

MONOGRAFIAS

XXVIII

CIRCUITOS ELETRÔNICOS INTEGRADOS

por

Artur Schechtman

*Notas de aula redigidas por:*

*Eloy Rudolfo Schutz e Carlos Gomes da Silva*

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71 - Botafogo - ZC-82

RIO DE JANEIRO, BRASIL

1971

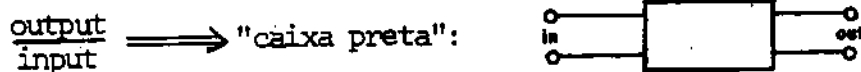


## PREFÁCIO

Este trabalho é baseado em notas de aula dos Engenheiros Carlos Gomes da Silva e Eloy Rudolfo Schutz, tomadas durante o curso sôbre Síntese com Gyration e outros Módulos Integrados, ministrado pelo Professor Artur Schechtman no período Agosto-Dezembro de 1970 nêste Centro. Em consequência, embora esforços tenham sido envidados no sentido de tornar o trabalho claro e acessível, êle não deve ser encarado como auto suficiente, mas sim como um valioso elemento de auxílio em futuros cursos.

## CIRCUITOS ELETRÔNICOS INTEGRADOS

SÍNTESE - dá-se a relação entre "entrada" e "saída".

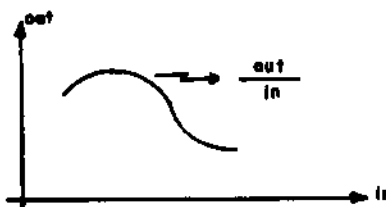


A Síntese pode ser considerada em dois grupos:

a) Problema da aproximação.

$$\text{output} = f_1(t)$$

$$\text{input} = f_2(t)$$



b) Realização física da "caixa preta" que produz a desejada relação:  $\frac{\text{out}}{\text{in}}$ .

Síntese Passiva - usa, exclusivamente, elementos passivos.

Síntese Ativa usa também elementos ativos.

Síntese Ativa Integrada - quando integramos a rede. Para que "L" possa ser facilmente integrável, substitue-se a Bobina pelo Gyra<sub>t</sub>tor.

### FILTROS:

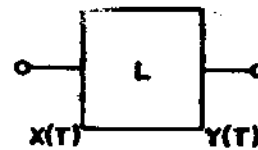
RC ativo	-	responde bem a uma faixa de	$10^{-2}$ Hz a $10^6$ Hz.
C, Gyra <sub>t</sub> tor	-	" " " " " "	$10^1$ Hz a $10^5$ Hz.
LC	-	" " " " " "	$10^2$ Hz a $10^5$ Hz.
Cerâmica	-	" " " " " "	$10^6$ Hz a $10^8$ Hz.

### PARÂMETROS QUE DETERMINAM A SELEÇÃO DE UM FILTRO:

- 1) Performance;
- 2) Custos;
- 3) Sensibilidade;
- 4) Dissipação;
- 5) Volume.

## ANÁLISE DE UM FILTRO - ASPECTOS FUNDAMENTAIS

Seja uma "caixa preta", conforme a figura ao lado, descrevendo uma "Two-port" (dois pares de terminais acessíveis), onde:



L - operador que dá as características da caixa;  
X(t), Y(t) - tensões ou correntes, por exemplo.

Temos que:

$$Y(t) = L[X(t)] \quad (I)$$

Por definição, L será linear se:

a) Para:

$$\begin{cases} Y_1(t) = L[X_1(t)] \\ Y_2(t) = L[X_2(t)] \end{cases}$$

Ocorrer:

$$Y_1(t) + Y_2(t) = L[X_1(t) + X_2(t)]$$

$$b) \quad \alpha Y_1(t) = L[\alpha X_1(t)]$$

( $\alpha$  é uma constante independente do tempo t)

Os itens "a" e "b" definem o operador linear L. Então a proposição (I) é, por definição, um Filtro.

## TRANSFORMADA DE LAPLACE:

$$f(t) \longrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

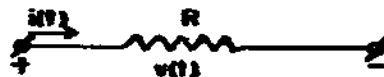
p indica frequência complexa

$$p = \sigma + j\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

## ELEMENTOS IDEAIS LINEARES:

1) Resistor:



$$\begin{cases} v(t) = R \cdot i(t) \\ V(p) = R \cdot I(p) \end{cases}$$

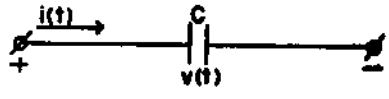
2) Indutor:



$$\begin{cases} v(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \quad i(t) = \frac{1}{L} \int v dt \\ V(p) = pL \cdot I(p) - L I_0 \end{cases}$$

$I_0$  - corrente na bobina no instante  $t = 0$ . Em geral,  $I_0 = 0$ .

3) Capacitor:



$$\left. \begin{array}{l} C = \frac{dq}{dv} = \frac{i dt}{dv} \Rightarrow i(t) = C \frac{dv}{dt} \\ v(t) = \frac{1}{C} \int i dt \\ I(p) = pC.V(p) - CV_0 \end{array} \right\}$$

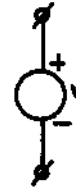
$V_0$  - tensão no capacitor no instante  $t = 0$ . Em geral,  $V_0 = 0$ .

4) Fonte de Tensão:

$v(t)$  é dado:

$i(t)$  é indeterminado;

A impedância interna é nula.



5) Fonte de Corrente:

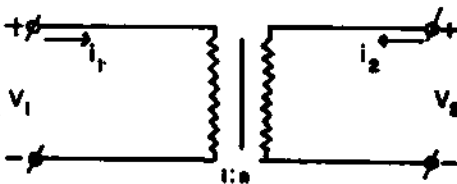
$i(t)$  é dado:

$v(t)$  é indeterminado;

A impedância interna é infinita.



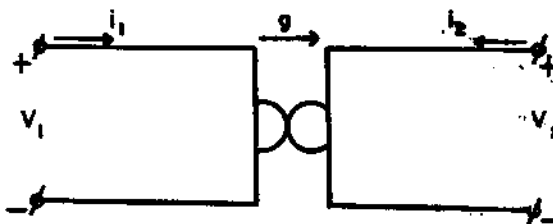
6) Transformador:



$$\left\{ \begin{array}{l} V_2(t) = n V_1(t) \\ i_2(t) = -\frac{1}{n} i_1(t) \\ \text{no plano } p: \\ V_2(p) = n V_1(p) \\ I_2(p) = -\frac{1}{n} I_1(p) \end{array} \right.$$

$n$  - relação de transformação (grandeza adimensional)

7) Gyrator:



$$\left\{ \begin{array}{l} i_1(t) = g V_2(t) \\ i_2(t) = -g V_1(t) \\ \text{no plano } p: \\ I_1(p) = g V_2(p) \\ I_2(p) = -g V_1(p) \end{array} \right.$$

$g$  - condutância de giração.

Os itens acima se referem a elementos supostos ideais, mas quanto ao aspecto prático, ou seja de fabricação, ver-se-á que não se comportam como elementos ideais.

### FATOR DE MÉRITO

a) Para um elemento com Imitância  $X + jY$  que é quase puramente real, temos que:

$$Q = \left| \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} \right|$$

b) Se o elemento tem imitância quase puramente imaginária, temos que:

$$Q = \left| \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \right|$$

$\delta$  é o ângulo de perda. Temos que:  $\text{tg } \delta = \frac{1}{Q}$ .

Se  $Q$  aumenta, então  $\delta$  diminui.

Se  $Q$  é de valor muito elevado, então o elemento se aproxima do estado ideal.

### TRANSFORMADOR IDEAL E GYRATOR IDEAL SÃO ELEMENTOS LOSS-LESS:

Usando-se a propriedade fundamental:

$$V_1(t) \cdot i_1(t) + V_2(t) \cdot i_2(t) \equiv 0$$

temos:

a) Para o Transformador:

$$V_1(t) \cdot i_1(t) + n V_1(t) - \frac{1}{n} \dots i_1(t) \equiv 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sendo:} \\ n V_1(t) = V_2(t) \\ - \frac{1}{n} i_1(t) = i_2(t) \end{array} \right.$$

$n$  é a relação de transformação.

b) Para o Gyrator:

$$V_1(t) \cdot i_1(t) + V_2(t) \cdot i_2(t) = V_1(t) \cdot g V_2(t) + V_2(t) \cdot [-g V_1(t)] \equiv 0$$

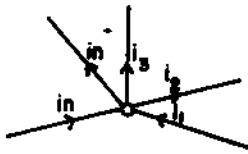
sendo:  $i_1(t) = g V_2(t)$  e  $i_2(t) = -g V_1(t)$ .

Conclusão: O Transformador Ideal e o Gyrator Ideal apenas transferem energia.  
São dois elementos Loss-Less pois não dissipam energia.

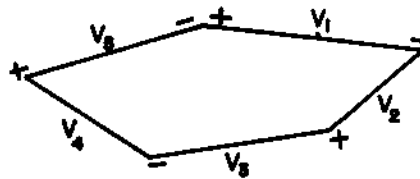
### RÉDES ELÉTRICAS:

Rêde Elétrica - é um conjunto de elementos elétricos conectados entre si.

### Leis de Kirchoff:



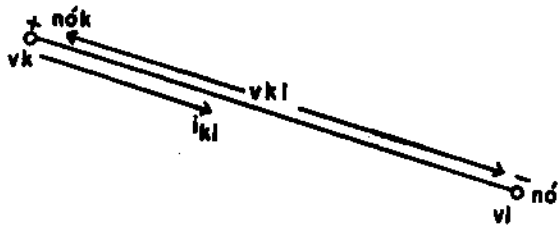
$$\Sigma i = 0$$



$$\Sigma v = 0$$

Para os nós genéricos "k" e "l", temos, respectivamente, as tensões  $v_k$  e  $v_l$  em relação a um ponto de referência.

Temos a seguinte configuração:



Queremos calcular: 
$$\sum_k \sum_{\substack{l \\ k \neq l}} v_{kl} \cdot i_{kl}$$

Desenvolvendo:

$$\sum_k \sum_{k \neq l} v_{kl} \cdot i_{kl} = \sum_k \sum_{k \neq l} (v_k - v_l) \cdot i_{kl} = \sum_k \sum_{k \neq l} v_k \cdot i_{kl} - \sum_k \sum_{k \neq l} v_l \cdot i_{kl} =$$

$$= \sum_k \sum_{k \neq l} v_k \cdot i_{kl} - \sum_l \sum_{k \neq l} v_l \cdot i_{kl} = \sum_k v_k \sum_{k \neq l} i_{kl} - \sum_l v_l \sum_{k \neq l} i_{kl}$$

Considerando "k" como n $\circ$  fixo e "l" como n $\circ$  vari $\acute{a}$ vel, temos:

$$\sum_l i_{kl} = 0$$

Considerando "k" como n $\circ$  vari $\acute{a}$ vel e "l" como n $\circ$  fixo, temos:

$$\sum_k i_{kl} = 0$$

Ent $\tilde{a}$ o, pelas leis de Kirchoff, conclu $\tilde{a}$ mos que:

$$\sum_k \sum_{k \neq l} v_{kl} \cdot i_{kl} \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{\text{ramos}} V_{\text{ramo}} \cdot I_{\text{ramo}} \equiv 0$$

A express $\tilde{a}$ o acima  $\acute{e}$  conhecida como "Teorema de Tellegen".

Tomando-se os complexos conjugados, teremos:

$$\sum_k \sum_{k \neq l} v_k^* \cdot i_{kl}^* - \sum_l \sum_{k \neq l} v_l \cdot i_{kl}^* = \sum_k \sum_{k \neq l} v_{kl} \cdot i_{kl}^* \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{ou}$$

$$\sum_{\text{ramos}} V_{\text{ramo}} \cdot I_{\text{ramo}}^* \equiv 0$$

Assim tamb $\acute{e}$ m:

$$\sum_k \sum_{k \neq l} v_{kl}^* \cdot i_{kl} = \sum_k \sum_{k \neq l} (v_k^* - v_l^*) \cdot i_{kl} = \sum_k \sum_{k \neq l} v_k^* \cdot i_{kl} - \sum_l \sum_{k \neq l} v_l^* \cdot i_{kl} =$$

$$= - \sum_l v_l^* \sum_k i_{kl} + \sum_k v_k^* \sum_l i_{kl} \equiv 0 \quad \text{pois:} \quad \sum_k i_{kl} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_l i_{kl} = 0$$

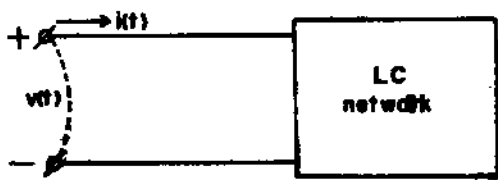


Então, em variável  $p$ , temos que:

$$\sum_k \sum_{\substack{l \\ k \neq l}} V_k^* \cdot I_{kl} \equiv 0$$

ONE-PORT NETWORK - Rede com um par de terminais acessíveis. Pode-se substituir a rede por três tipos de ramos: bobina; capacitor; nem bobina nem capacitor.

"LC" ONE-PORT:



Aplicando à rede acima a relação de Tellegen:  $\sum_k \sum_{\substack{l \\ k \neq l}} V_{kl} \cdot I_{kl}^* \equiv 0$ , temos:

$$\sum_{\text{ramos c/capacitores}} V_{kl} I_{kl}^* + \sum_{\text{ramos com bobinas}} V_{kl} I_{kl}^* - VI^* \equiv 0$$

ou

$$\sum_{\text{ramos c/capacitores}} V_{kl} I_{kl}^* + \sum_{\text{ramos c/bobinas}} V_{kl} I_{kl}^* = VI^* = \sum_{\text{ramos c/capacitores}} \frac{1}{pC_{kl}} I_{kl} I_{kl}^* +$$

$$\sum_{\text{ramos c/bobinas}} pL_{kl} I_{kl} I_{kl}^* = \frac{1}{p} \sum_{\text{ramos c/capacitores}} \frac{1}{C_{kl}} |I_{kl}|^2 + p \sum_{\text{ramos c/bobinas}} L_{kl} |I_{kl}|^2$$

Fazendo-se:  $\sum_{\text{ramos c/bobinas}} L_{kl} |I_{kl}|^2 = T_o$  e  $\sum_{\text{ramos c/capacitores}} \frac{1}{C_{kl}} |I_{kl}|^2 = V_o$

Temos:

$$V(p) \cdot I^*(p) = p T_o + \frac{1}{p} V_o$$

Aplicando-se na entrada um impulso unitário de corrente, temos:

$$i(t) = \delta(t)$$

Então a Transformada de Laplace terá valor unitário:

$$I(p) = 1 \quad \text{e} \quad I^*(p) = 1$$

A Impedância de Entrada da rede LC será dada pela expressão:

$$Z(p) = \frac{V(p)}{I(p)} = V(p) = p T_0 + \frac{1}{p} V_0$$

A expressão acima foi obtida pela Transformada de Laplace da resposta da rede quando aplicamos um impulso unitário de corrente.

Propriedade Fundamental:  $T_0$  e  $V_0$  são ambos números reais e positivos e são função da frequência.

Considerando a expressão:  $\sum_k \sum_l V_{kl}^* I_{kl} \equiv 0$

E se aplicarmos à rede LC, teremos:

$$V^* I = \sum_C V_{kl}^* \cdot I_{kl} + \sum_L V_{kl}^* \cdot I_{kl} = \sum_C V_{kl}^* \cdot \frac{V_{kl}}{\frac{1}{pC_{kl}}} + \sum_L V_{kl}^* \cdot \frac{V_{kl}}{pL_{kl}}$$

então:

$$V^* I = p \sum_C C_k |v_k|^2 + \frac{1}{p} \sum_L \frac{1}{L_{kl}} |v_{kl}|^2$$

Fazendo-se:

$$\sum_C C_{kl} |v_{kl}|^2 = T_0' \quad \text{e} \quad \sum_L \frac{1}{L_{kl}} |v_{kl}|^2 = V_0'$$

Temos:

$$V^* I = p T_0' + \frac{1}{p} V_0'$$

Aplicando-se na entrada um impulso unitário de tensão, temos:

$$v(t) = \delta(t)$$

Então a Transformada de Laplace terá valor unitário:

$$V(p) = 1 \quad \text{e} \quad V^*(p) = 1$$

A Admitância de Entrada da rede LC será dada pela expressão:

$$Y_l(p) = \frac{I(p)}{V(p)} = I(p) = p T_0' + \frac{1}{p} V_0'$$

A expressão acima é idêntica à anterior.

Numa rede contendo, apenas, elementos L e C ideais não existe dissipação de energia, logo é uma rede Loss-Less, i.é., sem perdas.

Faremos a seguir, um estudo de algumas propriedades da Impedância de Entrada, com a finalidade de Sintetizar a Rede LC.

Seja a expressão:

$$Z(p) = p T_0 + \frac{1}{p} V_0$$

Esta expressão da Impedância de Entrada é sempre dada pelo quociente de dois polinômios função de p.

To e Vo são funções de p:  $T_0 = T_0(p)$  e  $V_0 = V_0(p)$ .

Seja uma função F(p) tal que:

- a) F(p) é real para p real;
- b)  $\text{Re} [F(p)] \geq 0$  para  $\text{Re} [p] \geq 0$

Se estas condições forem satisfeitas simultaneamente, então a função F(p) será uma Função Real Positiva.

Verificaremos, a seguir, se a expressão da Impedância de Entrada é uma Função Real Positiva.

Temos: 
$$Z(p) = p T_0 + \frac{1}{p} V_0$$

onde: 
$$p = \sigma + j\omega$$

To e Vo são números reais positivos. Se p é real verificamos que Z(p) é real. Então a 1ª condição está satisfeita. É uma condição necessária, mas não suficiente.

Verifiquemos se a 2ª condição existe:

$$Z(p) = (\sigma + j\omega)T_0 + \frac{V_0}{\sigma + j\omega} = \sigma T_0 + j\omega T_0 + \frac{V_0 (\sigma - j\omega)}{\sigma^2 + \omega^2}$$

Então a parte real desta expressão será:

$$\text{Re} [Z(p)] = \sigma T_0 + \frac{V_0 \sigma}{\sigma^2 + \omega^2}$$

Observações:

Se o  $\text{Re}[p] = \sigma = 0$  então o Real da função  $Z(p)$  será nulo; então, a 1ª condição está satisfeita.

Se o  $\text{Re}[p] > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $T_0$  e  $V_0$  são reais positivos, então a Impedância de Entrada da rede LC é uma Função Real Positiva.

A expressão de Admitância de Entrada:  $Y(p) = p T_0' + \frac{1}{p} V_0'$  é também uma Função Real Positiva. Demonstra-se de modo idêntico.

#### PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES REAIS POSITIVAS:

Dadas as funções:  $F_1(p)$  e  $F_2(p)$ ; se são reais e positivas, então:

A soma das funções é Real e Positiva:  $F_1(p) + F_2(p)$

O produto das funções é Real e Positivo:  $F_1(p) \times F_2(p)$

Porém a diferença das funções:  $F_1(p) - F_2(p)$  é indeterminada, podendo ser real e positiva, ou não.

Se  $F(p)$  é uma função real positiva, então  $F\left(\frac{1}{p}\right)$  também é uma função real positiva.

#### CÁLCULO DOS VALORES DE $p$ PARA OS QUAIS A FUNÇÃO $F(p)$ SE ANULA:

Seja  $F(p)$  a expressão da Impedância:  $Z(p) = p T_0 + \frac{1}{p} V_0 = 0$ .

Para  $Z(p) = 0$ , temos que:  $p^2 = -\frac{V_0}{T_0} \rightarrow p = \pm j \sqrt{\frac{V_0}{T_0}}$ .

Os zeros de  $Z(p)$  são imaginários e complexos conjugados.

Seja  $F(p)$  a expressão da Admitância:  $Y(p) = p T_0' + \frac{1}{p} V_0' = 0$ .

Para  $Y(p) = 0$ , temos que:  $p = \pm j \sqrt{\frac{V_0'}{T_0'}}$ .

Também os zeros de  $y(p)$  são imaginários e complexos conjugados.

Como:  $Z(p) = \frac{1}{Y(p)}$

então os zeros da Admitância de Entrada são os polos da Impedância de Entrada.

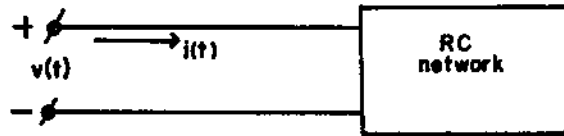
Se:  $Z(p) = \frac{1}{Y(p)}$

então o valor de  $p$  que faz  $Y(p) = 0$  faz também  $Z(p) = \infty$

Conclusão: OS POLOS E ZEROS DA IMPEDÂNCIA DE ENTRADA  $Z(p)$  SÃO IMAGINÁRIOS E COMPLEXOS CONJUGADOS.

### SITUAÇÃO DE UMA REDE RC:

Seja uma rede que contém sô R e C.



Aplicando a relação de Tellegen:  $\sum_k \sum_l V_{kl} \cdot I_{kl}^* \equiv 0$ , teremos

$$\begin{aligned} VI^* &= \sum_R V_{kl} \cdot I_{kl}^* + \sum_C V_{kl} I_{kl}^* = \sum_R R I_{kl} I_{kl}^* + \sum_C \frac{1}{pC_{kl}} I_{kl} \cdot I_{kl}^* = \\ &= \sum_R R_{kl} |I_{kl}|^2 + \frac{1}{p} \sum_C \frac{1}{C_{kl}} |I_{kl}|^2 = U_0 + \frac{1}{p} V_0 \end{aligned}$$

$$VI^* = U_0 + \frac{1}{p} V_0$$

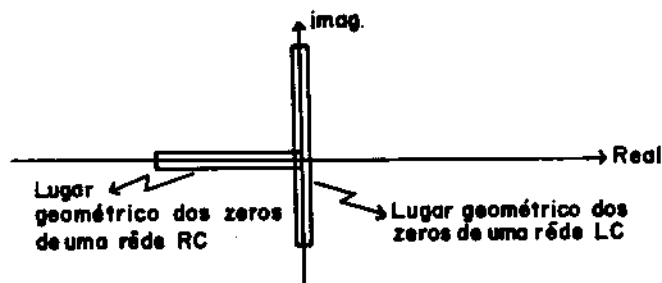
$V_0$  e  $U_0$  são reais positivos.

Teremos também que a Impedância de Entrada será:

$$Z(p) = U_0 + \frac{1}{p} V_0 .$$

Se fizermos  $Z(p) = 0$ , concluiremos que:  $p = -\frac{V_0}{U_0}$ .

Teremos, então, no plano p complexo:



Importante para Sintonização:

NOS CIRCUITOS RC OS ZEROS ESTÃO SEMPRE NO EIXO REAL NEGATIVO E NOS CIRCUITOS LC OS ZEROS ESTÃO SEMPRE NO EIXO IMAGINÁRIO.

Seja a função  $F(p)$ , abaixo:

$$F(p) = \frac{2p^2 + 6p + 5}{(p+1)^2(p+2)} = \frac{A}{(p+1)^2} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}$$

Temos que  $(p+1)^2(p+2)$  é o fator comum do denominador.

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} 2p^2 + 6p + 5 &\equiv A(p+2) + B(p+1)(p+2) + C(p+1)^2 \equiv \\ &\equiv Ap + 2A + Bp^2 + 3Bp + 2B + Cp^2 + 2Cp + C \\ 2p^2 + 6p + 5 &\equiv (B+C)p^2 + (A+3B+2C)p + (2A+2B+C) \end{aligned}$$

Pelo Método dos Coeficientes de Descartes, teremos:

- (1)  $2 = B+C$
- (2)  $6 = A + 3B + 2C$
- (3)  $5 = 2A + 2B + C$

Subtraindo (3) de (2), teremos:  $1 = -A + B + C$ .

Porém:  $B + C = 2$

Então:  $1 = -A + 2 \rightarrow A = 1$ .

Entrando com o valor  $A=1$  na equação (2), teremos:  $5 = 3B + 2C$ . Mas da equação (1), temos:  $C = 2-B$ , então:  $5 = 3B + 2(2-B) = 3B+4 - 2B \therefore 5 = B+4 \rightarrow B = 1$ .

Então, com  $B=1$  na equação (1), teremos:  $C = 1$ .

Deste modo temos a função dada decomposta em frações parciais.

Na vizinhança de  $p \cong -1$  teremos:  $F(p) \cong \frac{1}{(p+1)^2}$

Na vizinhança de  $p \cong -2$  teremos:  $F(p) \cong \frac{1}{p+2}$

Se tivermos um polo de  $Z$  de ordem  $m$ , em  $p = j\omega_0$ . ( $p = j\omega_0$  é um pólo de  $Z(p)$  de ordem  $m$ ), então, na vizinhança de  $p = j\omega_0$  teremos:

$$Z(p) \cong \frac{a_m}{(p-jw_0)^m}$$

Passando para a forma polar, fazendo.  $p - jw_0 = \epsilon e^{j\phi}$  onde:  $\epsilon > 0$  e  $0 < \phi < 2\pi$ .

E substituindo em  $Z(p)$ , teremos:

$$Z(p) = \frac{a_m}{(\epsilon e^{j\phi})^m} = \frac{a_m}{\epsilon^m} \cdot e^{-jm\phi}$$

Calculando o valor da parte real de  $Z(p)$ :  $\text{Re}[Z(p)] = \frac{a_m}{\epsilon^m} \cos(m\phi)$

Pois:  $\text{Re} e^{-jm\phi} = \cos(m\phi)$

Visto que:  $\cos(-m\phi) = \cos(m\phi)$

O valor de  $p = \sigma + jw$ , então

$$\sigma + jw - jw_0 = \epsilon(\cos \phi + j \text{sen} \phi)$$

Concluimos que:

$$\sigma = \epsilon \cos \phi \implies (\text{parte real de } p)$$

$$(w-w_0 = \epsilon \text{sen} \phi)$$

Então se:

$$\text{Re}(p) = \sigma = \epsilon \cos \phi \geq 0 \implies \text{Re}[Z(p)] \geq 0$$

Pela definição de Função Real Positiva:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon \cos \phi \geq 0 \\ \epsilon \geq 0 \end{array} \right\} \implies \cos \phi \geq 0 \implies -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$e \cos m\phi \geq 0 \implies -\frac{\pi}{2} \leq m\phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Quando: } a_m \geq 0 \\ \cos m\phi \geq 0 \end{array} \right\} \implies m \leq 1$$

Porém  $m$  é número inteiro; logo:  $m=1$ .

Conclusão:

OS POLOS DA IMITÂNCIA DE ENTRADA DE UMA REDE LC ESTÃO LOCALIZADOS NO EIXO IMAGINÁRIO, SÃO SIMPLES, ISTO É,  $m = 1$  (SÓ PODE EXISTIR UM POLO E NÃO MAIS QUE UM NUMA DETERMINADA LOCALIZAÇÃO) E OS RESÍDUOS SÃO REAIS POSITIVOS.

Os Resíduos são valores de  $a_m$ .

Expressão Geral da Impedância de Entrada de uma rede LC:

$$Z(p) = \sum_k \frac{a_k}{p - j\omega_k} + \frac{a_0}{p} + a_\infty p$$

Observamos que:

Para  $p=0$  teremos  $Z(p) = \infty$ .  $a_0$  é o resíduo do pólo para  $p=0$ .

Para  $p=\infty$  teremos  $Z(p) = \infty$ .  $a_\infty$  é o resíduo do pólo para  $p=\infty$ .

Para  $p = j\omega_k$  teremos  $Z(p) = \infty$ .  $a_k$  é o resíduo do pólo para  $p = j\omega_k$ .

Os resíduos  $a_k$ ,  $a_0$  e  $a_\infty$  são reais positivos ou nulos.

Seja a Expressão Geral da Impedância de Entrada acima, para a qual os polos imaginários são complexos conjugados; então: Se  $p = j\omega_k$  é um pólo,  $p = -j\omega_k$  será também um pólo de  $Z(p)$ . Os resíduos serão:  $a_k$  e  $a_{-k}$ .

$$\text{Faremos: } \frac{a_k}{p - j\omega_k} + \frac{a_{-k}}{p + j\omega_k} = \frac{a_k(p + j\omega_k) + a_{-k}(p - j\omega_k)}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{p(a_k + a_{-k}) + j\omega_k(a_k - a_{-k})}{p^2 + \omega_k^2}$$

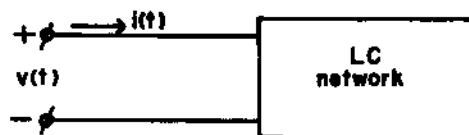
Como todos os coeficientes de  $Z(p)$  são números reais positivos e qualquer coeficiente imaginário deve ser nulo, teremos que:

$$a_k = -a_{-k}$$

Conclusão: OS RESÍDUOS DE PÓLOS CONJUGADOS SÃO IGUAIS.

DEMONSTRAÇÃO:

Tínhamos uma rede LC:



Tínhamos também que  $Z(p) = V(p)$  quando a corrente de entrada era um pulso unitário. Pela Transformada de Laplace, então:

$$(1) \quad Z(p) = V(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v(t) dt$$

Tomando o conjugado de  $p$ , ou seja,  $p^*$ :

$$(2) \quad Z(p^*) = \int_0^{\infty} e^{-p^*t} v(t) dt$$



Obtendo, agora, o conjugado dessa expressão complexa:

$$(3) \quad Z^*(p^*) = \int_0^{\infty} e^{-p^*t} v(t) dt$$

Comparando (1) e (3), teremos que:

$$(4) \quad Z^*(p^*) \equiv Z(p)$$

Tomando a função da Impedância de Entrada  $Z(p)$  de uma rede LC e usando a propriedade que diz que "se  $jw_k$  é um polo, então  $-jw_k$  é outro pólo". Logo:

$$Z(p) = \sum_k \left( \frac{a_k}{p-jw_k} + \frac{a_{-k}}{p+jw_k} \right) + \frac{a_0}{p} + a_{\infty} p$$

Tomando o conjugado de  $p$ :

$$Z(p^*) = \sum_k \left( \frac{a_k}{p^*-jw_k} + \frac{a_{-k}}{p^*+jw_k} \right) + \frac{a_0}{p^*} + a_{\infty} p^*$$

e obtendo o conjugado dessa expressão:

$$Z^*(p^*) = \sum_k \left( \frac{a_k}{p+jw_k} + \frac{a_{-k}}{p-jw_k} \right) + \frac{a_0}{p} + a_{\infty} p$$

$$\text{quando: } a_k \equiv a_{-k}$$

Para qualquer valor da frequência  $w_k$ , temos:  $Z(p) \equiv Z^*(p^*)$ .

Conclusão: "Os resíduos de pólos conjugados são iguais".

Este fato nos permite escrever a  $Z(p)$  sob outra forma:

$$\frac{a_k}{p-jw_k} + \frac{a_k}{p+jw_k} = \frac{a_k p + jw_k a_k + a_k p - jw_k a_k}{p^2 + w_k^2} = \frac{2 a_k p}{p^2 + w_k^2}$$

Podemos, então, escrever a  $Z(p)$  na forma mais geral:

$$Z(p) = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0}{p} + a_{\infty} p$$

Vamos calcular:

$$Z(j\omega) = \sum_k \frac{a_k j\omega}{\omega_k^2 - \omega^2} + \frac{a_0}{j\omega} + a_\infty j\omega$$

considerando:

$$Z(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

Se  $Z(j\omega)$  tem uma parte real  $X(\omega)$  e uma parte imaginária  $Y(\omega)$ , então  $X(\omega) = 0$  pois não existe parte real.

Se  $X(\omega) = 0$ , então:  $jY(\omega) = Z(j\omega)$ .

Conclusão: "A Impedância de Entrada de uma Rede LC é puramente Imaginária".

A expressão de  $Y(\omega)$ , parte imaginária de  $Z(p)$  é então:

$$Y(\omega) = \sum_k \frac{a_k \omega}{\omega_k^2 - \omega^2} - \frac{a_0}{\omega} + a_\infty \omega$$

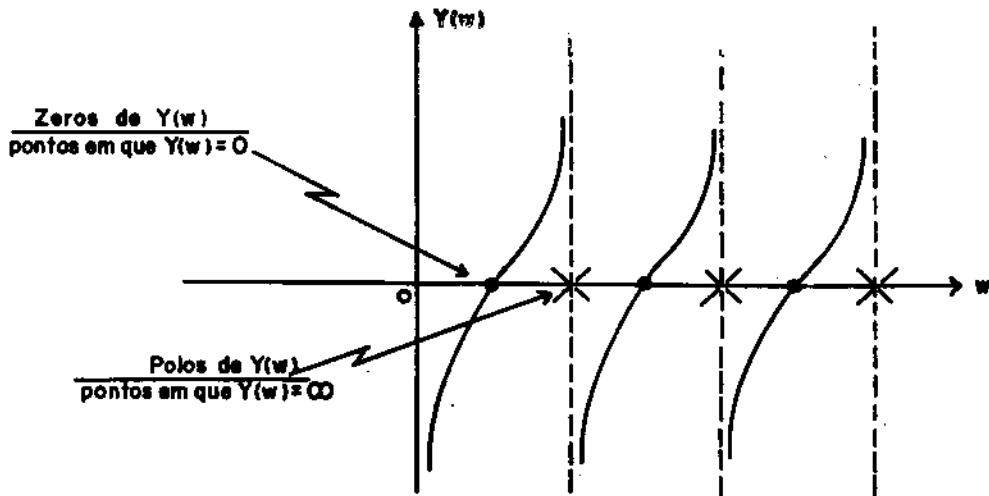
Consideremos agora a variação dessa expressão em relação a  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y(\omega)}{\partial \omega} &= \sum_k \frac{a_k (\omega_k^2 - \omega^2) - a_k \omega (-2\omega)}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} + \frac{a_0}{\omega^2} + a_\infty = \\ &= \sum_k \frac{a_k (\omega_k^2 + \omega^2)}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2} + \frac{a_0}{\omega^2} + a_\infty \geq \sum_k \frac{a_k}{|\omega_k^2 - \omega^2|} + \frac{a_0}{\omega^2} + a_\infty \geq \\ &\geq \left| \sum_k \frac{a_k}{\omega_k^2 - \omega^2} - \frac{a_0}{\omega^2} + a_\infty \right| = \left| \frac{Y(\omega)}{\omega} \right| \geq 0 \end{aligned}$$

então:

$$\frac{\partial Y(\omega)}{\partial \omega} = \left| \frac{Y(\omega)}{\omega} \right| \geq 0$$

Importante: "A variação de  $Y(\omega)$  com  $\omega$  é maior ou igual a zero".



Propriedade: "Os Pólos e Zeros de uma ZelC (impedância de entrada de uma rede LC) se alternam, i.e não existem Pólos consecutivos nem Zeros consecutivos."

Esta propriedade é conhecida como relação ou teorema de Foster.

Então, se  $a_0 = 0$ :

$$Z(p) = \frac{n_1 p + n_3 p^3 + n_5 p^5 + \dots}{d_0 + d_2 p^2 + d_4 p^4 + \dots}$$

$\longrightarrow$  polinômio ímpar  
 $\longrightarrow$  polinômio par

Se  $a_0 \neq 0$ :

$$Z(p) = \frac{n_0 + n_2 p^2 + n_4 p^4 + \dots}{d_1 p + d_3 p^3 + d_5 p^5 + \dots}$$

$\longrightarrow$  polinômio par  
 $\longrightarrow$  polinômio ímpar

Conclusão:  $Z(p)$  é dada pelo quociente de dois polinômios, um deles par e o outro ímpar.

É sempre  $\frac{\text{par}}{\text{ímpar}}$  ou  $\frac{\text{ímpar}}{\text{par}}$

#### PROPRIEDADES:

- 1)  $Z(p)$  é analítica na metade direita do plano  $p$  e não tem zeros nesse semiplano.
- 2)  $Z(p)$  é sempre dada pelo quociente de dois polinômios. A diferença dos graus entre os polinômios é igual à unidade e ambos os polinômios são completos.

- 3) Todas as propriedades da Impedância de Entrada de uma Rêde LC Ideal, também são propriedades da Impedância de Entrada de uma Rêde que contém Capacitores Ideais, Bobinas Ideais, Transformadores Ideais e Gyrators Ideais.

Esta propriedade é a mais importante para a Síntese.

Observação: Para que  $Z(p)$  seja a Impedância de Entrada de uma Rêde LC, deverá satisfazer as seguintes propriedades:

- 1) Ser Função Real Positiva;
- 2) Pólos no eixo imaginário e complexos conjugados;
- 3) Zeros no eixo imaginário e complexos conjugados;
- 4) Pólos Simples e Resíduos Reais Positivos;
- 5)  $Z(p) = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0}{p} + a_\infty p$
- 6)  $\frac{\partial X(w)}{\partial w} \left| \right| \frac{X(w)}{w} \left| \right| \geq 0$
- 7) Os Polos e Zeros se alternam;
- 8) Polinômios completo Par sobre polinômio completo Ímpar ou polinômio completo Ímpar sobre polinômio completo Par.

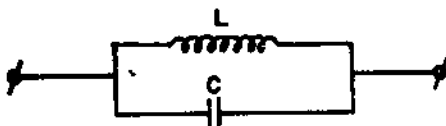
1º Método:

MÉTODO DA EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - MÉTODO DE FOSTER

Tínhamos visto que:

$$Z(p) = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0}{p} + a_\infty p \quad \textcircled{1}$$

Vamos considerar uma associação em paralelo LC:



Essa rêde tem a impedância:

$$Z(p) = \frac{pL \cdot \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{pL}{p^2LC + 1} = \frac{pL}{LC \left( p^2 + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{\frac{p}{C}}{p^2 + \frac{1}{LC}} \quad (2)$$

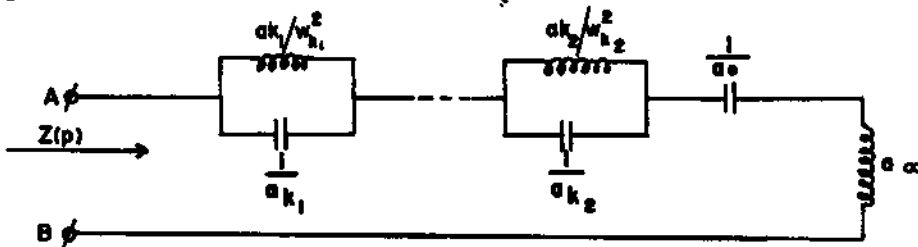
Comparando as expressões (1) e (2), verificamos que a expressão (2) é do tipo:

$$\frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} \quad \text{onde } a_k = \frac{1}{C} \quad \text{e } w_k^2 = \frac{1}{LC}$$

Donde concluímos que:

$$C = \frac{1}{a_k} \quad \text{e} \quad L = \frac{a_k}{w_k^2}$$

Vamos construir a rede LC. A impedância que vemos a partir dos terminais A e B da figura abaixo é:



Teremos tantos desses elementos quantos forem os valores de k.

Para o termo  $\frac{a_0}{p}$ :

$$Z(p) = \frac{1}{pC} \quad \therefore \quad \frac{1}{pC} = \frac{a_0}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C} = a_0 \implies C = \frac{1}{a_0}$$

Para o termo  $a_\infty p$ :

$$Z(p) = pL \quad \therefore \quad a_\infty p = pL \implies L = a_\infty$$

Realizámos, então, a impedância  $Z(p)$  pela conexão em série dos conjuntos LC em paralelo.

