MONOGRAFIAS

XXXII

LIÇÕES SOBRE
A EQUAÇÃO DIFERENCIAL $x' = f(t,x)$

por

Luiz Adauto Medeiros

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71 - Botafogo - ZC-82

RIO DE JANEIRO, BRASIL

1971

PREFÁCIO

Aqui reunimos algumas formulações bem conhecidas do teorema de existência e unicidade para a equação escalar $x'=f(t,x)$. Fizemos uso destas notas como parte de alguns cursos sobre equações diferenciais que ministramos na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Os teoremas de unicidade de Nagumo e Osgood, veja § 5, generalizam-se para o caso de um espaço de Hilbert [2] ou ao caso de um Banach [1]. Certos teoremas aqui tratados são parte do curso de Métodos Matemáticos da Física que temos lecionado no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

Rio de Janeiro, 1972

Luiz Adauto Medeiros

INDICE

§ 1. INTRODUÇÃO

Representaremos por $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais e por Ω uma parte aberta de $\mathbb{R}^2 = \{(t,x) | t,x \in \mathbb{R}\}$. Consideremos uma aplicação $f:\Omega \to \mathbb{R}$, tal que $(t,x) \in \Omega \to f(t,x) \in \mathbb{R}$. Estaremos interessados, nestas notas, no estudo das equações

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1}$$

Denomina-se solução da equação (1) no intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a uma aplicação $\varphi: I \to \mathbb{R}$, ($t \in I \to \varphi(t) = x(t) \in \mathbb{R}$), tal que o gráfico esteja contido em Ω e se tenha

$$\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$$

para todo $t \in I$. Diz-se que a (1) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. O problema que se impõe, inicialmente, é o de procurar condições gerais sobre a aplicação f, afim de que (1) possua pelo menos uma solução. Resolvida esta etapa do problema, deseja-se saber em que condições podemos garantir a unicidade. Em busca das soluções das questões anteriores, Cauchy formulou o problema seguinte: dado um ponto $(t_o,x_o) \in \Omega$, demonstrar a existência de uma solução $x = \varphi(t)$ de $x' = f(t,x)$, passando por (t_o,x_o). Este problema denomina-se problema de Cauchy para a equação (1). Formulado de maneira precisa, o problema de Cauchy consiste em dado $(t_o,x_o) \in \Omega$, demonstrar a existência de $x = \varphi(t)$, com gráfico contido em Ω, tal que

$$\varphi'(t) = f(t,\varphi(t)),\ t \in I, \tag{2}$$

$$\varphi(t_o) = x_o \tag{3}$$

A seguir, daremos alguns métodos clássicos para resolver o problema de Cauchy (2)+(3)

§ 2. CONTRAÇÕES

Estaremos interessados em espaços métricos completos. Portanto seja E um espaço métrico completo e T uma aplicação de E em E. Denomina-se ponto fixo de T a um ponto $\xi \in E$ tal que $T(\xi) = \xi$. A questão inicial é procurar condições sobre T para que ela possua um único ponto fixo. Para tal, suporemos que E seja um espaço métrico completo segundo uma distância d. Diz-se que $T:E \to E$ é uma contração de E, quando existe uma constante k, $0 < k < 1$ tal que

$$d(T(x_1),T(x_2)) \leq k\, d(x_1,x_2)$$

para todo par $x_1,x_2 \in E$.

TEOREMA 1 (Banach)

Seja (E,d) um espaço métrico completo. Se $T:(E,d) \to (E,d)$ fôr uma contração de E, então T possui um único ponto fixo.

Demonstração:

Seja x um ponto qualquer de E, e consideremos a sequência $\{x_n\}$ de pontos de E definida do modo seguinte:

$$x_2 = T(x_1), \quad x_3 = T(x_2), \dots, x_n = T(x_{n-1}), \dots$$

Provaremos que esta sequência é convergente em E. De fato, tem-se

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x_{m+1}) + d(x_{m+1},x_{m+2}) + \dots + d(x_{m-1},x_n) \tag{4}$$

e sendo

$$d(x_{m+1},x_{m+2}) = d(T(x_m),T(x_{m+1})) \leq k d(x_m,x_{m+1})$$

$$d(x_{m+2},x_{m+3}) = d(T(x_{m+1}),T(x_{m+2})) \leq k^2 d(x_m,x_{m+1})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d(x_{m+p-1},x_{m+p}) = d(T(x_{m+p-2}),T(x_{m+p-1})) \leq k^{p-1}d(x_m,x_{m+1})$$

Desejamos calcular $d(x_{n-1},x_n)$. Sendo $n > m$, para fixar as idéias, suporemos $n = m + p$. Logo, pelo cálculo anterior, obtém-se:

$$d(x_{n-1},x_n) \leq k^{n-m-1}d(x_m,x_{m+1})$$

Consequentemente, a (4) se escreve sob a forma

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x_{m+1}) \quad (1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-m-1})$$

Sendo $0 < k < 1$, obtém-se $1 + k + k^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-k}$, resultando daí que

$$d(x_m,x_n) \leq \frac{d(x_m,x_{m+1})}{1-k} \tag{5}$$

Pelo cálculo que fizemos logo a seguir a (4), obtém-se

$$d(x_m,x_{m+1}) = d(x_{(m-1)+1},x_{m+1}) \leq k^{m-1}\, d(x_1,x_2),$$

que substituída em (5) nos dá:

$$d(x_m,x_n) \leq \frac{k^{m-1}}{1-k}\, d(x_1,x_2), \quad 0 < k < 1.$$

Daí resulta que quando $m,n \to \infty$, segue-se que $d(x_m,x_n) \to 0$, provando que $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy de E, consequentemente convergente porque E é completo. Seja $\xi = \lim x_n$ e vamos provar que ξ é um ponto fixo de T. De fato, $x_n = T(x_{n-1})$ e tomando limite de ambos os membros, observando que T é contínua, obtém-se $\xi = T(\xi)$.

Resta-nos provar que ξ é o único ponto fixo de T. Suponhamos que exista outro ponto fixo ζ. Temos $d(T(\xi),T(\zeta)) \leq k\, d(\xi,\zeta)$, isto é, $d(\xi,\zeta) \leq k\, d(\xi,\zeta)$, o que implica $d(\xi,\zeta) = 0$, ou seja $\xi = \zeta$.

A hipótese do Teorema 1 pode ser enfraquecida, para obtermos um resultado mais geral e mais útil nas aplicações. Veja o seguinte teorema:

TEOREMA 2

Existe um único ponto fixo de T, se alguma potência de T fôr uma contração.

