MONOGRAFIAS

XXX

APROXIMAÇÃO PONDERADA PARA FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

por

Guido Zapata

COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro - GB

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71 - Botafogo - ZC-82

Rio de Janeiro, Brasil

1971

À Mariazinha

AGRADECIMENTOS

Desejamos agradecer aqui ao Professor Leopoldo Nachbin por nos haver proposto o tema desta tese, pela sua orientação na realização da mesma e pelo estímulo constante que nos tem proporcionado.

Agradecemos aos colegas Jorge Alberto Barroso e Roberto Baldino pelo necessário encorajamento.

Este trabalho foi realizado enquanto o autor era Assistente do Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

Registramos o auxílio que recebemos do Banco Nacional do Desenvolvimento Econômico e do Conselho Nacional de Pesquisas.

Finalmente, não podemos deixar de agradecer à Direção do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas por incluir êsse texto na Coleção de Monografias do C.B.P.F.

Guido Ivan Zapata Ferreira

Rio de Janeiro, Maio de 1971

Í N D I C E

* * *

APRESENTAÇÃO

O objetivo desta tese é estudar alguns aspectos da teoria da aproximação em espaços ponderados de funções m-contínuamente diferenciáveis. Em particular consideramos o problema de Bernstein, cuja importância foi ressaltada em [7].

Êste trabalho divide-se em quatro capítulos. Destacamos os pontos principais.

No capítulo I, introduzimos a notação e terminologia utilizados nos capítulos restantes.

No capítulo II, introduzimos a noção de espaço ponderado de funções m-contínuamente diferenciáveis num aberto do espaço euclidiano e a exemplificamos através de espaços importantes da análise. Obtivemos alguns resultados relacionados com propriedades algébrico-topológicas suplementares, que mostram de passagem que a teoria de tais espaços não é uma mera generalização da noção considerada em [9] para o caso contínuo, antes porém, tem características próprias. Obtivemos alguns resultados sôbre aproximação por funções de suporte compacto e os métodos empregados fazem supor que a questão da regularidade dos pesos i.e. quando o conjunto das funções de suporte compacto é denso no espaço considerado, não tem solução simples. Ainda no capítulo II, consideramos a noção de produto tensorial de espaços ponderados e obtivemos um teorema análogo ao de Dieudonné para densidade em produtos tensoriais. Terminamos o capítulo, caracterizando o dual topológico dos espaços ponderados de funções m-contínuamente diferenciáveis.

No capítulo III, estudamos o problema de Bernstein e junto com uma solução geral, obtivemos condições suficientes para que um peso de ordem m seja fundamental, notadamente o critério quase-analítico e em particular o critério (D) quase analítico.

No capítulo IV estudamos o problema de aproximação ponderada e damos uma solução geral. Em seguida estudamos um caso particular de tal problema, a saber o problema de aproximação ponderada de Weierstrass no espírito de [6] e obtivemos o teorema 4.2 que embora bastante geral tem o inconveniente de ter uma hipótese de separação muito forte. Além disso, mostramos o carater enumerável dos espaços ponderados que correspondem a sistemas de pesos regulares.

Finalmente cabe acrescentar que existe tôda uma série de problemas que a nosso ver são importantes e que farão o objeto de um estudo posterior.

* * *

CAPÍTULO I

NOTAÇÕES E PRELIMINARES

Neste capítulo faremos uma descrição das notações principais usadas no presente trabalho e embora algumas delas sejam de uso comum na literatura matemática, as incluímos por motivo de completamento. Em geral, a notação e terminologia adotadas seguem às utilizadas em [1], [3], [9], [14].

$\mathbb{K}$ indicará tanto o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais como o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. $\mathbb{R}_+$ indicará o conjunto dos reais $t \geq 0$. $\mathbb{N}$ indicará o conjunto dos inteiros positivos $0, 1, \ldots$ e poremos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$. m indicará tanto um elemento de $\mathbb{N}$ como $+\infty$. Ω indicará uma parte aberta não vazia de $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$ Φ indicará o conjunto vazio.

Salvo menção explícita as funções são complexas. Sendo f uma função sobre Ω indicaremos por Sup(f) o suporte de f, se Ω' é uma parte de Ω e f é limitada aí, indicaremos por $\|f\|_{\Omega'}$ o número $\sup\{|f(x)|, x \in \Omega'\}$ e escreveremos $\|f\|$ quando $\Omega' = \Omega$. Além disso, se $\mathcal{F}$ é um conjunto de funções sôbre Ω escreveremos $\mathcal{F} > 0$ sôbre Ω se para todo $x \in \Omega$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) > 0$.

<u>DEFINIÇÃO 1.1</u> - $\mathcal{F}_\infty(\Omega)$ denotará o conjunto das funções f sôbre Ω ditas nulas ao infinito e caracterizadas pelo fato de que o conjunto $\{x \in \Omega, |f(x)| \geq \varepsilon\}$ seja relativamente compacto em Ω para todo $\varepsilon > 0$.

<u>DEFINIÇÃO 1.2</u> - $\mathcal{U}(\Omega; R_+)$ denotará o conjunto das funções positivas e semi-contínuas superiormente (s.c.s.) em Ω, ditas pesos sôbre Ω. O conjunto dos pesos que são funções características de compactos de Ω(resp.

funções contínuas em Ω) será denotado por $\chi_C(\Omega)$ (resp. $C(\Omega; R_+)$.

<u>DEFINIÇÃO 1.3</u> - $\mathcal{N}[\Omega]$ denotará a coleção dos conjuntos dirigidos de pesos sôbre Ω i.e. U pertence à $\mathcal{N}[\Omega]$ se for uma parte não vazia de $\mathcal{U}(\Omega;R_+)$ e se dados u', $u'' \varepsilon U$ existem $\lambda > 0$ e $u \varepsilon U$ tais que $u' \leqslant \lambda u$, $u'' \varepsilon \lambda u$. Definimos uma relação de ordem parcial em $\mathcal{N}[\Omega]$ pondo $U_1 \leqslant U_2$ ou $U_2 \geqslant U_1$ se para todo $u_1 \varepsilon U_1$ existem $\lambda > 0$ e $u_2 \varepsilon U_2$ tais que $u_1 \leqslant \lambda u_2$.

<u>OBSERVAÇÃO 1.1</u> - Sendo U um conjunto dirigido de pesos sôbre Ω, denotemos por $\hat{U}$ o conjunto dos pesos u' sôbre Ω tais que existem $\lambda > 0$ e $u \varepsilon U$ de modo que $u' \leqslant \lambda u$. Então $\hat{U} \varepsilon \mathcal{N}[\Omega]$, $\hat{U} \leqslant U \leqslant \hat{U}$ e para todo $U' \varepsilon \mathcal{N}[\Omega]$ tal que $U' \leqslant U$ temos $U' \subset \hat{U}$.

<u>OBSERVAÇÃO 1.2</u> - É imediato que sendo U_1, U_2 conjuntos dirigidos de pesos sôbre Ω, $U_1 \cdot U_2$ também o será.

<u>OBSERVAÇÃO 1.3</u> - Indicando por $N(\Omega)$ o conjunto das funções u sôbre Ω tais que $|u|$ é s.c.s., temos que $N(\Omega)$ é fechado sob a multiplicação definida pontualmente. Além disso, $N(\Omega) \cap \mathcal{F}_\infty(\Omega)$ é constituido de funções limitadas u sendo que $\|u\|$ é atingido em Ω.

<u>DEFINIÇÃO 1.4</u> - Sendo U um conjunto dirigido de pesos sôbre Ω e $B \subset U$, $B \neq \phi$, diz-se que B é uma base de U no sentido dos pesos se são verificadas as seguintes condições:

(1) Para todo $u \varepsilon U$ existem $B' \subset B$ finito e números $\lambda_{b'} > 0$, $b' \varepsilon B'$, tais que $u \leqslant \sum_{b' \varepsilon B'} \lambda_{b'} \cdot b'$, fato que denotaremos por $u \leqslant [B']$.

(2) Sendo $B' \subset B$ finito e não vazio então $b' \varepsilon B'$ acarreta $b' \nleqslant [B' - \{b'\}]$, onde $\nleqslant$ denota a negação de $\leqslant$.

<u>OBSERVAÇÃO 1.4</u> - Pelo princípio maximal segue que todo conjunto dirigido de pesos U saturado no sentido $U = \hat{U}$, tem uma base no sentido dos pesos. É imediato que sendo B uma base de U no sentido dos pesos nenhum sub-conjunto finito de B, não reduzido a um elemento, pode ser dirigido, entretanto a coleção $\sigma(B)$ das somas finitas de elementos de B é dirigida e $U \leqslant \sigma(B) \leqslant U$ em particular se B é uma base enumerável de U então qualquer outra base é enumerável.

DEFINIÇÃO 1.5 - $\mathbb{N}^n_m$ denotará o conjunto dos multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m$, em particular $\mathbb{N}^1_m = \mathbb{N}_m$ é o conjunto dos inteiros positivos k tais que $k \leq m$. Denotaremos a n-upla $(0, \dots, 0)$ por 0. Em $\mathbb{N}^n_m$ definimos uma relação de ordem parcial pondo $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_i \leq \beta_i (i = 1, \dots, n)$.

DEFINIÇÃO 1.6 - $\mathcal{N}^m[\Omega]$ denotará a coleção das famílias $V: \mathbb{N}^n_m \longrightarrow \mathcal{N}[\Omega]$ ditas sistemas de pesos de ordem m sôbre Ω.

Sendo $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ indicaremos por I_V o conjunto $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^n_m} \{\alpha\} \times V_\alpha$ e sendo $k \in \mathbb{N}_m$ indicaremos por $V(k)$ a restrição de V à $\mathbb{N}^n_k$ i.e. $V(k) \in \mathcal{N}^k[\Omega]$. Além disso, indicaremos por $\hat{V}$ a família $W \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ tal que $W_\alpha = \hat{V}_\alpha$ para todo α (vide Observação 1.1).

Sendo $V, W \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ escreveremos $W \leq V$ quando $W_\alpha \leq V_\alpha$ para todo α. Se $W \leq V$ e $V \leq W$ escreveremos $V \approx W$, em particular $V \approx \hat{V}$ para todo $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ (vide loc. cit.).

OBSERVAÇÃO 1.5 - Considerando as ordens parciais sôbre $\mathbb{N}^n_m$ e $\mathcal{N}[\Omega]$ introduzidas nas Definições 1.5 e 1.3 respectivamente, faz sentido dizer que $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ é monótono. Em particular, $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ é decrescente se $V_\alpha \leq V_\beta$ para $\beta \leq \alpha$.

DEFINIÇÃO 1.7 - $\mathcal{U}^m(\Omega, R_+)$ denotará a coleção das famílias $v: \mathbb{N}^n_m \longrightarrow \mathcal{U}(\Omega; R_+)$, ditas pesos de ordem m sôbre Ω.

Sendo $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ a notação $v \in V$ significará que $v \in \mathcal{U}^m(\Omega, R_+)$ e $v_\alpha \in V_\alpha$ para todo α.

OBSERVAÇÃO 1.6 - Às vêzes será útil considerar $\mathcal{U}^m(\Omega, R_+)$ como um subconjunto de $\mathcal{N}^m[\Omega]$ através da identificação $v \in \mathcal{U}^m(\Omega, R_+) \longrightarrow \{v\} \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ onde $\{v\}_\alpha = \{v_\alpha\}$ para todo α e não acarretará confusão o fato de escrevermos apenas v em lugar de $\{v\}$.

OBSERVAÇÃO 1.7 - Através da identificação natural podemos escrever $\mathcal{N}^0[\Omega] = \mathcal{N}[\Omega]$ e $\mathcal{U}^0(\Omega, R_+) = \mathcal{U}(\Omega, R_+)$.

DEFINIÇÃO 1.8 - $\mathcal{E}^m(\Omega, K)$ denotará a álgebra comutativa com unidade das funções sôbre Ω com valores em $\mathbb{K}$ que são contínuas e tais que, no caso $m \geq 1$, têm derivadas parciais de ordem $\leq m$ contínuas. Usualmente denotaremos $\mathcal{E}^m(\Omega; K)$ simplesmente por $\mathcal{E}^m(\Omega)$ e chamaremos as funções pertencentes a $\mathcal{E}^m(\Omega)$ de funções m-continuamente diferenciáveis.

Sendo $f \in \mathcal{E}^m(\Omega)$, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{E}^m(\Omega)$, $m \geq 1$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n_m$ $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n) \in \mathbb{R}^n$ poremos $\partial^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1}\ldots(\partial x_n)^{\alpha_n}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\partial^\alpha \mathcal{Y} = \{\partial^\alpha f,\ f \in \mathcal{Y}\}$, $\dfrac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \tau} = \{\dfrac{\partial f}{\partial \tau},\ f \in \mathcal{Y}\}$.

<u>OBSERVAÇÃO 1.8</u> - Usaremos frequentemente e sem menção prévia a fórmula de Leibnitz do cálculo diferencial: Sendo $f, g \in \mathcal{E}^{|\alpha|}(\Omega)$ então $\partial^\alpha(f.g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \cdot \partial^\beta g$ onde $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\ldots\binom{\alpha_n}{\beta_n}$, $\binom{\alpha_i}{\beta_i} = \dfrac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i-\beta_i)!}$ $i = 1,\ldots n$.

<u>DEFINIÇÃO 1.9</u> - $\mathcal{D}^m(\Omega)$ denotará a sub-álgebra de $\mathcal{E}^m(\Omega)$ das funções de suporte compacto e escreveremos $K(\Omega)$ (respectivamente $\mathcal{D}(\Omega)$) em lugar de $\mathcal{D}^m(\Omega)$ quando $m = 0$ (respectivamente $m = +\infty$).

<u>DEFINIÇÃO 1.10</u> - $\mathcal{B}^m(\Omega)$ denotará a sub-álgebra de $\mathcal{E}^m(\Omega)$ das funções que são limitadas assim como tôdas suas derivadas de ordem $\leq m$.

<u>DEFINIÇÃO 1.11</u> - $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ denotará a álgebra dos polinômios sôbre $\mathbb{R}^n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$. Usualmente denotaremos $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ simplesmente por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

<u>TEOREMA 1.1</u> - (WEIERSTRASS). Sendo $m \in N$, $f \in \mathcal{E}^m(\mathbb{R}^n)$, $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\varepsilon > 0$, existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha(f-P)\|_K < \varepsilon$.

Admitiremos, aqui, êsse teorema de aproximação, sem demonstrá-lo. Êle será empregado no estabelecimento de teoremas mais gerais.

CAPÍTULO II

ESPAÇOS PONDERADOS DE FUNÇÕES m- CONTINUAMENTE DIFERENCIÁVEIS

§ 1. GENERALIDADES

Seja V um sistema de pesos de ordem m sôbre Ω. (vide Definição 1.6).

DEFINIÇÃO 2.1 - Indicaremos por $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega, \mathbb{K})$ ou simplesmente por $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ o sub-espaço vetorial de $\mathcal{E}^m(\Omega, \mathbb{K})$ formado pelas funções f tais que $V_\alpha \cdot \partial^\alpha f$ é um conjunto de funções nulas ao infinito para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Cada $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$ determina uma semi-norma $f \longmapsto p_{(\alpha, v_\alpha)}(f) = \| v_\alpha \cdot \partial^\alpha f \|$ sôbre $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. A topologia natural em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ que indicaremos por ω_V, é definida pela família de semi-normas $\{p_{(\alpha, v_\alpha)}\}_{(\alpha, v_\alpha) \in I_V}$. Diz-se que o espaço localmente convexo $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ definido acima é um espaço ponderado de funções m-contínuamente diferenciáveis sôbre Ω. Quando $m = 0$ ou $m = + \infty$ escreveremos, respectivamente $C V_\infty(\Omega)$ ou $\mathcal{E} V_\infty(\Omega)$ em lugar de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. Além disso, no contexto dos espaços ponderados nos referiremos ocasionalmente ao caso contínuo ou diferenciável segundo seja $m = 0$ ou $m \geq 1$.

OBSERVAÇÃO 2.1 - Se $k \in \mathbb{N}_m$, cada $v \in V(k)$ define uma semi-norma contínua $p_v = \sum_{|\alpha| \leq k} p_{(\alpha, v_\alpha)}$ sôbre $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ e ω_V fica determinada também pela família de semi-normas $\{p_v\}$ $v \in V(k)$, $k \in \mathbb{N}_m$. Ora, tal família de semi-normas é dirigido pois cada V_α é dirigido, logo segue que uma base de vizinhanças da origem é formada pelos conjuntos $\{B^m_{v,\lambda}\}$ $v \in V(k)$, $k \in \mathbb{N}_m$, $\lambda > 0$ onde $B^m_{v,\lambda} = \{f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega), \ p_v(f) \leq \lambda\}$.

<u>OBSERVAÇÃO 2.2</u> - Se $m = +\infty$, então para todo $k, j \in \mathbb{N}$, $k \geq j$ temos $\mathcal{E}V_\infty(\Omega) \subset \mathcal{E}^k V(k)_\infty(\Omega) \subset \mathcal{E}^j V(j)_\infty(\Omega)$ e as inclusões são contínuas. Além disso ω_V é a menos fina das topologias em $\mathcal{E}V_\infty(\Omega)$ que tornam contínuas as inclusões $\mathcal{E}V_\infty(\Omega) \subset \mathcal{E}^k V(k)_\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$.

<u>OBSERVAÇÃO 2.3</u> - Resulta da Definição 2.1 e da Observação 1.7 que $\partial^\alpha \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é um sub-conjunto de $C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, sendo contínua a aplicação linear $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longrightarrow \partial^\alpha f \in C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ e ainda, ω_V é a menos fina das topologias em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ que tornam contínuas as aplicações ∂^α, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Em particular se E é um espaço vetorial topológico e $L: E \longrightarrow \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ uma aplicação linear, então L é contínua se e só se $\partial^\alpha \circ L$ é contínua para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$.

<u>OBSERVAÇÃO 2.4</u> - No caso de abertos dos espaços euclidianos, os espaços $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ constituem uma generalização dos espaços ponderados de funções contínuas considerados por Nachbin em [9]. Reciprocamente, a Observação 2.3 mostra que $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é um limite projetivo de espaços ponderados de funções contínuas. Então poderíamos reformular a Definição 2.1 do seguinte modo: "Se $V = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n_m}$ é uma família de conjuntos dirigidos de pesos, definimos o espaço $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ como sendo o sub-espaço vetorial das $f \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ tais que $\partial^\alpha f \in C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, munido da topologia projetiva (topologia inicial) em relação à família $\{C(V_\alpha)_\infty(\Omega), \partial^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n_m}$.

<u>OBSERVAÇÃO 2.5</u> - Consideremos a seguinte condição sôbre V: Existe uma parte densa $\Omega' \subset \Omega$ tal que $V_o > 0$ sôbre Ω'. É fácil verificar que tal condição é suficiente para que ω_V seja uma topologia de Hausdorff, sendo também necessária quando V é decrescente (vide Observação 1.5).