Vimos que os coeficientes:  $a_k, a_0, a_\infty \geq 0$

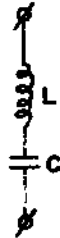
Significa que se  $a_\infty = 0$ , não existe a bobina e se  $a_0 = 0$ , não existe o capaci-

tor.

Se considerássemos a expressão da Admitância  $Y(p)$ , o desenvolvimento seria idêntico ao visto acima:

$$Y(p) = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + \omega_k^2} + \frac{a_0}{p} + a_\infty p \quad (1)$$

Seja a combinação série LC:



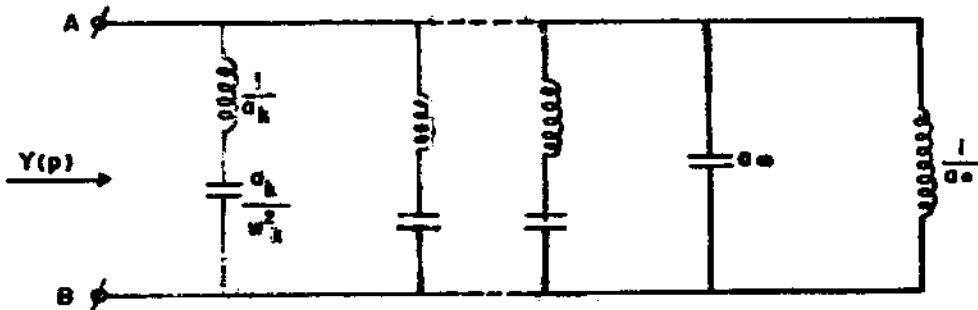
A admitância dessa associação é dada por:

$$Y(p) = \frac{1}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{pC}{p^2 LC + 1} = \frac{pC}{LC \left( p^2 + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{\frac{p}{L}}{p^2 + \frac{1}{LC}} \quad (2)$$

Comparando as expressões (1) e (2), temos que:

$$a_k = \frac{1}{L} \Rightarrow L = \frac{1}{a_k}; \quad \omega_k^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{a_k}{\omega_k^2}$$

Vamos construir a rede LC. A Admitância que vemos a partir dos terminais A e B da figura abaixo é:



Um capacitor tem uma Admitância:  $pC \Rightarrow a_\infty = C$

Uma bobina tem uma Admitância:  $\frac{1}{pL} \Rightarrow \frac{a_0}{p} = \frac{1}{pL} \Rightarrow L = \frac{1}{a_0}$

$a_\infty = 0$  e  $a_0 = 0$  anulam o capacitor C e o indutor L, respectivamente.

2º Método:

MÉTODO DA EXPANSÃO CONTÍNUA DE FRAÇÕES - MÉTODO DE "CAUER"

Seja a função:

$$Z(p) = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0}{p} + a_\infty p \quad (1)$$

onde vamos chamar de:

$$F_1'(p) = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} \quad (2)$$

$$F_1(p) = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0}{p} \quad (3)$$

$$F_2(p) = a_\infty p \quad (4)$$

Vejamos se  $F_1'(p) = \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2}$  é uma função real e positiva.

Temos que  $F(p)$  é uma Função Real Positiva se:

- a)  $F(p)$  é real para  $p$  real;
- b)  $\text{Re}[F(p)] \geq 0$  para  $\text{Re}[p] \geq 0$

$a_k \geq 0$ , para  $p$  real, temos que:  $F(p)$  real  $\implies F_1'(p)$  real.

Vejamos agora  $p$  contendo também a parte imaginária:

$$F_1'(p) = \frac{a_k(\sigma + jw)}{\sigma^2 + 2\sigma jw - w^2 + w_k^2} = \frac{(a_k\sigma + ja_k w)(\sigma^2 + w_k^2 - w^2 - 2j\sigma w)}{(\sigma^2 + w_k^2 - w^2 + 2j\sigma w)(\sigma^2 + w_k^2 - w^2 - 2j\sigma w)}$$

A parte real dessa expressão será dada por:

$$\text{Re}[F_1'(p)] = \frac{a_k \sigma^3 + a_k \sigma w_k^2 - a_k \sigma w^2 + 2 a_k \sigma w^2}{(\sigma^2 + w_k^2 - w^2)^2 + 4 \sigma^2 w^2}$$

$$\operatorname{Re}\left[F_1'(p)\right] = \frac{a_k \sigma^3 + a_k \sigma w_k^2 + a_k \sigma w^2}{(\sigma^2 + w_k^2 - w^2)^2 + 4 \sigma^2 w^2}$$

onde, para  $\sigma = 0$ , ou seja para a parte real de  $p$  sendo nula, temos:

$$\operatorname{Re}\left[F_1'(p)\right] = 0 \text{ e } a_k \geq 0; \text{ para } \sigma > 0 \implies \operatorname{Re}\left[F_1'(p)\right] > 0$$

Então:  $\operatorname{Re}\left[F_1'(p)\right] \geq 0$

Conclusão:  $F_1'(p)$  é uma função Real Positiva.

A expressão dada (1) pode ser escrita considerando (3) e (4):

$$Z(p) = a_\infty p + F_1(p)$$

que é real positiva porque é a soma de duas funções reais positivas.

$$Z(p) = a_\infty p + \frac{1}{F_1(p)} \left. \vphantom{\frac{1}{F_1(p)}} \right\} \text{ é real positiva}$$

$$Z(p) = a_\infty p + \frac{1}{\sum_k \frac{a_k' p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0'}{p} + a_\infty' p}$$

$$Z(p) = a_\infty p + \frac{1}{a_\infty' p + F_3(p)} = a_\infty p + \frac{1}{a_\infty' p + \frac{1}{\frac{1}{F_3(p)}}} =$$

$$= a_\infty p + \frac{1}{a_\infty' p + \frac{1}{\sum_k \frac{a_k'' p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0''}{p} + a_\infty'' p}}$$

sendo  $p$  real e positiva

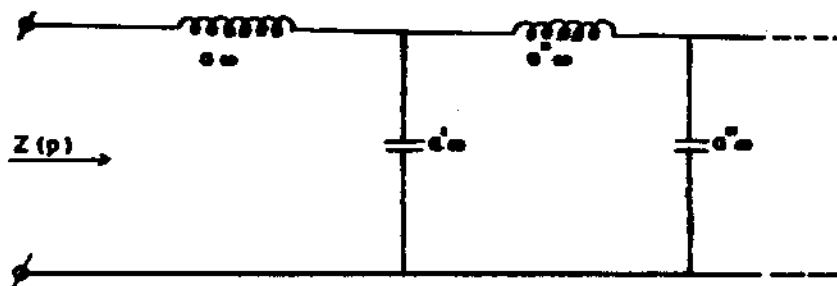
Conclusão: A impedância  $Z(p)$  pode ser escrita na forma de expansão:



1ª Forma de "Cauer"

$$Z(p) = a_{\infty} p + \frac{1}{\frac{a'_0}{a''_0} p + \frac{1}{\frac{a'''_0}{a''''_0} p + \frac{1}{\frac{1}{\dots}}}}$$

A representação dessa impedância  $Z(p)$  através de seus componentes terá a forma:



O 1º termo da fórmula acima representa a impedância de uma bobina:  $L = a_{\infty}$ , pois:

$$Z_L = pL = a_{\infty} p \implies L = a_{\infty}$$

O 2º termo da fórmula constitui pelo seu denominador a admitância de um capacitor, na parte referente ao quociente:

$$Y_C = pC = a'_0 p \implies C = a'_0$$

Vejamos, agora, outro método de fazer a decomposição em termos de Pólos, ou seja em  $p=0$ .

Seja a função:

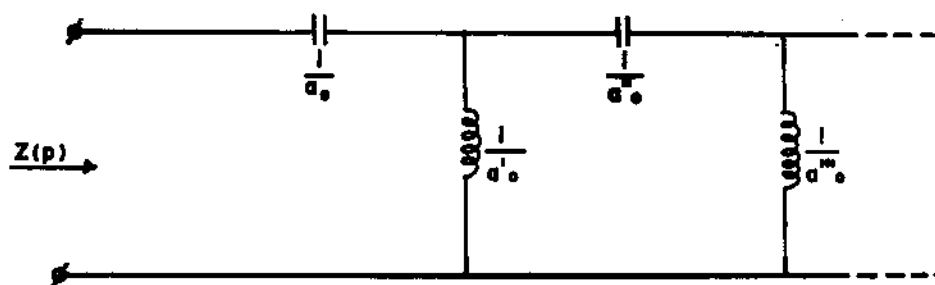
$$\begin{aligned} Z(p) &= \sum_k \frac{a_k p}{k p^2 + w_k^2} + \frac{a_0}{p} + a_{\infty} p = \frac{a_0}{p} + F_1'(p) = \\ &= \frac{a_0}{p} + \frac{1}{\frac{1}{F_1(p)}} = \frac{a_0}{p} + \frac{1}{\sum_k \frac{a'_k p}{p + w_k^2} + \frac{a'_0}{p} + a'_0 p} = \frac{a_0}{p} + \frac{1}{\frac{a'_0}{p} + F_2(p)} \end{aligned}$$

O raciocínio se segue como no caso anterior. Então, a  $Z(p)$  passa a ter a seguinte forma:

### 2ª Forma de "Cauer"

$$Z(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{1}{\frac{a'_0}{p} + \frac{1}{\frac{a''_0}{p} + \frac{1}{\frac{a'''_0}{p} + \frac{1}{\frac{a''''_0}{p} + \dots}}}}$$

A representação dessa impedância  $Z(p)$  através de seus componentes terá a forma:



O 1º termo da fórmula acima representa a impedância de um capacitor:

$$Z_c = \frac{1}{pC} = \frac{a_0}{p} \implies C = \frac{1}{a_0}$$

O 2º termo da fórmula constitui pelo seu denominador a admitância de uma bobina, na parte referente ao quociente:

$$Y_L = \frac{1}{pL} = \frac{a'_0}{p} \implies L = \frac{1}{a'_0}$$

E assim sucessivamente.

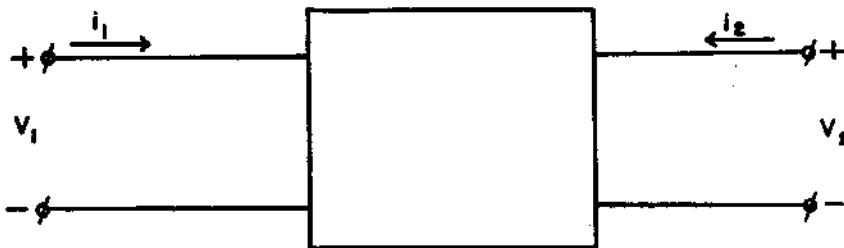
O termo  $\frac{1}{p}$  é comumente substituído por  $s$  para não existir  $p$  no denominador na expressão de  $Z(p)$  durante o cálculo. Depois volta-se a  $p$ .

Observação: Podemos ter rêsdes com a mesma impedância de entrada  $Z(p)$ , embora tenham elementos diferentes, ou seja, o problema de Síntese não é unicamente determinado.

### PROPRIEDADES DE UMA RÊDE TWO-PORT LC

Uma two-port é constituída por dois pares de terminais acessíveis. Consideremos uma two-port que contenha, exclusivamente, elementos ideais  $L$ ,  $C$ , Gyrtor e Transformador. Todos êsses elementos são Loss-less; logo, a rêsde será Loss-less.

Seja, então, uma Loss-less two-port:



Supondo-se que a two-port admita as relações abaixo, tem-se:

Dadas as correntes, temos as tensões:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Dadas as tensões, temos as correntes:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

### Algumas propriedades das r edes LC Two-Port:

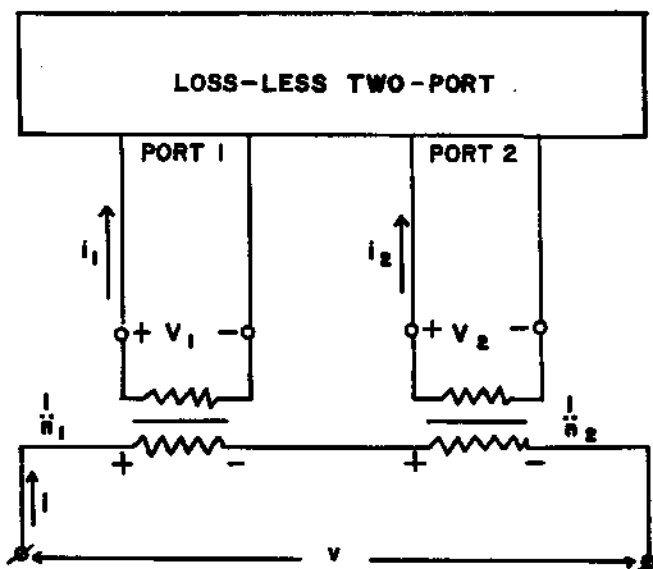
- 1) As fun es são sempre dadas pelo quociente de dois polinômios em  $p$ , um polinômio   par e o outro   ímpar.
- 2) Os coeficientes são reais.

Essas impedâncias  $Z_{11}$ ,  $Z_{22}$  e admitâncias  $Y_{11}$  e  $Y_{22}$  são as impedâncias e admitâncias de entrada da Two-Port.

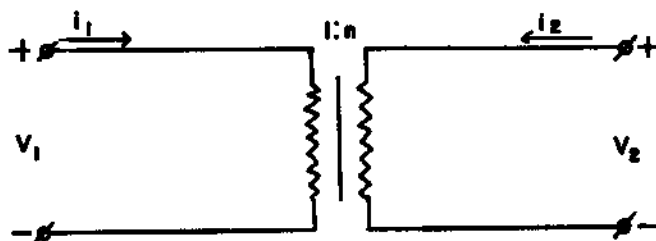
Essas fun es são exatamente as fun es  $Z(p)$  e  $Y(p)$  de uma r ede One-Port LC.

As impedâncias  $Z_{11}$  e  $Z_{22}$  e as admitâncias  $Y_{11}$  e  $Y_{22}$  são fun es reais positivas. As impedâncias e admitâncias de entrada de uma Two-Port têm as mesmas propriedades das impedâncias e admitâncias de entrada de uma One-Port LC.

### REDU O DE UMA LOSS-LESS TWO PORT A UMA LOSS-LESS ONE-PORT



Para o Transformador Ideal vimos que:



$$\begin{cases} V_2 = n V_1 \\ i_2 = -\frac{1}{n} i_1 \end{cases}$$

Logo, temos que:

$$v = n_1 V_1 + n_2 V_2 = n_1 (Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2) + n_2 (Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2)$$

porém:

$$i_1 = + \frac{1}{n_1} i_1 \implies i_1 = n_1 i$$

e

$$i_2 = - \frac{1}{n_2} i_2 \implies i_2 = n_2 i$$

então:

$$v = n_1 (Z_{11} n_1 i + Z_{12} n_2 i) + n_2 (Z_{21} n_1 i + Z_{22} n_2 i)$$

$$v = [n_1^2 Z_{11} + n_1 n_2 Z_{12} + n_1 n_2 Z_{21} + n_2^2 Z_{22}] \cdot i$$

$$\frac{v}{i} = Z(p) = n_1^2 Z_{11} + n_1 n_2 [Z_{12} + Z_{21}] + n_2^2 Z_{22}$$

onde:

$$n_1^2 Z_{11} + n_1 n_2 [Z_{12} + Z_{21}] + n_2^2 Z_{22} = Q(p)$$

$Q(p)$  é a Forma Quadrática correspondente à Matriz Impedância da rede Two-Port.

Procede-se da mesma forma também para uma rede n-Port.

### Expressão Geral da Forma Quadrática da Matriz Impedância:

$$Q(p) = \frac{v}{i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n n_i n_j Z_{ij}$$

$n_i$  e  $n_j$  são as variáveis da forma quadrática.

Propriedade: Várias propriedades da Matriz Impedância podem ser projetadas sobre sua Forma Quadrática.

### RECÍPROCIDADE DE UMA REDE n-PORT

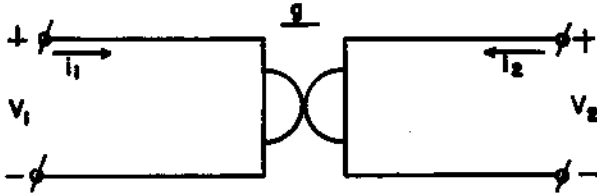
Por definição: Uma n-Port é Recíproca se a sua Matriz Impedância  $[Z]$  é Simétrica.

Matriz Impedância de uma Two-Port:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

A Two-Port será Recíproca se:  $Z_{12} = Z_{21}$ .

Vamos verificar se o Gyrator é Recíproco:



As equações que descrevem um Gyrator são:

$$\begin{cases} i_1 = g V_2 \implies V_2 = \frac{1}{g} i_1 \\ i_2 = -g V_1 \implies V_1 = -\frac{1}{g} i_2 \end{cases}$$

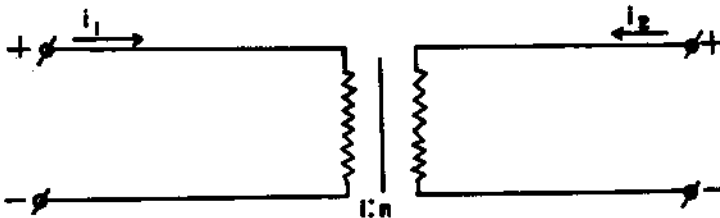
A Matriz Impedância do Gyrator é então:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{g} \\ \frac{1}{g} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Então para o Gyrator notamos que  $Z_{12} = -Z_{21}$ .

Conclusão: O GYRATOR É ANTI-RECÍPROCO.

Verifiquemos, agora, se o Transformador é ou não Recíproco:



Equações que descrevem o funcionamento do Transformador Ideal:

$$\begin{aligned} V_2 &= n V_1 \\ i_2 &= -\frac{1}{n} i_1 \end{aligned}$$

Como o Transformador não tem Matriz Impedância nem Matriz Admitância, não podemos aplicar a definição anterior de Reciprocidade. Necessitamos, pois, de outra definição.

Por definição: Uma Two-Port é Recíproca se, para dois estados diferentes (podem ser dois instantes diferentes) da mesma Two-Port, tivermos a condição:

$$I_1^A V_1^B + I_2^A V_2^B \equiv I_1^B V_1^A + I_2^B V_2^A$$

Aplicando essa propriedade, vejamos se o Transformador é Recíproco. O 1º termo será:

$$I_1^A V_1^B + \left(-\frac{1}{n}\right) I_1^A n V_1^B \equiv 0 \quad (1)$$

o 2º termo será:

$$I_1^B V_1^A + \left(-\frac{1}{n}\right) I_1^B n V_1^A \equiv 0 \quad (2)$$

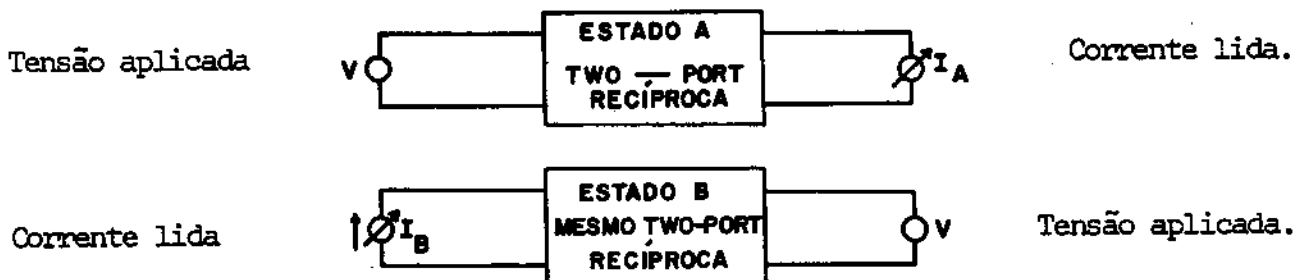
De (1) e (2) concluímos que o Transformador é uma Two-Port Recíproca. Extendendo a definição para uma n-Port, diremos que uma n-Port é Recíproca se:

Definição de Lorenz e Reyleigh

$$\sum_{k=1}^n I_k^A V_k^B \equiv \sum_{k=1}^n I_k^B V_k^A$$

Os elementos ideais L, C e Transformador são Recíprocos. Uma Rêde que só contenha elementos Recíprocos é Recíproca.

Seja uma mesma Two-Port Recíproca submetida a dois estados diferentes:



Aplicando, então, a definição de Reciprocidade para o caso particular acima, considerando:

$$I_1^A V_1^B + I_2^A V_2^B \equiv I_1^B V_1^A + I_2^B V_2^A$$

Lembrando que, neste caso, temos:

$$I_2^A = I_A, \quad V_2^B = V, \quad I_1^B = I_B, \quad V_1^A = V$$

Então:

$$I_1^A V_1^B + I_A V \equiv I_B V + I_2^B V_2^A$$

Esta identidade é válida para qualquer valor de  $V_1^B$  e  $V_2^A$ . Podemos fazer, então:  $V_1^B = 0$  e  $V_2^A = 0$ , donde concluímos que:

$$I_A = I_B.$$

Este fato é uma manifestação de Reciprocidade.

### CONDIÇÕES DE RESÍDUO

As condições que determinaremos a seguir podem ser consideradas como o primeiro passo para se poder sintetizar uma Two-Port. Consideremos a Forma Quadrática de uma Matriz Impedância para uma Two-Port:

$$Q(p) = n_1^2 Z_{11} + n_1 n_2 [Z_{12} + Z_{21}] + n_2^2 Z_{22}$$

Se a Two-Port é Recíproca, devemos ter:

$$Z_{12} = Z_{21}$$

Então a forma acima fica:

$$Q(p) = n_1^2 Z_{11} + 2 n_1 n_2 Z_{12} + n_2^2 Z_{22}$$

Vimos, ainda, que:

$$Z_{11} = \sum_k \frac{a_k}{p-p_k} + \frac{a_0}{p} + a_\infty p$$

$$Z_{22} = \sum_k \frac{b_k}{p-p_k} + \frac{b_0}{p} + b_\infty p$$

$$Z_{12} = \sum_k \frac{h_k}{p-p_k} + \frac{h_0}{p} + h_\infty p$$

Nas expressões acima, os Pólos são os mesmos, apenas com resíduos diferentes.

Então, num Pólo  $p_k$  a Forma Quadrática  $Q(p)$  terá um Resíduo  $Q_k$ , dado por:



$$Q_k = n_1^2 a_k + 2 n_1 n_2 h_k + n_2^2 b_k \quad \textcircled{I}$$

Vimos que:  $a_k \geq 0$  e  $b_k \geq 0$ .

O Resíduo  $Q_k$  também deverá ser:  $Q_k \geq 0$  e real.

Podemos, então, dizer que se  $a_k$ ,  $Q_k$  e  $b_k$  são reais e, além do mais,  $n_1$  e  $n_2$  são reais, então  $h_k$  deve ser real.

Desenvolvendo a expressão  $\textcircled{I}$  :

$$Q_k = \left( n_1 \sqrt{a_k} + \frac{n_2 h_k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 + n_2^2 b_k - n_2^2 \frac{h_k^2}{a_k} \geq 0$$

$$Q_k = \left( n_1 \sqrt{a_k} + \frac{n_2 h_k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 + n_2^2 \left( b_k - \frac{h_k^2}{a_k} \right) \geq 0 \quad \textcircled{II}$$

Como  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{21}$  e  $Z_{22}$  são conhecidos, então os resíduos  $a_k$ ,  $b_k$  e  $h_k$  são conhecidos e independem de  $n_1$  e  $n_2$ ; ainda mais  $Q_k$  deve ser maior ou igual a zero.

Para conseguir uma relação entre os resíduos, exclusivamente, faz-se

$\left( n_1 \sqrt{a_k} + \frac{n_2 h_k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 = 0$ , o que se consegue escolhendo-se, convenientemente os valores de  $n_1$  e  $n_2$  já que  $n_1$  e  $n_2$  são diferentes de zero.

Ficamos então, com:

$$b_k - \frac{h_k^2}{a_k} \geq 0 \implies h_k^2 \leq a_k \cdot b_k$$

Donde as três Condições de Resíduos serão:

$$\begin{cases} h_k^2 \leq a_k \cdot b_k & \text{ou} & a_k \cdot b_k \geq h_k^2 \geq 0 \\ a_k \geq 0 \\ b_k \geq 0 \end{cases}$$

Toda Two-Port Recíproca Loss-less deve satisfazer estas três condições.

Por definição: A Matriz Impedância é Compacta num Pólo  $p_k$ , se, neste Pólo, o Produto dos Resíduos  $a_k$  e  $b_k$  é igual a  $h_k^2$  e diferente de zero.

Expressão de Compactidade:

$$a_k \cdot b_k = h_k^2 \neq 0$$

Isto, para Redes Two-Port Recíprocas.

Se a Matriz Impedância for Compacta em todos os Pólos, então a Matriz Impedância é Compacta.

Se  $Z_{11}$  e  $Z_{12}$  são dados, isto significa dizer que  $a_k$  e  $h_k$  são dados; então  $b_k$  resulta determinado e  $Z_{22}$  é calculável:

$$Z_{11} \text{ e } Z_{12} \text{ dados} \implies Z_{22} \text{ é calculável}$$

Se  $Z_{22}$  e  $Z_{12}$  são dados, conhecemos  $b_k$  e  $h_k$ ; então,  $a_k$  resulta determinado e  $Z_{11}$  é calculável:

$$Z_{22} \text{ e } Z_{12} \text{ dados} \implies Z_{11} \text{ é calculável}$$

Se  $Z_{11}$  e  $Z_{22}$  são dados para uma Matriz Impedância Compacta, significa dizer que  $a_k$  e  $b_k$  são dados e temos de calcular  $h_k^2$ , donde resulta que a Impedância de Transferência  $Z_{12}$  não é única. Vimos que todos os valores de  $a_k$  e  $b_k$  são números reais, logo os Coeficientes dos Polinômios do Numerador e do Denominador são números reais; isto significa dizer que os Pólos e Zeros dessas Funções Impedâncias só podem ocorrer em  $p=0$  ou em  $p=\infty$  ou em pares complexos conjugados com mesmo resíduo. Isto significa dizer que:

$$\frac{a_k}{p-p_k} + \frac{a_k}{p+p_k} = \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2}$$

De acordo com esta propriedade para uma Two-Port Recíproca, podemos escrever as funções  $Z(p)$  de outra maneira:

$$Z_{11} = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0}{p} + a_\infty p$$

$$Z_{12} = \sum_k \frac{h_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{h_0}{p} + h_\infty p$$

$$Z_{22} = \sum_k \frac{b_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{b_0}{p} + b_\infty p$$

Vimos que para  $a_0 = 0$  ou  $a_0 \neq 0$  teremos sempre dois polinômios, um par e outro ímpar, ou inversamente; o mesmo raciocínio se aplica para  $h_0$  e  $b_0$ . Concluimos que estas funções  $Z(p)$  são dadas pelo quociente de dois polinômios, um par e outro ímpar. Os Coeficientes dos Polinômios dos Denominadores de  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$  e  $Z_{22}$  são sempre números reais e positivos. Por ser  $a_k > 0$  e  $b_k > 0$ , então os Coeficientes dos Polinômios dos Numeradores de  $Z_{11}$  e  $Z_{22}$  também são sempre números reais e positivos. Já para  $Z_{12}$  não se pode dizer o mesmo pois  $h_k$  pode ser negativo e, conseqüentemente, um ou mais de um dos coeficientes do numerador de  $Z_{12}$  podem ser negativos.

### SÍNTESE DA REDE TWO-PORT LC.

#### 1) MÉTODO DA EXPANSÃO EM FRAÇÕES PARCIAIS - MÉTODO DE FOSTER

Usaremos os elementos ideais  $L$  e  $C$  e, se necessário, Transformadores ideais que são todos elementos recíprocos e loss-less e, assim, a Two-Port será recíproca e loss-less.

Vamos supor que:  $a_k > 0$

$$b_k > 0 \quad \text{e que} \quad a_k \cdot b_k \geq h_k^2 \geq 0$$

Pelas condições de resíduos temos que  $a_k \geq 0$  e  $b_k \geq 0$ . Neste caso, os resíduos nulos não serão considerados. Vamos, inicialmente, supor a Two-Port dada pelas suas Matrizes Impedâncias:

$$Z_{11} = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0}{p} + a_\infty p = \sum_k Z_{11k}$$

$$Z_{12} = \sum_k \frac{h_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{h_0}{p} + h_\infty p = \sum_k Z_{12k}$$

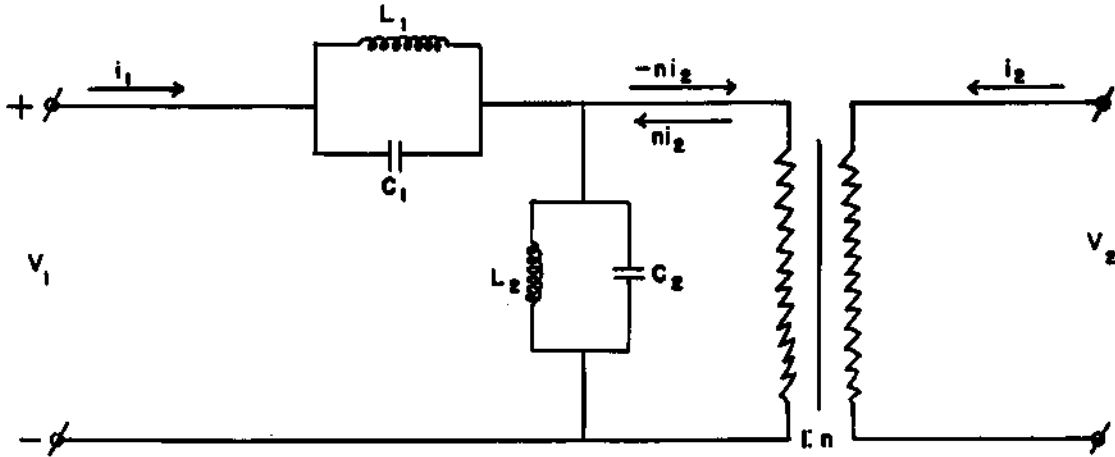
$$Z_{22} = \sum_k \frac{b_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{b_0}{p} + b_\infty p = \sum_k Z_{22k}$$

Considerando, somente, o primeiro elemento de cada expressão:

$$Z_{11k} = \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2}; \quad Z_{12k} = \frac{h_k p}{p^2 + w_k^2}; \quad Z_{22k} = \frac{b_k p}{p^2 + w_k^2}$$

Queremos realizar estas funções para a realização da Two-Port.

Realização:



Fazendo a correspondência dessa rede com as expressões das Impedâncias acima, estaremos realizando a Two-Port.

Sabemos que:  $Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{i_1=0}$ . Vamos realizar  $Z_{22}$ :

Como a corrente  $i_1$  é nula, então os elementos  $L_1$  e  $C_1$  não serão considerados e os elementos  $L_2$  e  $C_2$  passarão para o secundário de acordo com a relação 1: n e a Impedância desses elementos em paralelo ficará multiplicada por  $n^2$ .

Então:

$$L_2 // C_2 = \frac{pL_2 \cdot \frac{1}{pC_2}}{pL_2 + \frac{1}{pC_2}} = \frac{pL_2}{p^2L_2C_2 + 1} = \frac{pL_2}{L_2C_2 \left( p^2 + \frac{1}{L_2C_2} \right)}$$

então:

$$L_2 // C_2 = \frac{\frac{p}{C_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2C_2}}$$

(n - relação de transformação)

Temos a Identidade:

$$\frac{V_2}{i_2} = Z_{22} = n^2 \frac{\frac{p}{C_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2C_2}} = \frac{b_k p}{p^2 + w_k^2}$$

Dessa Identidade, tiramos que:

$$\frac{1}{L_2 C_2} = w_k^2 \quad (1) ; \quad n^2 \frac{1}{C_2} = b_k \quad (2)$$

Como não conhecemos  $n$  nem  $C_2$  essa equação é insuficiente. Vejamos:

$$Z_{12} = \frac{V_1}{i_2} \Big|_{i_1 = 0}$$

Vimos que, para o Transformador:

$$i_2 = -\frac{1}{n} i_1 \implies i_1 = -n i_2$$

Novamente a corrente  $i_1$  é nula e os elementos  $L_1$  e  $C_1$  não serão considerados. Então:

$$\frac{V_1}{n i_2} = \frac{\frac{p}{C_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}} \quad \text{ou} \quad Z_{12} = \frac{V_1}{i_2} = \frac{n \cdot \frac{p}{C_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}}$$

Temos a Identidade:

$$Z_{12} = \frac{n \frac{p}{C_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}} = \frac{h_k p}{p^2 + w_k^2}$$

Dessa Identidade, tiramos que:

$$\frac{1}{L_2 C_2} = w_k^2 \quad (3) ; \quad \frac{n}{C_2} = h_k \implies n = C_2 h_k$$

mas  $n^2 = C_2^2 h_k^2$ . Substituindo este valor na expressão (2), temos:

$$\frac{C_2^2}{C_2} h_k^2 = b_k \implies C_2 h_k^2 = b_k$$

Como  $b_k$  e  $h_k$  são dados, teremos:  $C_2 = \frac{b_k}{h_k^2}$  (4)

Vimos que  $n = C_2 h_k$ ; então:

$$n = \frac{b_k}{h_k} \quad (5)$$

Sabemos que:

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{i_1} \right|_{i_2 = 0}$$

Se a corrente  $i_2$  é nula, verificamos que a Impedância  $Z_{11}$  será a soma dos ramos em paralelo. Logo:

$$Z_{11} = \frac{\frac{p}{C_1}}{p^2 + \frac{1}{L_1 C_1}} + \frac{\frac{p}{C_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}} \equiv \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2}$$

A Identidade acima nos fornece:

$$\frac{1}{L_1 C_1} = w_k^2 \quad (6)$$

Como os coeficientes de  $p$  são iguais, temos:

$$1 \quad \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} = a_k \implies \frac{1}{C_1} = a_k - \frac{1}{C_2}$$

E, ainda, foi visto que:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{h_k^2}{b_k}$$

Então:

$$\frac{1}{C_1} = a_k - \frac{h_k^2}{b_k} = \frac{a_k b_k - h_k^2}{b_k}$$

ou:

$$C_1 = \frac{b_k}{a_k b_k - h_k^2} \quad (7)$$

As relações (1), (3), (4), (6) e (7) nos permitem determinar  $L_1$  e  $L_2$ :

$$L_2 = \frac{1}{C_2 w_k^2} = \frac{1}{\frac{b_k}{h_k^2} \cdot w_k^2} = \frac{h_k^2}{b_k \cdot w_k^2} \implies L = \frac{h_k^2}{b_k \cdot w_k^2} \quad (8)$$

$$L_1 = \frac{1}{C \cdot \omega_k^2} = \frac{1}{\omega_k^2 \left( \frac{b_k}{a_k \cdot b_k - h_k^2} \right)} = \frac{1}{b_k \cdot \omega_k^2} = \frac{a_k \cdot b_k - h_k^2}{b_k \cdot \omega_k^2}$$

$$L_1 = \frac{a_k \cdot b_k}{b_k \cdot \omega_k^2} - \frac{h_k^2}{b_k \cdot \omega_k^2} = \frac{a_k}{\omega_k^2} - \frac{h_k^2}{b_k \cdot \omega_k^2} = \frac{a_k}{\omega_k^2} - L_2 \quad (9)$$

Conclusão: Dada a Two-Port através de suas Impedâncias, poderemos realizar a Two-Port.

Observações: Todos os elementos têm valores positivos, uma vez que  $b_k$  e  $a_k$  são números reais e positivos e  $h_k^2$  é positivo real; então,  $C_1$ ,  $L_1$ ,  $C_2$  e  $L_2$  são números reais positivos.

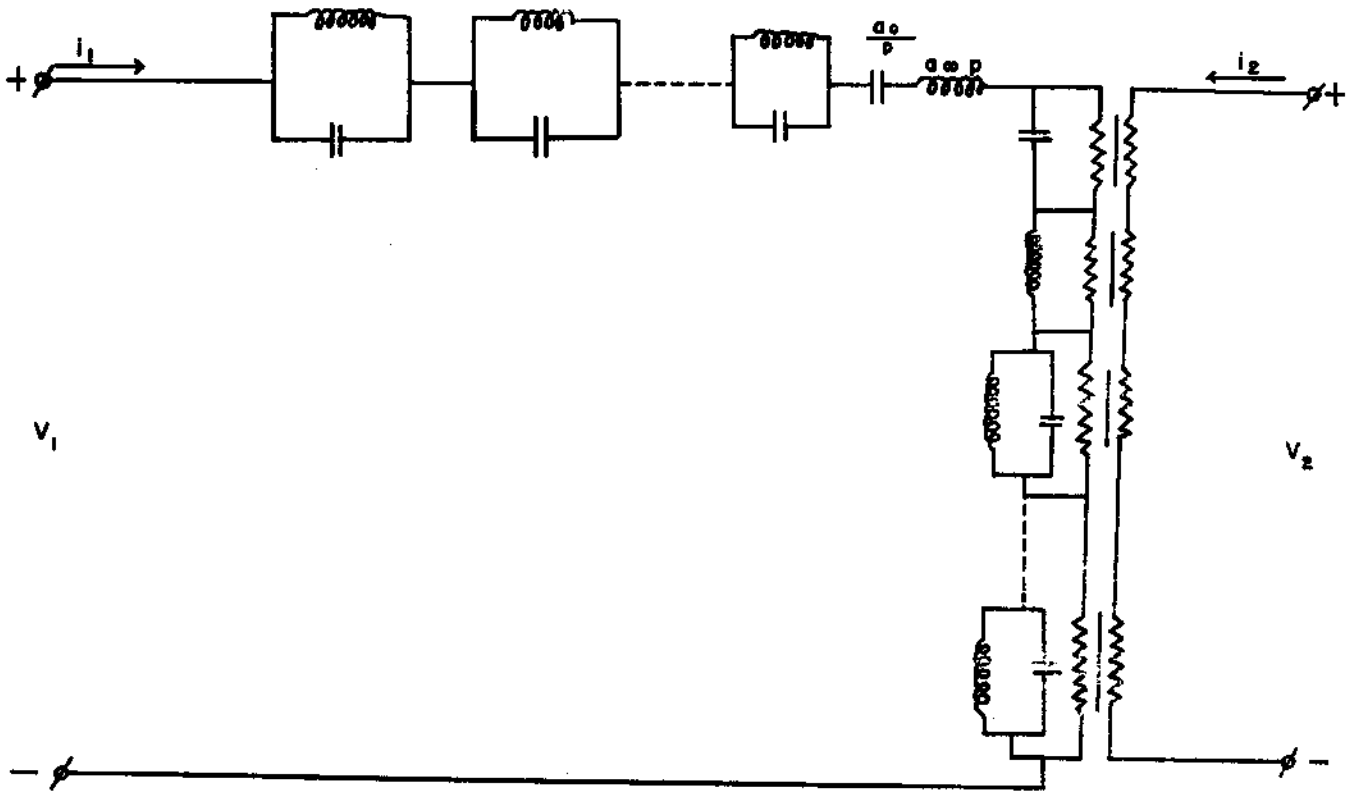
$$a_k \cdot b_k \geq h_k^2 > 0$$

Na expressão acima, observa-se que  $h_k$  pode ser negativo e n pode ser também negativo.

