MONOGRAFIAS

XXXIV

TÓPICOS DE COSMOLOGIA RELATIVISTA

por

M. Novello

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71 - Botafogo - ZC-82

RIO DE JANEIRO, BRASIL

1974

TÓPICOS DE COSMOLOGIA RELATIVISTA *

M. Novello

* Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Pesquisas.

AGRADECIMENTOS

Ao professor D. W. Sciama que me fêz sentir o prazer em investigar as imensidões cósmicas.

À Alfredo Marques que incentivou a publicação destas notas.

Aos meus alunos e colaboradores C. A. P. Galvão, L. C. M. S. Rodrigues e I. Damião que reviram parte deste trabalho.

À Morgana Tavares pelo seu trabalho de datilografia.

ÍNDICE

Página

INTRODUÇÃO

Esta monografia se baseia essencialmente em minhas notas de aula do Curso que venho dando no C.B.P.F. desde Setembro de 1972.

Os alunos eram, então, candidatos ao Mestrado de Física Teórica do C.B.P.F., que possuiam conhecimento de relatividade geral e uma primeira introdução à Cosmologia (nível Adler et al.).

O objetivo principal do Curso era conceder uma visão global de Cosmologia Moderna com a finalidade de incentivar o interesse por esta disciplina praticamente inexistente no Brasil até então.

A matéria ficou dividida em tópicos mais ou menos independentes uns dos outros e, praticamente, auto-suficiente.

Em termos quantitativos cada tópico ficou reduzido à quse 1/3 de seu conteúdo original em classe. Isso se deve a que estas notas foram preparadas como um roteiro de aula e não como uma autêntica monografia. Entretanto, elas permitirão ao leitor obter um conhecimento de Cosmologia Relativista básico para uma possível investida futura nesta área.

Em suas linhas gerais e também em detalhes específicos que aparecerão claro ao leitor, esta monografia representa um esboço de minha visão atual da Questão Cosmológica.

Como tal, ela possue um caráter de arbitrariedade na seleção de tópicos e em sua extensão.

Cursos adicionais aparecerão nos anos próximos, onde procurarei complementar os esboços aqui apresentados.

CAPÍTULO I

ESPAÇO E TEMPO

O princípio de covariância geral costuma ser considerado um dos fundamentos da teoria da Gravitação de A. Einstein. Segundo êste princípio, ao tratarmos de leis físicas deveríamos poder fazê-lo sem explicitar qual o sistema de coordenadas adotado. Como veremos ao longo dêste curso, a Cosmologia se vê compelida (na maior parte dos casos tratados) a adotar uma posição diferente ao assumir a priori a existência de um sistema de coordenadas privilegiado: o chamado sistema comovendo-se com o observador e onde as galáxias se encontram em repouso.

Para isto, seja Σ uma hipersuperfície do tipo espaço e P um ponto de Σ. De P consideremos uma geodésica γ ortogonal em P a Σ. Seja s um parâmetro afim sobre γ de tal modo que possamos caracterizar um ponto de γ pelas coordenadas (x^i, s). Assim qualquer ponto M do espaço-tempo estará caracterizado ao serem dados (x^i) e o parâmetro s de γ ε M.

A velocidade de um observador movendo-se ao longo de γ é dado pelo vetor tangente à curva:

$$V^\mu = \left.\frac{dx^\mu}{ds}\right|_{x^i = c^{te}} \tag{I.1}$$

Utilizaremos tal vetor V^μ para separar a estrutura espaço-tempo em uma estrutura produto espaço $\oplus$ tempo. (Isto é, a topologia da variedade M_4 será dada pelo produto $R^1 \otimes S^3$).

Definiremos o tensor de projeção no tri-espaço ortogonal a V^μ como sendo $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu \tag{I.2}$$

Como V^μ será normalizado a 1 e é vetor do tipo-tempo, teremos:

$$V_\mu V_\nu g^{\mu\nu} = 1 \tag{I.3}$$

E daí

(?) $$h_{\mu\nu} V^\mu = 0 \tag{I.4}$$

E também

$$Tr(h_{\mu\nu}) \equiv h_{\mu\nu} \; g^{\mu\nu} \equiv h = 3 \tag{I.5}$$

Um operador de projeção P satisfaz a propriedade $P^2 \sim P$. Com efeito, tem-se

$$h_{\alpha\beta} \; h^\beta{}_\lambda = h_{\alpha\lambda} \tag{I.6}$$

A decomposição acima nos permite escrever o elemento infinitesimal de linha em M_4 como:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\ dx^\alpha\ dx^\beta = h_{\alpha\beta}\ dx^\alpha\ dx^\beta + \\ + V_\alpha\ V_\beta\ dx^\alpha\ dx^\beta \tag{I.7}$$

isto é,

$$g_{ij} = h_{ij}$$

$$g_{oi} = h_{oi}$$

$$g_{oo} = h_{oo} - 1 \qquad (?)$$

(usando $V^\mu \sim \delta^\mu_o$).

Daremos a seguir alguns exemplos onde utilizamos esta projeção para decompor tensores que serão empregados mais adiante na análise de modelos cosmológicos.

EXEMPLO 1: O campo eletromagnético. Seja $F_{\alpha\beta}$ o tensor de campo eletromagnético. Temos

$$F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha} = 0 \tag{I.8}$$

Define-se os vetores elétrico E_α e magnético H_α pelas relações

$$E_\alpha = F_{\alpha\beta}\ V^\beta \tag{I.9a}$$

$$H_{\alpha} = \frac{1}{2}\ \eta_{\alpha\beta\mu\nu}\ F^{\mu\nu}\ V^{\beta} \tag{I.9b}$$

Onde usamos o vetor tipo-tempo V^{μ} como vetor de projeção, e

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g}\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$$

onde $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita; g é o determinante de $g_{\mu\nu}$.

De (I.9) podemos facilmente ver que os vetores elétrico e magnético são ortogonais a V^{μ}:

$$\begin{aligned} E_{\alpha}\ V^{\alpha} &= 0 \\ H_{\alpha}\ V^{\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{I.10}$$

Então, um cálculo direto permite escrever

$$F_{\alpha\beta} = V_{\alpha}\ E_{\beta} + V_{\beta}\ E_{\alpha} + \eta_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}\ V_{\mu}\ H_{\nu} \tag{I.11}$$

É importante lembrar aqui a relação (a ser utilizada)

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha\beta\mu\nu}\ \eta_{\nu\lambda\rho\sigma} = \delta^{[\alpha}_{\sigma}\ \delta^{\beta}_{\lambda}\ \delta^{\mu]}_{\rho} = \delta^{\alpha}_{\sigma}\ \delta^{\beta}_{\lambda}\ \delta^{\mu}_{\rho} - \\ - \delta^{\beta}_{\sigma}\ \delta^{\alpha}_{\lambda}\ \delta^{\mu}_{\rho} + \delta^{\mu}_{\sigma}\ \delta^{\alpha}_{\lambda}\ \delta^{\beta}_{\rho} - \delta^{\mu}_{\sigma}\ \delta^{\beta}_{\lambda}\ \delta^{\alpha}_{\rho} + \\ + \delta^{\beta}_{\sigma}\ \delta^{\mu}_{\lambda}\ \delta^{\alpha}_{\rho} - \delta^{\alpha}_{\sigma}\ \delta^{\mu}_{\lambda}\ \delta^{\beta}_{\rho} \end{aligned} \tag{I.12}$$

EXEMPLO 2: *Tensor de Weyl.*

Mais adiante teremos oportunidade de explorar com detalhes as propriedades do tensor de Weyl e sua importância em caracterizar a parte puramente gravitacional do espaço-tempo. Define-se o tensor de Weyl $C_{\alpha\beta\mu\nu}$:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2} \{g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu}\} +$$

$$+ \frac{1}{6} R \{g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}\} \qquad \text{(I.13)}$$

Desta definição e usando as simetrias do tensor de Riemann, podemos mostrar que:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = - C_{\beta\alpha\mu\nu}$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = - C_{\alpha\beta\nu\mu}$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = C_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}\, g^{\alpha\mu} = 0 \qquad \text{(I.14)}$$

(todos os traços do tensor de Weyl são nulos).

Por analogia com o tensor eletromagnético definiremos a parte elétrica do tensor de Weyl:

$$E_{\alpha\beta} = - C_{\alpha\mu\beta\nu}\, V^{\mu} V^{\nu} \qquad \text{(I.15)}$$

e a parte magnética:

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu}{}^{\rho\sigma} \; C_{\rho\sigma\beta\lambda} \; V^{\mu} V^{\lambda} \tag{I.16}$$

É fácil verificar então que

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= E_{\beta\alpha} \\ E^{\alpha}{}_{\alpha} &= E_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = 0 \\ E_{\alpha\beta}\, V^{\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{I.17}$$

e também

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} &= H_{\beta\alpha} \\ H^{\alpha}{}_{\alpha} &= 0 \\ H_{\alpha\beta}\, V^{\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{I.18}$$

Como no caso anterior, também aqui o conhecimento das partes elétricas e magnéticas do tensor de Weyl permitem escrevê-lo:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = {} & 8 \; V_{[\alpha} \; E_{\beta]}{}^{[\mu} \; V^{\nu]} - 4\, \delta^{[\mu}_{[\alpha} \; E^{\nu]}_{\beta]} - \\ & - 2\, \eta_{\alpha\beta\lambda\sigma} \; V^{\lambda} H^{\sigma[\mu} \; V^{\nu]} - 2\, \eta^{\mu\nu\rho\sigma} \, V_{\rho} \, H_{\sigma[\alpha} \, V_{\beta]} \end{aligned} \qquad \text{I.19)}$$

EXERCÍCIO: Encontre as componentes elétrica e magnética para o campo de Yang-Mills $F^A_{\mu\nu}$. Quantos invariantes I_i é possível obter com estas partes (E^A_μ, H^A_μ) ? Construa uma Lagrangiana com I_i e analise a dinâmica desse sistema segundo os diferentes valores desses invariantes.

EXEMPLO 3: *Tensor momentum-energia*

Ao longo do nosso curso teremos oportunidade de considerar diferentes estruturas físicas como fonte da curvatura do *espaço*. É interessante estudar então um modo único de tratar uniformemente estas diferentes fontes, considerando o tensor momentum energia como constituído por um gás. Escrevemos

$$T_{\alpha\beta} = \rho\, V_\alpha\, V_\beta - p\, h_{\alpha\beta} + q_{(\alpha}\, V_{\beta)} + \Pi_{\alpha\beta} \tag{I.20}$$

onde

$$\begin{aligned} & q_\alpha\, V^\alpha = 0 \\ & \Pi_{\alpha\beta}\, V^\alpha = 0 \\ & \Pi \equiv \Pi^\alpha{}_\alpha = 0 \\ & q_{(\alpha}\, V_{\beta)} = q_\alpha\, V_\beta + q_\beta\, V_\alpha \end{aligned} \tag{I.21}$$

O escalar ρ representa a densidade de energia vista pelo observador que se movimenta com velocidade V^{μ}. Com efeito, temos

$$\rho = T_{\alpha\beta} \, V^{\alpha} \, V^{\beta} \tag{I.22}$$

e em um sistema onde $V^{\mu} = \delta^{\mu}_{o}$:

$$\rho = T^{oo}, \quad \text{como esperaríamos.}$$

O escalar p representa a pressão isotrópica e pode ser escrito como

$$p = -\frac{1}{3} \, T_{\mu\nu} \, h^{\mu\nu} \tag{I.23}$$

A parte não-condutiva da corrente (de calor, etc.) é dada pelo vetor q_{α} através da expressão

$$q_{\lambda} = T_{\alpha\beta} \, V^{\beta} \, h^{\alpha}{}_{\lambda} \tag{I.24}$$

Finalmente, $\Pi_{\mu\nu}$ representa a pressão anisotrópica.

As expressões acima nos permitem entender as condições de desigualdade impostas nos teoremas de singularidade. (Ver capítulo VII). Elas se escrevem

$$T_{\mu\nu} \, V^{\mu} \, V^{\nu} \geqslant 0 \tag{I.25a}$$

$$T_{\mu\nu} \, V^{\mu} \, V^{\nu} - \frac{1}{2} T \geqslant 0 \tag{I.25b}$$

Com efeito, (I.25a) garante a positividade da energia; (I.25b) garante causalidade ($p \leq \frac{1}{3}\rho$, isto é, $v_{som} < c$).

Podemos estender nosso exercício acima e caracterizar o tensor momentum energia de um gás de fótons.

Dada a Lagrangiana $\mathcal{L}$ do campo Eletromagnético, obtemos seu tensor $T_{\mu\nu}$ através da relação

$$\delta \int \sqrt{-g} \quad d^4 x = \int \sqrt{-g} \; T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \, d^4x \tag{I.26}$$

Um cálculo direto nos dará:

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu\rho} F^{\rho}{}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{I.27}$$

Note que este $T_{\mu\nu}$ tem traço nulo. É fácil verificar que esta condição ($T = 0$) implica na equação de estado $p = \rho/3$. A decomposição (I.20) e (I.11) permite escrever as diversas partes:

$$\rho_{(EM)} = \frac{1}{2} (E^2 + H^2)$$

$$p_{(EM)} = \frac{1}{6} (E^2 + H^2)$$

$$q_{\alpha(EM)} = \eta_{\alpha}{}^{\lambda\beta\mu} V_{\lambda} E_{\beta} H_{\mu} \qquad \text{(Vetor de Poynting)} \tag{I.28}$$

$$\Pi_{\mu\nu(EM)} = \frac{1}{3} h_{\mu\nu} (E^2 + H^2) - E_{\mu} E_{\nu} - H_{\mu} H_{\nu}$$

EXEMPLO 4: Gás de neutrino

Mais adiante veremos com detalhes certas propriedades do neutrino em um contexto cosmológico. Nos limitaremos aqui a lembrar que a equação do neutrino se escreve

$$\gamma^{\mu}(x)\ D_{\mu}\ \psi(x) + 4\sigma\ \ \psi(x) = 0 \tag{I.29}$$

onde

$$\{\gamma^{\mu}(x), \gamma^{\nu}(x)\} = 2\ g^{\mu\nu}(x)\ \mathbb{1} \tag{I.30}$$

$$D_{\mu}\ \psi(x) = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^{\mu}} - \tau_{\mu}(x)\ \psi(x) \tag{I.31}$$

$$D_{\mu}\ \gamma_{\alpha}(x) = \sigma\ [U_{\mu}(x), \gamma_{\alpha}(x)] \tag{I.32}$$

com

$$U_{\mu}(x) = \gamma_{\mu}(x)\ \ \{1 + \gamma_{5}(x)\} \tag{I.33}$$

Consideremos o caso em que $\sigma = 0$. A expressão (I.26) permite obter o tensor momentum energia do neutrino:

$$- i\ T_{\mu\nu} = \bar{\psi}\ \gamma_{\mu}\ D_{\nu}\psi + \bar{\psi}\ \gamma_{\nu}\ D_{\mu}\psi - (D_{\mu}\ \bar{\psi})\gamma_{\nu}\ \psi\ - (D_{\nu}\ \bar{\psi})\gamma_{\mu}\ \psi \tag{I.34}$$

A (I.34) acima não nos possibilita em geral em reduzir o tensor $T_{\mu\nu}$ à expressão (I.20). A dificuldade reside na forma da derivada covariante $D_\mu \psi$. Recentemente, entretanto, Inomata introduziu uma grande simplificação que, embora de limitada aplicabilidade, nos permite contornar tal dificuldade. Inomata utiliza a *Teoria Fundamental* de Heisenberg que permite escrever

$$D_\mu \psi = \bar{\psi} \gamma_{\lambda\mu} \psi \gamma^\lambda \psi + \bar{\psi} \gamma_{\lambda\mu} \gamma_5 \psi \gamma^\lambda \gamma_5 \psi \qquad (I.35)$$

com

$$\gamma_{\lambda\mu} \equiv \gamma_\lambda \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\lambda$$

A equação (I.35) deve ser considerada como uma restrição adicional sobre o campo do neutrino.

Utilizando o vínculo (I.35) podemos escrever

$$- i \, T_{\mu\nu} = - \Sigma_{\lambda\mu} \Sigma^\lambda{}_\nu + \Omega_{\lambda\mu} \Omega^\lambda{}_\nu \qquad (I.36)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \Sigma_{\lambda\mu} &= \bar{\psi} \gamma_{\lambda\mu} \psi \\ \Omega_{\lambda\mu} &= \bar{\psi} \gamma_{\lambda\mu} \gamma_5 \psi \end{aligned} \qquad (I.37)$$

Decompondo os tensores de (I.37) em suas partes elétrica e magnética teremos

$$\Sigma_\alpha = \Sigma_{\alpha\mu} V^\mu$$

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} V^\beta \Sigma_{\mu\nu} \tag{I.38}$$

e

$$\Omega_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} V^\beta$$

$$\chi_\alpha = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} V^\beta \Omega_{\mu\nu} \tag{I.39}$$

onde

$$\Sigma_\alpha V^\alpha = 0$$

$$\epsilon_\alpha V^\alpha = 0$$

$$\Omega_\alpha V^\alpha = 0 \tag{I.40}$$

$$\chi_\alpha V^\alpha = 0$$

Estas relações acima permitem escrever em analogia com (I.11):

$$\Sigma_{\mu\nu} = - V_\mu \Sigma_\nu + V_\nu \Sigma_\mu - \eta_{\nu\mu}{}^{\rho\sigma} V_\rho \epsilon_\sigma \tag{I.41a}$$

$$\Omega_{\mu\nu} = - V_\mu \Omega_\nu + V_\nu \Omega_\mu - \eta_{\nu\mu}{}^{\rho\sigma} V_\rho \chi_\sigma \tag{I.41b}$$

Então teremos finalmente a expressão do tensor momentum energia do neutrino em termos das correntes elétrica e magnética:

$$- i\, T_{\mu\nu} = V_\mu V_\nu(-\Sigma^2 + \Omega^2) - \Sigma_\mu \Sigma_\nu + \Omega_\mu \Omega_\nu -$$

$$- \eta_\nu{}^{\lambda\alpha\beta} V_\alpha V_\mu(-\Sigma_\lambda \varepsilon_\beta + \Omega_\lambda \chi_\beta) -$$

$$- \eta_\mu{}^{\lambda\alpha\beta} V_\alpha V_\nu(-\Sigma_\lambda \varepsilon_\beta + \Omega_\lambda \chi_\beta) +$$

$$+ \eta_{\mu\lambda}{}^{\rho\sigma} \;\eta_\nu{}^{\lambda\alpha\beta} V_\rho V_\alpha(- \varepsilon_\sigma \varepsilon_\beta + \chi_\sigma \chi_\beta)$$

Ou, usando (I.12) tem-se

$$- i\, T_{\mu\nu} = V_\mu V_\nu(\Omega^2 - \Sigma^2) - \Sigma_\mu \Sigma_\nu$$

$$+ \Omega_\mu \Omega_\nu - \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu + \chi_\mu \chi_\nu + h_{\mu\nu}(\varepsilon^2 - \chi^2) \qquad \text{(I.42)}$$

$$- \eta_{(\nu}{}^{\lambda\alpha\beta} V_{\mu)} V_\alpha (\Omega_\lambda \chi_\beta - \Sigma_\lambda \varepsilon_\beta)$$

Usando (I.22), (I.23) e (I.24) podemos obter as expressões explicitas da densidade, pressão, etc.:

$$\rho = \Omega^2 - \Sigma^2 \qquad \text{(I.43a)}$$

$$p = -\frac{1}{3}(\varepsilon^2 - \chi^2) \tag{I.43b}$$

$$q_\nu = \eta_\nu{}^{\lambda\alpha\beta} V_\alpha (\Omega_\lambda \chi_\beta - \Sigma_\lambda \varepsilon_\beta) \tag{I.43c}$$

$$\Pi_{\mu\nu} = -\Sigma_\mu \Sigma_\nu + \Omega_\mu \Omega_\nu - \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu +$$

$$+ \chi_\mu \chi_\nu + \frac{2}{3}(\varepsilon^2 - \chi^2) h_{\mu\nu} \tag{I.43d}$$

O traço do tensor $T_{\mu\nu}$ sendo nulo, impõem que:

$$\Omega^2 - \Sigma^2 = \chi^2 - \varepsilon^2 \tag{I.44}$$

E então, como consequência a equação de estado será $p = \frac{1}{3}\rho$. Ademais, a condição (I.44) em (I.43d) implica que o traço de $\Pi_{\mu\nu}$ é nulo, como deveria ser. Uma última observação se faz necessário. A expressão (I.35), que tornou o campo do neutrino um gás de Heisemberg, se anula se o neutrino tem helicidade definida (+1 ou -1). Assim, o gás em questão aqui só tem significância se se trata de uma mistura de neutrino de ambas polarizações. A possível realização de um tal gás em nosso Universo foi objeto de um nosso trabalho recente. (Novello, 1973).

CAPÍTULO II

MODÊLOS COSMOLÓGICOS TRADICIONAIS

Neste capítulo estudaremos alguns exemplos de métricas cosmológicas cujo alto grau de simetria permite uma análise bem simples.

Entre todos os possíveis tipos de modêlos cosmológicos o proposto por Friedmann (1919) merece destaque especial, devido à sua boa adaptação ao nosso Universo observável.

Recentes observações experimentais parecem demonstrar que o nosso Universo se encontra em uma fase com as características seguintes:

i) *Expansão*- o raio do Universo parece aumentar com o tempo.

ii) *Homogêneo* - não existe posição privilegiada no espaço.

iii) *Isotropia* - não existe direção privilegiada no espaço.

Como veremos a seguir, o modêlo de Friedmann possue estas três propriedades. Estudaremos também um exemplo especial de uma solução cosmológica estacionária, a saber o modêlo de Einstein.

Comecemos por este último.

