

MONOGRAFIAS

XXV

INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES COMPLEXAS

por

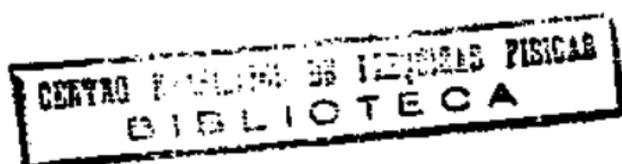
Luiz Adauto da Justa Medeiros

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71 - Botafogo - ZC-82

RIO DE JANEIRO, BRASIL

1970



P R E F Á C I O

Sob o título Introdução às Funções Complexas, reunimos alguns dos cursos sôbre êsse assunto, que tivemos a oportunidade de lecionar no Departamento de Matemática da Faculdade Nacional de Filosofia, no Instituto de Matemática da Universidade Federal da Paraíba e no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Trata-se de um texto introdutório, em nível de graduação, que foi escrito tendo o autor em mente torná-lo autosuficiente. Visando as aplicações achamos conveniente incluir um apêndice introdutório sôbre representação conforme, o qual pode ser omitido em um primeiro curso sôbre Funções Complexas.

Desejamos agradecer ao Professor Leopoldo Nachbin, pelo estímulo quando redigíamos êste texto, assim como pelo empenho em publicá-lo. Ao Professor Mário de Carvalho Matos, nosso agradecimento pelos comentários sôbre alguns capítulos.

Rio de Janeiro, maio de 1970

Luiz Adauto da Justa Medeiros
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

ÍNDICE

Página

CAPÍTULO 1

§1. NÚMEROS COMPLEXOS	4
1.1 Plano Complexo	9
1.2 Raiz de um Número Complexo	13
1.3 Projeção Estereográfica	18
§2. TOPOLOGIA DO PLANO COMPLEXO	23
§3. SUCESSÕES E SÉRIES NUMÉRICAS	40

CAPÍTULO 2

§1. LIMITE DE UMA FUNÇÃO	70
§2. FUNÇÕES CONTÍNUAS	74

CAPÍTULO 3

§1. DERIVADAS - FUNÇÕES HOLOMORFAS	83
§2. EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN	90
§3. REPRESENTAÇÃO CONFORME	98
§4. FUNÇÕES ELEMENTARES	103
§5. FUNÇÕES HOMOGRAFICAS	120

CAPÍTULO 4

§1. INTEGRAL DE FUNÇÕES COMPLEXAS. TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY	134
§2. FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY	146
§3. FUNÇÕES HARMÔNICAS	152
§4. TEOREMA DE LIOUVILLE. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA. PRINCÍPIO DO MÁXIMO	155

CAPÍTULO 5

§1. SÉRIES DE FUNÇÕES COMPLEXAS	163
§2. SÉRIES DE POTÊNCIAS	170

CAPÍTULO 6

§1. REPRESENTAÇÃO DE LAURENT	187
§2. SINGULARIDADES ISOLADAS DAS FUNÇÕES HOLOMORFAS ...	196
§3. RESÍDUOS - CÁLCULO DE INTEGRAIS REAIS - RESÍDUO LOGARÍTMICO - PRINCÍPIO DO ARGUMENTO - TEOREMA DE ROUCHÉ - TEOREMA DE HURWITZ - APLICAÇÕES.	215

APÊNDICE

§1. RESULTADOS INTRODUTÓRIOS	251
§2. FUNÇÕES UNIVALENTES	259
§3. FAMÍLIAS DE FUNÇÕES HOLOMORFAS - TEOREMA DE MONTEL	263
§4. REPRESENTAÇÃO CONFORME DE DOMÍNIOS SIMPLEMENTE CONEXOS	268
§5. PRINCÍPIO DE SIMETRIA - FÓRMULA DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL	277

CAPÍTULO 1

NÚMEROS COMPLEXOS. TOPOLOGIA DO PLANO COMPLEXO. SUCESSÕES E SÉRIES NUMÉRICAS.

INTRODUÇÃO - Faremos, inicialmente, um breve comentário sobre a evolução do conceito de número. A coleção de números com a qual trabalhamos pela primeira vez, é a coleção dos inteiros naturais, representada pela letra \mathbb{N} . Desta forma, escreve-se:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

Com o objetivo de estender a operação de subtração definida em \mathbb{N} , constroeu-se a coleção dos números inteiros, a qual representaremos pela letra \mathbb{Z} . Tem-se, portanto,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

Desta forma, a coleção \mathbb{Z} assim obtida é um grupo aditivo. Em \mathbb{Z} está definida uma multiplicação, relativamente à qual \mathbb{Z} apresenta certa anomalia, pois a divisão não é bem definida em \mathbb{Z} , ou seja, dados dois inteiros quaisquer $a, b, b \neq 0$, não podemos, em geral, encontrar o quociente de a por b , em \mathbb{Z} . Motivado por esta imperfeição, faz-se, a partir de \mathbb{Z} , a construção dos números racionais. Estes números são obtidos através de pares de números inteiros, com convenientes definições de adição e multiplicação, relativamente às quais, os racionais são um corpo, o qual será representado por \mathbb{Q} . Dado um número racional r , podemos pensá-lo como uma fração a/b , com $a, b, b \neq 0$,

pertencentes a \mathbb{Z} . Todavia, em \mathbb{Q} há certas imperfeições, como por exemplo, a equação $x^2 = 2$ não pode ser resolvida em \mathbb{Q} , isto é, o inteiro racional 2 não possui raiz quadrada em \mathbb{Q} , ou seja, $\sqrt{2}$ não pode ser representada por uma fração a/b , $b \neq 0$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Há vários métodos de cálculo nos conduzindo a números que não pertencem a \mathbb{Q} . Um exemplo simples, é dado quando se procura medir uma circunferência, tomando-se o diâmetro como unidade de medida. Como é sabido este problema nos conduz ao número π , que não pertence a \mathbb{Q} . Seguindo o método anteriormente esquematizado de usar o conhecimento adquirido, devemos, a partir dos números racionais, construir uma coleção mais ampla, na qual não exista a impossibilidade mencionada. Consegue-se isto, construindo o corpo dos números reais, o qual representa-se por \mathbb{R} .

Geomètricamente, os números reais são representados sôbre uma reta. Toma-se uma reta, escolhe-se um ponto sôbre ela ao qual faz-se corresponder o número zero. Então, tomando uma unidade de medida a uma orientação sôbre a reta, faz-se uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos desta reta. Uma tal reta onde estão representados os números reais, denomina-se reta real. Por esta razão, muitas vèzes usa-se uma linguagem geométrica, referindo-se aos números reais, como a reta numérica ou reta real.

Observe-se, que feita a construção de \mathbb{Z} , verifica-se que \mathbb{N} identifica-se ao semi grupo aditivo dos elementos positivos de \mathbb{Z} ; que \mathbb{Z} identifica-se a um domínio de integridade contido no corpo \mathbb{Q} e este último identifica-se a um sub corpo de

R. Escreve-se

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} ,$$

as inclusões possuindo o sentido mencionado anteriormente.

As propriedades de \mathbb{R} como corpo são as seguintes:

1) Em \mathbb{R} está definida uma operação

$$(a,b) \longrightarrow a+b \text{ de } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

denominada adição. satisfazendo às seguintes condições:

Propriedade Comutativa: $a + b = b + a$

Propriedade Associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Existe em \mathbb{R} um elemento 0, denominado identidade para a adição. tal que $0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe o simétrico $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$.

