c^2} \frac{1}{\theta}. \quad (7)$$

A consequência da posição da imagem ser descrita por uma equação do 2º grau é muito interessante: significa que existem duas posições da imagem que satisfazem à equação, ou

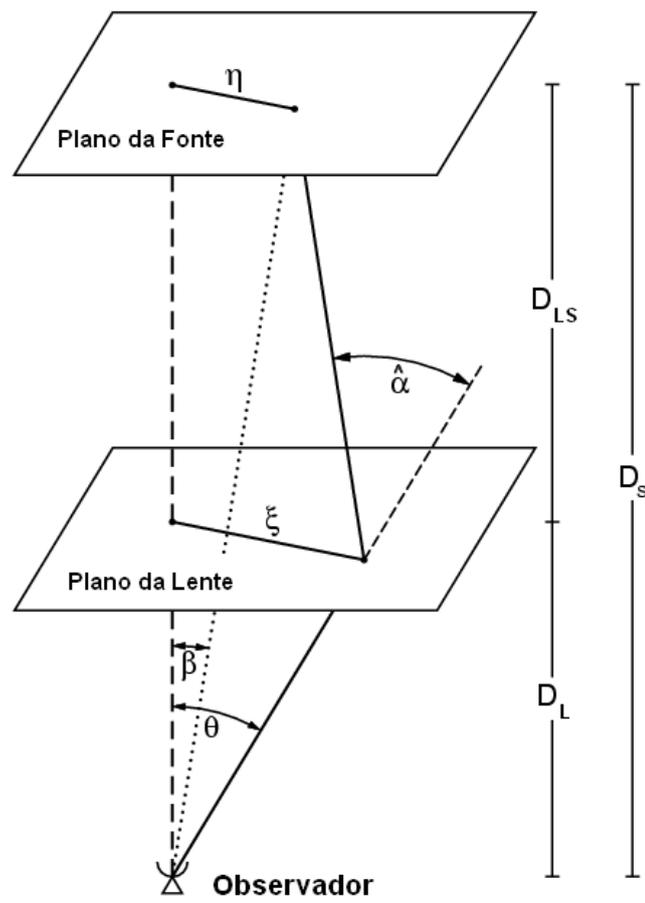


Figura 2: Esquema de lentes tridimensional (retirada de [24]).

seja, uma única fonte gera duas imagens. Suas posições são dadas pelas soluções:

$$\theta_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{D_{LS}}{D_S D_L} \frac{4GM}{c^2}}. \quad (8)$$

Considerando o caso em que $\beta = 0$, ou seja, em que há um perfeito alinhamento entre observador, lente e fonte, a equação anterior se reduz a

$$\theta = \pm \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_S D_L} \frac{4GM}{c^2}}. \quad (9)$$

Porém, devido à simetria circular que o problema adquire, a luz será defletida por este valor em todas as direções, formando um anel, conhecido como anel de Einstein, cujo raio subtende um ângulo que mede

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_S D_L} \frac{4GM}{c^2}}. \quad (10)$$

Até o presente já foram observados vários anéis de Einstein [16]. No entanto, se a fonte está perto o suficiente da linha que une observador e lente, mas não sobre ela, poderá se formar um anel incompleto (arco), ou até vários arcos (veja a figura 5). Há centenas de arcos detectados no presente e inacreditáveis imagens do Hubble em que se pode identificar dezenas de arcos. Uma dessas imagens pode ser vista na figura 3. A equação (10) evidencia uma importante aplicação do estudo de lentes gravitacionais: se um anel de Einstein for observado, seu raio pode ser medido e, se forem conhecidas as distâncias (através de medidas do desvio para o vermelho, supondo um modelo cosmológico) entre observador-lente, observador-fonte e lente-fonte, a massa da lente pode ser obtida. Este exemplo apenas ilustra a possibilidade de se obter informações sobre a distribuição de massa da lente¹.

Para o caso da lente com simetria circular, o ponto no plano das fontes que é atravessado pela reta que une observador e lente é chamado de cáustica, enquanto a imagem gerada por uma fonte que esteja exatamente sobre esse ponto (neste caso, o anel de Einstein) é chamada de curva crítica. Na seção 2.9 veremos a generalização desses conceitos e sua importância no contexto dessa monografia.

É possível verificar se há alguma relação entre as posições das imagens e a curva crítica da seguinte forma: reescreve-se (7), utilizando o valor de θ_E , para encontrar

$$\theta_{1,2}^2 - \theta_E^2 = \beta\theta_{1,2}. \quad (11)$$

¹Na verdade este exemplo não servirá apenas para uma lente pontual, mas para qualquer distribuição com simetria circular, como pode ser deduzido a partir da seção 2.6.

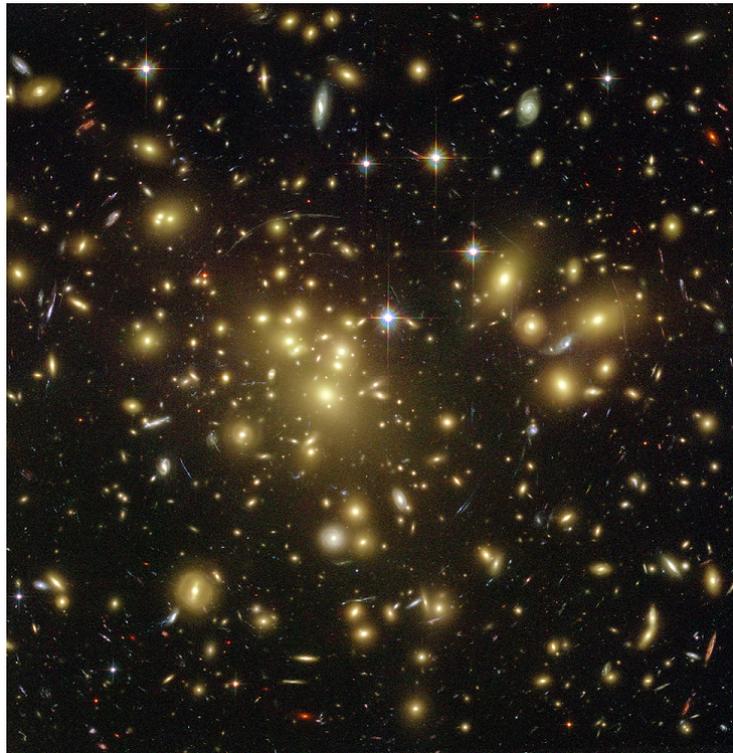


Figura 3: Abell 1689: grande número de arcos está presente nesta imagem espetacular do Hubble Space Telescope.

E as duas equações resultantes comparam o valor de cada posição com θ_E . Vamos dividir a análise em dois casos: **a** e **b**, onde o ângulo β é considerado positivo se a fonte estiver à direita da direção do centro da lente e negativo se estiver à esquerda.

a)

$$\theta_1 > \theta_E \Rightarrow \beta > 0$$

$$\Rightarrow \theta_2^2 - \theta_E^2 < 0$$

$$\Rightarrow |\theta_2| < |\theta_E|$$

b)

$$\theta_1 < \theta_E \Rightarrow \beta < 0$$

$$\Rightarrow \theta_2^2 - \theta_E^2 > 0$$

$$\Rightarrow |\theta_2| > |\theta_E|$$

Logo, se uma imagem está dentro da curva crítica (raio de Einstein), a outra estará fora.

2.4 Magnificação para uma Fonte Infinitesimal

Nesta seção vamos tratar da magnificação (μ) para uma lente pontual. Apesar de não termos discutido magnificação ainda (que somente será devidamente introduzida na seção 2.8.3), vamos adotar uma definição que, por enquanto, é apenas intuitiva:

$$\mu = \frac{\Delta\omega_{imagem}}{\Delta\omega_{fonte}}, \quad (12)$$

onde $\Delta\omega$ denota ângulo sólido.

A figura 4 ilustra as áreas da fonte e da imagem em função de β e θ . Observando essa figura e notando que, por simetria, para uma lente pontual o ângulo de desvio deve ser puramente na direção radial (ou seja, de β ou θ), temos que $d\varphi_\beta = d\varphi_\theta$, e podemos reescrever a equação (12), que resulta em

$$\mu = \frac{\beta d\beta}{\theta d\theta}. \quad (13)$$

É possível mostrar que β/θ corresponde a uma deformação na direção tangencial, enquanto $d\beta/d\theta$ corresponde a uma deformação na direção radial.

Reescrevendo a equação da lente para o caso de uma lente pontual em termos de θ_E (utilizando as equações 7 e 10), obtemos

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}. \quad (14)$$

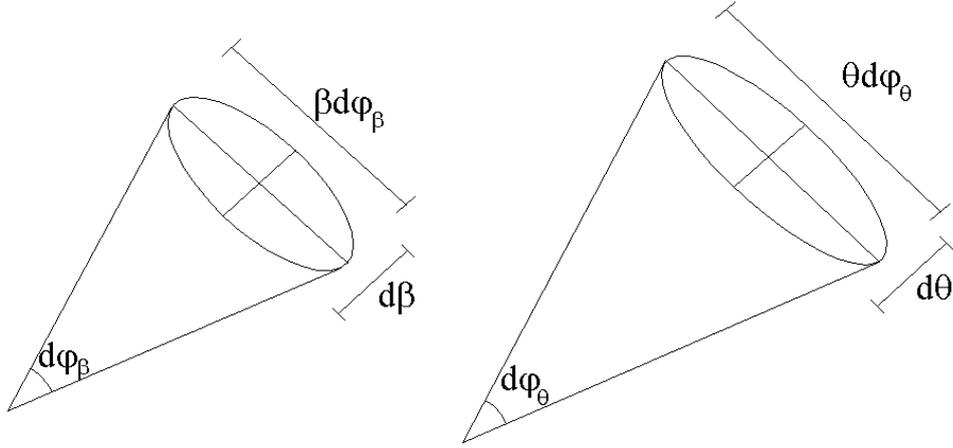


Figura 4: Ilustração do ângulo sólido que fonte e imagem representam. A fonte está à esquerda e a imagem à direita.

Então, utilizando esta expressão na equação (13) podemos calcular μ . Lembrando que $\frac{d\theta}{d\beta} = \left(\frac{d\beta}{d\theta}\right)^{-1}$ e eliminando β com (14), encontramos

$$\mu_{1,2} = \left(1 - \left(\frac{\theta_E}{\theta_{1,2}}\right)^4\right)^{-1}. \quad (15)$$

Definindo $u = \frac{\beta}{\theta_E}$ e desenvolvendo (15), é possível mostrar que a magnificação será dada por

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{u^2 + 2}{2u\sqrt{u^2 + 4}}. \quad (16)$$

Note que

$$a) |\mu_1| + |\mu_2| = \left| \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}} \right|$$

$$b) \mu_1 + \mu_2 = 1.$$

Analisando a equação (16) para o caso em que $\beta \rightarrow 0$ (e conseqüentemente, $u \rightarrow 0$), percebemos que $\mu \rightarrow \pm\infty$. Ou seja, quando observador, lente e fonte estão alinhados, a magnificação é (formalmente) infinita. Este é o caso em que se obtém o anel de Einstein: conforme β se aproxima de zero a magnificação aumenta, de forma que uma fonte situada exatamente atrás da lente (este ponto é a cáustica) gera a imagem de um anel (anel de Einstein), que é a curva crítica. De forma geral, as regiões no plano das fontes que geram imagens com magnificação infinita chamam-se **cáusticas**, enquanto as imagens produzidas

por fontes nestas posições são chamadas **curvas críticas**. Na figura 5 mostramos um exemplo de uma fonte próxima a uma cáustica, gerando uma imagem muito magnificada.

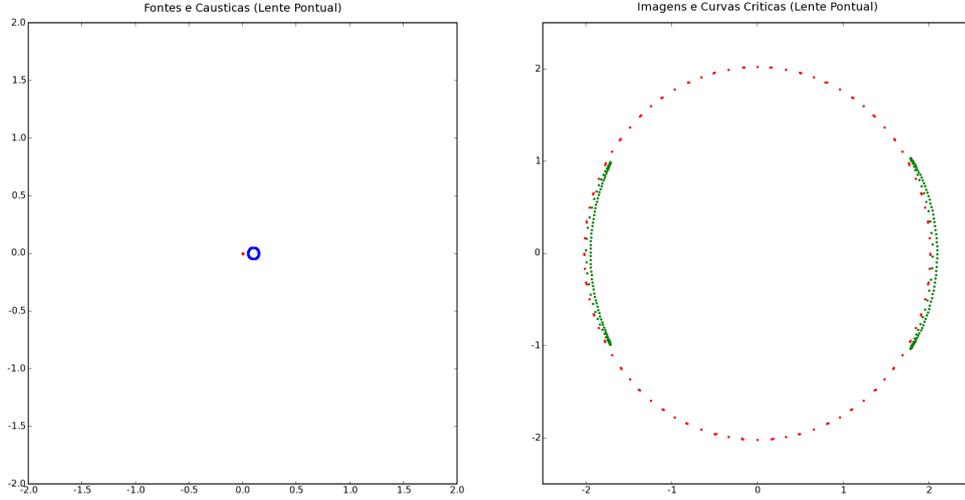


Figura 5: À esquerda está uma fonte em azul, próxima à cáustica tangencial (ponto vermelho). À direita estão as imagens em verde e a curva crítica em vermelho. Pode-se ver claramente a formação de um par arco - contra-arco.

2.5 Densidade Projetada e Densidade Superficial Crítica

Como as distâncias entre lente e observador e entre lente e fonte são muito maiores do que as dimensões da lente, vamos nos utilizar da aproximação de lente fina. Esta, por sua vez, sugere a utilização da massa projetada ao longo da linha de visada. Se a ação do campo gravitacional da lente age sobre a luz em um único ponto, é intuitivo considerar toda a massa da lente como estando em um plano, o plano das imagens. Para obter a densidade de massa projetada (Σ), basta integrar a densidade tridimensional ao longo da linha de visada, considerada na direção do eixo z :

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int_0^{D_s} \rho(\vec{r}) dz, \quad (17)$$

onde $\vec{\xi}$ é o parâmetro de impacto, agora representado por um vetor, no plano xy . Note que a integral é resolvida levando em conta toda a massa existente entre o observador e a fonte. No entanto, é comum realizar a integral de $-\infty$ até $+\infty$, já que a densidade $\rho(\vec{r})$ da lente cai a zero rapidamente à medida que a distância ao centro da lente aumenta.

Para ilustrar o cálculo de $\Sigma(\vec{\xi})$ mostramos abaixo sua determinação no caso da esfera isotérmica singular (de agora em diante, SIS)².

A densidade da SIS é dada por

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2}, \quad (18)$$

onde σ_v^2 é a dispersão de velocidades unidimensional, ou seja, é uma medida de quanto a velocidade das partículas se afasta da média. Substituindo (18) em (17), podemos escrever

$$\Sigma_{SIS}(\vec{\xi}) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2} dz = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + z^2} dz = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{\xi^2}} dz. \quad (19)$$

Fazendo a substituição trigonométrica $tg\theta = \frac{z}{\xi}$, é simples obter a densidade de massa projetada para a SIS:

$$\Sigma_{SIS}(\vec{\xi}) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{\xi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1 + tg^2\theta} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{\xi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{1}{\xi}. \quad (20)$$

Agora considere uma certa massa M distribuída uniformemente em um círculo de raio ξ . Sua massa poderá ser escrita como $M = \Sigma\pi\xi^2$ e o ângulo de deflexão encontrado substituindo a equação (2) em (5)³:

$$\alpha = \frac{D_{LS}}{D_S} \frac{4\pi G}{c^2} \Sigma \xi. \quad (21)$$

Então, como $\xi = \theta D_L$,

$$\alpha = \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \frac{4\pi G}{c^2} \Sigma \theta. \quad (22)$$

É fácil perceber que o coeficiente que multiplica $\Sigma\theta$ deve ter dimensão de Σ^{-1} e, definindo a densidade superficial crítica como

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}, \quad (23)$$

a equação (22) resulta em

$$\alpha(\theta) = \frac{\Sigma}{\Sigma_{crit}} \theta. \quad (24)$$

²O perfil de densidade da SIS pode ser obtido considerando uma distribuição de massa com simetria esférica, que se comporte como um gás ideal. Pressupondo que sua temperatura será constante (daí o termo “isotérmico”), obtém-se a expressão (18). Esta distribuição de massa apresenta uma singularidade na origem, e por isso é dita “singular”.

³Para sermos rigorosos, temos que utilizar o resultado (37), que se encontra na próxima seção por motivos didáticos.

O significado de Σ_{crit} é bastante simples de perceber: em (24), se $\Sigma = \Sigma_{crit}$, então $\alpha(\theta) = \theta$. Olhando a equação da lente (6), percebemos que β será nulo. Já foi visto que quando $\beta = 0$ há um alinhamento entre observador, lente e fonte, e neste caso gera-se um anel de Einstein. Então, Σ_{crit} é a densidade superficial de massa equivalente ao espalhamento da massa da lente pontual na superfície circundada pelo anel de Einstein.