Se o pólo é Compacto, observa-se na expressão de  $C_1$  que o denominador é nulo e em consequência  $C_1$  tem valor infinito e  $L_1$  tem valor nulo. Logo, se o pólo é Compacto não existem as Reatâncias dos elementos  $C_1$  e  $L_1$ . Assim:

$$\frac{1}{pC_1} = 0 \quad \text{e} \quad pL_1 = 0$$

A Realização Total de Foster da Matriz Impedância será:



Vamos, agora, supor a Two-Port dada pelas suas Matrizes Admitâncias:

Sejam as expressões:

$$Y_{11} = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0}{p} + a_\infty p = \sum_k Y_{11k}$$

$$Y_{12} = \sum_k \frac{h_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{h_0}{p} + h_\infty p = \sum_k Y_{12k}$$

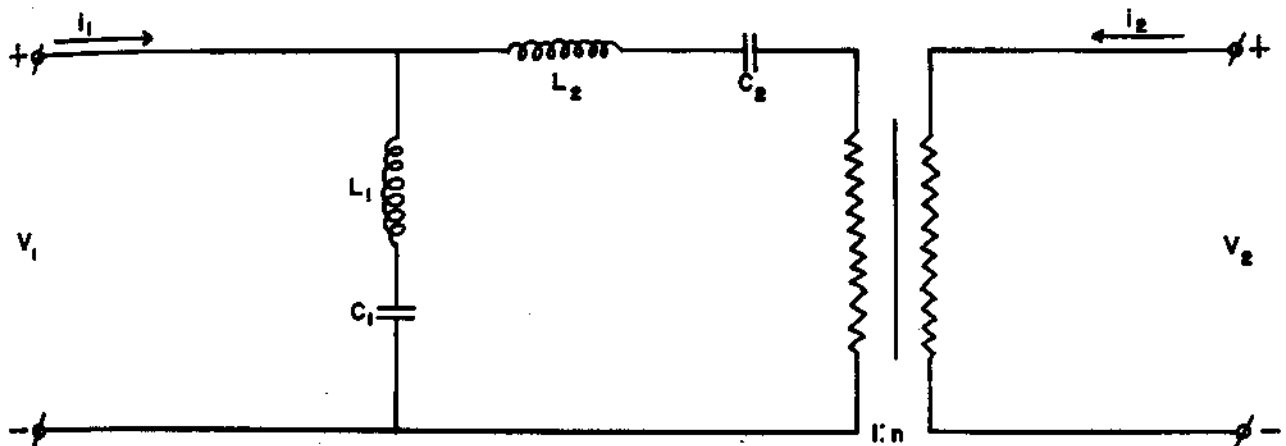
$$Y_{22} = \sum_k \frac{b_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{b_0}{p} + b_\infty p = \sum_k Y_{22k}$$



Considerando, somente, o primeiro elemento dessas expressões:

$$Y_{11k} = \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2}; \quad Y_{12k} = \frac{h_k p}{p^2 + w_k^2}; \quad Y_{22k} = \frac{b_k p}{p^2 + w_k^2}$$

Vamos considerar uma Two-Port elementar dada por essas admitâncias e admitir que esta Two-Port tem a seguinte Síntese:



Onde temos  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $L_2$ ,  $C_2$  e  $n$  como incógnitas. Sabemos que:

$$\begin{cases} i_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ i_2 = Y_{12} V_1 + Y_{22} V_2 \end{cases}$$

e que:

$$Y_{22} = \left. \frac{i_2}{V_2} \right|_{V_1 = 0}$$

Como a tensão  $V_1$  é nula, i.é., entrada em curto, teremos que a Admitância será dada por  $L_2$  em série com  $C_2$ .

$$Y_{22} = \frac{1}{Z_{22}} = \frac{1}{pL_2 + \frac{1}{pC_2}} = \frac{pC_2}{1 + p^2L_2C_2} = \frac{pC_2}{L_2C_2\left(p^2 + \frac{1}{L_2C_2}\right)}$$

$$Y_{22} = \frac{\frac{p}{L_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}}$$

Essa Admitância, ao ser refletida no secundário, fica dividida por  $n^2$ . A Admitância refletida será:

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{\frac{p}{L_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}} \equiv \frac{b_k p}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}}$$

Donde:

$$\frac{1}{L_2 C_2} = \omega_k^2 \quad \textcircled{1} \quad \frac{1}{n^2 L_2} = b_k \quad \textcircled{2}$$

Também sabemos que:

$$Y_{12} = \frac{i_1}{V_2} \Big|_{V_1 = 0}$$

Assim teremos:

$$\frac{\frac{V_2}{n}}{L_1} = - \frac{1}{\frac{p}{L_2}} = - \frac{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}}{\frac{p}{L_2}}, \quad \text{ou:} \quad \frac{ni_1}{V_2} = - \frac{\frac{p}{L_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}}$$

ou:

$$\frac{i_1}{V_2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{-\frac{p}{L_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}} \equiv \frac{h_k p}{p^2 + \omega_k^2}$$

Donde:

$$- \frac{1}{n L_2} = h_k \quad \textcircled{3}$$

De ② e ③ temos:

$$-\frac{n^2 b_k}{n} = h_k \implies n = -\frac{h_k}{b_k} \quad \text{④}$$

Sabemos, ainda, que:

$$Y_{11} = \frac{i_1}{V_1} \Big|_{V_2 = 0}$$

Como a tensão de saída  $V_2$  é nula, i.é. saída em curto-circuito, temos o conjunto série formado por  $L_2$  e  $C_2$  em paralelo com o outro conjunto série formado por  $L_1$  e  $C_1$ .

Assim:

$$\frac{\frac{P}{L_1}}{p^2 + \frac{1}{L_1 C_1}} + \frac{\frac{P}{L_2}}{p^2 + \frac{1}{L_2 C_2}} \equiv \frac{a_k P}{p^2 + w_k^2}$$

Donde:

$$\frac{1}{L_1 C_1} = w_k^2 \quad \text{⑤}$$

Os coeficientes de  $p$  são iguais; isto significa que:

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = a_k \longrightarrow \frac{1}{L_1} = a_k - \frac{1}{L_2}$$

mas:

$$\frac{1}{n^2 L_2} = b_k \longrightarrow \frac{1}{L_2} = n^2 b_k = \frac{h_k^2}{b_k^2} \cdot b_k = \frac{h_k^2}{b_k}, \text{ pois } n^2 = \frac{h_k^2}{b_k^2}$$

$$L_2 = \frac{b_k}{h_k^2} \quad \text{⑥}$$

$$\frac{1}{L_1} = a_k - \frac{h_k^2}{b_k} \implies L_1 = \frac{b_k}{a_k b_k - h_k^2} \quad (7)$$

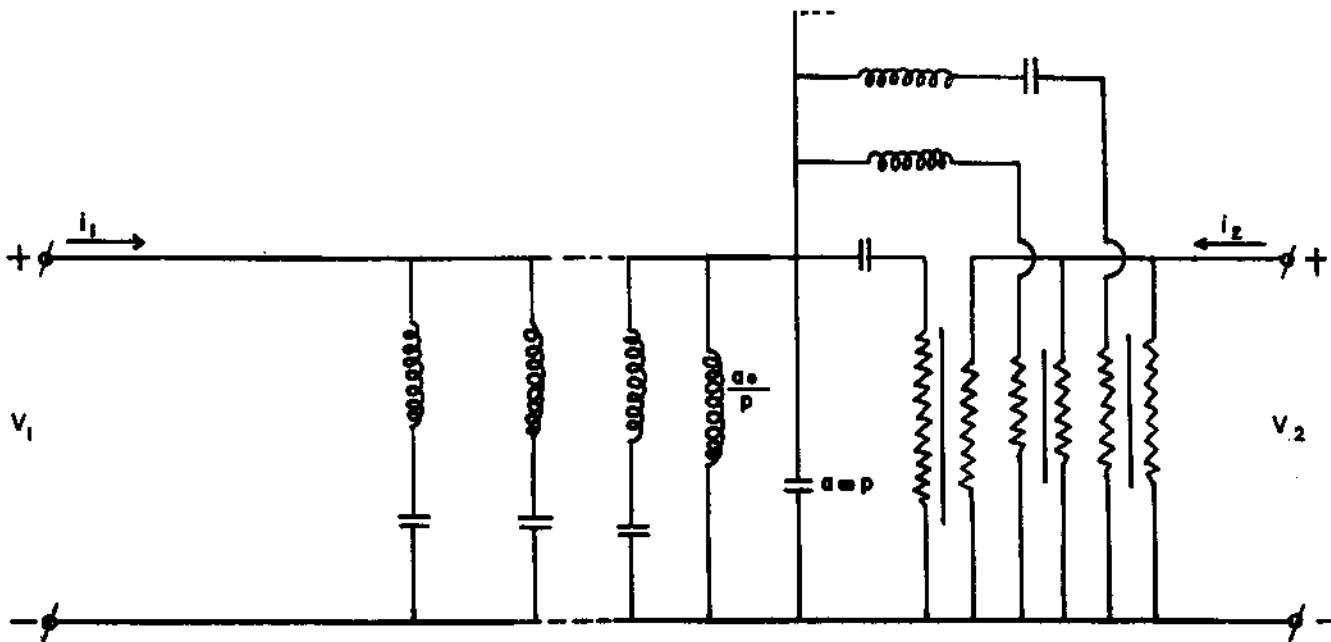
Por serem  $b_k > 0$ ,  $a_k > 0$  e  $h_k^2 > 0$ , então os valores de  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $L_2$  e  $C_2$  são positivos e têm realização física. O número  $n$  pode ser positivo ou negativo.

Se o Pólo for Compacto em  $k$ , então:  $a_k \cdot b_k - h_k^2 = 0$  e  $L_1$  terá valor infinito e  $C_1$  terá valor nulo. Em consequência:

$$\frac{1}{pL_1} = 0 \quad \text{e} \quad pC_1 = 0$$

Esses elementos podem ser retirados da Síntese, se o Pólo for Compacto, porque não contribuem para a Admitância Total.

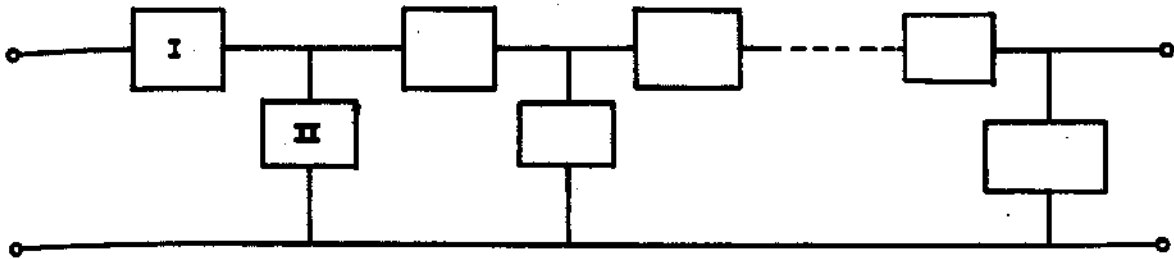
A Realização Total de Foster da Matriz Admitância será:



## 2) MÉTODO "LADDER NETWORK" - MÉTODO DE CAUER

Na Síntese de Cauer são dados  $Z_{11}$  e  $n Z_{12}$ , onde  $n$  é uma constância a determinar. O desenvolvimento da Matriz Impedância  $Z(p)$  pelo Método de Cauer, em geral, não dá uma Matriz Compacta. É por isso que  $Z_{22}$  não é conhecida a priori. A Síntese

tese de Cauer leva a um tipo de rede conhecida por Ladder Network que tem o seguinte aspecto:



É o que se chama de "Desenvolvimento Ladder".

Já vimos que:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{i_1} \Big|_{i_2 = 0} ; \quad Z_{12} = \frac{V_2}{i_1} \Big|_{i_2 = 0}$$

se a Rede é Recíproca:

$$V_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

$$V_2 = Z_{12} i_1 + Z_{22} i_2$$

Os Pólos de  $Z_{11}$  são obtidos quando, fazendo-se nula a corrente  $i_2$ , faz-se também nula a corrente  $i_1$ .

Os Pólos de  $Z_{12}$  são obtidos quando, fazendo-se nula a corrente  $i_2$ , faz-se também nula a corrente  $i_1$ .

Isto significa que  $Z_{12}$  tem os mesmos Pólos de  $Z_{11}$ , embora os Zeros sejam diferentes. Tendo-se os Pólos de  $Z_{11}$  tem-se os Pólos de  $Z_{12}$  e vice-versa.

A Impedância de Transferência se anula quando a tensão  $V_2$  é nula. A Impedância de Transferência se anula quando os elementos I e II na figura anterior têm valor "infinito" e "zero", respectivamente.

Método de Síntese:

Constroi-se, na forma acima, i.é, "Ladder", o circuito. As Impedâncias  $Z_{11}$  e  $Z_{12}$  são funções da frequência.

Não existirá transferência da entrada para a saída, se as Impedâncias Série tiverem valor "infinito" e as Impedâncias Paralelo tiverem valor "zero". Assim, se

a Função de Transferência  $Z_{12}$  é nula, então a Tensão de saída  $V_2$  será também nula. A Função de Transferência  $Z_{12}$  pode ter Zeros Finitos no Eixo Imaginário

### ESTUDO DE FILTROS

O Filtro é caracterizado, por exemplo, pela relação tensão de saída sobre a tensão de entrada. Esta relação é um polinômio em  $p$ , e o que se quer realizar é uma rede que produza essa relação "saída sobre entrada". Como obter o polinômio que dá essa relação é um problema que não será abordado neste trabalho. Já se parte do momento em que essa relação é dada por um polinômio que caracteriza um Filtro. Então a Função de Transferência é dada e requer-se somente a sua realização. Realiza-se, inicialmente, o Filtro utilizando-se Capacitores, Bobinas e Transformadores; depois substitue-se Transformadores e Bobinas por Gyrtor e depois realiza-se o Gyrtor eletronicamente. A seguir, integra-se o circuito obtido.

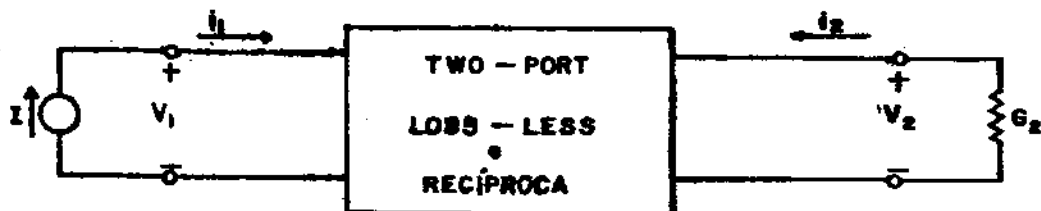
### FILTROS

É dada a relação:  $\frac{\text{saída}}{\text{entrada}}$

Calcular as Matrizes Impedância e Admitância para a realização da Rede.

Consideraremos uma Two-Port Loss-Less terminada por uma Resistência e o Sinal de Entrada é suposto, inicialmente, Ideal.

1º Caso: Seja um Filtro constituído por uma Two-Port Loss-less e Recíproca, com um Resistor na saída.



Uma das equações da Matriz Impedância que utilizaremos será:

$$V_2 = Z_{12} I_1 + Z_{22} I_2$$

onde:  $I_2 = -G_2 V_2$ , daí:

$$V_2 = Z_{12} I_1 + Z_{22} (-G_2 V_2) \therefore V_2 + Z_{22} G_2 V_2 = Z_{12} I_1$$

donde:

$$V_2(1 + G_2 Z_{22}) = Z_{12}I$$

A Função de Transferência será dada por:

$$\frac{V_2}{I} = \frac{Z_{12}}{1 + G_2 Z_{22}}$$

Para "normalizar" todas as Admitâncias em relação a  $G_2$  fazemos, então  $G_2$  igual à unidade. Fazendo-se:

$$G_2 = 1$$

Temos:

$$\frac{V_2}{I} = \frac{Z_{12}}{1 + Z_{22}}$$

Vimos que  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$  e  $Z_{22}$  eram dadas por polinômios em  $p$ : A, H e B. Então:

$$Z_{11} = \frac{A}{C}; \quad Z_{12} = \frac{H}{C}; \quad Z_{22} = \frac{B}{C}$$

A Função de Transferência  $\frac{V_2}{I}$  se reduz a:

$$\frac{V_2}{I} = \frac{\frac{H}{C}}{1 + \frac{B}{C}} \implies \frac{V_2}{I} = \frac{H}{B+C} = \frac{N}{M}$$

Como a relação  $\frac{N}{M}$  é dada, devemos calcular  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$  e  $Z_{22}$  para podermos realizar a rede que conduza à relação:

$$\frac{V_2}{I} = \frac{N}{M}$$

Temos, ainda, que:

Se C é par, obrigatoriamente H, A e B serão ímpares.

Se C é ímpar, obrigatoriamente H, A e B serão pares.

#### CONDIÇÕES DE REALIZABILIDADE:

São as condições que os polinômios H, A e B devem satisfazer para que a expressão  $\frac{V_2}{I} = \frac{N}{M}$  seja realizável, ou seja, as condições que os polinômios N e M devem satisfazer para que possamos representar uma rede loss-less e recíproca que conduza a uma relação:  $\frac{V_2}{I}$ .

1ª Condição: - O POLINÔMIO "N" DEVE SER "PAR" OU "ÍMPAR"

Temos a expressão:  $\frac{V_2}{I} = \frac{N}{M}$  onde:  $V_2 M = IN$ .

Por esta expressão vemos que se a tensão  $V_2$  é suposta diferente de zero e a corrente  $I$  é suposta nula, então o polinômio  $M$  será idênticamente nulo.  $V_2$  diferente de zero significa que se tem "oscilações" na resistência, pelo fato da corrente  $I$  ser nula e como acontecem sobre um elemento passivo, as oscilações são amortecidas, i.é tendem a zero quando o tempo "t" tende a infinito. Assim, os Zeros do polinômio  $M$  determinam as frequências naturais de oscilação de  $V_2$ . Como os Zeros de  $M$  têm componente real negativa, então esses Zeros estarão situados no semi-plano esquerdo complexo. Um Sistema Passivo sempre tem Polos no semi-plano esquerdo complexo.

Como os polinômios  $B$  e  $C$  têm coeficientes reais, então o polinômio  $M$  tem coeficientes reais, pois:  $B + C \equiv M$ .

Um polinômio que tenha todos os Zeros no semi-plano esquerdo complexo é chamado de "Polinômio de Hurwitz". Assim, teremos:

2ª Condição: - O POLINÔMIO "M" DEVE SER UM POLINÔMIO DE HURWITZ

Vimos, anteriormente, as expressões:

$$Z_{11} = \sum_k \frac{a_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{a_0}{p} + a_\infty p$$

$$Z_{12} = \sum_k \frac{h_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{h_0}{p} + h_\infty p$$

$$Z_{22} = \sum_k \frac{b_k p}{p^2 + w_k^2} + \frac{b_0}{p} + b_\infty p$$

Onde as condições de resíduos que deviam ser satisfeitas eram:

$$a_k \geq 0, \quad b_k \geq 0 \quad \text{e} \quad a_k \cdot b_k \geq h_k^2$$

Para a equação acima vemos que para  $b_k$  nulo também  $h_k$  será nulo; mas pode acontecer que  $b_k$  seja diferente de zero e  $h_k$  seja nulo, bastando para isto acontecer que  $a_k$  seja nulo. Queremos dizer com isto que temos mais coeficientes  $b$  do que



h ou em igual número. Concluimos que o grau de B deve ser igual ou maior que o grau de H. Assim, o grau de B+C será maior ou igual que o grau de H. Porém B+C é igual a M e H é igual a N. Dêste modo temos:

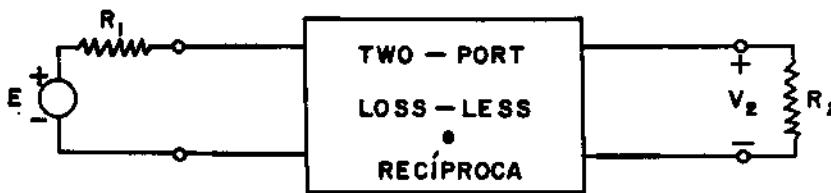
3ª Condição: - O GRAU DO POLINÔMIO M É MAIOR OU IGUAL AO GRAU DO POLINÔMIO N.

Resumo das CONDIÇÕES DE REALIZIBILIDADE:

- 1ª Condição: "N" deve ser Par ou Ímpar;
- 2ª Condição: "M" é um Polinômio de Hurwitz;
- 3ª Condição: Grau de "M"  $\geq$  Grau de "N".

POTÊNCIA DISSIPADA E POTÊNCIA REFLETIDA

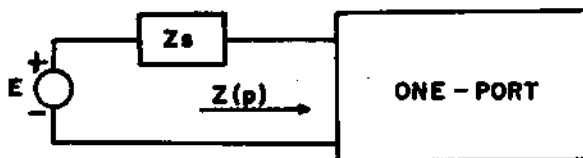
No caso real deve-se considerar sempre a Impedância Interna  $R_1$  da Fonte:



Desejamos que seja satisfeita a relação abaixo, para cálculo da Two-Port:

$$\frac{V_2}{E} = \frac{N(p)}{M(p)}$$

Se temos:



Se a Impedância de Entrada da One-Port é  $Z(p)$ , pode-se calcular a Potência Dissipada na One-Port. Seja:

$$Z_s = R_s + jX_s$$

$$Z(p) = R + jX$$

$$I = \frac{E}{R_s + R + j(X_s + X)} ; \quad P = \frac{R|I|^2}{(R_s + R)^2 + (X_s + X)^2} = \frac{RE}{(R_s + R)^2 + (X_s + X)^2}$$

A Potência será Máxima quando tivermos para a Parte Reativa:

$$X = -X_s$$

Então a Potência Máxima dada pela fórmula abaixo, será uma função exclusiva de R:

$$P_{\text{máx.}} = \frac{RE^2}{(R_s + R)^2}$$

Cálculo do valor de Potência Máxima:

Derivando-se a expressão acima de  $P_{\text{máx}}$  em relação a R, temos:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{E^2(R_s + R)^2 - RE^2 \cdot 2(R_s + R)}{(R_s + R)^4}$$

Igualando-se a zero a expressão da Derivada, temos que:  $R = R_s$ . Então, a Máxima Transferência de Potência se dará quando:

$$R = R_s \quad \text{e} \quad X = -X_s$$

No nosso caso  $Z_s$  é igual a  $R_1$  e  $Z(p)$  é igual a  $R_1$  para a máxima transferência de Potência. Há, então, um Perfeito Casamento de Impedância. O valor máximo da Potência será:

$$P_{\text{máx.}} = \frac{R_1 E^2}{(R_1 + R_1)^2} = \frac{R_1 E^2}{4 R_1^2} = \frac{E^2}{4 R_1}$$

Quando não há casamento de impedância nem toda potência é transferida; há, então, certa potência refletida. Esta pode ser calculada.

$$\text{Potência Refletida} = \frac{P_{\text{máx}} - P}{P_{\text{máx}}} = \left( 1 - \frac{P}{P_{\text{máx}}} \right) < 1$$

Qual o valor de P quando  $Z_s = R_1$  e  $Z(p) = R + jX$  ?

Sabemos que:

$$P = \frac{RE^2}{(R_1 + R)^2 + X^2}$$

$$\text{Potência Refletida} = 1 - \frac{\frac{RE^2}{(R_1 + R)^2 + X^2}}{\frac{RE^2}{4R_1}} = 1 - \frac{4RR_1}{(R_1 + R)^2 + X^2} =$$

$$= 1 - \frac{4RR_1}{|Z + R_1|^2} = \frac{R_1^2 + R^2 + 2RR_1 + X^2 - 4RR_1}{|Z + R_1|^2} = \frac{R^2 - 2RR_1 + R_1^2 + X^2}{|Z + R_1|^2} =$$

$$= \frac{|Z - R_1|^2}{|Z + R_1|^2} = \frac{P_{\text{máx}} - P}{P_{\text{máx}}} \quad \textcircled{1}$$

Definimos um fator  $S(j\omega)$  como sendo:

$$S(j\omega) = \frac{Z(j\omega) - R_1}{Z(j\omega) + R_1} \quad \text{ou} \quad S(p) = \frac{Z(p) - R_1}{Z(p) + R_1}$$

Comparando esta última expressão com a expressão  $\textcircled{1}$ , podemos calcular o Coeficiente de Reflexão.

$$\frac{|Z - R_1|^2}{|Z + R_1|^2} = \frac{P_{\text{máx}} - P}{P_{\text{máx}}} = |S(j\omega)|^2$$

Se temos  $S(j\omega) = 0$ , então toda a potência será transferida.

Se temos  $S(j\omega) = 1$ , então existe reflexão total de potência.

$$S(p) = \frac{Z(p) - R_1}{Z(p) + R_1}$$

Por definição:  $F(p)$  é uma Função Limitada Real (Bounded Real) se:

- a)  $F(p)$  é Real, para  $p$  Real;
- b)  $|F(p)| < 1$ , para  $\text{Re}[p] \geq 0$ .

Vimos que a função  $F(p)$  é Positiva Real, se:

- a)  $F(p)$  é Real, para  $p$  Real;
- b)  $\text{Re}[F(p)] \geq 0$ , para  $\text{Re}[p] \geq 0$ .

Demonstrar que a função  $S(p)$  é uma Função Limitada Real.

Hipótese:  $Z(p)$  satisfaz as condições acima para uma função Positiva Real.

Temos para Módulo de  $S(p)$ :

- a) Para  $p$  real,  $S(p)$  é real.

$$\begin{aligned} \text{b) } S(p) S^*(p) = |S(p)|^2 &= \frac{Z(p) - R_1}{Z(p) + R_1} \times \frac{Z^*(p) - R_1}{Z^*(p) + R_1} = \\ &= \frac{|Z(p)|^2 - R_1 |Z(p) + Z^*(p)| + R_1^2}{|Z(p)|^2 + R_1 |Z(p) + Z^*(p)| + R_1^2} = \\ &= \frac{|Z(p)|^2 - 2RR_1 + R_1^2}{|Z(p)|^2 + 2RR_1 + R_1^2} = |S(p)|^2 \end{aligned}$$

Na expressão acima temos que  $\text{Re}[Z(p)] = R$ ; analisando, então, para  $R \geq 0$ , temos que o Módulo de  $S(p)$  deve ser menor ou igual à unidade quando o Real de  $p$  for maior ou igual a zero.

Como  $Z(p)$  é uma Função Real Positiva, então quando:

$$\text{Re}[p] \geq 0 \quad \text{teremos} \quad \text{Re}[Z(p)] \geq 0$$

Mas  $\text{Re}[Z(p)] = R \therefore \text{Re}[Z(p)] \geq 0 \implies R \geq 0$ .

Logo  $R$ , que é o Real de  $Z(p)$ , será maior ou igual a zero.

Para  $R$  maior que zero, temos:

$$|S(p)|^2 = \frac{|Z(p)|^2 - 2RR_1 + R_1^2}{|Z(p)|^2 + 2RR_1 + R_1^2}$$

Na expressão acima observamos que o Numerador é menor que o Denominador. Isto implica em que:

$$|S(p)|^2 < 1 \implies \text{módulo de } S(p) < 1$$

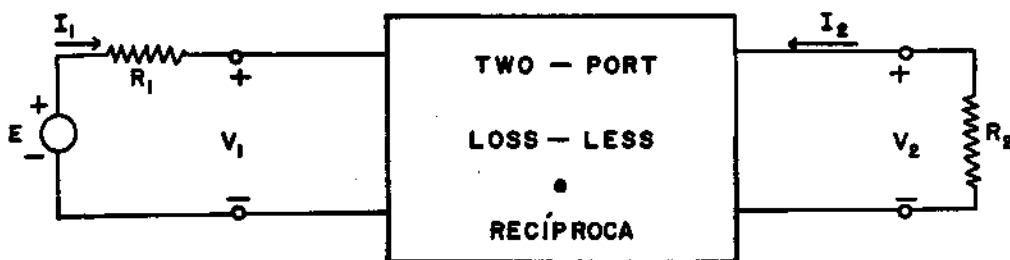
Para R igual a zero, temos:

$$|S(p)|^2 = \frac{|Z(p)|^2 + R_1^2}{|Z(p)|^2 + R_1^2} = 1$$

Assim, vemos que para  $R = 0$  o Módulo de  $S(p)$  será unitário.

Conclusão:  $S(p)$  é uma Função Real Limitada.

### SÍNTESE DO FILTRO



Vamos determinar as expressões das relações  $\frac{V_2}{E}$  e  $\frac{V_1}{I_1}$ . A Matriz Impedância da Two-Port é:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 & \textcircled{1} \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

As equações adicionais ao circuito são:

$$I_2 = -\frac{V_2}{R_2} \quad 3 ; \quad E = I_1 R_1 + V_1 \implies V_1 = E - I_1 R_1 \quad \textcircled{4}$$

Fazendo as substituições nas equações  $\textcircled{1}$  e  $\textcircled{2}$  temos:

$$E - I_1 R_1 = Z_{11} I_1 - \frac{Z_{12}}{R_2} V_2 \quad \therefore \quad E = (Z_{11} + R_1) I_1 - \frac{Z_{12}}{R_2} V_2 \quad \textcircled{5}$$

$$V_2 = Z_{12} I_1 - \frac{Z_{22}}{R_2} V_2 \quad V_2 \left( 1 + \frac{Z_{12}}{R_2} \right) = Z_{12} I_1$$

$$V_2 \left( \frac{R_2 + Z_{22}}{R_2} \right) = Z_{12} I_1$$

Então:  $I_1 = \frac{R_2 + Z_{22}}{R_2 Z_{12}} V_2$  que levando à expressão (5):

$$E = \left[ \frac{(Z_{11} + R_1)(R_2 + Z_{22})}{R_2 Z_{12}} - \frac{Z_{12}}{R_2} \right] \times V_2$$

ou

$$\frac{E}{V_2} = \frac{R_1 R_2 + R_1 Z_{22} + R_2 Z_{11} + Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}{R_2 Z_{12}}, \text{ onde: } \Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2$$

e

$$\frac{V_2}{E} = \frac{R_2 Z_{12}}{R_1 R_2 + R_1 Z_{22} + R_2 Z_{11} + \Delta Z}$$

Temos ainda que:

$$Z(p) = \frac{V_1}{I_1} = \frac{E - IR_1}{I_1} = \frac{E}{I_1} - R_1 =$$

$$= \frac{R_2 Z_{12}}{R_2 + Z_{22}} \times \frac{R_1 R_2 + R_1 Z_{22} + R_2 Z_{11} + \Delta Z}{R_2 Z_{12}} - R_1 = \frac{R_2 Z_{11} + \Delta Z}{R_2 + Z_{22}}$$

Normalizando as Impedâncias em função de  $R_1$  e  $R_2$ , podemos escrever as seguintes definições de valores:

$$E' = \frac{E}{\sqrt{R_1}} \quad ; \quad V_1' = \frac{V_1}{\sqrt{R_1}}$$

$$I_1' = I_1 \sqrt{R_1} \quad ; \quad V_2' = \frac{V_2}{\sqrt{R_2}} \quad ; \quad I_2' = I_2 \sqrt{R_2}$$

$$Z'_{11} = \frac{Z_{11}}{R_1} ; \quad Z'_{22} = \frac{Z_{22}}{R_2} ; \quad Z'_{12} = \frac{Z'_{12}}{\sqrt{R_1 R_2}}$$

Então:

$$V_2 = V'_2 \sqrt{R_2} \quad \text{e} \quad E = E' \sqrt{R_1}$$

E:

$$\frac{V_2}{E} = \frac{V'_2 \sqrt{R_2}}{E' \sqrt{R_1}} = \frac{R_2 \sqrt{R_1 R_2} Z'_{12}}{R_1 R_2 + R_1 R_2 Z'_{12} + R_2 R_1 Z'_{11} + R_1 Z'_{11} R_2 Z'_{22} - R_1 R_2 Z'_{12}}$$

Assim:

$$\frac{V'_2}{E'} = \frac{Z'_{12}}{1 + Z'_{11} + Z'_{22} + \Delta Z'}$$

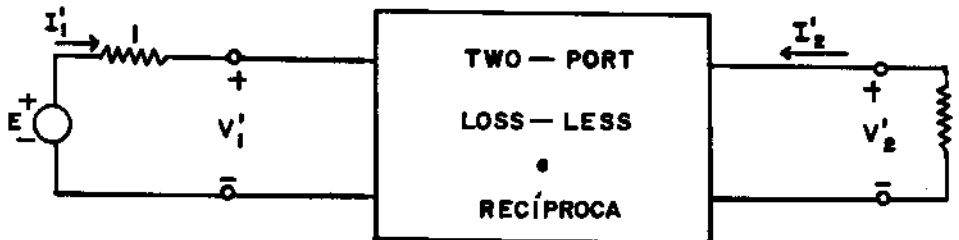
Vejamos  $Z(p)$ :

$$Z(p) = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\sqrt{R_1} V'_1}{\frac{I'_1}{\sqrt{R_1}}} = \frac{R_2 R_1 Z'_{11} + R_1 Z'_{11} R_2 Z'_{22} - R_1 R_2 Z'_{12}}{R_2 + R_2 Z'_{22}}$$

ou:

$$Z'(p) = \frac{V'}{I'} = \frac{Z'_{11} + \Delta Z'}{1 + Z'_{22}}$$

Vemos que o que fizemos foi normalizar em relação a  $R_1$  e  $R_2$ . Teremos, então:



Que é a Two-Port reduzida ao caso em que:  $R_1 = R_2 = 1$ . Abandonando, por facilidade de escrita, os ' (linhas):

$$\frac{V_2}{E} = \frac{Z_{12}}{1 + Z_{11} + Z_{22} + \Delta Z} ; \quad Z(p) = \frac{Z_{11} + \Delta Z}{1 + Z_{22}}$$

Sendo:

$$Z_{11} = \frac{A}{C} ; \quad Z_{12} = \frac{H}{C} ; \quad Z_{22} = \frac{B}{C} ; \quad \Delta Z = \frac{D}{C}$$

onde A, B, D e H são polinômios em p, todos os coeficientes reais.

Por definição, temos:

$$\Delta Z \equiv Z_{11} \cdot Z_{22} - Z_{12}^2 = \frac{A}{C} \cdot \frac{B}{C} - \frac{H^2}{C^2} = \frac{AB - H^2}{C^2} = \frac{D}{C}$$

Conclusão:  $AB - H^2 = CD$

A expressão acima indica que apenas quatro parâmetros devem ser conhecidos; o quinto parâmetro poderá ser calculado.

Substituindo os valores das Impedâncias na expressão dada acima, temos:

$$\frac{V_2}{E} = \frac{\frac{H}{C}}{1 + \frac{A}{C} + \frac{B}{C} + \frac{D}{C}} = \frac{\frac{H}{C}}{\frac{C + A + B + D}{C}} = \frac{H}{A + B + C + D}$$

$$Z(p) = \frac{\frac{A}{C} + \frac{D}{C}}{1 + \frac{B}{C}} = \frac{\frac{A+D}{C}}{\frac{C+B}{C}} = \frac{A+D}{B+C}$$

Ou ainda:

$$\frac{V_2}{\frac{E}{2}} = \frac{2H}{A + B + C + D} = \frac{N(p)}{M(p)}$$

Então, o que é dado é a relação:

$$\frac{V_2}{\frac{E}{2}} = \frac{N(p)}{M(p)}$$



Estudo das Condições de Realizabilidade:

Como  $Z_{12} = \frac{H}{C}$ , então se C é Par então H é Ímpar e se C é Ímpar então H é Par.

1ª Condição: N(p) é um polinômio Par ou Ímpar.

Vejam a 2ª condição:

Temos:

$$V_2 \cdot M(p) \equiv \frac{E}{2} N(p)$$

Observando esta expressão, vemos que para a Fonte curto-circuitada, i.é; para  $E \equiv 0$  podemos ter  $V_2 \neq 0$  quando  $M(p) = 0$ . Dêste fato resulta que os Zeros do polinômio M(p) dão as Oscilações Livres de  $V_2$ , ou seja, as Frequências Naturais de  $V_2$ . Quando o tempo t tende a infinito as Oscilações tendem a se anularem. Significa que os Zeros de M(p) estão todos situados no semi-plano esquerdo complexo, situação que corresponde à das Oscilações Amortecidas.

Conclusão: Se M(p) tem Coeficientes Reais e tem todos os Zeros situados no semi-plano esquerdo complexo é, por definição, um Polinômio de Hurwitz.

2ª Condição: M(p) deve ser um Polinômio de Hurwitz.

3ª Condição: O grau de M(p) deve ser maior ou igual ao grau de N(p).

Verificação da 3ª Condição:

$$\frac{V_2}{\frac{E}{2}} = \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} \implies \left| \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} \right| \leq 1 \quad \text{porque } V_2 \leq \frac{E}{2}$$

Outra forma de verificar esta condição:

$$a_k \cdot b_k \geq h_k^2$$

Se  $b_k = 0 \implies h_k = 0$ .

Mas  $b_k \neq 0$  pode nos dar  $h_k = 0$ , desde que  $a_k = 0$ , donde concluímos que o Grau do polinômio B é maior ou igual ao Grau do polinômio H. Então: o Grau de  $M(p)$  é maior ou igual ao Grau de  $N(p)$ .

É dada a relação:  $\frac{N(p)}{M(p)}$ .

Também, sabemos que:  $Z_{11} = \frac{A}{C}$ ;  $Z_{12} = \frac{H}{C}$ ;  $Z_{22} = \frac{B}{C}$ .

Se N é par, então H é par; daí concluímos que C é ímpar e, em decorrência, A e B serão pares.

Considerando os valores pares e ímpares na expressão  $AB - H^2 = CD$  concluímos que D é ímpar.

Porém, se N é ímpar, então H é ímpar; daí concluímos que C é par e, em decorrência, A e B serão ímpares.

Considerando os valores pares e ímpares na expressão  $AB - H^2 = CD$  concluímos que D é par.

Conclusão: C e D têm sempre a mesma Paridade.

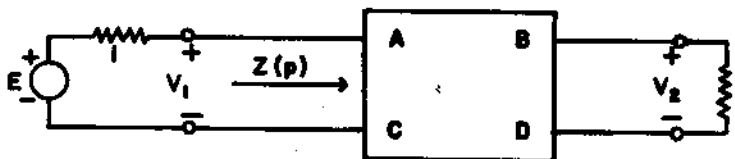
Então:

$$\begin{array}{l} A + B \longrightarrow E[M(p)] \text{ ou } 0[M(p)] \\ C + D \longrightarrow 0[M(p)] \text{ ou } E[M(p)] \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{onde:} \\ E [ ] \longrightarrow \text{parte par} \\ 0 [ ] \longrightarrow \text{parte ímpar} \end{array} \right.$$

Já vimos que:

$$\frac{V}{\frac{E}{2}} = \frac{2H}{A + B + C + D} = \frac{N(p)}{M(p)} \quad \text{e} \quad Z(p) = \frac{A+D}{B+C}$$

Isto, para uma Two-Port Loss-less e Recíproca:



Como a Two-Port é Loss-less, toda a potência enviada pelo sinal E é dissipada na resistência  $R_2 = 1 \text{ ohm}$ .