Demonstração:

De fato, suponhamos T^m uma contração para algum número natural m. Assim, pelo Teorema 1, T^m possui um único ponto fixo ξ, isto é, $T^m\xi = \xi$. Tem-se

$$\xi = \lim_{p \to \infty} (t^m)^p x$$

Sendo T contínua, resulta que

$$T\xi = \lim_{p \to \infty} T^{mp}\, Tx.$$

Demonstraremos que $d(T\xi,\xi) = 0$, isto é, $T\xi = \xi$. De fato, sendo T^m uma contração, T^{mp} será também contração, para todo número natural p. Obtém-se

$$d((T^m)^p Tx,\ (T^m)^p x) \leq k^p\ d(T^m Tx, T^m x) \leq k^p\ d(Tx,x)$$

e por conseguinte

$$d(T\xi,\xi) = d(\lim_{p\to\infty} (T^m)^p Tx,\ \lim_{p\to\infty}(T^m)^p x) = 0$$

provando que $T\xi = \xi$.

APLICAÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Aplicaremos os resultados anteriores para demonstrar a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy (2)+(3). Antes porém, imporemos à aplicação f certas condições.

DEFINIÇÃO 1

Diz-se que $f:\Omega \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana relativamente a x,uniformemente em relação a t, quando existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq K|x_1-x_2|$$

para todo par (t,x_1), (t,x_2) em Ω.

Diz-se que f é localmente Lipschitziana em relação a x, uniformemente em relação a t, em um aberto Ω, quando cada ponto de Ω possui uma vizinhança na qual a f é Lipschitziana em relação a x, uniformemente em relação a t. No que segue omitiremos a sentença uniformemente em relação a t, e diremos simplesmente função Lipschitziana em relação a x.

Suponhamos que $f:\Omega\to\mathbb{R}$ seja contínua, sendo Ω um aberto do $\mathbb{R}^2$. Consideremos uma aplicação $\varphi:I\to\mathbb{R}$, cujo gráfico está contido em Ω. Tem-se a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 1

Para que $x = \varphi(t)$ seja solução do problema de Cauchy (2)+(3), é necessário e suficiente que $\varphi:I \to \mathbb{R}$ seja uma solução contínua da equação integral

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t,\varphi(t))dt \qquad (6)$$

Demonstração:

De fato, seja φ uma solução (2)+(3). Então $\varphi:I \to \mathbb{R}$ é contínua, o mesmo se verificando para a $g(t) = f(t,\varphi(t))$, $t\in I$. Integrando $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$, $x_0 = \varphi(t_0)$ de t_0 a t, obtém-se a equação (6).

Reciprocamente, se $\varphi:I \to \mathbb{R}$ for uma solução contínua de (6), obtêm-se a (2) derivando (6) relativamente a t e a (3) calculando em (6) $\varphi(t_0)$.

A seguir demonstraremos a existência e unicidade da solução do problema de Cauchy (2)+(3), supondo que Ω é um retângulo. Posteriormente retomaremos o caso em que Ω é um aberto qualquer do $\mathbb{R}^2$.

TEOREMA 3

Seja f uma aplicação numérica definida e contínua no retângulo

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \ |t-t_0| \leq a,\ |x-x_0| \leq b\}$$

de centro (t_0,x_0), e suponhamos f Lipschitziana em relação a x, uniformemente em relação a t, neste retângulo. Então o problema de Cauchy (2)+(3) possui uma única solução definida em uma vizinhança I de t_0.

Demonstração:

Sendo f contínua no retângulo, segue-se que $|f| \leq M$. Seja $r=\min(a,\frac{b}{M})$ e consideremos a coleção das aplicações numéricas contínuas $\varphi: I_r \to \mathbb{R}$, onde $I_r = (t_0-r,\ t_0+r)$, satisfazendo às seguintes condições:

$$1)\quad \varphi(t_0) = x_0$$

$$2)\quad |\varphi(t) - x_0| \leq b$$

Para duas funções quaisquer $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, definamos a distância por

$$d(\varphi_1,\varphi_2) = \|\varphi_1-\varphi_2\|$$

sendo $\|\varphi_1-\varphi_2\| = \sup_{t\in I_r} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$, por definição. Daí resulta que a coleção que a coleção de funções definida anteriormente, torna-se um espaço métrico completo, o qual representaremos por $C^*(I_r)$. Consideremos a aplicação T definida em $C^*(I_r)$ por

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds, \quad [t_0,t] \subset I_r \tag{7}$$

Vejamos que realmente $T\varphi \in C^*(I_r)$. Sendo f contínua, segue-se que $T\varphi$ é contínua em I_r.

Tem-se $(T\varphi)(t_0) = x_0$ e $|(T\varphi)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi(s))|ds \leq Mr < b$, provando assim que $T\varphi \in C^*(I_r)$. Tendo em vista a proposição 1, para demonstrar o teorema, é suficiente demonstrarmos que T é uma contração. De fato,

$$|(T\varphi)(t) - (T\Psi)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi(s)) - f(s,\Psi(s)) ds \leq K \int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \Psi(s)|ds$$

Daí resulta que

$$d(T\varphi,T\Psi) \leq Kr\, d(\varphi,\Psi).$$

Portanto, tomando r tal que $Kr < 1$, conclui-se que T é uma contração, logo pelo Teorema 1 possui um único ponto fixo, isto é, existe uma única função $x = x(t)$ em $C^*(I_r)$ tal que $Tx = x$, ou seja, tal que

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t,x(t))dt$$

Afim de eliminar a condição $Kr < 1$, demonstraremos que a aplicação T definida por (7) satisfaz às condições do Teorema 2, isto é, existe um número natural n tal que T^n é uma contração. Todavia, demonstraremos que existe um número natural n tal que T^n é uma contração, para todo $m \geq n$. Inicialmente, vamos comparar os números $d(T^n x, T^n y)$ e $d(x,y)$, sendo x,y elementos de $C^*(I_r)$.

Tem-se

$$(Tx)(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s,x(s))ds$$

por definição. Façamos $x = x_1$ e

$$x_2(t) = (Tx_1)(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s,x_1(s))ds,$$

$$x_3(t) = (Tx_2)(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s,x_2(s))ds = (T^2x_1)(t)$$

De um modo geral, pondo $T^n x_1 = x_n$, obtêm-se

$$x_n(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(s,x_{n-1}(s))ds$$

para todo intervalo $(t_o,t) \subset I_r$. Segue-se, daí, sendo f Lipschitziana, que

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq K \int_{t_o}^{t} |x_{n-1}(s) - y_{n-1}(s)|ds$$

Repetindo o argumento resulta que

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq K^2 \int_{t_o}^{t}\int_{t_o}^{s} |x_{n-1}(\xi) - y_{n-1}(\xi)|d\xi$$

Definindo φ por

$$\varphi(s) = \int_{t_o}^{s} |x_{n-1}(\xi) - y_{n-1}(\xi)|d\xi$$

vem:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq K^2 \int_{t_o}^{t} \varphi(s)ds$$

Integrando por partes, tem-se:

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq K^2 \int_{t_o}^{t} (t-s)\ |x_{n-2}(s) - y_{n-2}(s)|ds$$

De maneira análoga, verifica-se que

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{K^3}{2!} \int_{t_o}^{t} (t-s)^2\ |x_{n-3}(s) - y_{n-3}(s)|ds$$