2.6 Lente com Simetria Axial

Agora iremos tratar de caso geral em que a massa da lente será uma distribuição qualquer, onde cada elemento de massa dM da lente irá contribuir para um pequeno ângulo de deflexão $d\tilde{\alpha}$. Em seguida aplicaremos nossos resultados para o caso de uma lente com distribuição de massa com simetria axial.

Primeiramente reescrevemos a equação (2) na forma vetorial:

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4GM}{c^2} \frac{\hat{\xi}}{\xi}, \quad (25)$$

onde $\hat{\xi}$ é o vetor unitário que aponta na direção do parâmetro de impacto (ver figura 2).

Agora, como (25) é linear em M , é possível escrever esta equação na forma diferencial, ou seja, representando a deflexão causada por um elemento de massa dM , situado a uma distância ξ' do eixo z :

$$d\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} dM \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}, \quad (26)$$

onde $\vec{\xi}$ é a distância do raio de luz incidente no plano da lente em relação ao centro desta (“parâmetro de impacto”), veja figura (6).

Agora vamos escrever a equação (26) em função da densidade projetada:

$$d\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} \Sigma(\vec{\xi}') d^2\xi'. \quad (27)$$

O próximo passo é integrar a equação (27) para obter o ângulo total de deflexão:

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} \Sigma(\vec{\xi}') d^2\xi'. \quad (28)$$

Note que a equação (28) vale para qualquer distribuição de massa.

Agora vamos escrever a densidade de massa projetada para o caso em que a lente possui simetria circular, ou seja,

$$\Sigma(\vec{\xi}') = \Sigma(|\vec{\xi}'|) = \Sigma(\xi'). \quad (29)$$

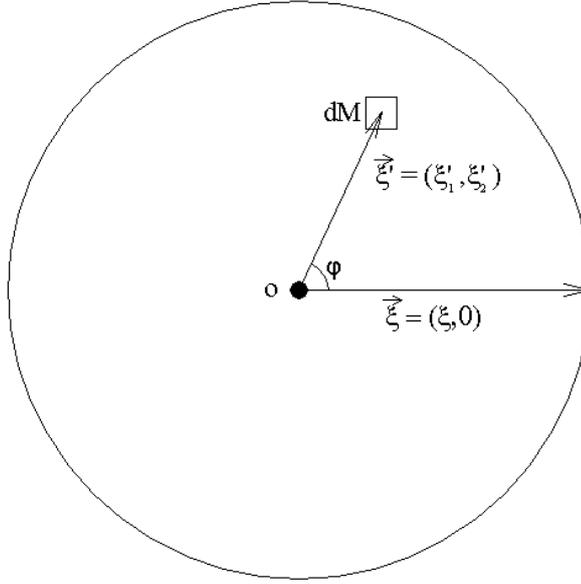


Figura 6: Esquema no plano da lente que evidencia os parâmetros relevantes. O centro da lente é representado por “o”.

Então, a equação (28) se tornará

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} \Sigma(\xi') d^2 \xi'. \quad (30)$$

Agora é preciso resolver esta integral. Note que, dada a simetria axial, $\vec{\xi}'$ pode ser escolhido sobre o eixo das abcissas, sem perda de generalidade. Observando a figura 6 e desenvolvendo os termos que contêm ξ e ξ' ,

$$\begin{cases} \vec{\xi} - \vec{\xi}' = (\xi - \xi' \cos \varphi, -\xi' \sin \varphi) \\ |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2 = \xi^2 - 2\xi\xi' \cos \varphi + \xi'^2 \end{cases}, \quad (31)$$

e reescrevendo o elemento de área $d^2 \xi'$ em coordenadas polares, $\xi' d\xi' d\varphi$, podemos decompor a expressão (28) em suas componentes, $\alpha_{//}$ (ângulo de deflexão na direção de $\vec{\xi}$) e α_{\perp} (ângulo de deflexão na direção perpendicular a $\vec{\xi}$). São eles

$$\tilde{\alpha}_{//}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\xi - \xi' \cos \varphi}{\xi^2 - 2\xi\xi' \cos \varphi + \xi'^2} \Sigma(\xi') \xi' d\varphi d\xi' \quad (32)$$

e

$$\tilde{\alpha}_{\perp}(\vec{\xi}) = -\frac{4G}{c^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\xi'^2 \sin \varphi}{\xi^2 - 2\xi\xi' \cos \varphi + \xi'^2} \Sigma(\xi') d\varphi d\xi'. \quad (33)$$

A integral para $\tilde{\alpha}_{\perp}$ é simples de ser resolvida: integrando primeiro em φ perceberemos que esta será nula:

$$\tilde{\alpha}_{\perp}(\vec{\xi}) = 0. \quad (34)$$

A primeira integral é mais complicada. Reescrevendo a equação (32) de forma a integrar primeiro em φ , temos

$$\tilde{\alpha}_{//}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int_0^\infty \Sigma(\xi') \xi' d\xi' \left(\int_0^{2\pi} \frac{\xi - \xi' \cos\varphi}{\xi^2 - 2\xi\xi' \cos\varphi + \xi'^2} d\varphi \right). \quad (35)$$

A integral entre parênteses na equação (35) foi resolvida com o auxílio de uma tabela de integrais [19] e resulta em

$$\int_0^{2\pi} \frac{\xi - \xi' \cos\varphi}{\xi^2 - 2\xi\xi' \cos\varphi + \xi'^2} d\varphi = \begin{cases} \frac{2\pi}{\xi}, & \text{se } \xi' < \xi \\ 0, & \text{se } \xi' > \xi \end{cases}. \quad (36)$$

Com isso fica fácil encontrar $\tilde{\alpha}_{//}(\vec{\xi})$: basta lembrar que $\int_0^\xi 2\pi\xi'\Sigma(\xi')d\xi'$ é a massa da lente interna ao parâmetro de impacto ξ . Então,

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{4GM(\xi)}{c^2} \frac{1}{\xi}, 0 \right), \quad (37)$$

onde $M(\xi)$ é a massa da lente interna a ξ .

É imediato notar a semelhança entre as expressões (37) e (2), sendo que esta última era válida apenas para massas pontuais. A partir do formalismo acima foi possível generalizar a equação (2) para qualquer massa com simetria circular. Também podemos visualizar esta semelhança como um “teorema de Gauss” para lentes gravitacionais, onde somente a massa interna a um determinado raio (parâmetro de impacto) irá influenciar na deflexão do feixe de luz.

2.7 O Potencial da Lente

O objetivo desta seção é mostrar que o ângulo de deflexão $\vec{\alpha}$ pode ser escrito como o gradiente de uma função, o **potencial da lente**.

Substituindo a equação (5) em (28), e lembrando que $\xi = \theta D_L$, obtemos

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\theta} - \vec{\theta}')}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} \Sigma(D_L \vec{\theta}') d^2\theta'. \quad (38)$$

Escrevendo o fator que multiplica a integral em função da densidade crítica (ver a equação 23), reescrevemos (38):

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi \Sigma_{crit}} \int \frac{(\vec{\theta} - \vec{\theta}')}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} \Sigma(D_L \vec{\theta}') d^2\theta'. \quad (39)$$

Agora, definindo uma nova grandeza, a densidade projetada em unidades da densidade crítica

$$\kappa(\vec{\theta}') = \frac{\Sigma(D_L \vec{\theta}')}{\Sigma_{crit}}, \quad (40)$$

é possível escrever a equação (39) sob uma forma mais compacta. No entanto, $\kappa(\vec{\theta}')$ irá desempenhar ainda outra função, de modo que será uma grandeza muito importante no estudo de lentes gravitacionais. $\kappa(\vec{\theta}')$ recebe o nome de **convergência** e o motivo deste nome ficará claro somente na próxima seção.

Notando que

$$\vec{\nabla}_\theta \ln|\vec{\theta} - \vec{\theta}'| = \frac{(\vec{\theta} - \vec{\theta}')}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2}, \quad (41)$$

onde $\vec{\nabla}_\theta$ representa o gradiente em relação a $\vec{\theta}$ ($\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$), fica fácil escrever $\vec{\alpha}$ como o gradiente de uma função (já que o gradiente é em $\vec{\theta}$ e não em $\vec{\theta}'$):

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\nabla}_\theta \left\{ \frac{1}{\pi} \int \kappa(\vec{\theta}') \ln|\vec{\theta} - \vec{\theta}'| d^2\theta' \right\}. \quad (42)$$

Definindo o termo entre chaves como o potencial $\psi(\vec{\theta})$ da lente, mostramos que

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \vec{\nabla}_\theta \psi(\vec{\theta}), \quad (43)$$

onde $\psi(\vec{\theta})$ é dado por

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\vec{\theta}') \ln|\vec{\theta} - \vec{\theta}'| d^2\theta'. \quad (44)$$

Podemos ainda perceber que se aplicarmos o laplaciano no potencial da lente (ou calculando o divergente de $\vec{\alpha}$) obteremos o dobro da convergência:

$$\nabla^2 \psi(\vec{\theta}) = 2\kappa(\vec{\theta}), \quad (45)$$

onde se fez uso da delta de Dirac bidimensional

$$\delta(\vec{\theta} - \vec{\theta}') = \frac{1}{2\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{(\vec{\theta} - \vec{\theta}')}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} \right), \quad (46)$$

que possibilitou resolver a integral da equação (39).

2.8 Mapeamento

Esta seção é muito importante para o entendimento deste trabalho: nela será discutido como acontece a deformação das fontes, mapeando-as nas imagens. Na verdade o que

ocorre é análogo a uma mudança de coordenadas, passando das coordenadas do plano das fontes ($\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$) para o plano das imagens ($\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$). Por este motivo apresentamos agora a mudança de coordenadas de modo genérico, para que se perceba a semelhança entre os dois casos. Note, entretanto, que transformações de coordenadas são bijetoras, enquanto o mapeamento pode ser “multivalorado”, ou seja, um ponto no plano das fontes pode ser mapeado em vários pontos no plano da lente.

2.8.1 Mudança de Coordenadas e o Jacobiano

Suponha que em um sistema de coordenadas seja utilizado um certo par de variáveis, u e v , que podem ser escritas em função de um novo par de variáveis, x e y :

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, \quad (47)$$

Os diferenciais de x e y são escritos

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{cases}, \quad (48)$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Esta equação matricial representa a mudança das coordenadas u e v para as x e y . A matriz com as derivadas parciais é conhecida como a Jacobiana da transformação e o determinante dessa matriz fornece a relação entre os dois elementos de área ($dx dy = \det(J) du dv$), onde

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

2.8.2 Matriz de Transformação do Plano das Imagens para o Plano das Fontes

Agora será repetida a mudança de variáveis, porém para o caso de nosso interesse: definindo a matriz A como o Jacobiano da transformação do plano das imagens para o plano das fontes⁴, obtemos (utilizando a equação da lente 6)

$$A = \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} = \frac{\partial(\beta_1, \beta_2)}{\partial(\theta_1, \theta_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_2} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

⁴Embora estejamos fazendo a transformação do plano das imagens para o plano das fontes, a matriz inversa de A , chamada de tensor de magnificação M , será o Jacobiano da transformação inversa.

Os elementos A_{ij} da equação (51) são escritos como

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_j}, \quad (52)$$

onde $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Lembrando que o ângulo de deflexão pode ser escrito como o gradiente de uma função (equação 44), podemos reescrever a equação (52) como:

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad (53)$$

Note que A é simétrica, pois derivadas parciais comutam.

Denotando derivadas parciais por subíndices ($\psi_{ij} = \partial^2 \psi / \partial \theta_i \partial \theta_j$) para simplificar a notação, temos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{12} & \psi_{22} \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Agora adotaremos um procedimento para decompor a matriz ψ_{ij} em uma parte isotrópica (proporcional à matriz identidade I) e outra anisotrópica⁵ (matriz simétrica de traço nulo). Repare que $tr(\psi_{ij})$ é o Laplaciano do potencial da lente (equação 45), ou seja $tr(\psi_{ij}) = 2\kappa$. Então, teremos

$$\Gamma = \psi_{ij} - \frac{1}{2} tr(\psi_{ij}) I = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{12} & \psi_{22} \end{pmatrix} - \kappa I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) & \psi_{12} \\ \psi_{21} & -\frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) \end{pmatrix}. \quad (55)$$

E agora podemos reescrever a matriz A utilizando a equação acima :

$$A = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) & \psi_{12} \\ \psi_{21} & -\frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) \end{pmatrix}. \quad (56)$$

É muito importante salientar o que foi feito aqui: a matriz A agora está dividida em dois termos, o primeiro é isotrópico, e é responsável por uma contração/dilatação uniforme da fonte por um fator $(1 - \kappa)$, o que explica o fato de κ ser chamado convergência. O segundo termo é responsável pela distorção da fonte, o chamado cisalhamento.

Agora faremos mais duas definições, que envolvem as componentes da matriz de cisalhamento:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) \\ \gamma_2 = \psi_{12} \end{cases}, \quad (57)$$

⁵Aproveitamos para relaxar também a notação de κ : basta lembrar que ele deve ser calculado em $\vec{\theta}$.

as quais simplificam a equação (56) para

$$A = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Chamaremos a segunda matriz de **matriz de cisalhamento**. Repare que a transformação realizada pela matriz A é local, porque κ e as derivadas do potencial da lente (γ_1, γ_2) são calculados em $\vec{\theta}$.

A mudança de variáveis que vem a seguir somente é intuitiva seguindo os passos a seguir:

a) Encontrar os autovalores da matriz de cisalhamento. Imediatamente uma nova variável é sugerida, e se torna conveniente definir

$$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad (59)$$

que, como pode ser mostrado, é o módulo dos autovalores dessa matriz (os autovalores são $\pm\gamma$).

b) Calcular os autovetores associados a cada autovalor e suas direções (definidas pelo ângulo em relação ao eixo x). Como estamos em um caso 2D podemos indicar uma direção por um único ângulo. Assim, é possível mostrar que o autovalor $+\gamma$ está associado a um autovetor que aponta na direção $\cos^2\omega = \frac{1}{2}(1 + \gamma_1/\gamma)$, enquanto o autovalor $-\gamma$ está associado a um autovetor que aponta na direção $\cos^2\omega' = \frac{1}{2}(1 - \gamma_1/\gamma)$.

Agora, há dois aspectos: verifique que $\cos^2\omega + \cos^2\omega' = 1$ e que, se lembrarmos das seguintes relações trigonométricas:

$$\begin{cases} \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi)) \\ \sen^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\varphi)) \end{cases}, \quad (60)$$

então é possível escrever

$$\begin{cases} \gamma_1 = \gamma \cos(2\varphi) \\ \gamma_2 = \gamma \sen(2\varphi) \end{cases}, \quad (61)$$

onde podemos interpretar γ como a intensidade e φ a direção do cisalhamento.

Agora finalmente podemos escrever o Jacobiano A como este é normalmente encontrado na literatura:

$$A = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sen(2\varphi) \\ \sen(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Com os autovalores de A poderemos diagonalizá-la:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix}. \quad (63)$$

2.8.3 Magnificação

A magnificação μ de uma imagem nada mais é do que a razão entre os fluxos da imagem e da fonte,

$$\mu = \frac{F_{\nu(\text{imagem})}}{F_{\nu(\text{fonte})}}, \quad (64)$$

onde fluxo é definido como energia por unidade de tempo por unidade de área por frequência.

O efeito de lente gravitacional é acromático, ou seja, os espectros da fonte e suas imagens são iguais e, além disso, o número de fótons emitido pela fonte é conservado. Desse modo a intensidade específica I_{ν} (energia por unidade de ângulo sólido por unidade de tempo por unidade de área por frequência) será a mesma para a fonte e suas imagens. Como o fluxo de um objeto é dado pela integral de sua intensidade específica I_{ν} em ângulo sólido e I_{ν} é considerado constante para uma pequena fonte, temos

$$F = I_{\nu} \Delta\omega, \quad (65)$$

onde $\Delta\omega$ é o ângulo sólido subentendido pelo objeto. Assim, a equação (64) será dada simplesmente pela razão de ângulos sólidos entre imagem e fonte:

$$\mu = \frac{\Delta\omega(\text{imagem})}{\Delta\omega(\text{fonte})}. \quad (66)$$

Assim, a magnificação será dada pelo jacobiano da transformação fonte \rightarrow lente:

$$\mu = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial \vec{\beta}} \end{pmatrix} = \det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}. \quad (67)$$

2.9 Mapeamento do Plano das Fontes para o Plano das Imagens

Agora podemos utilizar o determinante de A para, através da equação (67), encontrar o valor da magnificação de uma imagem em função de κ e γ . Então obtemos

$$\mu = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2}. \quad (68)$$

Como vimos, μ é o fator que fornece o quanto a área (ou brilho) da imagem é maior ou menor do que a da fonte.