<u>OBSERVAÇÃO 2.6</u> - Se $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, $x \in \Omega$ indiquemos por $\hat{\delta}^{(\alpha)}_x$ a aplicação $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longrightarrow \partial^\alpha f(x) \in \mathbb{K}$. Então $\hat{\delta}^{(\alpha)}_x$ é contínua para todo $x \in \Omega$

tal que existe $v_\alpha \in V_\alpha$ com $v_\alpha(x) \neq 0$ pois em tal caso $|\hat{\delta}_x^{(\alpha)}(f)| \leq \frac{1}{V_\alpha(x)} \cdot$
$\cdot\, P_{(\alpha,\, v_\alpha)}(f)$ para $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. Em particular, $\hat{\delta}_x^{(\alpha)}$ é contínua para todo $x \in \Omega$ se $V_\alpha > 0$ sôbre Ω.

TEOREMA 2.1 - (a) A aplicação linear $(\partial^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_m^n}: f \longrightarrow (\partial^\alpha f)_{\alpha \in \mathbb{N}_m^n}$ é um isomorfismo vetorial topológico de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ em $\prod_{\alpha \in \mathbb{N}_m^n} C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$.

(b) A aplicação Λ: $(g,h) \longrightarrow g + ih$ é um homeomorfismo de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega;\ \mathbb{R}) \times \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega,\ \mathbb{R})$ sôbre $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega;\ \mathbb{C})$.

(c) $\mathcal{D}^m(\Omega)$ é um subconjunto de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ e a inclusão é contínua quando $\mathcal{D}^m(\Omega)$ está munido da topologia limite indutivo.

Demonstração: (a) Imediata a partir da Observação 2.3 e da Proposição 19, pág. 88 de [11].

(b) Como $\mathcal{E}^m(\Omega;\ \mathbb{C}) = \mathcal{E}^m(\Omega;\ \mathbb{R}) + i\,\mathcal{E}^m(\Omega;\ \mathbb{R})$

e pelo fato que $u \in \mathcal{Y}_\infty(\Omega)$ se e só se $Re(u)$, $Im(u) \in \mathcal{Y}_\infty(\Omega)$, segue que $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega;\ \mathbb{C}) = \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega;\ \mathbb{R}) + i\,\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega;\ \mathbb{R})$ como conjuntos, logo a aplicação Λ é sôbre e òbviamente é biunívoca. Além disso, se $(\alpha,\, v_\alpha) \in I_V$ e $g,\, h \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega;\ \mathbb{R})$ temos $\|v_\alpha\, \partial^\alpha \Lambda(g,h)\| \leq \|v_\alpha\, \partial^\alpha g\| + \|v_\alpha\, \partial^\alpha h\| \leq$
$\leq \sqrt{2}\,\|v_\alpha\, \partial^\alpha \Lambda(g,\, h)\|$ donde segue que Λ é bicontínua.

(c) A inclusão é evidente. Para provar a continuidade é suficiente, pela Observação 2.3, verificar que a aplicação $f \in \mathcal{D}^m(\Omega) \xrightarrow{I_\alpha} \partial^\alpha f \in C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ é contínua para todo $\alpha \in \mathbb{N}_m^n$. Ora, I_α é composta das aplicações $f \in \mathcal{D}^m(\Omega) \longrightarrow \partial^\alpha f \in K(\Omega)$ e
$g \in \mathcal{K}(\Omega) \longrightarrow g \in C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ sendo a primeira delas contínua, logo bastará verificar que a segunda aplicação é contínua. Fixado $K \subset \Omega$ compacto, seja $\mathcal{K}_K(\Omega) = \{g \in \mathcal{K}(\Omega),\ Sup(g) \subset K\}$ munido da topologia da convergência uniforme. Ora, $\|v_\alpha\, g\| \leq |v_\alpha|_K \cdot \|g\|$ para todo $v_\alpha \in V_\alpha$, $g \in \mathcal{K}_K(\Omega)$, logo

a inclusão $\mathcal{K}_K(\Omega) \subset C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ é contínua para todo $K \subset \Omega$ compacto e daí segue que a inclusão $\mathcal{K}(\Omega) \subset C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ é contínua sendo $\mathcal{K}(\Omega)$ o limite indutivo dos espaços $\mathcal{K}_K(\Omega)$, $K \subset \Omega$ compacto. Q.e.d.

<u>OBSERVAÇÃO 2.7</u> - A parte (a) do teorema anterior nos permite reduzir às vezes uma questão sôbre $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ a uma questão sôbre $C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$. Por exemplo, se T pertence ao dual topológico de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$, onde m é finito, seja $S = T \circ [(\partial^\alpha)_{\alpha \in N^n_m}]^{-1}$. Então S é um funcional linear contínuo sôbre um sub-espaço de $\prod_{\alpha \in N^n_m} C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$, logo pelo Teorema de Hahn-Banach existe uma extensão linear e contínua $\tilde{S}$ de S a $\prod_{\alpha \in N^n_m} C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$. Se i_β denota a aplicação $f \in C(V_\beta)_\infty(\Omega) \longmapsto (\delta_{\alpha,\beta} \cdot f)_{\alpha \in N^n_m} \in \prod_{\alpha \in N^n_m} C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ onde $\delta_{\alpha,\beta} = 1$ se $\beta = \alpha$, $\delta_{\alpha,\beta} = 0$ se $\beta \neq \alpha$ temos $\tilde{S}((f_\alpha)_{\alpha \in N^n_m}) =$
$= \sum_{\alpha \in N^n_m} \tilde{S} \cdot i_\alpha(f_\alpha)$ para todo $(f_\alpha)_{\alpha \in N^n_m} \in \prod_{\alpha \in N^n_m} C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ em particular $T(f) =$
$= \sum_{\alpha \in N^n_m} \tilde{S} \circ i_\alpha(\partial^\alpha f)$ para $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. Ora, $\tilde{S} \circ i_\alpha$ pertence ao dual topológico de $C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ logo conhecendo êste para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, é possível caracterizar o dual topológico de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$.

Vejamos alguns exemplos de espaços ponderados de funções m-continuamente diferenciáveis sôbre Ω.

<u>EXEMPLO 1</u> - Se V_α denota a coleção das funções características dos compactos de Ω, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ então $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é o espaço $\mathcal{E}^m(\Omega)$ munido da topologia da convergência uniforme sôbre as partes compactas da função e de suas derivadas de ordem $\leq m$.

<u>EXEMPLO 2</u> - Fixado $u \in \mathcal{U}(\Omega; R_+)$, seja $V_\alpha = \{(1+u)^k, k \in \mathbb{N}\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Denotaremos o espaço ponderado $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ assim obtido por $\mathcal{B}^m_u(\Omega)$ e observamos que $f \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ pertence a $\mathcal{B}^m_u(\Omega)$ se e sòmente se $u^k \cdot \partial^\alpha f$ é uma função nula ao infinito para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, $k \in \mathbb{N}$. Em párticular, $\mathcal{B}^m_u(\Omega)$ é um subconjunto de $\mathcal{Y}_\infty(\Omega)$. Se u denota a função nula obtemos o espaço $\mathcal{B}^m_o(\Omega)$ munido da topologia da convergência uniforme da função e de suas derivadas

de ordem $\leq m$. Também, se $\Omega = \mathbb{R}^n$ e u denota a função $(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ obtemos o espaço $\mathcal{S}^m(\mathbb{R}^n)$ das funções ràpidamente decrescentes assim como suas derivadas de ordem $\leq m$. (Vide Exemplos 13 e 16, páginas 90-91 de [3]).

EXEMPLO 3. Fixado $u \in C(\Omega; \mathbb{R}_+)$, u estritamente positiva e tal que $1/u \in \mathcal{Y}_\infty(\Omega)$, seja V_α o conjunto das somas $\sum_{k\in J} u^{-1/k}$ onde J varia na coleção de partes finitas de $\mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Indicaremos por $\mathrm{Exp}^m_u(\Omega)$ o espaço ponderado assim obtido e observamos que $f \in \mathcal{E}^m(\Omega)$ pertence à $\mathrm{Exp}^m_u(\Omega)$ se e sòmente se $|\partial^\alpha f| \leq$ (constante) $u^{1/k}$ para $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, $k \in \mathbb{N}^*$, Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ e u denota a função $x \longmapsto \exp(\|x\|)$, onde $\| \ \|$ indica a norma euclidiana usual, representaremos $\mathrm{Exp}^m_u(\Omega)$ por $\mathrm{Exp}^m(\mathbb{R}^n)$.

EXEMPLO 4 - Seja V_α o conjunto das funções contínuas sôbre Ω, positivas e nulas ao infinito, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Então $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) = \mathcal{B}^m(\Omega)$ como conjuntos. De fato, sendo imediata a inclusão $\mathcal{B}^m(\Omega) \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$, vamos provar a inclusão contrária. Ora, $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ acarretam $V_\alpha \cdot \partial^\alpha f \subset \mathcal{Y}_\infty(\Omega)$ com $\partial^\alpha f$ contínua, então $\partial^\alpha f$ é limitada pelo Lema 4 página 97 de [2], logo $f \in \mathcal{B}^m(\Omega)$. Quando $m = 0$ obtemos o espaço $C V_\infty(\Omega)$ das funções contínuas e limitadas sôbre Ω munido da topologia estrita (loc. cit.) então, por analogia, dir-se-á que ω_V é a topologia estrita de ordem m sôbre $\mathcal{B}^m(\Omega)$ e denotaremos o espaço ponderado $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ definido acima por $\mathcal{B}^m(\Omega)$.

EXEMPLO 5 - Seja V_α o conjunto $C(\Omega; \mathbb{R}_+)$ das funções contínuas e positivas sôbre Ω, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Então $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) = \mathcal{D}^m(\Omega)$ como conjuntos. De fato, visto que $\mathcal{D}^m(\Omega) \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$, basta provar que $C(V_o)_\infty(\Omega)$ é um subconjunto de $K(\Omega)$ pois em tal caso viria $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \subset C(V_o)_\infty(\Omega) \cap \mathcal{E}^m(\Omega) \subset \mathcal{D}^m(\Omega)$. Suponhamos exista $f \in C(V_o)_\infty(\Omega)$ que não tem suporte compacto, f positiva (tomando $|f|$ se for preciso). Como a função constante 1 pertence a V_o, segue que f é nula ao infinito. Então pelo método de recorrência prova-se fàcilmente que existem compactos K_i e pontos x_i, $i \in N$, tais que $\bigcup_{i\geq 1} K_i = \Omega$, $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$, $x_i \in \overset{\circ}{K}_i - K_{i-1}$ $(K_{-1} = \phi)$, $0 < f(x_{i+1}) \leq f(x_i)$ para $i \in N$. Seja $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma partição contínua da unidade sôbre Ω subordinada à cobertura $(\mathring{K}_i - K_{i-2})_{i\in N}$, onde $K_{-2} = \emptyset$. Se $\phi = \sum_{i\geq 0} f(x_i)\phi_i$ então $\phi > 0$ sôbre Ω e $\phi(x_i) \leq f(x_i)$, $i\in N$. Como $v = 1/(\phi+f) \in V_o$ e o conjunto $\mathcal{K}(\Omega)$ é denso em $\mathcal{C}(V_o)_\infty(\Omega)$ pela proposição 2, pág. 64 de [9], existe $g \in \mathcal{K}(\Omega)$ tal que $\|v(f-g)\| < 1/4$. Em particular $f(x_i)/(\phi(x_i) + f(x_i)) < 1/4$ para os $i \in \mathbb{N}$ tais que $x_i \notin Sup(g)$, entretanto $f(x_i)/(\phi(x_i)\ f(x_i)) \geq 1/2$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Temos assim uma contradição que resultou de supor a existência de $f \in C(V\ )_\infty(\Omega)$ sem suporte compacto, logo $C(V_o)_\infty\ (\Omega) \subset \mathcal{K}(\Omega)$.

Pelo Teorema 2.1 (c) temos que ω_v é menos fina que a topologia limite indutivo. Vamos provar que elas coincidem quando m é finito. Então seja 0 uma vizinhança da origem na topologia limite indutivo, podemos supor que 0 é convexa e equilibrada; fixemos uma sequência de compactos $(K_i)_{i\in N}$ tais que $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$ $i \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i\geq 1} K_i = \Omega$ e uma partição da unidade $(\phi_i)_{i\in N}$ de classe C^∞ subordinada à cobertura $(\mathring{K}_{i+1} - K_{i-1})_{i\in N}$ $(K_{-1} = \emptyset)$. Ora é válida a relação $f = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{2^{i+1}} (2^{i+1}\ \phi_i\ f)$ para todo $f \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ e como a soma anterior é de fato finita, para provarmos que algum $f \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ pertence à 0 basta verificar que $2^{i+1}\ \phi_i\ f \in 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, visto ser 0 convexo e equilibrado. Se $K \subset \Omega$ é compacto indiquemos por $\mathcal{D}^m_K(\Omega)$ o conjunto das $f \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ de suporte contido em K. Então para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $0_i = \{f \in \mathcal{D}^m_{K_i}(\Omega),\ \max_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha f\| \leq \varepsilon_i\} \subset 0 \cap \mathcal{D}^m_{K_i}(\Omega)$ e aplicando a fórmula de Leibnitz à $\partial^\alpha(\phi_i f)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, encontra-se uma constante $\lambda_i > 0$ tal que $\|\partial^\alpha(2^{i+1}\ \phi_i\ f)\| \leq \lambda_i \max_{|\beta|\leq m} \|\partial^\beta f\|_{K_{i+1}-K_{i-1}}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, $i \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{D}^m(\Omega)$. Definindo $\delta_o = \varepsilon_o/\lambda_o$, $\delta_i = \min(\delta_{i-1}, \varepsilon_i/\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ e fazendo $\phi = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{\delta_{i+1}} \phi_i$ verifica-se fàcilmente que $2^{i+1}\ \phi_i\ B_{v,1} \subset 0_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, onde $v \in V$ é definido por $v_\alpha = \phi\varphi$ $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ (vide Observação 2.1). Daí vem $B^m_{v,1} \subset 0$, provando assim que ω_v é mais fina que a topologia limite indutivo.

Pela Observação 2.2 segue que $\mathcal{E}V_\infty(\Omega) = \mathcal{D}^F(\Omega)$ onde $\mathcal{D}^F(\Omega)$ indica o espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ munido da topologia menos fina que torna contínuas as inclusões

$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Logo pela Proposição 2, página 339 de [3] para $m = +\infty$, ω_V é estritamente menos fina que a topologia limite indutivo.

TEOREMA 2.2 - Com as notações da Definição 1.6, se $V, W \in \mathcal{K}^m[\Omega]$ são tais que $W \leqslant V$ então:

(a) $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \subset \mathcal{E}^m W_\infty(\Omega)$ continuamente. Em particular $V \approx W$ acarreta $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) = \mathcal{E}^m W_\infty(\Omega)$ como espaços vetoriais topológicos.

(b) $W_\alpha > 0$ sôbre Ω para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ e $\mathcal{E}^m W_\infty(\Omega)$ completo acarretam $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ completo.

Demonstração: (a) Basta provar $C(V_\alpha)_\infty(\Omega) \subset C(W_\alpha)_\infty(\Omega)$ continuamente para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, mas isso é imediato pois $W_\alpha \leqslant V_\alpha$.

(b) Se $\{f_i\}$ é uma ω_V rede de Cauchy então por (a) é também ω_W rede de Cauchy logo existe $f \in \mathcal{E}^m W_\infty(\Omega)$ tal que f_i converge para f no sentido da topologia ω_W e como $W_\alpha > 0$ sôbre Ω para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ segue em particular, pela Observação 2.6, que $\partial^\alpha f_i$ converge pontualmente para $\partial^\alpha f$, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$.

Por outro lado, com a notação da Observação 1.3, temos que para $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$ fixado mas arbitrário, $\{v_\alpha \cdot \partial^\alpha f_i\}$ é uma rede de Cauchy em $N(\Omega) \cap \mathcal{Y}_\infty(\Omega)$ munido da topologia da convergência uniforme então pelo Lema 3.5, pág. 123 de [14] segue que existe $f_{(\alpha, v_\alpha)} \in N(\Omega) \cap \mathcal{Y}_\infty(\Omega)$ tal que $v_\alpha \cdot \partial^\alpha f_i$ converge uniformemente para $f_{(\alpha, v_\alpha)}$ e como $v_\alpha \cdot \partial^\alpha f_i$ converge pontualmente para $v_\alpha \cdot \partial^\alpha f$ pelo observado antes, vem $v_\alpha \cdot \partial^\alpha f = f_{(\alpha, v_\alpha)}$. Sendo $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$ arbitrário, segue $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ e f_i converge para f no sentido da topologia ω_V.

OBSERVAÇÃO 2.8 - Pela parte (a) do teorem anterior vem $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ metrizável $\Longleftrightarrow$ todo $\hat{V}_\alpha$ tem uma base enumerável no sentido dos pesos (vide Definição 1.4). Também pela parte (b) segue que se $V_\alpha \geqslant \chi_C(\Omega)$ para todo $\alpha \in N^n_m$, então $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é completo pois $\mathcal{E}^m(\Omega)$ munido da sua topologia natural é completo. Daí segue que os espaços dos Exemplos 1 até 5 inclusive são completos (os de números 1,2,3 são espaços de Fréchet.

<u>OBSERVAÇÃO 2.9</u> - O Teorema 2.2 assim como sua demonstração é a correspondente generalização de resultados provados por Summers para o caso contínuo (vide Teoremas 3.1 e 3.6 de [14]). Entretanto algumas propriedades "naturais" verificadas no caso contínuo não se realizam no caso diferenciável. Por exemplo, tendo em vista certas técnicas para aproximação de funções, semelhantes às usadas no caso contínuo por Nachbin em [19], poderíamos esperar que para $m \geq 1$ $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ fosse um módulo sôbre o anel $\mathcal{B}^m(\Omega)$ e que acontecendo tal coisa, a aplicação $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longrightarrow \phi \cdot f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ fosse contínua para todo $\phi \in \mathcal{B}^m(\Omega)$, fatos trivialmente verificados quando $m=0$. Vamos mostrar a seguir dois exemplos em que não se realizam as propriedades aludidas. De passagem isto permite concluir que a teoria dos espaços ponderados de funções diferenciáveis não é uma simples generalização do caso contínuo, antes porém, tem características próprias.

<u>EXEMPLO 6</u> - Seja $v \in \mathcal{U}^1(R;R_+)$ dado por $v_0(x)=\exp(-|x|)$, $v_1(x) = \dfrac{\max(1,|x|)}{1+x^2}$, $x \in R$. Se $f(x) = x$, $x \in R$ então $f \in \mathcal{E}^1 v_\infty(R)$ (vide Observação 1.6). Se ϕ denota a função seno temos $\phi \in \mathcal{B}^1(R)$, entretanto $v_1(k\pi)|(\phi f)'(k\pi)| = k^2\pi^2/(k^2\pi^2+1)$ para k inteiro. Em particular $v_1(\phi f)' \notin \mathcal{Y}_\infty(R)$ logo $\phi \cdot f \notin \mathcal{E}^1 v_\infty(R)$ i.e. $\mathcal{E}^1 v_\infty(R)$ não é um módulo sôbre $\mathcal{B}^1(R)$. Notemos ainda que $v_i \geqslant \chi_c(R)$, $i = 0,1$.