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{K^4}{3!} \int_{t_o}^{t} (t-s)^3\ |x_{n-4}(s) - y_{n-4}(s)|ds$$

e de um modo geral

$$|x_n(t) - y_n(t)| \leq \frac{K^{n-1}}{(n-2)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-2} |x_1(s) - y_1(s)| ds$$

Finalmente, obtêm-se:

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{K^{n-1}}{(n-2)!} \quad \|x_1 - y_1\| \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-2} ds$$

ou

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{K^{n-1}}{(n-1)!} (t-s)^{n-1} \|x_1 - y_1\| \leq \frac{(Kr)^{n-1}}{(n-1)!} d(x_1, y_1)$$

Sendo $x_n = T^{n-1}x$, $x_1 = x$, conclui-se que

$$\|T^{n-1}x - T^{n-1}y\| \leq \frac{(Kr)^{n-1}}{(n-1)!} \|x-y\|.$$

Sendo $\frac{(Kr)^n}{n!}$ o têrmo geral de uma série numérica convergente, resulta que $\lim_{n\to\infty} \frac{(Kr)^n}{n!} = 0$. Desta forma, existe n_0 tal que $0 < \frac{(Kr)^n}{n!} < 1$ para todo $n > n_0$. Esta conclusão, implica, precisamente, que existe uma potência T^n de T que ẽ uma contração em $C^*(I_r)$. Logo, pelo Teorema 2,T possui um ũnico ponto fixo.

A seguir formularemos, e esboçaremos a demonstração, do Teorema para o caso em que f ẽ uma aplicação de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

TEOREMA 4

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^2$ e $f:\Omega \to \mathbb{R}$ uma aplicação contĩnua e localmente Lipschitziana. Por cada ponto (t_0, x_0) de Ω, passa uma e sõmente uma solução do problema de Cauchy (3)+(4).

Demonstração:

Seja (t_0,x_0) um ponto qualquer de Ω. Sendo f contínua e localmente Lipschitziana em Ω, existe uma vizinhança V de (t_0,x_0) na qual f é limitada e uniformemente Lipschitziana. Consideremos os números

$$M = \sup_V |f(t,x)| \quad \text{e} \quad K = \sup_V \left| \frac{f(t,x_1) - f(t,x_2)}{x_1 - x_2} \right|, \; x_1 \neq x_2.$$

Seja R_0 um retângulo com centro em (t_0,x_0) e diagnonais $x - x_0 = \pm M(t-t_0)$ contido em V. Representemos por I_0 a projeção de R_0 sobre a reta $x = 0$ e seja ℓ_0 a metade da amplitude de I_0. A projeção de R_0 sobre a reta $t = 0$ é o intervalo $[x_0-M\ell_0, x_0+M\ell_0]$. Seja $C(I_0)$ o espaço métrico das aplicações $x:I_0 \to \mathbb{R}$, com a métrica do supremo. Consideremos o subespaço $C^*(I_0)$ de $C(I_0)$ constituido pelas funções x tais que

1) $x(t_0) = x_0$

2) $x_0 - M\ell_0 \leq x(t) \leq x_0 + M\ell_0$, $t \in I_0$

Sendo $C^*(I_0)$ um subespaço fechado, segue-se que $C^*(I_0)$ é completo. Consideremos a aplicação T definida em $C^*(I_0)$ do seguinte modo:

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

Temos que T é uma aplicação de $C^*(I_0)$ em $C^*(I_0)$. De fato, $(Tx)(t_0) = x_0$. Também tem-se:

$$|(Tx)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s))|ds \leq M(t-t_0) \leq M\ell_0$$

Para verificarmos que T é uma contração, segue-se um método análogo ao da demonstração do Teorema 3. Tomadas duas funções quaisquer $x_1,x_2 \in S$ constata-se que

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq K\ell_0 \|x_1-x_2\|$$

Logo, tomando ℓ_0 tal que $K\ell_0 < 1$, encontra-se um intervalo com centro em x_0, no qual está definida a solução do problema.

OBSERVAÇÃO 1

Podemos eliminar a hipótese $K\ell_0 < 1$, provando que existe um número natural n tal que T^n seja uma contração.

§ 3. MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Vamos demonstrar o Teorema 3 usando o método das aproximações sucessivas idealizado por Picard. Note que o Teorema de Banach do ponto fixo, tem sua demonstração baseada neste método. Manteremos as hipóteses e notações anteriores. Construiremos uma sequência de funções $\{x_n(t)\}$ que convergirá para uma solução da equação (6), isto é, para uma solução do problema de Cauchy (2)+(3). Fixemos a função constante x_0 como primeiro elemento da sequência de aproximações, e definamos a função x_n, por recurrência, do modo seguinte:

$$x_0(t) = x_0, \quad x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x_{n-1}(s))ds$$

para $t\epsilon I_r = (t_0-r, t_0+r)$, sendo $r = \min(a, \frac{b}{M})$. A demonstração será feita para $t_0 < t \leq t_0 + r$, sendo análoga para o caso $t_0 - r \leq t \leq t_0$. Como $t_0 \leq s-t_0 \leq r < a$, conclui-se que $f(s,x_0)$ é contínua, logo integrável em (t_0,t), e sua integral é uma função diferenciável, isto é,

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x_0)dt$$

é diferenciável. Além disto,

$$|x_1(t) - x_0| \leq M(t-t_0) < Mr < b$$

De maneira análoga, conclui-se que $f(s,x_1(s))$ para $t_0 \leq s \leq t < t_0 + r$ é contínua, logo $x_2(t)$ é diferenciável e $|x_2(t) - x_0| < b$. Por indução conclui-se que x_n é uma função diferenciável de t em $[t_o, t_o+r]$ e $|x_n(t)-x_o| \leq b$.

A seguir, demonstraremos a convergência da sequência $\{x_n(t)\}$. Consideremos a série

$$x_o + (x_1-x_o) + (x_2-x_1)+\ldots+(x_n-x_{n-1})+\ldots \tag{8}$$

cuja reduzida é $s_n = x_n$. Desta forma, para demonstrarmos que $\{x_n\}$ é convergente, é suficiente demonstrarmos que a série (8) é convergente. De fato, verifica-se que

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{MK^{n-1}}{n!}(t-t_o)^n$$

Portanto, sendo $t-t_o < r$, conclui-se que a série

$$x_o + |x_1-x_o| + |x_2-x_1| +\ldots+ |x_n-x_{n-1}| +\ldots$$

é dominada pela série numérica convergente

$$x_o + \frac{M}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Kr)^n}{n!}$$

Logo, resulta que (8) é uniformemente convergente em $[t_o, t_o + r]$. Portanto, $\{x_n(t)\}$ é aí uniformemente convergente, e seja

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t) \qquad t_o \leq t \leq t_o + r \tag{9}$$

É simples verificar que $x = x(t)$ definida por (9) é solução de (6).