Temos as expressões:

$$P = \frac{|V_2|^2}{R} = |V_2|^2; \quad P_{\text{máx}} = \left| \frac{E}{2} \right|^2$$

Vejam a relação:

$$\frac{P_{\text{máx}} - P}{P_{\text{máx}}} = 1 - \frac{P}{P_{\text{máx}}} = 1 - \frac{|V_2(j\omega)|^2}{\left| \frac{E}{2}(j\omega) \right|^2} = |S(j\omega)|^2$$

Então:

$$|S(j\omega)|^2 = 1 - \frac{|N(j\omega)|^2}{|M(j\omega)|^2}$$

Mas,

$$|S(j\omega)|^2 = S(j\omega) \cdot S(-j\omega)$$

$$|N(j\omega)|^2 = N(j\omega) \cdot N(-j\omega)$$

$$|M(j\omega)|^2 = M(j\omega) \cdot M(-j\omega)$$

Dai, decorre que:  $S(j\omega) \cdot S(-j\omega) = 1 - \frac{N(j\omega) \times N(-j\omega)}{M(j\omega) \times M(-j\omega)}$ .

Passando à variável  $p$ :

$$S(p) \cdot S(-p) = 1 - \frac{N(p) \cdot N(-p)}{M(p) \cdot M(-p)} = \frac{M(p) \cdot M(-p) - N(p) \cdot N(-p)}{M(p) \cdot M(-p)}$$

Como já vimos,  $M(p)$  é um polinômio de Hurwitz; então,  $M(-p)$  tem zeros no semi-plano direito complexo.

Vamos dizer que:

$$S(p) \equiv \frac{K(p)}{M(p)}$$

Onde  $K(p)$  é um polinômio a determinar.

Teremos que:

$$S(p) \cdot S(-p) = \frac{K(p)}{M(p)} \cdot \frac{K(-p)}{M(-p)}$$

Também vimos que:

$$K(p) \cdot K(-p) = M(p) \cdot M(-p) - N(p) \cdot N(-p)$$

Substituindo valores:

$$Z(p) = \frac{1 + S(p)}{1 - S(p)} \cdot 1 = \frac{1 + \frac{K(p)}{M(p)}}{1 - \frac{K(p)}{M(p)}} = \frac{\frac{M(p) + K(p)}{M(p)}}{\frac{M(p) - K(p)}{M(p)}}$$

$$Z(p) = \frac{M(p) + K(p)}{M(p) - K(p)} = \frac{A+D}{B+C}$$

Hipóteses que podem ocorrer em um Problema:

1ª Hipótese: N par  $\rightarrow$  H par  $\rightarrow$  C ímpar  $\rightarrow$  A, B pares, D ímpar.

Vamos dizer que:

$$f_A = \text{even } [M+K]$$

$$f_D = \text{odd } [M+K]$$

$$f_B = \text{even } [M+K]$$

$$f_C = \text{odd } [M-K]$$

"f" é um coeficiente a determinar.

Somando-se  $f_A$  e  $f_B$ :

$$f_A + f_B = f(A+B) = \text{even}[M+K] + \text{even}[M-K] = 2 \cdot \text{even}[M] = 2(A+B)$$

Concluimos que:  $f = 2$ .

Somando-se  $f_D$  e  $f_C$ :

$$f_D + f_C = f(D+C) = \text{odd}[M+K] + \text{odd}[M-K] = 2 \text{ odd}[M] = 2(D+C)$$

Concluimos, ainda, que:  $f = 2$ .

2ª Hipótese: N ímpar  $\rightarrow$  H ímpar  $\rightarrow$  C par  $\rightarrow$  A, b ímpares, D par.

Vamos dizer que

$$fA = \text{odd } [M+K]$$

$$fB = \text{odd } [M-K]$$

$$fD = \text{even } [M+K]$$

$$fC = \text{even } [M-K]$$

Somando-se fA e fB:

$$fA + fB = f(A+B) = \text{odd}[M+K] + \text{odd}[M-K] = 2 \text{ odd } [M] = 2(A+B)$$

Concluimos que:  $f=2$ .

Somando-se fD e fC:

$$fD + fC = f(D+C) = \text{even } [M+K] + \text{even } [M-K] = 2 \text{ even } [M] = 2(D+C)$$

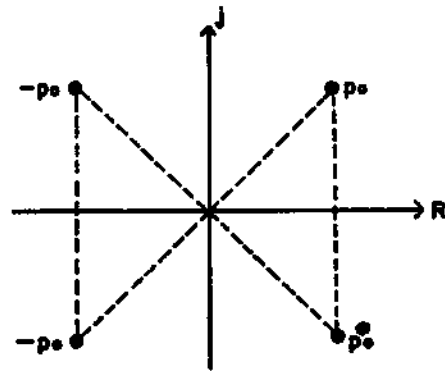
Concluimos, ainda, que:  $f = 2$

$K(p)$  deve ser calculado.

Identificação de  $K(p)$ : Pesquisando-se os Zeros da expressão:

$$M(p)M(-p) - N(p)N(-p)$$

Se  $p_0$  é um Zero desse polinômio, também  $-p_0$  será um Zero.  $M(p)$  e  $N(p)$  têm coeficientes reais. Se  $p_0$  é um Zero de um polinômio de coeficientes reais, então o conjugado  $p_0^*$  será um Zero. Se  $p_0^*$  é um Zero, então  $-p_0^*$  também é um Zero.  $K(p)$  é constituído pelos Zeros do semi-plano esquerdo complexo e  $K(-p)$  é constituído pelos Zeros do semi-plano



no direito complexo. Esta é uma das possíveis escolhas; pode-se combinar outros Zeros para se obter outras expressões para  $K(p)$  e  $K(-p)$ . A solução do problema sempre existe, mas não é determinada, isto é, "não é única".

Representação do Gyrator:

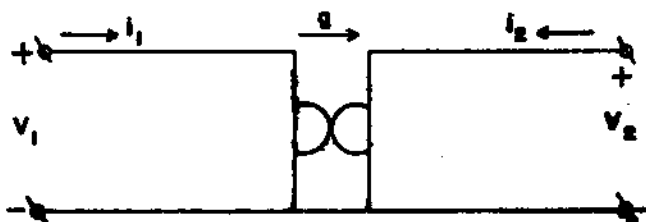


FIG. a

$g$  - representa a condutância de giração.

Equações que descrevem o Gyrator:

$$\begin{cases} i_1 = -g V_2 & \textcircled{1} \\ i_2 = -g V_1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Consideremos, agora, um Gyrator com um Capacitor conectado no Port 2.

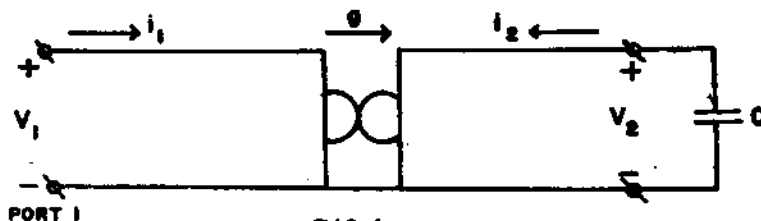


FIG. b

Desta maneira, o Gyrator com o Capacitor, passou a constituir uma One-Port, porque o único Port acessível é o Port 1.

Então, além das equações acima teremos a equação adicional:

$$V_2 = -\frac{1}{pC} i_2 \quad \textcircled{3}$$

Substituindo a equação  $\textcircled{2}$  na equação  $\textcircled{3}$ , temos:

$$V_2 = \left( -\frac{1}{pC} \right) (-g V_1) = \frac{g}{pC} V_1 \quad \textcircled{4}$$

e levando esta expressão  $\textcircled{4}$  na equação  $\textcircled{1}$ , temos:

$$i_1 = g \cdot \frac{g}{pC} \cdot V_1 = \frac{g^2}{pC} \cdot V_1$$

A Impedância de Entrada do Gyrator será:

$$\frac{V_1}{i_1} = p \frac{C}{g^2}$$

Temos que:

$$C = \frac{dq}{dV}$$

A Dimensão de C será:  $[C] = \frac{A \text{ sec}}{V} = \frac{\text{sec}}{\Omega}$

e a Dimensão de  $\frac{C}{g^2}$  será:  $\left[ \frac{C}{g^2} \right] = \frac{\text{sec}}{\Omega} \cdot \Omega^2 = \text{sec} \cdot \Omega$  (5)

Vamos, agora, considerar uma One-Port como a da figura abaixo:

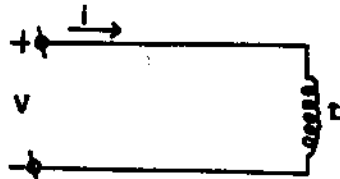


FIG.C

Onde:  $V = L \frac{di}{dt}$ .

A Dimensão de L será:  $[L] = \frac{V \text{ sec}}{A} = \Omega \text{ sec}$  (6)

Considerando (5) e (6), concluímos que ambas as figuras b e c, nos conduzem a valores de mesma Dimensão.

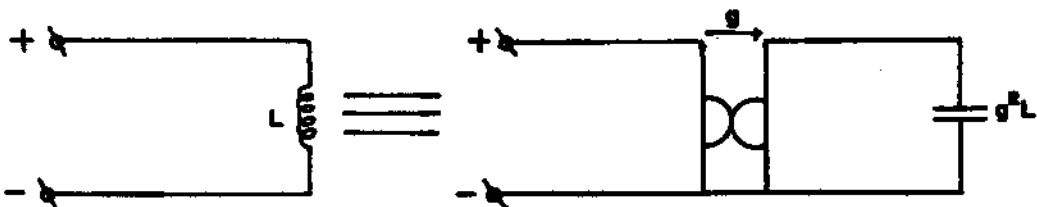
Em termos da variável p podemos escrever, ainda, para L:

$$\frac{V}{I} = pL$$

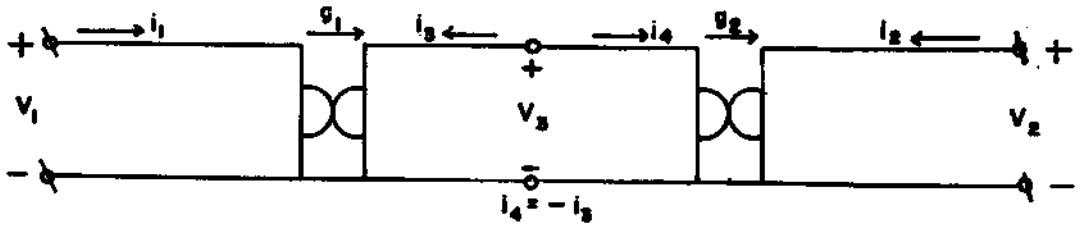
Então:

$$pL = p \frac{C}{g^2} \implies pC = plg^2 \implies \boxed{C = L \cdot g^2}$$

Conclusão: Uma Bobina L é idêntica ao Gyrator terminado por um Capacitor C no Port 2.



Seja a seguinte associação de dois Gyrtors em Cascata:



Para o primeiro Gyrtor, temos:

$$\begin{cases} i_1 = g_1 V_3 & \textcircled{1} \\ i_3 = -g_1 V_1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Para o segundo Gyrtor, temos:

$$\begin{cases} -i_3 = g_2 V_2 & \textcircled{3} \\ i_2 = -g_2 V_3 & \textcircled{4} \end{cases}$$

De  $\textcircled{3}$  tiramos:  $V_2 = -\frac{1}{g_2} \cdot i_3$

Considerando  $\textcircled{2}$ :  $V_2 = -\frac{1}{g_2} (-g_1 V_1) \therefore V_2 = \frac{g_1}{g_2} \cdot V_1$

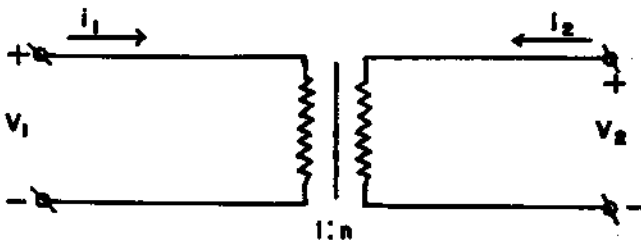
Donde:  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{g_1}{g_2} \quad \textcircled{A}$

De  $\textcircled{4}$  tiramos:  $V_3 = -\frac{i_2}{g_2}$

Então a expressão  $\textcircled{1}$  ficará:  $i_1 = g_1 \left( -\frac{i_2}{g_2} \right)$  ou  $i_1 g_2 = -i_2 g_1$

Donde:  $\frac{i_2}{i_1} = -\frac{g_2}{g_1} \quad \textcircled{B}$

Considerando, agora, um Transformador:

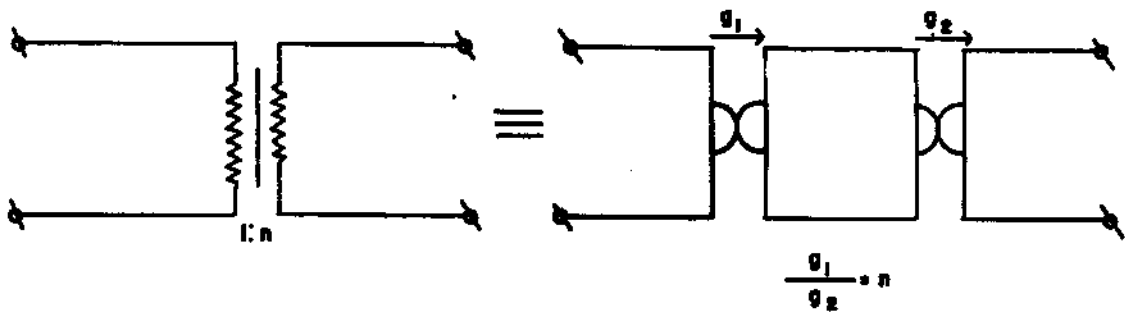


Equações que descrevem o circuito do Transformador:



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_2}{V_1} = n \\ \frac{i_2}{i_1} = -\frac{1}{n} \end{array} \right. \quad \textcircled{C}$$

Comparando as relações  $\textcircled{A}$ ,  $\textcircled{B}$  e  $\textcircled{C}$ , temos que um Transformador é equivalente à associação de dois Gyrtors em Cascata:



Conclusão: Um Transformador cuja relação de transformação é 1: n, pode ser substituído por dois Gyrtors associados em Cascata, onde:  $n = \frac{g_1}{g_2}$ .

Considerações: (Problemas que podem ocorrer quando substituímos Bobinas e Transformadores por Gyrtors).

1) A condutância de rotação  $g$  é o único elemento que caracteriza o Gyrtor. Se fabricamos Gyrtors em série, integrando em série, estamos interessados, por facilidade de produção, em produzir Gyrtors idênticos, i.é, com o mesmo  $g$ . Isto traz uma implicação fundamental para o tipo de Transformador que vamos substituir por Gyrtor. É que o valor da relação de transformação deverá ter o seguinte valor para  $n$ :

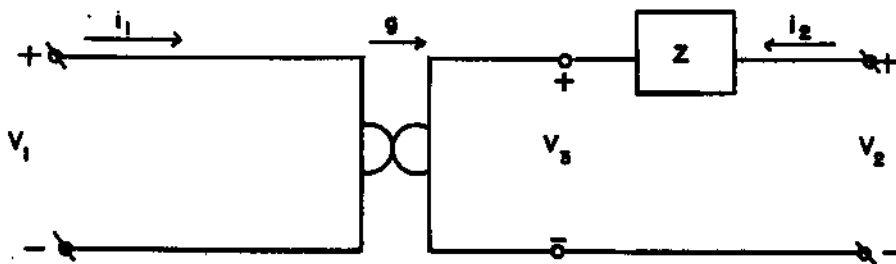
$$n = \pm 1$$

Caso contrário, teremos que usar Gyrtors diferentes. Temos  $n = +1$ , quando  $g_1 = g_2$  (ambas as setas de  $g$  no mesmo sentido); temos que  $n = -1$ , quando  $g_1 = -g_2$  (a seta da condutância de rotação de um dos Gyrtors está em sentido contrário à do outro). Em suma, podemos substituir Transformadores com relação  $n = \pm 1$ . Isto nos impõe uma limitação no projeto original, onde devemos procurar usar Trans

formadores, se fôr o caso, apenas com  $n = \pm 1$ . Nós tínhamos, por exemplo, Sínteses que seguiam diferentes caminhos, na realização dos Zeros da Função de Transferência. Então era praticamente indiferente qual das realizações devíamos usar. Agora deveremos usar sempre uma realização onde a relação seja  $n = \pm 1$ , para podermos, aí, substituir Transformadores por Gytrators idênticos.

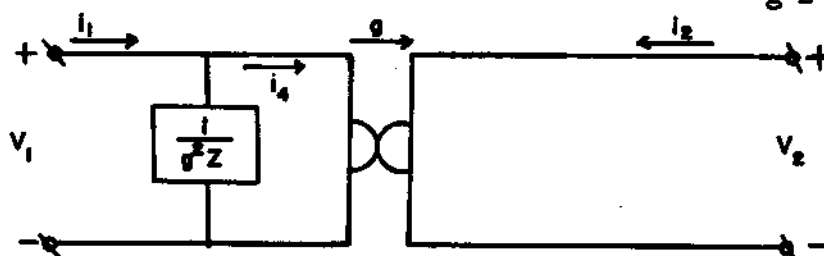
2) Como o Gytrator é um circuito eletrônico, composto de resistores, transistores, etc., queremos que o circuito esteja aterrado porque isto facilita problemas de polarização e estabilização. Devemos procurar construir circuitos nos quais as Bobinas e Transformadores sejam substituídos, convenientemente, por Gytrators aterrados. Também devemos evitar substituições onde apareçam Gytrators "Flutuantes" pois também constitue uma inconveniência.

Vamos considerar o seguinte Gytrator com uma Impedância  $Z$  no Port 2.



Circuito I

E seja o outro circuito de Gytrator com uma Impedância  $\frac{1}{g^2 Z}$  no Port de Entrada:



Circuito II

Para o circuito (I) temos:

$$\begin{cases} i_1 = g V_3 \\ i_2 = -g V_1 \\ V_2 = i_2 Z + V_3 \end{cases} \implies V_3 = V_2 - i_2 Z$$

$$i_1 = g(V_2 - i_2 Z), \text{ então:}$$

$$\textcircled{A} \begin{cases} i_1 = g V_2 - g i_2 Z \\ i_2 = -g V_1 \end{cases}$$

Para o circuito (II) temos:

$$\begin{cases} i_4 = g V_2 \\ i_2 = -g V_1 \\ i_4 = i_1 - V_1 g^2 Z \end{cases} \implies i_1 = g V_2 + V_1 g^2 Z$$

$$i_1 = g V_2 + g^2 Z - \frac{i_2}{g}, \text{ então:}$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} i_1 = g V_2 - g i_2 Z \\ i_2 = -g V_1 \end{cases}$$

Conclusão: Comparando as expressões  $\textcircled{A}$  e  $\textcircled{B}$  dos circuitos (I) e (II), respectivamente, verificamos que os dois circuitos considerados são equivalentes. Em outras palavras, uma Impedância  $Z$  em série com o circuito no Port 2, aparece como  $\frac{1}{g^2 Z}$  em paralelo no Port 1.

Prova-se o contrário ou o oposto:

Uma Impedância  $Z$  em Série com o circuito do primário, aparece como  $\frac{1}{g^2 Z}$  em paralelo no circuito do secundário.

Nota: Fazendo

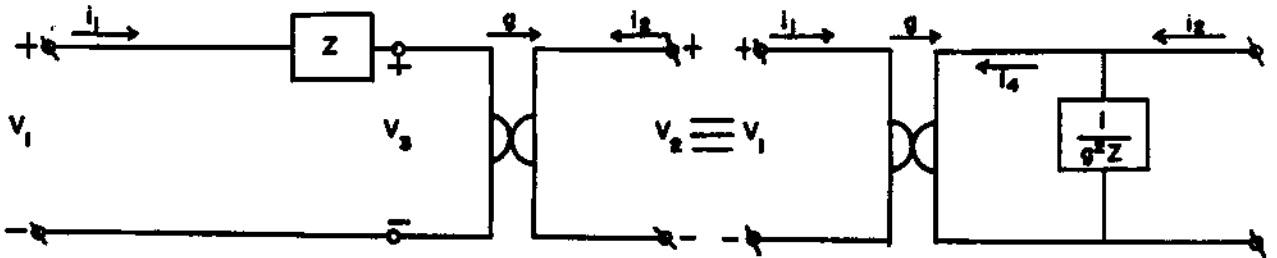
$$Z = pL \implies \frac{1}{g^2 Z} = \frac{1}{pg^2 L} = \frac{1}{pC}$$

Isto indica que a Bobina  $L$  situada em um Port, aparece no outro Port como um  $C_a$

pacitor C de valor:

$$C = g^2 L$$

Provar que:



Circuito I

Circuito II

Para o circuito (I), temos:

$$\begin{cases} i_2 = g V_2 \\ i_2 = -g V_3 \end{cases}$$

$$V_2 = i_1 Z + V_3 \implies V_3 = V_2 - i_1 Z \quad \therefore \quad i_2 = -g(V_2 - i_1 Z) = -g V_2 + g i_1 Z$$

Então o circuito (I) fica representado por:

$$\textcircled{A} \quad \begin{cases} i_1 = g V_2 \\ i_2 = g i_1 Z - g V_2 \end{cases}$$

Para o circuito (II), temos:

$$\begin{cases} i_1 = g V_2 \\ i_4 = -g V_1 \end{cases}$$

$$i_4 = i_2 - V_2 g^2 Z \implies i_2 = V_2 g^2 Z - g V_1$$

$$i_2 = -g V_1 + \frac{i_1}{g} g^2 Z \quad \text{ou} \quad i_2 = -g V_1 + g i_1 Z$$

Então o circuito (II) fica representado por:

$$\textcircled{B} \quad \begin{cases} i_1 = g V_2 \\ i_2 = g i_1 Z - g V_1 \end{cases}$$

Considerando-se  $\textcircled{A}$  e  $\textcircled{B}$ , conclui-se que os circuitos dados acima são equiva-

lentes.

### TWO-PORT "NÃO ENERGÉTICA"

Por definição: A Two-Port é não Energética quando a Potência Instantânea é nula para todo instante  $t$ .

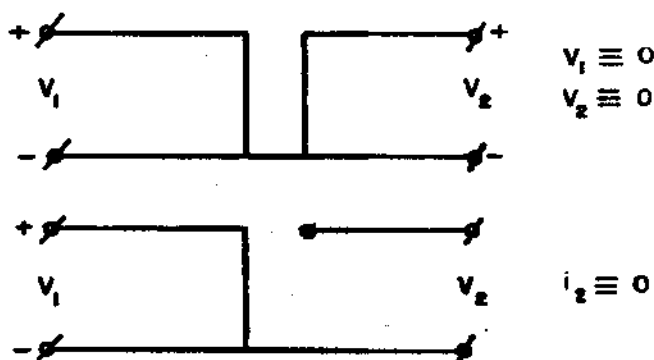
Este fato pode ser descrito pela equação:

$$V_1(t) \cdot i_1(t) + V_2(t) \cdot i_2(t) \equiv 0$$

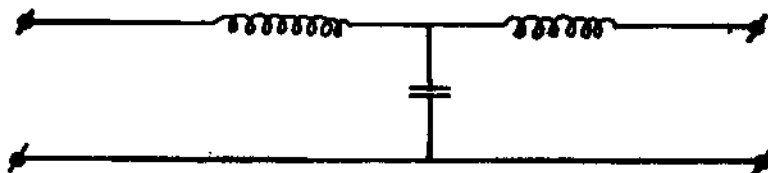
Diferença entre uma Two-Port Loss-less e uma Two-Port Não Energética:

Uma Two-Port Loss-less é aquela em que a Potência Média desenvolvida sobre a two-port é nula. Isto também é verdade para uma two-port "Não Energética" mas não é suficiente, pois, para esta, a potência Instantânea deve ser nula.

Exemplo de uma two-port Não Energética: (casos elementares).



Exemplo de uma two-port "Loss-less" e que não é "Não Energética":



Tomemos as seguintes equações para uma Two-Port qualquer:

$$V_2 = A V_1 + B i_1$$

$$i_2 = C V_1 + D i_1$$

As variáveis  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $i_1$  e  $i_2$  são funções do tempo.

As constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são números reais.

Aplicando a definição de Two-Port Não Energética neste caso:

$$\begin{aligned} V_1 i_1 + V_2 i_2 &= V_1 i_1 + (A V_1 + B i_1)(C V_1 + D i_1) = \\ &= V_1 i_1 + A C V_1^2 + A D V_1 i_1 + B C V_1 i_1 + B D i_1^2 = \\ &= A C V_1^2 + (1 + A D + B C) V_1 i_1 + B D i_1^2 \equiv 0 \end{aligned}$$

A expressão acima será idênticamente nula se a Two-Port for Não Energética. Esta expressão é válida, por exemplo, para:

$$\text{se } V_1 \equiv 0 \quad \text{e} \quad i_1 \neq 0 \implies B D = 0$$

Esta expressão também é válida para:

$$\text{se } i_1 \equiv 0 \quad \text{e} \quad V_1 \neq 0 \implies A C = 0$$

Esta expressão ainda é válida para:

$$\text{se } V_1 \neq 0 \quad \text{e} \quad i_1 \neq 0 \implies 1 + A D + B C = 0$$

Tomemos esta última expressão:

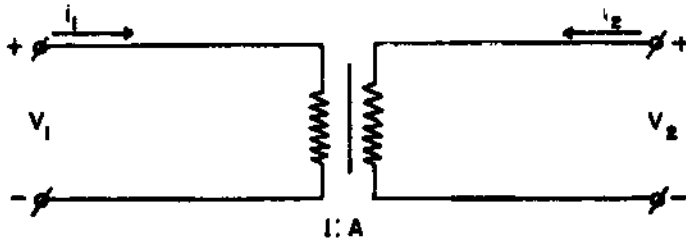
$$1 + A D + B C = 0$$

Verificamos que existem duas soluções:

1ª Solução: Para  $BC = 0$ , temos  $B = 0$  e  $C = 0$ . Portanto:  $AD = -1$ . Então ficamos com:

$$\begin{cases} V_2 = A V_1 \\ i_2 = -\frac{1}{A} i_1 \end{cases}$$

Estas duas equações formam um sistema que descreve o comportamento de um Transformador cuja relação de transformação é:  $\frac{1}{A}$ .

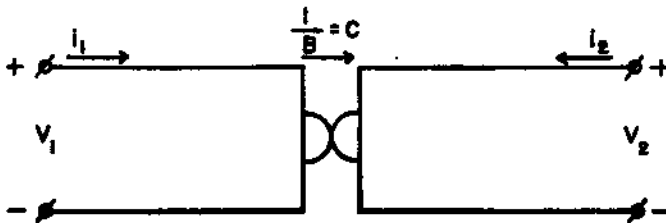


Conclusão: O TRANSFORMADOR É UMA TWO-PORT NÃO ENERGÉTICA.

2ª Solução: Para  $AD = 0$ , temos  $A = 0$  e  $D = 0$ . Portanto:  $BC = -1$ . Então ficamos com:

$$\begin{cases} V_2 = B i_1 \longrightarrow i_1 = \frac{1}{B} V_2 \\ i_2 = -\frac{1}{B} V_1 \end{cases}$$

Estas duas equações formam um sistema que descreve o comportamento de um Gyrator cuja condutância de giração é:  $\frac{1}{B} = -C$ .

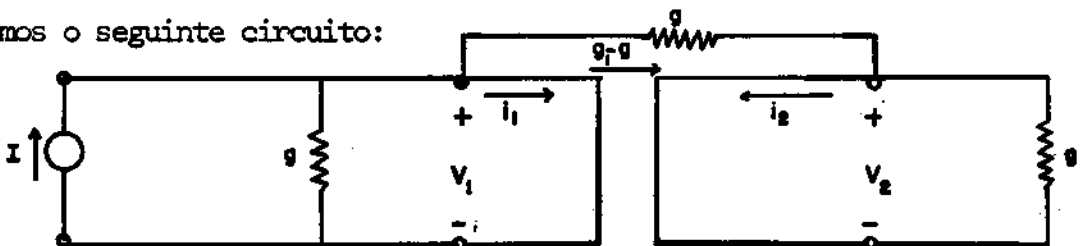


Conclusão: O GYRATOR É UMA TWO-PORT NÃO ENERGÉTICA.

Interpretação física do sentido da seta da Condutância de Giração.

Notemos que:  $\leftarrow \underline{G} \equiv - \underline{G} \rightarrow$

Consideremos o seguinte circuito:



As equações que descrevem o Gyrator são:

$$\begin{cases} i_1 = +g V_2 \\ i_2 = +g V_1 \end{cases} \quad (1)$$

Para o circuito acima, teremos:

$$\begin{cases} i_1 = I - g V_1 - g(V_1 - V_2) \\ i_2 = +g V_2 - g(V_2 - V_1) \end{cases}$$

Onde  $g(V_1 - V_2)$  e  $g(V_2 - V_1)$  são correntes de realimentação. As equações acima podem, ainda, serem escritas da seguinte forma, considerando as expressões (1):

$$\begin{cases} I - gV_1 - gV_1 + gV_2 + gV_2 = 0 \\ -gV_2 - gV_2 + gV_1 + gV_1 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} I - 2gV_1 + gV_2(1 + 1) = 0 \\ -2gV_2 + gV_1(1 + 1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Para o caso de termos  $+g$  as expressões (2) ficam:

$$\begin{cases} I - 2gV_1 = 0 \longrightarrow V_1 = \frac{I}{2g} \\ -2gV_2 + 2gV_1 = 0 \longrightarrow V_2 = V_1 \end{cases}$$

Nêste caso, existe um casamento de impedância da carga com a fonte de sinal. Assim, temos uma Transferência Total de Sinal.

Vejam, agora, o que acontece para  $-g$ :

$$\begin{cases} I - 2gV_1 + 2gV_2 = 0 \\ -2gV_2 = 0 \end{cases}$$

Como, por hipótese,  $g \neq 0$  então;  $V_2 = 0$ .

Nêste caso, não existe transferência de Potência.

Conclusão: A transferência de Potência obedece a mesma direção da seta de  $g$  do Gyrator, ou seja, a Potência se transfere de acordo com o sentido da seta. No sentido contrário  $-g$  não há transferência de Potência; o Gyrator, para a Potência, age como se fôsse um Isolador.



### Considerações Gerais sobre o Transformador e o Gyrator

Tanto o Transformador como o Gyrator são dispositivos Não Energéticos. O Transformador tem existência física e pode ser construído muito próximo do estado ideal, se a faixa de frequências considerada for pequena. Por definição, o Transformador constitui uma Realização Passiva porque é um dispositivo que opera sem fonte de energia externa. O Transformador apenas transfere energia de um Port para outro Port, não acrescentando energia nem introduzindo perdas. O Transformador se presta então a uma Realização Passiva.

Em princípio, o mesmo raciocínio é válido para o Gyrator, já que o Gyrator é também um dispositivo "Não Energético". Significa que, em princípio, podemos obter uma Realização Passiva para o Gyrator, i.é, uma realização que dispensa a fonte de energia externa. Isto já foi tentado, continua sendo tentado, mas até agora todas essas tentativas apresentaram pouco sucesso, uma vez que na realização passiva temos grandes perdas. Nas tentativas mais comuns, tem-se usado ferrites, mas até agora não se tem obtido bons resultados, devido às perdas e uma faixa de frequência muito estreita e, por conseguinte, não tendo utilidade prática.

Se, entretanto, usarmos Fonte de Energia externa, poderemos realizar Gyrators bastante práticos e convenientes.

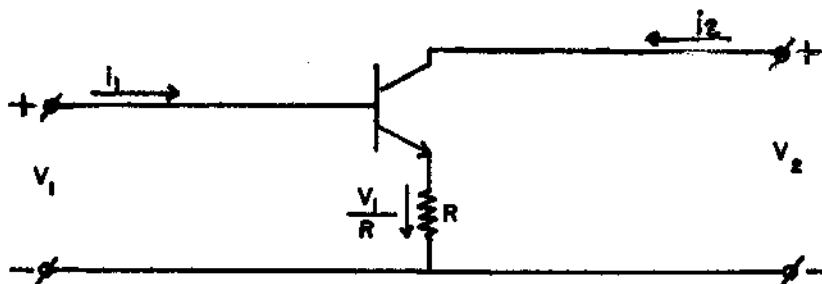
### REALIZAÇÃO ATIVA DE UM GYRATOR

Seja uma realização com o uso de Fonte de Energia externa. Que significa Realizar um Gyrator? Significa construir um Circuito Eletrônico que satisfaça as equações do Gyrator e que tenha as suas propriedades, se não exatamente, pelo menos bastante aproximadas.

As equações do Gyrator são:

$$\begin{cases} i_1 = g V_2 \\ i_2 = -g V_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} i_1 = -g V_2 \\ i_2 = g V_1 \end{cases}$$

Seja o circuito:

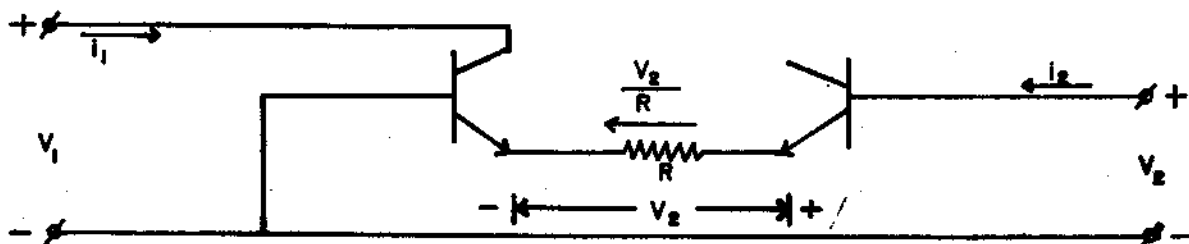


Para este circuito, com bastante aproximação, observamos que:

$$i_2 = \frac{V_1}{R} = g V_1$$

A equação acima é uma das equações do Gyrator.

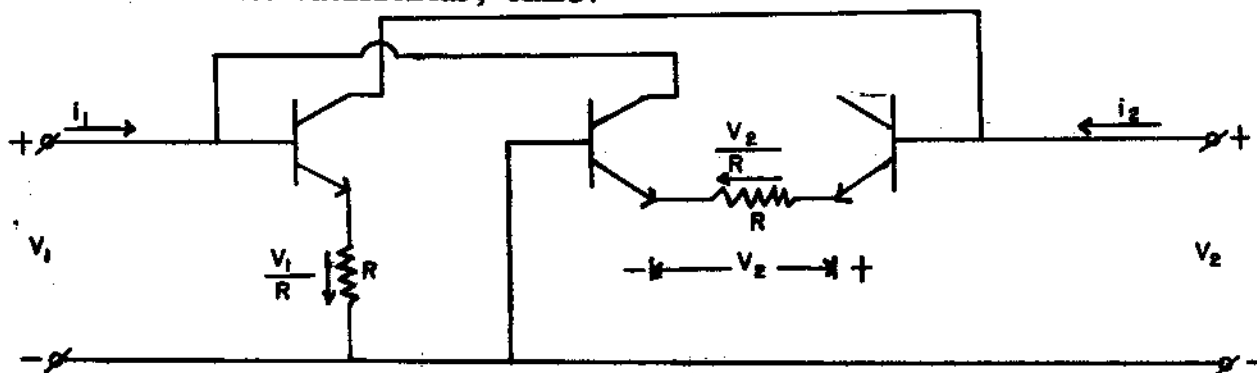
Para obter a outra equação do Gyrator, consideremos o circuito:



A queda de tensão em  $R$  será  $V_2$  e a corrente de emissor é  $\frac{V_2}{R}$ . Então, a outra equação do Gyrator é:

$$i_1 = -\frac{V_2}{R} = -g V_2$$

Combinando os dois circuitos acima, de tal modo que as duas equações apresentadas sejam simultaneamente satisfeitas, temos:



O circuito acima pode ser considerado como um primeiro exemplo elementar de um Gyrator.

Visando a Integração, temos os seguintes itens ou problemas a considerar no projeto:

- 1) Projeto Eletrônico - Visa construir um circuito que, integrado ou não, forneça as relações que nos levam ao Gyrator.
- 2) Dissipação do Calor - Este problema é de grande importância porque, visando a microeletrônica, a dissipação do calor se torna mais deficiente à medida que o circuito físico diminui.
- 3) Ruído - Precisamos obter uma relação sinal-ruído boa, que nos conduza a um resultado satisfatório.
- 4) Intermodulação - Diz respeito, por exemplo, ao fato de as correntes  $i_1$  e  $i_2$  do circuito acima, não serem completamente independentes, i.é, parte da corrente  $i_2$  penetrar no circuito da corrente  $i_1$  e vice-versa; isto provoca a Intermodulação.
- 5) Estabilidade de Frequência - O Gyrator deve ser Estável.
- 6) Quão Ideal é o Gyrator - Isto é, em que grau de precisão as relações do Gyrator são verdadeiras.

Um Gyrator Ideal é descrito pela seguinte Matriz:

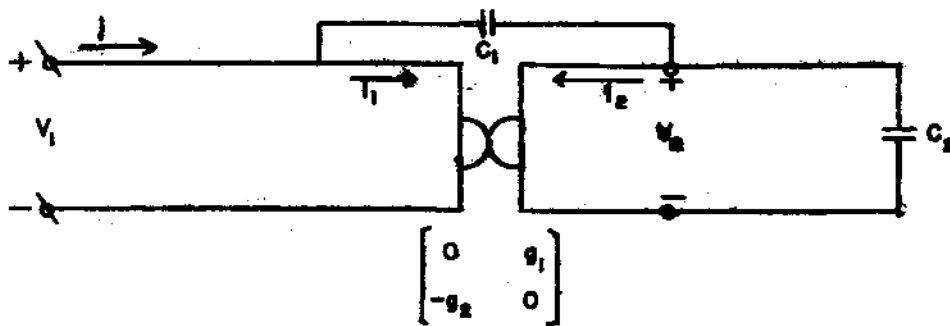
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Um Gyrator Real é descrito pela seguinte Matriz:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & g_1 \\ -g_2 & \epsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{onde } g_1 \neq g_2$$

O Gyrator Real deixa de ser Não Energético porque introduz perdas, pois não se limita a transportar energia do Port de entrada para o Port de saída.

Consideremos o seguinte circuito:



Nêste circuito, o Gyrator não é Ideal porque  $g_1 = g_2$ , mas os valores de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são supostos nulos para simplicidade de cálculo. Podemos, pois, escrever para êste Gyrator que:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1 V_2 = i - pC_1(V_1 - V_2) \\ i_2 &= -g_2 V_1 = -pC_2 V_2 - pC_1(V_2 - V_1) = \\ &= -pC_2 V_2 - pC_1 V_2 + pC_1 V_1 \end{aligned}$$

ou:

$$-V_1(g_2 + pC_1) = -V_2(pC_1 + pC_2)$$

donde:

$$V_2 = \frac{g_2 + pC_1}{p(C_1 + C_2)} \cdot V_1$$

Mas:

$$g_1 V_2 = i - pC_1 V_1 + pC_1 V_2 \Rightarrow i = pC_1 V_1 + (g_1 - pC_1) V_2$$

Introduzindo nesta expressão o valor de  $V_2$  acima, temos:

$$i = V_1 \left[ pC_1 + \frac{(g_1 - pC_1)(g_2 + pC_1)}{p(C_1 + C_2)} \right]$$

ou:

$$\frac{i}{V} = \frac{p^2 C_1 (C_1 + C_2) + g_1 g_2 + p g_1 C_1 - p g_2 C_1 - p^2 C_1^2}{p(C_1 + C_2)}$$

$$\frac{i}{V_1} = \frac{p^2 C_1 C_2 + pC_1(g_1 - g_2) + g_1 g_2}{p(C_1 + C_2)}$$

Donde podemos escrever para a Impedância de Entrada do circuito:

$$\frac{V_1}{i} = Z_{in} = \frac{p(C_1 + C_2)}{p^2 C_1 C_2 + p C_1 (g_1 - g_2) + g_1 g_2}$$

Nesta expressão,  $C_1$  e  $C_2$  são dados e  $g_1$  e  $g_2$  são variáveis que dependem da frequência.