2) Em \mathbb{R} está definida uma operação

$$(a,b) \longrightarrow ab \text{ de } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

denominada multiplicação, satisfazendo às seguintes condições:

Propriedade Comutativa: $ab = ba$

Propriedade Associativa: $(ab)c = a(bc)$

Existe em \mathbb{R} um elemento 1, denominado identidade para a multiplicação, tal que $1a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, possui um inverso $a^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $a \bar{a}^{-1} = 1$. Representa-se \bar{a}^{-1} , muitas vezes, por $1/a$.

3) Distributividade da multiplicação em relação a adição. Se a, b, c fôrem três elementos quaisquer de \mathbb{R} , vale a lei dis

tributiva, isto é,

$$a(b + c) = ab + ac$$

No corpo \mathbb{R} dos números reais, dado um qualquer elemento x , tem-se sempre $x^2 \geq 0$. Daí resulta que a equação

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

não possui solução em \mathbb{R} . Tomando esta impossibilidade como motivação, constroem-se, a partir de \mathbb{R} , um corpo, no qual seja possível resolver a equação (1), contendo um sub corpo isomorfo a \mathbb{R} . O corpo assim obtido será denominado corpo dos números complexos, cuja construção faremos a seguir.

§1. NÚMEROS COMPLEXOS

Consideremos a coleção de todos os pares (a,b) , sendo a,b números reais, algebrizada como segue:

Igualdade - Diz-se que $(a,b) = (c,d)$ quando $a = c$, $b = d$.

Adição - Dados (a,b) , (c,d) , denomina-se soma destes pares e representa-se por $(a,b) + (c,d)$, ao par $(a+c, b+d)$.

Multiplicação - Dados (a,b) , (c,d) , denomina-se produto destes pares e representa-se por $(a,b).(c,d)$, ao par $(ac-bd, ad + bc)$.

Verifica-se, sem dificuldade, que estas operações são comutativas; associativas; o par $(0,0)$ é a identidade para a adição; o par $(-a, -b)$ é o simétrico de (a,b) ; o par $(1,0)$ é a identidade da multiplicação e vale a lei distributiva. A exis-

tência do inverso relativo a multiplicação, demonstraremos a seguir. Seja $(a,b) \neq (0,0)$ e provemos que existe um par (x,y) tal que $(a,b)(x,y) = (1,0)$. De fato, fazendo a multiplicação indicada, obtem-se o sistema $ax-by = 1$, $bx + ay = 0$, o qual possui solução, porque o seu determinante $a^2 + b^2 \neq 0$, pois $(a,b) \neq (0,0)$, por hipótese. Resolvendo este sistema, obtem-se:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

para componentes do par inverso de (a,b) . Resulta, portanto, que a coleção dos pares (a,b) de números reais assim algebrizado, é um corpo.

DEFINIÇÃO 1. Denomina-se corpo dos números complexos, representando-o por \mathbb{C} , a coleção de pares de números reais algebrizada anteriormente. Os elementos de \mathbb{C} são denominados números complexos.

Vejamos como podemos relacionar \mathbb{R} com \mathbb{C} . Seja \mathbb{C}_0 o sub corpo de \mathbb{C} constituído pelos elementos da forma $(a,0)$. Consideremos a aplicação

$$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_0$$

definida por $\sigma(a) = (a,0)$. Tem-se que σ é biunívoca, sôbre e mantém as operações, isto é, σ é um isomorfismo entre \mathbb{R} e \mathbb{C}_0 . Por esta razão, identifica-se \mathbb{R} com \mathbb{C}_0 .

Demonstremos que em \mathbb{C} a equação (1) possui solução. De fato, em virtude da identificação entre \mathbb{R} e \mathbb{C}_0 , resolver a e-

quação (1) em \mathbb{C} , consiste em encontrar um número complexo (x,y) , tal que

$$((x,y))^2 + (1,0) = (0,0) \quad (2)$$

obtém-se daí,

$$(x^2 - y^2 + 1, 2xy) = (0,0)$$

isto é,

$$x^2 - y^2 + 1 = 0, \quad 2xy = 0 \quad (3)$$

Verifica-se, sem dificuldade, que as soluções do sistema (3) são

$$x = 0, y = 1; \quad x = 0, y = -1,$$

ou seja, as soluções de (2) são os números complexos $(0,1)$ e $(0,-1)$. O número complexo $(0,1)$ é representado pela letra i , isto é, $i = (0,1)$ e tem-se, por (2),

$$i^2 = -1 \quad (4)$$

O número complexo $(1,0)$ denomina-se unidade real e o número complexo $i = (0,1)$ é denominado unidade imaginária. Com base em (4), obtem-se $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Se p fôr um número natural maior do que quatro, tem-se $p = 4q + r$, sendo $0 \leq r < 4$. Quando $r = 0$, $i^p = i^{4q} = 1$ e se $0 < r < 4$, vem $i^p = i^{4q+r} = i^r$.

Observação 1. Como acabamos de demonstrar, a equação $z^2 + 1 = 0$ que não possui solução em \mathbb{R} , possui em \mathbb{C} as soluções $1, -1$. Poderíamos conjecturar sôbre a necessidade de fazer novas extensões de \mathbb{R} ou \mathbb{C} , tôda vez que desejássemos resolver uma equação algébrica. Todavia, esta impossibi-

lidade desaparece em \mathbb{C} , porque há um teorema devido a d'Alembert e Gauss, denominado teorema fundamental da Álgebra, que afirma: "Tôda equação

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

sendo a_0, a_1, \dots, a_n pertencentes a \mathbb{C} , possui solução em \mathbb{C} ." No momento admitiremos êste resultado, cuja demonstração será feita no capítulo 4, §4.

Dado o número complexo (a,b) , tem-se $(a,b) = (a,0) + (0,b)$. Sendo $(0,b) = (b,0)(0,1)$ e identificando $(a,0), (b,0)$ aos números reais a,b respectivamente, resulta que todo número complexo (a,b) escreve-se sob a forma

$$(a,b) = a + bi, \quad (5)$$

denominada forma binomial do número complexo (a,b) . A vantagem da forma (5) é podermos operar com os números complexos (a,b) como se fôsssem binômios $a+bx$, $x^2 = -1$, e coeficientes reais.

Ao número real a de $z = a + bi$ denomina-se a parte real de z , representando-a por $\text{Re}z$. Ao número real b , denomina-se parte imaginária e representa-se por $\text{Im}z$.

Exemplo: Seja $z = 1(1-2i)$. Tem-se $\text{Re}z = \text{Re}(2+i) = 2$.
 $\text{Im}z = \text{Im}(2+i) = 1$.

EXERCÍCIOS

Escreva sob a forma $a+bi$ os seguintes números complexos:

1. $(1+i)(1+i^3)(1+i)^{-1}$
2. $3(7+2i) - ((5+4i) + 1)i$
3. $(2-3i)^{-1} + i^{-1} + (1+i)(1-i)^{-1}$
4. $\left[(1-i)^3 + i^{157} \right] (1+i^5)^{-1}$.

DEFINIÇÃO 2. Dado o número complexo $z = a + bi$, denomina-se conjugado de z e representa-se por \bar{z} , o número complexo $\bar{z} = a - bi$.

EXERCÍCIOS

1. Demonstre as seguintes propriedades do conjugado:
 - a) O conjugado do conjugado de z é igual a z .
 - b) O conjugado da soma é igual a soma dos conjugados.
 - c) O conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados.
 - d) Se z for real, o conjugado de z é o próprio z .

2. Calcule o conjugado dos seguintes números complexos:
 $(2+i)^2 - (5-i)$; $(3-2i) - (1+i)(1-i)i$
 Se $z \neq 0$, calcule o conjugado de $1/z$.

3. Demonstre que

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - \bar{z}).$$

4. Se $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ um polinômio com coeficientes reais. Demonstre que se z_1 for raiz de $p(z) = 0$, então o conjugado de z_1 também será raiz desta equação.