MODÊLO DE EINSTEIN (estático)

Em seu artigo *Sobre o Problema Cosmológico* Einstein considera as razões que o induziram a alterar suas equações primeiras da gravitação com a introdução de um termo cosmológico. À época de sua introdução este termo era estranho à propria Cosmologia (e, em verdade, a razão de sua presença nas equações se prendia à ideologia de Einstein ao tratar questões cósmicas). É Einstein quem mais tarde (The meaning of relativity, 1948) afirma: ..."Se se houvesse conhecido a expansão de Hubble (do Universo) à época da criação da Teoria Geral da Relatividade nunca se teria introduzido o termo cosmológico". Entretanto, recentemente Sakharov sugeriu a hipótese de associar têrmos corretivos (não-lineares na curvatura) na Lagrangiana do campo gravitacional devido à flutuação da métrica de origem clássica e/ou quântica. Dentro desse esquema a constante cosmológica de Einstein apareceria como uma renormalização devido ao termo constante da expansão perturbativa. Assim a idéia de Einstein de corrigir suas equações primeiras da gravitação com a introdução do termo cosmológico parece não ser desprovida de interesse.

As equações de Einstein (para a Cosmologia) se escrevem

$$R_\mu{}^\nu - \frac{1}{2} R \; \delta_\mu{}^\nu + \Lambda \, \delta_\mu{}^\nu = - k \; T_\mu{}^\nu \tag{II.1}$$

A matéria ($T_\mu{}^\nu$) é descrita por um fluido incoerente de densidade ρ e velocidade V^μ.

$$T_\mu{}^\nu = \rho \, V_\mu \, V^\nu \tag{II.2}$$

onde

$$V_\mu = \delta_\mu^0$$

Em coordenadas (t, r, Θ, φ) a métrica de Einstein se escreve:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 (d\Theta^2 + \mathrm{sen}^2\Theta \, d\varphi^2)$$

onde R é uma constante (positiva).

Pondo $r = R_{\mathrm{sen}}\, \chi$, escrevemos

$$ds^2 = dt^2 - R^2 (d\chi^2 + \mathrm{sen}^2 \chi (d\Theta^2 + \mathrm{sen}^2 \Theta \, d\varphi^2)) \qquad \text{(II.3')}$$

onde as variáveis χ, Θ, φ tem o domínio

$$0 \leqslant \chi \leqslant \pi; \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant \pi; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

A densidade ρ é uma constante e vale a relação

$$\Lambda = \frac{1}{2} k \rho = \frac{1}{R^2} \qquad \text{(II.4)}$$

O volume do tri-espaço se calcula:

$$V = \int \sqrt{-g} \, d^3x = (2\pi)^2 R^3 = \text{constante} \qquad \text{(II.5)}$$

Assim, o Universo de Einstein é estático (ele admite um vetor de

Killing $\vec{\xi}$ do tipo-tempo, que é ortogonal a uma hipersuperfície do tipo-espaço).

Tal propriedade é incompatível com a expansão real de nosso Universo. Entretanto, este modêlo tem interêsse (devido às suas simetrias) como o limite de certos modêlos evolucionários (ver adiante).

MODÊLO DE FRIEDMANN

Já em 1919 Friedmann idealizara um Universo em expansão cujas propriedades métricas são dadas por solução das equações de Einstein (sem o termo cosmológico).

A métrica de Friedmann se escreve:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-\varepsilon r^2} + r^2(d\Theta^2 + \text{sen}^2\,\Theta\, d\varphi^2) \right\} \qquad \text{(II.6)}$$

onde $\varepsilon = 0, +1, -1$ (modelo eudlideano, fechado e aberto) é a curvatura do tri-espaço.

Costuma-se escrever a métrica acima também sob a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,\{d\chi^2 + \sigma^2(\chi)(d\Theta^2 + \text{sen}^2\Theta\, d\varphi^2)\} \qquad \text{(II.6')}$$

onde

$$\sigma(\chi) \begin{cases} \text{sen}\ \chi, & \varepsilon = +1 \\ \chi\ , & \varepsilon = 0 \\ \text{sh}\ \chi\ , & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

A matéria é a de um fluido de densidade ρ e pressão p (originalmente Friedmann estudou o caso $p = 0$).

$$T_{\mu\nu} = \rho \, V_\mu \, V_\nu - p \, h_{\mu\nu} \qquad (II.7)$$

com $V_\mu = \delta_\mu^0$. As linhas de Universo da matéria (galáxias, etc.) são assim geodésicas de coordenadas espaciais constante.

As equações de Einstein para a métrica (II.6) com $p = 0$ reduzem-se a (ver anexo ao capítulo II)

$$- \frac{\varepsilon}{a^2} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2 \, \frac{\ddot{a}}{a} = 0 \qquad (II.8a)$$

$$\frac{\varepsilon}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{3} \; \rho_M \qquad (II.8b)$$

onde $\dot{a} = \dfrac{da}{dt}$, ρ_M é a densidade de matéria.

Da expressão da conservação covariante de $T_{\mu\nu}$, isto é,

$$T^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0 \qquad (II.9)$$

teremos a integral primeira das equações (II.8), isto é,

$$\rho_M \, a^3 \sim \text{constante} \qquad (II.10)$$

Com efeito,

$$T^{o\nu}{}_{\|\nu} = 0$$

$$T^{o\nu}{}_{|\nu} + \Gamma^{o}_{\varepsilon\nu}\, T^{\varepsilon\nu} + \Gamma^{\nu}_{\varepsilon\nu}\, T^{o\varepsilon} = 0$$

ou usando as expressões dos símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{o}_{oo} = 0; \qquad \Gamma^{k}_{oi} = \frac{\dot{a}}{a}\, \delta^{k}_{i}$$

$$\Gamma^{o}_{ii} = a\, \dot{a}$$

teremos

$$\dot{\rho}_M + 3\, \frac{\dot{a}}{a}\, \rho_M = 0$$

e daí (II.10).

EXERCÍCIO: Mostre que se a pressão é não-nula p e a equação de estado se escreve $p = \frac{1}{3}\, \rho_\gamma$, então a integral primeira se escreverá $\rho_\gamma\, a^4 \sim$ constante.

EXERCÍCIO: Utilizando as equações (II.8) com p = 0 e as equações análogas com $p = \rho/3$ (é suficiente introduzir $-p$ no lado direito de (II.8a)) encontre as formas de a(k) para os três valores da constante ε.

Solução:

Caso I: p = 0. Sob forma paramétrica temos:

$$a(\eta) = \begin{cases} 1 - \cos\eta \\ \dfrac{\eta^2}{2} \\ \cosh\eta - 1 \end{cases}$$

$$t(\eta) = \begin{cases} \eta - \operatorname{sen}\eta \\ \dfrac{1}{6}\,\eta^3 \\ \operatorname{sh}\eta - \eta \end{cases}$$

para $\varepsilon = +1, 0, -1$ respectivamente.

Caso II: $p = \rho/3$

$$a(\eta) = \begin{cases} \operatorname{sen}\eta \\ \eta \\ \operatorname{sh}\eta \end{cases}$$

$$t(\eta) = \begin{cases} 1 - \cos\eta \\ \dfrac{1}{2}\,\eta^2 \\ \cosh\eta - 1 \end{cases}$$

DESVIO PARA O VERMELHO NA MÉTRICA DE FRIEDMANN

Consideremos uma galáxia situada em $(r_\ell, \Theta, \varphi)$ que emite um sinal luminoso no instante t_ℓ. O tempo de observação na galáxia situada em $(0, \Theta, \varphi)$ será $t_o > t_\ell$. A geodésica seguida pelos fotons é nula, $ds = 0$, o que nos permite escrever

$$dr = \frac{1}{a(t)} \sqrt{1 - \varepsilon r^2}\; dt \qquad \text{(II.11)}$$

ou

$$\int_0^{r_\ell} \frac{dr}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}} = \int_{t_\ell}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} \qquad \text{(II.12)}$$

Para um sinal luminoso emitido em $t_\ell + \Delta t_\ell$ teremos um tempo de observação $t_o + \Delta t_o$ onde

$$\int_0^{r_\ell} \frac{dr}{\sqrt{1-\varepsilon r^2}} = \int_{t_\ell + \Delta t_\ell}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{a(t)}$$

Para pequenos valores de tempo Δt_ℓ, Δt_o teremos

$$\frac{\Delta t_o}{\Delta t_\ell} = \frac{a(t_o)}{a(t_\ell)} \qquad \text{(II.13)}$$

Se Δt_ℓ representa o período da radiação emitida, Δt_0 representará o período da radiação observada.

Definindo-se o desvio pelo parâmetro Z:

$$1 + Z = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} \tag{II.14}$$

teremos

$$1 + Z = \frac{a(t_0)}{a(t_\ell)} \tag{II.15}$$

O desvio para o vermelho observado por Hubble corresponde a valores de Z positivos, isto é, $a(t_0) > a(t_\ell)$ - e é nesse sentido que podemos falar atualmente numa expansão do Universo.

Um detalhe interessante a ressaltar aqui, se prende a atitude tradicional nas questões cosmológicas. De posse do modêlo de Friedmann os cosmólogos da década de vinte estavam aptos a poder emitir previsões sobre o desvio cosmológicos das raias espectrais. Esse fato, se houvesse ocorrido, teria avançado de quarenta anos o status científico da cosmologia. Infelizmente (ou não) isso não ocorreu e a validade dos modêlos evolucionários para descrever o Universo teve que aguardar muitos e muitos anos antes que atingisse sua situação moderna.

Com o volume V dado por (II.5) obtemos

$$V = a^3 (t) \iiint \frac{r^2 \operatorname{sen}\Theta}{\sqrt{1 - \varepsilon r^2}} \, dr \, d\Theta \, d\varphi \tag{II.16}$$

o que mostra que o volume de uma região do espaço aumenta com o passar do tempo.

UNIVERSO FOTÔNICO

Em meados de 1965, Penzias e Wilson, fizeram, acidentalmente, a descoberta cosmológica mais importante desde a lei de Hubble (1929) - e certamente um dos fatores principais à recente renovação de interêsse pela Cosmologia.

Eles mostraram que no Universo existe uma radiação de back ground de micro-ondas altamente isotrópica. Sua isotropia resulta ser maior que 0.1% em aberturas angulares maiores que 1'. O espectro de tal radiação parece ser o de um corpo - negro tendo uma temperatura de $2.7^{o}K$. Longair (Cargèse, 1971) ressaltou o fato de que o grande grau de isotropia em aberturas angulares pequenas torna altamente improvável que tal radiação possa provir de efeitos aditivos de emissões de fontes discretas. Assim, no 6º Congresso de Astrofísica Relativista (Nova York, dezembro 1972) o relator da seção segunda considerou como uma quase-evidência a associação desta radiação fotônica a remanescentes de uma explosão inicial. Os modêlos do tipo Friedmann tornaram-se então muito próximos da real descrição da história de nosso Universo. Com efeito, considerando a métrica (II.6) para um tensor de um gás de fótons, encontramos que $\rho_\gamma \; a^4 \sim$ constante. O que nos leva à divergência da densidade ρ_γ quando o tempo global t tende para zero. Teremos oportunidade mais tarde de voltar a considerar tais regiões singulares do Universo.

A relação termodinâmica do corpo negro se escreve

$$\rho_\gamma = d \, T^4 \qquad \text{(II.17)}$$

onde

$$d \sim 0.8 \times 10^{-35} (CGS) \ .$$

De (II.17) e usando a lei de conservação (II.9) que permite escrever $\rho_\gamma a^4 \sim C^{te}$, teremos

$$a \cdot T \sim \text{constante} \qquad \text{(II.18)}$$

relacionando a temperatura do gás de fótons T, preenchendo o Universo, com o seu raio de expansão a(t). O valor atual desta temperatura $T \sim 2.7^0K$ dará para a densidade ρ_γ o valor $\rho_\gamma \sim 10^{-34}$ g/cm³. Comparando este valor com o da matéria (ρ_M aproximadamente 10^{-30} g/cm³), vemos que uma era fotônica pode ter ocorrido, mas que certamente ela não é atualmente a principal responsável pela curvatura do Espaço-Tempo.

OBSERVAÇÃO: Um Universo que obedecesse perfeitamente o modêlo de Friedmann, com gás de fotons, induziria a existência de um período extremamente quente ($a \to 0$, $T \to \infty$). Vários argumentos tem aparecido recentemente tentando mostrar a incompatibilidade de tal situação com leis físicas conhecidas - e propondo alternativas para tais regiões singulares. Um exemplo notável está associado à teoria da matéria hadrônica de Hagedorn, na qual uma temperatura máxima (limite) aparece. No modêlo de Hagedorn a interação gravitacional, que assume um papel dominador na questão cosmológica, deveria dividir com a interação hadrônica este papel, alterando profundamente nossas idéias sobre a região singular.

A questão do comportamento do Universo nos seus primórdios é fascinante e envolve atualmente um grande número de cosmólogos. Sua natureza quase-filosófica provoca um sentimento de profunda emoção. A dificuldade em limitar nossa emoção e afastar nossos preconceitos filosóficos tem sido um empecilho à renovação de nossa visão cósmica. Acreditamos entretanto que a experiência acumulada durante estes últimos anos, tenha possibilitado uma análise técnica da questão cosmológica sem que, com isto, se tenha perdido aquele sentimento quase-místico que impelia a sonhos grandiosos espíritos como o de Albert Einstein.

O MODÊLO DE DE SITTER

Um caso particular importante das soluções de Friedmann consiste naquela solução onde o volume V dado (II.16) é tal que a razão entre a variação $\dot{V}$ e V é uma constante,

$$\frac{\dot{V}}{V} \sim \text{constante} .$$

Tal Universo apresentaria assim as propriedades de homogeneidade e isotropia dos modêlos de Friedmann e adicionalmente teria homogeneidade no tempo. Isto é, qualquer observador localizado em qualquer ponto no espaço-tempo veria o Universo com as mesmas propriedades.

Escreveremos as métricas de de Sitter (3 modêlos):

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{H^2} \cosh^2 Ht \, \{d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \;\; d\varphi^2)\} \qquad (II.18)$$

com

$$0 \leqslant \chi \leqslant \pi$$

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (II.19)$$

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{H^2}\ sh^2\,Ht\,\{d\chi^2 + sh^2\chi(d\Theta^2 + sen^2\Theta\, d\varphi^2)\} \qquad (II.20)$$

onde $H^2 = \frac{\Lambda}{3}$ (Λ é a constante cosmológica). As métricas (II.18, 19, 20) são soluções das equações de Einstein com termo cosmológico (II.1).

EXERCÍCIO: Calcule as 3-curvaturas das métricas acima.

A métrica (II.20) aparece também nos trabalhos de Gold, Bondi, Hoyle etc., dentro de um contexto diferente. Segundo esses autores, a questão cosmológica deveria ser adicionada de um novo princípio dito Princípio Cosmológico Perfeito - que requeriria que o Universo observado por distintos observadores separados especial e temporalmente, possuisse as mesmas características. É Hoyle quem afirma: *If the laws of physics are also determined by the state of the Universe, then constancy of these laws implies an unchanging, i.e., a steady-state Universe.*

A ausência de singularidades de tal métrica resultando na incompatibilidade com a recente observação das micro ondas de 2.7°K, no entanto, diminuiu o interesse por esse modêlo. Ademais, a independência das leis físicas com a expansão do Universo é uma hipótese de trabalho que está a merecer revisão (ver Novello-Rotelli, 1971, Dirac, 1939).

ANEXO AO CAPÍTULO II

CURVATURAS DA MÉTRICA DE FRIEDMANN

Neste anexo calcularemos, a título de exercício, as curvaturas do espaço de Friedmann usando o método das formas diferenciais. O leitor não acostumado com tal método deve consultar algum dos vários livros recentes sobre o assunto.

Escreveremos a métrica sob a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\, d\sigma^2 \qquad \text{(A-I)}$$

com

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sigma^2(\chi)(d\Theta^2 + \operatorname{sen}^2\Theta\, d\varphi^2) \qquad \text{(A-2)}$$

Este 3-espaço tem curvatura constante igual a 0, +1, -1 conforme a função $\sigma(\chi)$ valha, respectivamente, χ, sen χ ou shχ . As 1-formas $\Theta^A(x)$ são definidas por

$$\Theta^A(x) = e^A{}_\alpha\,(x)dx^\alpha$$

e a métrica

$$ds^2 = (\Theta^0)^2 - (\Theta^1)^2 - (\Theta^2)^2 \quad (\Theta^3)^2$$

NOTE: Neste anexo usaremos a seguinte convenção de símbolos: Letras de tipo A, B, C, ... representarão símbolos de tetrada; Letras α, β, γ, representarão símbolos de coordenadas. Assim, o domínio das primeiras é de 1, 2, 3, 4 e o das segundas de 0, 1, 2, 3.

Temos

$$
\begin{aligned}
\Theta^0 &= dt \\
\Theta^1 &= a(t)d\chi \\
\Theta^2 &= a(t)\ \sigma(\chi)d\Theta \\
\Theta^3 &= a(t)\ \sigma(\chi)\mathrm{sen}\Theta\ d\varphi
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

Aplicando a operação de derivação externa teremos

$$
\begin{aligned}
d\Theta^0 &= 0 \\
d\Theta^1 &= \frac{\dot{a}}{a}\ \Theta^0 \wedge \Theta^1 \\
d\Theta^2 &= \frac{\dot{a}}{a}\Theta^0 \wedge \Theta^2 + \frac{\sigma'}{a\sigma}\Theta^1 \wedge \Theta^2 \\
d\Theta^3 &= \frac{\dot{a}}{a}\Theta^0 \wedge \Theta^3 + \frac{\sigma'}{a\sigma}\Theta^1 \wedge \Theta^3 + \frac{\mathrm{cotg}\ \Theta}{a\sigma}\Theta^2 \wedge \Theta^3
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

onde $\wedge$ é o produto de Grassmann, ponto significa derivada em relação a t, linha significa derivada em relação à coordenada χ. Da relação

$$
d\Theta^A = -\ \omega^A{}_B \wedge \Theta^B \tag{A.6}
$$

e da simples inspeção de (A.5) tem-se

$$\omega^1{}_0 = \frac{\dot{a}}{a}\,\Theta^1 = \omega^0_1$$

$$\omega^2{}_0 = \frac{\dot{a}}{a}\,\Theta^2 = \omega^0_2$$

$$\omega^3{}_0 = \frac{\dot{a}}{a}\,\Theta^3 = \omega^0{}_3$$

$$\omega^2{}_1 = \frac{\sigma'}{a\sigma}\,\Theta^2 = -\,\omega^1{}_2$$

$$\omega^3{}_1 = \frac{\sigma'}{a\sigma}\,\Theta^3 = -\,\omega^1{}_3$$

$$\omega^3{}_2 = \frac{\text{cotg}\,\Theta}{a\,\sigma}\,\Theta^3 = -\,\omega^2{}_3$$

Derivando novamente, teremos

$$d\omega^1{}_0 = \frac{\ddot{a}}{a}\,\Theta^0\,\Lambda\Theta^1$$

$$d\omega^2{}_0 = \frac{\ddot{a}}{a}\,\Theta^0\,\Lambda\Theta^2 + \frac{\dot{a}}{a}\,\frac{\sigma'}{a\sigma}\,\Theta^1\,\Lambda\Theta^2 \tag{A.8}$$

$$d\omega^3{}_0 = \frac{\ddot{a}}{a}\,\Theta^0\,\Lambda\,\Theta^3 + \frac{\dot{a}}{a}\,\frac{\sigma'}{a\sigma}\,\Theta^1\,\Lambda\Theta^3 + \frac{\dot{a}}{a}\,\frac{\text{cotg}\Theta}{a\sigma}\,\Theta^2\,\Lambda\Theta^3$$

$$d\omega^2{}_1 = \frac{\sigma''}{a^2\sigma}\,\Theta^1\,\Lambda\Theta^3$$

$$d\omega^3{}_1 = \frac{\sigma''}{a^2\sigma}\,\Theta^1\,\Lambda\Theta^3 + \frac{\sigma'}{a^2\sigma^2}\,\text{cotg}\Theta\,\Theta^2\,\Lambda\Theta^3$$

$$d\omega^3{}_2 = \frac{1}{a^2\sigma^2}\,\Theta^2\,\Lambda\Theta^3$$

E finalmente, as curvaturas $\Omega^A{}_B$ dadas por

$$\Omega^A{}_B = d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B$$

valem

$$\Omega^0{}_1 = \frac{\ddot{a}}{a}\,\theta^0 \wedge \theta^1$$

$$\Omega^0{}_2 = \frac{\ddot{a}}{a}\,\theta^0 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^0{}_3 = \frac{\ddot{a}}{a}\,\theta^0 \wedge \theta^3 \qquad (A.9)$$

$$\Omega^1{}_2 = \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\sigma''}{a^2\sigma}\right]\theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^1{}_3 = \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\sigma''}{a^2\sigma}\right]\theta^1 \wedge \theta^3$$

$$\Omega^2{}_3 = \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2\sigma^2}\,(1 + \sigma'^2)\right]\theta^2 \wedge \theta^3$$

A curvatura projetada será

$$\Omega^A{}_B = R^A{}_{BCD}\,\theta^C \wedge \theta^D \qquad (A.10)$$

E então

$$R^0{}_{101} = \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R^0{}_{202} = \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R^0{}_{303} = \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R^1{}_{212} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\sigma''}{a^2\ \sigma}$$

$$R^1{}_{313} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\sigma''}{a^2\ \sigma}$$

$$R^2{}_{323} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1 + \sigma'^2}{\sigma^2}\right)$$

Contraindo, obteremos

$$R_{00} = -\ 3\ \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{11} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{a^2}\left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \dot{a}^2\right)$$

$$R_{22} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \dot{a}^2\right) + \frac{1}{a^2}\left(\dot{a}^2 - \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}\right)$$

$$R_{33} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \dot{a}^2\right) + \frac{1}{a^2}\left(\dot{a}^2 - \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}\right)$$

E contraindo teremos o escalar de curvatura

$$R = -6\,\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4}{a^2}\left(\frac{\sigma''}{\sigma} - \dot{a}^2\right) + \frac{2}{a^2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \dot{a}^2\right)$$

A curvatura do 3-espaço é dada por

$$^{(3)}R = 4\,\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{2}{\sigma^2}\,(1 + \sigma'^2) \tag{A.13}$$

Escrevendo a curvatura (A.12) em termos de 3-curvatura (A.13) tem-se

$$R = -6\left\{\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^2}\right\} \tag{A.14}$$

onde definimos ε pela relação

$$\varepsilon = \frac{1}{6}\,{}^{(3)}R \tag{A.15}$$

O tensor de Ricci se escreverá

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{3}{a^2}\,(\dot{a}^2 + \varepsilon) \\ G_{11} &= -2\,\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{a^2}\left(2\,\frac{\sigma''}{\sigma} + 3\varepsilon\right) \\ G_{22} &= -2\,\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\varepsilon}{a^2} \\ G_{33} &= G_{22} \end{aligned} \tag{A.16}$$

Com $T^A{}_B$ de um fluido de densidade ρ e pressão p teremos

$$T^A{}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

E finalmente as equações de Einstein se escrevem

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varepsilon}{a^2} &= \frac{\rho}{3} \\ - 2\,\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\varepsilon}{a^2} &= p \end{aligned} \tag{A.18}$$

CAPÍTULO III

CONGRUÊNCIA DE CURVAS EM M_4

Este capítulo pretende dar uma breve introdução ao estudo de geodésicas em uma variedade diferenciável M_4. Nosso objetivo é simplesmente introduzir o leitor a certas técnicas modernas relacionadas ao estudo de curvas em M_4. Nosso método será extremamente simplificado. Nós adotaremos sempre um dado sistema de coordenadas e nossas fórmulas serão referidas sempre a esse sistema (deixado arbitrário). Modernamente métodos mais sofisticados tem sido utilizados, por exemplo aquêles que conduzem à análise dos teoremas de singularidade (ver Métodos de Geometria Diferencial Local e Global em Relatividade Geral - Penrose, 1972).