Hipóteses que podem ocorrer:

a)  $g_1 = g_2$

Quando isto ocorre temos um Gyrator Ideal e a Impedância de Entrada  $Z_{in}$  passa a ser dada pelo quociente de dois polinômios em  $p$ , um deles sendo ímpar e o outro par. Temos, então, uma rede Loss-less.

b)  $g_1 > g_2$

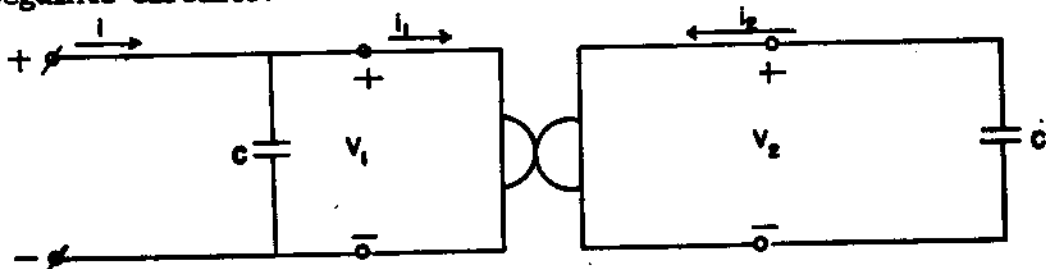
Nêste caso teremos um Circuito Passivo.

c)  $g_2 > g_1$

Nêste outro caso teremos um Circuito Ativo.

### GYRATOR-CAPACITOR

Seja o seguinte circuito:



$$\begin{bmatrix} g_p & g \\ -g & g_p \end{bmatrix}$$

Nêste circuito, o Gyrtator não é Ideal.

Podemos, pois, escrever para êste Gyrtator que:

$$\begin{cases} i_1 = g_p V_1 + g V_2 & \textcircled{1} \\ i_2 = -g V_1 + g_p V_2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Mas na figura observamos que:

$$\begin{cases} i_1 = i - pCV_1 & \textcircled{3} \\ i_2 = -pCV_2 & \textcircled{4} \end{cases} \implies i = i_1 + pCV_1$$

Levando o valor de  $i_2$  de  $\textcircled{4}$  em  $\textcircled{2}$  temos:

$$-gV_1 = -V_2(g_p + pC)$$

Donde:

$$V_2 = \frac{g}{g_p + pC} \cdot V_1 \quad \textcircled{5}$$

Substituindo em  $\textcircled{3}$  o valor de  $i_1$  de  $\textcircled{1}$  temos:

$$i = g_p V_1 + g V_2 + pCV_1$$

E considerando  $\textcircled{5}$ :

$$i = g_p V_1 + \frac{g \cdot g}{g_p + pC} \cdot V_1 + pCV_1 = V_1 \left[ (g_p + pC) + \frac{g^2}{g_p + pC} \right]$$

$$i = V_1 \cdot \left[ \frac{g^2 p^2 + g^2 + 2 pg pC + p^2 C^2}{g_p + pC} \right] \quad , \text{ donde:}$$

$$\frac{i}{V_1} = \frac{g^2 p^2 + g^2 + 2 pg pC + p^2 C^2}{g_p + pC} \quad \textcircled{6}$$

A condição para que o Gyrtator seja praticamente Ideal é:

$$g \gg g_p$$

Esta condição deve ser sempre satisfeita. Teremos, então, para a Impedância de Entrada do circuito, considerando a expressão 6 :

$$\frac{V_1}{i} = Z_{in} = \frac{g_p + pC}{p^2 C^2 + 2 p g_p C + g^2} = \frac{1 + \frac{g_p}{pC}}{pC + 2 g_p + \frac{g^2}{pC}}$$

$$\frac{V_1}{i} = \frac{1 + \frac{g_p}{pC}}{2 g_p \left[ 1 + \frac{pC}{2 g_p} + \frac{g^2}{2 g_p \cdot pC} \right]} \quad (7)$$

Vamos, a seguir, definir dois parâmetros fundamentais:

1) Frequência de Ressonância:

$$\omega_0 = \frac{g}{C}$$

2) Fator de Mérito (Fator Q):

$$Q = \frac{g}{2 g_p}$$

Naturalmente, quanto maior for o valor de Q, melhor será o circuito. No caso Ideal o valor de Q será infinito.

Então a Impedância de Entrada  $Z_{in}$  de (7) será:

$$Z_{in} = \frac{1 + \frac{g_p}{pC}}{2 g_p \left[ 1 + \frac{pC}{g} Q + \frac{g^2}{pCg} Q \right]}, \quad \text{ou:}$$

$$Z_{in} = \frac{1 + \frac{g_p}{pC}}{2 g_p \left[ 1 + p \frac{Q}{\omega_0} + \frac{\omega_0 Q}{p} \right]}$$

Fazendo  $p = j\omega$  teremos:

$$Z_{in} = \frac{1 - j \frac{g_p}{\omega C}}{2 g_p \left[ 1 + j\omega \frac{Q}{\omega_0} - j \frac{\omega_0 Q}{\omega} \right]}, \text{ ou:}$$

$$Z_{in} = \frac{1 - j \frac{g_p}{\omega C}}{2 g_p \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}$$

### RUÍDO EM UM FILTRO GYRATOR-CAPACITOR

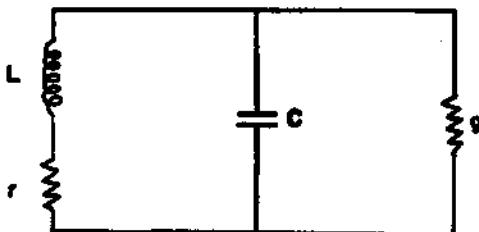
(Gyrator terminado em ambos os Ports por Capacitor).

Vejamos, inicialmente, o circuito "tanque" LC:



Este circuito é Ideal e não apresenta Ruído.

Fisicamente, o circuito é na realidade:

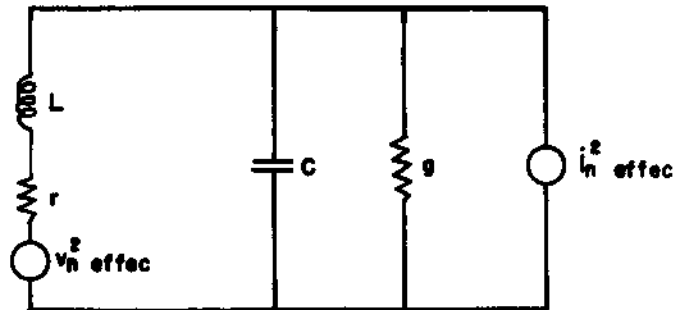


①



Este circuito apresenta Ruído devido à presença de "r" e "g". "r" representa a resistência interna da Bobina e "g" representa a condutância de fuga do Capacitor.

Podemos, entretanto, representar o circuito acima pelo seu circuito equivalente para os efeitos de Ruído. Então:



Onde:

$$v_n^2 \text{ effec} = 4KT.rdf \quad (\text{Fórmula de Johnson})$$

Esta expressão representa a Fonte de Tensão de Ruído (Ruído Térmico) introduzida devido a presença da resistência "r".

$$K = 1,38 \times 10^{-23} \text{ S/}^\circ\text{K. (Constante de Boltzmann).}$$

T = Temperatura em graus Kelvin, (Temperatura Ambiente = 300°K.)

r = resistência em ohms.

df = banda passante do sistema em Hertz.

$$i_n^2 \text{ effec} = 4 K T g df$$

Esta expressão representa a Fonte de Corrente de Ruído introduzida devido à presença da condutância de fuga g.

A estrutura (2) é equivalente à seguinte:



$jX$  (parte reativa)

$$R(\omega) = \text{Re}[Z(j\omega)]$$

$$v_n^2 \text{ effec} = 4 K T R(\omega) df$$

$Z(j\omega)$  é a Impedância da rede original (1). Como estamos interessados no valor de  $R(\omega)$  vamos calcular  $Z(p)$  de (2):

$$Z(p) = \frac{(r+pL) \left( \frac{1}{g+pC} \right)}{r+pL + \frac{1}{g+pC}}, \quad \text{ou:}$$

$$Z(p) = \frac{r+pL}{1+(r+pL)(g+pC)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

O valor de  $v_n^2$  effec é:

$$v_n^2 \text{ effec} = 4 KT \cdot \text{Re} [Z(j\omega)] d\omega$$

Ao longo de todo o espectro de frequências tem-se:

$$v_n^2 \text{ effec} \cdot T = \int_0^{\infty} 4 K T \text{Re} [Z(j\omega)] d\omega \quad (3)$$

Mas,

$$\text{Re} [Z(j\omega)] = \frac{1}{2} [Z(j\omega) + Z^*(j\omega)]$$

$$\text{Re} [Z(j\omega)] = \frac{1}{2} [Z(j\omega) + Z(-j\omega)]$$

$$R(\omega) = \text{Re} [Z(j\omega)]$$

Então:

$$R(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} + \frac{N(-j\omega)}{D(-j\omega)} \right] = \frac{1}{2} \frac{N(j\omega) D(-j\omega) + N(-j\omega) D(j\omega)}{D(j\omega) D(-j\omega)}$$

$$R(\omega) = \frac{1}{2} \frac{(r+j\omega L) [1+(r-j\omega L)(g-j\omega C)] + (r-j\omega L) [1+(r+j\omega L)(g+j\omega C)]}{D(j\omega) D(-j\omega)}$$

$$R(\omega) = \frac{1}{2} \frac{(r+j\omega L) [1+rg-j\omega rC-j\omega Lg-\omega^2 LC]}{D(j\omega) D(-j\omega)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(r-j\omega L) [1+rg+j\omega rC+j\omega Lg-\omega^2 LC]}{D(j\omega) D(-j\omega)}$$

$$R(w) = \frac{1}{2} \frac{r+r^2g-jw^2C-jwLrg-w^2LCr+jwL+jwLrg+w^2LCr+w^2L^2g-jw^3L^2C}{D(jw) D(-jw)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{r+r^2g+jwr^2C+jwLrg-w^2LCr-jwL-jwLrg+w^2LCr+w^2L^2g+jw^3L^2C}{D(jw) D(-jw)}$$

$$R(w) = \frac{1}{2} \frac{2r + 2r^2g - 2w^2LrC + 2w^2LCr + 2w^2L^2g}{D(jw) D(-jw)}$$

$$R(w) = \frac{r + r^2g + w^2L^2g}{D(jw) D(-jw)}$$

Como, para dado valor de "r" e de "g", "R" é função exclusiva de "w" no numerador e no denominador, temos:

$$R(w) = \frac{F(-w^2)}{D(jw) D(-jw)}$$

Voltando à expressão (3) :

$$v_n^2 \text{ effec } T = \int_0^{\infty} 4KT \frac{F(-w^2)}{D(jw) D(-jw)} df$$

Sabemos que a velocidade angular está relacionada com a frequência através da expressão:

$$w = 2\pi f$$

Donde:

$$df = \frac{dw}{2\pi}$$

Os limites de integração permanecem os mesmos, porque para uma frequência nula temos uma velocidade angular nula e para uma frequência de valor infinito temos também uma velocidade angular de valor infinito. Substituindo o valor de df na expressão acima, temos:

$$V_n^2 \text{ effect T} = \int_0^{\infty} 4 K T \frac{F(-w^2)}{D(jw) D(-jw)} \frac{dw}{2\pi} = \frac{2KT}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(-w^2)}{D(jw) D(-jw)} dw$$

E para  $p = jw$ , temos:  $p^2 = -w^2$  e  $dp = jdw \Rightarrow dw = \frac{dp}{j}$

Então:

$$V_n^2 \text{ effec T} = \frac{2KT}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(p^2)}{D(p) D(p)} \frac{dp}{j} = \frac{2KT}{\pi j} \int_0^{\infty} \frac{F(p^2)}{D(p) D(-p)} dp$$

Ou ainda:

$$V_n^2 \text{ effec T} = \frac{2KT}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(p^2)}{D(p) D(-p)} dp = -j \frac{KT}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(p^2)}{D(p) D(-p)} dp$$

$$V_n^2 \text{ effec T} = -j \frac{KT}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(p^2)}{D(p) D(-p)} dp \quad (4)$$

Que é a expressão da Tensão Total de Ruído (Valor Médio Quadrático). Seja  $D(p)$  o denominador da expressão de  $Z(p)$  dada anteriormente:

$$D(p) = 1 + (r + pL)(g + pC)$$

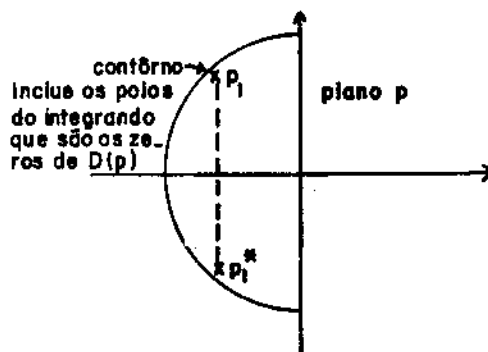
Nesta expressão, "r", "L", "g" e "C" são elementos positivos; logo, o integrando tem um par de pólos na metade esquerda do plano p.

Assim,  $D(-p)$  terá zeros na metade direita do plano p.

$F(p)$  terá, apenas, pólos para p de valor infinito.

$D(p)$  dado pela expressão acima terá duas raízes  $p_1$  e  $p_1^*$ .

Fazemos, a seguir, a representação do plano p, contendo um contorno incluindo os pontos  $p_1$  e  $p_1^*$ .



$$\text{Daí: } D(p) = LC(p-p)(p-p^*),$$

Então temos:

$$V_n^2 \text{ effec } T = -j \frac{KT}{\pi} \oint \frac{F(p^2)}{LC(p-p)(p-p^*) LC(-p-p)(-p-p^*)} dp$$

Como as únicas raízes que devem ser consideradas são  $p_1$  e  $p_1^*$ , por estarem contidas no contorno acima, temos:

$$\begin{aligned} V_n^2 \text{ effec } T &= -j \frac{KT}{\pi} \frac{1}{L^2 C^2} \frac{1}{2\pi j} \left[ \frac{F(p_1^2)}{(p_1 - p_1^*)(-p_1 - p_1^*)(-2p_1)} + \frac{F(p_1^{*2})}{(p_1^* - p_1)(-p_1^* - p_1)(-2p_1^*)} \right] \\ &= \frac{2KT}{L^2 C^2} \left[ \frac{F(p_1^2)}{2 p_1 (p_1 + p_1^*)(p_1 - p_1^*)} + \frac{-F(p_1^{*2})}{2 p_1^* (p_1 + p_1^*)(-p_1^* + p_1)} \right] \\ V_n^2 \text{ effec } T &= \frac{KT}{L^2 C^2} \left[ \frac{p_1^* F(p_1^2) - p_1 F(p_1^{*2})}{p_1 p_1^* (p_1 - p_1^*)(p_1 + p_1^*)} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

Definimos:

$$F(-w^2) = r + r^2 g + w^2 L^2 g$$

$$F(-w_1^2) = r + r^2 g + w_1^2 L^2 g$$

$$p_1 = jw_1$$

$$p_1^* = -w_1^2$$

$$F(p_1^2) = r + r^2 g - L g p_1^2 = A + B p_1^2$$

$$\text{onde } \begin{cases} A = r + r^2 g \\ B = -g L^2 \end{cases}$$

Substituindo em (5) temos:

$$\begin{aligned} V_n^2 \text{ effec } T &= \frac{KT}{L^2 C^2} \frac{p_1^* [A + B p_1^2] - p_1 [A + B p_1^{*2}]}{p_1 p_1^* (p_1 - p_1^*)(p_1 + p_1^*)} \\ &= \frac{KT}{L^2 C^2} \frac{A(p_1^* - p_1) + B(p_1^* p_1^2 - p_1 p_1^{*2})}{p_1 p_1^* (p_1 - p_1^*)(p_1 + p_1^*)} \end{aligned}$$

$$= \frac{KT}{L^2 C^2} \cdot \frac{-A(p_1 - p_1^*) + B p_1^* p_1 (p_T - p_T^*)}{p_1 p_1^* (p_1 - p_1^*) (p_1 + p_1^*)}$$

Donde:

$$V_n^2 \text{ effec T} = \frac{KT}{L^2 C^2} \cdot \frac{-A + B p_1 p_1^*}{p_1 p_1^* (p_T + p_T^*)}$$

$p_1$  e  $p_1^*$  são os Zeros da  $D(p)$  obtidos fazendo  $D(p) = 0$ .

Ou seja:

$$p^2 LC + p(rc + gL) + 1 + rg = 0$$

A soma das raízes será:

$$p_1 + p_1^* = \frac{-(rc + gL)}{LC}$$

O produto das raízes será:

$$p_1 p_1^* = \frac{1 + rg}{LC}$$

Então:

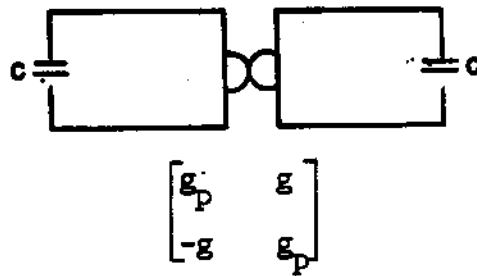
$$\begin{aligned} V_n^2 \text{ effec T} &= \frac{KT}{L^2 C^2} \cdot \frac{(r+r^2g) + (gL^2) \left(\frac{1+rg}{LC}\right)}{\frac{1+rg}{LC} \cdot \frac{rc + gL}{LC}} = \\ &= \frac{KT}{LC} \cdot \frac{LC(r+r^2g) + gL^2(1+rg)}{(1+rg)(rc + gL)} = \\ &= \frac{KT}{C} \cdot \frac{rc(1+rg) + gL(1+rg)}{(1+rg)(rc + gL)} = \frac{KT}{C} \end{aligned}$$

Então:

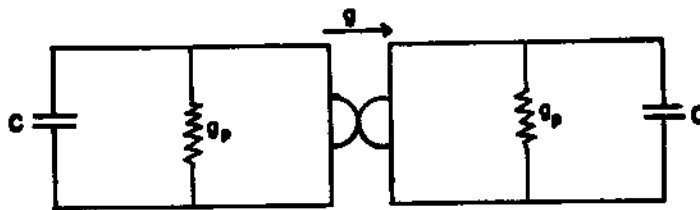
$$V_n^2 \text{ effec T} = \frac{KT}{C}$$

### RUÍDO DE UM FILTRO GYRATOR-CAPACITOR

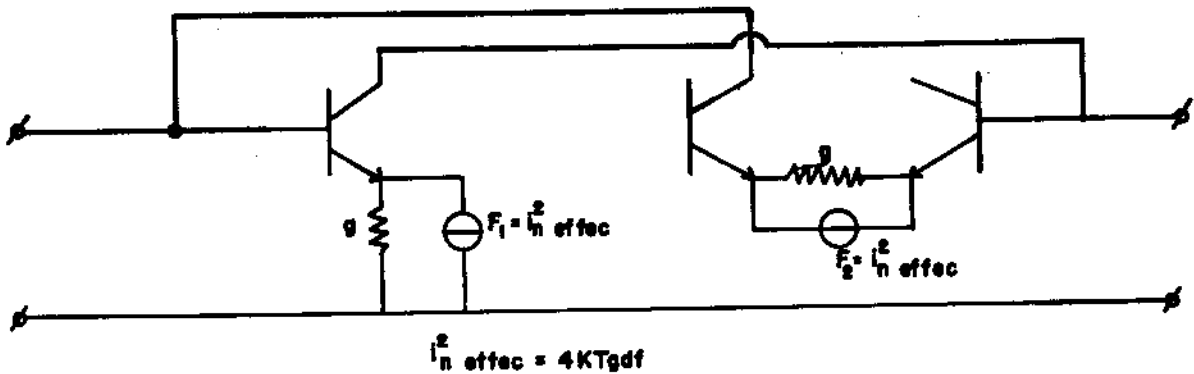
A representação simbólica do Filtro é:



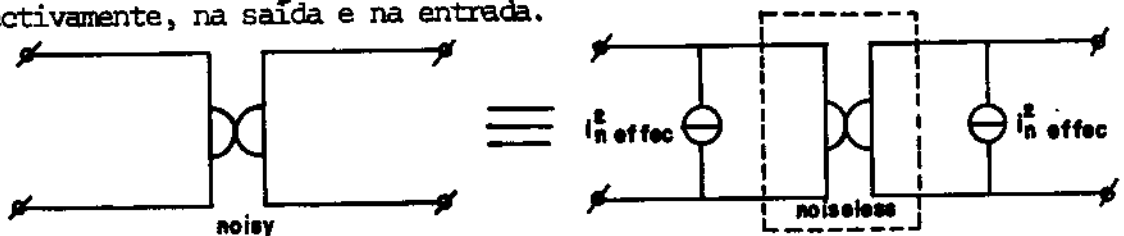
No circuito acima o Gyrator é Não Ideal. A seguir, apresentamos um circuito idêntico ao anterior, onde o Gyrator é Ideal:



Seja a Realização Eletrônica de um Gyrator:

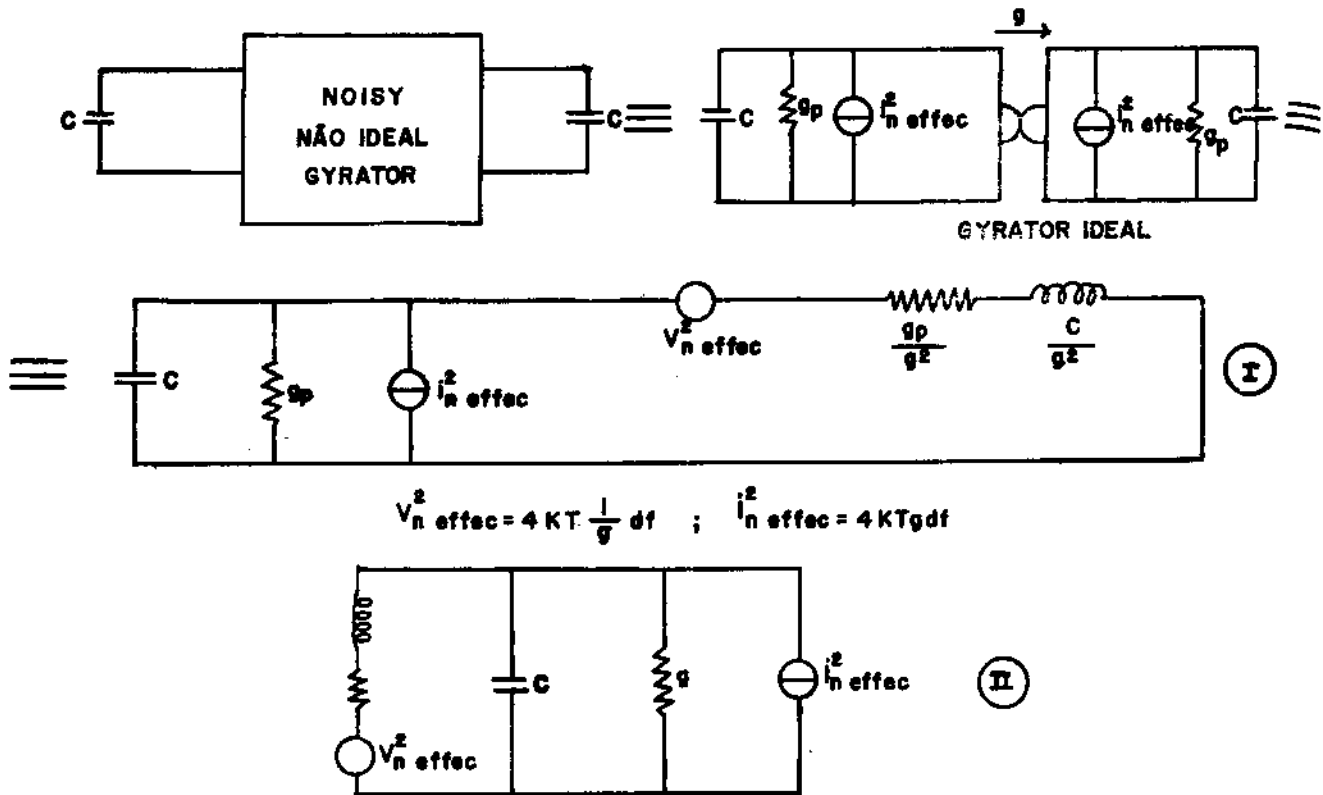


No circuito anterior podemos colocar as Fontes de Corrente de Ruído ( $F_1$ ) e ( $F_2$ ), respectivamente, na saída e na entrada.



Observação: O Transistor também apresenta ruído, mas pode ser desprezado.

Se o Filtro Gyrtor-Capacitor é representado por:



Comparando os circuitos (I) e (II) vemos que:

(I) e (II) têm o mesmo aspecto. Então para as Fontes de Corrente:

$$(4 K T g_p df) \left( \frac{g}{g_p} \right) = 4 K T g df$$

Donde concluímos que:

(I) tem um valor  $i_n^2 \text{ effec} \left( \frac{g}{g_p} \right)$  vezes maior que o valor de (II).

Assim, se também houvesse exata correspondência para as Fontes de Tensão, teríamos:

$$4 K T \left( \frac{g_p}{g^2} \right) df \left( \frac{g}{g_p} \right) = 4 K T \frac{1}{g} df$$

Então (I) tem uma Fonte de Tensão de valor  $\left( \frac{g}{g_p} \right)$  vezes maior que (II). Logo, para (I) temos que:



$$V_n^2 \text{ effec } T = \frac{KT}{C} \cdot \frac{g}{g_p}$$

Já vimos que:

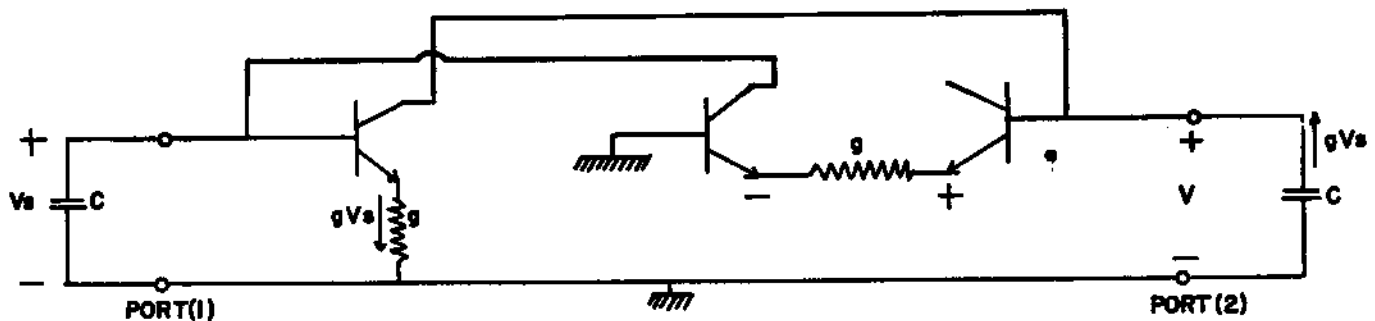
$$Q = \frac{g}{2 g_p}$$

Então:

$$V_n^2 \text{ effec } T = \frac{KT}{C} \cdot 2Q$$

### POTÊNCIA CONTÍNUA (Pdc) QUE DEVE SER FORNECIDA A UM FILTRO GYRATOR-CAPACITOR

Consideremos o seguinte circuito Gyrator-Capacitor:



$V_s$  - é o valor eficaz da tensão no port 1.

$gV_s$  - é o valor da corrente de emissor.

$V$  - é o valor da tensão no port 2.

Temos que:

$$V = - g V_s \cdot \frac{1}{pC}$$

O Módulo de  $V$  será:

$$|V| = \left| g \frac{V_s}{pC} \right| = \left| g \frac{V_s}{wC} \right| = \left| \frac{w_0 V_s}{w} \right|$$

onde  $w_0 = \frac{g}{C}$  é a frequência de ressonância.

Se  $V_s$  tem a frequência de ressonância  $w_0$ , i.e., se  $w = w_0$  então  $|V| = |V_s|$  e, portanto, na frequência de ressonância o módulo do sinal aplicado sobre as duas condutâncias é o mesmo.

A dissipação nas condutâncias  $g$  será:

$$P_{ac} = 2 V_S^2 \cdot g$$

onde  $P_{ac}$  é a Potência Alternada.

A Eficiência de um circuito, em termos de Potência, é, por definição, dada por:

$$\eta \triangleq \frac{P_{ac}}{P_{dc}}$$

Donde:

$$P_{dc} = \frac{P_{ac}}{\eta}$$

E, considerando o valor da dissipação nas condutâncias, temos

$$\begin{aligned} P_{dc} &= \frac{2 V_S^2 \cdot g}{\eta} = \frac{2g}{\eta} \cdot \frac{V_S^2}{V_{n \text{ effec}}^2} \cdot V_{n \text{ effec}}^2 = \frac{2g}{\eta} \cdot \frac{V_S^2}{V_{n \text{ effec}}^2} \cdot \frac{KT}{C} \cdot 2Q \\ &= \left( \frac{V_S}{V_N} \right)^2 \cdot \frac{4 K T Q}{\eta} \cdot \frac{g}{c} \end{aligned}$$

Fazendo:

$$\omega_0 = \frac{g}{c} = 2 \pi f_0$$

Temos:

$$P_{dc} = \left( \frac{V_S}{V_N} \right)^2 \cdot \frac{4 K T Q}{\eta} \cdot 2 \pi f_0 = \frac{S}{N} \cdot 10^{-19} f_0 \frac{Q}{\eta}$$

$$P_{dc} = \frac{S}{N} \cdot \frac{Q}{\eta} \cdot f_0 \cdot 10^{-19}$$

Na expressão anterior,  $\frac{S}{N}$  representa a relação sinal-ruído do circuito.

O termo constituído por  $4 K T 2 \pi$  depende, exclusivamente, da temperatura e o seu valor para a temperatura ambiente é:  $10^{-19}$ .

#### DEPENDÊNCIA DE FREQUÊNCIA DE UM GYRATOR.

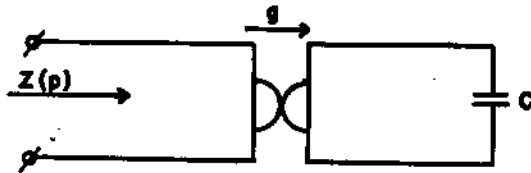
Sejam as equações que descrevem um Gyrator Ideal:

$$\begin{cases} i_1 = g V_2 \\ i_2 = -g V_1 \end{cases}$$

Consideremos:

$$g = g(p) = \frac{g_0}{1 + p\tau}$$

Seja um Gyrator com um Capacitor C no Port 2:



Nêste circuito, a Impedância vista do Port de Entrada é a reflexão da Impedância de C para o Port 1:

$$Z(p) = \frac{1}{g^2 \frac{1}{pC}} = p \frac{C}{g^2} = \frac{pC}{g_0^2} (1 + p\tau)^2$$

Deseja-se que a Resposta seja a mais rápida possível, ou seja que a condutância de giração  $g$  independa da frequência, i.é, que não apresente "Delay".

Então, considerando  $p\tau \ll 1$  podemos fazer:  $(1 + p\tau)^2 \approx 1 + 2 p \tau$

E ficamos com:  $Z(p) = \frac{pC}{g_0^2} (1 + 2 p\tau)$ .

Substituindo  $p$  por  $jw$ :

$$Z(jw) = \frac{jwc}{g_0^2} (1 + 2 jw\tau)$$

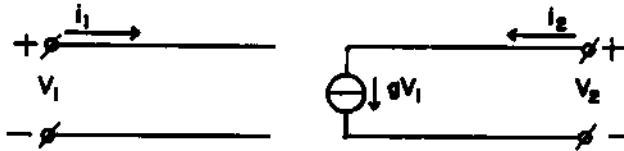
Ou:

$$Z(jw) = \frac{jwc}{g_0^2} - \frac{w^2 C 2 \tau}{g_0^2}$$

Então, a nossa Impedância de Entrada é constituída por uma Parte Imaginária e uma Parte Real Negativa. O sinal negativo da parte real significa que o circuito é Ativo e pode apresentar Instabilidade e Oscilação. Este circuito, então, pode oscilar. Devemos tomar medidas para evitar estas oscilações.

ELEMENTOS ATIVOS IDEAIS:1) Fonte de Corrente Controlada a Tensão.

É constituída por uma Two-Port que apresenta o seguinte aspecto:



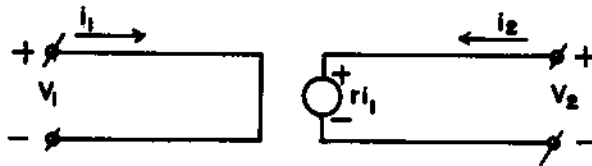
Sua representação Matricial é:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Donde, a única equação que descreve a Two-Port é:  $i_2 = g V_1$

2) Fonte de Tensão Controlada a Corrente.

Também é constituída por uma Two-Port que apresenta o seguinte aspecto:



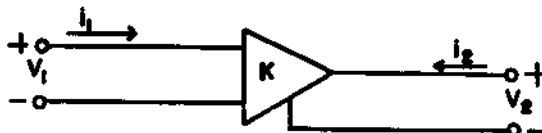
Sua representação Matricial é:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Donde, a única equação que descreve a Two-Port é:  $V_2 = r \cdot i_1$ .

3) Amplificador Operacional

Cujo símbolo é:



onde K representa o Ganho.

Temos que:

$$V_2 = K V_1$$

O Amplificador é Ideal quando  $K = \infty$ . Se  $K = \infty$  e  $V_2$  tem valor finito, significa que  $V_1 \equiv 0$ .

Temos que  $V_1 = Z_{in} \cdot i_1$  onde, se  $Z_{in}$  é finito acarreta  $i_1 \equiv 0$ .

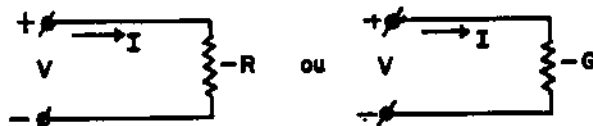
Então:

$$\begin{cases} V_1 \equiv 0 \\ \text{e} \\ i_1 \equiv 0 \end{cases}$$

Estas duas identidades nulas são as condições que descrevem o Amplificador Ideal, i.é, Tensão de Entrada nula e Corrente de Entrada nula.

#### 4) Resistência (ou Condutância) Negativa

Sua representação simbólica é:

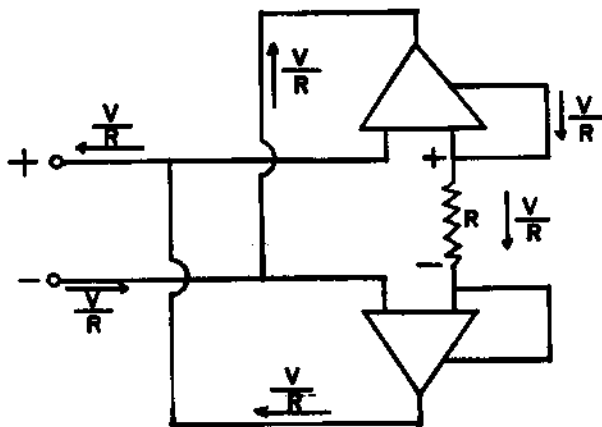


As equações que descrevem estes circuitos são:

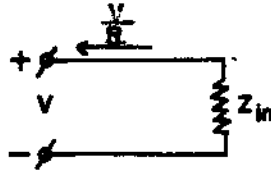
$$V = - I R \quad \text{e} \quad I = - G V$$

Vejamos se é possível realizar, fisicamente, uma Resistência Negativa.

a) Seja o seguinte circuito onde os Amplificadores são supostos Ideais:

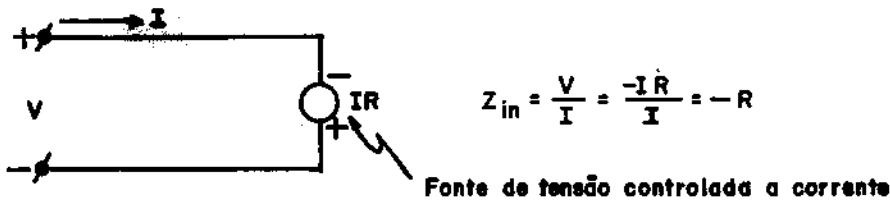


A impedância de Entrada do circuito anterior é:  $Z_{in} = -R$ . Assim temos o seguinte circuito:

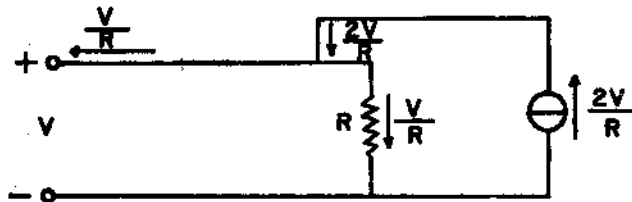


Que é a Realização Física de uma Resistência Negativa, tanto mais próxima do Ideal quanto mais Ideal for o Amplificador.

b) Temos outro exemplo:



c) Seja, ainda, o seguinte circuito, onde a Fonte de Corrente é controlada a Tensão:



Onde temos:

$$Z_{in} = - = \frac{V}{-\frac{V}{R}} = -R$$

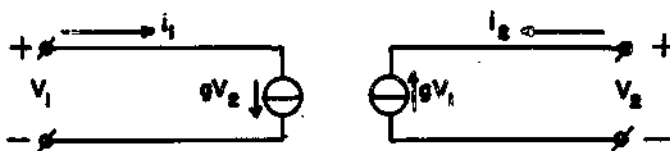
### UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS ATIVOS IDEAIS PARA A SÍNTESE DE GYRATORS:

1) Gyrator com Fonte de Corrente controlada a Tensão.

Temos:

$$\begin{cases} i_1 = g V_2 \\ i_2 = -g V_1 \end{cases}$$

A Two-Port que representa o Gyrator é:

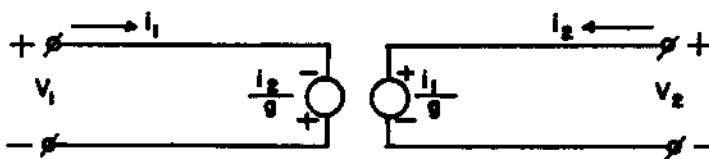


2) Gyrator com Fonte de Tensão controlada a Corrente.