<u>EXEMPLO 7</u> - Seja $v \in \mathcal{U}^1(R;R_+)$ dado por v_0 = função característica do compacto K, $K \neq \phi$, v_1= função característica do intervalo fechado $[0,1]$, K disjunto de $[0,1]$. Observemos que $\mathcal{E}^1 v_\infty(R)$ sendo igual ao conjunto $\mathcal{E}^1(R)$ é um módulo sôbre $\mathcal{B}^1(R)$. Além disso se $f \in \mathcal{E}^1 v_\infty(R)$ é tal que $f|[0,1]$ = constante, $Sup(f) \subset \complement K$ então $p_v(f) = \|f\|_K + \|f'\|_{[0,1]} = 0$. Fixemos $\phi \in \mathcal{B}^1(R)$, $\phi(x) = x$ para $x \in [0,1]$, logo se $f_n \in \mathcal{E}^1 v_\infty(R)$ é tal que $f_n|[0,1] = n$, $Sup(f_n) \subset \complement K$, $n \in N_*$, temos $p_v(f_n)=0$ entretanto $p_v(\phi f_n) = \|(\phi f_n)'\|_{[0,1]} = n$. Logo a aplicação $f \in \mathcal{E}^1 v_\infty(R) \longmapsto \phi \cdot f \in \mathcal{E}^1 v_\infty(R)$ não é contínua.

A proposição seguinte dá condições suficientes a fim de que sejam verificadas as propriedades mencionadas na observação 2.9.

PROPOSIÇÃO 2.1 - Seja $V \in \mathcal{V}^m[\Omega]$

(a) Se V é decrescente (cf. Observação 1.5) então $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é um módulo sôbre $\mathcal{B}^m(\Omega)$ e a aplicação bilinear $(\phi,f) \in \mathcal{B}^m(\Omega) \times \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longmapsto \phi\cdot f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é contínua quando $\mathcal{B}^m(\Omega)$ está munido da topologia da convergência uniforme da função e de suas derivadas de ordem $\leq m$.

(b) Se $V_\alpha \geq \chi_c(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, se $\mathcal{D}^m(\Omega)$ é denso em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ e se para todo $\phi \in \mathcal{B}^m(\Omega)$ a aplicação $f \in \mathcal{D}^m(\Omega) \longmapsto \phi\cdot f \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ é contínua quando $\mathcal{D}^m(\Omega)$ está munido da topologia induzida, então $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é um módulo sôbre $\mathcal{B}^m(\Omega)$ e a aplicação $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longmapsto \phi\cdot f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é contínua para todo $\phi \in \mathcal{B}^m(\Omega)$.

Demonstração: (a) Fixemos $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Se $\beta \leq \alpha$ temos que a aplicação $(\phi,f) \in \mathcal{B}^m(\Omega) \times \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longmapsto \partial^{\alpha-\beta}\phi\cdot\partial^\beta f \in C(V_\beta)_\infty(\Omega)$ é contínua e como por hipótese $C(V_\beta)_\infty(\Omega) \subset C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ contínuamente pois $V_\alpha \leq V_\beta$, pela fórmula de Leibnitz vem que a aplicação $(\phi,f) \in \mathcal{B}^m(\Omega) \times \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longmapsto \partial^\alpha(\phi\cdot f) \in C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ é contínua. Então a afirmação segue da Observação 2.3.

(b) Indiquemos por T_ϕ a aplicação $f \in \mathcal{D}^m(\Omega) \longmapsto \phi\cdot f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. Pelas Observações 2.5 e 2.8 (segunda parte) vem $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ espaço de Hausdorff completo, logo pela Proposição 5, pág. 129 de [3] existe $\tilde{T}_\phi$ (única) extensão linear e contínua de T_ϕ à $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. Além disso, dado $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ existe uma rede $\{f_i\}$ em $\mathcal{D}^m(\Omega)$ tal que f_i converge para f no sentido da topologia ω_V, logo $\tilde{T}_\phi(f_i)$ converge para $\tilde{T}_\phi(f)$. Pela Observação 2.6 segue que $\phi\cdot f_i = \tilde{T}_\phi(f_i)$ converge pontualmente para $\tilde{T}_\phi(f)$ e também que f_i converge pontualmente para f logo $\phi\cdot f = \tilde{T}_\phi(f)$. Daí segue de imediato a afirmação.

OBSERVAÇÃO 2.10 - Pela Proposição 2.1 (b) e pelo Exemplo 6 concluimos que existem espaços $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ correspondentes à V tal que $V_\alpha \geq \chi_c(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, de modo que uma das seguintes afirmações é falsa:

(A) $\mathcal{D}^m(\Omega)$ é denso em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$.

(B) Para todo $\phi \in \mathcal{B}^m(\Omega)$, a aplicação $f \in \mathcal{D}^m(\Omega) \longmapsto \phi\cdot f \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ é contínua quando $\mathcal{D}^m(\Omega)$ está munido da topologia induzida por ω_V.

PROPOSIÇÃO 2.2 - Seja $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$

(a) Se $W \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ é tal que $\beta \leqslant \alpha$ acarreta $V_\alpha \leqslant W_{\alpha-\beta}\cdot V_\beta$ então a aplicação bilinear $(g,f) \in \mathcal{E}^m W_\infty(\Omega) \times \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longmapsto g\cdot f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ está definida e é contínua. Em particular, se V é tal que $\beta \leqslant \alpha$ acarreta $V_\alpha \leqslant V_{\alpha-\beta}\cdot V_\beta$ então $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é uma álgebra topológica.

(b) Se para todo $k \in \mathbb{N}_m$ e todo $v \in V(k)$ existe $\hat{v} \in \hat{V}(k)$ (cf. Definição 1.6) tal que:

(1) $v \leqslant \hat{v}$, (2) $\hat{v}_\alpha \leqslant \hat{v}_{\alpha-\beta}\cdot \hat{v}_\beta$ se $\beta \leqslant \alpha$, $|\alpha| \leqslant k$ então $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é uma álgebra multiplicativamente localmente convexa (vide [8] pág. 12).

Demonstração: (a) Basta observar que se $\beta \leqslant \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n_m$ a aplicação $(g,f) \in \mathcal{E}^m W_\infty(\Omega) \times \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longmapsto \partial^{\alpha-\beta} g\cdot\partial^\beta f \in C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ está definida e é contínua visto que, pela hipótese, segue que a aplicação $(\phi,\psi) \in C(W_{\alpha-\beta})_\infty(\Omega) \times C(V_\beta)_\infty(\Omega) \longmapsto \phi\cdot\psi \in C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$ é contínua. O resto é análogo à demonstração da Proposição 2.1 (a).

(b) Fixemos $k \in \mathbb{N}_m$, $v \in V(k)$ e $\lambda > 0$. Seja $\hat{v} \in \hat{V}(k)$ verificando (1) e (2), podemos supor $v_\alpha \leqslant \hat{v}_\alpha$ (cf. Definição 1.3 e Observação 1.1). Observemos que $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) = \mathcal{E}^m \hat{V}_\infty(\Omega)$ pelo Teorema 2.2 (a) logo sendo $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda$ temos que $B^m_{\hat{v},\lambda_1}$ é uma vizinhança em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ e $B^m_{\hat{v},\lambda_1} \subset B^m_{v,\lambda}$. Ora, se $f,g \in B^m_{\hat{v},\lambda_1}$ e $|\alpha| \leqslant k$, por (2) vem $p_{(\alpha,\, \hat{v}_\alpha)}(f\cdot g) \leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} p_{(\alpha-\beta,\hat{v}_{\alpha-\beta})}(f)\cdot p_{(\beta,\, \hat{v}_\beta)}(g)$ logo $p_{\hat{v}}(f.g) \leqslant C\,\lambda_1^2$ onde C é uma constante que não depende de f,g ou $\hat{v}$. Tomando $\lambda_1 = \min(\lambda, 1/C)$ vem $B_{\hat{v},\lambda_1}\cdot B^m_{\hat{v},\lambda_1} \subset B^m_{\hat{v},\lambda_1} \subset B^m_{v,\lambda}$ logo pela Observa ção 2.1 segue a afirmação.

OBSERVAÇÃO 2.11 - Como caso particular da Proposição 2.2, segue que os espaços dos Exemplos de números 1 até 5 inclusive são álgebras topológicas sendo também os de números 1, 2 e 5, álgebras multiplicativamente localmente convexas.

§ 2. APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES DE SUPORTE COMPACTO

OBSERVAÇÃO 2.12 - Seja $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. Se $m = +\infty$ pela Observação 2.2 segue: $f \in \overline{\mathcal{G}}$ (aderência em ω_V) $\iff$ f pertence à aderência de $\mathcal{G}$ em $\omega_{V(k)}$ para todo k inteiro positivo. Então na demonstração de proposições sôbre aproximação de funções de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ podemos sempre supor m finito. Ora, neste caso segue, pela Observação 2.1, $f \in \overline{\mathcal{G}} \iff$ para todo $v \in V$ e $\varepsilon > 0$ existe $\phi \in \mathcal{G}$, $\phi = \phi(f, v, \varepsilon)$ tal que $p_v(f-\phi) < \varepsilon$.

DEFINIÇÃO 2.2 - Sendo $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ diz-se que V é regular caso $\mathcal{D}^m(\Omega)$ seja denso em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$.

PROPOSIÇÃO 2.3 - Se $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ é tal que $V_\alpha < \chi_c(\Omega)$ para $\alpha \neq 0$, então V é regular.

Demonstração: Podemos supor $m \geq 1$ e m finito (Observação 2.12). Sejam $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$. Se $K = \{x, v_0(x)|f(x)| \geq \varepsilon\} \bigcup\limits_{\alpha \neq 0} \mathrm{Sup}(v_\alpha)$ então K é compacto e existe $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta \equiv 1$ numa vizinhança de K. Se $\phi = \theta \cdot f$ então $\phi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ e $\partial^\alpha \phi = \partial^\alpha f$ numa vizinhança de K para todo α, em particular $v_\alpha(\partial^\alpha f - \partial^\alpha \phi) \equiv 0$ para $\alpha \neq 0$ visto que $\mathrm{Sup}(v_\alpha) \subset K$. Como $v_0(x)|f(x) - \phi(x)| = v(x)|f(x)|(1 - \theta(x))$ para todo $x \in \Omega$ segue $p_v(f-\phi) < \varepsilon$.

TEOREMA 2.3 - Seja $\mathcal{Y} \subset \mathcal{E}^m V_\phi(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n_m$ tais que $\alpha \neq 0$, $\gamma \leq \alpha$ o conjunto $V_\alpha \cdot \partial^\gamma \mathcal{Y}$ é constituído de funções limitadas. Então $\mathcal{Y}$ está contido na aderência de $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$.

Para provar o teorema precisamos do seguinte resultado.

<u>LEMA 2.1</u> - Seja λ um número estritamente positivo, $m \in \mathbb{N}^*$ e $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Então existe

$$\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \quad \theta|K = 1 \text{ e } \|\partial^\gamma\theta\| \leqslant \lambda$$

para $\gamma \in \mathbb{N}^n_m$, $\gamma \neq 0$.

<u>Demonstração</u>: Basta provar o lema para um compacto do tipo $[-a,a]\times\ldots\times[-a,a]$ (n-vezes) onde $a \geqslant 1$. Vejamos o caso $n = 1$: se $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ é tal que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\psi|[-1, 1] = 1$ seja $\theta(t) = \psi(\frac{t}{M})$ onde $M = \max(a, \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} \frac{\|\psi^{(k)}\|}{\lambda})$. Então $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $\theta|[-a, a] = 1$ e para $\gamma \in \mathbb{N}^1_m$, $\gamma \neq 0$ temos $\partial^\gamma \theta(t) = \frac{1}{M^\gamma} \psi^{(\gamma)} (\frac{t}{M})$ logo $\|\partial^\gamma \theta\| < \lambda$. Agora vejamos o caso $n > 1$: Pelo visto acima, existe $\theta_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$, $\theta_1|[-a, a] = 1$ e $\|\theta_1{}^{(k)}\| \leqslant \min(1,\lambda)$, $k = 1,\ldots,m$. Seja $\theta(x_1,\ldots,x_n) = \theta_1(x_1)\ldots\theta_1(x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $\gamma = (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^n$ temos $\partial^\gamma \theta(x_1,\ldots,x_n) = \theta_1{}^{(k_1)}(x_1)\ldots\theta_1{}^{(k_n)}(x_n)$ logo se $\gamma \in \mathbb{N}^n_m$, $|\gamma| \geqslant 1$ então $0 \leqslant k_i \leqslant m$, $i = 1,\ldots,n$ e pelo menos algum k_i é tal que $k_i \geqslant 1$. Daí segue $\|\partial^\gamma \theta\| < \lambda$. As outras propriedades são evidentes.

<u>Demonstração do teorema 2.3</u>: Podemos supor m finito (Observação 2.12). Sejam $f \in \mathcal{Y}$, $v \in V$, $\varepsilon > 0$ dados. Visto que o conjunto $\{x, v_\alpha(x)|\partial^\alpha f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ é compacto para todo α, existe $a > 0$ tal que $\|x\| > a \Rightarrow v_\alpha(x)|\partial^\alpha f(x)| < \varepsilon$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Se λ é um número > 0 e $K = \{x, \|x\| \leqslant a\}$ então pelo Lema 2.1 existe $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\theta|K = 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ e $\|\partial^\gamma \theta\| \leqslant \lambda$ para $\gamma \in \mathbb{N}^n_m$, $\gamma \neq 0$. Ora, $v_0(x)|f(x) - (\theta\cdot f)(x)| = v_0(x)|f(x)|\,(1-\theta(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, se $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, $\alpha \neq 0$, da hipótese feita sôbre $\mathcal{Y}$ e das propriedades de θ segue $v_\alpha(x)|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha(\theta\cdot f)(x)| \leqslant v_\alpha(x)|\partial^\alpha f(x)|\,(1-\theta(x)) + v_\alpha(x) \sum\limits_{\beta\leqslant\alpha,\beta\neq 0} \binom{\alpha}{\beta}|\partial^\beta\theta(x)|\cdot|\partial^{\alpha-\beta}f(x)| < \varepsilon + \lambda \sum\limits_{\beta\leqslant\alpha,\beta\neq 0} \binom{\alpha}{\beta}\|v_\alpha\partial^{\alpha-\beta} f\| < 2\varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, escolhendo λ suficientemente pequeno. Disso segue $p_v(f-\theta f) \leqslant C\cdot\varepsilon$ onde C é uma constante que depende apenas de m e n. Para concluir a demonstração, basta observar que $\theta\cdot f \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$. Q.e.d.

<u>COROLÁRIO 2.1</u> - Se $V \in \mathcal{V}^m[\mathbb{R}^n]$ é decrescente, então é regular.

<u>Demonstração:</u> Sejam $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n_m$, $\gamma \leq \alpha$. Pela Observação 2.3 temos $\partial^\gamma \mathcal{E}^m V_\infty(\mathbb{R}^n) \subset C(V_\gamma)_\infty (\mathbb{R}^n)$ e por outro lado $C(V_\gamma)_\infty (\mathbb{R}^n) \subset C(V_\alpha)_\infty (\mathbb{R}^n)$ visto ser V decrescente. Em particular, daí vem que $V_\alpha \cdot \partial^\gamma \mathcal{E}^m V_\infty(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto de funções limitadas, logo a afirmação segue do Teorema 2.3.

<u>COROLÁRIO 2.2</u> - Seja $V \in \mathcal{V}^m[\mathbb{R}^n]$ tal que V_α é um conjunto de funções limitadas para $|\alpha| \geq 1$. Então as aderências de $\mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}^m V_\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ coincidem.

<u>Demonstração</u>: Basta verificar $\mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}^m V_\infty(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)}$. Ora, dados $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n_m$, $\alpha \neq 0$ pela definição de $\mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n)$ e da hipótese sôbre V segue que $V_\alpha \cdot \partial^\gamma \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto de funções limitadas. Pelo Teorema 2.3 concluimos a afirmação.

<u>COROLÁRIO 2.3</u> - Seja $V \in \mathcal{V}^m[\mathbb{R}^n]$ tal que $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ está contido na aderência de $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$.

<u>Demonstração</u>: Basta observar que $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, sendo igual à $\partial^\alpha \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, é um subconjunto de $C(V_\alpha)_\infty (\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. A afirmação segue de imediato pelo Teorema 2.3.

<u>TEOREMA 2.4</u> -Seja $V \in \mathcal{V}^m[\mathbb{R}^n]$, $m \geq 1$, tal que $V_\alpha \subset \mathcal{F}_\infty(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| = 1$ e com a condição adicional $V_\alpha \leq \chi_c(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| > 1$ caso $m > 1$. Então V é regular.

<u>Demonstração</u>: Podemos supor $m \geq 2$, finito (Observação 2.12). Sejam $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\mathbb{R}^n)$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$. Fixemos $\theta \in \mathcal{D}(R)$ verificando $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta | [0,1] = 1$, $\|\theta'\| \leq 1$ (Lema 2.1) e seja $a > 0$ tal que $\mathrm{Sup}(\theta) \subset [-a, a]$.

Pelas hipóteses sôbre V e como $f \in \mathcal{E}^1 V(1)_\infty (\mathbb{R}^n)$ podemos escolher $b>0$ tal que, sendo $K_b = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq b\}$ onde $\| \|$ denota a norma $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$, então valem:

(1) $\mathrm{Sup}(v_\alpha) \subset K_b$ para $|\alpha| > 1$.

(2) $v_\alpha(x) < \frac{\varepsilon}{a}$, $|\alpha| = 1$ e $v_\alpha(x)|\partial^\alpha f(x)| < \frac{\varepsilon}{1+2a}$, $|\alpha| \leqslant 1$, para $x \in \complement K_b$.