Uma curva definida em M_4 é uma aplicação de um conjunto aberto do R^1 em M_4. Notaremos pela expressão $\gamma : s \in \Theta \subset R^1 \to \gamma(s)$.

Uma curva geodésica afim é aquela segundo a qual o vetor tangente $V^\mu = \frac{dx^\mu(s)}{ds}$ é paralelamente transportado, isto é, $\frac{DV^\mu}{Ds} \equiv V^\mu{}_{\|\lambda} V^\lambda = 0$. (A convenção da derivação covariante adotada é

$$V^\alpha{}_{\|\lambda} = V^\alpha{}_{|\lambda} + \Gamma^\alpha_{\varepsilon\lambda} V^\varepsilon$$

$$V_{\alpha\|\beta\|\mu} - V_{\alpha\|\mu\|\beta} = R_{\alpha\varepsilon\beta\mu} V^\varepsilon$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\mu} \;)$$

Chamaremos uma congruência de curvas Γ uma família de curvas $\gamma(s)$ definidas em $D \cap R^3$, $D \subset M_4$ de tal modo que por cada ponto de D passe uma e somente uma curva. Escreveremos:

$$s \in R^1 \rightarrow \gamma(s) \in \Gamma$$

Seja dois pontos de 2 curvas vizinhas P e Q:

$$P(s^o, z^i)$$

$$Q(s^o, z^i + \delta z^i)$$

Chamaremos η^α o vetor que conecta P e Q de componentes $(0, \delta z^i)$. Como em (I.2) chamaremos $h_{\alpha\beta}$ o tensor de projeção

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta$$

onde V_α é o vetor tangente à congruência. Temos

$$\frac{DV^\alpha}{Ds} = V^\alpha{}_{\|\lambda} V^\lambda = 0 \tag{III.1}$$

Projetando η^α por $h^{\alpha\beta}$ chamaremos

$$\eta^\alpha{}_\perp = h^{\alpha\beta} \eta_\beta \tag{III.2}$$

A velocidade relativa s^α de P com relação a Q é dada por

$$s^\alpha = h^\alpha{}_\beta \frac{D}{Ds} (\eta^\beta_\perp) \tag{III.3}$$

Mostremos que S^{α} é obtida a partir de $\eta^{\alpha}{}_{\perp}$ por uma transformação linear. Temos

$$s_{\alpha} = h_{\alpha\beta}(\eta^{\beta}_{\perp})_{\|\lambda}\ V^{\lambda}$$

$$s_{\alpha} = h_{\alpha\beta}(h^{\beta}{}_{\mu}\ \ \eta^{\mu})_{\|\lambda}\ \ V^{\lambda}$$

$$s_{\alpha} = h_{\alpha\mu}\ \eta^{\mu}_{\|\lambda}\ V^{\lambda}$$

onde usamos

$$h_{\alpha\beta\|\lambda}\ \ V^{\lambda} = 0$$

$$h_{\alpha\beta}\ h^{\beta}{}_{\mu} = h_{\alpha\mu}$$

Lembrando que

$$\eta_{\mu\|\lambda}\ V^{\lambda} - \eta^{\lambda}\ V_{\mu\|\lambda} = 0 \tag{III.4}$$

teremos

$$s_{\alpha} = h_{\alpha\mu}\ \eta^{\lambda}\ V_{\mu\|\lambda}$$

ou

$$s_{\alpha} = h_{\alpha}{}^{\mu}\ V_{\mu\|\nu}\ \{\eta^{\nu} - V^{\nu}\ V_{\lambda}\ \eta^{\lambda}\}$$

$$s_{\alpha} = h_{\alpha}{}^{\mu}\ h_{\beta}{}^{\nu}\ V_{\mu\|\nu}\ \eta^{\beta}{}_{\perp} \tag{III.5}$$

Assim,

$$s_{\alpha} = L_{\alpha\beta}\ \eta^{\beta}{}_{\perp} \tag{III.6}$$

NOTE: É possível usar o tensor $L_{\alpha\beta}$ para escrever a derivada covariante $V_{\alpha\|\beta}$ em uma parte paralela e outra ortogonal à 3-superfície ortogonal a V^{α}. Com efeito,

$$V_{\alpha\|\beta} = L_{\alpha\beta} - \dot{V}_{\alpha}\ V_{\beta} \tag{III.7}$$

É fácil mostrar que

$$\begin{cases} L_{\alpha\beta}\ V^{\alpha} = 0 \\ h_{\alpha\beta}\ \dot{V}^{\alpha}\ V^{\beta} = 0 \end{cases} \tag{III.8}$$

Para compreender melhor o significado de $L_{\alpha\beta}$ separemo-lo em suas partes simétrica e anti-simétrica.

$$L_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} \tag{III.9}$$

onde

$$\Theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(L_{\alpha\beta} + L_{\beta\alpha})$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(L_{\alpha\beta} - L_{\beta\alpha}) \tag{III.10}$$

Temos, de (III.8):

$$\Theta_{\alpha\beta}\ V^{\beta} = 0$$

$$\omega_{\alpha\beta}\ V^{\beta} = 0$$

Ao tensor $\Theta_{\alpha\beta}$ dá-se o nome de tensor de expansão (ver adiante) e a $\omega_{\alpha\beta}$ o de tensor de rotação. Separando $\Theta_{\alpha\beta}$ em uma parte de traço nulo (chamada shear)

$$\Theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\,\Theta\, h_{\alpha\beta} \tag{III.11}$$

onde

$$\mathrm{Tr}\ \sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$$

Tem-se (mostre !)

$$\Theta = V^{\alpha}{}_{\|\alpha} \tag{III.12a}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h_{(\mu}{}^{\lambda} h_{\nu)}{}^{\varepsilon} \; V_{\lambda\|\varepsilon} - \frac{1}{3} \Theta \; h_{\mu\nu} \tag{III.12b}$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h_{[\mu}{}^{\lambda} h_{\nu]}{}^{\varepsilon} \; V_{\lambda\|\varepsilon} \tag{III.12c}$$

NOTE: que as 3 quantidades acima definidas $\Theta, \sigma_{\mu\nu}, \omega_{\mu\nu}$ são de natureza puramente cinemática. Mais adiante, elas se tornarão objetos dinâmicos, através das equações de Einstein.

QUANTIDADES CINEMÁTICAS NOS MODELOS COSMOLÓGICOS

a) Modêlo de Einstein - As galáxias se movem segundo geodésicas com expansão nula ($\Theta = 0$), shear nulo ($\sigma^2 = 0$) e rotação nula ($\omega^2 = 0$).

b) Modêlo de Friedmann - Não tem shear, nem rotação. Mas tem expansão não-nula. Calculemos qual é o seu valor em função do raio do Universo. Temos

$$V_{\mu} = \delta^{0}_{\mu}$$

Da expressão (III.12a)

$$\Theta = \Gamma^{\mu}_{0\mu}$$

onde

$$\Gamma^{\mu}_{0\mu} = \Gamma^{1}_{01} + \Gamma^{2}_{02} + \Gamma^{3}_{03}$$

Então, um cálculo direto dará

$$\Theta = 3\,\frac{\dot{a}}{a} \tag{III.13}$$

Lembrando a expressão (II.16) para o volume do Universo temos:

$$\Theta = \frac{\dot{V}}{V} \qquad \text{(III.14)}$$

A expressão acima mostra claramente a origem do termo fator de expansão para Θ.

A EQUAÇÃO DE RAYCHAUDHURI

A partir das definições acima da expansão (Θ), shear ($\sigma_{\mu\nu}$) e rotação ($\omega_{\mu\nu}$) e das relações de Einstein para a métrica $g_{\mu\nu}$ é possível calcular as equações de evolução $\dot{\Theta}$, $\dot{\sigma}_{\mu\nu}$ e $\dot{\omega}_{\mu\nu}$ (onde o ponto significa a derivada direcional ao longo da curva de vetor tangente V^{α}). Neste nosso primeiro curso não entraremos nos detalhes destas equações, exceto para o fator de expansão, que obteremos a seguir. Temos

$$V_{\alpha\|\mu\|\nu} - V_{\alpha\|\nu\|\mu} = R_{\alpha\varepsilon\mu\nu}\, V^{\varepsilon} \qquad \text{(III.15)}$$

Contraindo com $g^{\alpha\mu}$ e multiplicando por V^{ν}

$$(V^{\alpha}{}_{\|\alpha})_{\|\nu}\; V^{\nu} - (V^{\alpha}{}_{\|\nu\|\alpha})\; V^{\nu} = R_{\varepsilon\nu}\, V^{\varepsilon}\, V^{\nu}$$

ou

$$\dot{\Theta} - (\dot{V}^{\alpha})_{\|\alpha} + V^{\alpha}{}_{\|\nu}\; V^{\nu}{}_{\|\alpha} = R_{\alpha\beta}\, V^{\alpha}\, V^{\beta}$$

Usando a relação (veja (III.7))

$$V_{\alpha\|\nu}\, V^{\nu\|\alpha} = (\Theta_{\alpha\nu} + \omega_{\alpha\nu} - \dot{V}_\alpha\, V_\nu)(\Theta^{\nu\alpha} + \omega^{\nu\alpha} - \dot{V}^\nu\, V^\alpha) \;.$$

$$V_{\alpha\|\nu}\, V^{\nu\|\alpha} = 2\sigma^2 - 2\omega^2 + \frac{\Theta^2}{3} - (\dot{V}_\alpha\, V^\alpha)^2 \qquad \text{(III.16)}$$

E daí

$$\dot{\Theta} - (\dot{V}^\alpha)_{\|\alpha} + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{1}{3}\,\Theta^2 - (\dot{V}_\alpha\, V^\alpha)^2 = R_{\alpha\beta} V^\alpha\, V^\beta . \qquad \text{(III.17)}$$

A normalização

$$V_\alpha \; V_\beta\, g^{\alpha\beta} = 1$$

permite escrever

$$V^\alpha\, V_{\alpha\|\beta} = \frac{1}{2}\,(V^\alpha\, V_\alpha)_{\|\beta} = 0$$

isto é

$$\dot{V}_\alpha\, V^\alpha = 0$$

Finalmente, (III.17) dará a equação de Raychandhuri

$$\dot{\Theta} - (\dot{V}^\alpha)_{\|\alpha} + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{\Theta^2}{3} = R_{\mu\nu}\, V^\mu\, V^\nu \qquad \text{(III.18)}$$

Esta equação é extremamente importante e como veremos a seguir, ela contém o germe dos teoremas da singularidade. Consideremos o caso especial de uma congruência de geodésicas irrotacional ($\omega^2 = 0$). Neste caso a equação (III.18) se transforma em

$$\dot{\theta} + 2\sigma^2 + \frac{1}{3}\theta^2 = R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \qquad \text{(III.19)}$$

As equações de Einstein permitem escrever

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = - k \, T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + \frac{k}{2} T \qquad \text{(III.20)}$$

A condição de positividade da energia (I.25a) e (I.25b) darão origem à desigualdade

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \leqslant 0 \qquad \text{(III.21)}$$

E daí,

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 \leqslant 0 \qquad \text{(III.22)}$$

Para compreender o alcance de (III.22) considere o caso em que numa dada hipersuperfície inicial tenhamos $\Theta^{(o)} < 0$. Integrando (III.22) obtem-se

$$\frac{1}{\Theta_p} \geqslant \frac{\ell}{3} - \frac{1}{|\Theta^0|} \qquad \text{(III.23)}$$

Concluimos daí que a congruência passará por uma região singular $(\frac{1}{\Theta_p} \sim 0)$ após transcorrido um tempo finito (dado por $\ell \sim 3|\Theta^{(o)}|$). Este simples argumento mostra como os modêlos cosmológicos possuem uma singularidade inevitável, dentro da teoria de Einstein tradicional.

A singularidade $(\frac{1}{\Theta_p} \sim 0)$ pode ser identificado, nos modêlos evolucionários, como a região de divergência da densidade da matéria $(\rho \to \infty)$. Deixamos ao leitor a verificação deste argumento.

EXERCÍCIO: Utilizando a decomposição (I.20) e as relações do capítulo III mostre que a conservação covariante do tensor momentum energia implica nas seguintes equações:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + \dot{q}^{\mu} V_{\mu} + q^{\mu}{}_{||\mu} - \Pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 0$$

$$(\rho + p)\dot{V}_{\alpha} - (p_{|\mu} - \dot{q}_{\mu})h^{\mu}{}_{\alpha} + \frac{4}{3}\theta\, q_{\alpha} + (\sigma_{\alpha\nu} + \omega_{\alpha\nu})q^{\nu} + \Pi_{\alpha}{}^{\nu}{}_{||\nu} + \Pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} V_{\alpha} = 0$$

(NOTE: Projetar a expressão da derivada covariante de $T^{\mu\nu}$ paralelamente e ortogonalmente ao vetor V^{α}).

CAPÍTULO IV

HOMOGENEIDADE DO ESPAÇO

Os modêlos cosmológicos estudados no capítulo II possuem homogeneidade espacial, isto é, quaisquer dois pontos de uma mesma hipersuperfície ortogonal a uma congruência temporal possuem as mesmas propriedades físicas. Neste capítulo procuraremos rigorizar tal definição.

Chama-se uma isometria (ou movimento) a toda transformação de coordenadas $x^\alpha \to \bar{x}^\alpha = f^\alpha(x^\rho)$ tal que para quaisquer dois pontos $\underline{P}$, Q de coordenadas x_p, x_q , a distância d(P, Q) é deixada inalterada. Isto é,

$$x_p \to \bar{x}_p$$

$$x_Q \to \bar{x}_Q$$

$$d(x_p, x_Q) = d(\bar{x}_p, \bar{x}_Q)$$

Para transformações infinitesimais

$$\bar{x}^\alpha \approx x^\alpha + \varepsilon^A \xi^\alpha_A(x) \qquad \text{(IV.1)}$$

onde $\varepsilon^A (A = 1, 2, \ldots n)$ são os parâmetros da transformação.

A condição necessária e suficiente para que (IV-1) seja uma isometria é que os vetores $\vec{\xi}_A$ sejam de Killing, isto é,

$$\xi_{A\alpha\|\beta} + \xi_{A\beta\|\alpha} = 0 \tag{IV.2}$$

O vetor $\vec{\xi}_A$ deve ser entendido como um operador e neste sentido podemos desenvolvê-lo na base normal $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$:

$$\vec{\xi} = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{IV.3}$$

Multiplicando $\vec{\xi}_A$ por $\vec{\xi}_B$ tem-se:

$$\vec{\xi}_A \, \vec{\xi}_B = \xi^\mu_A \;\; \xi^\alpha_B \;\; \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \, \partial x^\alpha} + \xi^\mu_A \;\; \frac{\partial \xi^\alpha_B}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

e então, para o comutador de Lie

$$\left[\vec{\xi}_A, \vec{\xi}_B\right] = \left(\xi^\mu_A \;\; \frac{\partial \xi^\alpha_B}{\partial x^\mu} - \xi^\mu_B \;\; \frac{\partial \xi^\alpha_A}{\partial x^\mu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{IV.4}$$

Pondo

$$\xi^\mu_A \frac{\partial \xi^\alpha_B}{\partial x^\mu} - \xi^\mu_B \;\; \frac{\partial \xi^\alpha_A}{\partial x^\mu} = C^D_{AB} \, \xi^\alpha_D \tag{IV.5}$$

teremos

$$\left[\vec{\xi}_A, \vec{\xi}_B\right] = C^D_{AB} \, \vec{\xi}_D \tag{IV.6}$$

Os coeficientes C^D_{AB} são as constantes de estrutura da álgebra de Lie gerada pelos vetores de Killing $\vec{\xi}_A$.

Uma grande simplificação formal ocorre quando, por exemplo, no 3-espaço existe um grupo de isometrias a três (3) parâmetros. Neste caso nós podemos associar os vetores $\vec{\xi}_i$ aos vetores de base $\vec{e}_i$. Mostraremos a seguir que, com tal identificação, as constantes de estrutura de (IV.6) serão os coeficientes de Ricci do 3-espaço. Recordemos que os coeficientes de Ricci, γ^A_{BC}, são os coeficientes das ω-forma definidas em (A.6) na base das 1-formas Θ^A.

Escreveremos

$$\omega^A{}_B = \gamma^A{}_{BC}\ \Theta^C \tag{IV.7}$$

O significado desses coeficientes é facilmente apreendido se notamos que em um sistema de base normal, isto é, $e^A_\alpha = \delta^A_\alpha$, γ^A_{BC} se torna os símbolos de Christoffel. (Se o leitor não está familiarizado com isto, é interessante demonstrar este resultado como um exercício).

Assim, seja $\vec{e}_i = \vec{\xi}_i$ (i = 1, 2, 3), onde $\vec{e}_i$ são 3 vetores base de $S^{(3)}$, $\vec{\xi}_i$ são 3 vetores de Killing.

Derivando covariantemente $\vec{e}_i$ tem-se

$$e^i_{\beta\|\lambda} = \gamma^i{}_{jk}\ e^j_\beta\ \ e^k_\lambda \tag{IV.8}$$

Multiplicando por e^λ_m:

$$e_{a\beta\|\lambda}\ \ e^\lambda_m = \gamma_{abc}\ e^b_\beta\ \ e^c_\lambda\ \ e^\lambda_m = \gamma_{abm}\ e^b_\beta \qquad \text{(IV.}$$

Então, podemos escrever

$$e_{a\beta\|\lambda}\ e^\lambda_m - e_{m\beta\|\lambda}\ e^\lambda_a = (\gamma_{abm} - \gamma_{mba})\ e^b_\beta$$

ou, usando a identificação $\vec{e}_i \equiv \vec{\xi}_i$

$$\xi_{a\beta\|\lambda}\, \xi^{\lambda}_{m} - \xi_{m\beta\|\lambda}\, \xi^{\lambda}_{a} = (\gamma_{abm} - \gamma_{mba})\xi^{b}_{\beta} \qquad \text{(IV.9)}$$

E finalmente, usando (IV.5,6):

$$\frac{1}{2}(\gamma_{abc} - \gamma_{acb}) = C_{bca} \qquad \text{(IV.10)}$$

Isto é, as constantes de estrutura estão relacionadas aos coeficientes de Ricci por (IV.10). Mostremos que o conhecimento de $\psi_{abc} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{abc} - \gamma_{acb})$ é suficiente para determinar γ_{abc}.

Com efeito,

$$\begin{aligned} 2\,\psi_{abc} &= \gamma_{abc} - \gamma_{acb} \\ 2\,\psi_{bca} &= \gamma_{bca} - \gamma_{bac} \\ 2\,\psi_{cab} &= \gamma_{cab} - \gamma_{cba} \end{aligned} \qquad \text{(IV.11)}$$

E então,

$$\gamma_{abc} = \psi_{abc} + \psi_{bca} - \psi_{cab} \qquad \text{(IV.12)}$$

Finalmente, usando (A.6), (IV.7) e (IV.10) podemos escrever

$$\begin{aligned} d\Theta^{a} &= -\gamma^{a}_{bc}\,\Theta^{c} \wedge \Theta^{b} = \frac{1}{2}(\gamma^{a}{}_{bc} - \gamma^{a}{}_{cb})\Theta^{b} \wedge \Theta^{c} \\ d\Theta^{a} &= C^{a}{}_{bc}\,\Theta^{b} \wedge \Theta^{c}\,. \end{aligned} \qquad \text{(IV.13)}$$

Expressão (IV.13) caracteriza espaços 3-dimensional homogêneos; as constantes de estrutura do grupo de isometrias sendo dado pelos coeficientes de Ricci. O matemático italiano Bianchi foi o primeiro a classificar os diferentes tipos de homogeneidade através das constantes de estrutura. Abaixo segue a original tabela de Bianchi.