5. Escreva sob a forma $\underline{a} + \underline{b}i$ o número complexo
 $z = (1-i)(1+i) i (2-3i)$.

1.1 PLANO COMPLEXO. Da definição de número complexo, resulta que podemos interpretá-los como sendo os pontos do plano cartesiano. Realmente, dar um número complexo $z = a+bi$ é dar um par ordenado (a,b) de números reais, portanto, é dar um ponto P do plano cartesiano \mathbb{R}^2 , cujas coordenadas são a e b , como é visto na Fig. 1.

Desta forma, podemos pensar em um número complexo $z = a+bi$ como sendo o ponto P do plano \mathbb{R}^2 com coordenadas a, b ou como o segmento orientado OP , isto é, o vetor

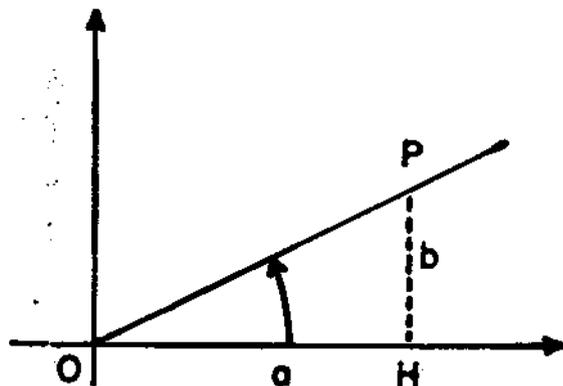


Fig. 1

localizado OP . O plano cartesiano \mathbb{R}^2 , no qual estão representados os números complexos, denomina-se o plano complexo.

DEFINIÇÃO 3. Denomina-se valor absoluto ou módulo de um número complexo $z = a+bi$, ao número real $|z|$ definido por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

DEFINIÇÃO 4. Denomina-se argumento do número complexo $z = a+bi$, ao ângulo θ que faz a direção positiva do eixo das abscissas com o vetor OP , sendo P o ponto do \mathbb{R}^2 com coordenadas (a,b) e O a origem do \mathbb{R}^2 . (cfr. Fig. 1).

Observe-se que, em geral, toma-se para argumento de z tanto θ como os ângulos que lhe sejam cômplementos módulo 2π , isto é, os aqueles da forma $\theta + 2k\pi$ sendo $k \in \mathbb{Z}$. Ao ângulo θ com-

preendido entre 0 e 2π , denomina-se determinação principal do argumento de z .

Note que $|z|$ interpreta-se geomêtricamente, como sendo o comprimento do vetor OP , o que resulta do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo OPH , como mostra a Fig. 1. Portanto,

$$a = |z| \cos \theta, \quad b = |z| \operatorname{sen} \theta$$

Dai resulta que todo número complexo $z = a+bi$ escreve-se em função de seu módulo e do seu argumento, sob a forma

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Esta última expressão para z , denomina-se forma polar ou forma trigonométrica de z .

Exemplo: Escreva sob a forma trigonométrica o número complexo $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Tem-se $|z| = 2$, $a = 1$, $b = \sqrt{3}$. Logo $\cos \theta = 1/2$, $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de onde conclui-se que $\theta = \pi/3$. Assim, obtem-se $z = 2(\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3)$.

EXERCÍCIOS

1. Escreva sob a forma trigonométrica os seguintes números complexos:

$$1+i; 1-i; (1+i)(1-i); (1-i)/(1-i).$$

2. Calcule o módulo do número complexo

$$z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

A seguir, serão demonstradas certas propriedades impor-

tantes do valor absoluto e do argumento de um número complexo. Antes, porém, observemos que $\operatorname{Re} z \leq |z|$ e $|z|^2 = z\bar{z}$.

PROPOSIÇÃO 2. Dados dois números complexos $z = a+bi$, $w = c + di$, tem-se:

$$1) |z \cdot w| = |z| |w|$$

$$2) |z+w| \leq |z| + |w|$$

$$3) ||z| - |w|| \leq |z-w|$$

Demonstração

$$1) |zw|^2 = zw \overline{zw} = z\bar{z} w\bar{w} = |z|^2 |w|^2, \text{ logo } |zw| = |z| |w|.$$

$$2) |z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$$

sendo $\operatorname{Re} z \leq |z|$, obtem-se

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}| = \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

3) Tem-se $|z| = |(z-w) + w| \leq |z-w| + |w|$ pela parte 2. Logo $|z| - |w| \leq |z-w|$. Permutando z e w obtem-se $- (|z| - |w|) \leq |z-w|$. As duas desigualdades provam a 3).

PROPOSIÇÃO 3: O argumento do produto de dois números complexos é igual a soma dos argumentos.

Demonstração

De fato, consideremos os números complexos z, w , sendo

$\theta = \operatorname{arg} z$, $\varphi = \operatorname{arg} w$. Tem-se

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad w = |w| (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

Fazendo o produto dos dois números complexos, obtem-se:

$$zw = |z| |w| [\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi)],$$

de onde resulta que o argumento de zw é $\theta + \varphi$, isto é,

$$\operatorname{arg} z \cdot w = \operatorname{arg} z + \operatorname{arg} w$$

Exemplo: Calcule o argumento de $i(1+i)$. Tem-se

$$\operatorname{arg} i(1+i) = \operatorname{arg} i + \operatorname{arg}(1+i) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule o argumento de $[i(1+i)]^{-1}$.

2. Prove que se $z \neq 0$, então

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}; \quad \operatorname{arg} \frac{1}{z} = -\operatorname{arg} z$$

$$\operatorname{arg} \frac{w}{z} = \operatorname{arg} w - \operatorname{arg} z; \quad \left| \frac{w}{z} \right| = \frac{|w|}{|z|}$$

3. Calcule o argumento dos seguintes números complexos:

$$(1+i)/(1-i)^4; (1+i)^5 (1+i\sqrt{3})^7; (1-i)^n, n \in \mathbb{Z}.$$

4. Sendo $\operatorname{arg} z = \theta$, calcule a forma trigonométrica de z^n com $n \in \mathbb{Z}$.

5. Se $z = a + bi$, $a \neq 0$, demonstre que $\operatorname{arg} z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

6. Dados n números complexos z_1, z_2, \dots, z_n , prove que

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$$

e

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n$$

7. Escreva sob a forma $a + bi$ o número complexo

$$\left[2^{1/9} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \right) \right]^{36}$$

8. Determine o número complexo z em cada um dos casos:

a) $\arg(z+i) = \frac{\pi}{4}$ e $|z| = 2$.

b) $\arg(z+1+i) = \frac{\pi}{4}$ e $|z|^2 = 2$.

9. Determine os números complexos sôbre a reta $y = 2x + 1$ com módulo $\sqrt{3}$.

1.2 RAIZ DE UM NÚMERO COMPLEXO - Diz-se que um número complexo z é raiz de índice n de um número complexo c , quando $z^n = c$, sendo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Aplicando a proposição 3, encontraremos um processo simples de calcular as raízes de índice n de um número complexo $c \neq 0$.

Iniciaremos calculando as raízes de índice n da unidade real, isto é, resolveremos a equação

$$z^n = 1 \tag{6}$$

Supondo $\theta = \arg z$, obtém-se $z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Logo, $z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$, pela proposição 3. Portanto,

para que z^n seja igual a 1, devemos ter

$$|z| = 1 \quad \text{e} \quad \theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, os números complexos soluções de (6) são dados por

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Vejamos que em (7) podemos restringir k a tomar apenas um número finito de valores inteiros. Sejam k' , k'' dois valores de k tais que $k'' - k'$ seja um múltiplo de n , índice da raiz, isto é, admitamos que $k'' - k' = pn$. Substituindo $k'' = k' + pn$ na expressão de $z_{k''}$ dada por (7), obtem-se $z_{k''} = z_{k'}$. Conclui-se, desta forma, que as n raízes da unidade podem ser obtidas pela (7), atribuindo a k apenas os valores $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Observe, também, que $|z_k| = 1$ para todo k e que

$$\arg z_{k+1} - \arg z_k = \frac{2\pi}{n}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2 \dots n-1$$

Consequentemente, conclui-se que as raízes z_0, z_1, \dots, z_{n-1} da unidade real, são os vértices de um polígono regular convexo de n lados, inscrito em uma circunferência de raio um e centro na origem.