Seja $g_b = \frac{1}{\lambda_b}(\|\ \|^2 + f^2)$ onde $\lambda_b = b^2 + \|f\|^2_{K_b}$. Então $g_b \in \mathcal{E}^m(\mathbb{R}^n)$, $g_b \geqslant 0$ e $g_b(x) \longmapsto +\infty$ quando $\|x\| \longrightarrow +\infty$. Sendo $\phi = (\theta \circ g_b)\cdot f$ então $\phi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ e $\phi|K_b = f$. Para $i = 1,\ldots, n$ indiquemos por ∂_i a derivada parcial de ordem um com respeito à variável x_i e por π_i a i-ésima projeção, então

(3) $\partial_i\phi = (\pi_i f + f^2\partial_i f)\cdot\theta' \circ g_b + (\theta \circ g_b)\cdot\partial_i f$. Ora, $|\pi_i f| \leqslant \frac{\lambda_b}{2}\cdot g_b$, $f^2 \leqslant \lambda_b \cdot g_b$ e $\|\theta'\| \leqslant 1$ logo por (3) vem $|\partial_i f(x) - \partial_i\phi(x)| \leqslant (1 - \theta \circ g_b(x)\cdot$ $\cdot|\partial_i f(x)| + g_b(x)(1+2|\partial_i f(x)|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e como $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ e $\mathrm{Sup}\ (\phi) \subset g_b^{-1}([0,a])$ segue

(4) $|\partial_i f(x) - \partial_i\phi(x)| \leqslant (1+2a)|\partial_i f(x)| + a$, $i = 1,\ldots, n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Temos $\partial^\alpha\phi|K_b = \partial^\alpha f$ para $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Daí segue $\|v_\alpha(\partial^\alpha f - \partial^\alpha\phi)\| = 0$ para $|\alpha| > 1$ por (1). Por outro lado se $x \in \complement K_b$ e $|\alpha| = 1$ por (2) e (4) vem $v_\alpha(x)|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha\phi(x)| < 2\varepsilon$ logo $\|v_\alpha(\partial^\alpha f - \partial^\alpha\phi)\| \leqslant 2\varepsilon$ para $|\alpha| = 1$ e como $\|v_0(f-\phi)\| < \varepsilon$ vem finalmente $p_V(f-\phi) \leqslant (2n+1)\varepsilon$. Q.e.d.

<u>OBSERVAÇÃO 2.13</u> - O Teorema 2.4 permite em particular decidir, para o espaço do Exemplo 6, a questão apresentada na Observação 2.10. De fato, com as notações ali empregadas temos (A) verdadeira e (B) falsa (tomemos por exemplo a função seno).

<u>OBSERVAÇÃO 2.14</u> - Não sabemos se para $m > 1$ o Teorema 2.4 é válido supondo $V_\alpha \subset \mathcal{F}_\infty(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \geqslant 1$. Também não sabemos se os resultados análogos aos Teoremas 2.3 e 2.4 são válidos para um aberto qualquer, entretanto o resultado seguinte permite obter alguma informação nesse sentido no caso $n = m = 1$.

<u>PROPOSIÇÃO 2.4</u> - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ aberto conexo e seja $V \in \mathcal{N}^1[\Omega]$. Então existe $W \in \mathcal{N}^1[\mathbb{R}]$ e um isomorfismo de espaço vetorial topológico L: $\mathcal{E}^1 V_\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^1 W_\infty(\mathbb{R})$ sôbre, tal que $L(\mathcal{D}^1(\Omega)) = \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$.

Demonstração: Ω é de um dos seguintes tipos: $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, (a,b), $a, b \in \mathbb{R}$. Então existe $\Theta: \Omega \longrightarrow R$ difeomorfismo.

Seja $W \in \mathcal{N}^1(\mathbb{R})$ definido por $W_0 = \{v_0 \circ \Theta^{-1}, v_0 \in V_0\}$, $W_1 = \{(v_1 \circ \Theta^{-1})|\Theta' \circ \Theta^{-1}|, v_1 \in V_1\}$. Sejam $v \in V$, $w \in W$ tais que $w_0 = v_0 \circ \Theta^{-1}$, $w_1 = (v_1 \circ \Theta^{-1})|\Theta' \circ \Theta^{-1}|$ e $t \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$ tais que $x = \Theta(t)$. Dado $f \in \mathcal{E}^1(\Omega)$ seja $g \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R})$ definida por $g = f \circ \Theta^{-1}$, logo $w_0(x)|g(x)| = v_0(t)|f(t)|$ e como $\Theta'(\Theta^{-1}(x) \cdot (\Theta^{-1})'(x) = 1$ vem $w_1(x)|g'(x)| = v_1(t)|f'(t)|$. Daí segue $f \in \mathcal{E}^1 V_\infty(\Omega) \Longleftrightarrow g \in \mathcal{E}^1 W_\infty(\mathbb{R})$. Além disso, se $v \in V$ e $w \in W$ estão relacionados como antes temos $p_v(f) = p_w(g)$ onde $f \in \mathcal{E}^1 V_\infty(\Omega)$ e $g = f \circ \Theta^{-1}$. Seja L a aplicação $f \in \mathcal{E}^1 V_\infty(\Omega) \longmapsto f \circ \Theta^{-1} \in \mathcal{E}^1 W_\infty(\mathbb{R})$. Pelo observado acima segue de imediato a proposição.

COROLÁRIO 2.4 - Seja $\Omega \subset R$ aberto conexo e seja $\Theta: \Omega \longmapsto R$ um difeomorfismo. Se $V \in \mathcal{N}^1[\Omega]$, então V é regular nos seguintes casos:

a) $V_1 \cdot |\Theta'| \leqslant V_0$

b) $V_1 \cdot |\Theta'| \subset \mathcal{F}_\infty(\Omega)$

Demonstração: Se $W \in \mathcal{N}^1[R]$ está relacionado com V como na demonstração da proposição anterior, segue V regular $\Longleftrightarrow$ W regular. Então a) resulta do Corolário 2.1 e b) resulta do Teorema 2.4.

§ 3. PRODUTO TENSORIAL DE ESPAÇOS PONDERADOS

DEFINIÇÃO 2.3 - Para $i = 1,\ldots,r$ seja Ω_i um conjunto e f_i uma função sôbre Ω_i. O produto tensorial das funções f_i é a função $f_1 = f_1 \times \ldots \times f_r$ definida sôbre $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_r$ por $f(x_1, \ldots, x_r) = f_1(x_1) \ldots f_r(x_r)$, $x_i \in \Omega_i$, $i = 1,\ldots,r$. Se $\mathcal{F}_i(\Omega_i)$ é um conjunto de funções sôbre $\Omega_i (i = 1,\ldots,r)$ indicaremos por $\mathcal{F}_1(\Omega_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_r(\Omega_r)$ a coleção de tôdas as somas finitas de funções sôbre $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_r$ do tipo $f_1 \times \ldots \times f_r$, onde $f_i \in \mathcal{F}_i(\Omega_i)$, $i = 1,\ldots, r$.

LEMA 2.2 - Sejam $\phi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$, m finito, X uma vizinhança de $\mathrm{Sup}(\phi)$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes (\mathbb{R})$ (n-vezes) tal que $\mathrm{Sup}(\psi) \subset X$ e $\|\partial^\alpha\phi - \partial^\alpha\psi\| \leqslant \varepsilon$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$.

Demonstração: Vamos considerar em primeiro lugar o caso particular $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ onde $X_i \subset \mathbb{R}$ é um aberto relativamente compacto. Sendo π_i, $i = 1, \ldots, n$ a i-ésima projeção sôbre $\mathbb{R}^n$ temos por hipótese $\pi_i(\mathrm{Sup}\,(\phi)) \subset X_i$, logo existe $\theta_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$, $\theta_i = 1$ numa vizinhança de $\pi_i(\mathrm{Sup}(\phi))$ e $\mathrm{Sup}(\theta_i) \subset X_i$, $i = 1,\ldots, n$. Ora, pelo Teorema 1.1 segue que, dado $\delta > 0$ tal que

(1) $\delta \cdot \sum\limits_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^\beta(\theta_1 \times \ldots \times\theta_n)\| \leqslant \varepsilon$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que se verifica

(2) $\|\partial^\alpha\phi - \partial^\alpha P\|_{\overline{X}} \leqslant \delta$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$.

Sendo $\psi = P\cdot(\theta_1 \times\ldots \times \theta_n)$ temos $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (n-vêzes) e $\mathrm{Sup}(\psi) \subset \mathrm{Sup}(\theta_1) \times \ldots \times \mathrm{Sup}(\theta_n) \subset X$. Se $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ temos $\partial^\alpha\phi = \partial^\alpha\phi\cdot\theta_1\times \quad \times \theta_n$ e $\partial^{\alpha-\beta}\phi\cdot\partial^\beta(\theta_1 \times\ldots\times \theta_n) = 0$ para $\beta \leqslant \alpha$, $\beta \neq 0$ pois $\theta_i = 1$ numa vizinhança de $\pi_i(\mathrm{Sup}(\phi))$ e $\partial^\beta(\theta_1 \times\ldots\times \theta_n) = \theta_1^{(\beta_1)}\times \ldots \times \theta_n^{(\beta_n)}$ se $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, logo $\partial^\alpha\phi - \partial^\alpha\psi = \partial^\alpha\phi - \partial^\alpha\{P\cdot(\theta_1 \times\ldots\times \theta_n)\} = \partial^\alpha\phi - \sum\limits_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}P\cdot\partial^\beta(\theta_1\times\ldots\times\theta_n) = \{\partial^\alpha\phi - \partial^\alpha P\}(\theta_1\times\ldots\times\theta_n) + \sum\limits_{\beta\leqslant\alpha,\beta\neq0} \binom{\alpha}{\beta}\{\partial^{\alpha-\beta}\phi-\partial^{\alpha-\beta} P\}\, \partial^\beta(\theta_1\times \ldots\times\theta_n)$ e como $\mathrm{Sup}(\theta_1\times\ldots\times\theta_n) \subset \overline{X}$ segue por (2) $\|\partial^\alpha\phi - \partial^\alpha\psi\| \leqslant \delta+\delta \sum\limits_{\beta\leqslant\alpha,\beta\neq0} \binom{\alpha}{\beta}\|\partial^\beta(\theta_1\times\ldots\times\theta_n)\| = \delta \sum\limits_{\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\|\partial^\beta(\theta_1\times\ldots\times\theta_n)\|$ logo por (1) vem que $\|\partial^\alpha\phi - \partial^\alpha\psi\| \leqslant \varepsilon$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Então o lema fica provado para o caso particular mencionado no começo.

Agora provemos o caso geral. Podemos supor que $X \neq \mathbb{R}^n$, logo $a = \mathrm{dist}\,(\mathrm{Sup}(\phi), \complement X)$ é finito, $a > 0$ sendo a distância tomada com respeito à métrica u sual. Para $\tau \in \mathbb{R}^n$, $\tau = (t_1,\dots, t_n)$ seja $X_\tau = J_{t_1}\times\dots\times J_{t_n}$ onde J_{t_i} denota o intervalo aberto de centro t_i e raio $\frac{a}{2\sqrt{n}}$. Observemos que X_τ é um aberto que contém τ e além disso, $\tau \in \operatorname{Sup}(\phi)$ acarreta $X_\tau \subset X$ logo existem $\tau_1,\dots,\tau_r \in \operatorname{Sup}(\phi)$ tais que $\operatorname{Sup}(\phi) \subset X_{\tau_1} \cup\dots\cup X_{\tau_r} \subset X$. Seja $(\phi_j)_{1\leq j\leq r}$ uma partição C^∞ da unidade sôbre $\operatorname{Sup}(\phi)$ subordinada à cobertura $(X_{\tau_j})_{1\leq j\leq r}$, em particular, $\phi = \sum_{j=1}^{r} \phi \cdot \phi$. Ora, $\phi_j \cdot \phi \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^n)$ e $\operatorname{Sup}(\phi_j \cdot \phi) \subset X_{\tau_j}(j\ 1,\dots,r)$, logo estamos sob as hipóteses do caso particular, então existe $\psi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (n-vêzes) tal que $\operatorname{Sup}(\psi_j) \subset X_{\tau_j}$ e $\|\partial^\alpha(\phi_j\cdot\phi)-\partial^\alpha\psi_j\| \leq \varepsilon/r$ para todo $j = 1,\dots,r$ e todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Sendo $\psi = \sum_{j=1}^{r} \psi_j$ temos $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\otimes\dots\otimes\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (n-vêzes), $\operatorname{Sup}(\psi) \subset X$ e $\|\partial^\alpha \phi - \partial^\alpha \psi\| \leq \varepsilon$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$.

<u>COROLÁRIO 2.5</u> - Sejam $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ aberto não vazio, $(i = 1,\dots,r)$, m inteiro, $\phi \in \mathcal{D}^m(\Omega_1 \times\dots\times \Omega_r)$, X vizinhança de $\operatorname{Sup}(\phi)$ e $\varepsilon > 0$. Então existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{D}(\Omega_r)$ tal que $\operatorname{Sup}(\psi) \subset X$ e $\|\partial^\alpha \phi - \partial^\alpha \psi\| \leq \varepsilon$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ onde $n = n_1 + \dots + n_r$.

<u>Demonstração</u>: Sem perda de generalidade podemos supor X compacto Seja $\tilde{\phi}$ a extensão de ϕ à $\mathbb{R}^{n_1}\times\dots\times\mathbb{R}^{n_r}$ definida por $\tilde{\phi}(x) = 0$ para $x \in \complement(\Omega_1 \times\dots\times \Omega_r)$. Então $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^{n_1}\times\dots\times\mathbb{R}^{n_r})$ e $\operatorname{Sup}(\tilde{\phi}) \subset X$. Como $\mathbb{R}^{n_1}\times\dots\times\mathbb{R}^{n_r}$ fica naturalmente identificado com $\mathbb{R}^n$ e como $\underbrace{\mathcal{D}(\mathbb{R})\otimes\dots\otimes\mathcal{D}(\mathbb{R})}_{n_i} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_i})$ aplicando o Lema 2.2 existe $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_r})$ tal que $\operatorname{Sup}(\psi_0) \subset X$ e $\|\partial^\alpha \tilde{\phi} - \partial^\alpha \psi_0\| \leq \varepsilon$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Seja π_{n_i} a projeção natural $\mathbb{R}^{n_1}\times\dots\times\mathbb{R}^{n_r} \longmapsto \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1,\dots, r$ e observemos que $\pi_{n_i}(X) \subset \Omega_i$ é compacto, logo existe $\theta_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ tal que $\theta_i = 1$ numa vizinhança de $\pi_{n_i}(X)$. Ora, $\psi_0 = \sum_{j=1}^{r} \psi_{1,j} \times\dots\times \psi_{r,j}$ onde $\psi_{i,j} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_i})$, então fazendo $\psi = \sum_{j=1}^{r} \theta_1\, \psi_{1,j}|\Omega_1 \times\dots\times \theta_r\, \psi_{r,j}|\Omega_r$ vem $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{D}(\Omega_r)$ e $\psi = (\theta_1 \times \dots \times \theta_r)\cdot\psi_0|\Omega_1 \times\dots\times \Omega_r$ logo $\operatorname{Sup}(\psi) \subset X$ e $\|\partial^\alpha\phi - \partial^\alpha\psi\| < \varepsilon$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$.

COROLÁRIO 2.6 - Sendo $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ então as aderências de $\mathcal{D}^m(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ coincidem.

Demonstração: Se $m = +\infty$ não há nada a demonstrar. Se m é finito, sejam $\phi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$. Fixada uma vizinhança compacta X de $\mathrm{Sup}(\phi)$, pelo Corolário 2.5 existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\mathrm{Sup}(\psi) \subset X$ e $\|\partial^\alpha \phi - \partial^\alpha \psi\| < \varepsilon/C$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, onde $C = \sum_{|\alpha| \leq m} \|v_\alpha\|_X$. Daí segue $p_v(\phi-\psi) \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|v_\alpha\|_X \|\partial^\alpha \phi - \partial^\alpha \psi\| \leq \varepsilon$.

DEFINIÇÃO 2.4 - Sendo $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ aberto, $V_i \in \mathcal{N}^m[\Omega_i]$ $(i=1,\dots,r)$, $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_r$ definimos $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ denotado por $V_1 \times \dots \times V_r$, pondo $V_\alpha = V_{1,\alpha_1} \times \dots \times V_{r,\alpha_r}$ para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^{n_1+\dots+n_r}$, onde $\mathbb{N}^{n_1+\dots+n_r}$ está naturalmente identificado com um subconjunto de $\mathbb{N}^{n_1}_m \times \dots \times \mathbb{N}^{n_r}_m$ através de $(t_1, \dots, t_{n_1+\dots+n_r}) \longleftrightarrow ((t_1, \dots, t_{n_1}), \dots, (t_{n_1+\dots+n_{r-1}+1}, \dots, t_{n_1+\dots+n_r}))$.

TEOREMA 2.5 - Com as notações de Definição 2.4 temos $\mathcal{E}^m(V_1)_\infty(\Omega_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{E}^m(V_r)_\infty(\Omega_r) \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ e a aplicação $(f_1, \dots, f_r) \longmapsto f_1 \times \dots \times f_r$ de $\mathcal{E}^m(V_1)_\infty(\Omega_1) \times \dots \times \mathcal{E}^m(V_r)_\infty(\Omega_r) \longmapsto \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é r-linear e contínua. Além disso, V regular acarreta $\mathcal{E}^m(V_1)_\infty(\Omega_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{E}^m(V_r)_\infty(\Omega_r)$ denso em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$.

Demonstração: Sejam $f_i \in \mathcal{E}^m(V_i)_\infty(\Omega_i)$, $(i=1,\dots,r)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^{n_1+\dots n_r}_m$, $v_\alpha = v_{1,\alpha_1} \times \dots \times v_{r,\alpha_r} \in V_\alpha$ onde $v_{i,\alpha_i} \in V_{i,\alpha_i}$. Então $v_\alpha \cdot \partial^\alpha(f_1 \times \dots \times f_r) = (v_{1,\alpha_1} \partial^{\alpha_1} f_1) \times \dots \times (v_{r,\alpha_r} \partial^{\alpha_r} f_r)$ e como $v_{i,\alpha_i} \partial^{\alpha_i} f_i \in \mathcal{F}_\infty(\Omega_i)$ segue $v_\alpha \partial^\alpha(f_1 \times \dots \times f_r) \in \mathcal{F}_\infty(\Omega)$ logo $f_1 \times \dots \times f_r \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. Obviamente a aplicação $(f_1, \dots, f_r) \longmapsto f_1 \times \dots \times f_r$ é r-linear e se v_α é como antes vem $p_{(\alpha, v_\alpha)}(f_1 \times \dots \times f_r) \leq p_{(\alpha_1, v_{1,\alpha_1})}(f_1) \dots p_{(\alpha_r, v_{r,\alpha_r})}(f_r)$ donde segue a continuidade.

Para provar a segunda parte podemos supor m finito (Observação 2.12). Sejam $\phi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$, $v \in V$ e $\varepsilon > 0$. Fixemos uma vizinhança compacta X de $\mathrm{Sup}(\phi)$, podemos supor $X = X_1 \times \dots \times X_r$. Pelo Corolário 2.5 existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{D}(\Omega_r) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\mathrm{Sup}(\psi) \subset X$ e $\|\partial^\alpha \phi - \partial^\alpha \psi\| < \varepsilon/C$ para todo $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \in \mathbb{N}_m^{n_1+\ldots+n_r}$ onde $C = \sum\limits_{|\alpha|\leq m,\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)} \|v_{1,\alpha_1}\|_{X_1} \cdot \ldots \cdot \|v_{r,\alpha_r}\|_{X_r}$, logo $p_V(\phi-\psi) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|v_\alpha(\partial^\alpha\phi-\partial^\alpha\psi)\| \leq \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|v_{1,\alpha_1}\|_{X_1} \cdots \|v_{r,\alpha_r}\|_{X_r}$ $\|\partial^\alpha\phi-\partial^\alpha\psi\| < \varepsilon$. Q.e.d.