Precisariamos garantir a unicidade da solução do problema de Cauchy (2)+(3), uma vez que o método das aproximações sucessivas, apenas nos garante a existência. No § 5 formularemos o problema da existência de soluções em um contexto mais geral. A seguir, entretanto, demonstraremos a existência admitindo f uniformemente Lipschitziana e contínua em Ω. De fato, sejam

$x = x(t)$, $y = y(t)$, duas soluções do sistema (2)+(3). Daí resulta que

$$y(t) - x(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s,y(s)) - f(s,x(s))]ds$$

Tomando o valor absoluto de ambos os membros e aplicando a condição de Lipschitz, resulta que

$$|y(t) - x(t)| \leq K\int_{t_0}^{t} |y(t) - x(t)|dt,$$

isto é, fazendo $\varphi(t) = |y(t) - x(t)|$, obtém-se

$$\varphi(t) \leq K \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds,$$

para todo intervalo $[t_0,t] \subset [t_0,t_0+r]$. Consequentemente, a unicidade do problema (2)+(3) é uma consequência do seguinte lema:

LEMA 1

Seja $\varphi: [t_0,t_0+r] \to \mathbb{R}$, contínua, não negativa, e K uma constante positiva. Se

$$\varphi(t) \leq K \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds \tag{10}$$

para todo $t_0 \leq t \leq t_0+r$, então φ é a aplicação nula.

Demonstração:

De fato, a desigualdade (10) implica

$$\varphi(t) \leq K^2 \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{\xi} \varphi(\zeta)d\zeta\right)d\xi$$

usando o mesmo argumento empregado anteriormente, para demonstrar que existe uma potência de T, dada por (7), que é uma contração. Repetindo o mesmo argumento, obtém-se

$$\varphi(t) \leq \frac{K^n}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-\xi)^{n-1} \varphi(\xi)d\xi$$

para todo $t_0 \le t \le t_0 + r$, isto é

$$0 \le \varphi(t) \le \frac{K^n r^{n-1}}{(n-1)!} \|\varphi\| = K \frac{(Kr)^{n-1}}{(n-1)!} \|\varphi\|$$

Quando $n \to 0$, resulta que $\frac{(Kr)^{n-1}}{(n-1)!} \to 0$ e assim $\varphi(t) = 0$ para todo t em $[t_0, t_0 + r]$, o que prova o lema.

§ 4. MÉTODO DA POLIGONAL

Anteriormente demonstramos a existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy (2)+(3), admitindo f contínua e Lipschitziana. Neste parágrafo admitiremos f apenas contínua para garantir a existência de pelo menos uma solução de (2)+(3). Observemos, entretanto, que perderemos a unicidade quando supõe-se f apenas contínua. O teorema de existência com f apenas contínua é devido a Cauchy e Peano. A demonstração que daremos é devida a Arzelã, cuja motivação é a idéia de Cauchy de aproximar a solução de (2)+(3) por meio de uma sequência de poligonais. O método de Arzelã baseia-se essencialmente em argumentos de compacticidade. Por esta razão daremos, inicialmente, o teorema de Arzelã-Ascoli, que é uma condição suficiente para que uma parte de C(I) seja compacta. Note que C(I) é o espaço de Banach das aplicações $\varphi: I \to \mathbb{R}$, I intervalo compacto de $\mathbb{R}$, contínuas, com a norma do supremo, isto é, $I = \{t \in R \mid a \le t \le b\}$ e se $x, y \in C(I)$, $d(x,y) = \| x-y \| = \sup_{t \in I} |x(t)-y(t)|$.

DEFINIÇÃO 2

Diz-se que uma parte $H \subset C(I)$ é uniformente limitada, quando existe uma constante $K > 0$ tal que $\|x\| \le K$ para toda $x \in K$.

LEMA 1

Seja $H \subset C(I)$, uma parte infinita uniformemente limitada. Então, para toda parte enumerável $E \subset I$, existe uma sequência $\{x_n\} \subset H$ tal que $\{x_n(t)\}$ é convergente para todo $t \in E$.

Demonstração:

De fato, seja $E = \{t_k\}$ a parte enumerável de I.

Consideremos o conjunto numérico $\{x(t_1) \mid x \in H\}$ o qual é limitado, por hipótese. Consequentemente, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, podemos extrair deste conjunto uma sequência convergente, a qual representaremos por $\{ x_n^{(1)} (t_1) \}$. A seguir, considera-se a sequência de funções $\{x_n^{(1)}\} \subset H$ e a sequência numérica $\{ x_n^{(1)}(t_2) \}$, sendo $t_2 \in E$. Usando o mesmo argumento anterior, obtém-se uma subsequência convergente $\{ x_n^{(2)}(t_2) \}$, sendo $\{x_n^{(2)}\} \subset H$. Repetindo o mesmo argumento para $t_3, t_4, \ldots, t_p, \ldots$, encontra-se a cadeia decrescente de sequências

$$\{ x_n^{(1)}\} \supseteq \{x_n^{(2)}\} \supseteq \{x_n^{(3)}\} \supseteq \cdots \supseteq \{ x_n^{(k)}\} \supseteq \ldots,$$

sendo $\{x_n^{(k)} (t_k)\}$ convergente para $k = 1,2,\ldots,n,\ldots$.

A sequência diagonal $\{x_n^{(n)}\}$ é convergente para todo ponto de $E = \{t_k\}$, porque $\{ x_n^{(n)} (t_k) \}$ é uma subsequência de uma sequência convergente, para todo k.

DEFINIÇÃO 3

Uma parte $H \subset C(I)$ diz-se equicontínua em $C(I)$, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo par $t_1, t_2 \in I$ com $|t_1 - t_2| < \delta$, tem-se $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$, para todo elemento $x \in H$.

Observe que as aplicações Lipschitzianas são exemplos de aplicações equicontínuas.

TEOREMA 5

(Arzelã-Ascoli): Seja $H \subset C(I)$ uma parte infinita, satisfazendo às seguintes condições:

1) H é uniformemente limitada

2) H é equicontínua.

Então toda sequência de H possui uma subsequência uniformemente convergente.

OBSERVAÇÃO 1

O teorema 5 nos diz, em outras palavras, que toda parte $H \subset C(I)$ uniformemente limitada e equicontínua, é sequencialmente compacta em C(I). Note, também, que vale a recíproca desse teorema. Assim o Teorema 5 e sua recíproca constituem uma caracterização dos compactos de C(I). Não daremos a demonstração da recíproca nestas notas.