Tipo de Bianchi	Constantes de Estrutura
I	$C^{a}{}_{bc} = 0, \qquad \forall\ a, b, c$
II	$C^{1}_{23} = - C^{1}_{32} = 1$
III	$C^{2}_{23} = - C^{2}_{32} = 1$
IV	$C^{1}_{13} = - C^{1}_{31} = C^{1}_{23} = - C^{1}_{32} = C^{2}_{23} = - C^{2}_{32} = 1$
V	$C^{1}_{13} = - C^{1}_{31} = C^{2}_{23} = -C^{2}_{32} = 1$
VI	$C^{1}_{13} = - C^{1}_{31} = 1; \quad C^{2}_{32} = - C^{2}_{23} = -h \quad (h \neq 0, 1)$
VII	$\begin{cases} C^{1}_{32} = - C^{1}_{23} = C^{2}_{13} = - C^{2}_{31} = 1 \\ C^{2}_{23} = - C^{2}_{32} = h \qquad (h^2 < 4) \end{cases}$
VIII	$C^{1}_{23} = - C^{1}_{32} = C^{3}_{12} = - C^{3}_{21} = C^{2}_{13} = - C^{2}_{31} = 1$
IX	$C^{a}_{bc} = \varepsilon_{abc}$

Dentre esses tipos, os modêlos I, V e IX tem merecido estudo especial pois eles contêm como exemplos as métricas de Friedmann com seções espaciais euclideana, aberta e fechada, respectivamente. A generalização ocorre no aparecimento de possíveis eixos de anisotropia caracterizando desvios espectrais dependentes da direção. Teremos oportunidade em capítulo seguinte de estudar com detalhes uma métrica tipo de Bianchi-I, descoberta por Kasner há quase cinquenta anos. Antes de encerrar tal capítulo deveríamos acrescentar que existem pouquíssimas soluções das equações de Einstein possuindo inhomogeneidades em larga escala. Em escala pequena (ordem de aglomerado de galáxias, ou galáxias, ou até mesmo de estrêlas) as inhomogeneidades podem ser tratadas pela técnica de perturbação.

Com efeito, vários autores tentaram mostrar que perturbações ocorridas nas soluções homogêneas (tipo Friedmann) poderiam ser capazes de favorecerem certos raios de inhomogeneidade, graças eventualmente a fenômenos físicos responsáveis pela atenuação de determinados comprimentos de onda da perturbação e fortalecimento de outros. Não é nosso propósito discutir a questão da formação de galáxias neste nosso curso. Alertamos somente o leitor que a técnica essencial de perturbação necessária para tal estudo está sumarizada no anexo-B.

ANEXO DO CAPÍTULO IV

TEORIA DAS PERTURBAÇÕES

Seja $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ uma solução das equações de Einstein. Uma pequena perturbação dessa solução se escreve

$$g_{\mu\nu} \approx \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} + \varepsilon\, h_{\mu\nu} \tag{B.1}$$

onde, suporemos $\varepsilon^2 << \varepsilon$. Para o tensor covariante, teremos

$$g^{\mu\nu} \approx \overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu} - \varepsilon\, h^{\mu\nu} \tag{B.2}$$

onde

$$h^{\mu\nu} \approx \overset{\circ}{g}{}^{\mu\alpha}\, \overset{\circ}{g}{}^{\nu\beta}\, h_{\alpha\beta} \tag{B.3}$$

Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\mu}\, \{g_{\lambda\mu|\beta} + g_{\beta\mu|\alpha} - g_{\lambda\beta|\mu} \tag{B.4}$$

E então

$$\delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} = \frac{\varepsilon}{2}\, \{h^{\alpha}{}_{\lambda\|\beta} + h^{\alpha}{}_{\beta\|\lambda} - h_{\beta\lambda}{}^{\|\alpha}\} \tag{B.5}$$

onde a derivada covariante é tomada em relação à métrica não-perturbada. Um cálculo direto permite escrever o tensor perturbado de Riemann e daí a perturbação

$$\delta R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\delta} = \frac{\varepsilon}{2}\, \{h^{\alpha}{}_{\beta\|\delta\|\lambda} + h^{\alpha}{}_{\delta\|\beta\|\lambda} -$$

$$- h_{\beta\delta}{}^{\|\alpha}{}_{\|\lambda} - h^{\alpha}{}_{\lambda\|\beta\|\delta} - h^{\alpha}{}_{\beta\|\lambda\|\delta} + h_{\beta\lambda}{}^{\|\alpha}{}_{\|\delta}\} \tag{B.6}$$

Contraindo,

$$\delta R_{\mu\nu} \simeq \frac{\varepsilon}{2} \; \{h^{\alpha}{}_{\mu\|\nu\|\alpha} + h^{\alpha}{}_{\nu\|\mu\|\alpha} - h_{\mu\nu}{}^{\|\alpha}{}_{\|\alpha} - h_{\mu\|\nu} \qquad \text{(B.7)}$$

onde

$$h = h_{\mu\nu} \overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu} .$$

Finalmente, uma nova contração dará

$$\delta R \approx \varepsilon \; \{h^{\alpha\mu}{}_{\|\mu\|\alpha} - h^{|\alpha}{}_{\|\alpha}\} \qquad \text{(B.8)}$$

OBSERVAÇÃO:

A aproximação (B.1) admite a existência do limite da métrica quando $\varepsilon \to 0$; limite este dado pelo background $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$. Esse esquema tradicional, em verdade, é por demais simplista e podemos questionar sua validade em casos gerais. Toda a questão consiste na idéia de limite. Esta noção requer um critério operacional de vizinhança.

Para podermos utilizá-lo deveríamos considerar um conjunto W (abstrato) constituído de coleções de métricas e introduzir em W uma métrica. Assim a noção de distância entre duas métricas poder-se-ia estabelecer de modo correto e então poderíamos aplicá-lo em alguns casos. Aparentemente, isto pode parecer um exagero formal - mas vamos mostrar por um exemplo simples (dado por Geroch) como a noção usual de limite de uma métrica pode levar a conclusões contraditórias.

Consideremos a métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2}{\lambda^3 r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2}{\lambda^3 r}} - r^2 \,(d\Theta^2 + \text{sen}^2\Theta \, d\varphi^2) \qquad \text{(B.9)}$$

onde λ é o parâmetro em questão. O limite $\lambda \to 0$, não existe, nesta forma. Vamos agora modificar a forma de métrica (B.9) por uma transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} r \to \bar{r} &= \lambda r \\ t \to \bar{t} &= \lambda^{-1}\, t \\ \Theta \to \bar{\Theta} &= \lambda^{-1}\, \theta \end{aligned} \tag{B.10}$$

Então teremos (B.9) se transformando em

$$ds^2 = \lambda^2 \left(1 - \frac{2}{\lambda^2 \bar{r}}\right) d\bar{t}^2 - \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\bar{r}^2}{\left(1 - \frac{2}{\lambda^2 \bar{r}}\right)} - \bar{r}^2\, d\bar{\Theta}^2 - \frac{\bar{r}^2}{\lambda^2} \operatorname{sen}^2 (\lambda\bar{\Theta}) d\varphi^2 \tag{B.11}$$

Tomando agora o limite $\lambda \to 0$, teremos

$$ds^2 = -\frac{2}{\bar{r}}\, d\bar{t}^2 + \frac{\bar{r}}{2}\, d\bar{r}^2 - \bar{r}^2\, d\bar{\Theta}^2 - \bar{r}^2\, \bar{\Theta}^2 d\varphi^2 \tag{B.12}$$

que é uma solução não-trivial (sto é, não plana) das equações de Einstein descoberta por Kasner.

Façamos agora a transformação

$$\begin{aligned} x &= r + \lambda^{-4} \\ y &= \Theta\, \lambda^{-4} \end{aligned} \tag{B.13}$$

na métrica (B.9).

Um cálculo direto (faça!) mostra que o limite $\lambda \to 0$ agora, dará origem à métrica plana ! Assim, o limite não fica univocamente determinado. Ele depende do sistema de coordenadas. Desse modo, o problema do limite de uma métrica só estará bem determinado quando se estabelecer um bom critério operacional de vizinhança e consequente criação de uma topologia coerente com resultados físicos observáveis.

PERTURBAÇÕES NA MÉTRICA DE FRIEDMANN

Consideremos a métrica (II.6). O tensor momentum energia sendo dado por um gás de densidade ρ e pressão p se escreve

$$T_\mu{}^\nu = (\rho + p)\ V_\mu\ V^\nu - p\ \delta_\mu{}^\nu$$

Perturbação da métrica pode ser causa (efeito) de perturbação de T_μ^ν :

$$\delta T_\mu{}^\nu = (\delta\rho + \delta p)V_\mu\ V^\nu + (\rho + p)(V_\mu\ \delta V^\nu + V^\mu\ \delta V_\mu) - \delta p\ \delta_\mu{}^\nu \tag{B.14}$$

A equação de estado

$$p = (\nu - 1)\rho \tag{B.15}$$

com

$$1 \leqslant \nu \leqslant 4/3$$

permite escrever

$$\delta p = (\nu - 1)\delta\rho \tag{B.16}$$

A relação

$$V_\mu V_\nu g^{\mu\nu} = 1$$

dará

$$(\delta V_\mu)V^\mu + V_\mu \delta V^\mu = 0 \tag{B.17}$$

Finalmente, (B.14) assume a forma

$$\delta T_\mu{}^\nu = \nu\,\delta\rho \quad V_\mu V^\nu + (\rho + p)(V_\mu \quad \delta V^\nu + \quad \delta V_\mu \, V^\nu) - (\nu - 1)\delta\rho \, \delta_\mu{}^\nu \tag{B.18}$$

De posse de (B.7) e (B.18) podemos escrever as equações de Einstein perturbadas

$$\delta R_\mu{}^\nu - \frac{1}{2}\,\delta R\,\delta_\mu{}^\nu = \delta T_\mu{}^\nu \tag{B.19}$$

A técnica da perturbação tem sido utilizada, principalmente, na análise da estabilidade de soluções das equações de Einstein e no estudo de modêlos cosmológicos inhomogêneos. A inhomogeneidade aparecendo como uma (pequena) modificação do background homogêneo.

Não discutiremos tal problema aqui. Ele será objeto de uma futura monografia desta série de Questões Cosmológicas publicadas pelo C.B.P.F.

ONDAS GRAVITACIONAIS NUM BACKGROUND DE FRIEDMANN

Recentemente, o interêsse da comunidade científica foi despertado pela informação de suposta detecção de ondas gravitacionais por Weber. Infelizmente, até o presente, tal detecção não recebeu confirmação por parte de outros investigadores. Entretanto, devemos esperar encontrar no Universo ondas gravitacionais com origem em diferentes processos físicos. Assim, um estudo teórico sobre a propagação de ondas gravitacionais no Universo se faz necessária.

A análise dessa questão será objeto de um curso avançado a ser realizado em 1974 no C.B.P.F. Daremos aqui somente um exemplo particular de ondas gravitacionais propagando-se em um Universo de tipo Friedmann recentemente estudado por meu aluno e colaborador C.A.P. Galvão. O interêsse especial por essa métrica se prende à existência de três eixos de anisotropia da perturbação. Assim, ela permite estudar diferentes problemas ligados à questão de isotropia presente no Universo observável.

A métrica não perturbada será a de Friedmann com seção espacial euclideana:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \{dx^2 + dy^2 + dz^2\} \tag{B.20}$$

A perturbação $h_{\mu\nu}$ (B.1) é dada por

$$\begin{cases} h_{o\mu} = 0 \\ h_{ij} = \alpha(t)\,\delta_{i1}\,\delta_{j1} + \beta(t)\delta_{i2}\,\delta_{j2} + \gamma(t)\,\delta_{i3}\,\delta_{j3} \\ (i, j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad \text{(B.21}$$

A equação de propagação das ondas gravitacionais escrever-se-á

$$\delta\, G_\mu{}^\nu = 0 \tag{B.22}$$

Desenvolvendo (B.22) com a métrica dada por (B.1) e (B.21) tem-se

$$\dot{H} - \frac{\dot{a}}{a} H = 0 \tag{B.23a}$$

$$\ddot{\psi} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\psi - \ddot{H} + \frac{\ddot{a}}{a} H = 0 \tag{B.23b}$$

$$\ddot{H} - \frac{\ddot{a}}{a} H = 0$$

onde

$$\begin{cases} H = Tr\, h_{ij} \\ \psi(t) = \begin{cases} \alpha(t) \;, & i = 1 \\ \beta(t) \;, & i = 2 \\ \gamma(t) \;, & i = 3 \end{cases} \\ \gamma(t) \end{cases} \tag{B.24}$$

Imporemos adicionalmente a condição

$$H = 0 \tag{B.25}$$

pois ela simplificará bastante estas equações. Consideremos três casos possíveis para a solução a(t) do background:

$$a(t) \sim t^{1/2} \tag{B.26a}$$

$$a(t) \sim t^{2/3} \tag{B.26b}$$

$$a(t) \sim t^{1/3} \tag{B.26c}$$

que correspondem, respectivamente, às equações de estado

$$p = \rho/3, \quad p = 0 \quad e \quad p = \rho$$

Trataremos cada um desses casos separadamente

1º Caso:

$$a \sim t^{1/2}$$

A equação (B.23b) se reduz à expressão:

$$t\ddot{\psi} + \frac{1}{2}\dot{\psi} = 0 \tag{B.27}$$

cuja solução geral se escreve

$$\psi = c_1 + c_2\ t^{1/2} \tag{B.28}$$

2º Caso:

$$a \sim t^{2/3}$$

A equação (B.23b) se escreve:

$$t^2\ddot{\psi} + \frac{2}{3}\ t\ \dot{\psi} - \frac{2}{9}\ \psi = 0 \tag{B.30}$$

e daí

$$\psi = t^{1/6}\left\{B_1 \quad \cos(\frac{1}{6}\ \log\ t) + B_2\ \text{Sen}\ (\frac{1}{6}\ \log\ t)\right\} \tag{B.31}$$

3º Caso:

$$a \sim t^{1/3}$$

A equação (B.23b) se escreve:

$$t^2\ \ddot{\psi} + \frac{1}{3}\ t\ \dot{\psi} + \frac{1}{9}\ \ \psi = 0 \tag{B.32}$$

cuja solução é

$$\psi = D_1 \; t^{1/3} + D_2 \; t^{1/3} \; \log t \tag{B.33}$$

E daí

$$\begin{aligned} \alpha &= D_1 \; t^{1/3} \\ \beta &= D_2 \; t^{1/3} \; \log t \\ \gamma &= - D_1 \; t^{1/3} - D_2 \; t^{1/3} \log t \end{aligned} \tag{B.34}$$

$$H = 0$$

EXERCÍCIO: Calcule a parte elétrica $E_{\alpha\beta}$ e magnética $H_{\alpha\beta}$ do tensor perturbado de Weyl da métrica acima. A partir das expressões de $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ calcule a "energia" gravitacional $W = \frac{1}{2} (E_{\alpha\beta} \; E^{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} \; H^{\alpha\beta})$. Que podemos concluir desse valor de W ?

Compare com a propagação de ondas Eletromagnéticas em um Universo de Friedmann.

Que podemos dizer sobre a evolução de parte anisotrópica da perturbação ? (Cf. C. A. P. Galvão. Tese de Mestre, C.B.P.F./1974.

CAPÍTULO V

ANISOTROPIA DO UNIVERSO

No capítulo II estudamos alguns modêlos cosmológicos tradicionais que foram úteis devido ao seu alto grau de simetria. Em particular, eles não possuiam anisotropia, nem inhomogeneidades.

A existência de horizontes (ver capítulo VII) nestes modêlos cria certa dificuldade na compreensão do Universo atual. Por exemplo, é difícil entender (nestes modêlos) a origem do alto grau de isotropia do Universo. Com efeito, o horizonte implica na existência de regiões M_1, M_2, etc. na qual a troca de informações (de uma região para outra) é proibida (se admitirmos que não haja violação das relações conhecidas de causalidade). Ora, como seria possível a estas regiões evoluirem separadamente para um estágio altamente correlacionado - como parece ser o Universo observável ? Devemos, pelo menos, admitir que tal correlação seria altamente improvável - o que, certamente não simplifica a questão.

Ao aprofundar esta e outras questões foi-se levado a considerar que a Estrutura Cósmica poderia ser bem mais complexa do que os modêlos tradicionais admitiam.

Com efeito, a moderna cosmologia pretende ultrapassar a visão simplória de um Cosmos construído segundo condições iniciais bem determinadas à visão de um Cosmos inicialmente caótico - no qual possíveis simetrias apareceriam em estágios ulteriores como consequência de certos processos físicos (a serem precisados). Essa orientação anarquista de um Cãos Cósmico aparece impressa pela primeira vez nos trabalhos recentes de Misner (1969).

Entretanto, já em 1963, Lifshitz e Khalatnikov mostravam que nas regiões próximas da singularidade dos modêlos cosmológicos, a presença da matéria não influencia a dinâmica da expansão do Universo e uma fase altamente anisotrópica aparece.

Com efeito, quantidades da forma $(\frac{\dot{a}}{a})^2$ e $\frac{\ddot{a}}{a}$, que aparecem no tensor de Einstein (G_μ^ν) nos modêlos do tipo de Friedmann, são da ordem de t^{-2}; enquanto que a densidade e a pressão são da ordem de $t^{-4/3}$. Assim, na vizinhança da origem dos tempos, os têrmos que descrevem a matéria $T_\mu{}^\nu$ podem ser desprezados em face dos têrmos métricos (G_μ^ν). Chama-se de estado do vazio (vacuum stage) a tal região.

SOLUÇÃO DE KASNER

Já na década de 20, a solução anisotrópica de Kasner era conhecida, mas sua importância na descrição de uma fase inicial do Universo só apareceu bem recentemente. Estudemos algumas propriedades desta solução.

Escreveremos a métrica sob a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2 \tag{V.1}$$

para as 1-formas Θ^A definidas por

$$ds^2 = (\Theta^0)^2 - (\Theta^1)^2 - (\Theta^2)^2 - (\Theta^3)^2$$

teremos

$$\begin{aligned} \Theta^0 &= dt \\ \Theta^1 &= a\ dx \\ \Theta^2 &= b\ dy \\ \Theta^3 &= c\ dz \end{aligned} \tag{V.2}$$

Derivando,

$$\begin{aligned} d\Theta^0 &= 0 \\ d\Theta^1 &= \frac{\dot{a}}{a}\, \Theta^0 \wedge \Theta^1 \\ d\Theta^2 &= \frac{\dot{b}}{b}\, \Theta^0 \wedge \Theta^2 \\ d\Theta^3 &= \frac{\dot{c}}{c}\, \Theta^0 \wedge \Theta^3 \end{aligned} \tag{V.3}$$

E para as 1-formas $\omega^A{}_B$:

$$\omega^1_0 = \frac{\dot{a}}{a}\, \Theta^1 = \omega^0{}_1$$

$$\omega^2_0 = \frac{\dot{b}}{b}\, \Theta^2 = \omega^0{}_2$$

$$\omega^3_0 = \frac{\dot{c}}{c}\, \Theta^3 = \omega^0{}_3$$

A curvatura $\Omega^A{}_B$ será dada por

$$\Omega^0_{1} = \frac{\ddot{a}}{a}\,\theta^0 \wedge \theta^1$$

$$\Omega^0{}_2 = \frac{\ddot{b}}{b}\,\theta^0 \wedge \theta^2$$

$$\Omega^0{}_3 = \frac{\ddot{c}}{c}\,\theta^0 \wedge \theta^3$$

$$\Omega^1{}_2 = \frac{\dot{a}}{a}\,\frac{\dot{b}}{b}\,\theta^1 \wedge \theta^2 \qquad \text{(V.5)}$$

$$\Omega^1{}_3 = \frac{\dot{a}}{a}\,\frac{\dot{c}}{c}\,\theta^1 \wedge \theta^3 \;;$$

$$\Omega^2{}_3 = \frac{\dot{b}}{b}\,\frac{\dot{c}}{c}\,\theta^2 \wedge \theta^3$$

As componentes de tetrada serão:

$$R^0{}_{101} = \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R^0{}_{202} = \frac{\ddot{b}}{b}$$

$$R^0{}_{303} = \frac{\ddot{c}}{c}$$

$$R^1{}_{212} = \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \qquad \text{(V.6)}$$

$$R^1{}_{313} = \frac{\dot{a}}{a}\,\frac{\dot{c}}{c}$$

$$R^2{}_{323} = \frac{\dot{b}}{b}\,\frac{\dot{c}}{c}$$

Contraindo, teremos:

$$R_{00} = -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{c}}{c}$$

$$R_{11} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\ \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a}\ \frac{\dot{c}}{c}$$

$$R_{22} = \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}}{a}\ \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\ \frac{\dot{b}}{b} \qquad (V.7)$$

$$R_{33} = \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a}\ \frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b}\ \frac{\dot{c}}{c}$$

As equações de Einstein para o vazio serão dadas por:

$$R_{AB} = 0 \qquad (V.8)$$

Pondo

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_o} \right)^{p_1} \qquad (V.9)$$

$$b(t) = \left(\frac{t}{t_o} \right)^{p_2}$$

$$c(t) = \left(\frac{t}{t_o} \right)^{p_3}$$

teremos:

$$p_1 + p_2 + p_3 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 = 0 \qquad (V.10a)$$

$$p_1(p_1 + p_2 + p_3 - 1) = 0 \qquad (V.10b)$$

$$p_2(p_1 + p_2 + p_3 - 1) = 0 \qquad (V.10c)$$

$$p_3(p_1 + p_2 + p_3 - 1) = 0 \qquad (V.10d)$$

E então,

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \qquad (V.11a)$$

$$(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = 1 \tag{V.11b}$$

Assim, a métrica de Kasner se escreve

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2p_1} dx^2 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2p_2} dy^2 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2p_3} dz^2$$

Com p_1, p_2, p_3 sendo números reais que satisfazem (V.11). Um caso trivial ocorre quando dois desses números são iguais a zero, isto é, $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1)$.

Neste caso o tensor de Riemann de quatro índices R_{ABCD} se anula: o espaço é plano.

VOLUME E EXPANSÃO NO UNIVERSO DE KASNER

$$V = \int \sqrt{-g}\, d^3x = t \int d^3x \tag{V.13}$$

O parâmetro $\alpha = \frac{\dot{V}}{V}$ vale, neste caso

$$\alpha = \frac{1}{t} \tag{V.14}$$

No modêlo isotrópico, de Friedmann, o parâmetro α depende da equação de estado, e tem-se

$$\alpha = 3\,\frac{\dot{a}}{a}$$

e, segundo (III.13) é igual ao fator de expansão Θ. Isso não ocorre na métrica de Kasner devido à desigual expansão do Universo segundo os eixos de anisotropia. Assim como Θ em (III.13) mede a constante de Hubble, no Universo de Kasner podemos definir uma lei de Hubble generalizada caracterizada pelas diferentes taxas de expansão $\frac{\dot{a}}{a}, \frac{\dot{b}}{b}, \frac{\dot{c}}{c}$ - segundo os três eixos de anisotropia.