<u>OBSERVAÇÃO 2.15</u> - Se $V_i \in \mathcal{N}^m[R^{n_i}]$, $m \geq 1$, $i = 1,\ldots, r$ pelo Corolário 2.1 e Teorema 2.4, temos que $V = V_1\times\ldots\times V_r$ é regular nos seguintes casos:

(1) V_i decrescente para $i = 1,\ldots, r$.

(2) $V_{i,\alpha_i} \subset \mathcal{F}_\infty(\mathbb{R}^{n_i})$ para $|\alpha_i| \leq 1$ e $V_{i,\alpha_i} \leq \chi_c(\mathbb{R}^{n_i})$ para $|\alpha_i| > 1$, $i = 1,\ldots,r$.

§ 4. <u>DUAL DE $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$</u>

<u>OBSERVAÇÃO 2.16</u> - Se μ é uma medida de Radon limitada sôbre Ω, ela pode ser extendida univocamente a um funcional linear contínuo sôbre $C_o(\Omega)$, espaço das funções contínuas sôbre Ω e nulas ao infinito munido da topologia da convergência uniforme; a extensão de μ também a denotaremos por μ. Ora, pelo Teorema 6.19, pág. 131 de [12] existe uma única medida de Borel sôbre Ω, complexa e regular, que denotaremos por μ^* tal que $\mu(f) = \int_\Omega f\, d\mu^*$ para todo $f \in C_o(\Omega)$ e $\|\mu\| = |\mu^*(\Omega)|$ = variação total de μ^*.

<u>DEFINIÇÃO 2.4</u> - Dado $v \in \mathcal{U}(\Omega; \mathbb{R}_+)$ e $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ = conjunto das medidas de Radon limitadas sôbre Ω, denotaremos por $v\mu$ o funcional linear sôbre $C v_\infty(\Omega)$ definido por $v\mu(f) = \int_\Omega v\, f\, d\mu^*$ para $f \in C V_\infty(\Omega)$. A integral está definida pois $v\, f$ é uma função nula ao infinito e Borel mensurável.

Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e v, μ são como antes, deifinimos o funcional linear $\partial^\alpha(v\mu)$ sôbre o sub-espaço vetorial de $\mathcal{E}^{|\alpha|}(\Omega)$ das funções g tais que $\partial^\alpha g \in C v_\infty(\Omega)$, pondo

$$\partial^\alpha(v\mu)(g) = v\,\mu\{(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha g\}\ .$$

<u>OBSERVAÇÃO 2.17</u> - Se $v \in \mathcal{U}(\Omega; R_+)$, $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ então $|v\mu\ (f)| \leq \|vf\|\cdot\|\mu\|$ para todo $f \in C v_\infty(\Omega)$. Em particular, dado $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, $v_\alpha \in V_\alpha$, $\mu_\alpha \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ tem-se que $\partial^\alpha(v_\alpha\ \mu_\alpha)|\ \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é um funcional linear contínuo sôbre $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. Indiquemos por $\dot{\sum\limits_{|\alpha|\leq m}} \partial^\alpha(V_\alpha \mathcal{M}_b(\Omega))|\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ a coleção de somas do tipo $\sum\limits_{|\alpha|\leq m} (v_\alpha\ \mu_\alpha)|\ \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ onde $v_\alpha \in V_\alpha$, $\mu_\alpha \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ para $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ e $v_\alpha \mu_\alpha = 0$ salvo para um número finito de α's.

Com a notação anterior, temos a seguinte caracterização do dual topológico de $\mathcal{E}^m\ V_\infty(\Omega)$.

<u>TEOREMA 2.6</u> - Se $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ então $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)' = \dot{\sum\limits_{|\alpha|\leq m}} \partial^\alpha(V_\alpha \mathcal{M}_b(\Omega))|\ \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$.

<u>Demonstração</u>: Pela Observação 2.17 temos a inclusão $\dot{\sum\limits_{|\alpha|\leq m}} \partial^\alpha(V_\alpha \mathcal{M}_b(\Omega))|\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)'$. Para provarmos a inclusão contrária vamos considerar primeiro o caso m finito. Se $T \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)'$, pela Observação 2.7 existe $T_\alpha \in C(V_\alpha)_\infty\ (\Omega)'$, $|\alpha| \leq m$, tal que $T(f) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} T_\alpha(\partial^\alpha f)$ para todo $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. Ora, como consequência da demonstração do Teorema 3.1, pág. 326 de [15], temos que para cada T_α existe $v_\alpha \in V_\alpha$, $\mu_\alpha \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ tal que $T_\alpha(g) = v_\alpha\ \mu_\alpha(g)$ para todo $g \in C(V_\alpha)_\infty(\Omega)$, em particular $T_\alpha(\partial^\alpha f) = \partial^\alpha(v_\alpha(-1)^{|\alpha|}\ \mu_\alpha\ )(f)$ para todo $f \in\ \mathcal{E}^m\ V_\infty(\Omega)$. Daí segue $T = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha(v_\alpha(-1)^{|\alpha|}\ \mu_\alpha)|\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \in \dot{\sum\limits_{|\alpha|\leq m}} \partial^\alpha(V_\alpha \mathcal{M}_b(\Omega))|\ \mathcal{E}^m\ V_\infty(\Omega)$. Agora se $m = +\infty$ e $T \in \mathcal{E}\, V_\infty(\Omega)'$ pela Observação 2.2 e pelo Corolário da pág. 270 de [3] existe k inteiro positivo e $S \in \mathcal{E}^k V(k)_\infty\ (\Omega)'$ tal que $T = S|\ \mathcal{E}\ V_\infty(\Omega)$ logo a afirmação segue do caso anterior, Q.e.d.

CAPÍTULO III

PROBLEMA DE BERNSTEIN

Seja v um peso de ordem m sôbre $\mathbb{R}^n$ (vide Definição 1.6 e Observação 1.5).

DEFINIÇÃO 3.1 - Diz-se que v é ràpidamente decrescente ao infinito caso $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ esteja contido em $\mathcal{E}^m V_\infty(\mathbb{R}^n)$.

OBSERVAÇÃO 3.1 - Visto que $\partial^\alpha \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, se $v = \{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n_m} \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ são equivalentes:

(1) v ràpidamente decrescente ao infinito

(2) $v_\alpha \cdot P \in \mathcal{F}_\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

(3) $v_\alpha \cdot P$ limitada para tôdo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$, $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

DEFINIÇÃO 3.2 - Sendo $v \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ ràpidamente decrescente ao infinito diz-se que v é fundamental no sentido de Bernstein se $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ for denso em $\mathcal{E}^m V_\infty(\mathbb{R}^n)$. O problema de Bernstein para o caso m-contìnuamente diferenciável consiste em achar condições necessárias e suficientes para que um peso v de ordem m sôbre $\mathbb{R}^n$, ràpidamente decrescente ao infinito, seja fundamental.

OBSERVAÇÃO 3.2 - O Teorema 1.1 afirma essencialmente que todo peso v de ordem m sôbre $\mathbb{R}^n$ tal que cada v_α tem suporte compacto é fundamental no sentido de Bernstein.

OBSERVAÇÃO 3.3 - Sejam $v, w \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ ràpidamente decrescentes ao infinito, $v \leqslant w$ e w fundamental. Pelo Corolário 2.3 segue v fundamental $\Longleftrightarrow$ v regular. Em particular, como consequência do Corolário 2.1 e do Teorema 2.4 temos v fundamental nos seguintes casos:

(1) v decrescente

(2) $\operatorname{Sup}(v_\alpha)$ compacto para $|\alpha| > 1$.

OBSERVAÇÃO 3.4 - Sendo $v \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ fundamental e $v_0(x_0) \neq 0$ então $\{P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), P(x_0) = 0\}$ é denso no conjunto das $f \in \mathcal{E}^m v_\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $f(x_0) = 0$. De fato supondo m finito (cf. Observação 2.12), se $f \in \mathcal{E}^m v_\infty(\mathbb{R}^n)$ é tal que $f(x_0) = 0$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $P_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $p_V(P_0 - f) \leqslant \dfrac{\varepsilon v_0(x_0)}{2\,\|v_0\|}$, em particular $v_0(x_0)|P_0(x_0) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon v_0(x_0)}{2\,\|v_0\|}$ e como $f(x_0) = 0$ vem $\|v_0\|\,|P_0(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Se $P = P_0 - P_0(x_0)$ então $P(x_0) = 0$ e $p_V(f-P) \leqslant p_V(f-P\ ) + \|v_0\ P_0(x_0)\| \leqslant \varepsilon$.

LEMA 3.1 - $\partial^\alpha \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ na topologia da convergência uniforme para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Demonstração: Vamos provar o lema para $n = 1$ por indução sôbre α. Observemos que para $\alpha = 0$ o lema é um caso particular do Lema 2.2. Suponhamos o lema verdadeiro para $\alpha = \alpha_0 \geqslant 0$ e sejam $\phi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$. Então pela hipótese de indução existe $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que

(1) $\|\phi - \psi_0{}^{(\alpha_0)}\| < \varepsilon/2$.

Sendo $\psi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi_0(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$, vem $\psi_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, logo pelo Lema 2.1 existe $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que

(2) $\Theta|\mathrm{Sup}(\psi_0) = 1$

(3) $\sum_{i=1}^{\alpha_0+1} \binom{\alpha_0+1}{i} \|\Theta^{(i)}\| \cdot \|\psi_1^{(\alpha_0+1-i)}\| \leq \varepsilon/2$

Pondo $\psi = \Theta\cdot\psi_1$, vem $\psi^{(\alpha_0+1)} - \psi_1^{(\alpha_0+1)} = (\Theta-1)\, \psi_1^{(\alpha_0+1)} + \sum_{i=1}^{\alpha_0+1} \binom{\alpha_0+1}{i} \Theta^{(i)}\, \psi_1^{(\alpha_0+1-i)}$ com $(\Theta-1)\psi_1^{(\alpha_0+1)} = (\Theta-1)\, \psi_0^{(\alpha_0)} = 0$ por (2). Então por (1) e (3) segue $\|\phi-\psi^{(\alpha_0+1)}\| \leq \|\phi-\psi_1^{(\alpha_0+1)}\| + \|\psi_1^{(\alpha_0+1)} - \psi^{(\alpha_0+1)}\| \leq \|\phi-\psi_0^{(\alpha_0)}\| + \sum_{i=1}^{\alpha_0+1} \binom{\alpha_0+1}{i} \|\Theta^{(i)}\| \cdot \|\psi_1^{(\alpha_0+1-i)}\| < \varepsilon$. Então o lema é verdadeiro para $n = 1$.

Agora provemos o caso geral. Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e denotemos por Λ_α a aplicação $(f_1,\ldots,f_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\times\ldots\times\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto (f_1^{(\alpha_1)},\ldots,f_n^{(\alpha_n)}) \in \mathcal{K}(\mathbb{R})\times\ldots\times\mathcal{K}(\mathbb{R})$. Sendo $E = \mathcal{D}(\mathbb{R})\times\ldots\times\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (n-vêzes e denotando por d^{α_i} a aplicação $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto f^{(\alpha_i)} \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ $i = 1,\ldots, n$, temos $\Lambda_\alpha(E) = d^{\alpha_1}\mathcal{D}(\mathbb{R})\times\ldots\times d^{\alpha_n}\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Então se $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ está munido da topologia da convergência uniforme, na topologia produto temos (4) $\overline{\Lambda_\alpha(E)} = \overline{d^{\alpha_1}\mathcal{D}(\mathbb{R})} \times\ldots\times \overline{d^{\alpha_n}\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times\ldots\times\mathcal{K}(\mathbb{R})$ pelo caso já provado. Indicando por π a aplicação $(f_1,\ldots,f_n) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \times\ldots\times \mathcal{K}(\mathbb{R}) \longmapsto f_1 \times\ldots\times f_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ temos π contínua quando $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ está munido da topologia da convergência uniforme logo $\pi(\overline{\Lambda_\alpha(E)}) \subset \overline{\pi(\Lambda_\alpha(E))}$. Ora, $\pi(\Lambda_\alpha(E)) \subset \partial^\alpha\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pois $f_1^{(\alpha_1)} \times\ldots\times f_n^{(\alpha_n)} = \partial^\alpha(f_1 \times\ldots\times f_n)$ então por (4) segue $\pi(E) \subset \overline{\partial^\alpha \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ e como $\overline{\partial^\alpha \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ é um sub-espaço vetorial de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ temos que o espaço gerado por $\pi(E)$ a saber $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (n-vêzes) está contido em $\overline{\partial^\alpha\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ e por outro lado é denso em $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ pelo Lema 2.2 logo $\overline{\partial^\alpha\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. Q.e.d.

COROLÁRIO 3.1 - Seja $W \in \mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$ tal que $\omega_W|\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ é menos fina que a topologia da convergência uniforme. Então $\partial^\alpha\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C W_\infty(\mathbb{R}^n)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Demonstração: O corolário segue imediatamente da Proposição 2.3 e do Lema 3.1.

<u>TEOREMA 3.1</u> - Seja $v \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ ràpidamente decrescente ao infinito. São equivalentes:

(a) v é fundamental no sentido de Bernstein.

(b) Se $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in J}$, $J \subset \mathbb{N}^n_m$ finito, é uma família em $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)$ tal que $\sum\limits_{\alpha\in J} \partial^\alpha(v_\alpha\ \mu_\alpha) | \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = 0$ então $\sum\limits_{\alpha\in J} \partial^\alpha(v_\alpha\ \mu_\alpha) \equiv 0$ em $\mathcal{E}^m v_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Em particular, v fundamental acarreta v_α fundamental no sentido clássico (i.e. no caso contínuo), para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$.

<u>Demonstração</u>: (a) $\Longrightarrow$ (b) é evidente pela Observação 2.17. Vejamos agora a implicação (b) $\Longrightarrow$ (a). Pela hipótese temos, em face do Teorema 2.6, $T \in \mathcal{E}^m v_\infty(\mathbb{R}^n)'$ tal que $T | \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = 0$ acarreta $T = 0$ logo $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{E}^m v_\infty(\mathbb{R}^n)$ como consequência do Teorema de Hahn-Banach.

Provemos agora o caso particular. Para tal fixemos $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Seja $\mu \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)$ tal que $v_\alpha\ \mu | \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = 0$. Como $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \partial^\alpha \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ segue $\partial^\alpha(v_\alpha\ \mu) | \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = 0$ e sendo v fundamental por (b) temos $\partial^\alpha(v_\alpha\ \mu) = 0$ sôbre $\mathcal{E}^m v_\infty(\mathbb{R}^n)$. Em particular $\partial^\alpha(v_\alpha\ \mu) | \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = 0$ logo $v_\alpha\ \mu | \partial^\alpha \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = 0$ e pelo Corolário 3.1 vem $v_\alpha\ \mu = 0$ sôbre $C(v_\alpha)_\infty(\mathbb{R}^n)$. Daí segue v_α fundamental aplicando (b) $\Longrightarrow$ (a) no caso $m = 0$.

<u>OBSERVAÇÃO 3.5</u> - Pelo caso particular do Teorema 3.1 para dar um exemplo de um peso v de ordem m sôbre $\mathbb{R}^n$, ràpidamente decrescente ao infinito e que não seja fundamental, basta exibir um de modo que uma das componentes v_α não seja fundamental no sentido clássico (vide Exemplo 1, pág. 111 de [9]). Uma questão natural a decidir é a seguinte: Se $v \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ ràpidamente decrescente ao infinito é tal que v_α é fundamental no sentido clássico para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ segue v fundamental ?

<u>OBSERVAÇÃO 3.6</u> - Embora o Teorema 3.1 seja de fato uma solução do problema de Bernstein, tem a desvantagem de ser de difícil aplicação na prática, razão pela qual procuraremos condições práticas suficientes, de modo a

garantir que um peso v de ordem m sôbre $\mathbb{R}^n$ seja fundamental. Para o caso n = 1 e v decrescente é conhecida uma outra solução do problema de Bernstein (cf. [13]). Entretanto para o caso n > 1 e m = 0 i.e. mesmo no caso clássico não existe, quanto seja de nosso conhecimento, uma outra solução do problema de Bernstein, sendo conhecidas apenas diversas condições suficientes.

TEOREMA 3.2 - Seja Γ um conjunto não vazio de pesos fundamentais em $\mathbb{R}$ no sentido clássico de Bernstein verificando as seguintes propriedades:

(1) Para todo $u \in \Gamma$ existe $u' \in \Gamma$ tal que $u \leq u'$ e sendo $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $|x| \leq |y|$ então $u'(y) \leq u'(x)$

(2) Se ρ denota a função $t \in \mathbb{R} \longrightarrow 1 + |t| \in \mathbb{R}_+$ então para todo $u \in \Gamma$ existe $u'' \in \Gamma$ tal que $\rho u \leq u''$.

Então todo $v \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ decrescente tal que exista $u \in \Gamma$ e $\lambda > 0$ verificando $v_0 \leq \lambda u$ é fundamental.

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que Γ verifica o seguinte:

(3) $u \in \mathcal{U}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ e $u \leq \lambda u'$ algum $u' \in \Gamma$, $\lambda > 0 \Longrightarrow u \in \Gamma$. Vamos provar o teorema por indução sôbre m. De fato, para m = 0 a conclusão do teorema é trivialmente verificada. Suponhamos o teorema verdadeiro para $m = m_0 \geq 0$ e seja $v \in \mathcal{U}^{m_0+1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ decrescente, tal que $v_0 \in \Gamma$(cf. (3)). Então por (2) e (3) segue $\rho v_0 \in \Gamma$ logo por (1) existe $u' \in \Gamma$ tal que $\rho v_0 \leq u'$ e $|x| \leq |y| \Longrightarrow u'(y) \leq u'(x)$. Seja $w \in \mathcal{U}^{m_0+1}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ dado por $w_0 = \frac{u'}{\rho}$, $w_\alpha = u'$ para $\alpha \neq 0$, então $v \leq w$ pois $v_\alpha \leq v_0 \leq w_\alpha$ para todo α, logo pela Observação 3.3 (1) bastará provar que w é fundamental.

Seja $f \in \mathcal{E}^{m+1} w_\infty(R)$ e $\varepsilon > 0$. Se $w' \in \mathcal{U}^{m_0}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ é dado por $w'_\alpha = w_{\alpha+1}$ para $\alpha \in \mathbb{N}_{m_0}$ então $w'_\alpha = u'$ para todo α, em particular w' é decrescente e $w'_0 \in \Gamma$ logo pela hipótese de indução segue que w' é fundamental. Ora,

$f' \in \mathcal{E}^{m_0}w'_\infty(\mathbb{R})$ logo existe $P_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que

(4) $p_{w'}(f' - P_0) \leqslant \mathcal{E}/2$.