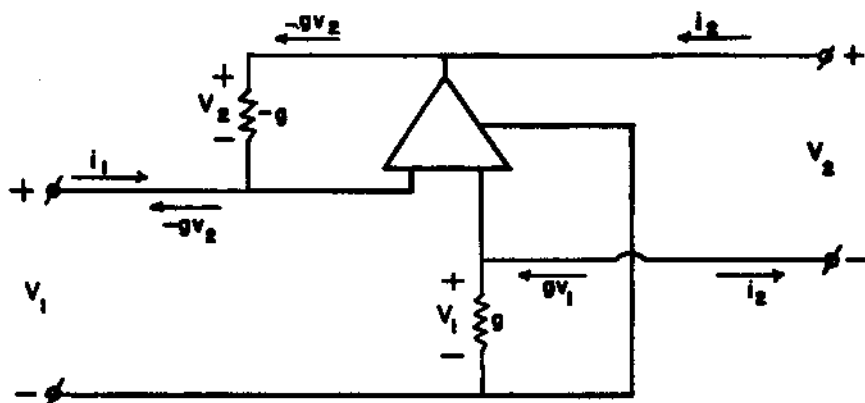
Temos:

$$\begin{cases} V_2 = \frac{i_1}{g} \\ V_1 = -\frac{i_2}{g} \end{cases}$$

A Two-Port que representa o Gyrator é:

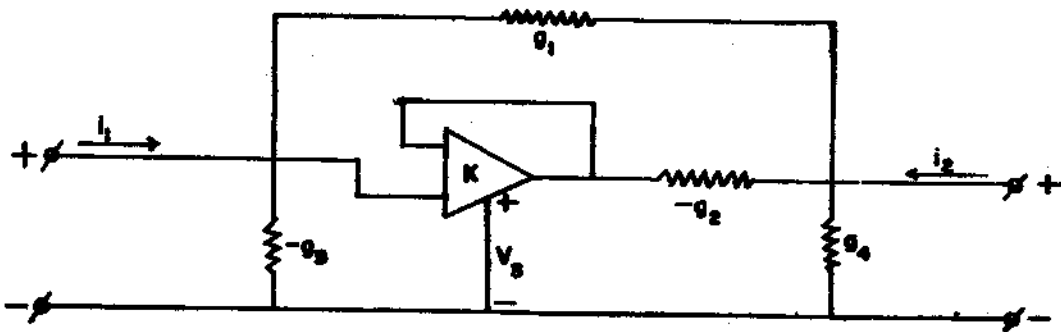


3) Gyrator com Amplificador Operacional.



Observação: O Amplificador Operacional não drena corrente, pois é Ideal.

4) Verificação de que o circuito abaixo representa um Gyrtator.



O Amplificador Operacional é suposto Ideal, i.é, a corrente de entrada e a tensão de entrada são nulas.

$(V_3 - V_1)$  é o sinal de entrada do Amplificador Operacional.

Temos:

$$V_3 = K(V_3 - V_1)$$

$$V_3 = K V_3 - K V_1 \quad \therefore V_3(1-K) = -K V_1 \quad \therefore V_3 = \frac{K}{K-1} \cdot V_1$$

A corrente no Port 1 é:  $i_1 = -g_3 V_1 + g_1(V_1 - V_2)$  ①

A corrente no Port 2 é:  $i_2 = g_4 V_2 + g_1(V_2 - V_1) - g_2(V_2 - V_3)$

Ou:

$$i_2 = (g_4 + g_1 - g_2)V_2 - g_1 V_1 + g_2 V_3$$

$$i_2 = (g_4 + g_1 - g_2)V_2 - g_1 V_1 + g_2 \frac{K}{K-1} V_1$$

$$i_2 = (g_4 + g_1 - g_2)V_2 + \left( g_2 \frac{K}{K-1} - g_1 \right) V_1 \quad \text{②}$$

Ficamos, então, com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} i_1 = (g_1 - g_3)V_1 - g_1 V_2 & \text{①} \\ i_2 = (g_4 + g_1 - g_2)V_2 + \left( g_2 \frac{K}{K-1} - g_1 \right) V_1 & \text{②} \end{cases}$$

Vejam as condições que levam estas equações a representar um Gyrtator:



1ª Condição: Devemos ter:  $K \gg 1$

Então  $\frac{K}{K-1} \approx 1$ , o que significa que o ganho do Amplificador Operacional tende para um valor infinito.

2ª Condição: Devemos ter:  $g_1 = g_3$

Então  $(g_1 - g_3)V_1 = 0$ . Assim, a equação (1) passa a ser uma das equações do Gy rator e ficamos com:  $i_1 = -g_1 V_2$ .

A equação (2), para  $K \gg 1$  ficou sendo:  $i_2 = (g_u + g_1 - g_2)V_2 + (g_2 - g_1)V_1$ .

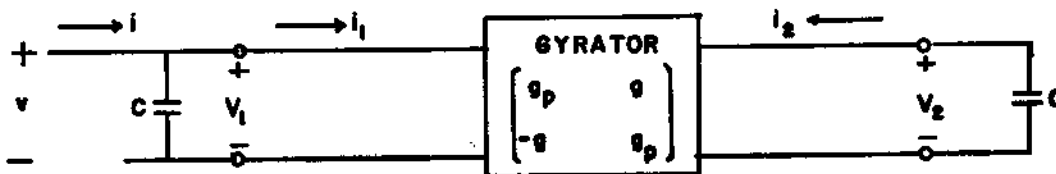
3ª Condição: Devemos ter:  $g_u + g_1 = g_2$

4ª Condição: Devemos ter:  $g_2 - g_1 = g_1$ . Então:  $g_2 = 2 g_1$ .

Se as quatro condições acima forem, simultaneamente, satisfeitas, então o cir- cuito dado é um Gy rator Ideal.

#### EFEITO DA FREQUÊNCIA NO FATOR DE QUALIDADE Q DO FILTRO GYRATOR-CAPACITOR.

Seja o Filtro Gy rator-Capacitor:



$g_p$  é a condutância de perda. Para o Gy rator Ideal temos  $g_p = 0$ . As equações que descrevem o Gy rator são:

$$i_1 = g_p V_1 + g V_2 = i - p C V_1 \quad (1)$$

$$i_2 = -g V_1 + g_p V_2 = -p C V_2 \quad (2)$$

Da equação (2) tiramos:

$$-g V_1 = -V_2 (g_p + pc) \therefore V_2 = \frac{g}{g_p + pc} \cdot V_1$$

A equação (1) pode ser escrita:

$$i - p C V_1 = g_p V_1 + \frac{g^2}{g_p + pC} \cdot V_1$$

$$i_1 = V_1 \left[ g_p + pC + \frac{g^2}{g_p + pC} \right] = \frac{(g_p + pC)^2 + g^2}{g_p + pC} \cdot V_1$$

E a Impedância de Entrada será:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{i} = \frac{V_1}{i} = \frac{g_p + pC}{g^2 + p^2 C^2 + 2 p g_p C + g_p^2}$$

O Capacitor C é suposto Ideal, i.é, não apresenta condutância de fuga.

Temos que:  $g_p \ll g$

Então: 
$$Z_{in} = \frac{g_p + pC}{g^2 + p^2 C^2 + 2 p g_p C}$$

Como aparecem sempre capacitâncias parasitas, temos que:  $g_p + g_p + p C_p$ .

Essas capacitâncias parasitas, em geral, são:  $C_p \ll 10 \text{ pF}$ .

E como:  $C \rightarrow 1 \text{ nF} - 10 \mu\text{F}$ .

Então:  $C_p \ll C$ . Logo, a Capacitância Parasita pode ser desprezada. Também existem efeitos parasitas em g (que também é função da frequência). Assim, dois casos podem ocorrer:

a) Seja: 
$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{p}{wc}}$$

b) Seja: 
$$g = g_0 \left( 1 + \frac{p}{wc} \right)$$

$wc$  é uma espécie de frequência de 3dB e está relacionada à frequência de corte dos transistores e às capacitâncias parasitas.

Seja o aspecto de g dado pela expressão a. Logo a magnitude de g cai com a frequência. Deseja-se um g constante para qualquer frequência. Dêste modo temos que:

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{p}{\omega C}}$$

Para  $g = g_0$  temos que:  $\frac{p}{\omega C} \ll 1$

O Gyrator deverá ser operado nesta faixa de frequência.

Elevando ao quadrado a expressão acima, temos:

$$g^2 = \frac{g_0^2}{\left(1 + \frac{p}{\omega C}\right)^2} \approx g_0^2 \left(1 - \frac{2p}{\omega C}\right)$$

Então, para este valor, temos:

$$Z_{in} = \frac{g_p + pC}{g_0^2 - 2p \frac{g_0^2}{\omega C} + p^2 C^2 + 2p g_p C} = \frac{g_p + pC}{g_0^2 + 2pC \left(g_p - \frac{g_0^2}{\omega C}\right) + p^2 C^2}$$

Define-se para o Filtro Gyrator-Capacitor:  $Q = \frac{g_0}{2 \left(g_p - \frac{g_0^2}{\omega C}\right)}$

$$Q_0 = \frac{g_0}{2 g_p}$$

$g_0 = g$  na frequência zero.

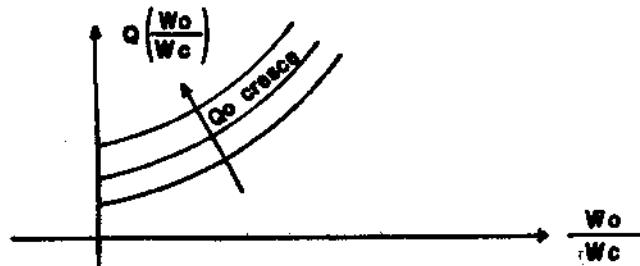
Temos  $\omega$  na frequência de ressonância igual a  $\frac{g_0}{C}$ ; será agora para o Filtro Gyrator-Capacitor:

$$\omega_0 = \frac{g_0}{C}$$

Então:

$$Q = \frac{g_0}{2 g_p \cdot \left(1 - \frac{g_0 \cdot g_0}{\omega C g_p}\right)} = \frac{Q_0}{1 - 2 Q_0 \frac{\omega_0}{\omega C}}$$

Traçando o Gráfico de  $Q$  como função de  $\frac{\omega_0}{\omega C}$  temos:



Define-se Frequência de Corte:  $w_0 \text{ cut-off} = \frac{w_0}{2Q_0}$ .

Para cada fator  $Q_0$  corresponde uma Banda Passante do Gyrator:

$$b_0 = \frac{f_c}{2 Q_0}$$

Para Transistores Integráveis de tipo NPN os valores comuns para a frequência  $w_c$  são de 10 MHz a 50 MHz.

Para um valor típico de  $Q$  igual a 500, tem-se que  $b_0$  igual a 10 a 50 KHz, i.e., o Gyrator não pode ser utilizado em altas frequências.

A presença de uma Resistência Amortecedora em paralelo com  $C_1$ , aumentará a banda de passagem do Gyrator, porque:

$$Q = \frac{g_0}{2 g_p} \quad e \quad \left( g_p + \frac{1}{R} \right) \uparrow \quad e \quad b_0 \uparrow$$

O Fator de Qualidade:

$$Q \times b_0 = \frac{f_c}{2}$$

será tanto melhor quanto maior for o valor de  $f_c$ .

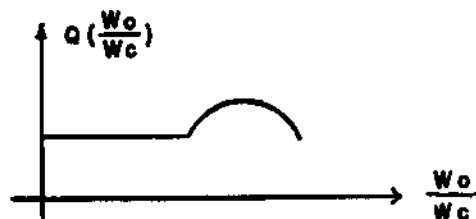
Procura-se aumentar a Banda Passante do Gyrator, porém sem introduzir perdas. O Método que nos permitirá aumentar a Banda Passante do Gyrator, sem introduzir perdas, é:

então:  $g = \frac{g_0 + p C_1}{1 + \frac{p}{w_c}} = \frac{g_0 \left( 1 + \frac{p C_1}{g_0} \right)}{1 + \frac{p}{w_c}}$

Se temos  $\frac{C_1}{g_0} = \frac{1}{w_c}$ , então:  $C_1 = \frac{g_0}{w_c}$ .

Levando êste valor de  $C_1$  na equação anterior, concluímos que:  $g$  tem valor constante, i.é,  $g = g_0$ .

Com a introdução de  $C_1$  consegue-se aumentar a Banda Passante até dez vezes o valor citado anteriormente. O novo Gráfico será:

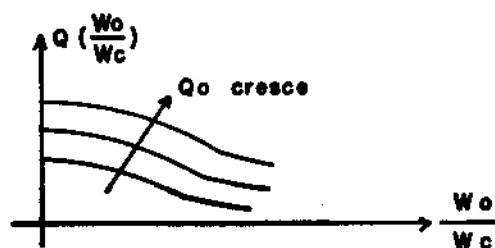


Para o 2º caso b), temos:  $g = g_0 \left( 1 + \frac{p}{w_c} \right)$ .

Levando êste valor na expressão de  $Z_{in}$  e desenvolvendo, obtemos o fator  $Q$ :

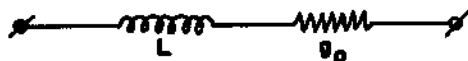
$$Q = \frac{Q_0}{1 + 2 Q_0 \frac{w_0}{w_c}}$$

O Gráfico correspondente será:



Nêste caso não serve a colocação de  $C_1$  em paralelo nem em série com uma resistência  $g_0$ .

Só serviria a colocação de uma Bobina  $L$  em série com  $g_0$ :



Então:

$$Z = \frac{1}{g_0} + pL = \frac{1 + p g_0 L}{g_0} ; \quad Y = \frac{g_0}{1 + p g_0 L}$$

$$g = \frac{g_0}{1 + p g_0 L} \left( 1 + \frac{1}{\omega_0} \right), \text{ então: } \frac{1}{\omega_0} = g_0 L \text{ e } L = \frac{1}{\omega_0 \cdot g_0}$$

Substituindo este valor de L na equação anterior, concluímos que o valor de g é constante e igual a  $g_0$  e independe da frequência.

Mas neste caso não serve porque L não é facilmente integrável.

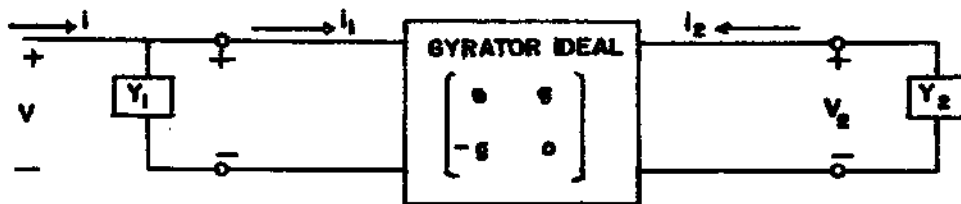
Um circuito com um g deste tipo terá uma resposta de frequência de valor baixo, pois não vamos conseguir aumentá-la.

Projeta-se, então, o circuito de tal maneira que tenha g com o aspecto de:

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

#### ESTABILIDADE A.C. DE UM GYRATOR

Para simplificar, vamos supor um Gyrator Ideal, i.é, sem perdas, i.é,  $g$  e com a frequência constante, i.é, temos o circuito:



Temos para o Gyrator:

$$\begin{cases} i_1 = g V_2 = i - Y_1 V \\ i_2 = -g V_1 = -Y_2 V_2 + V_2 = \frac{gV}{Y_2} \end{cases}$$

$$i = Y_2 V + \frac{g^2 V}{Y_2} \quad \therefore \quad i = \left( Y_2 + \frac{g^2}{Y_2} \right) \cdot V$$

Existem duas características para estudar a Estabilidade do Gyrator:

1ª) Estável em Aberto:  $i \equiv 0$ .

2ª) Estável em Curto-circuito:  $V \equiv 0$ .

As duas formas são equivalentes; vamos estudar o primeiro caso:

Fazendo  $i \equiv 0$  e  $V \neq 0$  quando  $Y_1 + \frac{g^2}{Y_2} = 0$ , temos que as Oscilações Livres de  $V$  nos são dadas por esta expressão, i.ê., nas frequências para as quais existem Oscilações de  $V$  quando:  $Y_1 + \frac{g^2}{Y_2} = 0$ . Fazendo:

$$Y_1 \left( 1 + \frac{g^2}{Y_1 Y_2} \right) = 0$$

Nesta expressão, que nos dá as frequências naturais de  $V$ , vemos que para  $Y_1 = 0$  a Rede é Passiva i.ê., todos os Zeros estão situados no semi-plano esquerdo e a Amplitude das Oscilações serão amortecidas.

Seja o caso em que:  $\left( 1 + \frac{g^2}{Y_1 Y_2} \right) = 0$

Se tiver todos os Zeros na metade esquerda do plano  $p$ , então temos o circuito funcionando de modo Estável. Se, entretanto, tiver um ou mais Zeros na metade direita do plano  $p$ , o circuito será instável.

Conclusão: Como  $Y_1 = 0$  não produz Instabilidade, então devemos estudar o termo:

$$\left( 1 + \frac{g^2}{Y_1 Y_2} \right) = 0$$

#### TÉCNICA DE REALIZAÇÃO:

Calcula-se os Zeros e verifica-se a sua localização no plano complexo.

Devesse conhecer  $Y_1$  e  $Y_2$ , logo, se estuda alguns casos particulares.

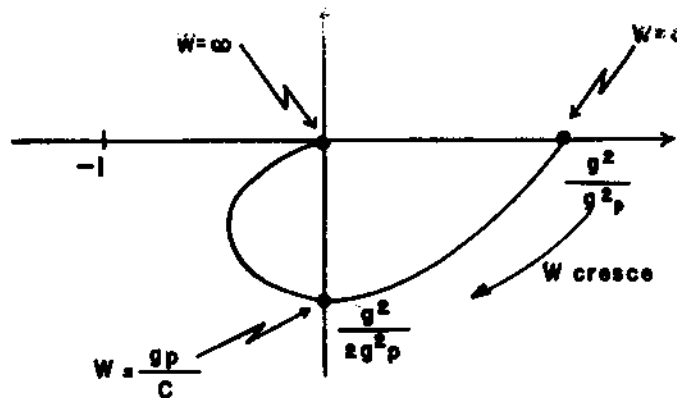
Vamos utilizar o Diagrama de Nyquist.

1º Caso:  $Y_1 = Y_2 = g_p + pC$ .

Onde  $g_p$  é considerada como retirada do Gyrator e colocada como uma resistência física no circuito.

Se  $\frac{g^2}{Y_1 Y_2} = -1$  o circuito é Instável.

Ficamos com o Gráfico abaixo que corresponde ao Diagrama de Nyquist para valores espontâneos facilmente calculáveis de  $w$ :

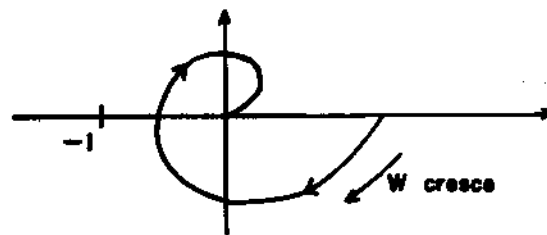


Se o contorno envolvesse o ponto -1 o circuito seria Instável. No caso que estamos considerando, temos estabilidade, i.é, o circuito é Estável.

2º Caso:  $g = \frac{g_0}{1 + \frac{p}{w_c}}$

A expressão a analisar fica sendo:  $g = \frac{g_0^2}{\left(1 + \frac{jw}{w_c}\right)^2} \cdot \frac{1}{\left(g_p + jw_c\right)^2}$

O Diagrama do Nyquist é:



Vemos pelo Diagrama que a Margem de Ganho diminuiu. Os efeitos parasitas tendem a tornar o circuito menos estável.

Outro exemplo:

Seja o caso em que:

$$Y_1 = g_p + pC$$

$$Y_2 = g_p + \frac{1}{pL}$$

Temos então:



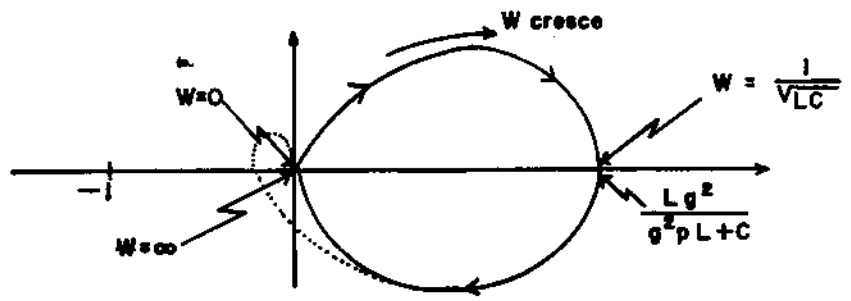
$$\frac{g^2}{(g_p + pC)(g_p + \frac{1}{pL})} = \frac{pLg^2}{(g_p + pC)(1 + p g_p L)} \cdot \frac{jwLg^2}{(g_p + jwC)(1 + jw g_p L)}$$

em termos de  $p = jw$ .

Esta expressão, em termos de Módulo e Fase, será:

$$\frac{wLg^2}{\sqrt{(g_p^2 + w^2C^2)(1 + w^2g_p^2L^2)}} \quad \left| 90^\circ - \text{arc tg } \frac{wC}{g_p} - \text{arc tg } w g_p L \right.$$

O Diagrama de Nyquist será então:



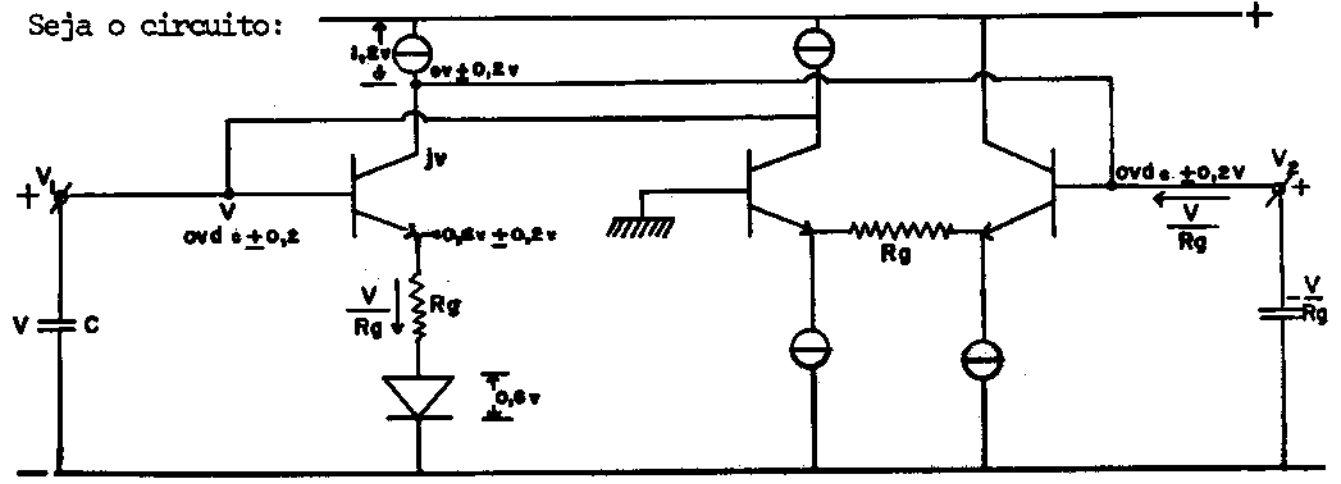
Como o ponto -1 não é envolvido, o circuito é Estável.

Se tivéssemos considerado  $g = \frac{g_0}{1 + \frac{p}{wC}}$  então a curva seria aproximadamente igual à pontilhada.

CIRCUITOS DE GYRATORS PRÁTICOS

1) Utilizando Fonte de Corrente controlada a Tensão

Seja o circuito:



A corrente do emissor tem um valor igual a  $\frac{V}{R_g}$ .

Temos ainda que:

$$V_2 = - \frac{V_1}{R_g} \cdot \frac{1}{pC} = - \frac{V_1 g}{j\omega C} = - \frac{V_1 \omega_0}{j\omega}$$


Na frequência de ressonância, i.é., para  $\omega = \omega_0$ , temos:

$$V_2 = - \frac{V_1}{j} \quad \text{ou} \quad V_2 = j V_1$$

Conclusão: O valor  $V$  no Port 1, na frequência de ressonância, tem no Port 2 o mesmo valor em Módulo, mas defasado de  $90^\circ$ .

No Transistor de entrada (NPN) a junção coletor-base deve estar polarizada reversamente ou levemente diretamente polarizada. Supomos que uma ligeira polarização direta ainda nos manterá na região ativa.

Para a junção base-coletor, uma polarização direta ainda tolerável é de:



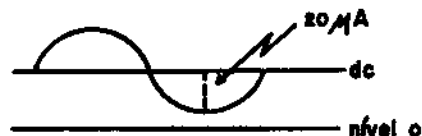
$$V_{bc_1} = 300 \text{ mV (pico)} = V_1 - V_2 \therefore \sqrt{2} V = 300 \text{ mV}$$

$$V_{\text{máx}} = \frac{300}{\sqrt{2}} \cong 200 \text{ mV (pico)}$$

Valor típico de  $R_g$ :  $R_g = 10 \text{ K}$ .

O valor da corrente A.C. em  $R_g$  que é o sinal que circula em  $R_g$  ou seja no emissor é de:

$$R_g = \frac{200 \text{ mV}}{10 \text{ K}\Omega} = 20 \mu\text{A (pico)}$$



Temos que a corrente mínima D.C. por ramo, que é o valor da Fonte de Corrente é de:  $20 \mu\text{A}$

Cálculo dos valores das tensões  $V_+$  e  $V_-$ :

Supondo que a tensão D.C. de base tenha valor nulo na base do primeiro transistor, temos:

$$0 \text{ V dc} \pm 0,2 \text{ V}$$

Na base do terceiro transistor, temos:  $0 \text{ V dc} \pm 0,2\text{V}$ .

Na Fonte de Corrente superior podemos considerar uma queda de tensão de 1,2 volts.

O valor da tensão no ponto (+) será:  $V_+ = 0 + 0,2 + 1,2 = 1,4 \text{ V}$ .

O valor da tensão no emissor do primeiro transistor é:  $-0,6 \text{ V} \pm 0,2$ .

E o valor da tensão no ponto (-) será:  $V_- = -0,6 - 0,2 - 0,6 = -1,4 \text{ V}$ .

A Potência D.C. do circuito tem o valor:

$$P_{dc} = [1,4 + 1,4] [3 \times 20 \mu\text{A}] = 2,8\text{V} \times 60 \mu\text{A} = 168 \mu\text{W}$$

A Potência A.C. do circuito tem o valor:

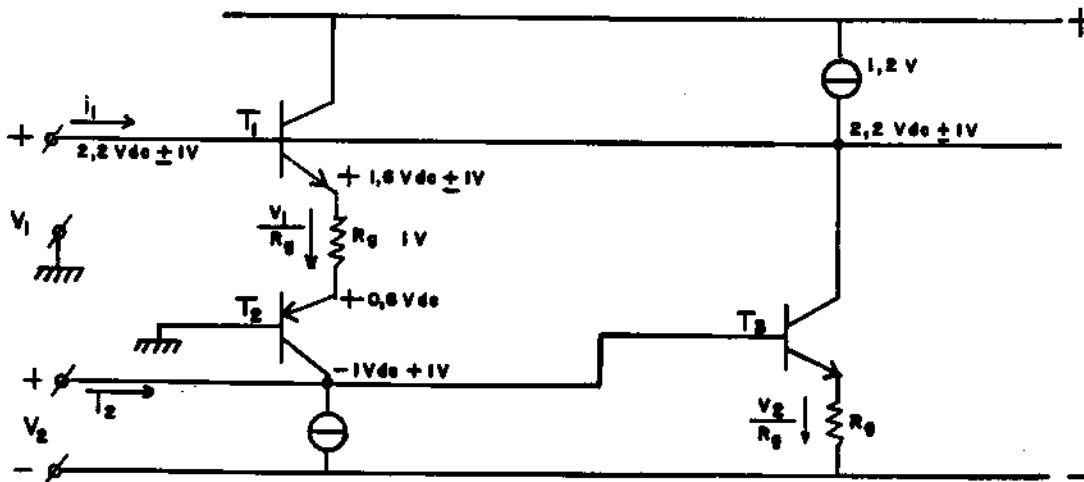
$$P_{ac} = 2 \frac{V^2}{R_g} = 2 \cdot \frac{\left(\frac{200}{\sqrt{2}} \text{ mV}\right)^2}{10 \text{ K } \Omega} = \frac{(200 \times 10^{-3})^2}{10^4} = \frac{4 \times 10^4 \times 10^{-6}}{10^4} = 4 \times 10^{-6} \text{ W} = 4 \mu\text{W}$$

Donde a Eficiência do circuito será:

$$\eta = \frac{P_{ac}}{P_{dc}} = \frac{4}{168} \approx 2,5\%$$

2) Outro tipo de circuito utilizando Fonte de Corrente controlada a Tensão

Seja o circuito:



Do circuito acima tiramos as equações do Gyrator:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{V_2}{R_g} \\ i_2 = -\frac{V_1}{R_g} \end{cases}$$

Supondo que se deseja um sinal  $V_2$  no Port 2 de :  $V_2 = 1 \text{ V}$  (pico).

Mas, temos que:  $V_2 = V_{cb2}$ .

Admitamos, ainda, que o valor máximo da tensão direta da junção base-coletor seja de zero volt. Então, para o terceiro transistor teremos:  $-1,6 V_{dc} \pm 1 \text{ V}$ .

Consideremos o valor típico de  $R_g$ , ou seja:  $R_g = 10 \text{ K}$ .

O valor da corrente A.C. de pico em  $R_g$  será:

$$V_1/R_g = \frac{1\text{V}}{10\text{K}} = 100 \mu\text{A (pico)}$$

O valor mínimo de corrente D.C. por ramo será:  $100 \mu\text{A}$ .

Admitindo uma queda de tensão de 1,2 volts na Fonte de Corrente, teremos:

Valor de  $V_+$ :  $2,2 + 1 + 1,2 = 4,4 \text{ V}$

Valor de  $V_-$ :  $-1,6 - 1 = -2,6 \text{ V}$

A Potência D.C. será:

$$P_{dc} = [4,4 + 2,6] \text{ V} \times [2 \times 100 \mu\text{A}] = 7\text{V} \times 200 \mu\text{A} = 1400 \mu\text{W}$$

A Potência A.C. será:

$$P_{ac} = 2 \frac{V^2}{R_g} = \frac{2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{10^4} = \frac{1}{10^4} \text{ W} = 100 \mu\text{W}$$

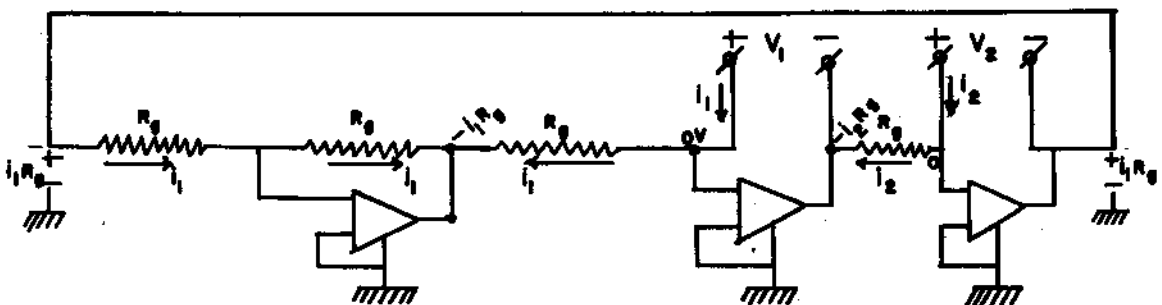
A Eficiência do circuito será:

$$\eta = \frac{P_{ac}}{P_{dc}} = \frac{100}{1400} \approx 7\%$$

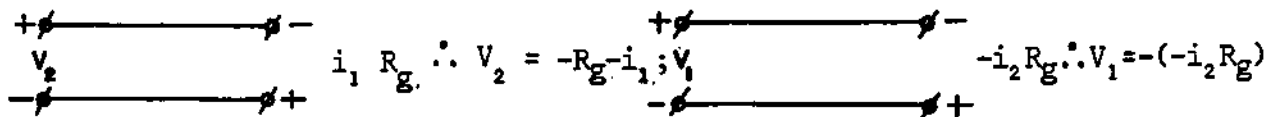
Porém, os Ajustes D.C. nas Fontes de Corrente nos reduziram a Eficiência para:  $\eta \approx 5\%$ .

### 3) Com Amplificadores Operacionais

Seja o circuito:



Analizando o circuito acima, vemos que:



Assim, obtemos as equações do Gyrator:

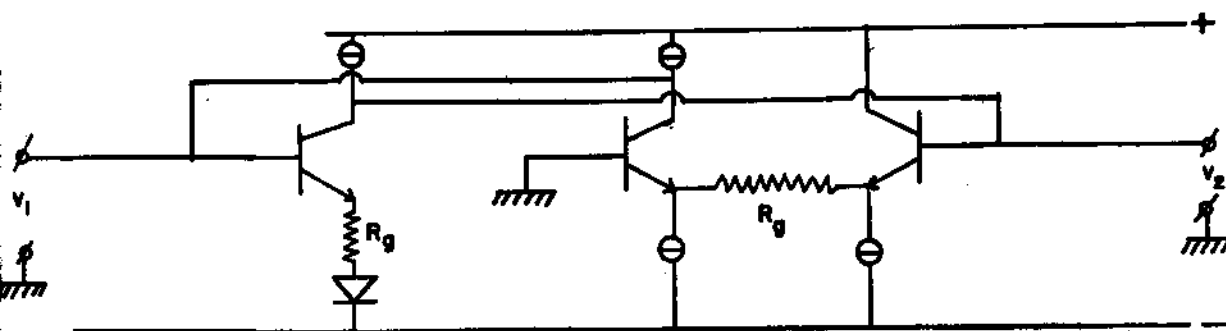
$$V_2 = -R_g \cdot i_1 \quad \text{e} \quad V_1 = i_2 R_g$$

Observação: Embora seja um circuito fácil de montar, tem o inconveniente de apresentar uma baixa eficiência e ser anti-econômico. Além do mais o valor de  $R_g$  deve ser muito preciso.

### GYRATORS ELETRÔNICOS CONVENIENTES PARA INTEGRAÇÃO

Observação: Por razões econômicas, não devemos usar mais que duas resistências de giração  $R_g$ .

Consideremos o seguinte circuito básico com Fontes de Corrente controladas a Tensão:



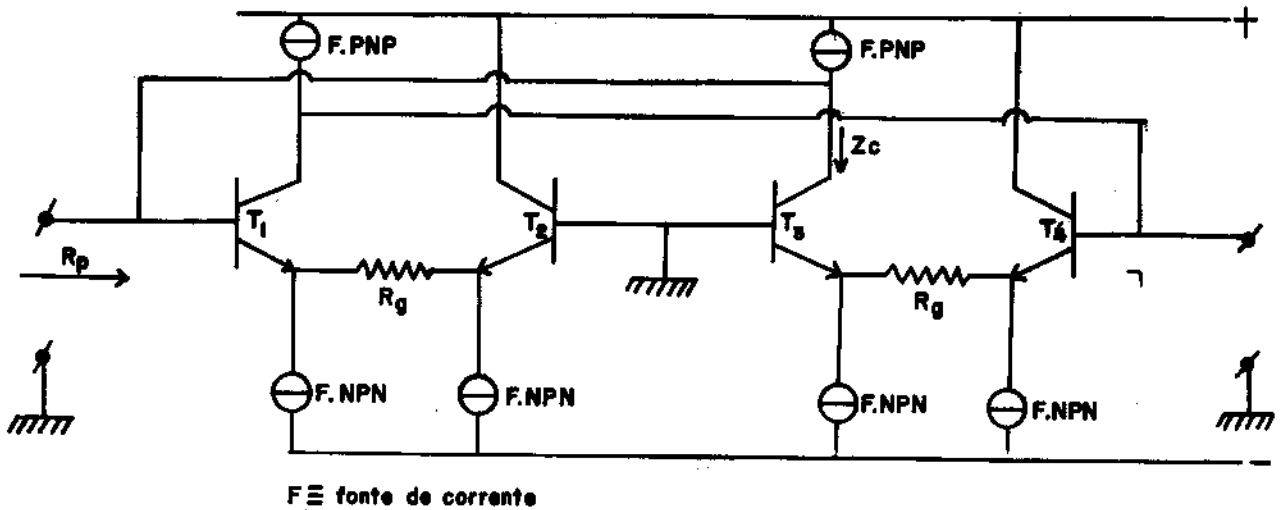
Nêste circuito temos que:  $V_1 \text{ dc} = f(i \text{ de } R_g, R_g, V_-)$ .

O valor de  $V_2 \text{ dc}$  independe da bateria, da corrente que circula em  $R_g$  e do próprio  $R_g$ , desde que não circule corrente D.C. em  $R_g$ .

Temos que no Port 1 o valor de  $V_1 \text{ dc}$  é variável, o que constitui um grave inconveniente.

A solução, então, é construir-se Gyrators Balanceados, tal que o circuito dos dois Ports sejam iguais.

Do circuito anterior evoluímos para o seguinte:



Um dos fatores que caracteriza o Gyrator é:

$$Q = \frac{g}{2 g_p} = \frac{\frac{1}{R_g}}{2 \cdot \frac{1}{R_p}} = \frac{R_p}{2 R_g}$$

$R_p$  é a resistência de perda, de entrada, vista do Port 1.

Para termos um alto  $Q$ , necessitamos de um valor grande para  $R_p$ . Seja  $\alpha'$  o Ganho de Corrente do primeiro transistor. Temos, então:

$$R_p = \alpha' \cdot R_g // Z_c // Z_{F.PNP} \approx \alpha' R_g$$

$Z_c$  é a impedância do coletor do terceiro transistor.

Podemos escrever:

$$R_p < \alpha' \cdot R_g$$

e:

$$Q < \frac{\alpha' R_g}{2 R_g} \quad \therefore \quad Q < \frac{\alpha'}{2}$$

Um valor típico de  $\alpha'$  para um Transistor NPN Integrável é: 50.

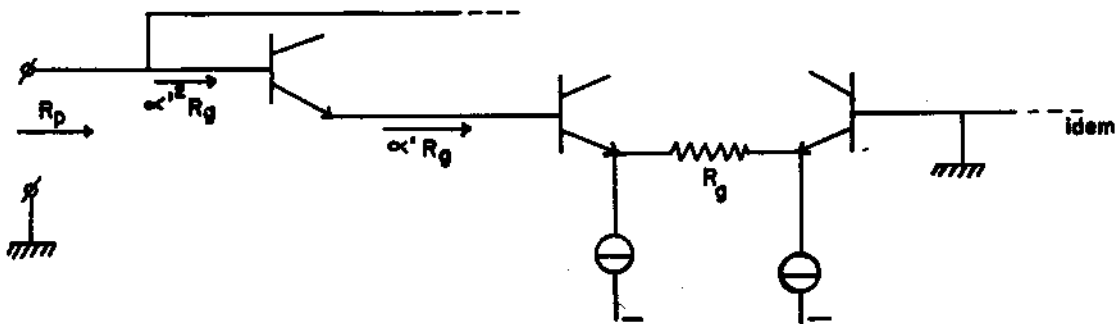
Isto significa que o nosso  $Q$  é menor que 25, o que é um valor muito baixo. Os nossos valores de  $Q$  devem ser maiores que 100.