Calcular a matriz inversa de A (na base em que ela é diagonal) é trivial, e A^{-1} é o chamado tensor de magnificação M , e seus autovalores fornecem o esticamento da imagem em relação à fonte nas direções dadas pelos seus respectivos autovetores. A saber, M é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\kappa-\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\kappa+\gamma} \end{pmatrix}. \quad (69)$$

No caso de simetria axial, pode-se mostrar que $(1-\kappa-\gamma)^{-1} = \frac{\beta}{\theta}$, correspondendo a uma deformação tangencial (ver figura 4), enquanto $(1-\kappa+\gamma)^{-1} = \frac{d\beta}{d\theta}$, correspondendo a uma deformação na direção radial. Logo, definimos

$$\mu_t = \frac{1}{1-\kappa-\gamma} \quad (70)$$

e

$$\mu_r = \frac{1}{1-\kappa+\gamma} \quad (71)$$

como os esticamentos na direção tangencial e radial, respectivamente. Os valores de β que fazem μ_t (μ_r) $\rightarrow \pm\infty$ definem a cáustica tangencial (radial).

Uma observação importante a se fazer é que as direções dos esticamentos são definidas com relação ao vetor que vai da origem (centro da lente) até a imagem, sendo que a deformação é dita radial se for aproximadamente paralela a esse vetor e tangencial se for aproximadamente perpendicular a este mesmo vetor. Essa nomenclatura, “radial” e “tangencial”, é dada a partir de modelos de massa com simetria circular, ou seja, que possuem as curvas críticas circulares. Quando a distribuição de massa da lente se afasta da distribuição circular, as curvas críticas deixam de ser circulares e passam a ter um formato oblato. Além disso as distorções não serão mais estritamente na direção radial ou tangencial. A figura 7 ilustra esta observação, mostrando imagens magnificadas na direção tangencial.

No entanto, se a lente ainda possui uma distribuição de massa projetada aproximadamente circular, como uma elipse de baixa excentricidade, por exemplo, μ_r e μ_t ainda correspondem a esticamentos próximos da direção radial e tangencial, respectivamente.

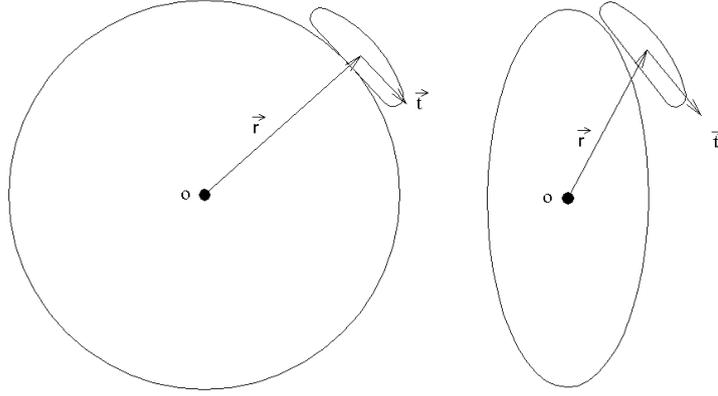


Figura 7: À esquerda, temos o caso em que a curva crítica é circular. O vetor \vec{r} indica a posição do centro da imagem e \vec{t} é um vetor que aponta na direção do maior eixo da imagem. Na figura da direita, \vec{r} e \vec{t} claramente não são perpendiculares.

2.10 O Modelo de Navarro, Frenk e White (NFW)

Os modelos para a lente vistos até agora são demasiadamente simplificados e é necessário utilizar modelos mais realistas para representar a lente. Um modelo bastante conhecido é o modelo de Navarro, Frenk e White [17, 18], denominado modelo NFW. Através de simulações de n corpos, Navarro, Frenk e White descobriram que os aglomerados de galáxias têm um perfil radial de densidade universal, dado por

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}, \quad (72)$$

onde r_s e ρ_s são a escala e a densidade características do halo.

Note que próximo ao centro este perfil é proporcional a r^{-1} e longe do centro é proporcional a r^{-3} , ou seja, ele é mais suave do que a SIS próximo ao centro da lente, e mais abrupto do que a SIS longe do centro.

A densidade projetada é dada por

$$\kappa(r) = 2\kappa_s \frac{1 - F(x)}{x^2 - 1}, \quad (73)$$

onde

$$\begin{cases} x = \frac{r}{r_s} \\ \kappa_s = \frac{\rho_s r_s}{\Sigma_{crit}} \end{cases}, \quad (74)$$

e $F(x)$ é dada por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tan^{-1} \sqrt{x^2 - 1}, & x > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tanh^{-1} \sqrt{1 - x^2}, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}. \quad (75)$$

Além de apresentarem um perfil radial médio do tipo NFW, os aglomerados simulados exibem uma estrutura tri-axial. Tanto o perfil de NFW quanto a tri-axialidade são consistentes com observações de aglomerados em raios-X e com análises de lente fraca.

O desvio da simetria axial tem um papel muito importante para o efeito de lente. Por exemplo, a cáustica tangencial torna-se uma curva com cúspides (enquanto no caso axial ela é um ponto) que muda a multiplicidade e as configurações das imagens (veja figura 8).

Assim, para lidar com uma situação um pouco mais realista, utilizaremos um modelo de NFW elíptico. Duas formas de incluir a elipticidade têm sido consideradas na literatura. Uma utiliza o potencial da lente obtido no caso esférico e o torna com “simetria elíptica”, substituindo r pela coordenada elíptica ξ , dada por

$$\xi = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{q^2}}, \quad (76)$$

onde $q^2 = \frac{1-e}{1+e}$. Apesar desse método permitir a obtenção de resultados analíticos, a densidade projetada obtida a partir deste potencial apresenta alguns problemas, chegando a ser negativa em certas regiões.

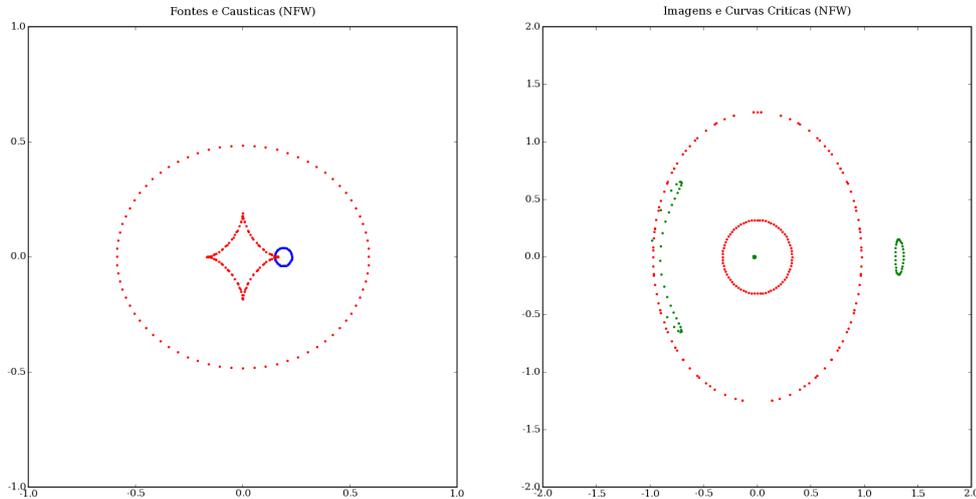


Figura 8: A figura da esquerda mostra as cáusticas em vermelho junto com uma fonte em azul. A figura da direita mostra as curvas críticas em vermelho e as 2 imagens (em verde) correspondentes àquela fonte. O modelo de distribuição de massa da lente para esse caso é o NFW com elipticidade 0.3.

Neste trabalho utilizamos o perfil de NFW com simetria elíptica obtido substituindo

r por ξ em $\kappa(r)$. O perfil de NFW foi muito utilizado neste trabalho e a figura (8) foi feita utilizando este modelo.

3 Gerando, Separando e Medindo Imagens

Este capítulo trata de toda a metodologia por nós adotada neste trabalho, o que inclui a geração das fontes e cálculo das posições das imagens através do aplicativo **gravlens** e o desenvolvimento de programas para separar e fazer medidas nas imagens. O diagrama da figura (9) resume as etapas envolvidas.

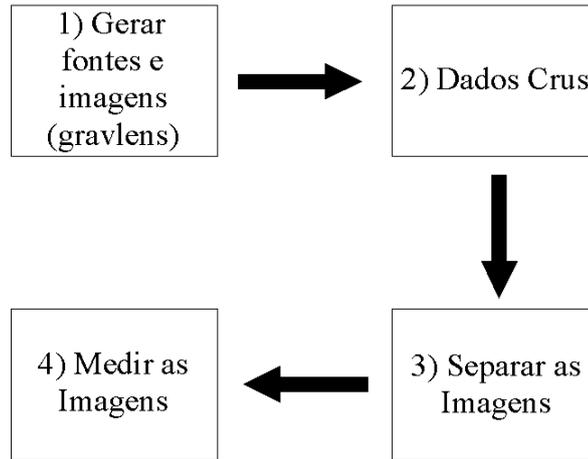


Figura 9: Etapas que foram seguidas para obter parâmetros das imagens, como comprimento, largura e curvatura.

3.1 Gerando as Fontes e Imagens

Nesta seção explicaremos como são geradas as fontes e imagens. O aplicativo que foi utilizado se chama **gravlens** e é discutido no **apêndice A**, bem como nas referências [5, 6, 7].

Para o **gravlens** ser capaz de gerar as fontes e calcular as posições das imagens, devemos fornecer uma série de informações, contidas em um arquivo de texto, que é o arquivo de entrada do **gravlens**. Entre elas estão o modelo de massa para a lente (entre os vários que o **gravlens** possui) e as posições das fontes. Mais parâmetros podem ser modificados (aqueles que são o padrão do programa) para melhorar a precisão ou desempenho (veja o **apêndice A**). Os modelos utilizados por nós foram o da Esfera Isotérmica Singular (SIS) e o modelo de Navarro, Frenk e White (NFW). Também utilizamos um comando que gera fontes elípticas, que são, na realidade, um conjunto de fontes pontuais que formam o contorno de uma elipse. Como o objetivo deste trabalho é comparar parâmetros das imagens

(que possuem certa dimensão) com parâmetros locais, também geramos fontes (pontuais) no centro de cada fonte, que serão mapeados para o centro das imagens extensas.

O `gravlens` também é capaz de calcular as cáusticas e curvas críticas do modelo de massa utilizado. Com todas essas informações, executamos o `gravlens`, de modo a criar 3 tipos de arquivos:

- arquivos contendo as posições das fontes e imagens (elipses);
- arquivos contendo a posição dos centros das imagens;
- as cáusticas e curvas críticas.

Abaixo temos um exemplo de um gráfico (figura 10) que à esquerda mostra uma fonte com as cáusticas, enquanto no lado direito as imagens junto com as curvas críticas. Este exemplo foi feito com um modelo de NFW com elipticidade 0.2, onde o tamanho da fonte está exageradamente grande.

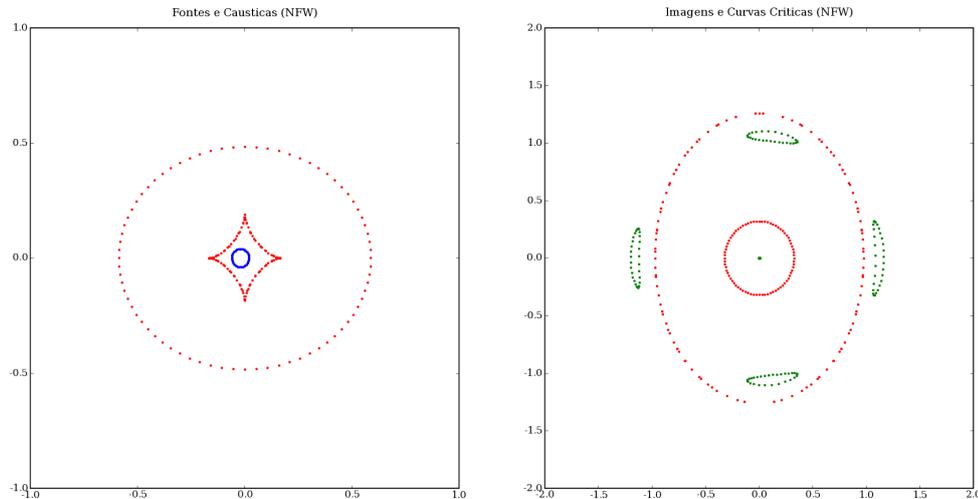


Figura 10: Fonte (em azul) no interior da cáustica tangencial, dando origem a 5 imagens. Esta configuração é normalmente chamada de “cruz de Einstein”.

Nesta etapa ainda não há como fazer medidas nas imagens: a figura 10 foi feita utilizando dois arquivos, um é o das cáusticas e curvas críticas e o outro contém as posições das imagens referentes a uma única fonte, onde os pontos das imagens não vêm na ordem. Ou seja, se uma linha do arquivo corresponde a uma determinada imagem, nem a linha

seguinte nem a anterior serão necessariamente da mesma imagem. Na verdade, estes arquivos de saída possuem uma estrutura: cada um possui 4 colunas para as coordenadas da(s) imagem(s) (e mais 4 colunas para as da fonte). Essas 4 colunas são as coordenadas de dois pontos que pertencem à mesma imagem, de forma que se for feito um gráfico ligando estes pontos que estão na mesma linha cada imagem teria o seu contorno separadamente. No entanto, ao tentar ligar estes pontos não acontecia sempre o esperado, e as imagens não seriam separadas corretamente. O motivo para tal é que o algoritmo do `gravlens` nos faz ligar os pontos mais próximos um do outro. Observe a figura (11) e repare em como as imagens são “partidas” em várias partes. O problema é ainda pior quanto mais curva e delgada for a imagem. Desse modo, optamos por fazer um novo algoritmo, que seja capaz de separar as imagens. Este algoritmo foi escrito em `Python` e é descrito na seção seguinte.

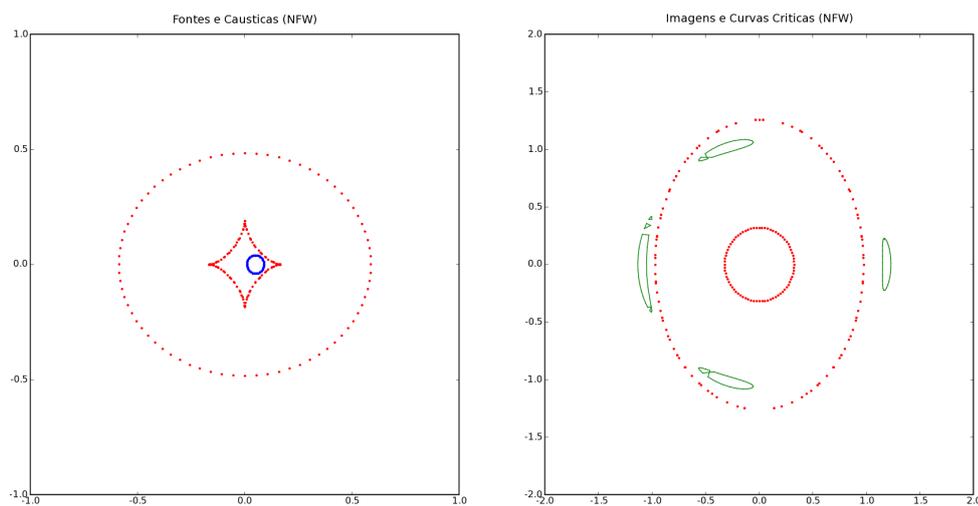


Figura 11: A fonte (em azul) na figura da esquerda gera cinco imagens, mostradas à direita. Repare em como as imagens aparecem divididas.

3.2 Separando as Imagens

O próximo passo é separar as imagens, ou seja, ser capaz de agrupar em vetores os pontos pertencentes a cada imagem. Para testar o algoritmo basta traçar cada imagem de uma cor e verificar se cada imagem possui apenas uma cor.

Antes de continuar é preciso distinguir dois tipos de arcos gravitacionais: os arcos de

fusão e os arcos de deformação. Os arcos de deformação são aqueles formados exclusivamente pela deformação da fonte, tornando o objeto alongado, enquanto os arcos de fusão são objetos compostos por duas ou mais imagens que se combinam para formar um único objeto, com a aparência de um arco. Os arcos de fusão são formados por imagens que estão em diferentes regiões delimitadas pelas curvas críticas, de forma que arcos de fusão sempre atravessam a curva crítica. Neste trabalho investigamos apenas o caso dos arcos de deformação.

Para separar as imagens foi utilizado o fato de os arcos aparecerem sempre inteiramente em uma das regiões delimitadas pelas curvas críticas, ou seja, elas nunca estarão as atravessando. Assim, para o exemplo da figura 10 acima há duas imagens fora da curva crítica exterior, duas entre a exterior e interior, e uma interna às duas ⁶.