Demonstração:

Representemos por $\{r_k\}$ os racionais de $I = [a,b]$. Resulta, pelo Lema 1, que H contém uma sequência $\{x_n\}$ que converge em todo racional r_k de I. Demonstremos que $\{x_n\}$ converge em todo ponto de I. De fato, seja t um irracional de I. Logo, para cada $\varepsilon > 0$, existe um racional $r \in I$ tal que $|x(t) - x(r)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in H$, pois H é equicontínuo e os racionais são densos em I. Sendo $\{x_n(r)\}$ convergente, para o $\varepsilon > 0$ dado anteriormente, existe um n_o tal que $|x_n(r) - x_m(r)| < \varepsilon/3$, para todo $n,m > n_o$. Resulta daí que

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq |x_n(t) - x_n(r)| + |x_n(r) - x_m(r)| + |x_m(r) - x_m(t)| < \varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$, $n,m > n_o$, provando que a sequência $\{x_n\}$ converge em todo I. Seja $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t)$$

É simples verificar que φ é contínua. De fato, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $|t'-t''| < \delta$ implica $|x(t')-x(t'')| < \varepsilon$, para todo $x \in H$. Considerando estas desigualdades para os elementos de $\{x_n\}$ e tomando o limite quando $n \to \infty$ em $|x_n(t') - x_n(t'')| < \varepsilon$, obtém-se que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $|t'-t''| < \delta$ tem-se $|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \varepsilon$, isto é, φ é contínua em I.

Demonstraremos que $x_n \to \varphi$ uniformemente em I. De fato, observemos que $\{x_n - \varphi\}$ é uma sequência de funções equicontínuas. Assim, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $|t'-t''| < \delta \to |\{x_n(t') - \varphi(t')\} - \{x_n(t'') - \varphi(t'')\}| < \varepsilon/2$, para todo n. Para o δ anterior, que depende somente do ε, consideremos um número natural s tal que $\frac{b-a}{s} < \delta$. Tomemos a decomposição de $I = [a,b]$ por meio dos pontos

$$\xi = a, \quad \xi_1 = a + \frac{b-a}{s}, \quad \xi_2 = a + 2\,\frac{b-a}{s}, \ldots, \xi_p = a + p\,\frac{b-a}{s}, \ \ldots, \quad \xi_s = b$$

Para todo ξ_j tem-se $\varphi(\xi_j) = \lim_n x_n(\xi_j)$, e, portanto, podemos determinar N_j tal que para $n > N_j$ tenhamos

$|x_n(\xi_j) - \varphi(\xi_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Fazendo $N = \max(N_1, N_2, \ldots, N_s)$, obtém-se

$$|x_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

para todo $n > N$ e todo t em I. De fato, se $t \in I$ existe um $j \in \{0,1,2,\ldots,s\}$ tal que $|\xi_j - t| < (b-a)/s < \delta$. Assim, obtém-se

$$|x_n(t) - \varphi(t)| \leq |\{x_n(t) - \varphi(t)\} - \{x_n(\xi_j) - \varphi(\xi_j)| + |x_n(\xi_j) - \varphi(\xi_j)| < \varepsilon$$

para todo $n > N > N_j$ e todo $t \in I$.

TEOREMA 6

(Cauchy-Peano): Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aberto do $\mathbb{R}^2$, fôr contínua então por cada ponto (t_0, x_0) interior a Ω passa pelo menos uma solução contínua de $x' = f(t,x)$.

Demonstração:

Seja V uma vizinhança de (t_0,x_0) contida em Ω, aonde f seja limitada e $M = \sup_V |f(t,x)|$.

Consideremos o retângulo

$$R_0 = \{(t,x)\varepsilon V|\ |t-t_0|\leq r,\ |x-x_0|\leq Mr\}$$

onde r é um número conveniente. Vamos supor que $t\ \varepsilon[t_0,t_0+r]$, sendo análoga a demonstração para o caso $t\ \varepsilon[t_0-r,t_0]$. Consideremos uma decomposição de $[t_0,t_0+r]$ em partes iguais através dos pontos

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t_0 + r$$

A direção de uma solução $x = x(t)$ de $x' = f(t,x)$ num ponto (ξ,ζ) de R_0 é dada por $f(\xi,\zeta)$. Daí resulta que a reta por (t_0,x_0) possuindo a direção de uma solução neste ponto é dada por

$$x - x_0 = f(t_0,x_0)(t-t_0) \tag{11}$$

Considera-se $x = x(t)$ dada por (11) como solução aproximada de $x' = f(t,x)$ no intervalo $[t_0,t_1]$. Fazendo $x_1 = x(t_1)$ dado por (11), conclui-se que (t_1,x_1) é um ponto de R_0. Desta forma, obtém-se, usando o mesmo argumento anterior,

$$x - x_1 = f(t_1,x_1)(t-t_1) \tag{12}$$

Toma-se $x = x(t)$ dada por (12) como solução aproximada de $x' = f(t,x)$ no intervalo $[t_1,t_2]$ Assim sucessivamente encontramos os pontos

$$(t_0,x_0),(t_1,x_1),\ldots,(t_i,x_i),\ldots,(t_n,x_n) \tag{13}$$

pertencentes ao retângulo Q e as soluções aproximadas $x = x(t)$ dadas por

$$x - x_{i-1} = f(t_{i-1},x_{i-1})(t-t_{i-1})$$

para $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1,2,..,n$. Representemos por p_i, $i = 1,2...,n$ as funções $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$p_i(t) = x_{i-1} + f(t_{i-1}, x_{i-1}(t-t_{i-1})$$

e por $\chi_{[t_{i-1},t_i]}$ a função característica do intervalo $[t_{i-1},t_i]$. Obtém-se que a aplicação $\varphi_n : [t_o, t_o+r] \to \mathbb{R}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ por

$$\varphi_n(t) = (\chi_{[t_o,t_1]}\, p_1)(t) + (\chi_{[t_1,t_2]} p_2)(t) + \ldots + (\chi_{[t_{n-1},t_n]} p_n)(t),$$

possui para gráfico em R_o uma poligonal com os vértices nos pontos representados em (13). Diremos, por facilidade de expressão, que φ_n é uma poligonal de n lados. Desta forma, obtém-se uma sequência $\{\varphi_n\}$, $n = 1,2,...,$ de poligonais contidas em R_o. É simples verificar que φ_n é derivável para cada n, em todos os pontos de (t_o, t_o+r), exceto em $t_o, t_1, t_2, ..., t_n$. Nestes pontos entretanto, existem as derivadas laterais. A função derivada φ_n' é contínua em (t_o, t_o+r), exceto em $t_o, t_1, t_2, ..., t_n$, nos quais, todavia, possui limites laterais. Resulta, daí, que φ_n' é integrável em $[t_o, t_o+r]$ e que

$$\int_{t_o}^{t} \varphi_n'(\xi)d\xi = \varphi_n(t) - \varphi_n(t_o)$$

isto é,

$$\varphi_n(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} \varphi_n'(\xi)d\xi$$

Vejamos que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz às condições do Teorema de Arzelá-Ascoli

1. $$|\varphi_n(t)-x_o| \leq \int_{t_o}^{t} |\varphi_n'(\xi)|\, d\xi \leq Mr \quad \text{para todo } t\in[t_o, t_o+r].$$

Assim $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada.