Exemplo. Calcule as raízes da equação $z^6 = 1$. É suficiente calcular os valores de z_k para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, sendo

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{6}.$$

Obtem-se $z_0 = 1$; $z_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$; $z_2 = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$; $z_3 = -1$; $z_4 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$; $z_5 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$. Estes números complexos são os vértices de um hexágono regular convexo, inscrito em uma circunferência de raio um e centro na origem.

Retornemos ao problema geral de encontrar a raiz de c , sendo c um número complexo. Seja θ a determinação principal do argumento de c . Segue-se daí, que

$$z_0 = |c|^{1/n} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right)$$

é uma solução de $z^n = c$. Procuremos todos os números complexos w tais que $z_0 w$ sejam as soluções de $z^n = c$. Fazendo a substituição, encontra-se:

$$(z_0 w)^n = c \quad \text{ou} \quad z_0^n w^n = c, \quad \text{isto é, } w^n = 1.$$

Decorre daí, que os w procurados são as raízes da unidade real. Logo, sendo

$$|z_0 w| = |z_0| |w| = |c|^{1/n} \quad \text{e} \quad \arg z_0 w = \arg z_0 + \arg w = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$k=0, 1, 2, \dots, n-1$, segue-se que as n raízes de c são obtidas por

$$z_k = |c|^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (8)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Exemplo - Calcule as raízes de $z^3 = i$.

Tem-se $\theta = \arg i = \frac{\pi}{2}$ e $|i| = 1$. Portanto, substituindo em (8) e fazendo $k=0, 1, 2$, obtém-se:

$$z_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1); \quad z_1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1); \quad z_2 = -1.$$

EXERCÍCIOS

1. Interprete geometricamente, as n raízes de um número complexo c .

2. Calcule as raízes das equações:

$$z^4 = 3$$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$$z^5 = -1$$

$$z^6 + 16z^2 + 64 = 0$$

$$z^6 = i(1-i)$$

$$z^8 - 14z^4 + 48 = 0$$

$$z^4 - (1 + i\sqrt{3}) = 0$$

3. Se w for uma raiz n -ésima da unidade, prove que

$$1 + w^h + w^{2h} + \dots + w^{(n-1)h} = 0,$$

para todo inteiro n que não seja múltiplo de h .

4. Se w for uma raiz n -ésima da unidade, calcule

$$1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1}; \quad 1 + 4w + 9w^2 + \dots + n^2w^{n-1}.$$

Sugestão: Multiplique por $1-w$.

5. Determine uma condição necessária e suficiente sobre a, b reais, para que todas as raízes da equação

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^n = a + ib,$$

sejam reais.

Sugestão: Faça $z = x$ real.

6. Calcule $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$.

7. Se $z, w \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, prove que

$$\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1.$$

8. Se $z, w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, então

$$\left| \frac{z-w}{\bar{z}+w} \right| < 1.$$

Sugestão: Calcule $|w-z|^2 - |\bar{w}+z|^2$.

9. Dados os números complexos z, w , prove o seguinte:

a) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Interprete geometricamente esta identidade.

$$\text{b) } \frac{|z+w|}{1+|z+w|} \leq \frac{|z|}{1+|z|} + \frac{|w|}{1+|w|}.$$

10. Calcule as partes real e imaginária dos números complexos

$$(1+i)^{4k}; \quad (1+i)^{4k+2}.$$

11. Determine o argumento de $w = [z(z-1)(z-1)]^{1/2}$, sendo

$$z = (2 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})i.$$

12. Escreva sob a forma $a + bi$ os números complexos

$$(2+3i)^{\frac{1}{2}} + (7+2i)^{\frac{1}{2}}; \quad (3-5i)^{\frac{1}{2}} - (3-i)(2-3i)^{-1}.$$

13. Calcule os conjugados dos números complexos

$$(2 + 3i)^{\frac{1}{2}} (1 + 5i)^{-1} + (3+i).$$

14. Sejam z_1, z_2, z_3 números complexos. Prove que a parte real do determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \end{pmatrix}$$

é zero.

1.3 PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA - Consideremos o \mathbb{R}^3 com

a base ortonormal constituída pelos vetores $(1,0,0)$ $(0,1,0)$,

$(0,0,1)$. Seja S a

esfera de equação

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

O ponto $(0,0,1)$, per-

tencente a esfera,

denomina-se polo

norte de S e repre-

senta-se por N . Su-

ponhamos que o pla-

no complexo \mathbb{C} es-

teja identificado ao plano do \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores $(1,0,0)$

e $(0,1,0)$, como mostra a Fig. 2, de tal forma que a cada $z =$

$= x + iy$ de \mathbb{C} corresponde o ponto $(x,y,0)$ d'êste plano. Dado

um qualquer ponto P da esfera S , diferente de N , fica determi-

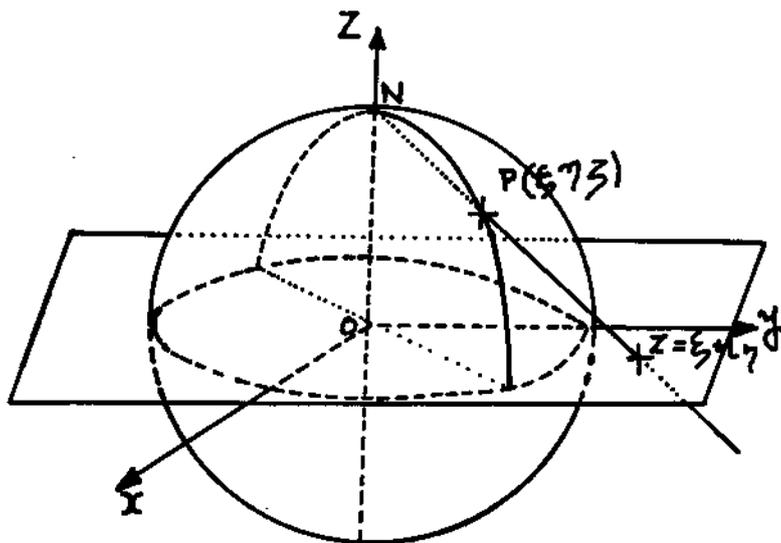


Fig. 2

nada uma semi-reta NP, a qual intersepta \mathbb{C} em um ponto z, sendo z único, evidentemente. Daí resulta, que fica bem definida uma aplicação $\sigma: S \rightarrow \mathbb{C}$, que a cada $P \in S$, $P \neq N$, faz corresponder o número complexo $z \in \mathbb{C}$, sendo z a interseção da semireta NP com o plano \mathbb{C} . A esta aplicação denomina-se projeção estereográfica da esfera S sobre o plano complexo \mathbb{C} . Representando por (ξ, η, ζ) as coordenadas de P, sendo (x, y, Z) um ponto do \mathbb{R}^3 e $(0, 0, 1)$ as coordenadas de N, segue-se que a equação da reta que passa por N e P é

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{Z-1}{\zeta-1} \quad (9)$$

Para obter as coordenadas de $\sigma(P) \in \mathbb{C}$, é suficiente resolver o sistema de equações formado por (9) com a equação $Z=0$ do plano \mathbb{C} . Obtém-se, fazendo $Z=0$ em (9), que

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}; \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad (10)$$

resultando que $\sigma(P) = z$, com

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta} \quad (11)$$

A aplicação $\sigma: S - \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ sendo biúnivoca e sobre, vamos calcular as equações da inversa σ^{-1} . Seja $z = x+iy$ um ponto de \mathbb{C} , e (ξ, η, ζ) as coordenadas de $P \in S$, sendo P a interseção de S com a reta determinadas pelos pontos z e N. Tem-se, pelo que acabamos de demonstrar, $z = \frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}$. Daí obtém-se, observando que $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$,

$$|z|^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\xi)^2} = \frac{1-\xi^2}{(1-\xi)^2} = \frac{1+\xi}{1-\xi}$$

resultando

$$\xi = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \quad (12)$$

Sendo $\bar{z} = \frac{\xi - i\eta}{1-\xi}$, $z + \bar{z} = \frac{2\xi}{1-\xi}$, isto é,

$$\xi = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \quad (13)$$

levando em conta a (12).