Seja $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $P' = P_0$ e $P(0) = f(0)$, então dado $x \in \mathbb{R}$, pelo teo rema do valor médio vem $|f(x) - P(x)| = |x|\ |f'(\xi_x) - P'(\xi_x)| =$
$= |x|\ |f'(\xi_x) - P_0(\xi_x)|$ onde $0 \leqslant |\xi_x| \leqslant |x|$ e como $\|u'(f'-P_0)\| \leqslant \mathcal{E}/2$ por (4), segue $w_0(x)\ |f(x) - P(x)| = \dfrac{u'(x)}{\rho(x)}\ |x|\ |f'(\xi_x) - P_0(\xi_x)| \leqslant$
$u'(\xi_x)|\ f'(\xi_x) - P_0(\xi_x)| \leqslant \mathcal{E}/2$ visto que $|x| \leqslant \rho(x)$ e $u'(x) \leqslant u'(\xi_x)$.
Como x é arbitrário temos então $\|w_0(f-P)\| \leqslant \mathcal{E}/2$ e $p_w(f-P) =$
$= \sum_{\beta=0}^{m_0+1} \|w_\beta(f^{(\beta)} - P^{(\beta)})\| = \|w_0(f-P)\| + \sum_{\alpha=0}^{m_0} \|w'_\alpha((f')^{(\alpha)} - P_0^{(\alpha)})\| < \frac{\mathcal{E}}{2} + p_{w'}(f'-P_0) \leqslant \mathcal{E}$,
logo w é fundamental pela Observação 2.12 Q.e.d.

COROLÁRIO 3.2 - Seja Γ como no Teorema 3.2 e além disso dirigido. Então se $v \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ é regular e $v_\alpha \leqslant \Gamma$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_m^1$, temos v funda mental.

Demonstração: Pela Observação 2.12 podemos supor m finito. Seja $w \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ dado por $w_\alpha = \sup\limits_{\alpha \leqslant \beta \leqslant m} v_\beta$, $\alpha \in \mathbb{N}_m^1$. Então w é decrescente e pela hipótese sôbre v existe $u \in \Gamma$ e $\lambda > 0$ tal que $w_0 \leqslant \lambda\ u$ pois Γ é dirigido. Então pelo Teorema 3.2 temos w fundamental e como $v \leqslant w$ segue v fundamental pela Observação 3.3 Q.e.d.

OBSERVAÇÃO 3.7 - A demonstração do Teorema 3.2 se baseia no fato que Γ é constituído de pesos fundamentais no sentido clássico, além das proprie dades (1) e (2), e no teorema do valor médio. Ora, o conjunto $\chi_c(\mathbb{R})$ é constituido de pesos fundamentais e verifica as propriedades (1) e (2), logo temos uma demonstração do teorema de Weierstrass para o caso m-continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$ a partir do caso contínuo.

DEFINIÇÃO 3.3 - (a) Sendo $\mathbb{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números posi tivos indicaremos por $\gamma_{\mathbb{M}}$ a função sôbre $\mathbb{R}$ definida por

$$\gamma_{\mathbb{M}}(t) = \inf\left\{\frac{M_k}{|t|^k}, k \in \mathbb{N}\right\}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

com a interpretação $\gamma_{\mathbb{M}}(0) = 0$ caso algum $M_k = 0$ e $\gamma_{\mathbb{M}}(0) = M_0$ em outro caso.

(b) Sendo $u \in \mathcal{U}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$, $k \in \mathbb{N}$, indicaremos por $M_{u,k}$, o número positivo, eventualmente $+\infty$, dado por $\sup\{u(t)|t|^k, \ t \in \mathbb{R}\}$ e denotaremos por $\mathbb{M}_u$ a sequência $(M_{u,k})_{k\in\mathbb{N}}$.

<u>OBSERVAÇÃO 3.8</u> - Sendo $\mathbb{M} = (M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos então $\gamma_{\mathbb{M}}$ é um peso ràpidamente decrescente ao infinito e $|x| \leq |y| \Longrightarrow \gamma_{\mathbb{M}}(y) \leq \gamma_{\mathbb{M}}(x)$. Além disso se u é um peso ràpidamente decrescente ao infinito então $u \leq \gamma_{\mathbb{M}_u}$ e $M_{u,k} = M_{\gamma_{\mathbb{M}_u},k}$, $k \in \mathbb{N}$.

<u>OBSERVAÇÃO 3.9</u> - Sendo u um peso em $\mathbb{R}$ então u é ràpidamente decrescente ao infinito se e só se $\mathbb{M}_u$ for uma sequência de reais. Se tal for o caso, seja $k \geq 1$. Ora, pela Observação 1.3 existe $t_k \in \mathbb{R}$ tal que $M_{u,k} = u(t_k)|t_k|^k$ pois a função $t \longmapsto u(t)|t|^k$ é s.c.s. e nula ao infinito. Logo se $\|u\| \leq 1$ temos $\sqrt[k]{M_{u,k}} \leq \sqrt[k+1]{u(t_k)}\,|t_k| \leq \sqrt[k+1]{M_{u,k+1}}$. Agora se $\|u\| > 1$ então é imediato que $\sqrt[k]{M_{\frac{u}{\|u\|},k}} \leq \sqrt[k]{M_{u,k}}$. Daí segue $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt[k]{M_{u,k}}} = +\infty \Longleftrightarrow \sum \frac{1}{\mu_{u,k}} = +\infty$ onde $\mu_{u,k} = \inf\{\sqrt[k']{M_{u,k'}}, k' \geq k\}$. Então faz sentido o seguinte:

<u>DEFINIÇÃO 3.4</u> - Indicaremos por $\Gamma(q.a)$ a coleção dos pesos u em $\mathbb{R}$ que verificam uma das afirmações que seguem:

(a) $$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt[k]{M_{u,k}}} = +\infty$$

(b) $$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{\mu_{u,k}} = +\infty \text{ onde } \mu_{u,k} = \inf\{\sqrt[k']{M_{u,k'}}, k' \geq k\}$$

<u>OBSERVAÇÃO 3.10</u> - Resulta imediatamente que se u verifica (a) ou (b) então é ràpidamente decrescente ao infinito, logo $\Gamma(q.a)$ está bem definido pela Observação 3.9. Além disso, pela Observação 3.8 segue: $u \in \Gamma(q.a) \Longrightarrow \gamma_{\mathbb{M}_u} \in \Gamma(q.a)$ Também é fácil verificar o seguinte: Se u é um peso em $\mathbb{R}$ tal que existem $\lambda > 0$, $r > 0$, $a \in \mathbb{R}$ e $u' \in \Gamma(q.a)$ tais que $u \leqslant \lambda(u'_a)^r$ onde $u'_a(t) = u'(at)$, então $u \in \Gamma(q.a)$ Em particular, se ρ é como no Teorema 3.2 e $u \in \Gamma(q.a)$ então $\rho u = \rho u^{1/2} \cdot u^{1/2} \leqslant$ (constante) $u^{1/2}$ logo $\rho u \in \Gamma(q.a)$.

<u>OBSERVAÇÃO 3.11</u> - Pelo Lema 2, pág. 100 de [9] segue que $\Gamma(q.a)$ é constituído por pesos fundamentais.

<u>PROPOSIÇÃO 3.1</u> - Seja $u \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$, então são equivalentes as seguintes afirmações:

(a) Sendo ν uma norma sôbre $\mathbb{R}^n$ existe $u_1 \in \Gamma(q.a)$ tal que $u \leqslant u_1 \circ \nu$

(b) Existe $u_1 \in \Gamma(q.a)$ tal que $u \leqslant u_1 \times \ldots \times u_1$ (n-vêzes)

(c) $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{1}{k\sqrt{N_{u,k}}} = +\infty$ onde

$$N_{u,k} = \max\{\sup\{u(t_1,\ldots,t_n)|t_1|^{\alpha_1}\ldots|t_n|^{\alpha_n}, (t_1\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n\},$$
$$\alpha_1+\ldots+\alpha_n = k, \quad \alpha_i \geqslant 0\}.$$

<u>Demonstração</u>: Se $u = 0$ a proposição é trivial. Seja então $u \neq 0$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Seja $\nu_0(t) = \nu_0(t_1,\ldots,t_n) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(|t_i|)$, para $t = (t_1\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $M'_{u,k} = \sup\{u(t)(\nu_0(t))^k,\ t \in \mathbb{R}^n\}$ $k = 0,1,\ldots$ seja $u_0 = \gamma_{\mathbb{M}}$ onde $\mathbb{M} = (M'_{u,k})_{k\in\mathbb{N}}$ (cf. Definição 3.3 (a)). Ora, fixado $k \in \mathbb{N}$ e visto que a função $u \circ \nu_0$ é s.c.s. e nula ao infinito, pela Observação 1.3 existe $t = t(k) \in \mathbb{R}^n$ tal que $M'_{u,k} = u(t)(\nu_0(t))^k = u(t)|t_{i_0}|^k$ onde $|t_{i_0}| = \nu_0(t)$ logo $M'_{u,k} \leqslant N_{u,k}$. Daí segue $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k\sqrt{M'_{u,k}}} = +\infty$ logo

$u_0 \in \Gamma(q.a)$ pois $M_{u_0,k} \leqslant M'_{u,k}$. Além disso $u \leqslant u_0 \circ \nu_0$. Sendo ν uma norma arbitrária, existe $a > 0$ tal que $a\,\nu \leqslant \nu_0$ então pela Observação 3.8 vem $u \leqslant u_0 \circ \nu_0 \leqslant u_0 \circ (a\nu) = u_1 \circ \nu$ onde $u_1(t) = u_0(at)$, $t \in \mathbb{R}$, logo $u_1 \in \Gamma(q.a)$ pela Observação 3.10.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Suponhamos $u \leqslant u_0 \circ \nu_0$ onde ν_0 tem o mesmo significado anterior e $u_0 \in \Gamma(q.a)$ Tomando $\gamma_{\mathbb{M}_{u_0}}$ se for preciso, podemos supor $u_0(y) \leqslant u_0(x)$ se $|x| \leqslant |y|$. Se $u_1 = u_0^{1/n}$ então $u_1 \in \Gamma$ (q.a) pela Observação 3.10 e sendo $t = (t_1,\ldots,t_n)$ temos $u_1(t_i) \geqslant u_0^{1/n}(\nu_0(t)) \geqslant u^{1/n}(t)$ $i = 1,\ldots, n$ logo $u(t) = u^{1/n}(t)\ldots u^{1/n}(t) \leqslant u_1(t_1)\ldots u_n(t_n) = (u_1\times\ldots\times u_1)(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}^n$ i.e. $u \leqslant u_1 \times\ldots\times u_1$.

(b) $\Longrightarrow$ (c). Seja $u_1 \in \Gamma$ (q.a) tal que $u \leqslant u_1\times\ldots\times u_1$ (n-vezes), podemos supor $0 < \|u_1\| \leqslant 1$. Se $\mathrm{Sup}(u_1) \subset [-1,1]$ então $N_{u,k} \leqslant \|u_1\|^n$ para todo k logo a divergência da série em (c) é evidente. Suponhamos então $\mathrm{Sup}(u_1) \cap \complement[-1,1] \neq \Phi$. Se $|t| > 1$ é tal que $u_1(t) \neq 0$ então existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 \geqslant 1$ tal que $u_1(t)|t|^{k_0} > \|u_1\|$ logo $M_{u_1,k} \leqslant M_{u_1,k'}$ para $k_0 \leqslant k \leqslant k'$ e tomando $\gamma_{\mathbb{M}}$ se for preciso, onde $\mathbb{M}$ indica a sequência $M_k = M_{u_1,k_0+k}$, $k \in \mathbb{N}$ podemos supor

(1) $M_{u_1,k} \leqslant M_{u_1,k'}$ para $0 \leqslant k \leqslant k'$. Ora para cada $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ temos $u(t_1,\ldots,t_n)|t_1|^{\alpha_1}\ldots|t_n|^{\alpha_n} \leqslant M_{u_1,\alpha_1}\ldots M_{u_1,\alpha_n}$ e como $\|u_1\| \leqslant 1$, por (1) segue

(2) $N_{u,k} \leqslant (M_{u_1,k})^n \leqslant M_{u_1,nk}$. Pela Observação 3.9 temos $\dfrac{1}{\sqrt[k+1]{M_{u_1,k+1}}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[k]{M_{u_1,k}}}$ para todo $k \geqslant 1$ logo pelo Lema 1, pág. 100 de [9] temos que $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt[k]{M_{u_1,k}}} = +\infty$ acarreta $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt[k]{M_{u_1,nk}}} = +\infty$ então por (2) vem $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt[k]{N_{u,k}}} = +\infty$ Q.e.d.

<u>DEFINIÇÃO 3.5</u> - Seja $u \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$. Diz-se que u é quase-analítico

caso verifique uma das afirmações da proposição 3.1.

OBSERVAÇÃO 3.12 - É imediato que todo peso quase-analítico é rápidamente decrescente ao infinito e que Γ q.a. é o conjunto dos pesos quase-analíticos em $\mathbb{R}$. Além disso, sendo u, u' $\varepsilon\, \mathcal{U}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ e $\lambda > 0$ tais que $u \leqslant \lambda u'$, então u' quase-analítico $\Longrightarrow$ u quase-analítico.

OBSERVAÇÃO 3.13 - A importância prática do conceito de peso quase-analítico reside no fato que tôda sequência $\mathbb{M} = (M_k)_{k\varepsilon\mathbb{N}}$ de números estritamente positivos que verifica a condição de Denjoy-Carleman i.e. $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\mu_k} = +\infty$, $\mu_k = \inf \{\sqrt[k']{M_{k'}}, k' \geqslant k\}$, define um peso quase-analítico $\gamma_{\mathbb{M}}$ em $\mathbb{R}$ e através da Proposição 3.1 partes (a) ou (b) podemos definir pesos quase-analíticos em $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 3.3 - Seja v $\varepsilon\, \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ decrescente tal que v_0 é quase-analítico. Então v é fundamental.

Demonstração: Sendo v_0 quase-analítico, existe $u_1\ \varepsilon\ \Gamma(q.a)$ tal que $v_0 \leqslant \underbrace{u_1 \times \ldots \times u_1}_{n}$. Se w' $\varepsilon\, \mathcal{U}^m(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ é definido por $w'_\alpha = u_1$ para $\alpha\ \varepsilon\ \mathbb{N}^1_m$ então w' é fundamental visto que pelas Observações 3.8, 3.10 e 3.11 o conjunto Γ (q.a) verifica as hipóteses do Teorema 3.2. Se w $\varepsilon\, \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ é dado por $w = \underbrace{w' \times \ldots \times w'}_{n}$ (vide Definição 2.4), então pela Observação 2.15 (1) temos w regular e pelo Teorema 2.5 temos que $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{E}^m w_\infty(\mathbb{R}^n)$ visto que w' é fundamental ou seja w é fundamental. Para concluir a demonstração basta aplicar a Observação 3.3 notando que $v \leqslant w$ e v decrescente. Q.e.d.

DEFINIÇÃO 3.6 - Indiquemos por Δ_1 a coleção dos pesos u em $\mathbb{R}$ tais que a sequência $(M_{u,k})$ k ε $\mathbb{N}$ verifica o critério quase-analítico de Denjoy i.e. existem constantes C, c positivas e um inteiro positivo p tais que $M_{u,k} \leqslant C[ck \log k \ldots \log_p k]^k$ para todo k suficientemente grande, onde $\log_0 k = k$ e $\log_p k = \log(\log_{p-1})$ para $p \geqslant 1$.

OBSERVAÇÃO 3.14 - Δ_1 é um subconjunto de Γ (q.a) e são válidas as propriedades da Observação 3.10 com Γ(q.a) substituido por Δ_1. Além disso, Δ_1 é um conjunto dirigido de pesos.

OBSERVAÇÃO 3.15 - Sendo $u \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ então é fácil verificar que as seguintes afirmações são equivalentes (cf. Proposição 3.1)

(a) Sendo ν uma norma sôbre $\mathbb{R}^n$ existe $u_1 \in \Delta_1$ tal que $u \leqslant u_1 \circ \nu$

(b) Existe $u_1 \in \Delta_1$ tal que $u \leqslant u_1 \times \ldots \times u_1$ (n-vêzes).

DEFINIÇÃO 3.7 - Diz-se que $u \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ (necessàriamente quase-analítico) é (D) quase-analítico caso verifique uma das afirmações da Observação 3.15. Denotaremos por Δ_n o conjunto dos pesos (D) quase-analíticos em $\mathbb{R}^n$.

OBSERVAÇÃO 3.16 - Pela Observação 3.14 temos $u', u'' \in \Delta_n$, $\lambda', \lambda'' \geqslant 0 \Longrightarrow \lambda' u' + \lambda'' u'' \in \Delta_n$, em particular Δ_n é dirigido. Além disso, dado $u \in \Delta_n$ existe $u' \in \Delta_n$ tal que $u \leqslant u'$ e $u'(t_1, \ldots, t_n) \leqslant$ $\leqslant u'(s_1, \ldots, s_n)$ se $|s_i| \leqslant |t_i|$, $i = 1, \ldots, n$. De fato, sendo $\nu(t) =$ $= \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |t_i|$ pela afirmação (a) da Observação 3.15 existe $u_1 \in \Delta_1$ tal que $u \leqslant u_1 \circ \nu$ e tomando $u' = \gamma_{M_{u_1}} \circ \nu$ vem o desejado (cf. Observação 3.8).

OBSERVAÇÃO 3.17 - Δ_n contém pròpriamente os pesos u em $\mathbb{R}^n$ tais que existem constantes $C > 0$, $c > 0$ verificando $u(t) \leqslant C e^{-c\|t\|}$, $t \in \mathbb{R}^n$, onde $\| \ \|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$, ditos pesos analíticos. Em particular se u tem suporte compacto temos $u \in \Delta_n$.

TEOREMA 3.4 - Seja $v \in \mathcal{U}^m_k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ tal que v_α é (D) quase-analítico para todo α e $\lim\limits_{k \to +\infty} \sup \sqrt{N_{v_\alpha, k}}$ é finito para $|\alpha| > 1$, (vide notação da Proposição 3.1 (c)). Então v é fundamental.

Demonstração: Fixemos $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ tal que $|\alpha| > 1$. Então existe $\lambda > 0$

tal que $N_{v_{\alpha},k} \leqslant \lambda^k$ para todo k. Seja $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n, |\beta| \geqslant 1$. Então pela definição de $N_{v_{\alpha},|\beta|}$ temos $v_\alpha(t_1, \ldots, t_n)|t_1|^{\beta_1} \ldots |t_n|^{\beta_n} \leqslant \lambda^{|\beta|}$ para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $|t_i| > \lambda$, $i = 1, \ldots, n$, então $v_\alpha(t_1, \ldots, t_n) \leqslant \left(\frac{\lambda}{|t_1|}\right)^{\beta_1} \ldots \left(\frac{\lambda}{|t_n|}\right)^{\beta_n} \longrightarrow 0$ quando $|\beta| \longrightarrow +\infty$, logo v_α tem suporte compacto. Então pelo Teorema 2.4 temos que v é regular. Ora, podemos supor m finito sem perda de generalidade e como pela Observação 3.16 o conjunto dos pesos (D) quase-analíticos é dirigido, existe u peso (D) quase-analítico tal que $v_\alpha \leqslant u$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$. Sendo $w \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ definido por $w_\alpha = u$ para todo α, então w é decrescente e w_0 é quase-analítico logo w é fundamental pelo Teorema 3.3. Sendo $v \leqslant w$ e v regular, pela Observação 3.3 segue v fundamental Q.e.d.