2. Para todo par $t',t'' \in [t_o,t_o+r]$, tem-se

$$|\varphi(t')-\varphi(t'')| \leq \int_{t'}^{t''} |\varphi_n'(\xi)|d\xi \leq M|t'-t''| < \varepsilon$$

para $|t'-t''| \leq \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$. Logo, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família equicontínua. Do teorema de Arzelã-Ascoli resulta que existe uma subsequência $\{\varphi_{n_k}\}$ de $\{\varphi_n\}$ a qual converge uniformemente para uma φ contínua em $[t_o,t_o+r]$. Vamos demonstrar que φ assim definida é uma solução de $x' = f(t,x)$ passando por (t_o,x_o).

De fato, consideremos as aplicações

$$\psi_{n_k}:[t_o,t_o+r] \to \mathbb{R}$$

definidas por

$$\psi_{n_k}(t) = x_o + \int_t^{t_o} f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi))d\xi,$$

e vamos demonstrar que $\psi_{n_k} \to \varphi$ uniformemente. Para isto, é suficiente demonstrarmos que $\psi_{n_k} - \varphi_{n_k} \to 0$ uniformemente em $[t_o,t_o+r]$. Sendo $\varphi_{n_k}(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} \varphi_n'(\xi)d\xi$, resulta que

$$\psi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}'(t) = \int_{t_o}^{t} \{f(\xi,\varphi_{n_k}(\xi)) - \varphi_{n_k}'(\xi)\}d\xi \tag{14}$$

Sendo $\varphi_{n_k}'(\xi)$ o valor de $f(t, \varphi_{n_k}(t))$ para t igual ao menor dos extremos dos intervalos de decomposição, conclui-se que o integrando em (14) é a diferença entre os valores de $f(t, \varphi_{n_k}(t))$ em dois pontos.

OBSERVAÇÃO 2

É simples verificar que a projeção dos lados do gráfico de φ_{n_k} sobre o eixo dos t é igual a r/n_k e sobre o eixo dos x é dominada por Mr/n_k. Assim, dado $\sigma > 0$, seja

$$\nu \geq \max \left(\frac{\sqrt{2}\, r}{\sigma}, \frac{\sqrt{2}\, Mr}{\sigma} \right)$$

Logo, para todo $n_k > \nu$, os lados do gráfico de φ_{n_k} possuem projeções sobre os eixos, menores do que $\sigma/\sqrt{2}$. Realmente, sobre o eixo dos x é dominada por Mr/n_k e para $n_k > \nu$ obtém-se $\frac{Mr}{n_k} < \frac{Mr}{\nu} \leq \frac{\sigma}{2}$. Analogamente, sobre o eixo dos t. Resulta que cada lado do gráfico de φ_{n_k} é dominada por σ.

Feita esta observação, retornemos à demonstração.

Sendo f uniformemente contínua em R_0, resulta que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que a oscilação de f é menor do que ε, nos subretângulos de R_0 de diagonais menores do que σ. Para este $\sigma > 0$, seja $\nu \geq \max \left(\frac{\sqrt{2}\, r}{\sigma}, \frac{\sqrt{2}\, Mr}{\sigma} \right)$ e $n_k > \nu$. Consideremos os retângulos com os lados paralelos aos eixos e para diagonais os lados do gráfico de φ_{n_k}. Imaginemos φ_{n_k} coberta por tais retângulos. Da observação 2 resulta que tais retângulos possuem diagonais menor do que σ. Portanto, para os pontos destes retângulos, devido à continuidade uniforme de f, tem-se

$$|f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) - \varphi'_{n_k}(\xi)| < \varepsilon \text{ para } n_k > \nu(\sigma)$$

Logo, $|\Psi_{n_k}(t) - \varphi_{n_k}(t)| < \varepsilon(t-t_0) < \varepsilon r$ para todo $t \in [t_0, t_0+r]$, quando $n_k > \nu$. Isto implica a convergência uniforme de Ψ_{n_k} para φ em $[t_0, t_0+r]$.

Para completar a demonstração, falta-nos provar que

$$\int_{t_0}^{t} f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi))d\xi \to \int_{t_0}^{t} f(\xi, \varphi(\xi))d\xi$$

uniformemente em $[\,t_o, t_o+r\,]$.

Ao σ determinado em função do $\varepsilon > 0$ e da continuidade uniforme da f, associemos $\nu = \nu(\sigma) > 0$ tal que

$$|\varphi_{n_k}(\xi) - \varphi(\xi)| < \sigma$$

para $n_k > \nu$ e todo ξ em $[\,t_o, t_o+r\,]$. (note que $\varphi_{n_k} \to \varphi$ uniformemente). Daí resulta que os pontos $(\xi, \varphi_{n_k}(\xi))$ e $(\xi, \varphi(\xi))$ pertencem a uma bola de raio σ. Logo, devido à continuidade uniforme da f, obtém-se

$$|f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) - f(\xi, \varphi(\xi))| < \varepsilon$$

Resulta, portanto, que

$$\left| \int_{t_o}^{t} \{f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi)) - f(\xi, \varphi(\xi))\}\, d\xi \right| \leq \varepsilon(t-t_o) < \varepsilon r$$

para todo $t \in [\,t_o, t_o+r\,]$ e cada $\varepsilon > 0$.

Finalmente, quando $n_k \to \infty$ em

$$\Psi_{n_k}(t) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(\xi, \varphi_{n_k}(\xi))d\xi, \quad t_o \leq t \leq t_o+r,$$

obtém-se

$$\varphi(\xi) = x_o + \int_{t_o}^{t} f(\xi, \varphi(\xi))d\xi$$

provando que φ é uma solução contínua de $x' = f(t,x)$ passando por (t_o, x_o).

§ 5. UNICIDADE DAS SOLUÇÕES

Neste parágrafo demonstraremos alguns teoremas de unicidade para o sistema $x' = f(t,x)$, $x(t_o) = x_o$.

PROPOSIÇÃO 1

Seja $f:\Omega \to \mathbb{R}$, $((t,x)\in\Omega \to f(t,x)\in \mathbb{R})$, uma aplicação contínua, Lipschitziana em relação a x, uniformemente em relação a t. Então, se x, y forem duas soluções de $x' = f(t,x)$ no intervalo $[t_0,T]$, correspondente aos dados iniciais x_0, y_0 respectivamente, obtém-se

$$|y(t) - x(t)| \leq |y_0-x_0|\, e^{Kt}, \quad t_0 \leq t \leq T$$

sendo K a constante de Lipschitz.