Então o circuito acima, como está, também não serve, pois devemos ter um valor de  $Q$  maior que o valor encontrado.

Observamos que aumentando o valor de  $R_p$  conseguimos aumentar o valor de  $Q$ .

Aumenta-se  $R_p$  com a introdução de um "Seguidor de Emissor Duplo".

Circuito contendo o Seguidor de Emissor Duplo:



Então, temos:

$$R_p \cong \alpha^{12} \cdot R_g // Z_c // Z_{\text{Fonte PNP}}$$

E permanece válido o fato:

$$R_p < \alpha^{12} R_g$$

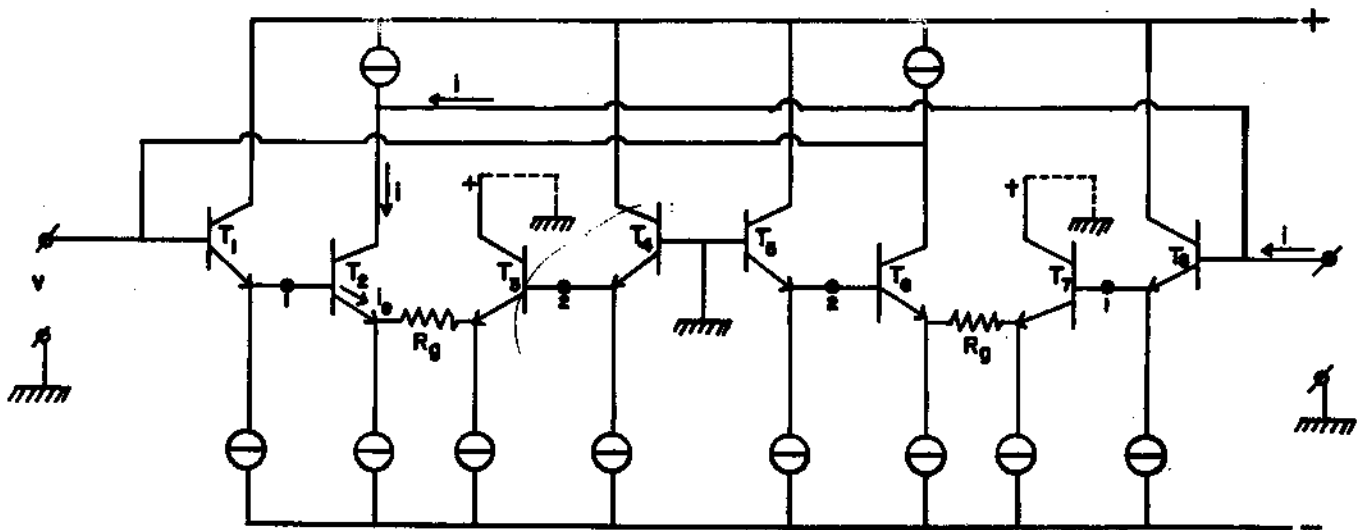
Supondo que  $R_p = 5 \text{ M}\Omega$  e  $R_g = 10 \text{ K}\Omega$ , teremos:  $Q \cong \frac{R_p}{2 R_g}$ .

Então o valor de  $Q$  será:

$$Q \cong \frac{5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4} \cong 250$$

A introdução do Seguidor de Emissor Duplo em ambos os Ports nos aumentou o fator  $Q$  do Gyrator em, aproximadamente, dez vezes.

Temos, então, o circuito:



Observação: A corrente A.C. não deve percorrer as linhas de alimentação, pois causa o efeito "Cross-Talk".



Para solucionar este problema, conectamos o terminal (+) do terceiro transistor e do sétimo transistor à terra.

Supondo que o sinal  $v$  está aplicado entre os pontos 1 e 2 indicados na figura, temos:  $i_e = \frac{v}{R_g}$ .

$i_e$  é a corrente do emissor.

Uma melhor aproximação é:  $\frac{v}{i_e} = R_o + R_g + R_o$ .

$R_o$  é a resistência nas junções base-emissor do segundo e do terceiro transistores.



Queremos a relação:  $\frac{v}{i}$ .

Temos que:

$$i_e = i + \frac{i}{\alpha'}$$

$\alpha'$  é o Ganho de Corrente.

E teremos:

$$i_e = \left(1 + \frac{1}{\alpha'}\right) i \quad \dots \quad \frac{v}{i} = (R_o + R_g + R_o) \left(1 + \frac{1}{\alpha'}\right)$$

onde:

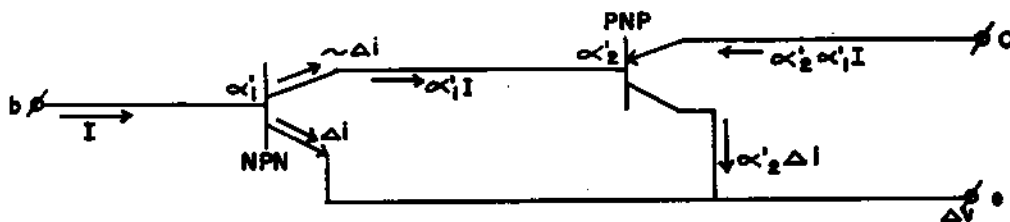
$$R_o = \frac{KT}{q I_E}$$

$R_o$  é função da temperatura e da corrente de emissor. Também  $\alpha'$  é função da temperatura e da corrente de emissor. Logo, temos que a condutância de giração não é estável e é função de elementos externos.

$R_g$  é o único elemento que pode ser obtido com precisão.

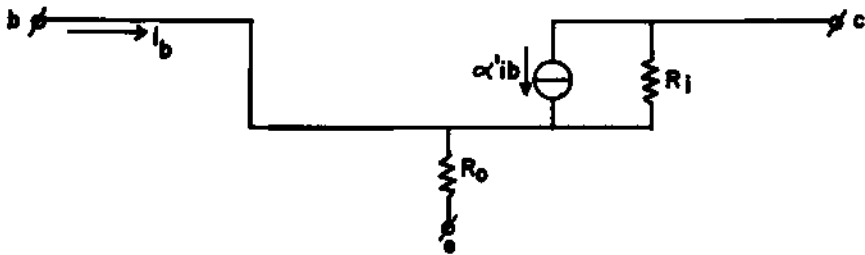
Temos, pois, interêsse em aumentar  $\alpha'$  e diminuir  $R_o$ .

O circuito que realiza essa função é:



Observamos que o circuito acima possui três terminais acessíveis e é semelhante a um transistor.

O Circuito Equivalente de um Transistor, na Faixa Média, com efeitos capacitivos e resistência de base desprezados, é:



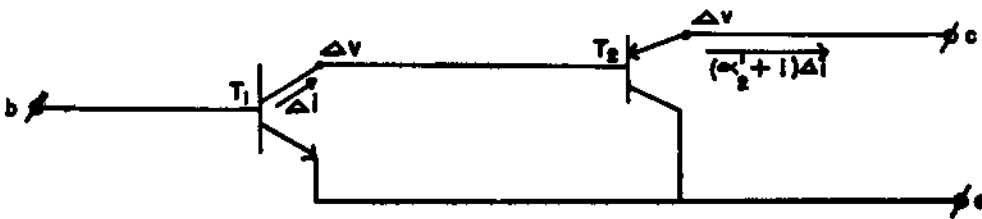
$\alpha_1' \cdot \alpha_2'$  é o Ganho de Transistor Composto.

A corrente que circula pelo emissor será:  $\Delta i + \alpha_2' \Delta i$ .

O valor de  $R_0$  será:

$$R_0 = \frac{\Delta V}{\Delta i(1 + \alpha_2')} = \frac{R_{01}}{1 + \alpha_2'}$$

Vejamos como fica  $R_1$  na figura seguinte:



Supondo a corrente  $\Delta i$  no coletor de  $T_1$  e o sinal  $\Delta V$ , então:

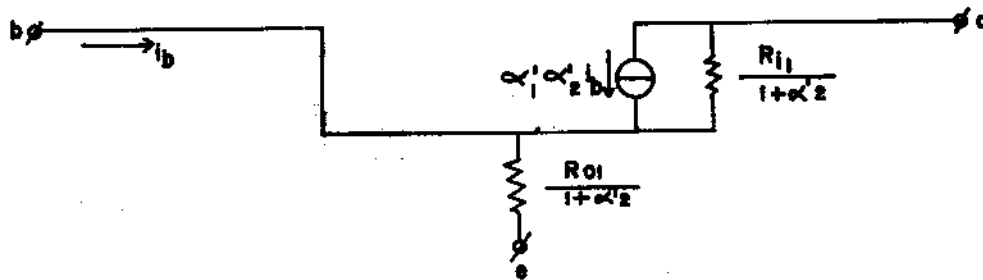
$$R_{11} = \frac{\Delta V}{\Delta i}$$

$\Delta i$  é a corrente de base do segundo transistor e aparece no emissor do segundo transistor como  $(\alpha'_2 + 1) \Delta i$  e onde também aparece  $\Delta V$ .

Ficamos, então, com a relação:

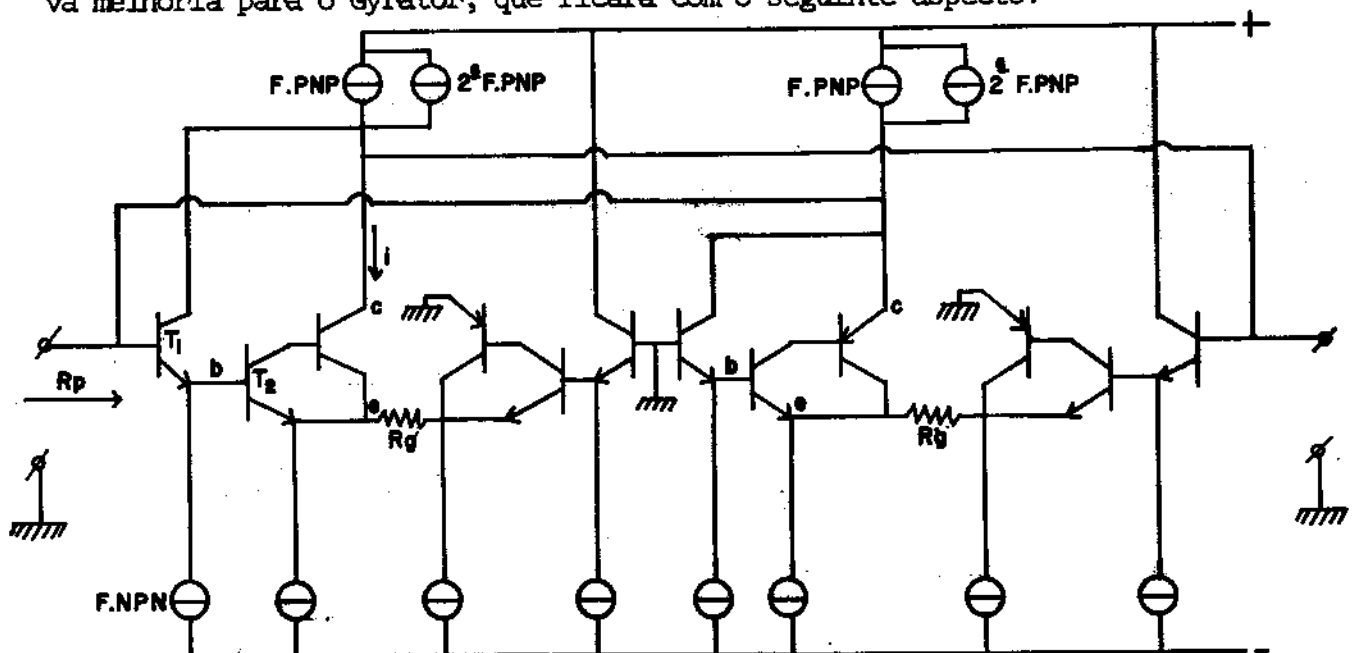
$$\frac{\Delta V}{(\alpha'_2 + 1) \Delta i} = R_i \text{ do transistor total} = \frac{R_{i1}}{1 + \alpha'_2}$$

O circuito equivalente para a combinação será:



Então, realizamos a condutância de giração, introduzindo esta combinação "tandem" e diminuimos, sensivelmente, a influência de  $\alpha'$  e de  $R_o$ .

Introduzindo a combinação "tandem" no Gyrator anterior, teremos efetuado nova melhoria para o Gyrator, que ficará com o seguinte aspecto:



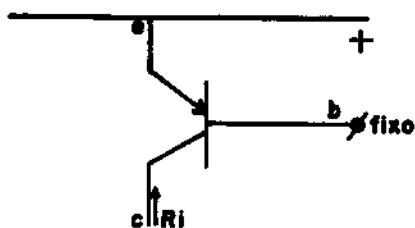
Podemos, ainda, melhorar o circuito do Gyrator, colocando uma segunda Fonte de Corrente PNP em paralelo com a primeira Fonte de Corrente PNP, de modo que esta segunda Fonte polariza o primeiro Transistor de tal maneira que na base do segundo transistor a corrente seja, praticamente, zero.

A segunda Fonte de Corrente PNP tem por finalidade garantir que a corrente de base do segundo transistor seja, praticamente, zero.

#### Detalhes das Fontes de Corrente PNP e NPN:

Sabemos que o elemento de importância das Fontes é a sua Impedância Interna que influencia, decisivamente, a Impedância de Entrada  $R_p$  do circuito e, portanto, o fator Q do Gyrator.

Se o Transistor, abaixo, fôr, por exemplo, a realização física da Fonte de Corrente PNP, temos:



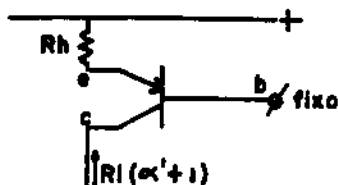
$R_p$  só depende da Fonte de Corrente.

Supondo que  $R_p = R_i$  e que  $R_p = 1\text{Mohms}$  e  $R_g = 10\text{Kohms}$  (valores típicos):

$$Q = \frac{R_p}{2 R_g} = \frac{1 \text{ M } \Omega}{2 \cdot 10^4} = 50$$

$Q = 50$  é um valor muito baixo.

Se nesse emissor tivermos uma resistência  $R_h$  de grande valor, então:



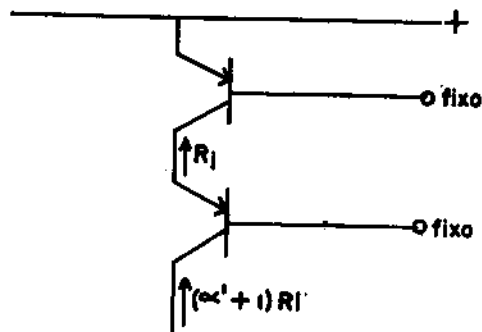
$$R_p = (\alpha' + 1)R_i$$

Teremos, para os mesmos valores de  $R_p$  e  $R_g$  e sendo  $\alpha'_{PNP} = 5$ , o novo valor de  $Q$ :

$$Q = \frac{6 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4} = 300$$

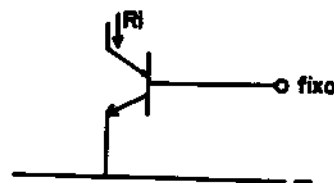
Observamos que o novo valor de  $Q$  é bem maior que o anterior; portanto estamos interessados em ter uma impedância  $(\alpha' + 1) \cdot R_i$  para a Fonte de Corrente PNP.

Precisamos, então, de um circuito com uma resistência de emissor de valor elevado para a realização da Fonte de Corrente PNP. Mas a introdução da resistência  $R_h$  é inconveniente. Substituímos, então, a resistência  $R_h$  por um outro transistor PNP, associado ao primeiro, como mostra a figura abaixo:



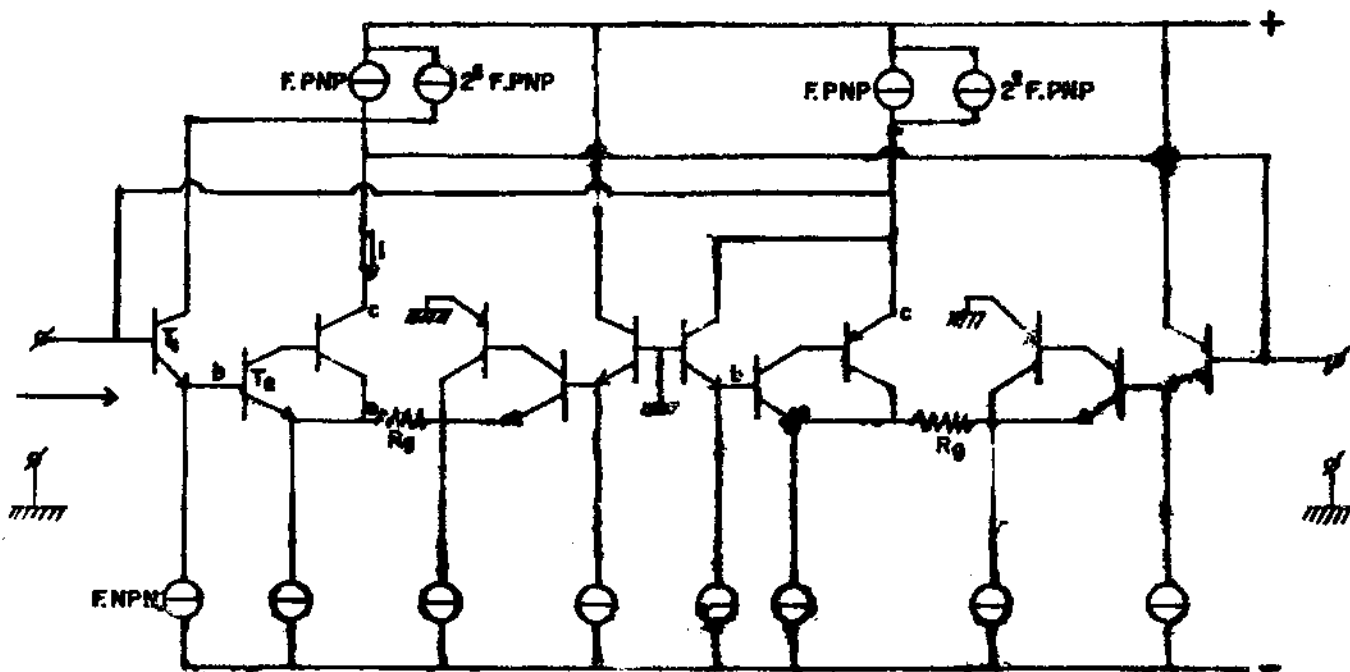
O circuito acima é a realização de cada fonte de corrente PNP onde eliminamos a resistência  $R_h$ , introduzindo mais um transistor PNP.

Para as Fontes de Correntes NPN teremos o seguinte aspecto:



Nêste caso não se necessita introduzir mais outro transistor, porque o nível de impedância é suficiente, pois o valor de  $R_i$  é muito maior que o valor de  $R_g$  (p. ex.  $R_i = 1 \text{ Mohms}$ ).

Vejam os a expressão de  $R_p$  para o circuito do Gyrator melhorado:



$$R_p = \left\{ \alpha'_{NPN} \left[ R_{iNPN} \parallel \alpha'_{NPN} \cdot \alpha'_{PNP} \cdot R_g \right] \right\} \parallel \left\{ \alpha'_{NPN} \cdot R_{iNPN} \right\} \parallel \left\{ \alpha'_{PNP} \cdot \alpha'_{NPN} \cdot \frac{R_{iNPN}}{1 + \alpha'_{PNP}} \right\} \parallel \left\{ \text{impedância as Fontes de Corrente PNP} \right\}$$

Como  $\alpha'_{PNP} \approx 1 + \alpha'_{PNP}$ , ficamos com:

$$R_p = \left\{ \alpha'_{NPN} \left[ R_{iNPN} \parallel \alpha'_{NPN} \cdot \alpha'_{PNP} \cdot R_g \right] \right\} \parallel \left\{ \frac{\alpha'_{NPN} \cdot R_{iNPN}}{2} \right\} \parallel \left\{ \text{impedância das Fontes de corrente PNP} \right\}$$

Vejamos um exemplo numérico, onde:

$$\alpha'_{NPN} = 50, \quad \alpha'_{PNP} = 5, \quad R_g = 10 \text{ K}\Omega, \quad R_{iNPN} = 1 \text{ M}\Omega$$

$$R_p = \left\{ 50 [1\text{M}\Omega \parallel 50 \cdot 5 \cdot 10^4 \text{M}\Omega] \right\} \parallel \left\{ \frac{50 \cdot 1\text{M}\Omega}{2} \right\} \parallel \left\{ \frac{5 \cdot 1\text{M}\Omega}{2} \right\}$$

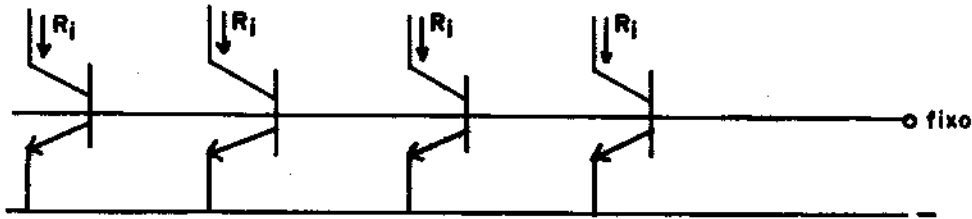
$$R_p \approx 2.5 \text{ M}\Omega$$

$$Q = \frac{2.5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4} = 125$$

O valor encontrado  $Q = 125$  é um valor típico razoável.

### CONEXÃO DAS FONTES DE CORRENTE NPN

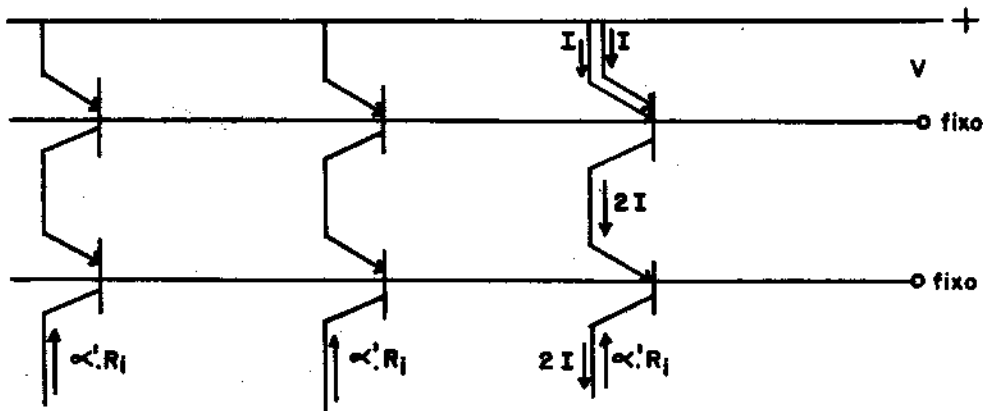
As Fontes de Corrente NPN são conectadas conforme a figura abaixo:



As bases são interconectadas. Cada Transistor corresponde a uma Fonte de Corrente NPN.

### CONEXÃO DAS FONTES DE CORRENTE PNP

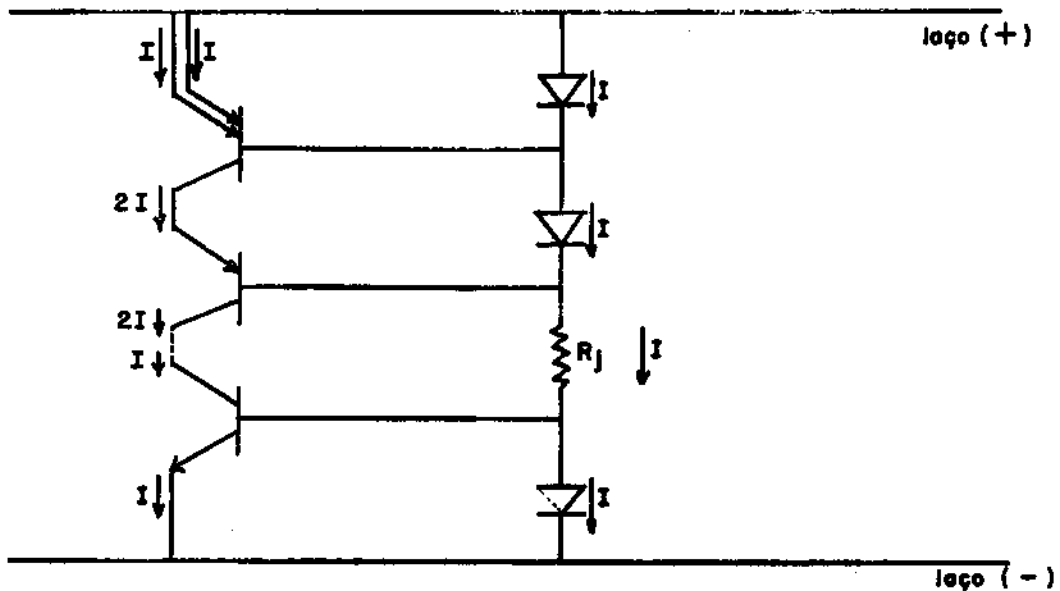
As Fontes de Corrente PNP são conectadas conforme a figura abaixo:



Quando for necessária a realização da Fonte de Corrente PNP dupla, coloca-se outro emissor, constituindo um emissor duplo que nos dará uma corrente também dupla. Cada conexão representada é uma Fonte de Corrente.

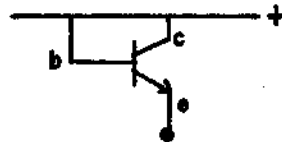
### CONSTRUÇÃO DOS NÍVEIS FIXOS DA BASE:

Os níveis fixos da base são construídos pela introdução de Diodos, conforme é mostrado na figura seguinte:



### CONSTRUÇÃO DOS DIODOS

Os Diodos são construídos do seguinte modo:



Simplesmente, se efetua um curto-circuito entre a junção base-coletor.

### ALGUMAS VANTAGENS ELETRÔNICAS DOS CIRCUITOS INTEGRADOS:

- 1) O projetista pode escolher o tamanho e a geometria ótima para Transistores, Diodos e qualquer outro componente. Os componentes discretos são manufaturados com faixa de corrente determinada, por exemplo, Transistores de 10 mA, 100 mA, 0,5A. São produzidos, pois, com esta característica. O projetista de circuitos Integrados, não está limitado às faixas de corrente; êle projeta o circuito na faixa que necessita.
- 2) Pode-se ter grande quantidade de componentes, especialmente ativos, que podem ser reunidos com tamanho mínimo. Já existem "chips" (pastilhas) contendo centenas de elementos numa área mínima.

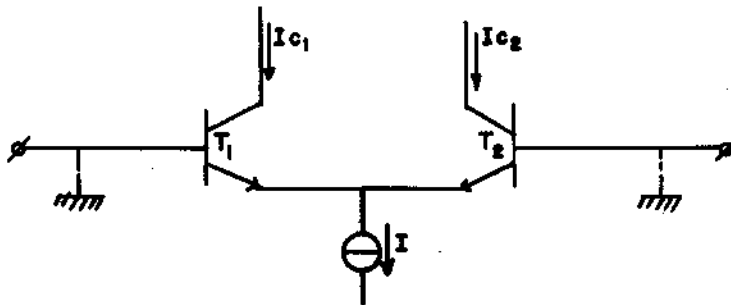


- 3) É possível realizar elementos ativos e passivos muito bem casados e com boa precisão numa única "chip", com as mesmas propriedades térmicas e elétricas.
- 4) A grande vantagem do silício é que ele é um excelente condutor de calor. A condutividade térmica do silício é mais ou menos um quinto do valor da condutividade do cobre. Isto significa que o nosso circuito total, pode estar a uma mesma temperatura uniforme, devido à grande constante de propagação térmica do silício. Isto é bom, porque diz que o casamento dos componentes pode ser excelente em uma grande faixa de temperatura.

#### ANÁLISE DE UM MÓDULO INTEGRADO

Seja o Módulo formado por dois Transistores conectados em LTP:

(LTP - Long-Tailed Pair)



Temos:

- 1) Quando as tensões base-emissor são iguais, as correntes também são iguais. Se os Transistores são idênticos espera-se que as correntes de emissor também sejam idênticas.
- 2) Esperava-se que, se o  $\alpha$  fôsse o mesmo para os Transistores, as correntes dos coletores deveriam ser iguais. Logo, se os Transistores são idênticos:

$$I_{C_1} = \frac{\alpha I}{2}, \quad \alpha = \frac{\beta}{\beta + 1}$$

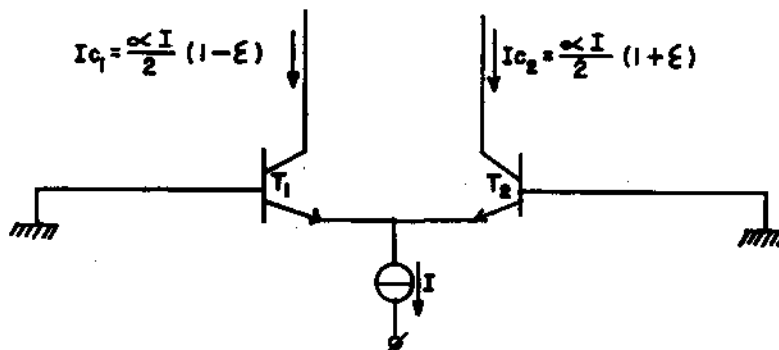
$$I_{C_2} = \frac{\alpha I}{2}$$

Porém, na verdade, as medições nos dão:

$$I_{C_1} \cong \frac{\alpha I}{2} (1 - \epsilon) \quad e \quad I_{C_2} = \frac{\alpha I}{2} (1 + \epsilon)$$

Há um fator  $\epsilon$  que dá uma diferença muito pequena; o valor de  $\epsilon$  é muito pequeno. Notou-se que se estes transistores fossem feitos pelo Processo de Difusão Normal, teríamos um valor de  $\epsilon$  menor que 10% para 90% das Amostras. Para melhorar, passou-se a fabricar os Transistores por um processo especial chamado Processo K. Pelo tratamento K achou-se um novo valor para  $\epsilon$ , ou seja  $\epsilon$  menor que 2% para 90% das Amostras.

Seja o circuito:



Se os Transistores são idênticos a área dos emissores é a mesma. Pelo Processo K, temos que:  $\epsilon$  menor que 2% para 90% das Amostras.

#### Interpretação dos Resultados:

Inicialmente, sabemos que:

$$I_E \cong I_0 \cdot e^{\frac{q V_E}{kT}}$$

$I_0$  → corrente de fuga intrínseca da junção base-emissor.

$V_E$  - queda de tensão intrínseca através da junção base-emissor.

Para  $I_0$  temos a seguinte expressão:

$$I_0 = \frac{q \cdot A_E \cdot D_{nB} \cdot n_i^2}{W \cdot N_A}$$

$A_E$  - área da junção base-emissor.

$D_{nB}$  - constante de difusão dos elétrons.

$n_i$  - concentração intrínseca de elétrons ou buracos.

$W$  - largura de base.

$N_A$  - concentração de aceitadores.

$I_0$  - depende, fortemente, da temperatura através de  $D_{nB}$  e  $n_i$ , e, também depende da tensão coletor-emissor através de  $W$ , embora levemente.

As correntes  $I_{C_1}$  e  $I_{C_2}$  serão dadas por:

$$I_{C_1} = \alpha_1 I_{E_1} = \alpha_1 I_{01} e^{\frac{q \cdot V_{E_1}}{KT}}$$

$$I_{C_2} = \alpha_2 I_{E_2} = \alpha_2 I_{02} e^{\frac{q \cdot V_{E_2}}{KT}}$$

Assim, temos a relação:

$$\frac{I_{C_2}}{I_{C_1}} = \frac{\alpha_2 I_{02} e^{\frac{q}{KT}(V_{E_2} - V_{E_1})}}{\alpha_1 I_{01}}$$

Se considerarmos as quedas de tensão intrínsecas nas junções iguais, resultará:

$$V_{E_1} = V_{E_2} \implies \frac{I_{C_2}}{I_{C_1}} = \frac{\alpha_2 I_{02}}{\alpha_1 I_{01}}$$

Mas, como vimos que:

$$I_{C_1} = \frac{\alpha I}{2} (1 - \epsilon) \quad e \quad I_{C_2} = \frac{\alpha I}{2} (1 + \epsilon)$$

Ficamos com:

$$\frac{I_{C_2}}{I_{C_1}} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \approx (1 + \epsilon)^2$$

ou

$$\frac{I_{C_2}}{I_{C_1}} = \frac{\alpha_2 I_{02}}{\alpha_1 I_{01}} \approx (1+2\epsilon)$$

Mais comum, é a determinação da diferença entre os Transistores  $T_1$  e  $T_2$  pelo Método "Input Offset Voltage". Neste caso verifica-se a Tensão de Entrada que faz com que as Correntes de Coletor sejam iguais. Vejamos como calcular a Input Offset Voltage. Vimos que:

$$I_E \approx I_0 \cdot e^{\frac{q V_E}{KT}} \quad \therefore \quad \frac{I_E}{I_0} = e^{\frac{q V_E}{KT}}$$

Aplicando logaritmos:

$$V_E = \frac{KT}{q} \lg_e \frac{I_E}{I_0}$$

Então:

$$V_{E_1} = \frac{KT}{q} \lg_e \frac{I_{E_1}}{I_{01}} \quad e \quad V_{E_2} = \frac{KT}{q} \lg_e \frac{I_{E_2}}{I_{02}}$$

E, para a diferença, temos:

$$V_{E_1} - V_{E_2} = \frac{KT}{q} \left[ \lg_e \frac{I_{E_1}}{I_{01}} - \lg_e \frac{I_{E_2}}{I_{02}} \right] = \frac{KT}{q} \lg_e \frac{\frac{I_{E_1}}{I_{01}}}{\frac{I_{E_2}}{I_{02}}}$$

Tínhamos que:

$$I_E = \frac{I_C}{\alpha_1} \quad e \quad I_{E_2} = \frac{I_{C_2}}{\alpha_2}$$

Temos, então, a relação:

$$\frac{I_{E_1}}{I_{E_2}} = \frac{I_{C_1}}{I_{C_2}} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Levando o valor desta relação para a expressão de  $V_{E_1} - V_{E_2}$  temos:

$$V_{E_1} - V_{E_2} = \frac{KT}{q} \lg_e \left[ \frac{I_{02} \cdot \alpha_2}{I_{01} \cdot \alpha_1} \cdot \frac{I_{C_1}}{I_{C_2}} \right]$$

Esta expressão fornece o valor da Tensão de Entrada para qualquer valor de  $I_{C_1}$  e  $I_{C_2}$ .

Então, para a Input Offset Voltage, temos:  $I_{C_1} = I_{C_2}$ .

Assim, a expressão anterior ficará:

$$V_{E_1} - V_{E_2} = \frac{KT}{q} \lg_e \left[ \frac{\alpha_2 I_{e2}}{\alpha_1 I_{e1}} \right] = \frac{KT}{q} \lg_e (1 + 2\varepsilon) \approx \frac{KT}{q} \cdot 2\varepsilon \quad \textcircled{I}$$

Para o caso em que encontramos  $\varepsilon$  menor que 2% para 90% das Amostras, teremos então:

$$\frac{KT}{q} \approx 25 \text{ mV}$$

E a Input Offset Voltage será menor que 1 mV, na temperatura ambiente e com 90% de nível de confiança.

O que foi visto é verdadeiro para o Offset Voltage, apenas, quando a densidade de corrente é pequena. Quando a densidade de corrente é maior do que 0,1 mA, temos que considerar outros fatores que influenciam o Offset Voltage:

- 1) Além da queda de tensão intrínseca dada pela expressão I da junção base-emissor, devemos considerar que o fluxo de corrente de base provocará uma queda de tensão adicional na resistência de base  $r_{bb}$ .
- 2) Tem-se ainda a queda de tensão adicional provocada pelo fluxo de corrente de emissor na resistência de contacto e a resistência do corpo do próprio emissor ( $r_E$ ). Este fator também deve ser considerado se a corrente for grande.

Medindo a queda de tensão base-emissor temos:

$$V_{EB} = \frac{KT}{q} \lg_e \frac{I_E}{I_0} + I_E r_E + I_B r_{bb}$$

Mas,

$$I_E = I_B + I_C = I_B + \alpha I_E \implies I_B = (1-\alpha)I_E$$

e

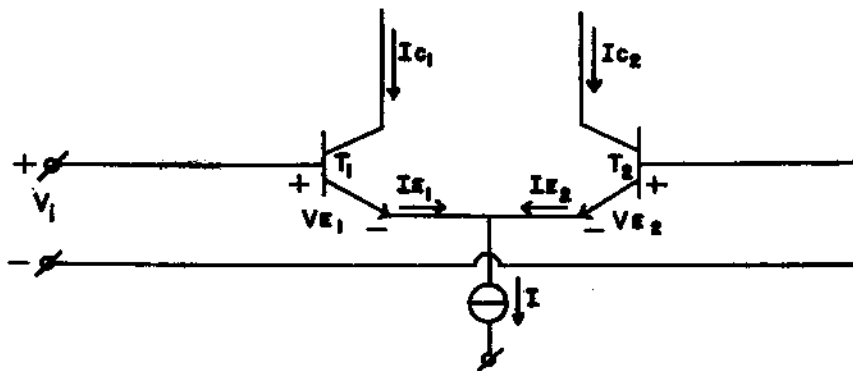
$$I_E r_E + I_B r_{bb} = I_E [r_E + r_{bb}(1-\alpha)]$$

Se  $r_E$  e  $r_{bb}$ , dos dois transistores forem diferentes, também contribuirão para o Offset Voltage.

### CARACTERÍSTICAS DE UM LTP

- 1) O LTP é um dos Módulos Integrados mais utilizados devido às vantagens que oferece. Consegue-se um "matching" bom. O casamento de dois transistores de entrada é excelente.
- 2) O circuito LTP não requer nenhum capacitor.
- 3) As suas aplicações são enormes, por exemplo, se a Fonte de Corrente for uma Fonte Constante, D.C. pura, então num estágio Amplificador Diferencial o LTP é conveniente. Para a fonte de corrente D.C., ainda, pode ser usado como um Limitador e também como Multiplicador de Frequência. Se a Fonte de Corrente for controlada por um sinal A.C., então o LTP pode ser usado para Multiplicar dois Sinais. Este fato implica em Modulação de Amplitude ou Mistura de Sinais. Serve também como Detetor de Produto de Modulação em Amplitude. Pode ser usado, ainda, como Contrôlo Automático de Ganho.