Tendo isso em vista, o primeiro passo é identificar as curvas críticas radial e tangencial, já que são elas que vão auxiliar o processo de separar as imagens. O algoritmo para separar as curvas críticas é muito simples: calculamos a média das distâncias de cada ponto à origem (centro da lente) e consideramos que qualquer ponto a uma distância menor do que a média pertence à curva crítica interior, e qualquer ponto a uma distância maior do que a média é considerado pertencente à curva crítica exterior. Este método é de certa forma rudimentar e de alcance limitado, mas como será utilizado um único arquivo com as curvas críticas para muitos arquivos de imagens, até mesmo ajustar manualmente (visualmente), para uma dada lente, o ponto que separa as curvas críticas não é trabalhoso. Abaixo se encontra um exemplo de curvas críticas separadas com sucesso (figura 12).

Feitas as escolhas acima, já estamos restringindo o problema que iremos tratar:

- Imagens que atravessam as curvas críticas não serão contadas (e medidas) corretamente: o problema da fusão de imagens não será abordado;
- Modelos de massa que possuam curvas críticas que se cruzam não irão funcionar.

Com as curvas críticas devidamente separadas é possível passar para a separação das imagens. Sabemos que cada ponto no plano das fontes irá gerar, para o NFW, 1, 3 ou 5 imagens, dependendo da região em que a fonte estiver (é possível mostrar [20] que o número de imagens muda de dois quando a fonte atravessa uma cáustica). Então o

⁶Esta imagem central, que é apenas um efeito do código do gravlens, é conhecida como imagem fantasma (que não é real), pois não deveria estar presente quando o modelo da lente diverge na origem (como no NFW e SIS).

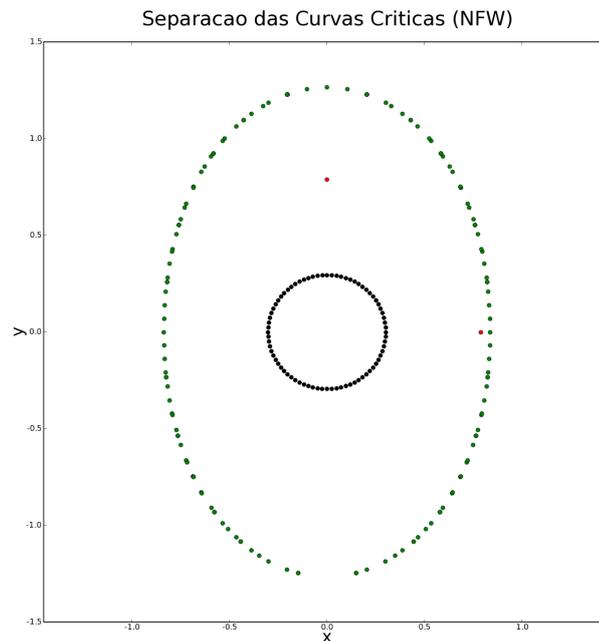


Figura 12: Uma das curvas críticas é traçada em verde e a outra em preto. Os pontos vermelhos delimitam a região que o código utilizou para separar as curvas.

número de pontos (linhas) num arquivo de saída do `gravlens` deverá ser múltiplo de 1, 3 ou 5. Por exemplo, se for gerada uma fonte composta por 70 pontos, o arquivo de saída poderá conter 70, 210 ou 350 linhas, resultando em 1, 3 ou 5 imagens, respectivamente. O nosso algoritmo conta o número de linhas em cada arquivo e, se ele não for um múltiplo inteiro de 70 (ou o número de pontos escolhido para a fonte), exibe uma mensagem de erro dizendo que não existe número definido de imagens e que a fonte está atravessando a cáustica⁷. Então o programa aborta este arquivo e não separa suas imagens, excluindo-o da nossa análise.

Devemos frisar que nós podemos minimizar o número de fontes que estiverem atravessando alguma cáustica ao diminuir seus tamanhos: fontes maiores terão mais probabilidade de serem atravessadas por uma cáustica.

Agora explicaremos o procedimento adotado para separar imagens. Um primeiro script lê cada arquivo de imagem e conta quantas linhas este tem, determinando portanto o número de imagens contidas nele. Se o número de pontos não for múltiplo de 1, 3 ou 5

⁷De fato, se uma fonte extensa está localizada numa posição tal que é atravessada por uma cáustica, cada ponto de regiões diferentes será mapeado em um número diferente de pontos no plano das imagens.

o programa exibe uma mensagem de erro avisando que a fonte deve estar atravessando a cáustica, conforme explicado acima. Este primeiro script, ao qual iremos nos referir como **contador_de_imagens**, determina qual programa irá separar as imagens. Há 3 opções, dependendo do número de imagens:

a) Se a fonte der origem a apenas 1 imagem, o script chamado **1imagem** será aberto e lerá o arquivo dessa imagem. No entanto este caso é trivial, pois a imagem já está “separada”. Esse mesmo script fará as medidas na imagem (ver seção 3.3), um gráfico com os pontos pertencentes a ela, associará a imagem do centro da fonte (calculado pelo **gravlens**) à mesma e adicionará a um arquivo todas as informações relevantes sobre a imagem. Os detalhes sobre essas medidas serão explicados na próxima seção.

b) Se a fonte der origem a 3 imagens, o script que será aberto é chamado **3imagens**. Como sabemos que nos casos com 3 imagens uma será sempre central (dentro da curva crítica interna), uma estará sempre além da curva crítica externa e a outra estará sempre entre as duas curvas críticas, esse caso também não é complicado para separar as imagens, já que temos as curvas críticas devidamente separadas. **3imagens** realiza os seguintes procedimentos:

- seleciona o primeiro ponto da imagem (a primeira linha do arquivo de saída) e calcula a distância entre ele e cada ponto da curva crítica exterior, guardando apenas o ponto mais próximo a ele (e a distância desse ponto da curva crítica à origem). Então, se a distância da origem ao ponto da imagem for maior do que a distância do ponto da curva crítica à origem, então o ponto é adicionado à uma lista que conterá os pontos da imagem externa (imagem 1);
- caso a condição anterior não seja satisfeita, é porque o ponto em questão pertence a uma das outras imagens. Então o programa faz o mesmo procedimento, mas agora procurando o ponto da curva crítica interior que esteja mais próximo. Se o ponto da imagem estiver além desse ponto ele pertence à imagem 2, e se estiver a uma distância menor da origem, pertence à imagem 3;
- com uma iteração sobre todos os pontos do arquivo as imagens são separadas;
- Feito isso, as 3 imagens já estão separadas e **3imagens** irá descobrir qual centro (este centro será denominado, a partir de agora, de centro real da imagem, sendo este o ponto da imagem que corresponde ao centro da fonte) corresponde a qual

imagem. O algoritmo é o seguinte: calculamos o centro geométrico de cada imagem e supomos que esse centro estará bem próximo do centro real. Então, basta fazer uma pequena iteração sobre as três imagens para verificar qual centro está mais próximo ao centro geométrico de cada imagem. Um gráfico das imagens e seus centros, com cada imagem e seu centro associado na mesma cor, permite visualizar se o código funcionou corretamente. O código, ainda, exibe uma mensagem de erro caso mais de uma imagem fique associada ao mesmo centro.

c) Se a fonte der origem a 5 imagens, o procedimento inicial é muito semelhante ao **3imagens**, mas o que seriam as imagens 1 e 2 agora serão 2 conjuntos, cada um contendo os pontos de 2 imagens, já que para o caso em que há 5 imagens 2 estão além da curva crítica exterior e 2 entre as duas curvas críticas. A idéia por trás do método para separar as imagens de cada um desses conjuntos é semelhante ao método para separar as curvas críticas: calculamos a distância média entre cada par de pontos. Em seguida escolhemos um ponto qualquer do conjunto em questão e o colocamos como pertencente à imagem 1. Então selecionamos o próximo ponto e calculamos sua distância até o primeiro ponto. Se ela for menor do que a média, é adicionado à imagem 1, caso contrário é associado à imagem 2, e assim por diante. O mesmo é feito com o outro conjunto, porém, naturalmente, será dividido entre as imagens 3 e 4. Este algoritmo apresentou um desempenho acima do esperado. Veja a figura (13) abaixo e note a proximidade entre as imagens. Este é o limite até onde o programa suporta: além disto estaríamos lidando com o problema da fusão de imagens.

Os centros reais das imagens são associados de maneira inteiramente análoga ao realizado por **3imagens**.

Agora que temos as imagens separadas e seus centros (reais) corretamente associados, podemos prosseguir para as medidas nas mesmas. A figura (14) ilustra de forma simplificada o método de separação de imagens.

Vale ressaltar que os mesmos scripts que separam as imagens são aqueles que fazem as medidas. Nesta monografia, os métodos foram separados em seções diferentes por motivos didáticos.

3.3 Fazendo Medidas nas Imagens

Nesta seção iremos descrever o algoritmo que faz medidas em uma imagem. Ele está presente nos 3 scripts que separam imagens (**1imagem**, **3imagens** e **5imagens**) e seu

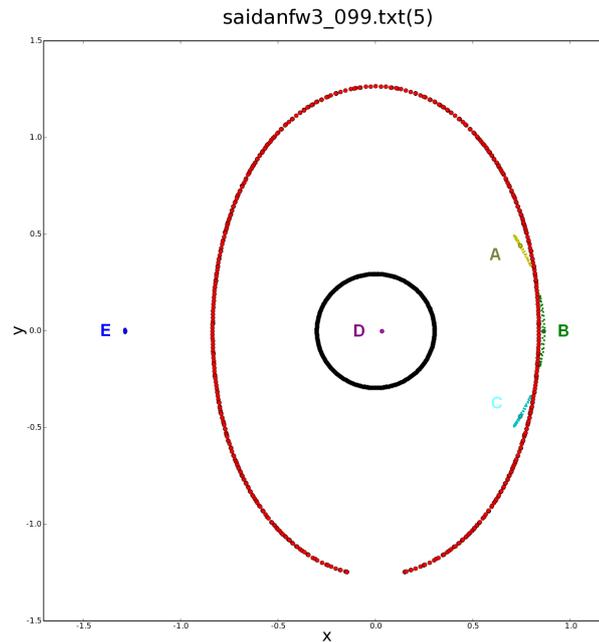


Figura 13: Exemplo de 5 imagens separadas por 5imagens.py, e os centros reais associados corretamente às suas respectivas imagens.

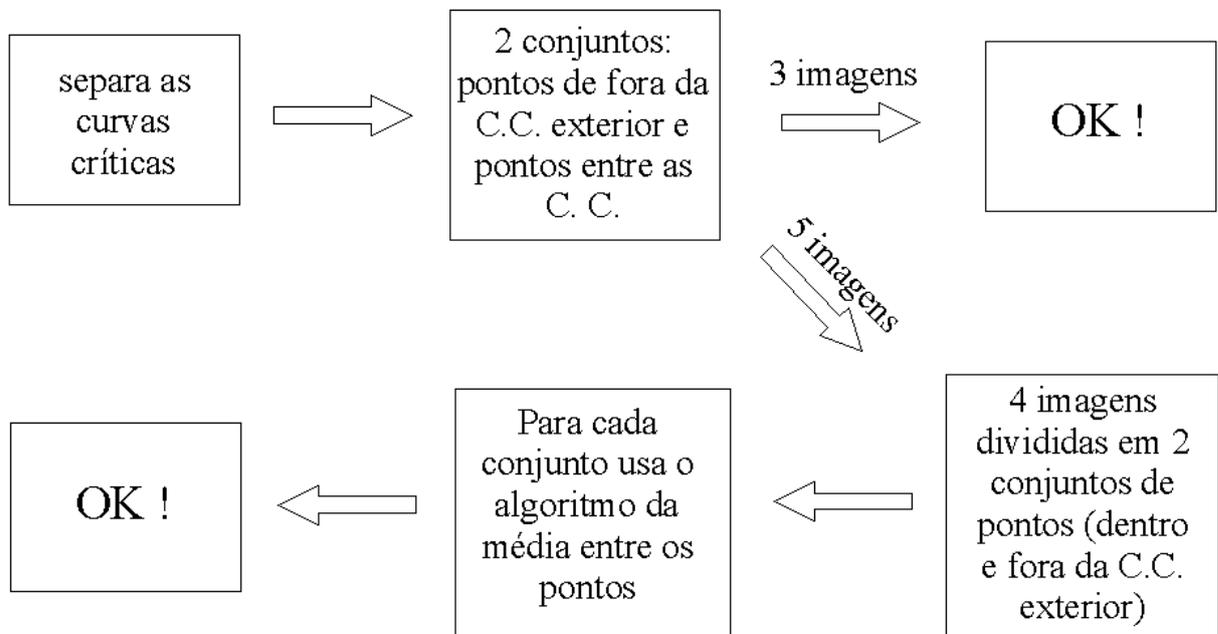


Figura 14: Diagrama que resume a separação das imagens para o caso de serem 3 ou 5.

objetivo é obter o comprimento (**L**), largura (**W**) e uma medida da **curvatura** de cada imagem.

Quando o programa chega nesta parte, ele possui uma lista para cada coordenada de cada imagem. Supomos que estamos lidando com a imagem que possui coordenadas

$$\begin{cases} x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \end{cases} . \quad (77)$$

O programa realiza os seguintes passos (conforme ilustrado nas figuras 15 e 16):

1. Procura pelos 2 pontos da imagem mais distantes entre si: a distância entre eles é o comprimento da imagem: L (ver figura 16, gráfico 2);
2. Como esta imagem pode estar em qualquer lugar do plano, orientada de diversas maneiras, será conveniente fazer uma mudança de referencial. O centro do novo referencial será no ponto médio da reta que une os dois pontos mais distantes e o seu eixo x será alinhado com essa mesma reta;
3. Agora são criadas duas novas listas contendo as coordenadas de cada ponto da imagem, obtidas através de

$$\begin{cases} x_l = \cos(\theta)(x - midx) + \sin(\theta)(y - midy) \\ y_l = -\sin(\theta)(x - midx) + \cos(\theta)(y - midy) \end{cases} , \quad (78)$$

onde $midx$ e $midy$ são as coordenadas do ponto médio da reta que liga os dois pontos mais distantes entre si da imagem e θ é a inclinação dessa reta em relação ao eixo x original. Ou seja, foi feita uma translação seguida de uma rotação. Agora temos duas novas listas contendo as coordenadas locais:

$$\begin{cases} x_l = [x_{1l}, x_{2l}, \dots, x_{nl}] \\ y_l = [y_{1l}, y_{2l}, \dots, y_{nl}] \end{cases} ; \quad (79)$$

4. A próxima etapa consiste em determinar a largura da imagem. Primeiro procuramos pelo ponto com maior projeção no eixo y , seja ela positiva ou negativa. Em seguida procuramos por um ponto que possua a projeção no eixo y com mesmo sinal que o primeiro ponto, mas de sinal oposto em x . Esses pontos são denominados pontos 1 e 2 (ver figura 16, gráfico 3). Como esse algoritmo deverá funcionar tanto para elipses como para arcos, não podemos simplesmente procurar por dois pontos para $y > 0$ e

mais dois para $y < 0$. O que faremos é o seguinte: a partir de cada um desses pontos procuraremos por pontos que estejam no lado oposto a eles, com mesmo sinal da coordenada x , mas não necessariamente com o sinal da coordenada y trocado. Isso é feito procurando o ponto com menor ângulo contado a partir da vertical que passa pelo ponto 1 , e o mesmo procedimento é feito para o ponto 2 . Os novos pontos são chamados 3 e 4 (ver figura 16, gráfico 4).

Com o algoritmo desta forma, o programa deveria encontrar corretamente esses 4 pontos, mas na verdade o faz apenas para imagens não demasiadamente distorcidas (magnificadas), pois nas imagens mais distorcidas a distribuição de pontos não é uniforme em seu contorno, o que resulta em que os pontos 3 e 4 não são aqueles mais próximos ao eixo y , como ocorre com os pontos 1 e 2 . Então o que é feito é o seguinte: é traçada a reta que une os pontos 3 e 4 , e é determinado o ponto da interseção dessa reta com o eixo y . A partir desse ponto procura-se os pontos com menor ângulo, contados a partir da horizontal, para x positivo e x negativo. Dessa forma, novos pontos 3 e 4 são encontrados, agora corretamente (ver figura 16, gráfico 5). Agora traçamos a reta que liga os pontos 1 e 2 , e a interseção dessa reta com o eixo y . Fazendo o mesmo para os novos pontos 3 e 4 , é possível definir a largura da imagem como a distância entre esses dois pontos do eixo y que são cortados pelas retas que ligam 1 a 2 e $3(novo)$ a $4(novo)$ (ver figura 16, gráficos 6 e 7);

5. O próximo parâmetro que será determinado é a curvatura da imagem. A forma utilizada neste trabalho para associar uma curvatura a um objeto não circular, seja este uma elipse ou um arco, é associar a este objeto um arco de circunferência que melhor o represente. A curvatura será o inverso do raio da circunferência. Sabemos que 3 pontos não colineares definem somente uma circunferência que passe por eles⁸. Então, o que precisa ser feito é escolher os 3 pontos que definem a circunferência que passa pela imagem. São eles: os dois pontos mais distantes um do outro, e o terceiro ponto será o ponto médio da largura da imagem (ver figura 16, gráfico 8). Com esses pontos definidos o programa calcula a curvatura da imagem (ver figura 16, gráfico 9);

⁸Este fato é fácil de se perceber: como a equação da circunferência é $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$, nós temos 3 variáveis, que são o raio e as coordenadas x e y do centro da circunferência (x_c e y_c), então precisaremos de 3 pontos para resolver o sistema, que correspondem a 3 equações.