<u>OBSERVAÇÃO 3.18</u> - O Teorema 3.4 é um caso particular do seguinte resultado: "Sendo $v \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$ regular tal que v_α é (D) quase-analítico para todo α então v é fundamental" (cf. Corolário 3.2), cuja prova é a mesma que a do Teorema 3.4, exceto que não precisamos provar a parte relativa à regularidade de v.

CAPÍTULO IV

PROBLEMA DE APROXIMAÇÃO PONDERADA DE WEIERSTRASS

DEFINIÇÃO 4.1 - Seja $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}^m(\Omega)$ uma sub-álgebra e $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ um sub-espaço vetorial que é um módulo sôbre $\mathcal{A}$ i.e. $\mathcal{A}\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$. O problema de aproximação ponderada consiste em descrever a aderência de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$.

OBSERVAÇÃO 4.1 - No caso em que $\mathcal{A}$ é o conjunto das funções constantes, então $\mathcal{F}$ é o sub-espaço vetorial mais geral de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$, logo em virtude dos Teoremas 2.6 e de Hahn-Banach temos a seguinte solução do problema de aproximação ponderada.

TEOREMA 4.1 - $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ pertence à $\overline{\mathcal{F}}$ se e só se para todo $J \subset \mathbb{N}^n_m$ finito e $(\mu_\alpha, v_\alpha) \in \mathcal{M}_b(\Omega) \times V_\alpha$, $\alpha \in J$, tais que $\sum_{\alpha \in J} \partial^\alpha(v_\alpha \mu_\alpha)|\mathcal{F} = 0$ temos $\sum_{\alpha \in J} \partial^\alpha(v_\alpha\, \mu_\alpha)(f) = 0$.

No que segue, consideraremos um caso particular do problema de aproximação ponderada.

DEFINIÇÃO 4.2 - Sendo $\mathcal{G}$ um sub-conjunto não vazio de $\mathcal{E}^m(\Omega; \mathbb{K})$ denotaremos por $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ à álgebra sôbre $\mathbb{K}$ gerada por $\mathcal{G}$.

DEFINIÇÃO 4.3 - Sejam $V \in \mathcal{V}^m[\Omega]$ e $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}^m(\Omega; \mathbb{K})$ tais que $\mathbb{K}[\mathcal{G}] \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. O problema de aproximação ponderada de Weierstrass consiste em achar condições necessárias e suficientes sôbre V e $\mathcal{G}$ de modo que $K[\mathcal{G}]$ seja densa em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$.

OBSERVAÇÃO 4.2 - O problema de aproximação ponderada de Weierstrass é uma generalização do problema de Bernstein.

DEFINIÇÃO 4.4 - Sendo $\mathcal{G}$ um conjunto de funções contínuas em Ω e $\Omega' \subset \Omega$, diz-se que $\mathcal{G}$ é fortemente separante em Ω' caso

(1) $\mathcal{G}$ seja não nulo em cada ponto de Ω' i.e. $\mathcal{G}(x) \neq \{0\}$ para todo $x \in \Omega'$ e

(2) $\mathcal{G}$ separe os pontos de Ω' i.e. $\mathcal{G}(x) \neq \mathcal{G}(y)$ para $x, y \in \Omega'$ distintos.

PROPOSIÇÃO 4.1 - Sendo $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ densa em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ então:

(a) $\mathcal{G}$ é fortemente separante no conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que $\hat{\delta}_x^{(0)}$ é contínua (vide Observação 2.6).

(b) Sendo $m \geq 1$ temos $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau}(x) \neq \{0\}$ para $\tau \in \mathbb{R}^n$, $\tau \neq 0$, no conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que a aplicação $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \tau}(x) \in \mathbb{K}$ é contínua.

Demonstração: Vamos provar a proposição no caso real sendo evidentes as modificações para o caso complexo.

(a) Sejam $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ tais que as aplicações $\hat{\delta}_x^{(0)}$, $\hat{\delta}_y^{(0)}$ são contínuas. Sendo $A = \{f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega),\ f(x) = f(y)\} = (\hat{\delta}_x^{(0)} - \hat{\delta}_y^{(0)})^{-1}(0)$ temos que A é um sub-espaço fechado próprio de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. Supondo $\mathcal{G} \subset A$ sejam $r \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^r)$, $P(0) = 0$, $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{G}$. Então $P(g_1, \ldots, g_r)(x) = P(g_1, \ldots, g_r)(y)$ logo $\mathbb{R}[\mathcal{G}] \subset A$ contradizendo o fato que $\mathbb{R}[\mathcal{G}]$ é densa em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$. De maneira análoga prova-se que $\mathcal{G}$ é não nula no conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que $\delta_x^{(\rho)}$ é contínua.

(b) Seja $x \in \Omega$ tal que a aplicação $f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \tau}(x) \in \mathbb{R}$ é contínua para $\tau \in \mathbb{R}^n$, $\tau \neq 0$. Sendo $B = \{f \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega), \frac{\partial f}{\partial \tau}(x) = 0\}$ e supondo $\mathcal{G} \subset B$, temos $\mathbb{R}[\mathcal{G}] \subset B$ pois $\frac{\partial}{\partial \tau} P(g_1,\ldots,g_r)(x) =$ $= \sum_{j=1}^{r} \partial_j P(g_1,\ldots, g_r)(x) \frac{\partial g_j}{\partial \tau}(x) = 0$ se $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $g_1,\ldots$ $g_r \in \mathcal{G}$. Isso contradiz o fato que $\mathbb{R}[\mathcal{G}]$ é densa em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ pois B é um sub-espaço fechado próprio.

<u>OBSERVAÇÃO 4.3</u> - Sendo $m \geq 1$ e $V_\alpha > 0$ sôbre Ω para todo $|\alpha| \leq 1$, pela Observação 2.6 temos que $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ densa em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ acarreta $\mathcal{G}$ fortemente separante em Ω e $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau}(x) \not\subset \{0\}$ para todo $x \in \Omega$, $\tau \in \mathbb{R}^n$, $\tau \neq 0$. Nos casos em que $V_\alpha = \chi_c(\Omega)$ ou sendo $\Omega = \mathbb{R}^n$, $V_\alpha = \{1\}$ ou $V_\alpha = \{(1+\| \ \|^2)^k, k \in \mathbb{N}\}$ para todo α (vide Exemplos 1 e 2 do capítulo II), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e neste caso $\mathcal{G}$ auto-adjunto i.e. com cada função contém sua complexa conjugada, as condições anteriores sôbre $\mathcal{G}$ são também suficientes para que $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ seja densa em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ (cf. [6] e [10]). Entretanto, como consequência da Observação 3.5, temos que tais condições em geral não são suficientes.

<u>DEFINIÇÃO 4.5</u> - Sendo $\mathcal{G}$ um conjunto de funções contínuas em Ω, diz-se que $\mathcal{G}$ verifica a condição (S) se para todo $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, existem $g_1,\ldots, g_r \in \mathcal{G}$, ϕ contínua em $\mathbb{K}^r$, $\phi(0) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$ e $K \subset \Omega$ compacto tais que:

(1) $\phi(g_1,\ldots, g_r)(y) = 0 \neq \phi(g_1,\ldots,g_r)(x)$

(2) $x' \in \complement K \Longrightarrow |\phi(g_1,\ldots,g_r)(x')| \leq \lambda |\phi(g_1,\ldots,g_r)(x)|$

<u>OBSERVAÇÃO 4.4</u> - Na Definição 4.5 podemos supor $\phi \in \mathcal{B}^m(\mathbb{K}^r)$ onde $\mathcal{B}^m(\mathbb{C}^r) \equiv \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^{2r})$.

<u>OBSERVAÇÃO 4.5</u> - Se $\mathcal{G}$ verifica a condição (S) então também é fortemente separante em Ω, mas a recíproca em geral não é verdadeira sendo entretanto verdadeira quando $\mathcal{G} \subset \mathcal{Y}_\infty(\Omega)$.

<u>OBSERVAÇÃO 4.6</u> - Cada uma das seguintes hipóteses conduz a uma instância do fato de que $\mathcal{G}$ verifica a condição (S).

(1) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ sendo $\mathcal{G}_1$ separante em Ω, constituido de funções limitadas e $\mathcal{G}_2$ não nulo em cada ponto de Ω, constituido de funções nulas ao infinito.

(2) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ onde $\mathcal{G}_1$ é constituido de funções limitadas, $\mathcal{G}_2$ constituido de funções g_2 tais que para todo $M > 0$ existe $K \subset \Omega$ compacto de modo que $|g_2| | \complement K > M$ e além disso, $\mathcal{G}_1$ é separante em Ω e $\mathcal{G}_2$ é não nulo em cada ponto de Ω ou vice-versa.

Em tudo o que segue, salvo menção explícita em contrário, vamos supor que $m \geq 1$ e $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ é tal que $V_\alpha \leqslant V_{\alpha-\beta} V_\beta$ para todo α, β, $\beta \leqslant \alpha$. Em particular, $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é uma álgebra topológica pela Proposição 2.2 (a), logo a aderência de uma sub-álgebra de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ também é uma sub-álgebra.

<u>LEMA 4.1</u> - Sejam $g, g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega;\mathbb{R})$ tais que para todo $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$ existe um peso (D) quase-analítico u em $\mathbb{R}^r$ tal que $v_\alpha |\partial^\alpha g| \leqslant u(g_1, \ldots, g_r)$. Sendo $\phi \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^r; \mathbb{R})$ então a função $g \cdot \phi(g_1, \ldots, g_r)$ pertence à aderência da álgebra gerada por $g, g_1, \ldots, g_r$.

<u>Demonstração</u>: Vamos provar por indução sôbre $|\beta|$ que para todo $(\beta, v_\beta) \in I_V$, $\beta \neq 0$ existe constante $C = C(\beta, v_\beta) > 0$ tal que $v_\beta |\partial^\beta [\psi(g_1, \ldots, g_r)]| \leqslant C \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^r_{|\beta|}} |\partial^\gamma \psi(g_1, \ldots, g_r)|$ para todo $\psi \in \mathcal{E}^{|\beta|}(\mathbb{R}^r)$.

De fato, sendo $(\beta, v_\beta) \in I_V$ tal que $|\beta| = 1$, digamos $\beta = (0, \ldots, \underset{(i)}{1}, \ldots, 0)$

temos $\partial^{\beta}[\psi(g_1,\ldots,g_r)] = \sum_{j=1}^{r} \partial_j\psi(g_1,\ldots,g_r)\cdot \partial_i\, g_j$ para $\psi \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^r)$ logo $v_\beta|\partial^\beta[\psi(g_1,\ldots,g_r)]| \leqslant \sum_{j=1}^{r}\|v_\beta\ \partial^\beta\ g_j\|\cdot|\partial_j\psi(g_1,\ldots,g_r)| \leqslant$

$\max_{1\leqslant j\leqslant r}\|v_\beta\ \partial^\beta\ g_j\| \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_1^r}|\partial^\gamma\psi(g_1,\ldots,g_r)|$. Logo a afirmação é verdadeira para $|\beta| = 1$. Suponhamo-la verdadeira para $1 \leqslant |\beta| \leqslant m_0 < m$ e sejam $\psi \in \mathcal{E}^{m_0+1}(\mathbb{R}^r)$, $(\beta, v_\beta) \in I_V$, $|\beta| = m_0+1$. Ora, existe $\beta' \in \mathbb{N}^n$, $|\beta'| = m_0$ tal que $\beta = (\beta_1', \ldots, \beta_i'+1, \ldots, \beta_n')$ para algum i então $\partial^\beta[\psi(g_1,\ldots,g_r)] =$
$= \partial^{\beta'}(\sum_{j=1}^{r}\partial_j\,\psi(g_1,\ldots,g_r)\cdot\partial_i\,g_j) = \sum_{j=1}^{r}\partial_j\,\psi(g_1,\ldots,g_r)\cdot\partial^\beta\,g_j +$
$+ \sum_{j=1}^{r}\sum_{\beta''\leqslant\beta',\beta''\neq\beta'}\binom{\beta'}{\beta''}\partial^{\beta'-\beta''}[\partial_j\,\psi(g_1,\ldots,g_r)]\cdot\partial^{\beta''}(\partial_i\,g_j)$. Para $\beta''\leqslant\beta'$, $\beta''\neq\beta'$ seja $\overline{\beta}'' = (\beta_1'',\ldots,\beta_i''+1,\ldots,\beta_n'')$ observemos que $\beta'-\beta'' = \beta-\overline{\beta}''$ sendo $1 \leqslant |\beta-\overline{\beta}''| \leqslant m_0$ e como $V_\beta \leqslant V_{\beta-\overline{\beta}''}\cdot V_{\overline{\beta}''}$ então existem $v_{\beta-\overline{\beta}''} \in V_{\beta-\overline{\beta}''}$, $v_{\overline{\beta}''} \in V_{\overline{\beta}''}$ tais que $v_\beta \leqslant (\text{constante})\cdot v_{\beta-\overline{\beta}''}\cdot v_{\overline{\beta}''}$, logo pela hipótese de indução temos $v_\beta|\partial^{\beta'-\beta''}[\partial_j\,\psi(g_1,\ldots,g_r)]\cdot\partial^{\beta''}(\partial_i\,g_j)| \leqslant (\text{constante})\cdot$
$\cdot v_{\beta-\overline{\beta}''}|\partial^{\beta-\overline{\beta}''}[\partial_j\,\psi(g_1,\ldots,g_r)]|\cdot\|v_{\overline{\beta}''}\ \partial^{\overline{\beta}''}\ g_j\| \leqslant (\text{constante})\cdot$
$\cdot\sum_{|\gamma|\leqslant|\beta-\overline{\beta}''|}|\partial^\gamma(\partial_j\,\psi)\ (g_1,\ldots,g_r)| \leqslant (\text{constante})\sum_{|\gamma|\leqslant|\beta|}|\partial^\gamma\,\psi(g_1,\ldots,g_r)|$.
Por outro lado $v_\beta|\sum_{j=1}^{r}\partial_j\,\psi(g_1,\ldots,g_r)\cdot\partial^\beta g_j| \leqslant \sum_{j=1}^{r}|\partial_j\psi(g_1,\ldots,g_r)|\,\|v_\beta\ \partial^\beta\ g_j\| \leqslant$ $(\text{constante})\cdot\sum_{|\gamma|\leqslant|\beta|}|\partial^\gamma\,\psi(g_1,\ldots,g_r)|$. Disso segue $v_\beta|\partial^\beta[\psi(g_1,\ldots,g_r)]| \leqslant$ $(\text{constante})\sum_{|\gamma|\leqslant|\beta|}|\partial^\gamma\,\psi(g_1,\ldots,g_r)|$.

Dados $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$ e $\psi \in \mathcal{E}^m(\mathbb{R}^n)$ temos $\partial^\alpha\,[g\cdot\psi(g_1,\ldots,g_r)] =$
$= \partial^\alpha\,g\cdot\psi(g_1,\ldots,g_r) + \sum_{\beta\leqslant\alpha,\beta\neq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}g\cdot\partial^\beta[\psi(g_1,\ldots,g_r)]$ e sendo $V_\alpha\leqslant V_{\alpha-\beta}\cdot V_\beta$ para $\beta \leqslant \alpha$, existe constante $\lambda_{v_\alpha} > 0$ e pesos $v_{\alpha-\beta} \in V_{\alpha-\beta}$, $v_\beta \in V_\beta$ tais que $v_\alpha \leqslant \lambda_{v_\alpha}\cdot v_{\alpha-\beta}\cdot v_\beta$ para $\beta \leqslant \alpha$, $\beta \neq 0$, logo pelo resultado estabelecido antes temos $v_\alpha|\partial^{\alpha-\beta}\,g\cdot\partial^\beta[\psi(g_1,\ldots,g_r)]| \leqslant \lambda_{v_\alpha}\cdot v_{\alpha-\beta}|\partial^{\alpha-\beta}g|\cdot v_\beta|\partial^\beta[\psi(g_1,\ldots,g_r)]| \leqslant$ $(\text{constante})\cdot\ v_{\alpha-\beta}|\partial^{\alpha-\beta}\ g|\cdot\sum_{|\gamma|\leqslant|\beta|}|\partial^\gamma\psi(g_1,\ldots,g_r)|$ para $\beta \leqslant \alpha$, $\beta \neq 0$. Disso segue.

(1) $v_\alpha\cdot|\partial^\alpha[g\cdot\psi(g_1,\ldots,g_r)]| \leqslant \sum_{\beta<\alpha}(\text{constante})\cdot$ $v_{\alpha-\beta}|\partial^{\alpha-\beta}\ g|\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^r_{|\alpha|}}|\partial^\alpha\psi(g_1,\ldots,g_r)|$. Ora, por hipótese temos

$v_{\alpha-\beta}|\partial^{\alpha-\beta} g| \leqslant u(g_1, \ldots, g_r)$ onde $u \in \Delta_r$, $u = u(\alpha-\beta, v_{\alpha-\beta})$ então pela Observação 3.16 existe $u_{(\alpha, v_\alpha)} \in \Delta_r$ tal que

(2) $v_\alpha|\partial^\alpha[g\,\psi(g_1, \ldots, g_r)]| \leqslant$
$u_{(\alpha, v_\alpha)}(g_1, \ldots, g_r) \cdot \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^r_{|\alpha|}} |\partial^\gamma \psi(g_1, \ldots, g_r)$ para todo $\psi \in \mathcal{E}^m(\mathbb{R}^r)$.

Agora provemos o lema. Podemos supor m finito (Observação 2.12) logo dado $v \in V$ e $\mathcal{E} > 0$, por (2) e pela Observação 3.16 segue que existe $u \in \Delta_r$ tal que, para todo α temos

(3) $v_\alpha|\partial^\alpha[g\cdot\psi(g_1, \ldots, g_r)]| \leqslant u(g_1, \ldots, g_r) \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^r_m} |\partial^\gamma \psi(g_1, \ldots, g_r)|$ para todo $\psi \in \mathcal{E}^m(\mathbb{R}^r)$. Ora, $w \in \mathcal{U}^m(\mathbb{R}^r; \mathbb{R}_+)$ dado por $w^m_\gamma = u$ para todo $\gamma \in \mathbb{N}^r_m$ é fundamental pelo Teorema 3.3 e sendo $\phi \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^r; \mathbb{R})$ temos $\phi \in \mathcal{E}^m w_\infty(\mathbb{R}^r)$ logo dado $\delta > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^r; \mathbb{R})$ tal que $p_w(\phi-P) \leqslant \delta$. Então por (3) temos $p_v(g\cdot\phi(g_1, \ldots, g_r) - g\cdot P(g_1, \ldots, g_r)) =$
$= \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|v_\alpha\, \partial^\alpha[g(\phi-P)(g_1, \ldots, g_r)]\| \leqslant$
$\sum_{|\alpha| \leqslant m} \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^r_m} \|u(g_1, \ldots, g_r)\, \partial^\gamma(\phi-P)(g_1, \ldots, g_r)\| \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} \delta$ então podemos escolher δ suficientemente pequeno de modo que $p_v(g\cdot\phi(g_1, \ldots, g_r) - g\cdot P(g_1, \ldots, g_r)) < \mathcal{E}$. Como por (1) temos $g\cdot\phi(g_1, \ldots, g_r) \in \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ e por outro lado $g\cdot P(g_1, \ldots, g_r) \in \mathbb{R}[g, g_1, \ldots, g_r]$ completamos assim a prova do lema Q.e.d.