Seja um LTP:



Onde:

$$I_{E_1} \cong I_{01} e^{\frac{q V_{E_1}}{KT}} \quad (1)$$

$$I_{E_2} \cong I_{02} e^{\frac{q V_{E_2}}{KT}} \quad (2)$$

$$I = I_{E_1} + I_{E_2} = I_{E_1} \left( 1 + \frac{I_{E_2}}{I_{E_1}} \right) \quad (3)$$

Fazendo  $V_T = \frac{KT}{q}$ , temos para 1 e 2 :

$$I_{E_1} = I_{01} e^{\frac{V_{E_1}}{V_T}} \quad \text{e} \quad I_{E_2} = I_{02} e^{\frac{V_{E_2}}{V_T}}$$

Considerando os Transistores de Entrada como sendo idênticos, de tal modo que:

$$I_{01} = I_{02} = I_0$$

Então:

$$I = I_{E_1} \left( 1 + e^{\frac{V_{E_2} - V_{E_1}}{V_T}} \right) \quad (4)$$

Da figura, temos:

$$V_i = V_{E_1} - V_{E_2}$$

Portanto:

$$I = I_{E_1} \left( 1 + e^{-\frac{V_i}{V_T}} \right)$$

Então, teremos para a corrente  $I_{C_1}$  :

$$I_{C_1} = \alpha I_{E_1} = \frac{\alpha I}{1 + e^{-\frac{V_i}{V_T}}} \quad (5)$$

Se fizermos:

$$I = I_{E_2} \left( 1 + \frac{I_{E_1}}{I_{E_2}} \right)$$

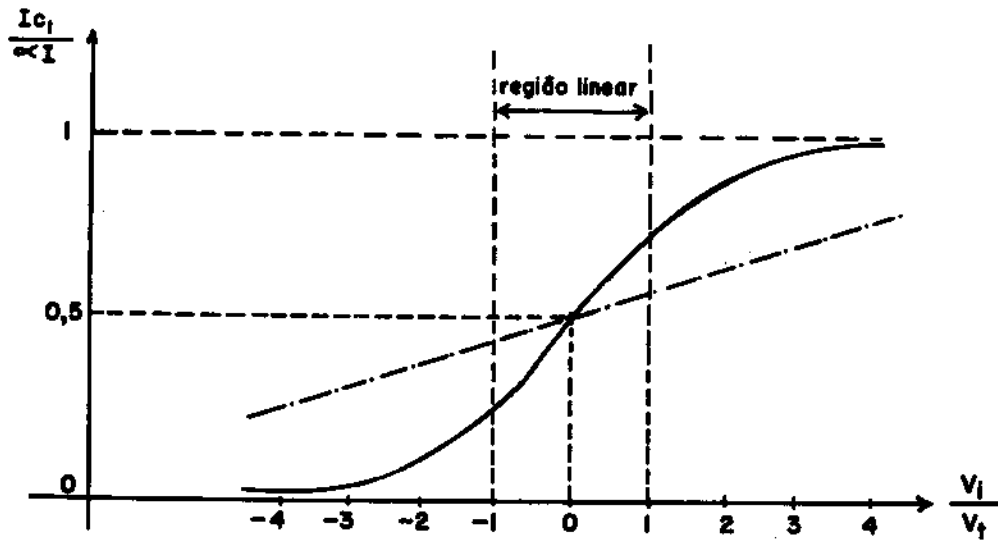
Teremos:

$$I_{C_2} = \frac{\alpha I}{1 + e^{\frac{V_i}{V_T}}}$$

Chama-se de "Característica de Transferência do LTP" à relação  $\frac{I_{C_1}}{V_i}$ .

Expressão:

$$\frac{I_{C_1}}{\alpha I} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{V_i}{V_T}}}$$



Então, temos que:

- 1) A Característica de Transferência é, praticamente, linear para uma variação de:

$$-1 \leq \frac{V_i}{V_T} \leq +1$$

$$-V_T \leq V_i \leq V_T$$

- 2) Uma limitação ou saturação ocorre logo para:  $\frac{V_i}{V_T} \cong 4$ .

Para um valor aproximado de 100 mV para  $V_i$  há saturação. Então o LTP pode ser utilizado como Circuito Limitador. A inclinação da curva corresponde à relação:



$$\frac{\Delta I_{C_1}}{\Delta V_i}$$

Por definição: A Transcondutância do LTP ( $g_m$ ) é dada pela expressão:

$$g_m = \frac{dI_{C_1}}{dV_i}$$

Cálculo da Transcondutância  $g_m$ :

$$g_m = \frac{-\alpha I \left( e^{-\frac{V_i}{V_T}} \right) \times \left( -\frac{1}{V_T} \right) \frac{\alpha I}{V_T} \cdot e^{-\frac{V_i}{V_T}}}{\left[ 1 + \left( -\frac{V_i}{V_T} \right) \right]^2} = \frac{\frac{\alpha I}{V_T} \cdot e^{-\frac{V_i}{V_T}}}{\left( 1 + e^{-\frac{V_i}{V_T}} \right)^2}$$

O máximo de  $g_m$  ocorre quando  $V_i = 0$ .

Então, temos:

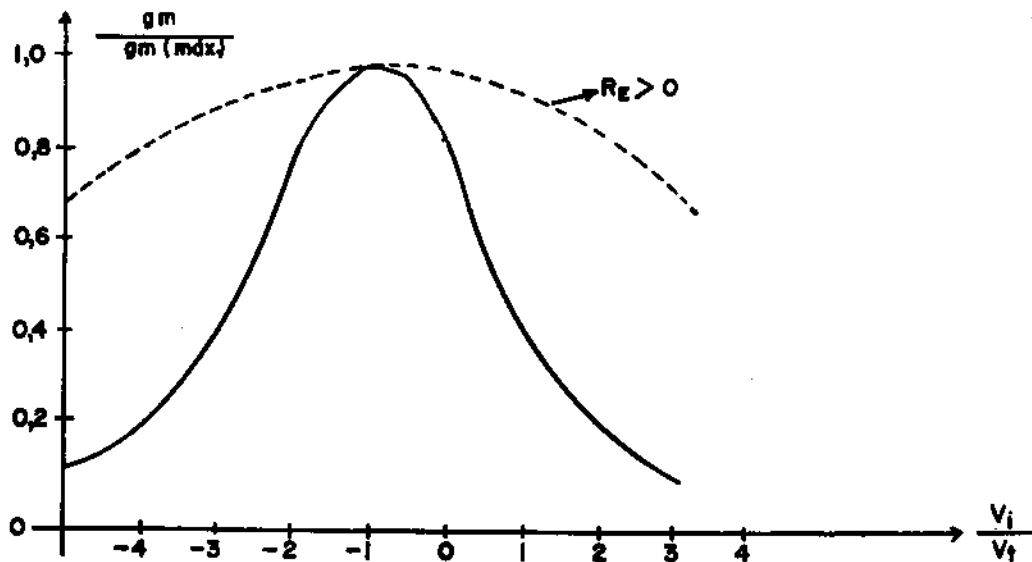
$$g_m(\text{máximo}) = \frac{\frac{\alpha I}{V_T}}{4} = \frac{\alpha I}{4 V_T}$$

A Transcondutância na região linear é praticamente constante.

A Transcondutância normalizada em relação ao valor máximo, será:

$$\frac{g_m}{g_m(\text{máx})} = \frac{4 e^{-\frac{V_i}{V_T}}}{\left( 1 + e^{-\frac{V_i}{V_T}} \right)^2}$$

O seguinte Gráfico mostra a Curva Normalizada:



Vimos que:

$g_m$  é função da Fonte de Corrente I. O Circuito é, então, um Controlador de Ganho.

Vimos que:

$$g_m = \frac{\alpha I}{V_T} f(V_i), \quad \text{e} \quad g_m = \frac{dI_{C_1}}{dV_i} = \frac{i_{C_1}}{v_i}$$

Ou seja, na faixa linear, pode-se dizer que:

$$i_{C_1} = g_{m(\max)} \times v_i$$

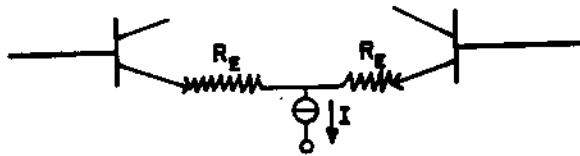
Assumindo, na faixa linear, um valor constante, praticamente, igual a  $g_{m(\max)}$ , temos:

$$i_{C_1} = \frac{\alpha}{4 V_T} \cdot I \times v_i$$

Isto significa que se adicionarmos a uma Fonte de Corrente I um sinal A.C., este sinal A.C. irá aparecer multiplicado por  $v_i$ .

Conseqüentemente, pode-se Multiplicar Dois Sinais A.C., bem como Modular em Amplitude, Detetar, Misturar, etc.

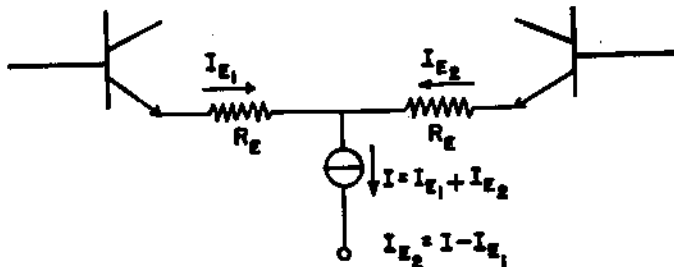
Para melhorar a linearidade dessas duas características, o que se faz é adicionar resistores  $R_E$  idênticos em série com os emissores. Seja a representação seguinte:



A introdução d'esses resistores modifica as características mostradas nas duas figuras anteriores e correspondendo à parte tracejada. Com a presença de  $R_E$  existe uma tensão adicional  $\Delta V_i$ :

$$\begin{aligned}\Delta V_i &= R_E(I_{E_1} - I_{E_2}) = (2 I_{E_1} - I)R_E = \\ &= \left(2 \frac{I_{C_1}}{\alpha} - I\right) \cdot R_E\end{aligned}$$

Temos o Gráfico:



Se considerarmos a resistência de base  $r_{bb'}$ , e a resistência de contacto  $r_E$  temos:

$$\Delta V_i = \left(2 \frac{I_C}{\alpha} - I\right) \left[R_E + r_E + (1-\alpha) r_{bb'}\right]$$

O acréscimo  $\Delta V_i$  deve ser somado ao sinal  $V_i$ .

Já vimos que:

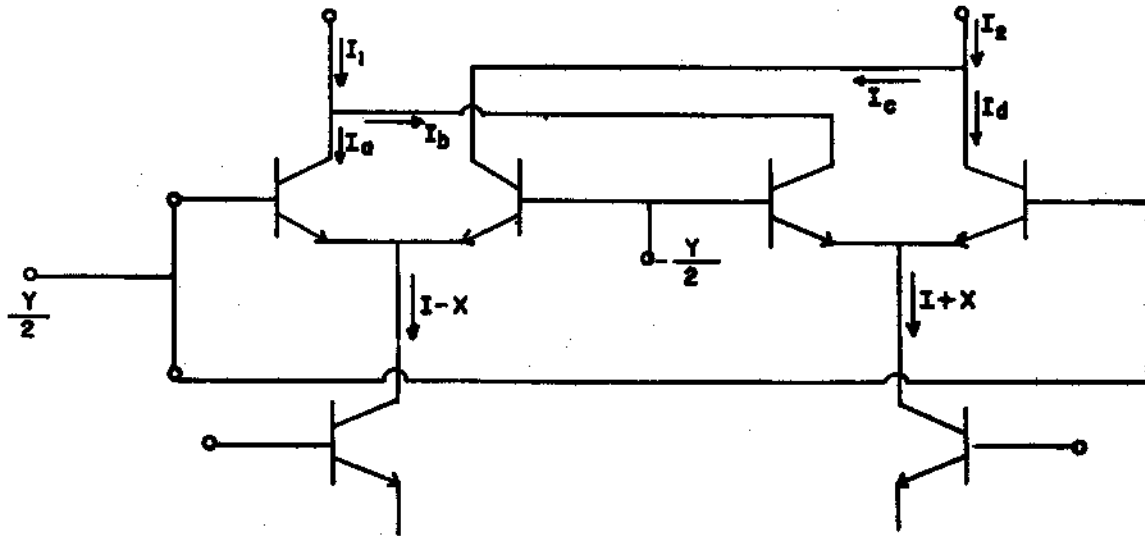
$$i_{C_1} = \frac{\alpha}{4 V_T} I \cdot v_i$$

Onde sempre se tinha o produto  $(I_{DC} + I_{AC}) \cdot v_i$  no qual o termo  $I_{DC} \cdot v_i$  representava um inconveniente.

Para eliminar êste inconveniente faz-se uma conexão de dois LTP's. Esta conexão

é conhecida como "Cross Coupled-Collectors".

Vejam os a configuração de LTP<sub>S</sub> com Cross Coupled-Collectors:



Deseja-se obter o produto dos sinais X e Y que são dois sinais alternados. O sinal Y é alimentado nas bases externas dos dois LTP<sub>S</sub> com um sinal  $+Y/2$ , portanto a metade da amplitude, e nas bases internas com um sinal  $-Y/2$ . O sinal X é sobrepôsto a uma fonte de corrente I num dos LTP<sub>S</sub> e é sobrepôsto, com uma inversão de  $180^\circ$  de fase, no outro LTP.

Já vimos que a corrente de coletor, dada pela expressão acima, possui o fator:

$$\frac{\alpha}{4 V_T}$$

Este fator depende, exclusivamente do transistor e da temperatura; portanto, se estamos a uma mesma temperatura e usando transistores idênticos, esse fator é constante. A par do fator mencionado acima, o valor da corrente de cada coletor é dado pelo correspondente produto do tail-current com o sinal de entrada  $v_i$  do LTP.

Então, a corrente de coletor  $I_a$  é obtida pelo produto do tail current do primeiro LTP, cujo valor é  $(I-X)$ , com o sinal de entrada, que é a diferença de tensão entre as duas bases e cujo valor é Y.

Temos para  $I_a$ :  $I_a = (I - X) Y$  onde:  $Y/2 - (-Y/2) = Y$

E, análogamente:

$$I_b = (I + X) (-Y)$$

$$I_c = (I - X) (-Y)$$

$$I_d = (I + X) Y$$

Temos, ainda, que:

$$I_1 = I_a + I_b$$

$$I_2 = I_c + I_d$$

Portanto:

$$I_1 = (I - X) Y + (I + X) (-Y) = IY - XY - IY - XY = -2XY$$

$$I_2 = (I - X) (-Y) + (I + X) Y = -IY + XY + IY + XY = 2XY$$

Então, aquele termo que queríamos evitar, ou seja  $IY$ , realmente desaparece. Há, ainda, a considerar o fator:  $\frac{\alpha}{4 V_T}$ .

Assim, ficamos com:

$$I_1 = -2XY \cdot \frac{\alpha}{4 V_T}$$

$$I_2 = 2XY \cdot \frac{\alpha}{4 V_T}$$

ou:

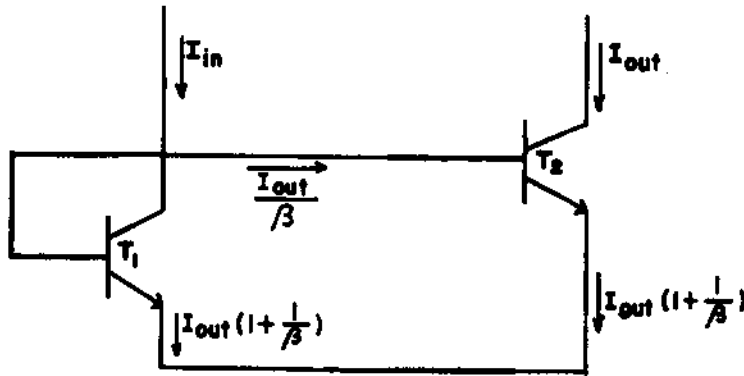
$$\frac{4 V_T}{\alpha} \cdot I_1 = -2 X Y$$

$$\frac{4 V_T}{\alpha} \cdot I_2 = 2 X Y$$

Veremos, agora, como Estabilizar ou Melhorar a Performance de algumas Fontes de Corrente que são Módulos Integrados muito usados:

1) Fonte de Corrente controlada por uma Fonte de Corrente

Seja o circuito:



$I_{in}$  já pode ser uma Fonte de Corrente construída por um método qualquer.  $I_{out}$  deve ser o  $I_{in}$  multiplicado por um fator constante, tal que o  $I_{out}$  tenha melhores propriedades que o  $I_{in}$ .

Podemos querer, por exemplo, que o  $I_{out}$  seja igual ao  $I_{in}$ , mas que seja mais constante, mais preciso e com maior impedância de saída. Isto chama-se de Fonte de Corrente controlada por uma Fonte de Corrente.

Vejamos a determinação da relação entre  $I_{out}$  e  $I_{in}$ .

Os Transistores  $T_1$  e  $T_2$  são supostos idênticos, i.é, têm a mesma área de emissor e têm a mesma corrente  $I_0$ , que é a corrente de fuga da junção base-emissor. Se  $\beta$  for o ganho de  $T_2$ , a corrente de coletor  $I_{out}$  vai aparecer na base do transistor  $T_2$  como  $\frac{I_{out}}{\beta}$ . A corrente de emissor de  $T_2$  será, então, igual a  $I_{out} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ .

Devido ao fato de os transistores  $T_1$  e  $T_2$  serem iguais, e por terem as tensões base-emissor iguais, então a corrente de emissor de  $T_1$  será igual à de  $T_2$ . Portanto, a corrente de emissor de  $T_1$  também será igual a  $I_{out} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ . A corrente  $I_{in}$  será:

$$I_{in} = \frac{I_{out}}{\beta} + I_{out} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

ou:

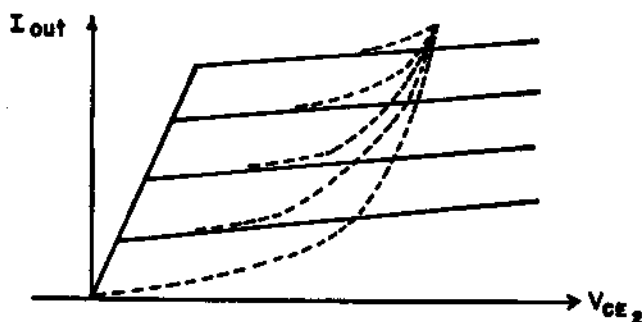
$$I_{in} = I_{out} \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{\beta+1}{\beta} \right] = I_{out} \frac{\beta+2}{\beta}$$

Donde:

$$\frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{\beta}{\beta+2}$$

Se  $\beta \gg 2$  então  $\frac{I_{out}}{I_{in}} \cong 1$ , ou seja, a corrente  $I_{out}$  é uma reprodução quase fiel de  $I_{in}$  se  $\beta \gg 2$ .

Traçando as características de  $I_{out}$  em função de  $V_{CE_2}$ , temos



As curvas pontilhadas são para um só transistor; as curvas contínuas referem-se ao circuito da figura anterior.

Uma propriedade importante a conhecer é que a presença do "Early-Effect" faz a corrente de coletor variar com a tensão  $V_{CE}$ . Em outras palavras, significa dizer que a impedância de saída de um transistor não é de valor infinito, exatamente devido ao Early-effect. O valor da impedância de saída da Fonte de Corrente também não é infinito. E ela melhora muito pouco. Essa Fonte de Corrente tem uma impedância de saída dada pela inclinação da curva muito pouco diferente da característica de um transistor único. Portanto, ainda não conseguimos aumentar a impedância de saída com o circuito anterior dessa primeira Fonte de Corrente. Mas conseguimos aumentar o termo "Breakdown Voltage" consideravelmente.

Enquanto tínhamos um transistor único:  $B V_{CE_0} \cong 0,2 B V_{CB_0}$ .

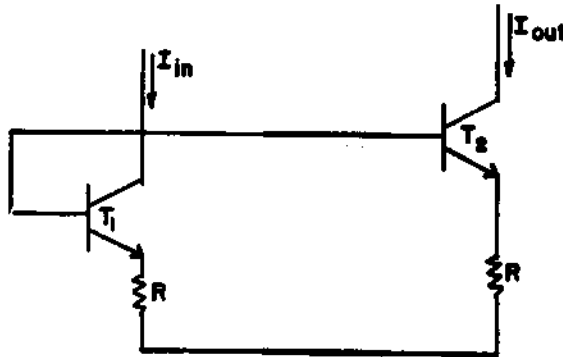
Essa Fonte de Corrente aumenta o Breakdown para, aproximadamente, o valor:

$$BV_{CEO} \approx 0,6 BV_{CBO}$$

Portanto este novo valor é igual a três vezes o valor anterior. Significa que temos, ainda, um  $I_{out}$  igual a um  $I_{in}$  numa faixa maior de  $V_{CE}$ .

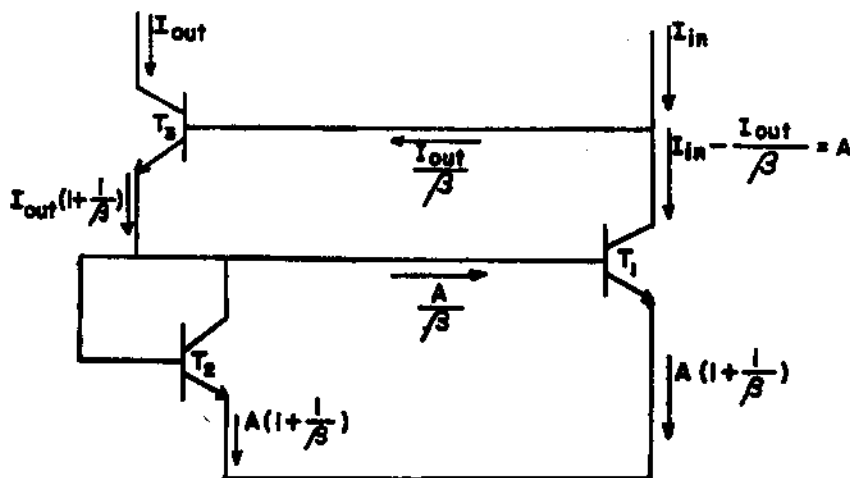
O circuito que nos aumenta a impedância de saída é obtido, simplesmente, pela colocação de resistores idênticos nos terminais dos dois emissores dos dois transistores.

Assim, temos o novo circuito:



O circuito acima não é muito usado, razão porque veremos o seguinte circuito que é obtido pela introdução de um terceiro transistor  $T_3$ , para melhorar a resposta da Fonte de Corrente.

E o circuito será:





Nêste circuito a corrente  $I_{in}$  deve passar a ser regulada.

Vejamõs a relação  $\frac{I_{out}}{I_{in}}$ .

Se  $\beta_1$  fôr o ganho, então, na base de  $T_2$  a corrente serã  $\frac{I_{out}}{\beta}$  e no emissor a corrente serã  $I_{out}(1 + \frac{1}{\beta})$ . A corrente de coletor de  $T_1$  é:  $I_{in} - \frac{I_{out}}{\beta} = A$ .

Se  $A$  é a corrente de coletor de  $T_1$ , então a corrente de base de  $T_1$  é  $\frac{A}{\beta}$  e a de emissor é  $A(1 + \frac{1}{\beta})$ . Novamente, sendo  $T_1$  idêntico a  $T_2$  e por terem a mesma tensão base-emissor, a corrente de emissor de  $T_2$  serã igual à de emissor de  $T_1$  e portanto é:  $A(1 + \frac{1}{\beta})$ . Como a corrente que chega é igual à que sai, temos:

$$I_{out} \frac{\beta+1}{\beta} = \frac{A}{\beta} + A \left( \frac{\beta+1}{\beta} \right)$$

daí:

$$I_{out} (\beta+1) = A(\beta+2)$$

Como  $A = I_{in} - \frac{I_{out}}{\beta}$ , ficamos com  $I_{out} \frac{\beta+1}{\beta+2} = I_{in} - \frac{I_{out}}{\beta}$

ou:

$$I_{out} \left[ \frac{\beta+1}{\beta+2} + \frac{1}{\beta} \right] = I_{in}$$

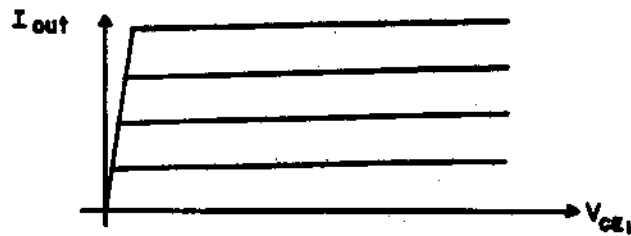
$$I_{out} \frac{\beta^2 + \beta + \beta + 2}{\beta^2 + 2\beta} = I_{in}$$

donde:

$$\frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{\beta^2 + 2\beta}{\beta^2 + 2\beta + 2}$$

Então, enquanto, no caso anterior, tínhamos que  $\frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{\beta}{\beta+2} \approx 1$  ou seja  $I_{out}$  era exatamente igual a  $I_{in}$  quando  $\beta \gg 2$ .

Agora, a condição é que  $(\beta^2 + 2\beta) \gg 2$ . Esta condição é muito mais fácil de ocorrer do que a anterior. Significa que esta Fonte de Corrente reproduz muito melhor  $I_{in}$  do que a anterior. É uma Fonte de Corrente melhor. Isto pode ser constatado fazendo as medições de  $I_{out}$  em função de  $V_{CE1}$ . Vamos, então, obter curvas muito mais horizontais e uma impedância de saída muito maior. Temos a figura:

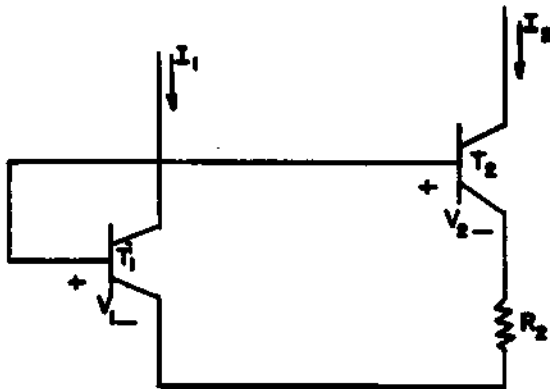


Agora o nosso Breakdown também aumentou e passa a ser, aproximadamente, o valor:

$$BV_{CEO} \cong 0,8 BV_{CBO}$$

O inconveniente nêstes dois tipos de Fontes de Corrente é que o valor de  $I_{out}$  é exatamente igual ao valor de  $I_{in}$  e se o nosso  $I_{in}$  fôr indesejável não adiantou nada obter  $I_{in}$  mais preciso e mais estável porém de mesmo valor. Se o nosso  $I_{in}$  fôr grande e estivermos interessados em um valor pequeno, então essa Fonte de Corrente não resolve. Temos, então, de procurar uma solução que nos reduza o valor de  $I_{out}$ , ou seja, tal que o valor de  $I_{in}$  nos apareça reduzida por um fator qualquer. Procuraremos, então, um novo elemento que modifique essa relação  $I_{out}/I_{in}$ .

Para conseguirmos pequenas correntes de saída, a solução é obtida, simplesmente, pela introdução de um resistor  $R_2$  no emissor de  $T_2$ , apenas. Temos, então, o circuito:



Chamemos de:  $V_1$ , a tensão base-emissor externa de  $T_1$ ;

$V_2$ , a tensão base-emissor externa de  $T_2$ .

Vamos supor que as intensidades de corrente, sejam mais que suficientes para que possamos desprezar as resistências de base, de contacto, de corpo de emissor, de tal modo que  $V_1$  seja, exclusivamente, dado por:

$$V_1 = \frac{KT}{q} \lg e \frac{I_1}{I_{01}} \quad (a)$$

Analogamente, supondo, ainda, a mesma temperatura:

$$V_2 = \frac{KT}{q} \lg e \frac{I_2}{I_{02}} \quad (b)$$

Para (a) e (b) supomos que as correntes de base são muito pequenas de tal modo que as correntes de emissor de  $T_1$  e  $T_2$  são, respectivamente,  $I_1$  e  $I_2$  e as correntes de fuga são, respectivamente,  $I_{01}$  e  $I_{02}$ .

Supondo que os transistores são idênticos, temos:  $I_{01} = I_{02}$ .

Da figura, observa-se que:  $V_1 = V_2 + I_2 \cdot R_2$

Significa que:

$$V_1 - V_2 = I_2 \cdot R_2 \quad (c)$$

Por outro lado, de (a) e (b) tiramos a expressão:

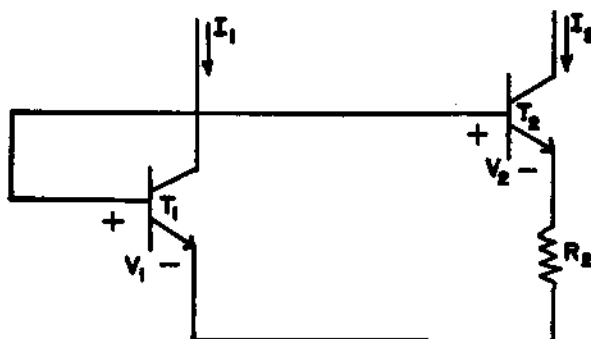
$$V_1 - V_2 = \frac{KT}{q} \lg e \frac{I_1}{I_2} \quad (d)$$

Com este tipo de Fonte de Corrente, podemos obter correntes da ordem de algumas dezenas de microamperes, utilizando resistências de, apenas, alguns quilo-ohms.

Vamos estudar, agora, a Sensibilidade às Variações de Temperatura e às Variações da Fonte de Alimentação.

Estamos interessados em saber quanto é que varia a Corrente quando a Temperatura e a Fonte de Alimentação variam. É um problema importante em Circuitos Integrados, onde a Temperatura se propaga, igualmente, em todo o "Chip".

Seja calcular a Sensibilidade, considerando a variação da Temperatura e da Fonte de Alimentação do circuito; seja o circuito:



Já vimos que a Tensão base-emissor  $V_1$  é dada por:

$$V_1 = \frac{KT}{q} \ln e \frac{I_1}{I_0}$$

Derivando, parcialmente,  $V_1$  em relação a  $T$ , supondo os outros elementos constantes, e, ainda, lembrando que  $I_0$  varia fortemente com a temperatura:

$$\left( \frac{\partial V_1}{\partial T} \right)_{I_1 = \text{cte.}} = - \frac{V_g' - V_1}{T}$$

Vemos, então, que é função do próprio  $V_1$  e da temperatura  $T$ .  $V_g'$  é o "Band gap" do silício. Então:  $V_g' = 1,25$  volts.

$V_g'$  é uma constante do material na temperatura ambiente.

Para o valor típico  $V_1 = 0,65$  volts (na junção base-emissor do transistor de silício) e para a temperatura ambiente  $T = 300^\circ\text{K}$ , temos que:

$$\frac{\partial V_1}{\partial T} = - \frac{1,25 - 0,65}{300} = - \frac{0,6}{300} = - 2 \text{ mV}/^\circ\text{C}$$

Este é o valor da variação de  $V_1$  com a temperatura para o exemplo dado.

Considerando agora:

$$\left( \frac{\partial V_1}{\partial I_1} \right)_{T=\text{cte}} = \frac{KT}{q} \frac{\frac{1}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}} = \frac{KT}{q} \cdot \frac{1}{I_1}$$

A Diferencial Total de  $V_1$  é:

$$dV_1 = \frac{\partial V_1}{\partial T} dT + \frac{\partial V_1}{\partial I_1} dI_1 \quad \text{ou,}$$

$$dV_1 = - \frac{V_g' - V_1}{T} dT + \frac{KT}{q} \cdot \frac{1}{I_1} dI_1$$

Analogamente, temos:

$$dV_2 = - \frac{V_g' - V_2}{T} dT + \frac{KT}{q} \cdot \frac{1}{I_2} dI_2$$

e:

$$V_1 - V_2 = I_2 R_2$$

$$d(V_1 - V_2) = d(I_2 R_2)$$

$$\text{Então: } dV_1 - dV_2 = I_2 dR_2 + R_2 dI_2$$

Mas:

$$dV_1 - dV_2 = \frac{dT}{T} (-V_g' + V_1 + V_g' - V_2) + \frac{KT}{q} \left( \frac{dI_1}{I_1} - \frac{dI_2}{I_2} \right)$$

$$I_2 dR_2 + R_2 dI_2 = I_2 R_2 \frac{dT}{T} + \frac{KT}{q} \frac{dI_1}{I_1} - \frac{KT}{q} \frac{dI_2}{I_2}$$

Dividindo todos os termos por  $I_2 R_2$ , temos:

$$\frac{dR_2}{R_2} + \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{KT}{q}}{I_2 R_2} \cdot \frac{dI_1}{I_1} - \frac{\frac{KT}{q}}{I_2 R_2} \frac{dI_2}{I_2}$$

ou:

$$\frac{dI_2}{I_2} \left[ 1 + \frac{\frac{KT}{q}}{I_2 R_2} \right] = \frac{dT}{T} - \frac{dR_2}{R_2} + \frac{\frac{KT}{q}}{I_2 R_2} \frac{dI_1}{I_1}$$

A equação acima se presta para a Análise da Sensibilidade às Variações da Temperatura e da Fonte de Alimentação.

### 1) SENSIBILIDADE ÀS VARIAÇÕES DA FONTE DE ALIMENTAÇÃO

Quando estamos estudando a sensibilidade às variações da Fonte de Alimentação, queremos saber qual é a influência, exclusivamente, devido às variações na Fonte de Alimentação no seu desempenho; então, vamos considerar os outros elementos constantes, ou seja, vamos considerar nula a Diferencial de  $R_2$ , uma vez que  $R_2$  não deve variar com a Fonte de Alimentação e, também, a Diferencial de

T deve ser nula, pois não consideramos a variação de Temperatura neste caso. Então, ficamos com:

$$\frac{dI_2}{I_2} = \frac{KT/q}{I_2 R_2} \frac{dI_1}{I_1} - \frac{KT/q}{I_2 R_2} \frac{dI_2}{I_2}$$

ou:

$$\frac{dI_2}{I_2} \left[ 1 + \frac{KT/q}{I_2 R_2} \right] = \frac{KT/q}{I_2 R_2} \frac{dI_1}{I_1}$$

Temos, pois, a expressão que dá a relação entre as variações relativas:

$$\frac{\frac{dI_2}{I_2}}{\frac{dI_1}{I_1}} = \frac{KT}{I_2 R_2 + \frac{KT}{q}}$$

### Conclusões:

- a) Se a variação da Fonte de Alimentação provocou a variação da corrente  $I_1$ , a variação de  $I_1$  aparecerá em  $I_2$  atenuada, uma vez que este fator dado por  $I_2 R_2$  é menor que a unidade. A variação da Fonte de Alimentação é atenuada em  $I_2$ . Diminuímos, então, a influência da Fonte de Alimentação em nossa Resposta.
- b) Essa Atenuação é tanto maior quanto maior for o termo  $I_2 R_2$ .

## 2) SENSIBILIDADE ÀS VARIAÇÕES DA TEMPERATURA

Vimos que:

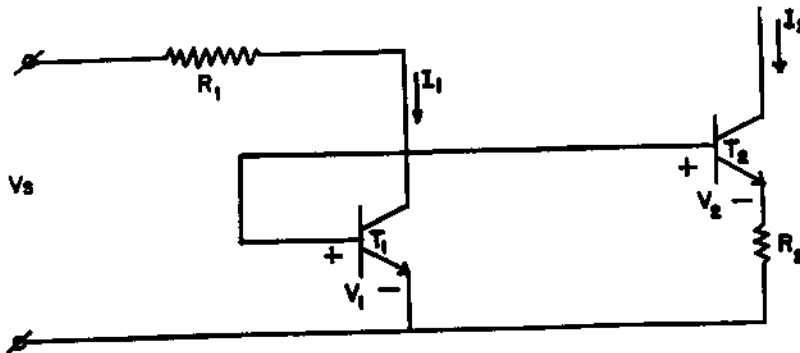
$$V_1 = V_2 + I_2 R_2 \quad (1)$$

$$dV_1 = - \frac{V_1' - V_1}{T} dT + \frac{KT}{q} \frac{dI_1}{I_1} \quad (2)$$

$$dV_2 = - \frac{V_2' - V_2}{T} dT + \frac{KT}{q} \frac{dI_2}{I_2} \quad (3)$$

$$\frac{dI_2}{I_2} = \left( 1 + \frac{KT}{I_2 R_2} \right) \frac{dT}{T} - \frac{dR_2}{R_2} + \frac{KT}{q} \frac{dI_1}{I_1} \quad (4)$$

Seja o circuito abaixo:



Todas as equações, anteriormente deduzidas, contínuas, continuam válidas; somente, vamos introduzir o fator  $V_S$  em nossos cálculos. Pela figura, temos:

$$V_S = R_1 I_1 + V_1 \therefore V_S - V_1 = R_1 I_1$$

$$d(V_S - V_1) = dV_S - dV_1$$

Com a variação da temperatura, exclusivamente, a Diferencial de  $V_S$  será nula. Então, para  $dV_S = 0$ , temos:

$$d(V_S - V_1) - dV_1 = I_1 dR_1 + R_1 dI_1 \quad (5)$$

Trocando o sinal da expressão (2), temos:

$$-dV_1 = + \frac{V'_g - V_1}{T} dT - \frac{KT}{q} \frac{dI_1}{I_1} \quad (6)$$

Igualando as expressões (5) e (6) obtidas, temos:

$$\frac{V'_g - V_1}{T} dT - \frac{KT}{q} \frac{dI_1}{I_1} = I_1 dR_1 + R_1 dI_1$$

Dividindo ambos os membros por  $I_1 R_1$ , temos:

$$\frac{V'_g - V_1}{I_1 R_1} \frac{dT}{T} - \frac{KT/q}{I_1 R_1} \frac{dI_1}{I_1} = \frac{dR_1}{R_1} + \frac{dI_1}{I_1}$$

ou:

$$\frac{dI_1}{I_1} \left( 1 + \frac{KT/q}{I_1 R_1} \right) = - \frac{dR_1}{R_1} + \frac{V'_g - V_1}{I_1 R_1} \frac{dT}{T} \quad (7)$$

Supondo que:  $I_1 R_1 \gg V'_g - V_1 \gg \frac{KT}{q}$ .

A expressão (7) ficará:

$$\frac{dI_1}{I} \approx - \frac{dR_1}{R_1} \quad (8)$$

Considerando a expressão (8), teremos para a equação (4):

$$\frac{dI_2}{I_2} \left( 1 + \frac{KT}{q} \frac{1}{I_2 R_2} \right) = \frac{dT}{T} - \frac{dR_2}{R_2} - \frac{KT}{q} \frac{1}{I_2 R_2} \frac{dR_1}{R_1} \quad (9)$$

Dividindo a equação (9) por  $dT$  (variação de Temperatura), temos:

$$\frac{1}{I_2} \cdot \frac{dI_2}{dT} \left( 1 + \frac{KT}{q} \frac{1}{I_2 R_2} \right) = \frac{1}{T} - \frac{1}{R_2} \frac{dR_2}{dT} - \frac{KT}{q} \frac{1}{I_2 R_2} \cdot \frac{1}{R_1} \frac{dR_1}{dT} \quad (10)$$

Os Resistores  $R_1$  e  $R_2$  são construídos no mesmo cristal de silício, no qual é construído todo o circuito. Para os Resistores Monolíticos, temos:

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dT} \approx \text{constante} = 0,25\%/^{\circ}\text{C}$$

Considerando o termo formado por  $\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT}$  como tendo um valor constante, para  $R_1$  e  $R_2$ , temos que a expressão (10) ficará sendo:

$$\frac{1}{I_2} \cdot \frac{dI_2}{dT} \left( 1 + \frac{KT/q}{I_2 R_2} \right) = \frac{1}{T} - \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dT} \left( 1 + \frac{KT/q}{I_2 R_2} \right)$$

donde:

$$\frac{dI_2}{I_2} \frac{1}{dT} = \frac{1}{T} \cdot \frac{I_2 R_2}{I_2 R_2 + \frac{KT}{q}} - \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} \quad (11)$$

Esta expressão nos dá a Variação Percentual da Corrente  $I_2$  em função, exclusivamente, da Temperatura.