INFLUÊNCIA DA ÉPOCA DE KASNER NA DISTRIBUIÇÃO DOS MOMENTA DAS PARTÍCULAS NO ESPAÇO DE FASE

Os estudos de Lifshitz, Khalatnikov e outros do período anisotrópico do Universo (isto é, nas vizinhanças da origem do tempo) possibilitou a compreensão de um grande número de fenômenos - e também criou novos problemas bastante intrigantes.

Particularmente importante é o estudo da distribuição, no espaço de fase, dos momenta das partículas existentes neste período.

Ao contrário das métricas isotrópicas, nas métricas onde existe anisotropia o momento físico das partículas depende não-uniformemente do fator de expansão. A explicitação dessa dependência pode ser feita de um modo simples no caso de um campo escalar como veremos a seguir. (A generalização para campos de spin diferente de zero é automática).

Num espaço curvo, caracterizado por uma métrica $g_{\mu\nu}(x)$, a dinâmica de um campo escalar $\phi(x)$ é obtida por um princípio variacional análogo ao do espaço plano da relatividade especial. A Lagrangiana do campo se escreve

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu}(x)\ \phi_{|\mu}(x)\ \phi_{|\nu}(x) - m^2\phi^2(x) - \frac{1}{6} R\ \phi^2(x) \tag{V.15}$$

O princípio da ação mínima dará a equação de movimento

$$\Box\,\phi + (m^2 + \frac{R}{6})\,\phi = 0 \qquad \text{(V.16)}$$

onde $\Box$ é o operador D'Allembertiano generalizado, isto é,

$$\Box\phi = \phi_{|\mu\|\nu}\, g^{\mu\nu}$$

A barra simples | significa derivada simples; dupla barra significa derivada co-variante.

A introdução do têrmo proporcional ao escalar de curvatura é arbitrária;- tradicionalmente ele provém da imposição de invariância conforme para a equação do campo escalar de massa nula. No limite do espaço plano, isto é,

$$\begin{aligned} &g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \eta_{\mu\nu} \\ &R \rightarrow 0 \end{aligned} \qquad \text{(V.17)}$$

a equação (V.15) se transforma na equação relativista (especial):

$$\eta^{\mu\nu}\,\phi_{|\mu|\nu} + m^2\phi = 0 \qquad \text{(V.18)}$$

$\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowskii.

Expandindo o campo escalar em série de Fourier temos

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \left\{ A_k\, \varphi_k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \bar{A}_k\, \bar{\varphi}_k(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \qquad \text{(V.19)}$$

Substituindo (V.19) em (V.16) obtemos a equação para os coeficientes $\varphi_k(t)$:

$$\ddot{\varphi}_k + \frac{\dot{V}}{V}\dot{\varphi}_k + \left[\omega_k^2(t) + \frac{R}{6}\right] \varphi_k = 0 \qquad \text{(V.20)}$$

onde $\dot{\varphi}_k = \dfrac{d\varphi_k}{dt}$; V é o volume dado por (V.13); e $\omega_k(t)$ vale

$$\omega^2{}_k(t) = m^2 + \left(\frac{k_1}{t^{p_1}}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{t^{p_2}}\right)^2 + \left(\frac{k_3}{t^{p_3}}\right)^2 \qquad (V.21)$$

A expressão (V.21) mostra a dependência dos momenta físicos segundo a razão da expansão do Universo nos diferentes eixos de anisotropia. Uma questão atual de profunda importância pode então ser colocada. Admitir uma fase inicial do Universo altamente caótica, implicaria na existência de anisotropia.

A ausência de tal anisotropia no período atual nos conduz a questionar: qual o fenômeno físico responsável pela isotropização do Cosmos ?

A dependência acima (equação V.21) dos momenta do campo escalar com os eixos de anisotropia, sugeriria procurar a solução a esta questão na análise do efeito de reação (das partículas existentes ou criadas nesta fase) sobre a métrica.

Este é um tema atual de pesquisa extremamente atraente. (Ver C. A. P. Galvão, Tese C.B.P.F., 1974).

CAPÍTULO VI

DEPENDÊNCIA CÓSMICA DAS INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS

INTRODUÇÃO

O que pode mudar e o que é aparente do Universo ? As estrêlas se agitam, as galáxias se movimentam, ondas de perturbações percorrem o Cosmos. Na confusão que aparenta ser o céu, onde podemos procurar aquilo que está além da mobilidade ? Aquilo que permitiria a um espírito, criado no Cartesianismo, entender o Cosmos. Organizá-lo.

Para os físicos tradicionais, a ordem estaria escondida nas Leis Universais que descrevem as interações fundamentais entre aquilo que existe. Em um dado momento de nossa ciência, as Leis seriam dadas pela dinâmica das interações fraca, forte, eletromagnética e gravitacional (e, eventualmente, outras mais a serem acrescentadas a esta lista).

Assim, a estabilidade do Cosmos guardaria coerência com a estruturação dessas leis e seria um reflexo auto-consistente delas.

Aparentemente, não existe nenhuma contradição entre esta idéia e as observações. O que se pode afirmar, entretanto, em crítica a tal modêlo é que, pelo menos, ele não nos permite entender como funciona o mecanismo de auto-consistência.

Explico-me: a possibilidade da auto-regulação está contida na historicidade de suas partes. Assim, ao aceitarmos tal argumentação deveríamos estar automaticamente aceitando a historicidade do Universo.

Há vários caminhos que conduzem à estabilização. A maior parte dos físicos aceita, implicita ou explicitamente, que no nosso Universo, o mecanismo de auto-consistência teve um "imprint" inicial (ou quase-inicial).] BIG BANG

Desse modo, a estabilização seria um fenômeno desinteressante a ocorrer nos primórdios, para fora do domínio da Física.

Uma outra visão pode ser sustentada, também sem desacordo experimental. Nesta segunda visão, as relações entre as partes no Universo dependeriam essencialmente do todo. Assim, por exemplo, interações entre partículas teriam uma dependência com fatôres globais, tais como o raio de expansão do Universo, etc.

Certamente este segundo approach é por demais ambicioso; mas estou convencido de que somente através dele poderemos chegar a uma visão coerente do real.

TEORIA ESCALAR-TENSORIAL DA GRAVITAÇÃO

Parece ter sido Dirac (1937) quem, nos tempos modernos, formulou pela primeira vez a noção de dependência temporal das interações básicas. Dirac sugerira (baseado em argumentos de cuja ideologia não acreditamos) considerar a constante gravitacional de Newton como função do tempo cósmico. Jordan, 1961 (não publicado) formulou esta noção de um modo co-variante - introduzindo além do tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ um novo objeto dinâmico: um campo escalar

$\phi(x)$, para descrever a gravitação. Vários autores, desde então, tem explorado tal idéia. Menção especial poder-se-ia dar ao modêlo de Brans-Dicke (1963).

A teoria de BD propõe-se a descrever a dinâmica dos campos $g_{\mu\nu}(x)$ e $\phi(x)$ através de uma Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left\{\phi R - \omega \frac{\phi_{|\alpha}\, \phi_{|\beta}\, g^{\alpha\beta}}{\phi}\right\} \tag{VI.1}$$

Assim, a constante de gravitação de Newton-Einstein k se transforma no campo escalar ϕ. A teoria de Einstein é o caso particular ϕ = constante.

Não entraremos em detalhes nesta teoria aqui. Diremos somente que do ponto de vista cosmológico, as equações obtidas a partir de (VI.1) admitem solução do tipo Friedmann com singularidade. Estas equações se escrevem

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \frac{-k}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2}\left\{\phi_{|\mu}\, \phi_{|\nu} - \frac{1}{2}\phi_{|\lambda}\, \phi^{|\lambda}\, g_{\mu\nu}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\phi}\left(\Box\phi\, g_{\mu\nu} - \phi_{|\mu\|\nu}\right) \tag{VI.2}$$

e

$$2\omega\, \frac{\Box\phi}{\phi} - \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{|\lambda}\, \phi^{|\lambda} = -R \tag{VI.3}$$

Um dos importantes argumentos tradicionais contra tal modêlo se deve à utilização da navalha de Occam. Isso porque a modificação induzida pelas novas equações de Brans-Dicke não parecem ser substancialmente distintas das equações de Einstein.

Entretanto, recentemente (Lett. N. Cim., Vol. 5, nº 3, set. 1972) Ruban e Finkelstein estudando soluções cosmológicas anisotrópicas das equações de Brans-Dicke chegaram ao resultado notável de que as soluções da nova teoria diferem substancialmente da de Einstein nas regiões vizinhas à singularidade. Assim, na análise de fenômenos ocorridos nessa região podemos encontrar eventos qualitativamente diferentes, segundo uma teoria ou outra. A experiência poderá decidir no futuro sobre essa questão.

DEPENDÊNCIA CÓSMICA DAS INTERAÇÕES FRACAS

Em 1972, eu e Rotelli publicamos os resultados de uma análise que fizemos da situação dos neutrinos em cosmologia. A idéia original baseava-se em meu trabalho anterior (Journal of Math. Phys. 1971) no qual fora sugerido uma relação entre as interações fraca e gravitacional. Com base nesta sugestão a historicidade da gravitação passou a ser estendida à interação fraca. Restava somente questionar como tal dependência temporal poderia aparecer. Uma análise de processos fracos usando a teoria corrente-corrente logo mostrou que num Universo homogêneo e isotrópico esta dependência se manifestaria como um fator multiplicativo na parte axial em relação à parte vetorial da corrente.

Com efeito, na métrica de Friedmann a corrente fraca se escreve

$$J_\alpha(x) = \bar{\psi}(x)\,\gamma_\alpha(x)\,(1 + \gamma_5(x))\,\psi(x) \qquad \text{(VI.4)}$$

onde $\gamma_\alpha(x)$ é dado por (I.30) e

$$\{\gamma_5(x),\, \gamma_\alpha(x)\} = 0$$

A Lagrangiana de interação fraca é dada por

$$\mathcal{L}_{int} \sim J_\alpha(x)\ J_\beta(x)\ g^{\alpha\beta}(x) \qquad \text{(VI.5)}$$

Um cálculo simples mostra que podemos escrever

$$\gamma_\alpha(x) = \Lambda(\alpha,\ x)\gamma_\alpha \qquad \text{(VI.6a)}$$

$$\gamma_5(x) = \varepsilon(x)\ \gamma_5 \qquad \text{(VI.6b)}$$

onde $\Lambda(\alpha,\ x)$ são os coeficientes dos elementos infinitesimais na métrica de Friedmann e γ_α, γ_5 são as matrizes constantes de Dirac.

Então, a Lagrangiana (VI.5) é equivalente à Lagrangiana usual, isto é,

$$\mathcal{L}^{(P)}_{int} \sim j_\alpha(x)\ j_\beta(x) \qquad \text{(VI.7)}$$

com $\eta^{\alpha\beta}$ sendo o tensor de Minkowskii e onde pusemos

$$j_\alpha(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\alpha(1 + \varepsilon(x)\gamma_5)\ \psi(x) \qquad \text{(VI.8)}$$

Restaria conhecer a função $\varepsilon(x)$. O modêlo unificador proposto por mim (1971, 1973) sugere associar esta função $\varepsilon(x)$ ao campo escalar de Dicke. Se aceitarmos tal relação então podemos esperar que num Universo estabilizado em um modêlo de Friedmann, o campo escalar $\phi(x)$ se torna uma constante. Assim, a violação máxima da paridade seria uma situação limite (assintótica). Com efeito este parece ser o caso (ver L. M. C. S. Rodrigues, Tese C.B.P.F. 1974).

Analisemos agora, a questão da dependência cósmica das interações fracas do ponto de vista de experiência realizadas com processos fracos em laboratório.

A existência de um valor para $\varepsilon(x)$ atual diferente da unidade poderia ser testada por uma medida acurada do parâmetro de Michel ρ no decaimento do meson μ. Definamos um parâmetro δ escrevendo, para a corrente fraca atual.

$$J_\alpha(x) = \bar{\psi}(x)\ \gamma_\alpha \left[1 + (1-\delta)\gamma_5\right] \psi(x) \tag{VI.9}$$

isto é, $\varepsilon(t_0) = 1 - \delta$, onde t_0 representa nosso presente tempo cósmico. A teoria V-A aparece no limite $\delta = 0$. Se negligenciarmos, por enquanto, todas as massas envolvidas (exceto a massa do meson μ) e também desprezarmos as correções radioativas (que podem ser calculadas facilmente)encontramos para ρ o valor

$$\rho = \frac{3(1 - 2\delta + \frac{3}{2}\delta^2)}{4(1 - 2\delta + 2\delta^2)} \simeq \frac{3}{4}\ (1 - \frac{\delta^2}{2}) \ . \tag{VI.10}$$

Como a correção em δ^2 pode ser muito pequena, nós re-calcularemos a taxa de decaimento dW para o muon polarizado levando em consideração a massa do eletron e do neutrino do muon (< 1.15 MeV), mas desprezando a massa do anti-neutrino do eletron (< 60 eV). Encontramos, até a ordem δ^2:

$$\frac{dW}{dE\ d\cos\Theta} = \frac{(1-\gamma)^2\ G^2(1 - 2\delta + \frac{3}{2}\delta^2)|k|}{24\ \pi^3} \Bigg\{ E(\mu^2+e^2-2\mu E)(1+3\delta^2-\gamma) +$$

$$+ 2(\mu-E)\ (\mu E-e^2)(1+2\gamma) - 3\nu(\mu E-e^2)\delta(1 + \frac{\delta}{2}) + \frac{\alpha}{2\pi}\ f(E) +$$

$$+ |k|\ \cos\Theta\left[\mu^2 + 3e^2 - 2\mu E - \gamma(\mu^2 - 3e^2 + 2\ \mu E) + \frac{\alpha}{2\pi}\, g(E)\right]$$

onde E, $|K|$, e são energia do eletron, momento ($|k| = \sqrt{E^2-e^2}$) e massa, respectivamente. Pusemos $\gamma = \dfrac{\nu^2}{\mu^2+e^2-2\mu E}$ e, como os valores permissíveis pela cinemática do processo para a energia do eletron vai de $E_{min} = e$ até $E_{max} = \dfrac{\mu^2 + e^2 - \nu^2}{2\mu}$ segue-se que o têrmo $(1-\gamma)^2$ se anula no limite $E \to E_{max}$. As funções $f(E)$ e $g(E)$ representam correções radioativas. O valor experimental (1969) nos dá

$$\rho_{exp} = 0.751 \pm 0.003$$

O que daria (admitindo 1 desvio padrão)

$$\delta < 0.05$$

Assim, experiencia mais precisa (até segunda ordem decimal) poderia pôr em evidência um tal δ.

NEUTRINO CÓSMICO

As expressões (VI.4) e seguintes mostram que um neutrino (anti-neutrino) produzido em um tempo cósmico t via uma corrente fraca do tipo $\bar{\psi}\ \gamma_\alpha(1 + \varepsilon(t)\gamma_5)\psi$, pode ser escrito como

$$\psi_\nu(t) = \cos\Theta(t)\ \psi_\nu^L + \mathrm{sen}\ \Theta(t)\ \psi_\nu^R$$

onde L e R significa polarização esquerda (left) e direita (right); e onde

$$\mathrm{tg}\ \Theta(t) = \frac{1 - \varepsilon(t)}{1 + \varepsilon(t)}$$

Se, como é usualmente aceito, nós vivessemos em um mundo no qual $\delta = 0$ e os neutrinos tivessem massa nula, então os neutrinos com polarização direita (R) seriam completamente invisiveis a qualquer aparelho (exceto, possivelmente, algum que usasse a interação gravitacional). Assim, a única consequência observável do modêlo, na Terra, seria a diminuição do valor da constante universal de Fermi G pelo fator cos $\Theta(t)$. Isto poderia ser medido na experiência Gedenken na qual todos neutrinos -L provenientes de uma fonte particular seriam absorvidos e contados durante um certo tempo. Isso permitiria conhecer o fluxo (total) incidente - que, juntamente com uma medida de sua taxa de interação permitiria calcular a constante modificada de Fermi. Isso é impossivel na prática devido ao valor extremamente baixo da taxa de interação dos neutrinos e poucos dos que entram no laboratório serão efetivamente detectados. Em verdade, é justamente esta propriedade evasiva que, em parte, torna os neutrinos cósmicos tão interessantes; pois que, uma vez detectados eles trarão informação precisa de fontes distantes.

Uma experiência factivel depende de um possível valor não -nulo de δ, pois isto nos permitirá medir ambos ψ_ν^L e ψ_ν^R . Com efeito, as taxas de interação dessas componentes, originárias de um fonte particular, são proporcionais a

$$\cos^2 \Theta \left(1 - \frac{\delta}{2} \right)^2 \cdot \text{fluxo}$$

e

$$\text{sen}^2 \Theta\left(\frac{\delta^2}{4} \right) \cdot \text{fluxo} \; , \quad \text{respectivamente.}$$

(Pondo $m_\nu \sim 0$). Como o fluxo é o mesmo nos dois casos, a razão das taxas determina $\delta^2 \, tg^2 \, \Theta$. Essa razão aparece, por exemplo, na polarização de electrons produzido por decaimento β inverso (para pequenas transferências de momento):

$$\frac{P_e}{V_e} \approx \frac{\delta^2 \, tg^2\Theta - 4}{\delta^2 \, tg^2\Theta + 4}$$

Para prosseguirmos e tentar determinar a dependência temporal em $\Theta(t)$ nós precisariamos de dispor de um telescópio de neutrino; isto é, um aparelho que permitisse conhecer o momento dos neutrinos incidente, proveniente de distintas épocas cósmicas.

Um tal aparelho só será disponível eventualmente no final da presente década.

No estágio atual, não podemos avançar muito neste caminho. Se os neutrinos preenchem todo o Universo, determinando sua curvatura -eventualmente sua história passada e futura - só a ciência futura poderá decidir. De qualquer modo, pensar nestes viajantes semi-intocáveis que escondem a informação do que ocorreu nos primórdios do Universo, e tentar extrair dêles esta informação, é fascinante.

CAPÍTULO VII

SINGULARIDADE

Uma das mais fascinantes questões da cosmologia diz respeito à sua origem explosiva, isto é, singular, como aparece nos modelos do tipo Friedmann. De um modo simplista, poderiamos tentar caracterizar a singularidade como uma região na qual o valor do campo gravitacional (bem como a densidade de matéria) diverge. A comunidade científica sempre impôs severas críticas a modelos cosmológicos singulares. Entretanto, como vimos, a recente descoberta da radiação de micro-ondas (mostrando a existência de um gás de fótons em equilíbrio térmico a uma temperatura atual de $2.7^{0}K$) sustenta fortemente a hipótese de um estado primordial extremamente quente - em acordo com a previsão do modêlo de Friedmann.

Assim, temos acumulado uma série de argumentos experimentais a nos fazer crer que vivamos hoje uma era onde o Universo pode ser bastante bem aproximado por este modelo.

Isso não implica necessariamente, em que o Cosmos tenha tido desde o seu começo (valor $t \sim 0$) um tal comportamento. Essa aparente sutileza é fundamental na tentativa de conciliar presentes resultados experimentais com nossas idéias a respeito da validade de leis físicas.

Com efeito, como entender uma análise da região singular extrapolando as leis físicas conhecidas, criadas em um contexto normal, isto é, em condições não extremas ? Aparentemente só nos resta optar por dois caminhos: ou a região singular deve poder ser evitada ou devemos procurar um novo método de atacar o problema, eventualmente com uma nova técnica matemática e com novas leis físicas.

Devemos notar que a segunda opção acima deveria vir seguida de uma re-estruturação global de toda a física - como ela é tradicionalmente conhecida. No instante em que redijo estas notas existe pelo menos uma proposta deste segundo tipo. Não nos deteremos nela aqui - devido ao seu caráter ainda altamente abstrato e não conclusivo.

Assim, só nos resta optar pelo caminho primeiro.

Isto é, devemos questionar: é a singularidade do Universo uma situação inevitável ?

Com efeito, Lifschitz e seus colaboradores (final da década de 50) puseram em dúvida a validade de um modelo cosmológico singular. O argumento essencial em que eles se baseavam consistia em atribuir tal situação patológica (sic) às simetrias impostas à estrutura espaço-tempo.

Eles arguiam que a condição de homogeneidade e isotropia imposta ao espaço talvez fosse por demais forte, capaz de conter em si o germe da inevitabilidade da singularidade. Um modelo desprovido de tantas simetrias, diziam êles, poderia ter um comportamento distinto nas vizinhanças da "origem do tempo". O que ocorreria se, por exemplo, o tensor de rotação da congruência de geodésicas das galáxias (cf. equação III.12 e seguintes) fosse diferente de zero ? A existência de rotação, por exemplo, seria capaz de alterar a fase super-densa do Universo ?

Essas questões provocaram um sentimento aliviado de que talvez modêlos mais gerais poderiam trazer uma visão diferente do comportamento global do Universo - eliminando assim as dificuldades (?) dos modelos expansionistas simples (Friedmann).

As respostas àquelas questões demoraram quase uma década a aparecer. Elas vieram sob forma extremamente sofisticada de rirogosos teoremas matemáticos devido aos trabalhos de Hawking, Penrose e outros. Nestes teoremas demonstra-se que a inevitabilidade da singularidade é muito mais geral do que se supunha. Começa-se por re-definir a noção de singularidade de tal modo a torná-la matematicamente precisa e operacional. Uma vez aceita esta nova definição então segue-se uma série de teoremas.

Entre as diversas definições propostas, existe uma base comum qual seja, a de procurar caracterizar singularidade por propriedades globais e não locais. Por exemplo, poderíamos dizer que uma dada estrutura espaço-tempo é singular se ela admite geodésicas do tipo tempo (e/ou do tipo nulo) que são incompletas. Isto é, se λ é um parâmetro sobre a curva então não é possível estender a curva além de um certo valor finito de λ. Isto corresponde de um certo modo, à noção da existência de um "ponto final" na trajetória da partícula, o que levaria a uma situação catastrófica na teoria clássica.