Substituindo ξ , η calculados através de (13) e (12) na equação da esfera S , obtém-se

$$\eta = - \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1} i \quad (14)$$

Desta forma, σ é uma aplicação biunívoca de S menos o polo norte N , em \mathbb{C} . Se desejarmos tornar σ biunívoca entre S e \mathbb{C} , é suficiente acrescentar a \mathbb{C} um elemento que representaremos por ∞ , denominado infinito, o qual será, por definição, o correspondente de N . Com esta convenção, σ será uma aplicação biunívoca de S sobre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Portanto, o plano complexo com mais o elemento ∞ , interpreta-se de maneira natural, como sendo a esfera unitária S do \mathbb{R}^3 . A esfera S na qual estão representados os números complexos mais o elemento ∞ , denomina-se esfera de Riemann. Para trabalharmos no plano complexo mais o elemento ∞ , deveríamos estender ao ∞ as

operações de adição e multiplicação definidas em \mathbb{C} . Entretanto não vamos trabalhar no plano \mathbb{C} com o elemento ∞ , exceto em alguns casos, nos quais avisaremos explicitamente.

O plano complexo \mathbb{C} com o elemento ∞ denomina-se plano complexo estendido. As regras de cálculo para ∞ são as seguintes: $z + \infty = \infty + z = \infty$, $z\infty = \infty z = \infty$, para $z \neq 0$ em \mathbb{C} . Convencionaremos escrever $z/0 = \infty$, $z \neq 0$, $z/\infty = 0$ com $z \neq 0$.

PROPOSIÇÃO 1. A tóda circunferência de \mathbb{C} corresponde por σ^{-1} a uma circunferência de S .

Demonstração

De fato, consideremos a circunferência $a(x^2 + y^2) + bx + cy = -d$ do plano complexo \mathbb{C} . Sendo (ξ, η, ζ) as coordenadas de P e $\sigma(P) = z = x + iy$, substituindo x, y dados por (12) na equação da circunferência anterior, obtém-se:

$$a \left[\frac{\xi^2}{(1-\zeta)^2} + \frac{\eta^2}{(1-\zeta)^2} \right] + b \frac{\xi}{1-\zeta} + c \frac{\eta}{1-\zeta} + d = 0.$$

Sendo $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, resulta que as coordenadas (ξ, η, ζ) de P também satisfazem a equação.

$$a(1+\zeta) + b\xi + c\eta + d(1-\zeta) = 0$$

que representa um plano do \mathbb{R}^3 , cuja interseção com S é uma circunferência.

PROPOSIÇÃO 2. A imagem por σ^{-1} de tóda reta de \mathbb{C} é uma circunferência de S passando pelo polo.

Demonstração

De fato, consideremos a reta $ax + by + c = 0$ do plano complexo \mathbb{C} . Sua imagem sôbre S por σ^{-1} é

$$a \left(\frac{\xi}{1-\zeta} \right) + b \left(\frac{\eta}{1-\zeta} \right) + c = 0 .$$

isto é, $a\xi + b\eta + c(1-\zeta) = 0$, que é um plano passando pelo polo $(0,0,1)$ de S . Sua interseção com S é uma circunferência passando pelo polo.

PROPOSIÇÃO 3. Toda circunferência sôbre a esfera, se transforma por σ em uma reta ou circunferência de plano complexo \mathbb{C} .

Demonstração

De fato, consideremos a circunferência sôbre a esfera: dada como solução do sistema

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1; \quad a\xi + b\eta + c\zeta = d$$

Substituindo ξ, η, ζ , dados por (13), (14), (12), na equação do plano, resulta

$$a \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \right) + b \left(-1 \frac{z - \bar{z}}{|z|^2 + 1} \right) + c \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z| + 1} \right) = d .$$

Obtém-se daí

$$2ax + 2by + c(|z|^2 - 1) - d(|z|^2 + 1) = 0 .$$

ou

$$(c-d)(x^2 + y^2) + 2ax + aby - (c+d) = 0 .$$

Logo $c \neq d$, a imagem em \mathbb{C} é uma circunferência e $c = d$ a imagem é uma reta.

EXERCÍCIOS

1. Demonstre que se P_1 e P_2 forem pontos diametralmente opostos sobre S , suas imagens $z_1 = \sigma(P_1)$, $z_2 = \sigma(P_2)$ em \mathbb{C} , satisfazem a condição $z_1 \bar{z}_2 = -1$.
2. Qual a imagem em S por σ^{-1} da circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 3 = 0$?
3. Qual a imagem em \mathbb{C} por σ do hemisfério norte de S ?
4. Qual a imagem em S por σ^{-1} do conjunto $\{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$?
5. Quais os pontos P de coordenadas (ξ, η, ζ) sobre S , tais que $\sigma(P) = z = \xi + i\eta$ em \mathbb{C} ? Estes pontos denominam-se pontos fixos de σ .

§2. TOPOLOGIA DO PLANO COMPLEXO

A noção de valor absoluto introduzida em \mathbb{C} , nos permite determinar quão próximos são dois números complexos. Através desta noção podemos definir os conceitos de disco aberto e disco fechado, os quais são básicos no estudo da topologia do plano complexo.

DEFINIÇÃO 1 Sejam z_0 um número complexo e ε um número real positivo. Denomina-se disco aberto (fechado) de \mathbb{C} com

centro z_0 e raio ε , a coleção de todos os números complexos z tais que $|z - z_0| < \varepsilon$, ($|z - z_0| \leq \varepsilon$).

Representa-se um disco aberto de raio ε e centro no ponto z_0 , pela notação $V_\varepsilon(z_0)$. Quando não fôr necessário explicitar o raio ε , escreveremos simplesmente $V(z_0)$ para representar um disco aberto com centro em z_0 . O disco fechado de raio ε e centro z_0 anota-se por $V_\varepsilon(z_0)$.

DEFINIÇÃO 2. Seja E um subconjunto não vazio de \mathbb{C} . Um ponto z_0 de \mathbb{C} denomina-se um ponto de acumulação de E , quando em todo disco aberto $V(z_0)$ existe uma infinidade de pontos de E . A coleção dos pontos de acumulação de E denomina-se o derivado de E , representando-o por E' .

Exemplos:

1. O conjunto $E = \left\{ 1 - \frac{1}{n}; n = 1, 2, \dots \right\}$ possui o ponto i para ponto de acumulação. Tem-se $E' = \{i\}$.

2. Seja E um disco aberto $V_\varepsilon(z_0)$. Todo ponto de E é ponto de acumulação de E . Também os $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z - z_0| = \varepsilon$, são pontos de acumulação de E . Resulta que E' é o disco fechado de raio ε e centro em z_0 .