6. Distância entre o centro geométrico e o centro real da imagem: nós já temos ambos os valores, então basta calcular a distância entre um e outro.

O centro geométrico normalmente estará muito próximo do centro real da imagem, salvo quando ela estiver muito distorcida: quanto mais distorcida estiver a imagem, mais distante do centro real estará o centro geométrico. Basta pensar que o centro de massa de um anel se situa fora deste e fica fácil compreender o que acontece. Esta pode ser uma medida útil para fornecer informações sobre a curvatura do arco.

Outra alternativa que estamos testando é considerar aquele terceiro ponto que define a circunferência que passa pela imagem como um tipo de centro da imagem, e calculamos a distância deste até o centro real da imagem;

7. Magnificações radial e tangencial (equações 70 e 71). Esses parâmetros são locais, ou seja, são calculados para determinados pontos (que serão os centros reais das imagens). Então, o nosso programa executa o `gravlens`, que possui um comando que fornece a matriz de magnificação para um dado ponto. Utilizamos este comando juntamente com as coordenadas do centro da imagem para obter a matriz de magnificação. Comparando essa matriz com (58) e utilizando as equações (59), (70) e (71) obtemos a magnificação radial e tangencial da imagem;
8. O último passo é gravar num arquivo todos esses parâmetros. O nosso programa grava essas grandezas de modo que cada linha contém as informações correspondentes a uma imagem, sendo que as duas últimas colunas de cada linha identificam a imagem a que pertencem todos aqueles valores.

A figura 15 esquematiza os passos mais fundamentais realizados pelo algoritmo, enquanto a figura 16 mostra um passo a passo na identificação dos pontos da imagem.

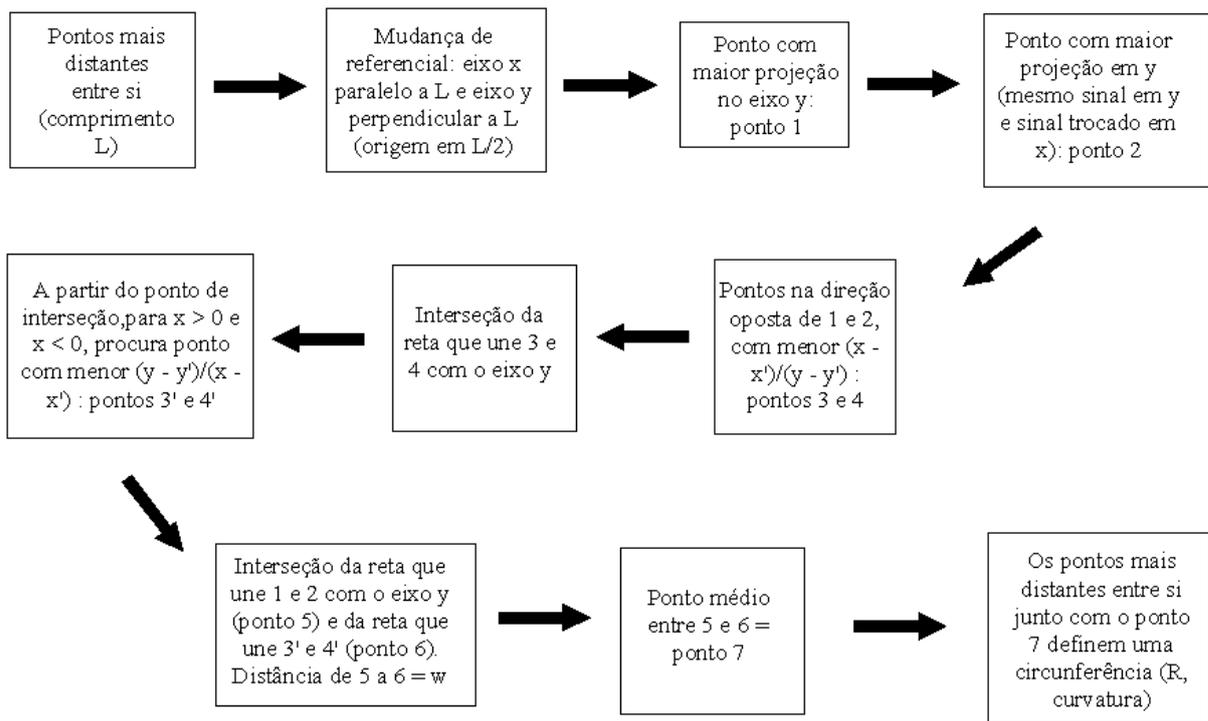


Figura 15: Diagrama que resume o algoritmo que faz as medidas na imagem.

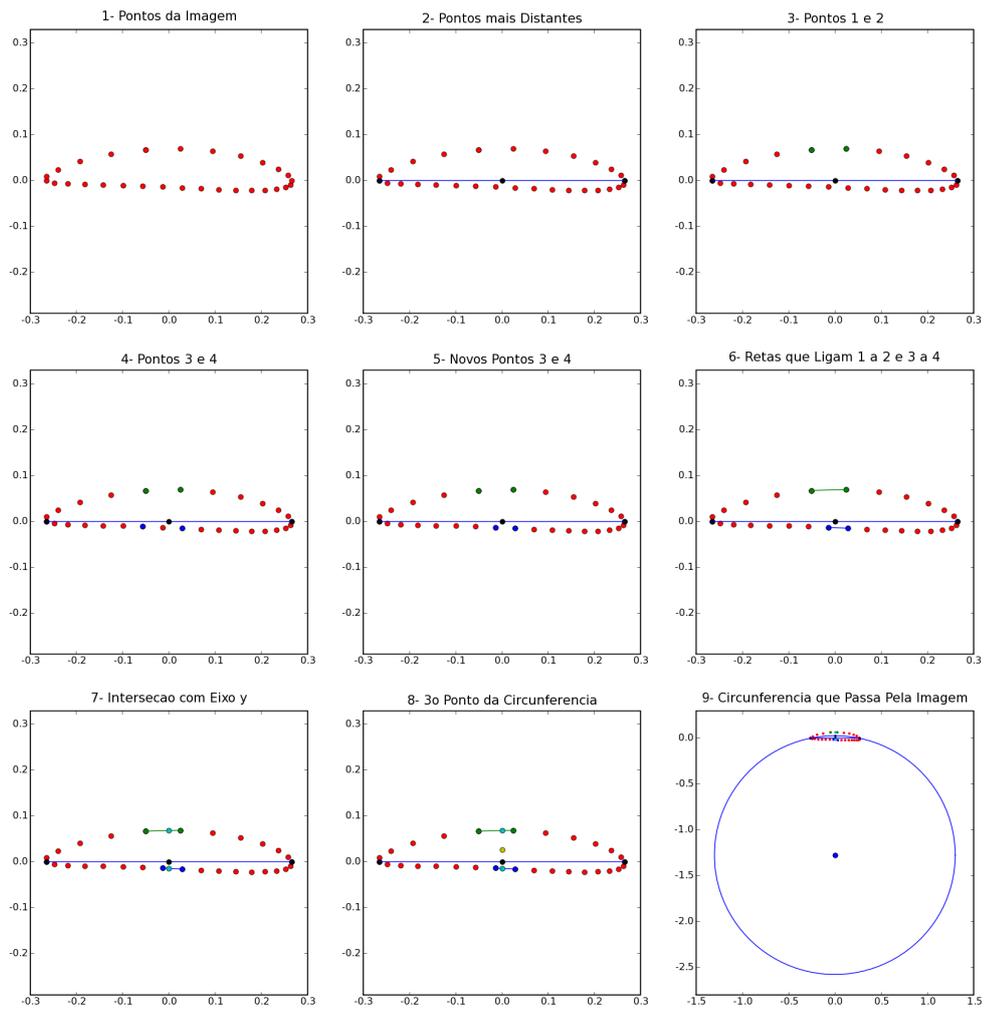


Figura 16: Passo a passo na identificação de pontos de uma imagem.

4 Resultados

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns resultados obtidos através da metodologia do capítulo 3, a qual resulta na criação de um arquivo para cada modelo de lente com todas as grandezas utilizadas para criar os gráficos, como: comprimento da imagem L , largura W , curvatura, magnificação radial e tangencial, etc. Com estes arquivos, utilizamos o matplotlib para traçar os gráficos.

4.1 Características Gerais

Antes de analisar o comportamento de parâmetros específicos, vamos considerar um panorama mais geral, que pode ser observado a partir das figuras 17, 18 e 20. Nestas figuras foram traçadas todas as fontes de uma só vez, mostradas junto com as cáusticas, enquanto as respectivas imagens foram colocadas com as curvas críticas. Duas formas foram adotadas para gerar as fontes: primeiramente geramos fontes sobre um dois eixos e depois distribuimos fontes aleatórias no plano das fontes, de forma que este fique denso o suficiente para que bastantes fontes caiam próximas à cáustica tangencial, já que somente as imagens distorcidas tangencialmente são tratadas neste trabalho.

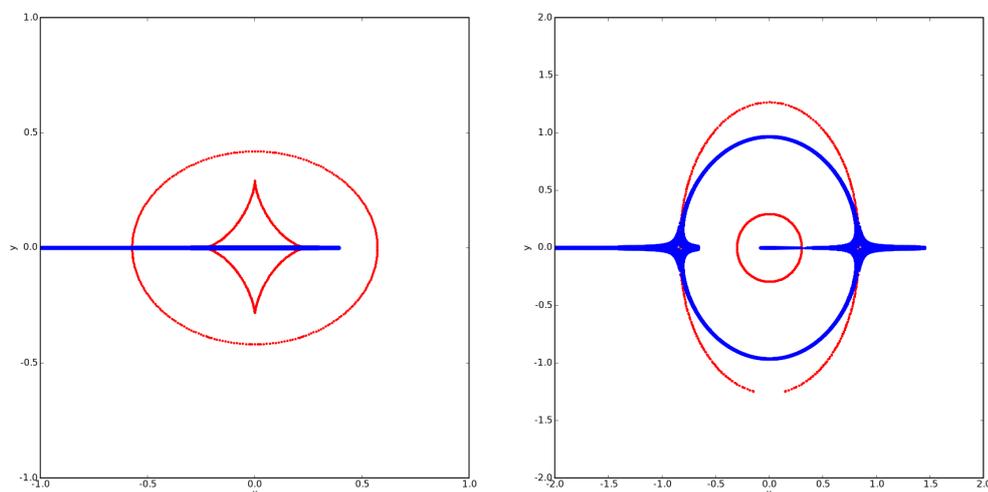


Figura 17: Fontes distribuídas sobre o eixo x , à esquerda, junto com as cáusticas. À direita estão as imagens com as curvas críticas. A lente é um NFW com elipticidade 0.3.

Na figura 17, podemos observar a linha (são, na verdade, fontes circulares sobrepostas) sobre a qual foram geradas as fontes. No gráfico da direita observamos a região em que as

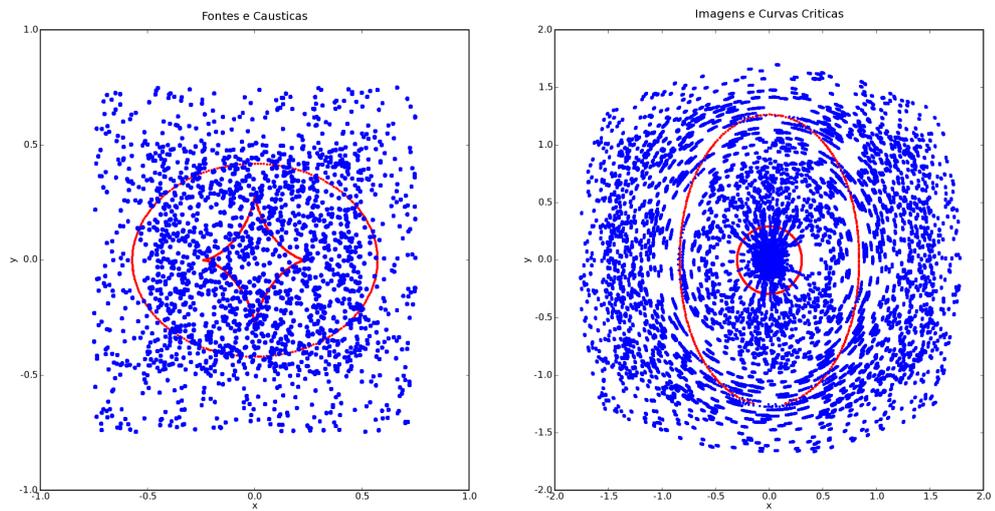


Figura 18: Fontes distribuídas aleatoriamente em um quadrado de lado 1.4, à esquerda, junto com as cáusticas. À direita estão as imagens com as curvas críticas. A lente é um NFW com elipticidade 0.3.

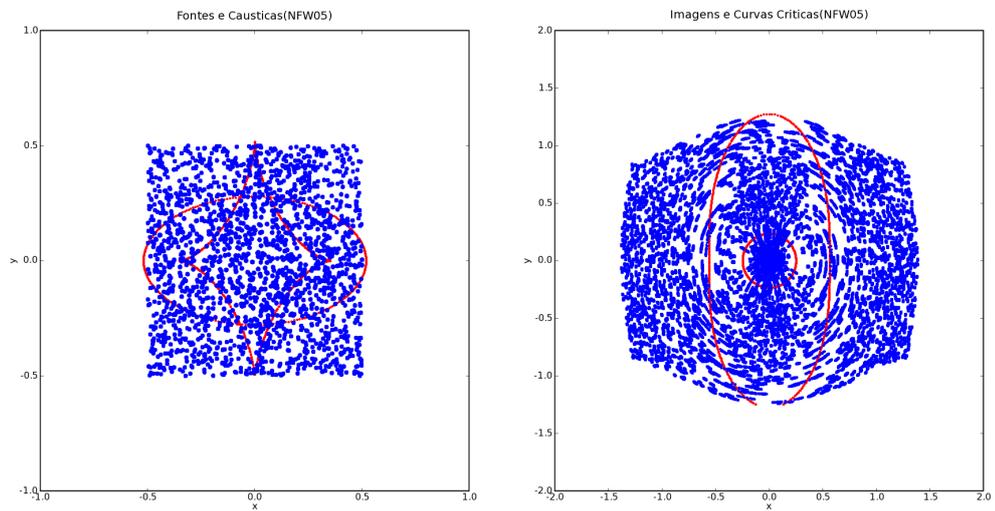


Figura 19: Fontes distribuídas aleatoriamente em um quadrado de lado unitário, à esquerda, junto com as cáusticas. À direita estão as imagens com as curvas críticas. A lente é um NFW com elipticidade 0.5.

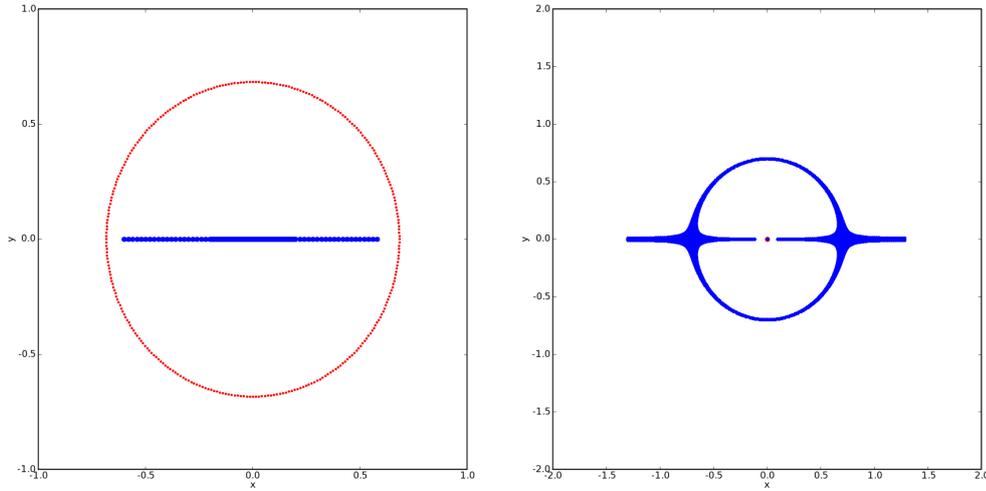


Figura 20: À esquerda temos as fontes distribuídas sobre o eixo x , junto com as cáusticas. À direita estão as imagens com as curvas críticas. A lente é uma SIS.

imagens são formadas: o rastro que atravessa a curva crítica interior representa a região onde as imagens são distorcidas na direção radial, enquanto o caminho que aparece com a forma levemente oblata representa imagens magnificadas tangencialmente. Na figura 20 observamos uma situação muito parecida, sendo que como a lente possui simetria esférica, fontes geradas em qualquer direção são mapeadas em imagens que cobrem toda a curva crítica tangencial.