Os teoremas de singularidade representam condições gerais na qual uma variedade diferenciável admite existência de geodésicas incompletas.

Entretanto, a dificuldade maior desse formalismo está ligada à sua interpretação e à sua relação com a noção simplista que a física tradicional possue sobre singularidade, ou dito de outra forma, não sabemos como relacionar a noção de completamente geodético com o comportamento do tensor de Riemann numa variedade.

A análise dos teoremas foi objeto de estudo durante o segundo semestre de 73 pelo grupo de cosmologia do C.B.P.F. e poderão ser encontrados na revisão dada por R. Penrose em Battelle Rencontres -1967. Não nos estenderemos em sua discussão aqui.

MODIFICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Logo após o aparecimento dos teoremas de singularidade um renovado interesse por possíveis alterações das equações de Einstein ressurgiu. Um grande impulso nesse sentido foi dado pelo trabalho de Sakharov que já em 1967 considerara a ação de Einstein de um ângulo inteiramente novo.

Sakharov sugere a hipótese de identificar a ação do campo gravitacional A_E com a mudança provocada por flutuação do vazio em um espaço curvo.

Ele assume a Lagrangiana modificada

$$\mathcal{L}(R) \sim \mathcal{L}(0) + A \int dK\ R + B \int \frac{dK}{K} R^2 +$$

O primeiro termo corresponde à constante cosmológica; o segundo à teoria de Einstein; o terceiro termo conduz a correções das equações de Einstein; etc.

Pouco tempo depois, Ruzmaikina e Ruzmaikin estudaram modelos cosmológicos baseados numa ação modificada do tipo:

$$A_{RR} \sim \int \mathcal{L}(R) \sqrt{-g}\ d^4x$$

com

$$\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(0) + AR + BR^2 + CR_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$$

Eles pensavam em obter soluções cosmológicas não singulares que tendessem para a solução correspondente de Friedmann para estágios ulteriores.

Infelizmente, o resultado encontrado mostrou que os modelos não-singulares não tendiam para a solução de Friedmann. E os que tinham como limite esta solução, possuiam ainda singularidades.

Vários outros modelos foram apresentados com resultados que não podem ser considerados atraentes. Talvez devêssemos citar o caso apresentado por Gurovich. Ele estudou a situação inversa, isto é, impondo uma solução não singular com estágios ulteriores tendo como limite o modelo de Friedmann, procura-se as equações satisfeitos por esta solução.

Gurovich encontrou a expressão

$$\mathcal{L}(R) \sim R^{4/3}$$

Entretanto é forçoso admitir o caráter altamente arbitrário deste modêlo.

Recentemente, uma nova solução apareceu (ainda dentro do esquema de Sakharov) com a apresentação de um modelo quase-regular pelo grupo de Cosmologia do C.B.P.F.

O ponto de partida é a teoria escalar-tensorial do tipo Brans-Dicke, perturbada pelas flutuações do vazio.

A Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left\{\phi(R + AR^2) - \frac{\omega\, \phi_{|\alpha}\, \phi_{|\beta}}{\phi}\; g^{\alpha\beta}\right\}$$

O princípio variacional permite obter as equações de movimento:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = - \frac{K}{\phi} T_{\alpha\beta} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{|\alpha}\, \phi_{|\beta} - \frac{1}{2} \phi_{|\lambda}\, \phi^{|\lambda} g_{\alpha\beta} \right\} -$$

$$- \frac{1}{\phi} \left[\phi_{|\alpha\|\beta} - \Box\phi\; g_{\alpha\beta} \right] - 2A \left\{ \phi\, R\, R_{\alpha\beta} + (\phi R)_{|\alpha\|\beta} - \left(\frac{1}{4} \phi R^2 + \Box(\phi R) \right) g_{\alpha\beta} \right\} \tag{1}$$

$$2 \frac{\Box\phi}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} \phi_{|\lambda}\, \phi^{|\lambda} + \frac{1}{\omega} (R + AR^2) = 0 \tag{2}$$

ou contraindo (1) podemos reescrever (2):

$$(2\omega - 3)\, \Box\phi = - K\, T + 6A\; \Box(\phi\, R) - A\, \phi\, R^2$$

É possível obter com este sistema de equações uma solução regular na origem e que assintòticamente se comporta como um modelo de Friedmann.

Um dos atrativos deste esquema é o de relacionar a regularidade do modelo cosmológico com a assimetria dos neutrinos de helicidade oposta (ver artigo Mario Novello - Ligia C. M. S. Rodrigues a aparecer em 1974).

EXERCÍCIO: Discuta a significância destas tentativas de alteração das equações de Einstein.

ANEXO AO CAPÍTULO VII

LAGRANGIANAS NÃO-LINEARES

Com o tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\lambda\delta}$, o tensor contraido de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar R podemos construir as lagrangianas quadráticas:

$$\mathcal{L}_1 = R_{\alpha\beta\mu\nu}\, R^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{C.1a}$$

$$\mathcal{L}_2 = R_{\mu\nu}\, R^{\mu\nu} \tag{C.1b}$$

$$\mathcal{L}_3 = R^2 \tag{C.1c}$$

Ao construirmos a ação A_E com essas três Lagrangianas verifica-se que elas não são independentes no processo variacional. Com efeito, temos

$$\delta \int \sqrt{-g}\, (\mathcal{L}_1 - 4\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) d^4x = 0 \tag{C.2}$$

De acordo com este resultado a forma mais geral da Lagrangiana quadrática pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = a\mathcal{L}_2 + b\,\mathcal{L}_3 \tag{C.3}$$

As equações de movimento obtida através da variação de $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_3$ podem ser facilmente calculadas:

$$\delta \int \sqrt{-g}\, R^2\, d^4x = \int \sqrt{-g}\, H^{(2)}_{\alpha\beta}\, \delta g^{\alpha\beta}\, d^4x \tag{C.4}$$

$$\delta \int \sqrt{-g}\, R_{\mu\nu}\, R^{\mu\nu}\, d^4x = \int \sqrt{-g}\, N^{(2)}_{\alpha\beta}\, \delta g^{\alpha\beta}\, d^4x \tag{C.5}$$

onde

$$-\frac{1}{2}H^{(2)}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\,\square R - R_{|\mu\|\nu} - R\;R_{\mu\nu} + \frac{R^2}{4}\;g_{\mu\nu} \qquad \text{(C.6)}$$

e

$$N^{(2)}_{\mu\nu} = \square R_{\mu\nu} - R_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\|\nu\|\lambda} - R_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\|\mu\|\lambda} - 2\,R_{\mu\lambda}\,R^{\lambda}{}_{\nu} + g_{\mu\nu}\left\{\frac{1}{2}R^{\epsilon\tau}R_{\epsilon\tau} - R^{\epsilon\tau}{}_{\|\epsilon\|\tau}\right\} \qquad \text{(C.7)}$$

Um cálculo direto pode mostrar que tanto $H^{(2)}_{\alpha\beta}$ como $N^{(2)}_{\alpha\beta}$ tem divergência covariante nula, isto é

$$\overset{(2)}{H}{}^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0 \qquad \text{(C.8a)}$$

$$\overset{(2)}{N}{}^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0 \qquad \text{(C.8b)}$$

Uma simplificação adicional ocorre se considerarmos modêlos cosmológicos homogêneos e isotrópicos, pois nestes casos é possível mostrar que $H^{(2)}_{\mu\nu}$ e $N^{(2)}_{\mu\nu}$ não são independentes. Deixamos para o leitor a demonstração disto.

LAGRANGIANAS DE ORDEM SUPERIOR

Consideremos aqui uma série de Lagrangianas não lineares que são obtidas generalizando-se $\mathcal{L}_{(2)}$ acima. Comecemos por investigar $\mathcal{L}^{(3)}$ de terceira ordem, dada por:

$$\mathcal{L}^{(3)} = R_{\alpha\sigma}\;R^{\sigma\rho}\;R_{\rho}{}^{\alpha} \qquad \text{(C.9)}$$

Escrevendo

$$\delta\int\sqrt{-g}\,\mathcal{L}^{(3)}\,d^4x = \int\sqrt{-g}\,N^{(3)}_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta}\;d^4x$$

Temos

$$\overset{(3)}{N}_{\alpha\beta} = \Box(R_{\alpha\lambda}\, R^{\lambda}{}_{\beta}) - (R_{\alpha\lambda}\, R^{\lambda\mu})_{\|\beta\|\mu} - (R_{\beta\lambda}\, R^{\lambda\mu})_{\|\alpha\|\mu} -$$

$$- 2\, R_{\alpha\sigma}\, R^{\sigma\lambda}\, R_{\lambda\beta} + g_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{3} R_{\mu\sigma}\, R^{\sigma\rho}\, R_{\rho}{}^{\mu} + (R^{\mu\lambda}\, R_{\lambda}{}^{\nu})_{\|\nu\|\mu} \right\} \tag{C.11}$$

Um cálculo direto (faça !) permite obter,

$$\overset{(3)}{N}{}^{\alpha\beta}{}_{\|\alpha} = 0 \tag{C.12}$$

Para a Lagrangiana de quarta ordem, $\mathcal{L}^{(4)}$ obtemos (usando notação evidente)

$$\overset{(4)}{N}_{\alpha\beta} = \Box(R_{\alpha}{}^{\lambda}\, R_{\lambda\mu}\, R^{\mu}{}_{\beta}) - (R_{\alpha\lambda}\, R^{\lambda\sigma}\, R_{\sigma}{}^{\mu})_{\|\beta\|\mu} - (R_{\beta\lambda}\, R^{\lambda\sigma}\, R_{\sigma}{}^{\mu})_{\|\alpha\|\mu} -$$

$$- 2\, R_{\alpha\sigma}\, R^{\sigma\lambda}\, R_{\lambda\nu}\, R^{\nu}{}_{\beta} + g_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{4} R_{\mu\sigma}\, R^{\sigma\lambda}\, R_{\lambda\rho}\, R^{\rho\mu} + (R^{\mu\lambda}\, R_{\lambda\sigma}\, R^{\sigma\nu})_{\|\nu\|\mu} \right\} \tag{C.13}$$

E, para a ordem n, isto é para

$$\mathcal{L}^{(n)} = R_{\alpha\lambda}\, R^{\lambda\mu}\, ({}_{\mu} \ldots {}^{\varepsilon})\, R_{\varepsilon}{}^{\alpha} \tag{C.14}$$

teremos

$$\overset{(n)}{N}_{\alpha\beta} = \Box M_{\alpha\beta} - M_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\|\beta\|\mu} - M_{\beta}{}^{\mu}{}_{\|\alpha\|\mu} - 2\, M_{\alpha}{}^{\lambda}\, R_{\lambda\beta} +$$

$$+ g_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{n} M_{\lambda\sigma}\, R^{\lambda\sigma} + M^{\mu\nu}{}_{\|\mu\|\nu} \right\} \tag{C. 15}$$

onde

$$\mathcal{L}^{(n)} = M_{\alpha\beta}\, R^{\beta\alpha} \tag{C.16}$$

É possível verificar que para qualquer valor de n; tem-se:

$$\overset{(n)}{N}{}^{\alpha\beta}{}_{||\beta} = 0 \tag{C.17}$$

CAPÍTULO VIII

MÉTODOS HAMILTONIANOS EM COSMOLOGIA

O objetivo deste capítulo é o de introduzir o leitor a métodos hamiltonianos recentemente utilizados por Misner * na análise de modêlos cosmológicos. O objetivo final desta analise é o estudo do comportamento das diferentes soluções nas vizinhanças da singularidade. (É talvez importante informar aqui que Lifshitz e seus colaboradores utilizaram um método diferente para esta análise que se mostrou bastante eficiente; optamos por tratar aqui o método de Misner devido à capacidade dêste método em se adaptar facilmente a uma versão quântica do problema.

Isto não significa uma preferência nossa por esse caminho, mas somente uma escolha didática).

FORMULAÇÃO ADM DA TEORIA DE EINSTEIN

Comecemos por rever a técnica ADM de separação (3+1) do espaço-tempo de Einstein. Seja Σ uma hipersuperfície do tipo espaço; $\vec{n}$ vetor normal a Σ; $\vec{e}_0$ um vetor do tipo-tempo; $\vec{e}_i$ 3 vetores do tipo espaço.

Consideremos $\vec{e}_A$($A, B, \ldots = 1, 2, 3, 4$) um sistema local de tetradas. A métrica g_{AB} é dada pelo produto interno das tetradas:

$$g_{AB} = \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B \tag{VIII.1}$$

---

* C. W. Misner (1970) in Relativity, ed. Carmeli.

ou, em um sistema de coordenadas x^{α} :

$$g_{AB} = e^{\alpha}_{A}(x)\, e^{\beta}_{B}(x)\, g_{\alpha\beta}(x)$$

Escolheremos a notação seguinte

$$\begin{aligned} g_{0i} &= N_i = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_i \\ g_{00} &= \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = N_0^2 - N_i\, N^i \end{aligned} \tag{VIII.2}$$

onde

$$\begin{aligned} N_0 &= \vec{e}_0 \cdot \vec{n} \\ N^i &= g^{ij}\, N_j \end{aligned} \tag{VIII.3}$$

Temos a normalização

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = -1$$

Em têrmos matricial, podemos por

$$g_{\mu\nu}(x) = \left(\begin{array}{c|c} N_0^2 - (\vec{N})^2 & N_i \\ \hline N_i & g_{ij} \end{array}\right) \tag{VIII.4}$$

e para a inversa

$$g^{\mu\nu}(x) = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{1}{N_0^2} & -\dfrac{N^i}{N_0^2} \\ \hline -\dfrac{N^i}{N_0^2} & g^{ij} + \dfrac{N^i\, N^j}{N_0^2} \end{array}\right) \tag{VIII.5}$$

Note que, embora ${}^{(4)}g_{ij} = {}^{(3)}g_{ij}$ temos ${}^{(4)}g^{ij} \neq {}^{(3)}g^{ij}$. Escreveremos sempre (onde não houver motivo de dúvidas)

$$ {}^{(4)}g_{ij} = {}^{(3)}g_{ij} = g_{ij} $$

A ação de Einstein vale:

$$ A_E = \int \sqrt{-g}\, R\, d^4x \qquad \text{(VIII.6)} $$

Desenvolvendo $R\sqrt{-g}$ segundo a escolha de representação acima, obtemos (faça como exercício !).

$$ A_E = \iint dt \;\; d^3x \, (\dot{g}_{ij}\, \pi^{ij} - N_\mu\, R^\mu) \qquad \text{(VIII.7)} $$

onde

$$ R^i = -\,2\,\pi^{ij}{}_{\|j} \qquad \text{(VIII.8a)} $$

$$ R^0 = -\sqrt{\gamma}\left\{ {}^{(3)}R + K^2 - Tr(K^2) \right\} $$

com

$$ \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{-{}^{(4)}g} = N_0 \sqrt{{}^{(3)}g} \equiv N_0 \sqrt{\gamma} \\ &\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}\, \left\{ g^{ij}K - K^{ij} \right\} \\ &K_{ij} = \frac{1}{2N_0} \;\; \left\{ N_{i\|j} + N_{j\|i} - \dot{g}_{ij} \right\} \end{aligned} \right. \qquad \text{(VIII.9)} $$

A derivada covariante ($\|$) é calculada na 3-geometria g_{ij}. Temos ainda

$$K^2 \equiv (\mathrm{Tr}\, K_{ij})^2 = (K_{ij}\, g^{ij})^2$$

$$\mathrm{Tr}(K^2) \equiv \mathrm{Tr}(K_{ij}\, J^{j\ell}) = K_{ij}\, K^{ji} \qquad \text{(VIII.10)}$$

O método proposto por Arnowitt-Deser e Misner (ADM) consiste em tratar N_μ como multiplicadores de Lagrange. Consequentemente, $R_\mu = 0$ são vínculos impostos sobre as variáveis canônicas.

Com efeito, variando A_E em relação a $\dot{g}_{ij}$ tem-se

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \dot{g}_{ij}} = \pi^{ij} \qquad \text{(VIII.11)}$$

Isto é, π^{ij} é variável canônicamente conjugada a g_{ij}. Variando $\mathscr{L}$ em relação a g_{ij} obtemos seis (6) equações dinâmicas. Variando em relação a N^μ, temos

$$R_\mu = 0 \qquad \text{(VIII.12)}$$

As quatro equações (V.12) são vínculos pois não contém derivadas temporais de g_{ij} ou π^{ij}.

Assim, ao invés de considerarmos g_{ij} e π^{ij} como variáveis independentes podemos usar o caminho (ADM) seguinte:

(i) resolvemos as equações de vínculos (V.12) (isso trará relações entre g_{ij} e π^{ij} o que impede que sejam variados independentemente na Lagrangiana);

(ii) procuramos funções de g_{ij}, π^{ij} que possam servir como novas variáveis canônicas independentes. Não nos deteremos nesta análise aqui. O estudo formal do formalismo canônico em relatividade geral já foi tema de monografia deste Centro.

MÉTODOS ADM EM UNIVERSOS HOMOGÊNEOS

Consideremos a métrica homogênea

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij}(\vec{x}, t)\, dx^i\, dx^j \qquad \text{(VIII.13)}$$

de algum tipo de Bianchi (ver capítulo IV).

Iremos parametrizar a parte espacial da métrica seguindo a escolha de Misner (1969), isto é,

$$g_{ij} = R_0^2 \;\; e^{-2\Omega(t)} \;\; (e^{2\beta(t)})_{ij} \qquad \text{(VIII.14)}$$

onde β_{ij} é uma matriz 3 x 3. Impondo adicionalmente

$$\mathrm{Tr}\, \beta_{ij} = 0 \qquad \text{(VIII.15)}$$

teremos

$$\det g_{ij} = R_0^6 \;\; e^{-6\Omega}$$

e então, para o volume V(t):

$$V(t) = R_0^3 \;\; e^{-3\Omega(t)} \int d^3x \qquad \text{(VIII.16)}$$

Se o modêlo em estudo fôr aberto, imporemos condições de periodicidade sobre as coordenadas normalizando-o em

$$\int d^3x = (4\pi)^2 \tag{VIII.17}$$

(A escolha deste valor é arbitrária; admitimos aqui tal valor de tal modo a coincidir com o caso Bianchi -IX fechado tratado por Misner).

Vemos por (VIII.16) que o parâmetro Ω mede a expansão do Universo e a matriz β mede sua anisotropia.

CASO BIANCHI TIPO I

Consideremos o estudo do modêlo Bianchi tipo I. Temos para as 1-formas diferenciais

$$\begin{cases} \Theta^i = dx^i \\ d\theta^i = 0 \end{cases} \tag{VIII.18}$$

(cf. capítulo IV)

$$\int d^3x = (4\pi)^2$$

$$\sqrt{-g} = R_0^3 \; e^{-3\Omega(t)}$$

$$V(t) = (4\pi)^2 \, R_0^3 \; e^{-3\Omega(t)}$$

Da ação

$$A_E = \int \pi^{ij} \, \dot{g}_{ij} \, d^3x \; dt$$

virá

$$A_E = \int \pi^{ij}\, dg_{ij} \wedge \Theta^1 \wedge \Theta^2 \wedge \Theta^3 \qquad \text{(VIII.19)}$$

isto é,

$$A_E = (4\pi)^2 \int \pi^{ij}\, dg_{ij}$$

Mas, da relação (VIII.14)

$$dg_{ij} = -\,2\, R_o{}^2\, e^{-2\Omega}\, e^{2\beta})_{ij}\, d\Omega + 2\, R_o^2\; e^{-2\Omega}\, \beta_{ik}\, d\beta_{kj} \; .$$

isto é

$$dg_{ij} = -\,2\, g_{ij}\, d\Omega + 2\, g_{ik}\, d\beta_{kj}$$

Substituindo em (VIII.19):

$$A_E = 2(4\pi)^2 \int (-\pi^k_k\, d\Omega + \pi^j{}_k\, d\beta_{kj}) \qquad \text{VIII-20}$$

A forma canônica que estamos procurando é do tipo

$$A \sim \int p_A\, d\beta_A - H\, d\Omega$$

A expressão (VIII.20) está quase sob essa forma se identificarmos

$$H = 2\, \pi^k{}_k \qquad \text{(VIII.21)}$$

Como β_{ij} é de traço nulo, somente a parte de traço nulo de π^{ij} será importante no cálculo de A_E. Isso sugere a definição de novas variáveis:

$$p^i{}_k = (\pi^i{}_k - \tfrac{1}{3}\, \delta^i{}_k\, \pi^m{}_m) \qquad \text{(VIII.22)}$$

com

$$p^k{}_k = 0 \ .$$

Então, substituindo em (VIII.20)

$$A_E = \int p^j{}_k \, d\beta_{kj} - H \, d\Omega$$

Parametrizando β pela matriz

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 + \sqrt{3}\,\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 - \sqrt{3}\,\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,\beta_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(VIII.23)}$$

e

$$p = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} p + \sqrt{3}\,p_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 - \sqrt{3}\,p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,p_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(VIII.24)}$$

teremos

$$A_E = \int p_1 \, d\beta_1 + p_2 \, d\beta_2 - H \, d\Omega \qquad \text{(VIII.25)}$$

Para verificar quais as variáveis independentes devemos satisfazer os vínculos (VIII.12).

Temos:

a) $\pi^{ik}{}_{\| k} = \pi^{ik}{}_{| k}$ (a parte espacial para Bianchi - I é flat).