DEFINIÇÃO 3. Diz-se que um subconjunto E de \mathbb{C} é fechado, quando E contém o seu derivado E' .

Exemplos:

1. O conjunto $E = \left\{ 1 - \frac{1}{n}; n = 1, 2, \dots \right\} \cup \{i\}$ contém o seu derivado $E' = \{i\}$. Logo é fechado.

2. Um disco fechado é um conjunto fechado.

Os conjuntos fechados gozam das seguintes propriedades:

1. A interseção de uma família qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

2. A união de uma família finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Observação 1. A união de uma família não finita de conjuntos fechados, não é necessariamente um conjunto fechado. De fato, os fechados

$$F_n = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1 - \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots \right\}$$

possuem o disco aberto

$$V(0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

para união, que não é um conjunto fechado, porque não contém o seu derivado, o conjunto

$$\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$$

DEFINIÇÃO 3¹. Um sub conjunto E de \mathbb{C} diz-se aberto, quando em cada ponto $z \in E$ existe um disco aberto $V(z)$, com centro em z , todo contido em E .

Exemplos

1. Todo disco aberto $V(z)$ é um exemplo de conjunto aberto.

2. O conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| < 1\}$$

é aberto.

Os conjuntos abertos gozam das seguintes propriedades:

1. A união de uma família qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
2. A interseção de uma coleção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
3. O complemento de um conjunto aberto é um conjunto fechado.
4. O complemento de um conjunto fechado é um conjunto aberto.

Observação 2. A interseção de uma família não finita de conjuntos abertos, não é necessariamente um conjunto aberto. De fato, a família de abertos

$$G_n = \left\{ z \in \mathbb{C}; \quad |z-1| < 1 + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \right\},$$

possui

$$V(1) = \left\{ z \in \mathbb{C}; \quad |z-1| \leq 1 \right\}$$

para interseção, o qual é um conjunto fechado.

DEFINIÇÃO 4. Diz-se que um sub conjunto E de \mathbb{C} é limitado, quando existe um número $k > 0$ tal que $|z| < k$ para todo $z \in E$.

DEFINIÇÃO 5. Diz-se que um sub conjunto E de \mathbb{C} é compacto, quando êle fôr limitado e fechado.

Exemplo - Um disco fechado $V_{\varepsilon}(z)$ é um exemplo de conjunto compacto.

DEFINIÇÃO 6. Diz-se que uma família (E_{α}) de sub conjuntos E_{α} de \mathbb{C} é uma cobertura de $E \subset \mathbb{C}$, quando cada ponto $z \in E$ pertence a algum E_{α} .

Exemplo. Consideremos a família (E_n) $n \in \mathbb{N}$, sendo

$$E_n = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z-n| < \frac{1}{4} \right\}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$. Cada E_n é um disco aberto com centro no número natural n e raio $\frac{1}{4}$. Segue-se que (E_n) cobre \mathbb{N} .

Seja E um sub conjunto de E e em cada $z \in E$ consideremos um disco aberto $V(z)$. Resulta que a família $(V(z))$, para $z \in E$, é uma cobertura de E . Demonstraremos a seguir, que para certos conjuntos E do plano complexo, é necessário apenas um número finito de discos abertos da família $(V(z))$, com $z \in E$, para cobrir E . Este resultado é conhecido sob a denominação de teorema da cobertura de Borel.

TEOREMA 1. (Heine-Borel). Seja E um conjunto compacto de \mathbb{C} e $(V(z))$, $z \in E$, uma família qualquer de discos abertos cobrindo E . Então, existe um número finito de pontos z_1, z_2, \dots, z_n pertencentes a E , tal que a coleção $\{V(z_1), V(z_2), \dots, V(z_n)\}$ também cobre E .

Demonstração

O teorema será demonstrado por redução a um absurdo. Suponhamos o teorema falso, isto é, não podemos cobrir o conjunto compacto E com uma coleção contendo um número finito de discos abertos com centros em pontos de E . Sendo E compacto, será limitado, estando, portanto, contido em um quadrado Q_0 com centro na origem e lados paralelos aos eixos, estes últimos dividindo Q_0 em quatro quadrados iguais. A interseção de E com pelo menos um dos quadrados anteriores, não pode ser coberta por uma coleção finita de discos abertos $V(z)$ com $z \in E$. Represente por Q_1 um tal quadrado. De maneira análoga, dividamos Q_1 em quatro quadrados iguais, por retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelo centro de Q_1 . Do mesmo modo, seja Q_2 um dos quadrados de decomposição de Q_1 tal que $Q_2 \cap E$ não seja coberto por uma coleção finita de discos abertos $V(z)$, $z \in E$. Continuando o processo, encontra-se uma família decrescente

$$Q_0 \supset Q_1 \dots \supset Q_n \supset \dots$$

de quadrados, tais que $E \cap Q_n$ não pode ser coberto por um número finito de discos abertos $V(z)$, com $z \in E$, para $n = 0, 1, 2, \dots$. Sejam X_n e Y_n as projeções ortogonais dos quadrados Q_n sobre os eixos dos x e dos y respectivamente. Tem-se

$$X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_n \supset \dots \quad \text{e} \quad Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \supset Y_n \supset \dots$$

sendo X_n e Y_n intervalos fechados cujas amplitudes tendem para zero quando n tende para o infinito. Sabe-se do estudo dos números reais, que existe um número real ξ pertencente a X_n e outro η pertencente a Y_n para $n = 0, 1, 2, \dots$. Resulta que existe um número complexo $\zeta = \xi + i\eta$ pertencente a Q_n para todo n . Todo disco aberto $V(\zeta)$ é tal que $V(\zeta) \supset Q_n$ para $n > n_0$. Por hi-

pótese Q_{n_0} contém uma infinidade de pontos E , logo ζ é um ponto de acumulação de E . Sendo E fechado, conclui-se que ζ pertence a E . Resulta que $V(\zeta)$ é um dos discos abertos $V(z)$ com $z \in E$, que cobrem E . Sendo $Q_n \subset V(\zeta)$ para todo $n > n_0$, resulta que $Q_n \cap E \subset V(\zeta)$ para algum $V(\zeta)$, o que é uma contradição, porque $E \cap Q_n$ não pode ser coberto por um número finito de tais discos abertos. Isto demonstra o teorema.

No teorema de Heine-Borel, poderíamos ter tomado coberturas por abertos quaisquer, em lugar de discos abertos com centros nos pontos de E . Desta forma, o teorema seria enunciado do seguinte modo: se E fôr um conjunto compacto de \mathbb{C} , de tãda cobertura de E por conjuntos abertos, podemos extrair uma sub cobertura finita para E .

TEOREMA 2. (Bolzano-Weierstrass). Todo conjunto limitado de $E \subset \mathbb{C}$, com um número infinito de elementos, possui ao menos um ponto de acumulação.

Demonstração

Sendo E limitado, existe um compacto $F \supset E$. Seja $(V(z))$, com $z \in F$, uma cobertura de F por discos abertos. Suponhamos que nenhum elemento de F seja ponto de acumulação de E . Logo, cada disco aberto $V(z)$ da cobertura anterior, possui apenas um número finito de pontos de E . Do teorema de Heine-Borel, deduz-se que apenas um número finito de tais discos é necessário para cobrir F . Consequentemente, E possui um número finito de pontos, o que é contraditório com a hipótese do teorema. Deduz-se que F possui algum ponto de acumulação de E .

Observe que a demonstração do teorema de Heine-Borel foi feita recorrendo a um resultado análogo sobre intervalos fechados de \mathbb{R} . Realmente, usou-se o fato de que se uma família decrescente de quadrados, possui o comprimento das diagonais tendendo para zero, então existe um número complexo $\zeta = \xi + i\eta$ pertencente a todos os quadrados da família. Vejamos que este resultado ainda é válido, quando são considerados conjuntos fechados em lugar de quadrados.