Nas figuras 18 e 19, onde foram geradas 2000 fontes distribuídas aleatoriamente para um modelo NFW com elipticidades 0.3 e 0.5, respectivamente, podemos notar 2 características importantes:

- Direção das imagens e elipticidade da lente: podemos reparar que as imagens distorcidas tangencialmente não acompanham perfeitamente as curvas críticas, mas causam o efeito de suavizar a elipticidade da lente. Perfis de densidade com elipticidade cada vez maiores possuem curvas críticas cada vez mais alongadas, porém as imagens atuam de forma contrabalançar este efeito, o que nos leva a pensar que ao observar uma imagem real, mesmo que rica em arcos, seria difícil inferir a elipticidade da lente a partir dos mesmos.
- Presença de arcos de fusão: há claramente alguns arcos que estão atravessando a cáustica tangencial, e sabemos que estes arcos são compostos por mais de uma

imagem, o que implica que estes são arcos resultantes de fusão de imagens. Conforme mencionado anteriormente, nosso programa não consegue medir esses arcos de fusão, mas mede cada imagem separadamente.

4.2 Curvatura e Razão Axial

O intuito desta seção é relacionar a razão axial das imagens com suas curvaturas. Como observado anteriormente, o centro geométrico de uma imagem se distancia do centro real conforme a imagem fica mais curva. Vamos chamar a distância entre estes dois centros de D_{ij} . Agora, ao invés da curvatura, vamos utilizar D_{ij} para verificar como este se relaciona com a razão axial (figuras 22, 23 e 24).

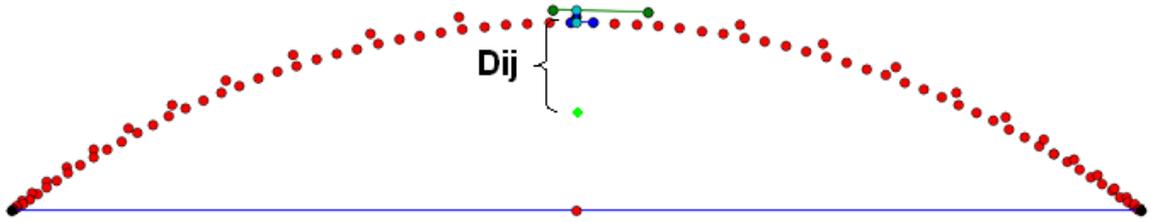


Figura 21: Arco extremamente curvo, mostrando a grandeza D_{ij} , que é a distância entre o centro geométrico (em verde) e centro real.

Na figura (22) podemos observar duas curvas bem definidas. Elas representam arcos e contra-arcos, as duas imagens referentes à SIS. Repare que as duas curvas tendem a zero juntas, o que é natural para pequenas deformações. A figura (23) possui interpretação análoga, mas são quatro imagens, enquanto a figura (24) tem o comportamento delimitado pelas curvas da figura (23).

4.3 Propriedades Locais e não Locais

Agora fazemos uma análise de como a razão μ_t/μ_r , para $\mu_t/\mu_r > 1$, se relaciona com a razão comprimento-largura (L/W) das imagens. Verificamos esta relação para os mesmos exemplos das figuras (17, 18 e 20) e depois verificamos o comportamento do gráfico para diferentes elipticidades do NFW. Apresentamos os gráficos de μ_t/μ_r x L/W com a reta

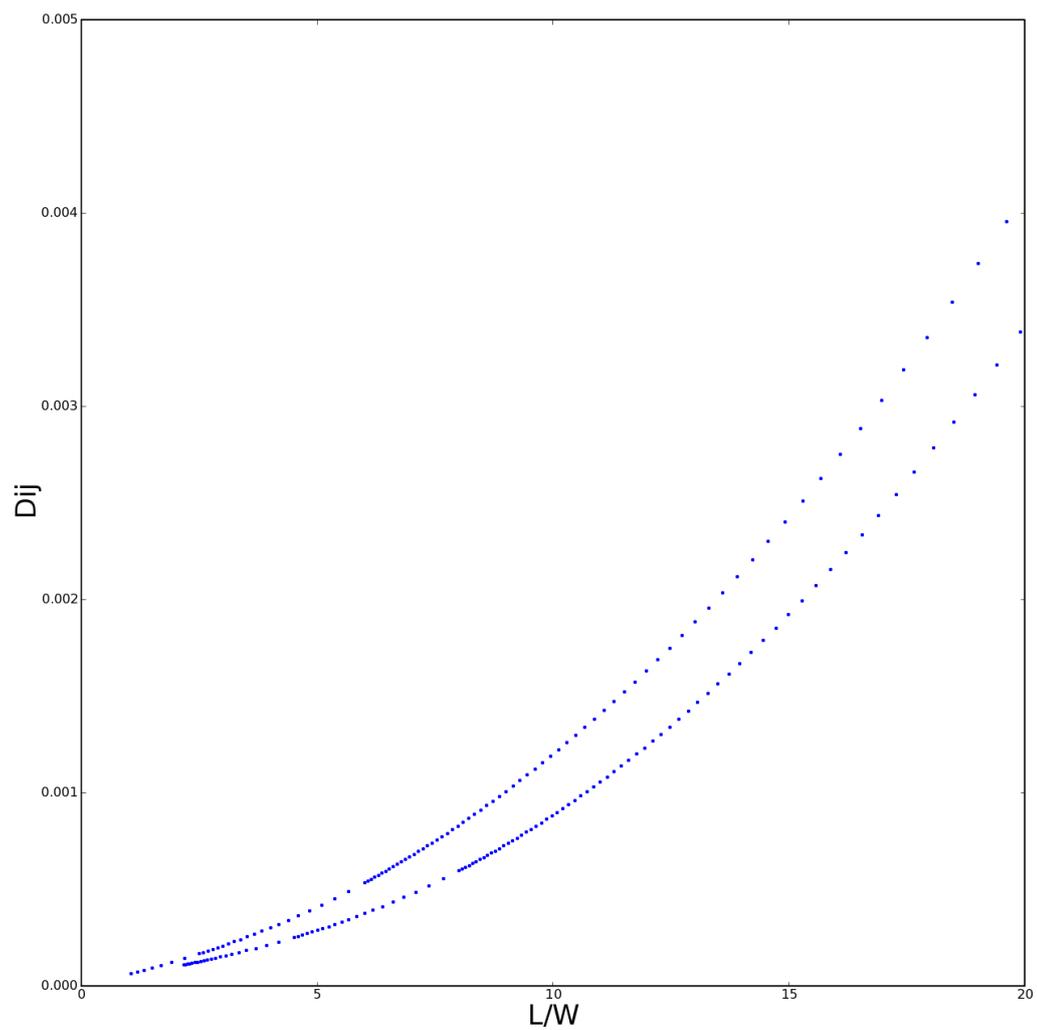


Figura 22: Gráfico da razão axial por D_{ij} para a SIS: repare no comportamento bem definido de duas curvas, referentes às duas imagens do modelo da SIS.

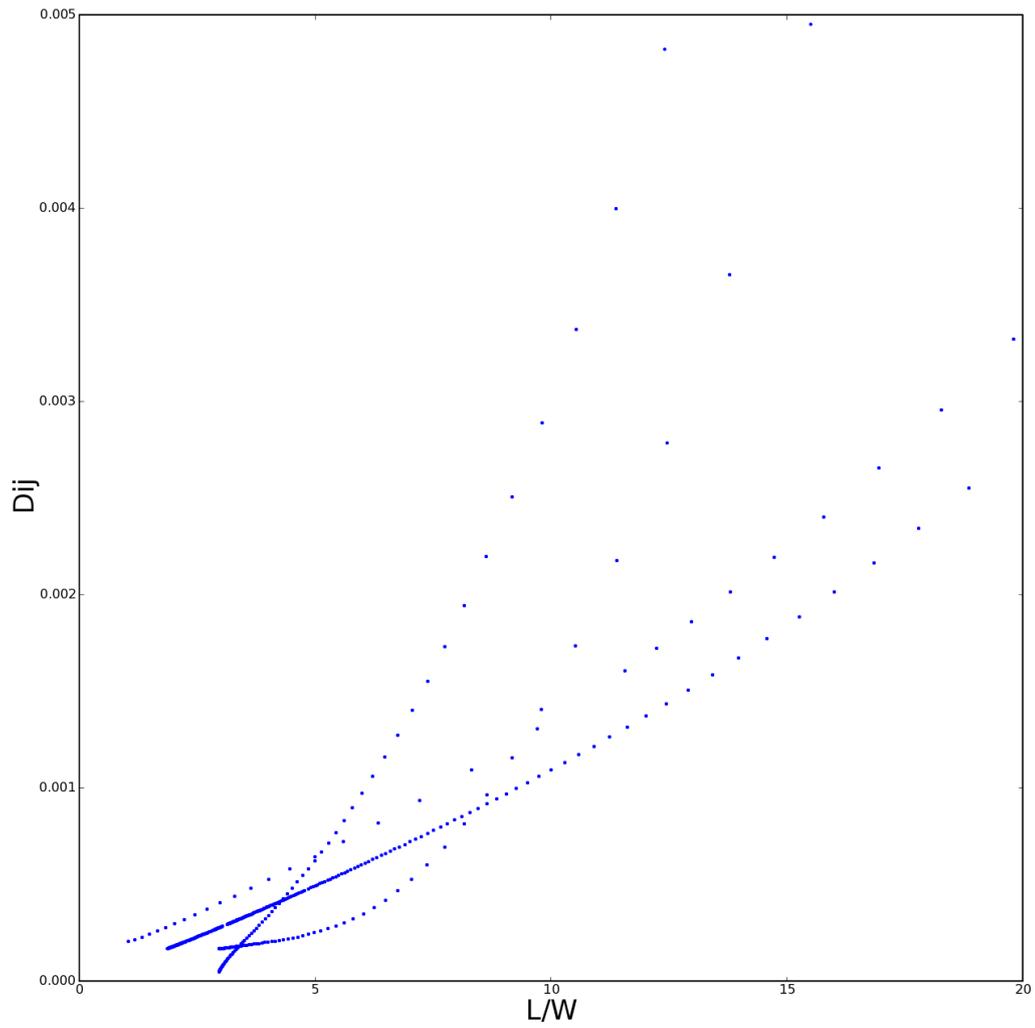


Figura 23: Razão axial e centro geométrico para o modelo de NFW com $e = 0.3$ e pontos sobre o eixo x : repare no comportamento bem definido de quatro curvas, referentes às quatro imagens do NFW.

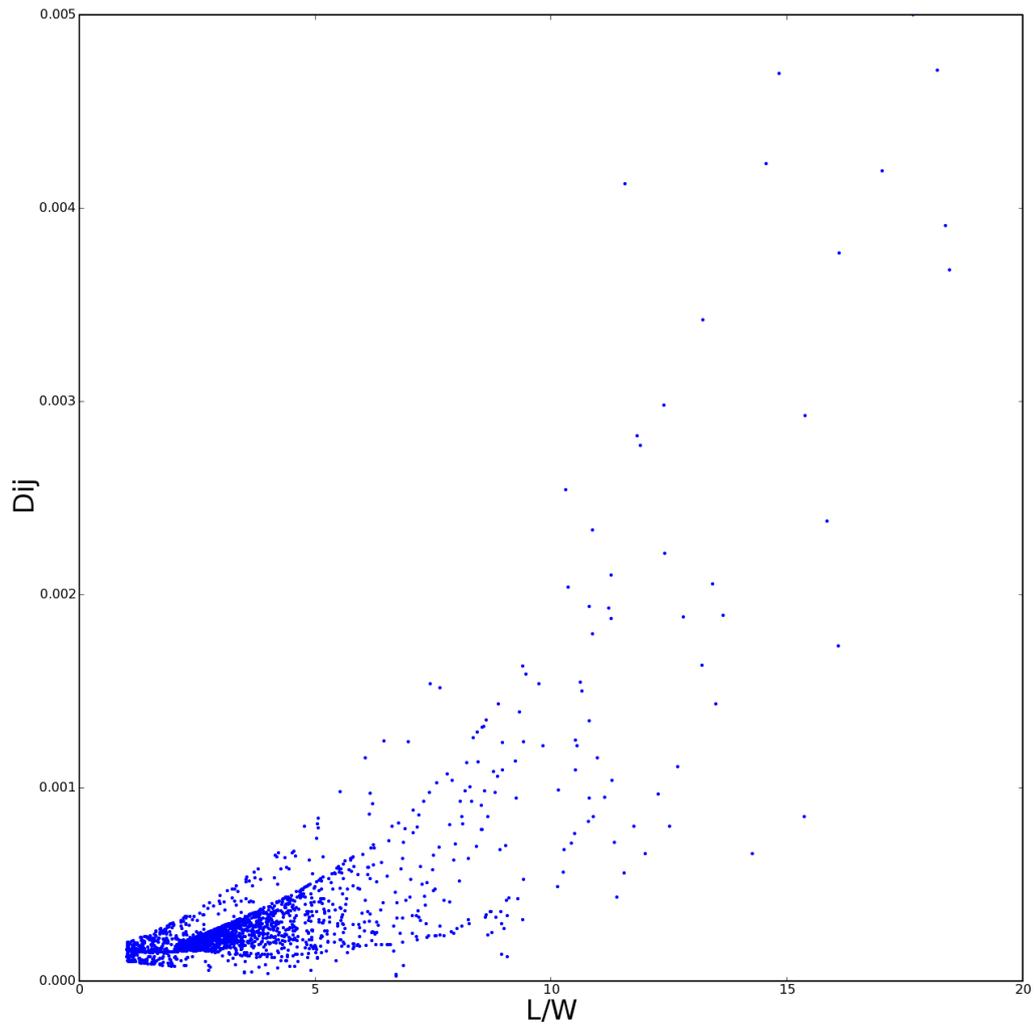


Figura 24: Razão axial e centro geométrico para o modelo de NFW, com $e = 0.3$, fontes distribuídas aleatoriamente: repare no comportamento do gráfico, delimitado pelas curvas da figura (23) , referentes às quatro imagens do NFW.

$x = y$ mostrada ao mesmo tempo para comparar visualmente o quanto esta relação se afasta do esperado.

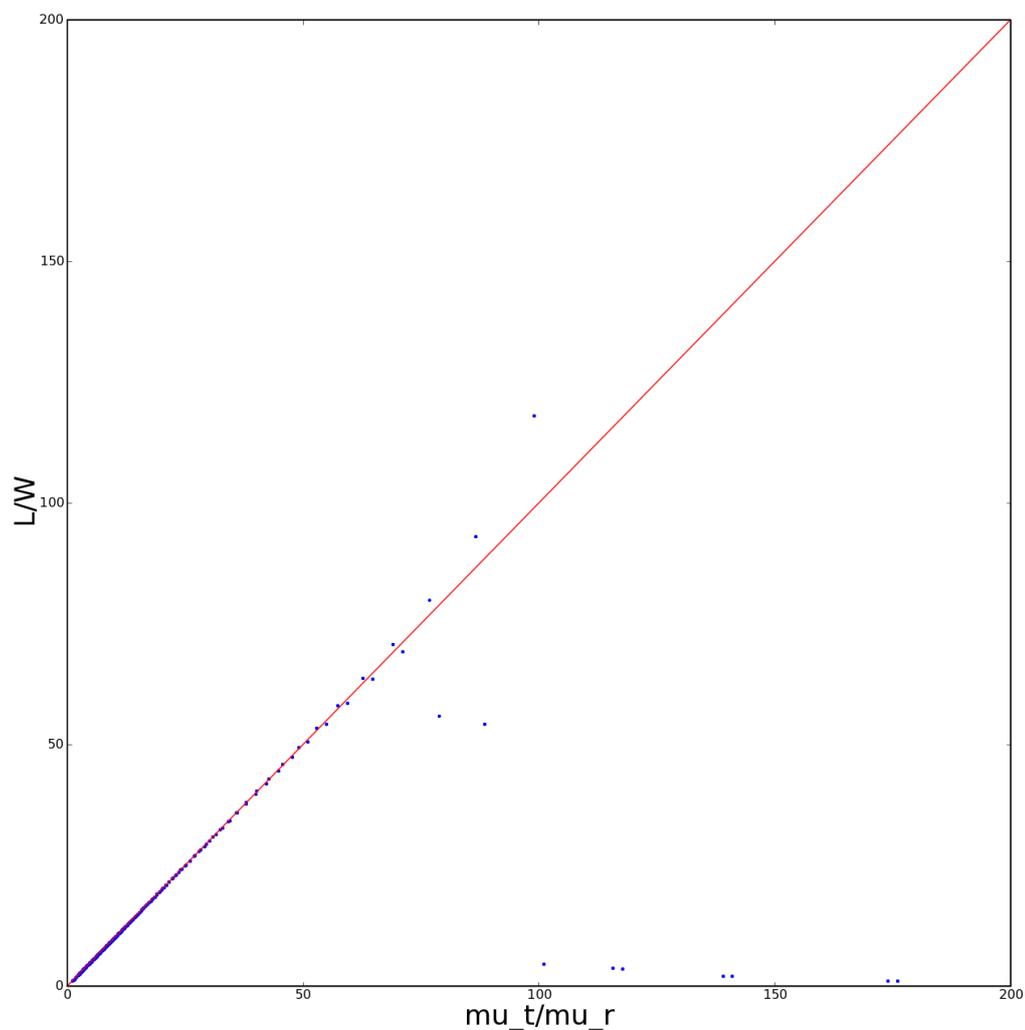


Figura 25: $\mu_t/\mu_r \times L/W$ para a SIS.