Demonstração:

De fato, tem-se

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi,y(\xi))d\xi, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi,x(\xi))d\xi$$

e portanto, sendo K a constante de Lipschitz, resulta que

$$|y(t)-x(t)| \leq |y_0-x_0| + K \int_{t_0}^{t} |y(\xi)-x(\xi)|d\xi$$

A demonstração desta proposição é uma consequência do seguinte lema:

LEMA 1

Seja $\varphi:[0,T] \to \mathbb{R}$, contínua e não negativa. Se

$$\varphi(t) \leq A + B \int_0^t \varphi(\xi)d\xi, \quad 0 \leq t \leq T,$$

sendo A e B constantes, então

$$\varphi(t) \leq A\, e^{Bt}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demonstração: Realmente, seja $g:[0,T] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \int_0^t \varphi(\xi)d\xi$$

Tem-se $g(0) = 0$, g é derivável e sua derivada g' é tal que

$$g'(t) = \varphi(t) \leq A + B\,g(t).$$

Multiplicando ambos os membros por e^{-Bt}, obtém-se

$$\frac{d}{dt}\left[g(t)\, e^{-Bt} \right] \leq A\, e^{-Bt}$$

Integrando esta desigualdade entre 0 e t,

$$g(t) \leq \frac{A}{B}\,(e^{Bt} - 1)$$

e sendo $\varphi(t) \leq A + Bg(t)$, obtém-se a desigualdade do Lema 1, de onde resulta a proposição 1, com as convenientes mudanças.

COROLÁRIO

Se $f:\Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições da Proposição 1, então $x'=f(t,x)$ possui uma única solução passando por (t_0,x_0).

OBSERVAÇÃO 1

A Proposição 1 pode ser melhorada, supondo-se que f seja Lipschitziana em relação a x, mas não uniformemente em relação a t. De maneira precisa, supõe-se que existe uma função $K = K(t)$ integrável em $[0,T]$, $K > 0$, tal que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq K(t)\ |x_1 - x_2|$$

para todo (t,x_1), (t,x_2) interiores a Ω.

A seguir demonstraremos dois teoremas de unicidade em situações mais gerais do que as anteriores.

TEOREMA 7 (Nagumo)

Seja $f:\Omega \to \mathbb{R}$ contínua e para um $t_0 \varepsilon I$ e todo $t \neq t_0$ se tem

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \leq \frac{1}{|t-t_0|} |x_1-x_2|$$

para todo (t,x_1), (t,x_2) interiores a Ω. Então $x' = f(t,x)$ possui uma única solução definida em uma vizinhança de t_0, passando por (t_0,x_0).

Demonstração:

De fato, sejam $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ duas soluções de $x'=f(t,x)$ passando por (t_0,x_0). Então,

$$|x_1(t)-x_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s)| ds, \quad t_0 \leq t \varepsilon I$$

ou

$$|x_1(t)-x_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \frac{1}{|s-t_0|} |x_1(s) - x_2(s)| ds$$

Daí resulta que a demonstração do teorema de Nagumo é uma consequência da seguinte proposição de Hille.

PROPOSIÇÃO 2

Se $g \in C(0,a)$, $g(0) = 0$, $g'(0)$ existe e $g'(0) = 0$, então

$$0 \leq g(t) \leq \int_0^t g(s) \frac{ds}{s}$$

implica $g = 0$.

Demonstração:

Seja $\varphi: [0,a] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(s) = \begin{cases} \dfrac{g(s)}{s} & \text{se } s \neq 0 \\ 0 & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

Sendo $\lim_{s \to 0} \varphi(s) = \lim_{s \to 0} \frac{g(s)}{s} = g'(0) = 0$, conclui-se que φ é contínua em $[0,a]$. Seja

$$F(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, \quad t \in [0,a].$$

Conclui-se que F' existe, $F(0) = 0$ e que

$$F'(t) = \varphi(t) = \frac{g(t)}{t} \text{ se } t \neq 0$$

Sendo, por hipótese,

$$g(t) \leq F(t) \text{ em } [0,a]$$

obtém-se

$$F'(t) = \frac{g(t)}{t} \leq \frac{F(t)}{t} \text{ em } (0,a]$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{F(t)}{t}\right] \leq 0 \text{ em } (0,a]$$

Esta última implica ser $\frac{F(t)}{t}$ decrescente em $(0,a]$ sendo $\lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{t} = F'(0) = \varphi(0) = 0$. Sendo $F \geq 0$, resulta que $F = 0$. Realmente, suponhamos que t seja um ponto qualquer de $[0,a]$ e ε tal que $0 < \varepsilon < t \leq a$. Sendo $\frac{F(t)}{t}$ decrescente, $F(t) \geq 0$, obtém-se $0 \leq \frac{F(t)}{t} \leq \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon}$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, resulta que $F(t) = 0$ para todo t em $[0,a]$, provando ser $g = 0$.

DEFINIÇÃO 1

Seja $w = w(z)$ uma função real positiva definida para todo real $u \geq 0$. Diz-se que w é uma função admissível, se ela fôr estritamente crescente, $w(0) = 0$ e

$$\int_\varepsilon^a \frac{dz}{w(z)} \to +\infty \text{ quando } \varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0.$$

TEOREMA 8 (Osgood)

Seja $f:\Omega \to \mathbb{R}$ contínua. Se

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2) \leq w(|x_1-x_2|)$$

para todo (t,x_1), (t,x_2) interior a Ω, t em uma vizinhança de t_0, sendo w uma função admissível, então $x' = f(t,x)$ possui uma única solução contínua passando por (t_0,x_0).

Demonstração:

Realmente, sejam x_1,x_2 duas soluções contínuas de $x' = f(t,x)$ passando por (t_0,x_0). Tem-se

$$|x_1(t)-x_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} w(|x_1(s)-x_2(s)|)ds$$

Assim, a demonstração do teorema de Osgood é uma consequência da seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 3

Seja $w = w(z)$ uma função admissível. Se $g \in C\,[0,a)$ fôr tal que

$$0 \leq g(t) \leq \int_0^t w[\,g(s)]\;ds \qquad 0 \leq t \leq a$$

então $g = 0$.

Demonstração:

De fato, suponhamos $g \neq 0$. Se $h: [0,a] \to R$ fôr definida por

$$h(t) = \max_{0 \leq s \leq t} g(s)$$

tem-se $g(t) \leq h(t)$ para cada $0 \leq t \leq T$. Existe $0 \leq t_1 \leq t$ tal que

$h(t) = g(t_1)$. Tem-se

$$g(t) \le h(t) = g(t_1) \le \int_0^{t_1} w[\, g(s)\,]ds \le \int_0^t w[\, g(s)]ds \le \int_0^t w[\, h(s)\,]ds$$

Então, desde que w é estritamente crescente, nós obtemos

$$w[h(t)] \le w\left[\int_0^t w[\, h(s)\,]ds\right]$$

Fazendo $\rho(s) = w\,[h(s)]$, obtém-se

$$\rho(t) \le w\,\left[\int_0^t \rho(s)ds\right]$$

Daí resulta, para $0 < \varepsilon < a$, que

$$\int_\varepsilon^a \frac{\rho(t)dt}{w\left[\int_0^t \rho(s)ds\right]} < a$$

Se fizermos $v(t) = \int_0^t \rho(s)ds$, segue-se que $v'(t) = \rho(t)$ e da última igualdade resulta que

$$\int_\varepsilon^a \frac{dv}{w[v]} \le a$$

o que é uma contradição, porque sendo w uma função admissível,esta integral é divergente quando $\varepsilon \to 0$.