DEFINIÇÃO 7. Seja E um conjunto não vazio de números complexos. Denomina-se diâmetro de E ao número real $\delta(E)$ definido por

$$\delta(E) = \sup \{ |z_1 - z_2|; z_1, z_2 \in E \}.$$

TEOREMA 3. (Cantor). Seja $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$ uma família de conjuntos fechados não vazios de \mathbb{C} tal que algum E_n seja limitado e $\lim \delta(E_n) = 0$. Então existe um e um só ponto z_0 pertencente a todos os E_n .

Demonstração

De fato, suponhamos que E_n seja limitado para $n > m$. Para todo $i > m$ escolhamos um ponto z_i em cada conjunto $E_i - E_{i+1}$. Dêste modo, constroeu-se a coleção $\{z_i; i > m\}$ que é limitada e possui infinitos elementos. Portanto, ela possui um ponto de acumulação ζ . Como qualquer disco aberto com centro em ζ possui infinitos pontos $z_i, i > m$, segue-se que para todo $k > m, \zeta$ é ponto de acumulação de E_k , logo $\zeta \in E_k$ para todo $k > m$, porque E_k é fechado. Para demonstrar a unicidade suponhamos que

existisse outro ζ' nas mesmas condições de ζ . Sendo $\delta(E_n) \rightarrow 0$, conclui-se que $|\zeta - \zeta'| > \delta(E_n)$ para n maior do que certo n_0 . Resulta que ζ ou ζ' não poderia pertencer a E_k para todo $k > m$. Isto prova o teorema.

DEFINIÇÃO 8. Seja E um sub conjunto de \mathbb{C} . Denomina-se ponto fronteira de E , a um $z \in \mathbb{C}$ tal que todo disco aberto com centro em z , possui pontos de E e do complemento de E .

A seguir daremos certos resultados sôbre curvas planas, que necessitaremos posteriormente.

Consideremos a aplicação

$$z: t \in [a, b] \rightarrow z(t) \in \mathbb{C},$$

a qual representa-se por $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Tem-se $z(t) = x(t) + iy(t)$ sendo $x = x(t)$, $y = y(t)$ funções reais definidas em $[a, b]$. Diz-se que $z = z(t)$ é contínua em $[a, b]$, quando as funções reais $x = x(t)$, $y = y(t)$ fôrem contínuas em $[a, b]$. Diz-se que $z = z(t)$ é derivável em (a, b) quando $x = x(t)$, $y = y(t)$ fôrem af deriváveis. Uma função contínua $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, diz-se segmentariamente continuamente derivável em (a, b) , quando existe uma decomposição de $[a, b]$ em um número finito de intervalos $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$, com $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, de tal modo que a restrição de $z = z(t)$ a cada um dos sub intervalos (t_{i-1}, t_i) seja af continuamente derivável. Desta forma, $z = z(t)$ pode deixar de ser derivável em um número finito de pontos de (a, b) .

DEFINIÇÃO 9. Denomina-se curva contínua ao sub conjunto γ de \mathbb{C} , imagem de um intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} , por uma função contínua $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Diz-se que $z = z(t)$ é uma representação paramétrica da curva γ , sendo t denominado o parâmetro de γ .

Seja γ uma curva contínua com uma representação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Quando $a < t_1 < t_2 < b$ diz-se que $z(t_1)$ precede $z(t_2)$ sobre γ . Dêste modo, quando t cresce de a até b , os pontos $z(t)$ percorrem γ desde $z(a)$ até $z(b)$. O número complexo $z(a)$ denomina-se origem de γ e $z(b)$ o ponto terminal de γ , sendo ambos denominados os extremos de γ . Deste modo estabeleceu-se uma ordem para os pontos de γ que, por esta razão, denomina-se uma curva orientada.

DEFINIÇÃO 10. Duas curvas contínuas γ e γ' com equações paramétricas respectivas

$$z: t \in [a, b] \rightarrow z(t) \in \mathbb{C}; \quad w: s \in [\alpha, \beta] \rightarrow w(s) \in \mathbb{C},$$

são denominadas idênticas, quando existe uma aplicação

$$\varphi: t \in [a, b] \rightarrow s = \varphi(t) \in [\alpha, \beta],$$

contínua, estritamente monótona, tal que $w(\varphi(t)) = z(t)$ para todo $t \in [a, b]$. A aplicação φ é denominada uma mudança de parâmetro. Diz-se que γ e γ' possuem orientações idênticas ou direções iguais, quando φ fôr estritamente crescente e direções opostas, quando φ fôr estritamente decrescente.

A título de exemplo, seja γ uma curva contínua de e-

quação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Consideremos $\varphi(t) = -t$ definida em $-b \leq t \leq -a$, que é estritamente decrescente neste intervalo. Desta forma, a curva γ' de equação paramétrica $z = z(-t)$, $-b \leq t \leq -a$, é a curva γ com direção oposta, a qual representa-se por $-\gamma$.

DEFINIÇÃO 11 Uma curva contínua γ de equação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, denomina-se simples, quando para todo $a < t_1 < t_2 < b$ tem-se $z(t_1) \neq z(t_2)$. As curvas contínuas simples são denominadas arcos de Jordan.

Exemplo - As curvas contínuas γ e γ' , de equações paramétricas respectivas

$z(t) = \cos t + i \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$ e $z(t) = t^2$, $-1 \leq t \leq +1$, são exemplos de arcos de Jordan.

DEFINIÇÃO 12. Diz-se que uma curva contínua γ com representação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, é fechada, quando $z(a) = z(b)$. Denomina-se curva de Jordan, a toda curva contínua, simples e fechada.

Exemplo - Uma circunferência ou uma elipse são exemplos de curvas de Jordan.

DEFINIÇÃO 13. Um arco γ de Jordan com equação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, denomina-se regular, quando $z = z(t)$ fôr continuamente derivável em (a, b) . Ele denomina-se segmentariamente regular, ou um caminho γ no plano complexo, quando $z = z(t)$ fôr segmentariamente, continuamente derivável em (a, b) .

Resulta da definição 12, que um caminho γ é uma coleção finita de arcos regulares de Jordan $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, tais que a origem de γ_j coincide com o ponto terminal de γ_{j-1} . Escreve-se $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$.

De modo análogo a definição 12, define-se o conceito de curva de Jordan regular e segmentariamente regular.

Observação 3. Com o objetivo de facilitar a linguagem, chamaremos curva ou arco, conforme o caso, tanto o conjunto de pontos γ de \mathbb{C} , como uma qualquer de suas representações paramétricas. Com esta convenção, diremos a curva $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, ou a curva γ de equação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$.

Consideremos uma curva contínua $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ e uma decomposição

$$D: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

de $[a, b]$. Seja $S(D)$ o número real definido por

$$S(D) = \sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})|$$

para toda decomposição D de $[a, b]$. Diz-se que a curva γ possui comprimento finito ou que γ é retificável, quando o conjunto $\{S(D)\}$ for limitado. Neste caso, ao supremo de $\{S(D)\}$ denomina-se o comprimento de γ , representando-o por $c(\gamma)$, isto é,

$$c(\gamma) = \sup \{S(D)\}.$$

Exemplo. Consideremos a curva γ de equação paramétrica $z(t) = t \cos \frac{\pi}{t}$ para $0 < t \leq 1$ e $z(0) = 0$.

Consideremos a decomposição de $[0,1]$ dada por

$$D: 0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 .$$

Calculando $S(D)$ para esta decomposição encontra-se:

$$S(D) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} .$$

Quando n cresce, $\{S(D)\}$ torna-se não limitado, pois a soma anterior é a soma parcial de ordem n da série divergente $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$. Conclui-se que γ não é retificável.