Na figura (25) temos o referido gráfico para a SIS. É possível perceber uma boa relação do comportamento do gráfico com a reta $x = y$ até valores próximos a 70. Repare nos pontos que estão próximos ao eixo x e com grandes magnificações: estes pontos representam imagens extremamente arqueadas e o nosso programa não é capaz de definir a largura destes objetos. Isto acontece porque as duas imagens estão se fundindo para

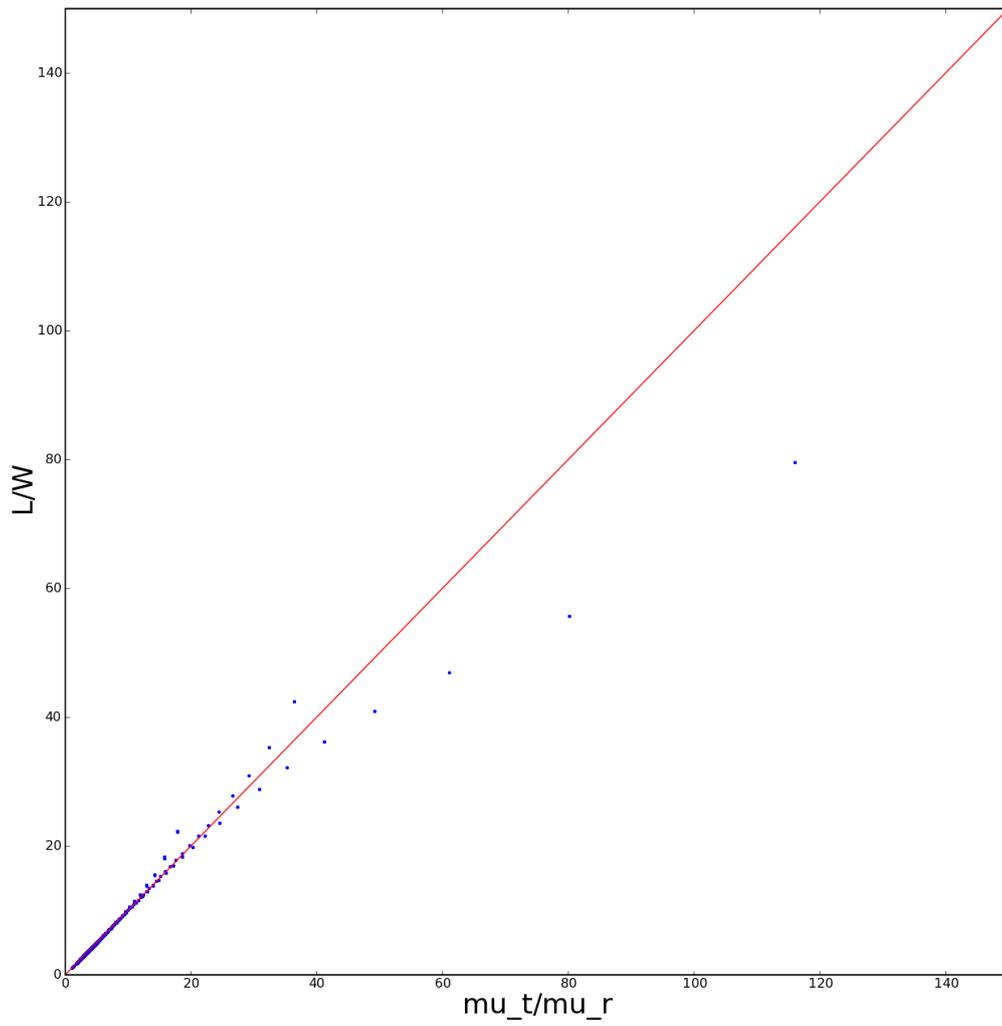


Figura 26: $\mu_t/\mu_r \times L/W$ para o NFW com $e = 0.3$ e fontes sobre o eixo x .

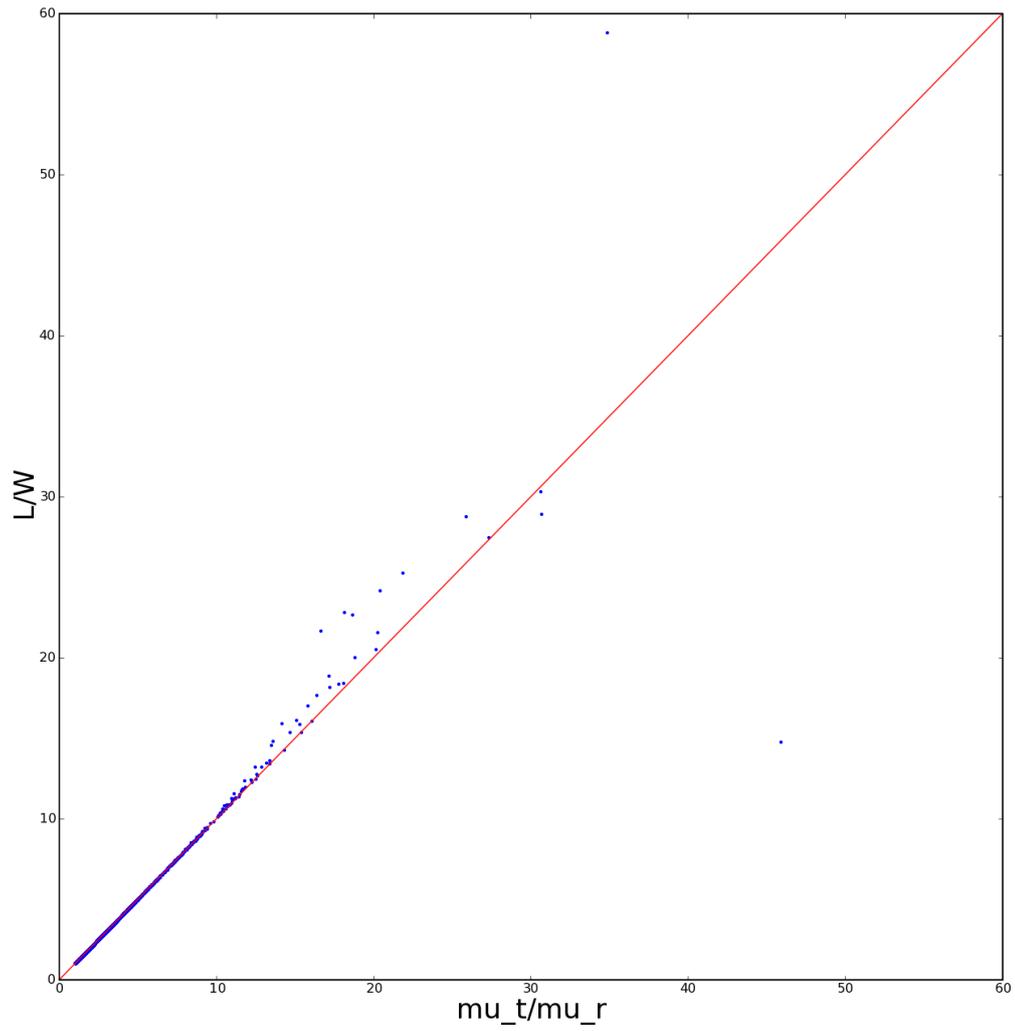


Figura 27: $\mu_t/\mu_r \times L/W$ para o NFW com $e = 0.3$ e fontes distribuídas aleatoriamente.

formar um anel de Einstein: cada uma delas se torna um anel, sem espessura definida e estes anéis serão concêntricos. Então a largura da imagem resultante seria a diferença entre os raios dos dois anéis. Como o nosso programa faz medidas nas imagens separadamente, ele associa uma largura errada à imagem.

Na figura (26) temos o gráfico para o NFW com elipticidade 0.3, sendo que as fontes foram distribuídas sobre o eixo x . Percebemos uma boa correlação até aproximadamente $L/W = 40$. Depois disto há uma grande dispersão, embora o gráfico seja muito pouco povoado nesta região. Apesar disto, é possível observar um comportamento que começa mais ou menos de $L/W = 40$: a razão L/W passa a ser cada vez menor do que μ_t/μ_r .

A figura (27) foi traçada para o NFW com elipticidade 0.3, porém com as fontes distribuídas aleatoriamente. Este gráfico exhibe um comportamento semelhante ao anterior, mas a dispersão começa a aumentar já com, no máximo, $L/W = 30$. Como esperamos que o comportamento da figura (27) se aproxime do da figura (26), talvez gerando um número maior de fontes haja imagens magnificadas a ponto de ter razões comprimento-largura maiores.

Agora vamos comparar o comportamento da relação entre μ_t/μ_r e L/W quando variamos a elipticidade do modelo. Na figura (28) encontram-se os gráficos de μ_t/μ_r por L/W para 4 elipticidades diferentes do modelo NFW: 0.0, 0.2, 0.3 e 0.5. Uma característica fica imediatamente evidente: aumentando a elipticidade, diminuimos a população de arcos com L/W altos, de modo que, no caso em que a elipticidade é 0.5, não há nenhuma imagem com a razão comprimento-largura acima de 20. Agora observe a figura (29). Ela é uma ampliação da figura (28), mostrando apenas o intervalo de 0 a 30 para L/W e μ_t/μ_r . Neste gráfico fica claro que L/W se afasta de μ_t/μ_r tão mais rapidamente quanto maior for a elipticidade do modelo (no caso o NFW). Também é possível confirmar o que foi afirmado a respeito da figura (28): modelos mais elípticos possuem menos imagens com altas razões axiais.

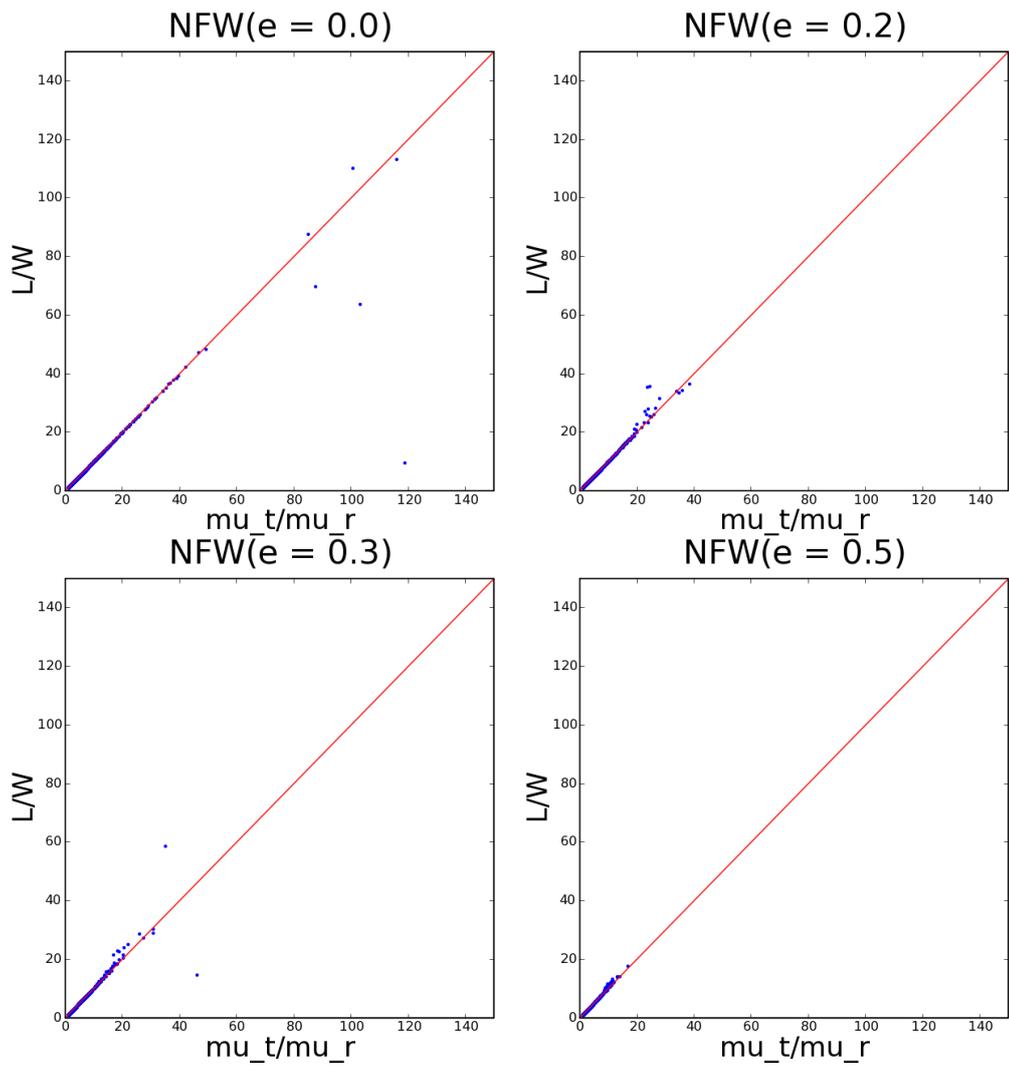


Figura 28: Gráficos de $\mu_t/\mu_r \times L/W$ para 4 elipticidades do modelo de NFW: 0, 0.2, 0.3 e 0.5.

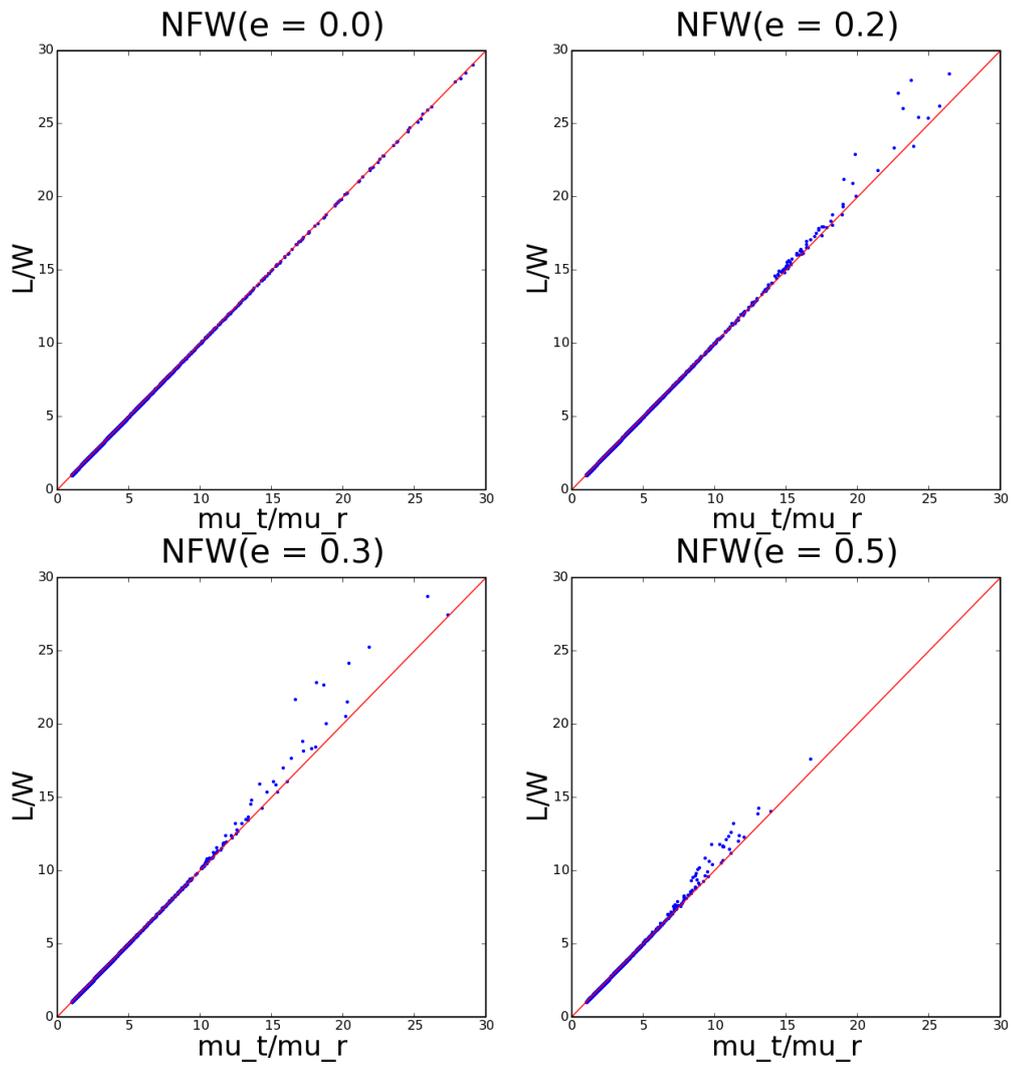


Figura 29: Gráficos de $\mu_t/\mu_r \times L/W$ para 4 elipticidades do NFW: 0, 0.2, 0.3 e 0.5., restringindo o intervalo de 0 a 30.