Mas,

$$\pi^{ik}{}_{| k} = 0 \qquad \text{(pois } \pi^{ik} \text{ não depende de } x^{i}\text{)}$$

Daí

$$\pi^{ik}{}_{\| k} = 0 \quad \text{é satisfeita.}$$

b) $^{(3)}R + K^2 - Tr(K^2) = 0$

Temos

$$^{(3)}R \doteq 0$$

Re-escrevendo b) em termos de π^{ij}:

$$\pi^{k\ell}\, \pi_{k\ell} - \frac{1}{2}\, (\pi^{\ell}{}_{\ell})^2 = 0$$

Mas

$$\pi^{\ell}_{k}\, \pi^{k}_{\ell} = \frac{1}{3}\, (\pi^{k}{}_{k})^2 + \frac{1}{6}\, \left[(p_1)^2 + (p_2)^2\right]$$

Logo, b) assume a forma

$$H^2 = (p_1)^2 + (p_2)^2$$

onde H é definido em (VIII.21). Finalmente, escrevemos

$$A_E = \int p_1\, d\beta_1 + p_2\, d\beta_2 - \sqrt{(p_1)^2 + (p_2)^2}\; d\Omega \qquad \text{(VIII.26)}$$

Chega-se assim ao resultado bastante interessante de que a evolução do Universo na métrica Bianchi-I fica reduzida a um problema simples de uma partícula livre de massa nula em um espaço plano a duas dimensões.

Escolhendo-se como condições iniciais

$$\beta_1^{(o)} = \beta_2^{(o)} = 0$$

teremos

$$\dot{\beta}_{1,2} = \frac{\partial H}{\partial p_{1,2}}$$

$$\dot{p}_{1,2} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_{1,2}}$$

Daí

$$p_{1,2} = \text{constante}$$

$$\dot{\beta}_{1,2} = \frac{p_{1,2}}{H}$$

E então

$$(\dot{\beta}_1)^2 + (\dot{\beta}_2)^2 = 1$$

Finalmente, a métrica se escreve

$$ds^2 = N^2\, d\Omega^2 - R_o^2 \quad e^{-2\Omega}\begin{pmatrix}2\beta\\ e\end{pmatrix}_{ij} dx^i\, dx^j \qquad \text{(VIII.27)}$$

onde precisamos somente determinar $N(\Omega)$. Temos, em geral

$$\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial\,\Omega} = -\frac{1}{2} N\,\pi^k{}_k + \sqrt{\gamma}\,N^i{}_{\|i}$$

No nosso caso

$$\sqrt{\gamma} = R_o^3 \quad e^{-3\Omega}$$

$$N^i = 0$$

então

$$N = \frac{6\,R_o^3 \quad e^{-3\Omega}}{\pi^k{}_k}$$

ou

$$N = 12\,\frac{R_o^3 \quad e^{-3\Omega}}{H}$$

Finalmente,

$$ds^2 = (12\,R_o^3)^2\,\frac{e^{-6\Omega}}{H^2}\, d\Omega^2 - R_o^2 \quad e^{-2\Omega}\begin{pmatrix}2\beta\\ e\end{pmatrix}_{ij} \quad dx^i\, dx^j$$

com β_{ij} dado acima.

Passando de Ω para t:

Temos

$$dt = N\, d\Omega$$

ou seja,

$$t = \frac{12\, R_o^3}{H} \int \bar{e}^{3\Omega}\, d\Omega = - \frac{4\, R_o^3}{H}\, \bar{e}^{3\Omega}$$

ou, escolhendo as constantes R_o e H tal que

$$t = \bar{e}^{3\Omega}$$

teremos

$$ds^2 = dt^2 - R_o^2\, (t^{2p_1}\, dx^2 + t^{2p_2}\, dy^2 + t^{2p_3}\, dz^2)$$

que é a expressão vista no capítulo V.

QUANTIZAÇÃO

Uma vez obtida a equivalência dinâmica da maneira acima tratada estamos de posse de um instrumento que nos possibilita uma quantização canônica de modêlos cosmológicos. Não consideraremos essa questão aqui. Ela será objeto de um curso futuro a ser realizado pelo Grupo de Cosmologia do C.B.P.F. Diremos somente, a título informativo, que com relação à questão da singularidade a quantização não traz nenhum resultado novo, isto é, ela não é capaz (aparentemente) de evitar o anti-colapso cósmico.

CAPÍTULO IX

ALÉM DO COLAPSO GRAVITACIONAL

Nos capítulos anteriores tratamos da expansão do Universo, da questão da singularidade e de algumas teorias sobre os primórdios do Universo. Nosso approach foi essencialmente o de um relativista: aceitamos ser a gravitação a chave de todo o Mistério Cósmico. Fomos conduzidos a esta visão por uma escolha lógica e didática. Entretanto, poderá ter parecido a um leitor atento que pomos em dúvida tal esquema. Com efeito, a solução do problema cosmológico não pode ser encontrado na gravitação, nem em nenhuma parte da física isoladamente - mas em uma combinação de diferentes approachs.

Neste capítulo final iremos apresentar um exemplo de uma tal combinação de tarefas, na análise da questão do colapso. Comecemos com um pouco de história.

Ao findar a década de 30, Oppenheimer e Snyder estudando a evolução de objetos estelares chegaram a argumentar que, sob certas condições (de configuração) iniciais, estrêlas podem iniciar um processo instável de colapso, sob a ação de forças gravitacionais em oposição às pressões internas do gás estelar. Um fenômeno curioso (e fascinante, sob certos aspectos) ocorre quando no processo do colapso, a estrêla passa além de um determinado ponto (chamado "point of no return"): a partir de então não é possível freiar o processo e a estrêla continua colapsando, até sua "aniquilação".

O estudo detalhado durante a década de 60 das propriedades da curvatura do espaço nas vizinhanças de uma estrêla que colapsa, trouxe uma série de novas e fascinantes informações.

Pelo teorema de Birkhoff, a região imediatamente externa à estrêla deve satisfazer uma métrica do tipo de Schwarzschild (este é o caso mais simples de colapso). Esta métrica se escreve:

$$ds^2 = e^{\lambda(r)} dt^2 - e^{-\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \operatorname{sen}^2\Theta \; d\phi^2)$$

com

$$e^{\lambda(r)} = 1 - \frac{2M}{r} . \quad (\text{M é uma constante})$$

A região $r_s = 2M$ possue uma propriedade interessante: ela constitui no que se chama uma membrana unidirecional. Isto significa, em têrmos simples, que partículas materiais, fotons, etc. podem penetrar nesta região ($r < r_s$) mas não podem sair dela. Em outras apalavras, $r_s = 2M$ constitui-se, para um observador afastado, em um horizonte: o que ocorre no interior desta região não é observável do lado de fora.

Um cálculo simples permite ao leitor mostrar que a métrica tem uma aparente singularidade em $r = r_s$, mas o tensor de Riemann não apresenta aí nenhuma particularidade. Ele é contínuo e bem comportado. A singularidade (real) ocorre quando $r = 0$.

Chama-se buraco negro (BN) a uma estrêla que colapsou além de seu raio de Schwarzschild (r_s). A existência de tais objetos no Cosmos tem sido proposta por vários autores. Alguns físicos mais afoitos pretendem ter atingido uma demonstração indireta da presença de BN no nosso Universo.

Entretanto, até o presente, isto não deve ser considerado como um resultado sério.

De qualquer modo a existência de tais BN poderia ter uma importância grande, e sua participação na densidade total de matéria no Universo seria eventualmente capaz de alterar a propria topologia do Cosmos.

EXERCÍCIO: . Mostre que nos modêlos de Friedmann, existe uma densidade crítica ρ_c-tal que a topologia do Universo pode ser caracterizada pela relação ρ/ρ_c onde ρ é a densidade da matéria efetivamente presente. (Mostre que existe uma relação entre ρ/ρ_c e o valor da curvatura espacial ϵ).

Esta digressão em torno do colapso visa somente relacionar este fenômeno com outros fenômenos do mesmo tipo como, por exemplo, o anti-colapso gravitacional que parece ter dado origem ao nosso Universo. O que é comum nestes processos é a existência de um campo gravitacional extremamente forte (teoricamente, sem limite superior).

Devido à sua estrutura formal, os teoremas de singularidade não nos podem ajudar na análise dos fenômenos que ocorrem nestas regiões. Neste aspecto os teoremas são totalmente inúteis. A questão é saber até que valor do campo gravitacional as leis físicas usuais podem ser aplicadas. Uma resposta convincente a esta questão só poderia vir de observações experimentais. Infelizmente, parece que estamos longe de poder contar com experimentos nesta área. Assim, resta-nos dois caminhos:

1. *Análise observacional indireta.*
2. *Análise teórica.*

Certamente, o caminho (2) deverá de alguma maneira passar pelo caminho (1). Neste nosso curso nos limitaremos a discutir um exemplo de Análise Teórica que estive desenvolvendo nos últimos meses.

Há um modo "sério" de chegar à idéia central de nossa análise, mas nos limitaremos aqui a mostrar um argumento simplista, baseado em simetrias, que tem o mérito de atrair a atenção rapidamente para as questões fundamentais envolvidas.

Para isso precisamos rever algumas noções bem simples dos tempos primeiros da descoberta das interações nucleares. Àquela época, experimentos de reações nucleares levou os físicos a emitirem a então ousada idéia de considerar os constituintes dos núcleos atômicos (a saber: protons e neutrons) como sendo estados diversos de um único objeto que se chamou nucleon. Assim, a interação entre êsse nucleons não era capaz de distinguir um proton de um neutron. Em termos matemáticos descrevia-se um nucleon por uma função ψ, que, sob forma matricial representava-se:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

A interação entre os nucleons seria assim invariante por rotação em um espaço linear a duas dimensões. Notando por V_s o potencial nuclear (dito forte) teríamos:

$$V_s(pp) = V_s(nn) = V_s(pn)$$

Esta interação é razoavelmente aproximada pelo potencial de Yukawa do tipo $\frac{e^{-\mu r}}{r}$ onde μ^{-1} representa o alcance da interação. Os valores experimentais dão para μ o valor 10^{-13} cm. Vê-se então que tal interação é de curto alcance, A simetria descrita acima não é universalmente válida. Com efeito, é evidente que em regiões onde existe um campo eletromagnético o proton e o neutron tem comportamento distinto. Diz-se que a interação eletromagnética (de longo alcance) quebra a simetria da interação forte (de curto alcance). (ver quadro I).

Simetria	Simetria quebrada em presença de interação de longo alcance
p - n	Eletromagnética

(quadro I)

Na teoria de Campo Clássica existe somente dois campos de interação a longa distância a saber eletromagnético e gravitacional. Incluiremos assim, neste quadro esta última interação. É claro que ela só poderá aparecer no lado direito do quadro I (ver quadro II).

Simetria	Simetria quebrada em presença de interação de longo alcance
p - n	Eletromagnética
	Gravitacional

(Quadro II)

A simples inspeção do quadro II nos leva a pensar que "alguma coisa está faltando". Essa simetria que falta estaria associada a uma interação que chamaremos super-forte e cujo potencial estático será representado por V_{ss}.

Sabemos, por enquanto que a simetria SS é quebrada pela interação gravitacional de longo alcance.

Chamaremos strumpfs $G^{(+)}$ e $G^{(-)}$ a um novo tipo de partículas que interagem via interação-SS.

A simetria acima se escreverá

$$V_{ss}\left[G^{(+)}\ G^{(+)}\right] = V_{ss}\left[G^{(-)}\ G^{(-)}\right] = V_{ss}\left[G^{(+)}\ G^{(-)}\right] .$$

Um exemplo das propriedades dos strumpfs poderia ser encontrado na discussão da massa gravitacional dessas partículas. Com, efeito, no modêlo que temos desenvolvido admitimos relações entre as massas gravitacionais ativa (M_a) e massas gravitacionais passiva M_p dos strumpfs dadas por:

$$M_a\left[G^{(-)}\right] = M_p\left[G^{(+)}\right] = 0$$

$$M_a\left[G^{(+)}\right] \neq 0; \qquad M_p\left[G^{(-)}\right] \neq 0$$

$$\frac{M_a\left[G^{(+)}\right]}{M_p\left[G^{(-)}\right]} \sim \text{constante}$$

Isto significa que os strumpfs G^+ podem criar campo gravitacional mas não sentem a presença de campos gravitacionais; os strumpfs G^- não podem criar campo gravitacional mas sentem a presença direta de campos gravitacionais.

Como conciliar a existência de tais partículas com a matéria usual (foton, eletron, etc.) que, como sabemos, satisfaz a lei de ação e reação de Newton ? Uma solução possível seria admitir um estado ligado constituido por um par de strumpfs $G^{(+)} - G^{(-)}$ que fosse altamente estável. Com efeito, admitindo-se para o alcance dessa nova interação o valor $\ell_p \sim 10^{-33}$cm (que é um número mágico construido com as constantes de Newton G, de Planck h -e a velocidade da luz $C: \ell_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{C^3}}$) obtem-se para o valor da energia de ligação (aproximadamente a massa da partícula trocada em um modêlo do tipo de Yukawa) o fantástico valor 10^{25} MeV.

STRUMPFS E A INTERAÇÃO GRAVITACIONAL

Uma estrêla colapsa. Seu raio diminue continuamente; passa pelo valor limite de Schwarzschild e continua colapsando. O campo gravitacional no seu interior vai crescendo. As partículas vão sendo empacotadas em um volume cada vez menor. O que ocorre quando o campo gravitacional consegue ceder energia suficiente aos strumpferons (par de strumpfs $(G^+) - (G^-)$) presente na matéria, capaz de quebrar sua ligação ? Partículas G^+ e G^- aparecerão livre no interior da estrêla. As G^- serão atraídas inevitavelmente para a singularidade: mas as G^+ poderão circular livremente na atmosfera exterior à estrêla. Desse modo elas poderão carregar energia para fora, o que poderá determinar um novo estágio de equilíbrio entre as pressões internas e a atração gravitacional. Desse modo, tal mecanismo pode interromper o colapso - e impedir a sua "aniquilação gravitacional".

STRUMPFS LIVRES NO UNIVERSO

Assim como fazemos com os hipotéticos quarks, podemos tentar detectar strumpfs em seu estado livre. Para isso precisamos responder à questão: Como é possivel a existência de strumpfs livres no Universo ?

Consideremos um Universo em evolução cujo período inicial (valor do parâmetro t na métrica de Friedmann igual a zero) fosse bastante quente (embora não necessariamente singular). Neste estágio onde a matéria (leptons, fotons, etc.) é criada (ver cap. X) a interação gravitacional pode romper o par de strumpfs (em um strumpferon) e partículas ($G^{(+)}$) - ($G^{(-)}$) livres poderiam aparecer. Por outro lado, as propriedades de $G^{(-)}$ (e o que vimos no cap. X) permitem concluir que o número de partículas de $G^{(-)}$ criadas pelo mecanismo de flutuação no vazio, poderia crescer sem limite superior - o que levou-nos a suspeitar da existência de um verdadeiro mar de strumpfs $G^{(-)}$ a preencher todo o Universo.

EXERCÍCIO: (não trivial): Qual o spin dos strumpfs ?

CAPÍTULO X

CRIAÇÃO DE PARTÍCULAS EM MÉTRICAS NÃO-ESTACIONÁRIAS

Tradicionalmente o objetivo da Cosmologia consiste em estudar as propriedades globais do Universo, sua estrutura geométrica, sua evolução, sua origem.

Neste nosso primeiro curso nos limitamos a apresentar a visão cosmológica de um ponto de vista de um relativista; isto é, consideramos que o campo gravitacional é fundamental. Para isto, usamos a teoria de Einstein da gravitação. As equações de Einstein possuem dois "objetos" distintos: a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ e o tensor de matéria $T_{\mu\nu}(x)$. Diferentes formas deste tensor equivalem a distintas geometrias, isto é, a distintos modelos.

Para a Cosmologia a origem da matéria deveria ser procurada no Olimpo, para além das visões simplistas adotadas, para além de nossa imaginação, para além da física.

Entretanto, esta situação parece estar mudando rapidamente. Neste capítulo apresentaremos um esboço desta mudança, suas origens e suas técnicas.

O ARGUMENTO NEGATIVISTA DE HAWKING

Em 1970, S. Hawking colocou a seguinte questão: um sistema material limitado a uma certa região do espaço é capaz de irradiar toda sua massa sob forma de radiação gravitacional, deixando atrás de si o espaço vazio ? Ou, dito de outro modo, um dado espaço-tempo que não é vazio em um tempo t_1 poderá vir a sê-lo em outro tempo $t_2 \neq t_1$? Hawking responde negativamente a esta questão. Sua demonstração baseia-se nas relações de desigualdade de energia e pressão.

Esse resultado é extremamente curioso e aparentemente parece contradizer a existência de processos tais como o decaimento de partículas em gravitons. Hawking sugere resolver este paradoxo notando que se quantizara somente as partículas de matéria mas não o campo gravitacional, e assim considerou-se somente o efeito da métrica em criar ou aniquilar partículas mas que omitiu-se a reação destas partículas sobre a métrica (isto é, aniquilação ou criação de gravitons).

EXERCÍCIO: Ler o artigo em questão. Você concorda com a argumentação de Hawking ? Por que ?

(S. Hawking, Commum. Math. Phys. 18, 301 (1970))

A CRÍTICA DE ZELDOVICH E NOVIKOV

Um ano após, Zeldovich et al. publicam na mesma revista (Commum. Math. Phys. 23, 185 (1971)) uma crítica ao artigo de Hawking. Neste trabalho eles procuram mostrar que a desigualdade básica $T^0{}_0 \gg |T_{ij}|$ (i, j = 1, 2, 3), embora válida para aquela parte do tensor energia momentum correspondente às partículas já presentes, é violada pela parte de T_{ij} correspondente à polarização que o campo gravitacional clássico produz no vazio quântico da partícula (por exemplo, no vazio do par eletron-positron). E é justamente esta última parte que descreve o fenômeno de criação de partículas. Assim, somos levados a aceitar que um *campo gravitacional clássico pode criar partículas livres.*

EXERCÍCIO: Ler o artigo em questão.

A EQUAÇÃO DO CAMPO ESCALAR E A TRANSFORMAÇÃO CONFORME

No capítulo V tivemos oportunidade de estudar algumas propriedades do campo escalar $\phi(x)$. Ali dissemos que usualmente a equação para $\phi(x)$ é acrescentada de um termo arbitrário, proporcional ao escalar da curvatura do espaço-tempo, capaz de tornar a equação invariante por transformações conforme (desde que a massa do campo seja nula). Escrevamos

$$\Box\phi + \left(m^2 + \frac{R}{6}\right)\phi = 0 \tag{3}$$

O operador $\Box$ é o d'Allembertiano.

$$\Box\phi \equiv \phi_{|\mu\|\nu}\, g^{\mu\nu} \tag{4}$$

EXERCÍCIO: Mostre que a equação 3 com $m = 0$ é invariante pela transformação

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2}\, g_{\mu\nu}$$

$\phi \longrightarrow \tilde{\phi} = \Omega^n \phi$, para algum valor de n.

Consideremos agora o campo ϕ em um Universo de Friedmann com métrica dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\, d\sigma^2$$

Por uma transformação de coordenadas $t \to \eta$, $dt = a(\eta)d\eta$ temos

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\sigma^2)$$

Agora, efetuando a transformação conforme

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{a^2(n)} \; g_{\mu\nu}(x)$$

temos:

$$d\tilde{s}^2 = dn^2 - d\sigma^2$$

(chegamos assim à métrica plana; isto mostra o que já sabiamos do capítulo II, que os Universos do tipo - Friedman são conformalmente plano). Teremos para a equação do campo $\phi(x)$:

$$\tilde{\Box}\tilde{\phi} + \left(m^2 + \frac{\tilde{R}}{6}\right) \tilde{\phi} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} \tilde{\phi} - {}^{(3)}\Delta \, \tilde{\phi} - \varepsilon \, \tilde{\phi} + m^2 \; a^2 \; \tilde{\phi} = 0$$

onde ${}^{(3)}\Delta$ é o operador Laplaciano da métrica correspondente (aberta, fechada ou euclideana).

Lifshitz e outros estudaram o operador ${}^{(3)}\Delta$ e suas autofunções que chamaremos Q:

$${}^{(3)}\Delta \; Q(\mu, \Theta, \phi) = - \lambda \; Q(\mu, \Theta, \phi)$$

Para $\varepsilon = +1$, os valores de λ são $(n^2 - 1)$ com $n = 1, 2, 3, \ldots$

Para $\varepsilon = -1$, λ tem qualquer valor real maior que 1.

Para $\varepsilon = 0$, $\lambda > 0$ e neste caso Q gera a série de Fourier.

Consideremos agora o caso particular do espaço plano ($\varepsilon = 0$). Faremos

$$^{(3)}\Delta\, Q_K(\mu, \Theta, \phi) = - K^2\, Q_K(\mu, \Theta, \phi)$$

com

$$Q_K = e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}}$$

Desenvolvendo o campo escalar no produto de funções ψ_K e Q_K, teremos

$$\tilde{\phi} = \Sigma\; a_K\, \psi_K(n)\, e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}} + a_K^{+}\, \psi_K^{+}(n)\, e^{-i\vec{K}\cdot\vec{x}}$$

A equação para os coeficientes $\psi_K(x)$ é obtida:

$$\ddot{\psi}_K + W_K^2\, \psi_K = 0$$

onde

$$W_K = \sqrt{K^2 + a^2\, m^2}$$

Note que a existência do fator a(n) transforma a massa numa função do tempo n e impede a existência de solução do tipo usual $e^{i\omega_K t}$, $(\omega_K = C^{\underline{te}})$.

Para m = 0, esta dificuldade desaparece. Desse modo, podemos concluir que a utilização de uma equação conforme-invariante para o campo escalar de massa nula, em um Universo conformalmente plano, não apresenta nenhuma modificação quanto à distribuição de seus estados de vibração ao longo do tempo (como veremos adiante, isso refletirá a ausencia do mecanismo de criação para partículas descritas por uma equação de movimento conformalmente invariante em um Universo conformalmente plano).

QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR LIVRE EM UM UNIVERSO EM EXPANSÃO

A equação do campo escalar pode ser obtida a partir de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \{g^{\mu\nu} \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} + (m^2 + \frac{R}{6})\phi^2\}$$

O momentum canônicamente conjugado a ϕ se calcula do modo usual

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

Desenvolvendo $\phi(\vec{x}, t)$ e $\pi(\vec{x}, t)$ em série de Fourier~~,~~ temos:

$$\phi(\vec{x}, t) \sim \int d^3 K \{e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}} \phi_K(t) \hat{A}_K + h.c.\}$$

$$\pi(\vec{x}, t) \sim \int d^3 K \{e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}} \dot{\phi}_K(t) \hat{A}_K + h.c.\}$$

Imporemos as regras de comutação:

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \ \phi(\vec{x}', t)\right] = 0$$

$$\left[\pi(\vec{x}, t), \ \pi(\vec{x}', t)\right] = 0$$

$$\left[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\right] = i \ \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \ .$$

Estas relações impõem sôbre ϕ_K e A_K as condições:

$$\left[\hat{A}_K, \hat{A}_{K'}\right] = 0$$

$$\left[\hat{A}_K^+, \hat{A}_{K'}^+\right] = 0$$

$$\left[\hat{A}_K, \hat{A}_{K'}^+\right] = \delta_{KK'}$$

$$\sum_K (\phi_K \dot{\phi}_K^* - \dot{\phi}_K \phi_K^*) = 0$$

A dificuldade em caracterizar os operadores $\hat{A}_K$, $\hat{A}_K^+$ reside na dependência temporal de $\phi_K(t)$ de forma não usual (ver seção anterior). Uma simplificação ocorre quando é possível impor limites sobre o comportamento das métricas para tempos $t \to \pm \infty$. Como exemplo, consideremos a métrica de Kasner com coeficientes a, b e c, isto é,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2$$

Impondo o limite:

$$\lim_{t \to -\infty} a_i = \text{constante},$$

onde a_i = a, b ou c o espaço-tempo se torna plano e podemos escrever

$$\phi_K(t) \sim \frac{e^{-i \overset{(o)}{\omega}_K t}}{\sqrt{\overset{(o)}{\omega}_K \overset{(o)}{V}}}$$

onde

$$\overset{(o)}{\omega}_K = \omega_K(-\infty)$$

$$\overset{(o)}{V} = V(-\infty)$$

Neste caso os operadores de criação e destruição do campo livre podem ser identificados com $\hat{A}_K$, $\hat{A}_K^+$ no instante $t \sim -\infty$.

Podemos então construir neste limite um espaço de Fock de operadores e utilizar toda a maquinaria da teoria quântica de campo usual.

EXERCÍCIO: Mostre que se definirmos o estado do vazio $|0>_{-\infty}$ tal que

$$\hat{A}_K(-\infty)\ |0>_{-\infty} = 0$$

então

$$\hat{A}_K(t)|0>_{-\infty} \neq 0$$

Mostre também que é possível definir um novo vazio $|0>_t$ e que os operadores $\hat{A}_K(t)$ e $\hat{A}_K^{+}(t)$ estão relacionados aos operadores $\hat{A}_K(-\infty)$, $\hat{A}_K^{+}(-\infty)$ por uma transformação de Bogoliubov dependente do tempo.

EXERCÍCIO: Considerando-se o mecanismo de criação de partículas acima esboçado (dependência temporal dos operadores de criação e destruição) dê uma estimativa aproximada para a energia por unidade de volume das partículas criadas.

Solução:

$$\varepsilon \sim \hbar\ c^3\ t^{-4}\ .$$

EXERCÍCIO: Demonstre o seguinte teorema (Novello, 1973). Se em um Universo homogêneo em expansão, existe quebra de simetria (caracterizada pelos valores não-nulo no vazio) de um campo vetorial W^{λ}, isto é,

$$< 0|\ \vec{H}\ |0 > = 0$$
$$< 0|\ \vec{E}\ |0 > \neq 0$$

então:

(i) o campo W^{λ} é massivo.

(ii) a massa do campo é imaginária.

Mostre que a massa será real se o Universo está em contração.

EXERCÍCIO: Demonstre o teorema (Novello, 1973): Se em um Universo homogêneo em expansão existe quebra de simetria caracterizada pelo valor não-nulo no vazio de um campo vetorial W^λ de massa nula, isto é,

$$<0|\,\vec{E}\,|0> = \vec{N}$$

$$<0|\,\vec{H}\,|0> = \vec{P}$$

então

$$\begin{cases} \vec{N} = 0 \\ \vec{P} \neq 0 \,. \end{cases}$$

(Note: $\vec{E}$, $\vec{H}$ são as partes vetoriais do campo; cf. capítulo 1).

APENDICE

THE COSMOLOGICAL DEPENDENCE OF WEAK INTERACTIONS

M. Novello and P. Rotelli

1. INTRODUCTION

In this paper a model is described which suggests a link between gravitational and weak interactions. Thus any time dependence in the gravitational interaction appears also in the weak interactions. In §2 the model is presented and the specific form that the time variation of the weak interactions takes is developed. In §3 some of the consequences of the model involving laboratory neutrinos are discussed. Section 4 describes a possible program for testing the model by the detection of cosmic neutrinos. We conclude with §5 in which some further speculations about the time development of physical laws are made.

2. THE COSMOLOGICAL MODEL

The idea that interactions may change with time stems from a paper by Dirac (1937) in which the gravitational constant was treated as time dependent. However, it was later realized that, as originally expressed, his hypothesis contradicted the principle of covariance. Jordan (1961, *Problems in Gravitation,unpublished*) and others (Dicke 1963) have since produced a way of circumventing this difficulty by introducing a scalar field $\phi(x)$ into the theory. Recently this ϕ field has been used to develop singularity-free cosmological models (Novello 1971, unpublished) by employing a non-linear Lagrangian in a scalar-tensor theory of gravitation. To obtain this well-behaved form of the Universe the ϕ field must have a regular minimum at t = 0.

$$\phi(t) \sim \phi_0 + \phi_1 t^2 + \ldots \qquad \text{(for small t)} \tag{1}$$

and go to a constant Q for large values of t

$$\phi(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} Q \,. \tag{2}$$

Now, the riemannian structure of space -time implies that the generalized γ which define the metric tensor by the anticommutation relation

$$\{\gamma_\alpha(x),\ \gamma_\beta(x)\} = 2g_{\alpha\beta}(x)\mathbb{1} \tag{3}$$

obey the equation

$$\gamma_{\alpha\|\beta}(x) = \sigma\left[U_\beta(x),\ \gamma_\alpha(x)\right] \tag{4}$$

where σ is a constant, $U_\beta(x) \equiv \gamma_\beta(x)(\mathbb{1}+\gamma_5(x))$ and double bar ($\|$) means covariant derivative, that is

$$\gamma_{\alpha\|\beta}(x) = \gamma_{\alpha|\beta}(x) - \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(x)\gamma_\varepsilon(x) + \left[\tau_\beta(x), \gamma_\alpha(x)\right]$$

where the single bar means the usual derivative, $\Gamma^{\varepsilon}{}_{\alpha\beta}$ are the connections of the Riemann space and τ_α are internal connections that arise from the permissible generalized gauge transformation

$$\gamma_\alpha(x) \rightarrow \gamma'_\alpha(x) = M(x)\gamma_\alpha(x)M^{-1}(x)$$

for an arbitrary matrix $M(x)$.

Equation (4) is the most general expression consistent with the riemannian structure of the space that can be constructed with the elements of the Clifford algebra without including any arbitrary extra field.

It has previously been shown (Novello 1971) that starting from this evolution operator U_λ (equation (4)) for the generalized Clifford algebra (space-time dependent) one can arrive at a modified class of Einstein's equations that relate the riemannian contracted curvature tensor with $R_{\alpha\beta}$ the curvature of the internal space

$$R_{\alpha\beta}(x)\ \gamma^\alpha(x) + \left[\mathbb{R}_{\alpha\beta}(x), \gamma^\alpha(x)\right] = 0\ . \tag{5}$$

This immediately suggests a link between gravitation and weak interactions because, given the form of $U_\lambda(x)$, the only nontrivial interaction Lagrangian which can be constructed from U_λ and spinor fields is the current-current interaction

$$\mathcal{L}_I = \frac{G}{\sqrt{2}} J_\beta\ J^\beta \tag{6}$$

where

$$J_\beta(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\beta(x)(\mathbb{1} + \gamma_5(x))\ \psi(x)\ . \tag{7}$$

The above consideration induces us to propose that the modified form of Dirac's idea should be applied not only with respect to the gravitational interaction but also to the weak interactions. In a homogeneous and isotropic cosmological model - such as the one we are considering - we shall see that the influence of cosmology on the weak interactions produces a time-dependent weighting of the axial vector current relative to the vector current. A direct way to do this is to consider the Lagrangian (6) and compare it with the usual flat-space Lagrangian

$$\mathcal{L}' = \frac{G}{\sqrt{2}} j_\alpha j^\alpha \tag{8}$$

where

$$j_\alpha = \bar{\psi} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5)\psi \tag{9}$$

(γ_α and γ_5 being constant Dirac matrices). In the particular type of universe we are considering we may write

$$\gamma_\alpha(x) = F(\alpha, x)\gamma_\alpha. \tag{10}$$

Indeed, from (3) and because in the co-moving system of coordinates

$$ds^2 = dt^2 - F_1(dx^1)^2 - F_2(dx^2)^2 - F_3(dx^3)^2 \tag{11}$$

it follows that:

$$\gamma_0(x) = \gamma_0$$

$$\gamma_1(x) = F_1^{1/2}\ \gamma_1$$

$$\gamma_2(x) = F_2^{1/2}\ \gamma_2$$

$$\gamma_3(x) = F_3^{1/2}\ \gamma_3.$$

Substituting (12) and (11) into (7) yields for the interaction defined by (6) the expression

$$\mathcal{L}_I = \frac{G}{\sqrt{2}}\left\{\{\bar{\psi}\,\gamma_0(1+\varepsilon(x)\gamma_5)\psi\}\{\bar{\psi}\gamma^0(1+\varepsilon(x)\gamma_5)\}\right.$$

$$\left. + \{\bar{\psi}\sqrt{F_1}\,\gamma_1(1+\varepsilon(x)\gamma_5)\psi\}\left(\bar{\psi}\,\frac{1}{\sqrt{F}}\,\gamma^1(1+\varepsilon(x)\gamma_5)\psi\right) + \ldots\right\}$$

which shows that the only effective modification of generalizing to the $\gamma_\alpha(x)$ functions is a space-time weighting of the axial vector current relative to the vector current (the vector current modification being absorbed in $\mathcal{L}_I$ by the modified space-time metric tensor). Thus we may write the weak leptonic current as

$$J_\alpha = \bar{\psi}\gamma_\alpha(1+\varepsilon(x)\gamma_5)\psi \tag{13}$$

where $\varepsilon(x)$ is a function of $\phi(x)$ and the simplest assumption would be that they are linearly related, that is

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{Q}\,\phi(x) \tag{14}$$

whence the maximal violation of parity in the V-A theory is reached only at asymptotic cosmological time.

3. CONSEQUENCES FOR THE WEAK INTERACTIONS

The model has two obvious consequences: (i) Since we do not exist at asymptotic cosmological time, the present leptonic weak current does not violate parity maximally.(ii) Produced neutrinos and antineutrinos are admixtures of both left and right polarized states. The ratio of the admixture depends upon their (cosmological) time of creation.

The first consequence can best be tested by a very accurate laboratory measurement of the Michel parameter ρ in μ meson decay. Let us define a parameter δ by writing the present weak leptonic current as

$$J_\alpha = \bar{\psi}\gamma_\alpha\{1 + (1 - \delta)\gamma_5\}\psi \tag{15}$$

that is, $\varepsilon(t_0) = 1 - \delta$ where t_0 is our present cosmological time. The V-A theory * appears in the limit $\delta = 0$. If we then neglect, for the moment, all masses involved except for the μ meson mass and neglect the calculable radiative corrections, we find that

$$\rho = \frac{3(1-2\delta+\frac{3}{2}\delta^2)}{4(1-2\delta+2\delta^2)} \simeq \frac{3}{4}(1-\delta^2/2). \tag{16}$$

Since, as we shall see, this may be a very small modification to the usual

---

* We of course employ the lepton number-conserving charge currents. Often, however, (and particularly in μ decay) V, A, S, T and P are defined for the "charge retention" currents. Our modification of the V-A theory corresponds to the appearance of S-P terms in addition to V-A in the charge retention current.

value of $\frac{3}{4}$, we have recalculated the decay rate dW for a polarized muon retaining the electron mass and the μ neutrino mass (< 1.15 MeV) but neglecting the electron antineutrino mass because of its very low experimental upper limit (< 60 eV). We find to order δ^2

$$\frac{dW}{dE\, d\cos\Theta} = \frac{(1-\gamma)^2 G^2 (1-2\delta+\frac{3}{2}\delta^2)|k|}{24\pi^3} \Bigg\{ E(\mu^2 + e^2 - 2\mu E)(1+3\delta^2 - \gamma)$$

$$+ 2(\mu-E)(\mu E-e^2)(1+2\gamma) - 3\nu(\mu E-e^2)\delta(1+\delta/2) + \frac{\alpha}{2\pi} f(E)$$

$$+ |k| \cos\Theta\left(\mu^2 + 3e^2 - 2\mu E - \gamma(\mu^2 - 3e^2 + 2\mu E) + \frac{\alpha}{2\pi} g(E)\right)\Bigg\} \quad (17)$$

where E, $|k|$ and e are the electron energy, magnitude of momentum ($|k|$ = $(E^2 - e^2)^{\frac{1}{2}}$) and mass, respectively, while μ and ν are the masses of the muon and muon neutrino, respectively. $\gamma = \nu^2/(\mu^2 + e^2 - 2\mu E)$ and, since the kinematically allowed values for the electron energy run from E_{min} = e to $E_{max} = (\mu^2 + e^2 - \nu^2)/2\mu$, it follows that the term $(1-\gamma)^2$ vanishes as $E \to E_{max}$. Thus, as is well known, an accurate determination of the electron energy spectrum will yield at least an upper limit for the muon neutrino mass. The functions f(E) and g(E) represent the effects of radiative corrections. As a first approximation, and in order to obtain an upper limit on δ, we may use the first-order corrections calculated by Kinoshita and Sirlin (1959). Experimentally no disagreement with the V-A theory has yet been found. Indeed, allowing for the above radiative corrections (Bardon et al 1965, Derenzo 1969)

$$\rho_{exp} = 0.75 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \pm 0.003 \tag{18}$$

If we allow ourselves up to 1 STD we can set an upper limit to δ of

$$\delta < 0.05 \ . \tag{19}$$

The electromagnetic corrections to μ decay are particularly important, introducing an effective diminution of several per cent in ρ. Thus to determine δ we shall require not only more accurate experiments but also theoretical calculations of second-order radiative corrections * (Marshak et al 1969).

A similar determination of an upper limit to δ follows from the modification in our model from the expression for the polarization (P_e) of the produced electron in β decay. Following the usual assumption that the nucleons in this process are effectively at rest, and integrating over the outcoming antineutrino three-momentum, we find that

$$dW \propto (1+3\eta^2)m^2\, E_e E_{\bar{\nu}} \Big[(1-\zeta)\{(1-\delta/2)^2(1+v_e)+\delta^2(1-v_e)/4\} + (1+\zeta)\{(1-\delta/2)^2(1-v_e)+\delta^2(1+v_e)/4\} \Big] \tag{20}$$

where $\eta = g_A/g_V$ for the hadronic current and where ζ is the electron polarization vector, v_e its relativistic velocity and E_e and $E_{\bar{\nu}}$ the energies of electron and antineutrino, re spectively. Thus we find that

$$P_e = \frac{R-L}{R+L} = - v_e(1-\delta^2/2) \ . \tag{21}$$

Experimentally (Willis and Thompson 1968)

$$P_{e^-}/v_{e^-} = -\ 1.001 \pm 0.008 \tag{22}$$

which, allowing for 1 STD, sets an upper limit to δ of

$$\delta < 0.12 \tag{23}$$

Thus we conclude that although no direct evidence for a nonzero δ exists, the above data only set an upper limit of about one-twentieth on its value.

4. COSMIC NEUTRINOS

As a test of the second consequence listed in §3 we first note that a neutrino (antineutrino) produced at cosmological time t by a weak current of the form $\bar{\psi}\gamma_{\alpha}(1+\varepsilon(t)\gamma_5)\psi$ can be written as

$$\psi^{(t)}_{\nu(\bar{\nu})} = \cos\,\Theta(t)\psi^{L(R)}_{\nu(\bar{\nu})} + \sin\Theta(t)\psi^{R(L)}_{\nu(\bar{\nu})} \tag{24}$$

where by L and R we mean left and right polarizations, respectively, and where $\tan\,\Theta(t) = (1-\varepsilon(t))/(1+\varepsilon(t))$. If, as is usually assumed, we lived in a world in which $\delta = 0$ and the neutrinos were massless, then the right (left) handed polarized neutrinos (antineutrinos) would be completely invisible to any detection apparatus (save possibly one employing the gravitation interaction). Thus the only observable consequences of the model, for the detection of cosmic neutrinos (antineutrinos) on the Earth, would be the effective diminution of the universal Fermi constant G by

$\cos\Theta(t)$. This could be measured in the Gedenken experiment in which all L neutrinos (R antineutrinos) from a particular source are absorbed and counted during a specified time. This provides us with an experimental measurement of the otherwise elusive flux, and together with a measurement of their rate of interaction the "effective" Fermi constant could be deduced. Of course this is impossible in practice because of the very low interaction rate of the neutrinos (antineutrinos), and very few of those entering a laboratory will be detected. It is this very property, however, which in part makes cosmic neutrinos so interesting, for if detected they may well carry information from very distant sources.

A feasible experiment depends upon a nonzero δ, since this will allow us, in principle, to measure both $\psi^{L(\underline{R})}_{\nu(\underline{\nu})}$ and $\psi^{R(\underline{L})}_{\nu(\underline{\nu})}$. Indeed the rates of interaction of these components, from a particular source, are proportional to $\cos^2\Theta(1-\delta/2)^2$ x flux and $\sin^2\Theta(\delta^2/4)$ x flux, respectively (ignoring for simplicity any possible mass for the neutrino). Since the flux is the same in both cases, the ratio of these rates determines $\delta^2\tan^2\Theta$. This ratio appears, for example, in the polarization of electrons produced via inverse β decay (for low-momentum transfer):

$$\frac{P_e}{v_e} \simeq \frac{\delta^2\tan^2\Theta-4}{\delta^2\tan^2\Theta+4}\,. \tag{25}$$

It is therefore conceivable that some cosmic neutrinos produce unpolarized electrons. To proceed further and try to determine the time dependence of $\Theta(t)$ we would require the development of a "neutrino telescope", that is an equipment in which the momentum of the incoming neutrino (antineutrino) could be deduced from the outcoming particles of its interaction. It is probable that neutrinos (antineutrinos) from a specific direction are dominated by one source and that the cosmological age of the source will vary with direction. Thus a measurement of the ratio in equation (25) would also vary with direction indicating a time dependence of $\Theta(t)$. If in addition these sources could be identified with known radio or optical sources the actual dependence on time of $\Theta(t)$ could be found. Such a "telescope" could also be used to determine accurately any mass of the neutrino by measuring the time delay between neutrinos and photons produced in for example, an exploding star, as has already been suggested (Pontecorvo 1968).

Unfortunately this program, in spite of some optimistic plans (Ginsburg 1971) is hampered by the low energies envisaged (due to the Doppler effect) for cosmic neutrinos, their predicted low flux and the failure up to the present time of attempts to measure the much more plentiful neutrinos expected from the sun.

5. CONCLUSIONS

It follows from what has been said in the previous section that the test of the model by direct measurement of cosmic neutrinos is not likely in the near future. There is, however, another consequence of the model which may prove relevant, and that is that because we now predict the existence of a full complement of four neutrinos (and four antineutrinos) the usual estimates of the maximum energy density of the neutrino sea in the

Universe become doubled.

It is tempting both from the upper limits set on δ and by the very "unaesthetic" nature of its vconsequence (the breakdown in the maximal violation of parity) to suggest a link between this effect and CP violation. In this vein CP violation would, like δ itself, be a vanishing phenomenon, and in addition one would expect the two phenomena to be of the same order of magnitude, that is, about 10^{-3} smaller than the weak interaction in general. If this is the case then present experimental accuracies, particularly in μ decay, are not far short of the mark.

We expect no modification in the strength of the electromagnetic charge coupling because of the CVC (conserved vector current) hypothesis relating it to the unmodified vector part of the weak leptonic current. But we might have a parity-violating term of the kind $J_{5\mu} A^{\mu}$ which, in analogy with the CP-violating term in weak interactions, is a vanishing function with cosmological time.

Finally, since we have discussed the possible time variation in gravitational, weak and even electromagnetic interactions, all linked to the time dependence of the scalar ϕ field, it would be unjust not to contemplate the possible time dependence of the strong interactions themselves (Davies 1972). In general we are advocating a theory in which the physical laws are a function of space-time (appearing constant only locally). It may in fact well be that the existence of "unexplained" energy sources in the Universe is just a consequence of our microscopic view of the laws of physics.

Acknowledgement

One of us (MN) would like to thank Dr. M.A.Gregorio for useful discussions.

* * *

REFERENCES

Bardon M. et al 1965, Phys. Rev. Lett. 14 449-53.

Davies P. C. W. 1972, J. Phys. A.: Gen. Phys. 5, 1296-304.

Derenzo S. E. 1969, Phys. Rev. 181, 1854-66.

Dicke R. H. 1963, Relativity, Groups and Topology (New York: Gordon and Breach) pp 165-315.

Dirac P. A. M. 1937, Nature, Lond. 139, 323.

Ginsburg V. L. 1971, Sov. Phys. - Usp. 14, 21-39.

Kinoshita T. and Sirlin A. 1959, Phys. Rev. 113, 1652-60.

Marshak R. E., Riazuddin and Ryan C. P. 1969, Theory of Weak Interactions (New York: Wiley).

Novello M. 1971, J. Math. Phys. 12, 1039-41.

Pontecorvo B. 1968, Sov. Phys. - JETP 26, 984-8.

Willis W. J. and Thompson J. 1968, Advances in Particle Physics, eds. R. L. Cool and R. E. Marshak (New York: Wiley) pp 295-477.