<u>LEMA 4.2</u> - Seja $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega; \mathbb{R})$ verificando a condição (S) e tal que para todo $g, g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{G}$ e $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$ existe um peso (D) quase-analítico u em $\mathbb{R}^r$, $u = u(\alpha, v_\alpha, g, g_1, \ldots, g_r)$ tal que $v_\alpha|\partial^\alpha g| \leqslant u(g_1, \ldots, g_r)$.

Então para todo par de compactos disjuntos $H_1, H_2 \subset \Omega$ existe $h \in \mathcal{D}^m(\Omega) \cap \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$ tal que $h|H_1 = 1$, $h|H_2 = 0$.

<u>Demonstração</u>: Dados $x \in H_1$, $y \in H_2$ pela Definição 4.5 e Observação 4.4 existem $g_1, \dots, g_r \in \mathcal{G}$, $\phi \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^r; \mathbb{R})$, $\phi(0) = 0$, $0 < \lambda < 1$, $K \subset \Omega$ compacto (dependendo de x e de y) tais que $\phi(g_1, \dots, g_r)(y) = 0 \neq \phi(g_1, \dots, g_r)(x)$ e $|\phi(g_1, \dots, g_r)(x')| \leq \lambda |\phi(g_1, \dots, g_r)(x)|$ para $x' \in \complement K$. Sendo $a = \phi(g_1, \dots, g_r)(x)$ existe $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\theta(a) \neq 0$, $\theta | [-\lambda|a|, \lambda|a|] = 0$. Visto que $\phi(0) = 0$ temos $g_i(x) \neq 0$ para algum i, logo podemos tomar θ de modo que $g_i(x) \ \theta(a) = 1$. Sendo $f_{x,y} = g_i(\theta \circ \phi)(g_1, \dots, g_r)$ temos $f_{x,y}(x) = 1$, $f_{x,y}(y) = 0$ e $f_{x,y} \in \mathcal{D}^m(\Omega)$, de fato, $\mathrm{Sup}(f_{x,y}) \subset K$. Além disso, pelo Lema 4.1 vem $f_{x,y} \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$. Ora, sendo $f_{x,y} = 0$ numa vizinhança de y, pela compacidade de H_2 existem $y_1, \dots, y_j \in H_2$ tais que a função $f_x = f_{x,y_1} \cdots f_{x,y_j}$ é nula em H_2. Temos $f_x(x) = 1$, $f_x \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ e além disso $f_x \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$ visto que esta é uma sub-álgebra. Sendo $f_x > 0$ numa vizinhança de x, pela compacidade de H_1, existem $x_1, \dots, x_k \in H_1$ e um número $b > 0$ tal que $f = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i} \geq b$ sôbre H_1, e além disso $f|H_2 = 0$. Seja $\theta_1 \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tal que $\theta_1(t) = 0$ para $t \leq 0$, $\theta_1(t) = 1$ para $t \geq b$ e ponhamos $h = \theta_1 \circ f$. Então $h|H_1 = 1$, $h|H_2 = 0$ e $h \in \mathcal{D}^m(\Omega)$. Vamos provar que $h \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$ e para tal podemos supor m finito (Observação 2.12). Sejam $v \in V$ e $\mathcal{E} > 0$. Notemos que sendo $\psi \in \mathcal{E}^m(\mathbb{R})$ tal que $\psi(0) = 0$ e como $f \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ então $\psi \circ f \in \mathcal{D}^m(\Omega)$, $\mathrm{Sup}(\psi \circ f) \subseteq \mathrm{Sup}(f)$ e $\|\partial^\alpha(\psi \circ f)\| \leq C_\alpha \max_{0 \leq k \leq |\alpha|} \|\psi^{(k)}\|_{[-c,c]}$ para $|\alpha| \leq m$ onde $c = \|f\|$ e C_α é uma constante que não depende de ψ. Pelo Teorema 1.1 dado $\delta > 0$ existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $P(0) = 0$ (cf. Observação 3.4) tal que $\max_{0 \leq k \leq m} \|(\theta_1 - P)^{(k)}\|_{[-c,c]} \leq \delta$ logo pelo observado acima temos $\|v_\alpha \cdot \partial^\alpha[(\theta_1 - P) \circ f]\| \leq \|v_\alpha\|_{\mathrm{Sup}(f)} \cdot C_\alpha \max_{0 \leq k \leq |\alpha|} \|(\theta_1 - P)^{(k)}\|_{[-c,c]} \leq C'_\alpha \cdot \delta$ onde $C'_\alpha = \|v_\alpha\|_{\mathrm{Sup}(f)} \cdot C_\alpha$. Então tomando δ suficientemente pequeno temos $p_v(h - P \circ f) = p_v(\theta_1 \circ f - P \circ f) \leq \mathcal{E}$. Como $f \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$ e $P(0) = 0$ segue $P \circ f \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$, logo $h \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$. Q.e.d.

COROLÁRIO 4.1 - Sob as hipóteses do Lema 4.2, dado $H \subset \Omega$ compacto e X vizinhança de H, existe $h \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$ tal que $h|H = 1$, $\mathrm{Sup}(h) \subset X$.

Demonstração: Pelo Lema 4.2 existe $h_0 \in \mathcal{D}^m(\Omega) \cap \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$ tal que $h_0|H = 1$. Se $\mathrm{Sup}(h_0) \not\subset X$ seja $H_1 = \mathrm{Sup}(h_0) - \overset{\circ}{X}$, então H_1 é um compacto disjunto de H, logo pelo Lema 4.2 existe $h_1 \in \mathcal{D}^m(\Omega) \cap \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$ tal que $h_1|H = 1$, $h|H_1 = 0$. Sendo $h = h_0\, h_1$ temos $h \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$, $h|H = 1$ e $\mathrm{Sup}(h) \subset X$.
Q.e.d.

No que segue suporemos que $\mathcal{G}$ é auto-adjunto no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ i.e. com cada função contém sua complexa conjugada.

TEOREMA 4.2 - Seja $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega; \mathbb{K})$ verificando a condição (S) e tal que $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau}(x) \neq \{0\}$ para todo $x \in \Omega$, $\tau \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Suponhamos que para todo $g, g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{G}$ e $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$ existe um peso (D) quase-analítico u em $\mathbb{R}^r$ tal que $v_\alpha|\partial^\alpha g| \leq u(|g_1|, \ldots, |g_r|)$. Então $\mathcal{D}^m(\Omega; \mathbb{K})$ está contido na aderência de $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$.

Demonstração: Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Sejam $f \in \mathcal{D}^m(\Omega; \mathbb{R})$ e X uma vizinhança compacta de $\mathrm{Sup}(f)$. Sendo $\mathcal{G}$ fortemente separante sôbre Ω e $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau}(x) \neq \{0\}$ para todo $x \in \Omega$, $\tau \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, pela demonstração da suficiência no Teorema 2, págs. 119-121 de [6] segue que existem $r \in \mathbb{N}^*$, $\phi \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^r; \mathbb{R})$, $\phi(0) = 0$, $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{G}$ tais que $f(x) = \phi(g_1, \ldots, g_r)(x)$ para $x \in X$. Ora, pela Observação 3.16 a condição $v_\alpha|\partial^\alpha g| \leq u(|g_1|, \ldots, |g_r|)$ pode ser substituida por $v_\alpha|\partial^\alpha g| \leq u(g_1, \ldots, g_r)$ logo pelo Corolário 4.1 existe $h \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$ tal que $h\,|\mathrm{Sup}(f) = 1$, $\mathrm{Sup}(h) \subset X$, em particular $f = h \cdot \phi(g_1, \ldots g_r)$ (em Ω). Seja K o compacto $[-c_1, c_1] \times \ldots \times [-c_r, c_r]$ onde $c_i = \|g_i\|_{\mathrm{Sup}(h)}$ $i = 1, \ldots, r$. Sendo u_0 a função característica do compacto K temos $u_0 \in \Delta_r$

e $v_\alpha|\partial^\alpha h| \leqslant \|v_\alpha \partial^\alpha h\| \cdot u_0(g_1,\ldots,g_r)$ para todo $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$, logo pelo Lema 4.1 temos que $h \cdot \phi(g_1,\ldots,g_r)$ pertence à aderência da álgebra gerada por $h, g_1,\ldots,g_r$ e como $h \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$ segue que $f = h\cdot\phi(g_1,\ldots,g_r) \in \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}]}$.

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Seja $\mathcal{G}_0$ o conjunto das funções $Re(g)$, $Im(g)$ onde $g \in \mathcal{G}$. Então $\mathcal{G}_0$ é um sub-conjunto de $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega; \mathbb{R})$ é obviamente verifica a condição (S). Dados $f, f_1,\ldots,f_r \in \mathcal{G}_0$, $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$ sejam $g, g_1,\ldots,g_r \in \mathcal{G}$ tais que $|\partial^\alpha f| \leqslant |\partial^\alpha g|$, $|f_i| \leqslant |g_i|$, $i = 1, \ldots r$. Ora, por hipótese existe $u \in \Delta_r$ tal que $v_\alpha|\partial^\alpha g| \leqslant u(|g_1|,\ldots,|g_r|)$ e pela Observação 3.16 podemos supor $u(t_1,\ldots,t_r) \leqslant u(s_1,\ldots,s_r)$ se $|s_i| \leqslant |t_i|$, $i = 1,\ldots,r$ logo $v_\alpha|\partial^\alpha f| \leqslant u(|f_1|,\ldots,|f_r|)$. Então pelo caso anterior temos $\mathcal{D}^m(\Omega; \mathbb{R}) \subset \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}_0]}$. Como $\mathbb{C}[\mathcal{G}]$ é uma álgebra auto-adjunta pois $\mathcal{G}$ é auto-adjunto, pelo Lema 4, pág. 47 de [9] temos $\mathbb{C}[\mathcal{G}] = Re(\mathbb{C}[\mathcal{G}]) + i\, Re(\mathbb{C}[\mathcal{G}])$ onde $Re(\mathbb{C}[\mathcal{G}])$ indica o conjunto $Re(h)$, $h \in \mathbb{C}[\mathcal{G}]$ e por outro lado temos $\mathbb{R}[\mathcal{G}_0] = Re(\mathbb{C}[\mathcal{G}])$ logo $\mathbb{C}[\mathcal{G}] = \mathbb{R}[\mathcal{G}_0] + i\,\mathbb{R}[\mathcal{G}_0]$, então pelo Teorema 2.1 (b) segue $\overline{\mathbb{C}[\mathcal{G}]} = \overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}_0]} + i\,\overline{\mathbb{R}[\mathcal{G}_0]}$ donde vem finalmente $\overline{\mathbb{C}[\mathcal{G}]} \supset \mathcal{D}^m(\Omega; \mathbb{R}) + i\mathcal{D}^m(\Omega; \mathbb{R}) = \mathcal{D}^m(\Omega; \mathbb{C})$ Q.e.d.

TEOREMA 4.3 - Seja $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega; \mathbb{K})$ verificando a condição (S) e tal que $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau}(x) \neq \{0\}$ para todo $x \in \Omega$, $\tau \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Se para todo $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$ as funções de $\mathcal{G}$ são limitadas no suporte de v_α, então $\mathcal{D}^m(\Omega) \subset \overline{\mathbb{K}[\mathcal{G}]}$.

Demonstração: Sejam $g, g_1,\ldots,g_r \in \mathcal{G}$, $(\alpha, v_\alpha) \in I_V$. Por hipótese temos $c_i = \|g_i\|_{Sup(v_\alpha)} < +\infty$ $(i = 1,\ldots r)$ logo se u é a função característica do compacto $[-c_1, c_1] \times \ldots \times [-c_r, c_r]$ temos $v_\alpha|\partial^\alpha g| \leqslant \|v_\alpha \partial^\alpha g\|\, u(|g_1|,\ldots,|g_r|)$. Então a afirmação segue do Teorema 4.2. Q.e.d.

OBSERVAÇÃO 4.7 - Sejam V, $\mathcal{G}$ verificando as hipóteses dos Teoremas 4.2 e 4.3 (quanto à condição (S) vide Observação 4.6). Se além disso, V é regular, então obtemos condições suficientes para que $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ seja densa em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega; \mathbb{K})$ (vide Proposição 2.3, Teorema 2.4 e Corolários 2.1 e 2.4).

<u>COROLÁRIO 4.2</u> - Sendo $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ onde $V_\alpha = C(\Omega; \mathbb{R}_+)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n_m$ (vide Exemplo 5, Capítulo II) então $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ é densa se e só se $\mathcal{G}$ é fortemente separante em Ω e $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau}(x) \neq \{0\}$ para todo $x \in \Omega$, $\tau \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

<u>Demonstração</u>: A necessidade resulta da Observação 4.3 A suficiência resulta das Observações 2.11, 4.5 e do Teorema 4.3.

<u>COROLÁRIO 4.3</u> - Sendo $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}^m_u(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ (vide Exemplo 2, Capítulo II) então $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ é densa se e só se $\mathcal{G}$ é fortemente separante em $\mathbb{R}^n$ e $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau}(x) \neq \{0\}$ para todo x, $\tau \in \mathbb{R}^n$, $\tau \neq 0$.

<u>Demonstração</u>: Idêntica a do Corolário 4.2.

<u>TEOREMA 4.4</u> - Seja $V \in \mathcal{N}^m[\Omega]$ regular. Então $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega)$ é separável.

<u>Demonstração</u>: Seja $\{x_1, x_2, \ldots\}$ uma enumeração do conjunto dos pontos de Ω com coordenadas racionais. Para $k, r \in \mathbb{N}^*$ seja $\theta_{k,r} \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ tal que $\theta_{k,r}|\overline{B}_{1/2r}(x_k) = 1$, $\mathrm{Sup}(\theta_{k,r}) \subset B_{1/r}(x_k)$ caso a bola fechada $\overline{B}_{1/2r}(x_k)$ esteja contida em Ω, $\theta_{k,r} = 0$ em outro caso. Denotando por π_i a i-ésima projeção sôbre $\mathbb{R}^n$ seja

$$\mathcal{G} = \{\pi_i \cdot \theta_{k,r}\ ,\quad i = 1,\ldots,n;\ k, r \in N^*\}$$

Sendo $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ existe $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $1/r < \min(\|x-y\|, \mathrm{dist}(x, \complement\Omega))$. Ora, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $x \in \overline{B}_{1/6r}(x_k)$ logo $\theta_{k,3r}(x) = 1$ e como $\|y - x_k\| > 1/3r$. segue $\theta_{k,3r}(y) = 0$. Então $\mathcal{G}$ é fortemente separante em Ω. Sendo $x \in \Omega$, $\tau \in \mathbb{R}^n$, $\tau \neq 0$ digamos $\tau_i \neq 0$ sejam $k, r \in \mathbb{N}^*$ tais que $x \in \overline{B}_{1/2r}(x_k)$, então $\frac{\partial}{\partial \tau}(\pi_i \cdot \theta_{k,r})(x) = \tau_i \cdot \theta_{k,r}(x) \neq 0$. Então pelo Teorema 4.3 segue $\mathcal{D}^m(\Omega) \subset \mathbb{K}[\mathcal{G}]$ logo $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ é densa em $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega; \mathbb{K})$. Seja $\mathcal{Q}$ o conjunto das funções do tipo $P(g_1, \ldots, g_s)$, $s \in \mathbb{N}^*$, $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{G}$, $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^s)$, onde P é um polinômio com coeficientes racionais. É imediato que $\mathcal{A}$ é denso em $\mathbb{K}[\mathcal{G}]$ e sendo enumerável segue $\mathcal{E}^m V_\infty(\Omega; \mathbb{K})$ separável.

OBSERVAÇÃO 4.8 - A hipótese $V_\alpha \leqslant V_{\alpha-\beta} \cdot V_\beta$ para $\beta \leqslant \alpha$ feita no parágrafo que antecede ao Lema 4.1 não é necessária para a validez do Teorema 4.4.

OBSERVAÇÃO 4.9 - Conjeturamos que os Teoremas 4.2 e 4.3 são válidos substituindo a hipótese de que $\mathcal{G}$ verifica a condição (S) pela de $\mathcal{G}$ ser fortemente separante em Ω. Com o novo enunciado previsto, o Teorema 4.2 teria como caso particular o Teorema 2 de [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] - N. Bourbaki, Espaces Vectoriels Topologiques, Cap. I-V, Hermann, Paris, 1953, 1955.

[2] - C. Buck, Bounded continuous functions on a locally compact space, Michigan Math. J.5 (1958) p.95-104.

[3] - J. Horvath, Topological Vector Spaces and Distributions, Addison--Wesley, Reading, 1966.

[4] - S. Mandelbrojt, Séries Adhérentes, régularisation des suites, aplications, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[5] - L. Nachbin, Sur les algèbres denses de fonctions différentiables sur une varieté, C.R. Acad. Sci. Paris 228 (1949) p. 1549-1551.

[6] - L. Nachbin, Formulação geral do teorema de aproximaçao de Weierstrass para funções diferenciáveis, Tópicos de Topologia, Exposições de Matemática. Nº 3 (1961) p. 115-123.

[7] - L. Nachbin, Résultats récents et problèmes de nature algébrique en théorie de l'approximation, Proc. Int. Congr. Math. Stockholm, 1962, p. 379-384.

[8] - L. Nachbin, Topics on Topological Vector Spaces, University of Rochester, Rochester, 1963.

[9] - L. Nachbin, Elements of Approximation Theory, D. Van Nostrand, Princeton, 1967.

[10] - G. Reid, A theorem of Stone-Weierstrass type, Proc. Camb Phil.Soc. 62 (1966), p. 649-666.

[11] - A. Robertson and W. Robertson, Topological Vector Spaces, Cambridge University Press, New York, 1964.

[12] - W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[13] - N. Sibony, Problème de Bernstein pour les fonctions continument diférentiables, C. R. Acad. Sc. Paris 270 (1970) p. 1683-1685.

[14] - W. Summers, A representation theorem for biequicontinuous completed tensor products of weighted spaces Trans. Amer. Math. Soc. 146 (1969) p. 121-131.

[15] - W. Summers, Dual spaces of weighted spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 151 (1970) p. 323-333.