5 Conclusões e Perspectivas

Motivados pelas potenciais aplicações astrofísicas e cosmológicas da estatística de arcos gravitacionais e pela possibilidade de modelar o processo de formação de arcos, desenvolvemos um estudo da relação entre propriedades locais e não locais das imagens. Para isso, utilizamos o aplicativo `gravlens` e programas próprios para gerar imagens e fazer medidas nelas.

Escolhemos como modelos para a distribuição de massa da lente a esfera isotérmica singular e o perfil de NFW com elipticidades 0, 0.2, 0.3 e 0.5. Após toda a metodologia explicada no capítulo 3, tínhamos todos os dados relevantes das imagens (comprimento, largura, magnificações, etc.) gravados em arquivos, que foram utilizados para fazer os gráficos apresentados no capítulo 4. Estudamos como diversas propriedades das imagens podem se relacionar e descobrimos que a posição do centro geométrico de uma imagem relativa ao centro real (Di_j) possui uma clara relação com sua razão axial. Podemos perceber também que cada “família de imagens” (para os casos de imagens múltiplas) possui uma maneira própria de relacionar Di_j com L/W , o que é representado pelas diferentes curvas presentes nas figuras (22) e (23).

Verificamos que a razão entre as magnificações tangencial e radial (μ_t/μ_r) representa, com boa aproximação, a razão axial (L/W) medida em imagens e esta relação é tão melhor quanto menores forem os valores de L/W (ou μ_t/μ_r). Também notamos que a elipticidade da lente possui considerável importância na dispersão dos gráficos de $\mu_t/\mu_r \times L/W$, sendo que para maiores elipticidades da lente maior é a dispersão para menores razões axiais. Esse resultado justifica uma aproximação utilizada em modelagens semi-analíticas ao mesmo tempo em que estabelece a sua limitação.

Este trabalho serviu como uma premissa para o estudo de seção de choque através de simulação de arcos e esperamos em breve ser capazes de medi-la. A seguir estão algumas etapas que gostaríamos de realizar e pontos que queremos melhorar:

- Precisamos implementar em nosso programa um algoritmo que permita lidar com arcos de fusão, de modo a incluí-los no estudo.
- Precisamos de um método mais eficiente para separar as curvas críticas.
- Utilizaremos os modelos presentes nesse trabalho com fontes de tamanhos diferentes e diferentes valores para a densidade característica do aglomerado, visando assim descobrir se os resultados neste trabalho obtidos são sensíveis à estes parâmetros.

- Faremos uma análise estatística mais quantitativa, procurando relações entre μ_t/μ_r , L/W , D_{ij} , curvatura, etc. em função dos parâmetros e de modelos de lente e em função de propriedades da fonte (tamanho, elipticidade, etc.)

Com o ferramental desenvolvido para este trabalho, estamos prontos para estudar quantitativamente uma série de aspectos fundamentais ligados à geração de arcos por aglomerados de galáxias. Estudar a relação entre propriedades locais e não locais das imagens constitui um dos passos importantes para uma modelagem eficiente e acurada dos arcos gravitacionais, contribuindo para o desenvolvimento de algoritmos rápidos para aplicações à estatística de arcos, um processo importante para tornar os arcos ferramentas úteis para Cosmologia e Astrofísica.

A O Aplicativo Gravlens

Apesar das referências [6, 7] serem a melhor opção para aprender a utilizar o `gravlens`, introduzimos este breve apêndice com os comandos mais utilizados neste trabalho.

Este aplicativo pode ser utilizado para realizar inúmeras operações em lentes gravitacionais, como: gerar fontes elípticas, especificar um modelo para a lente, calcular as posições da imagens, cáusticas e curvas críticas. O `gravlens` é rodado em plataforma Linux [22] e funciona através de linhas de comando, no terminal, e pode ser executado interativamente ou através de arquivos de entrada. Veja abaixo um exemplo de arquivo de entrada.

```
SET GRIDLO1 = .000000001
SET GRIDHI1 = 3.0
SET XTOL = 0.000000001
SET CRITTOL = 0.000000001
SET INTTOL = 0.000000001
SET MAXLEV = 5
SET IMGLEV = 5
STARTUP 1 1
NFW 1 0 0 0.3 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
PLOTCRIT CRIT
ELLSRC SAIDANFW3_034.TXT -0.6700 0.2 0 0 0.004 0.004 1 40
FINDIMG -0.6700 0.0 CSAIDANFW3_034.TXT
```

As duas primeiras linhas (`SET GRIDLO1 = .000000001` e `SET GRIDHI1 = 3.0`) definem a região em que o grid irá se espalhar.

O `gravlens`, para resolver a equação da lente, utiliza um algoritmo de encontrar raízes, e assim encontra as posições das imagens correspondentes a uma dada fonte. A variável `XTOL` é a tolerância na posição, para encontrar as raízes, enquanto `CRITTOL` é a tolerância para encontrar as curvas críticas.

O comando `SET INTTOL` especifica a tolerância para calcular integrais numéricas. Os comandos `MAXLEV` e `IMGLEV` são para refinar o grid próximo às curvas críticas e próximo às imagens, respectivamente. Como nós estamos interessados justamente em imagens altamente magnificadas (próximas às curvas críticas), aumentamos os dois para 5 (o padrão do `gravlens` é 3).

O comando `STARTUP` possui a seguinte sintaxe:

```
STARTUP < no de galáxias por modelo> < no de modelos> .
```

Desta forma é especificado quantas fontes por modelo serão utilizadas e quantos modelos serão utilizados. O `gravlens` permite utilizar modelos diferentes para diferentes objetos que compõem a lente. Após o comando `STARTUP N1 N2` será preciso especificar o modelo que irá representar a lente. Os modelos suportados pelo aplicativo podem ser vistos em [6]. Neste exemplo, o modelo escolhido para a lente é um NFW com elipticidade 0.3. A linha `NFW 1 0 0 0.3 0 0 0 1 0 0` especifica, respectivamente, κ_s , coordenada x do centro da lente, coordenada y do centro da lente, elipticidade da lente, ângulo que o semi-eixo maior da lente faz com o eixo x , módulo do cisalhamento externo, direção do cisalhamento externo e r_s . Os dois últimos parâmetros não são requeridos para o NFW e devem ser completados com zeros. κ_s e r_s são dados por (74) e foram escolhidos unitários.

Após especificar o modelo, o `gravlens` irá pedir os parâmetros que são permitidos variar. Esta opção é útil na parte de modelagem da lente que o software possui. Como não queremos que nenhum parâmetro varie, simplesmente preenchemos todos os 10 espaços com zeros.

A linha seguinte do nosso exemplo é `PLOTCRIT CRIT`. Este comando gera um arquivo que contém os dados para fazer os gráficos das curvas críticas e cósmicas referentes ao modelo de lente utilizado. Após o comando `PLOTCRIT` basta fornecer o nome do arquivo em que os dados serão escritos (no caso, *crit*).

O comando `ELLSRC` serve para criar uma fonte elíptica e calcular a(s) posição(ões) de sua(s) imagem(ns). A fonte elíptica é constituída de vários pontos, discretizados radialmente e angularmente, formando, na verdade, várias elipses, uma dentro da outra. Este comando tem a forma:

```
ELLSRC <ARQSAÍDA><U0><V0><E><PA><AMIN><AMAX><NRAD><NANG> ,
```

onde *arqsaída* é o nome do arquivo de saída, o par (U_0, V_0) é a posição do centro da elipse, E é a excentricidade, PA é a inclinação do semi-eixo maior da elipse, $AMIN$ é o semi-eixo maior da menor elipse, $AMAX$ é o semi-eixo maior da maior elipse, $NRAD$ é o número de passos realizados entre $AMIN$ e $AMAX$ e $NANG$ é o número de passos angulares. Neste exemplo, apenas uma elipse é criada, com elipticidade 0.2, semi-eixo maior 0.004 e é formada por 40 pontos.

O último comando é o `FINDIMG U V`, que calcula as imagens de uma fonte pontual situada em (u, v) . O `FINDIMG` foi utilizado neste trabalho fornecendo as coordenadas do

centro de cada elipse, para assim obter o centro de cada imagem.

O `gravlens` também permite utilizar dois tipos diferentes de grid, o `GRIDMODE 1` ou `2`. O padrão é o primeiro, que utiliza um grid em coordenadas polares. O `GRIDMODE 2` utiliza um algoritmo que faz o grid de acordo com a posição da curva crítica. O leitor deve ter percebido que, ao longo deste trabalho, as curvas críticas referentes ao modelo NFW apresentam um certo espaço, onde não há pontos (este espaço se encontra no canto inferior da curva crítica exterior). Tais figuras foram feitas com o `GRIDMODE 1`, e já vai ficar claro porque este foi preferido em detrimento do outro. Observe as figuras 30 e 31. Nelas

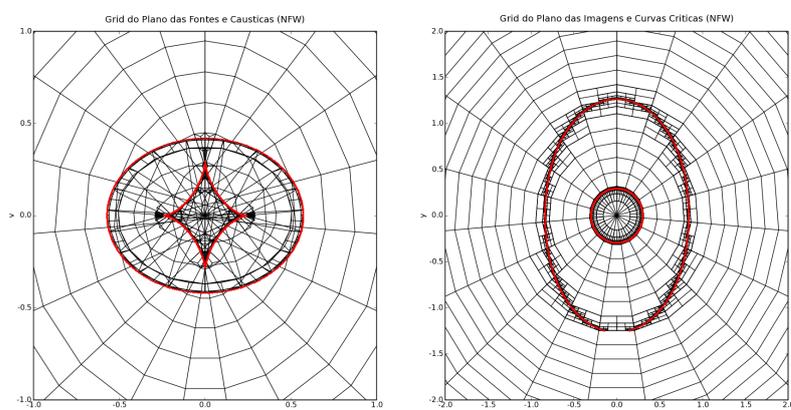


Figura 30: Cáusticas e curvas críticas para o NFW, gridmode 1.

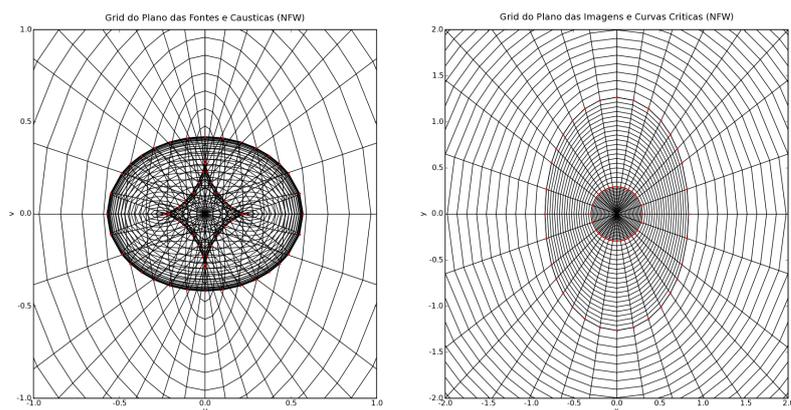


Figura 31: Cáusticas e curvas críticas para o NFW, gridmode 2.

podemos observar em preto o grid e em vermelho as cáusticas e curvas críticas. Embora o `GRIDMODE 2` logo chame a atenção para a densidade de linhas pretas do grid, observamos

que o GRIDMODE 1 utiliza um bom subgrid próximo às cáusticas e curvas críticas. É bom ressaltar que as duas figuras foram feitas utilizando as mesmas especificações para o **gravlens** e, mesmo assim, o número de pontos que compõem as curvas críticas da figura 30 é muito maior (apesar de conter aquela falha mencionada anteriormente). É justamente essa característica que levou o GRIDMODE 1 a se sair melhor do que o GRIDMODE 2 no teste empregado: nós rodamos o mesmo exemplo com cada um dos grids (a saber, um perfil NFW com elipticidade de 0.3) e quando foi utilizado o GRIDMODE 2 houve até mesmo casos em que o algoritmo de separar as imagens não funcionou corretamente (quando a imagem estava muito próxima da curva crítica). Utilizando o GRIDMODE 1 não houve nenhum problema inesperado (as únicas imagens que não foram medidas foram aquelas resultantes de fontes que atravessavam alguma cáustica).

Estas são as informações mínimas para poder utilizar o **gravlens**: para maiores detalhes, como comandos, o catálogo de modelos para a lente que vem embutido e todas as outras capacidades do programa, o leitor é referido às referências citadas, onde em [5] há, inclusive, um pequeno tutorial.

Referências

- [1] Meneghetti M., *Introduction to Gravitational Lensing*, Lecture Scripts:
http://www.ita.uni-heidelberg.de/~massimo/sub/Lectures/gl_all.ps
- [2] Bartelmann, M., *Strong and Weak Lensing by Galaxy Clusters*, astro-ph/0207032v1,
Jul 2002
- [3] Rozo, E., Nagai, D., Keeton, C., Kravtsov, A., *The Impact of Baryonic Cooling on
Giant Arc Abundances*, astro-ph/0609921v1
- [4] Wambsganss J., *Gravitational Lensing in Astronomy*, (Living Rev. Relativity, 1,
(1998), 12. [Online Article]: [http://www.livingreviews.org/Articles/Volume1/1998-12wamb/.](http://www.livingreviews.org/Articles/Volume1/1998-12wamb/))
- [5] Keeton, C., *Software for Gravitational Lensing*,
<http://redfive.rutgers.edu/~keeton/gravlens/>
- [6] Keeton, C., *Software for Gravitational Lensing (Manual)*,
<http://redfive.rutgers.edu/~keeton/gravlens/manual.pdf>
- [7] Keeton, C., *Computational Methods for Gravitational Lensing*, astro-ph/0102340 v1
- [8] Norton, P., Samuel, A., Aitel, D., Foster-Johnson, E., Richardson, L., Diamond, J.,
Parker, A., Roberts, M., *Beginning Python*, Wiley Publishing, 2005
- [9] Gauld, A., *tutor*, May, 2007
<http://www.freenetpages.co.uk/hp/alan.gauld/>
- [10] Lutz, M., *Python - Guia de Bolso*, Wiley Publishing, Editora Alta Books Ltda., 2006
- [11] *Matplotlib (endereço eletrônico)*, <http://matplotlib.sourceforge.net/>
- [12] Hunter, J., Dale, D., *The Matplotlib User's Guide*,
http://matplotlib.sourceforge.net/users_guide_0.91.2svn.pdf, May 2007
- [13] Will, C. M., *Henry Cavendish, Johann von Soldner, and the Deflection of Light*, Am.
J. Phys. 56(5), May 1998

- [14] Jean Eisenstaedt, *A relatividade verificada: o eclipse de Sobral de 29/05/1919*, Einstein e o Brasil. Ildeu de Castro Moreira e Antonio Augusto Passos Videira, eds. Rio de Janeiro: editora UFRJ, pp. 77-100 (1995).
- [15] Nandor, M. J., Helliwell, T. M., *Fermat's principle and multiple imaging by gravitational lenses*, Am. J. Phys. 64 (1), 1996
- [16] Bolton, A. S., Burles, S., Koopmans, L. V. E., Treu, T., Moustakas, L. A., *The Sloan Lens ACS Survey. I. A Large Spectroscopically Selected Sample of Massive Early-Type Lens Galaxies*, Astrophys. J., 638, 703-724, 2006
- [17] Navarro, J. F., Frenk, C. S., White, D. M., *The assembly of galaxies in a hierarchically clustering universe*, MNRAS 275, 56-66, 1995
- [18] Navarro, J. F., Frenk, C. S., White, D. M., *The structure of cold dark matter halos*, Astrophys. J., 462, 563-575, 1996
- [19] Spiegel, M. R., Liu, J., *Mathematical Handbook of Formulas and Tables* (Schaum's Outline Series), 2nd edition, McGraw-Hill, 1999
- [20] Burke, W. L. *Multiple Gravitational Imaging by Distributed Masses*, Ap. J. 244, L1, 1981
- [21] Schneider, P., Ehlers, J., Falco, E.E., *Gravitational Lenses*, Springer-Verlag, 1992
- [22] Barret, D. J., *Linux - Guia de Bolso*, Editora Alta Books Ltda., 2006
- [23] Miceli, A. P. M. R., *Aplicações de Lentes Gravitacionais à Cosmologia e à Astrofísica*, tese de doutorado - UFRJ, 2001
- [24] Kochanek, C. S., Schneider, P., Wambsganss, J., *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro*, G. Meylan, P. Jetzer and P. North, eds. (Springer-Verlag: Berlin), 2006
- [25] Mollerach, S., Roulet, E., *Gravitational Lensing and Microlensing*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2002