§ 6. SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Neste parágrafo estudaremos as soluções analíticas da equação $x' = f(t,x)$. Restringir-nos-emos a origem $(0,0)$ do $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que $f:\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(0,0) \in \Omega$, seja analítica em $(0,0)$, isto é, podemos escrever

$$f(t,x) = \sum_{i,j=0} a_{ij}t^i x^j, \quad |t| < R, \quad |x| < R' \tag{15}$$

sendo $a_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial t^i \partial x^j}\right)_{\substack{t=o\\x=o}}$

A questão a resolver é a demonstração da existência e unicidade de uma função analítica $x = x(t)$, $|t| < T$, tal que

$$x'(t) = f(t,x(t)), \quad |t| < T, \quad x(0)=0 \tag{16}$$

O método a ser usado, devido a Cauchy, denomina-se método das funções majorantes, do qual faremos uma prévia descrição. Supõe-se que (1) possua uma solução da forma

$$x(t) = c_o + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots \tag{17}$$

sendo $c_n = \left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)_{t=o}$. Desta forma, os coeficientes de (17) podem ser determinados através dos coeficientes a_{ij} do desenvolvimento (15) de f em série de Taylor. De fato, obtém-se

$$\begin{aligned}
&C_o = x(0) = 0\\
&C_1 = x'(0) = f(0,0)\\
&2C_2 = x''(0) = f_t(0,0) + f_x(0,0)C_1\\
&2.3C_3 = x'''(0) = f_{tt}(0,0) + 2f_{tx}(0,0) + f_{xx}(0,0)C_1^2 + 2f_x(0,0)C_2\\
&- -
\end{aligned} \tag{18}$$

Portanto, as relações (18) nos permitem obter por um processo indutivo, os coeficientes c_n de (17). Surgem, naturalmente, as duas questões seguintes:

1. A série (17) assim obtida é convergente em alguma vizinhança da origem?
2. É esta série solução do sistema (16)?

Admitamos respondida afirmativamente a primeira questão. Substituindo x dado por (17), com os coeficientes calculados por (18), em (16), obteríamos $\varphi(t) = x'(t) - f(t,x(t))$, analítica em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}$ e aí nula juntamente com todas as derivadas. Desta forma, φ seria identicamente nula nesta vizinhança, resultando, daí, que (17) seria de fato solução de (16). Por conseguinte, resta-nos demonstrar a convergência de (17), o que será feito como método das funções majorantes, já mencionado anteriormente. Êle consiste em obter uma função analítica

$$F(t,x) = \sum_{i,j=o}^{\infty} A_{ij}\, t^i x^j$$

convergente em $|t| < r', |x| < \rho'$, com coeficientes não negativos e tais que

$$|a_{ij}| \leq A_{ij}\ , \quad i,j = 0,1,2,\ldots \tag{19}$$

Encontrada a função F, denominada a majorante de f, formula-se o problema análogo de encontrar a solução analítica do sistema

$$u' = F(t,u), \quad \text{sendo} \quad u(0) = 0 \tag{20}$$

O sucesso do método consiste em escolher a função majorante F de modo que a solução analítica de (20) seja fàcilmente encontrada. Uma vez determinada a solução analítica

$$u(t) = C_o + C_1 + C_2 t^2 + \ldots \tag{21}$$

convergente em $|t| < T'$, observando que os C_n são polinômios em A_{ij} com coeficientes positivos, resulta de (19) que (21) é uma majorante de (17). De fato, sendo $C_n = P(A_{ij})$ e $c_n = p(a_{ij})$, obtém-se $|c_n| = |p(a_{ij})| \leq P(A_{ij}) = C_n$, para todo n. Destas considerações, conclui-se que a questão principal é a existência da função majorante, o que faremos a seguir.

Sendo

$$f(t,x) = \sum_{i,j=o}^{\infty} a_{ij} t^i x^j, \quad |t| < R,\ |x| < R'$$

tomando (r,s) tais que $0 < r < R$, $0 < s < R'$, resulta que $\sum_{i,j=o}^{\infty} a_{ij}\, r^i\, s^j$ é convergente. Logo existe $M > 0$ tal que $|a_{ij}\, r^i\, s^j| < M$, isto é,

$$|a_{ij}| \leq \frac{M}{r^i s^j}, \quad i,j = 0,1,2, \ldots$$

Consequentemente, se $|t| < r$, $|x| < s$, a série $\sum_{i,j=o}^{\infty} a_{ij}\, t^i\, x^j$ é majorada pela série geométrica dupla

$$\sum_{i,j=o}^{\infty} M(\frac{t}{r})^i\, (\frac{x}{s})^j$$

cuja soma é

$$F(t,x) = \frac{M}{(1- \frac{t}{r})(1- \frac{x}{r})} \tag{22}$$

Daí resulta que resta-nos demonstrar, apenas, a existência de solução analítica para o sistema

$$u'(t) = F(t,u), \quad u(0) = 0,$$

isto é, para o sistema

$$\frac{du}{dt} = \frac{M}{(1- \frac{t}{r})\ (1- \frac{u}{r})}, \quad u(0) = 0$$

As variáveis se separam nesta última equação, e sua integral é

$$\frac{u^2}{r^2} - 2\ \frac{u}{r} - 2M\frac{r}{s}\ \log\ (1- \frac{x}{s}) = 0$$

Tomando o valor positivo do radical obtém-se

$$u(t) = s\left[1 - \sqrt{1 - 2M\frac{r}{s}\ \log(1- \frac{t}{r})}\right] \tag{23}$$

Vejamos que u dada por (23) é analítica. De fato, $1-\frac{t}{r} > 0$ pois $|t| < r$. Assim, a raiz que aparece em (23) é representável em série de potências de t, convergente para $|t| < \rho$, onde $\rho = r(1-e^{-\frac{s}{2Mr}})$ e $u(0) = u(\rho) = 0$. Portanto, para $|t| < \rho$, o sistema (22) possui uma solução analítica que majora (17). Assim (17) é convergente para $|t| < \rho$ e representa uma solução de (16) com $T = \rho$. Note que $|x(t)| < s$ para tais t. De fato, se $0 < \rho_1 < \rho$, sendo $|x^{(n)}(0)| \leq u^{(n)}(0)$, resulta que

$$|u(t)| \leq u'(0)\rho_1 + \frac{u''(0)}{2!}\rho_1^2 + \ldots = u(\rho_1) =$$

$$= s\left[1 + \sqrt{1 + 2M\frac{r}{s}\log\left(1 - \frac{\rho_1}{r}\right)}\right] < s$$

para $t < \rho_1 < \rho = r(1-e^{-\frac{s}{2Mr}})$.

* * *

REFERENCIAS

1. J.A. Goldstein - Uniqueness for non linear Cauchy Problems in Banach Spaces (a aparecer)

2. L.A. Medeiros - On non linear differential equations in Hilbert Spaces - A.M. Monthly, Vol 76, nº 9 (1969).

* * *