Quando $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, fôr segmentariamente continuamente derivável em $[a,b]$, γ é retificável sendo o seu comprimento dado por

$$C(\gamma) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |z'(t)| dt ,$$

com $(t_0, t_1), (t_1, t_2) \dots (t_{n-1}, t_n)$, subintervalos de $[a,b]$, (com $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$) nos quais a derivada $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ é contínua.

Não será dada a demonstração dêste resultado, o que não perturbará a compreensão do que segue.

Um segmento de reta é um arco de Jordan regular. Denomina-se poligonal, a um caminho γ cujos arcos regulares de Jordan γ_i que compõem γ , são segmentos de reta. Resulta que uma poligonal possui comprimento finito.

DEFINIÇÃO 14. Diz-se que um sub conjunto E de \mathbb{C} é conexo, quando dados dois pontos quaisquer z_1, z_2 de E , existe uma poligonal γ com extremos em z_1 e z_2 , tãda contida em E .

DEFINIÇÃO 15. Denomina-se domínio do plano complexo \mathbb{C} , a todo conjunto não vazio de \mathbb{C} , que seja aberto e conexo.

DEFINIÇÃO 16. Denomina-se componente de um aberto não vazio $E \subset \mathbb{C}$ contendo z_0 , ao conjunto $C(z_0)$ dos pontos z de E , que juntamente com z_0 são extremos de uma poligonal γ tãda contida em E .

Demonstra-se que tãda componente $C(z_0)$ de um conjunto aberto não vazio E , é não vazia, aberta e conexa, isto é, $C(z_0)$ é um domínio para cada z_0 em E . Por esta razão, diz-se que $C(z_0)$ é uma componente conexa de E em z_0 .

Exemplo - Consideremos o conjunto fechado F de \mathbb{C} constituído pelas retas

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; \quad y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

O complemento de F é aberto. Êste aberto, possui para componentes conexas, todos os quadrados com os vértices nos pontos de coordenadas inteiras. Assim, o complemento de F possui infinitas componentes conexas.

A seguir, enunciaremos o teorema de Jordan, garantindo que se o conjunto fechado F fôr uma curva de Jordan γ de comprimento finito, então o complemento de γ em \mathbb{C} possui sômente duas componentes conexas.

TEOREMA DE JORDAN - Seja γ uma curva de Jordan retificável do plano complexo \mathbb{C} . Então, o complemento de γ possui somente duas componentes conexas com fronteira igual a γ . Uma das componentes é limitada e denomina-se o interior de γ , a outra componente é não limitada denominando-se o exterior de γ .

O teorema de Jordan não será demonstrado pois foge ao caráter elementar e introdutório deste texto.

DEFINIÇÃO 17. Diz-se que um domínio Ω de \mathbb{C} é simplesmente conexo, quando toda curva de Jordan γ , retificável, contida em Ω , possui o seu interior constituído somente de pontos de Ω . Os Ω que não são simplesmente conexos, denominam-se multiplamente conexos.

Observe que do ponto de vista intuitivo, um domínio simplesmente conexo é aquele que não possui buracos, enquanto os multiplamente conexos são aqueles que possuem.

Exemplo: O domínio $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$ é simplesmente conexo, enquanto $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < R\}$ não é simplesmente conexo.

DEFINIÇÃO 18. Diz-se que um sub conjunto E de \mathbb{C} é convexo, quando para todo par de pontos z_1, z_2 de E , o segmento reta $\{z \in \mathbb{C}; z = \lambda z_1 + \mu z_2, \lambda + \mu = 1\}$ também pertence a E .

Exemplo: O conjunto $E = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$ é convexo. O conjunto $E = \{z \in \mathbb{C}; R' < |z - z_0| < R\}$ não é convexo.

Deduz-se, portanto, que qualquer disco aberto é um domínio (aberto e conexo), simplesmente conexo.

EXERCÍCIOS

1. Faça o gráfico das seguintes relações

$$|z| = 2; \quad 3 < |z| < 4; \quad \operatorname{Re} \left(\frac{z+1}{i+1} \right) > 0;$$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z-i}{1} \right) < 0; \quad \left| \frac{z-i}{i-1} \right| = 2; \quad 2 < \left| \frac{z-i}{1} \right| < 3.$$

2. Qual a equação cartesiana da curva

$$z = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} + 2ti, \quad -1 \leq t \leq +1?$$

Construa o seu gráfico.

3. Quando o número complexo z descreve a circunferência

$$x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 = 0,$$

determine a curva descrita por $z-1 + 2i$.

4. Calcule o derivado e a fronteira dos seguintes conjuntos:

$$\left\{ 3i + \frac{1}{n}; \quad n \in \mathbb{N} \right\}; \quad \left\{ z \in \mathbb{C}; \quad 1 < |z| \leq 2 \right\}$$

$$\left\{ z \in \mathbb{C}; \quad 0 < |z-1| < 2 \right\}.$$

5. Considere dois números complexos não nulos z_0, z_1 , diferentes, e z variável.

Descreva os seguintes conjuntos:

$$\arg(z-z_0) = \frac{\pi}{4}; \quad \operatorname{Im} \left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right) = 0;$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z}{z_0} \right) = 1; \quad |z-z_0| = r; \quad |z-z_0| = k|z-z_1|, \quad k > 0. \quad \text{Estude o caso}$$

$$k=1; \quad |z-z_0| + |z-z_1| = 2a; \quad |z-z_0| - |z-z_1| = 2a.$$

6. Dada a circunferência

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

escrever esta equação em função de z e \bar{z} .

7. Prove que $\{ z \in \mathbb{C}; |z-z_0| < r \}$ e

$\{ z \in \mathbb{C}; |z-z_0| + |z-z_1| < 2a \}$ são conjuntos convexos.

8. Usando a definição de curva retificável e seguindo o exemplo feito no texto, verifique:

a) A curva γ de equação paramétrica

$$z(t) = t^2 \cos \frac{\pi}{t}, \quad 0 < t \leq 1, \quad z(0) = 0,$$

é retificável.

b) A curva γ de equação paramétrica

$$z(t) = t \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{t}, \quad 0 < t \leq 1, \quad z(0) = 0,$$

não é retificável.

9. Considere o conjunto

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z-3i) < 0, \operatorname{Im}(iz) < 0, |z| \leq 3\}.$$

É Ω um domínio? É Ω conexo? Qual a fronteira de Ω ?

10. Considere o conjunto

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z-3) \geq 0, \operatorname{Im}(iz-1) < 0; 2|z-2| < 4\}.$$

É Ω conexo? É Ω aberto? Quais os pontos limites de Ω ? Qual o fecho de Ω ? Quais os pontos limites de Ω que não pertencem a Ω ?

11. Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0, \text{ excluindo os segmentos de reta } z = \frac{1}{n} + it, \text{ com } 0 \leq t < 1, n \in \mathbb{N}\}$. Qual a fronteira de Ω ? É Ω um domínio? É Ω simplesmente conexo?

12. Demonstre as propriedades enunciadas no texto para os conjuntos abertos e fechados de \mathbb{C} .

13. Dê exemplo de um caminho que não seja uma curva regular. Construa exemplos de arco de Jordan segmentariamente regular.

§3. SUCESSÕES E SÉRIES NUMÉRICAS

1. SUCESSÕES - Estudaremos nesta seção, um tipo particular de função complexa, isto é, as funções definidas no conjunto \mathbb{N} dos números naturais com valores em \mathbb{C} .

DEFINIÇÃO 1. Denomina-se sucessão de números complexos, a

uma função

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$$

que a cada número natural n , associa o número complexo $f(n)$, o qual representa-se por z_n .

Usa-se a notação $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para representar a sucessão $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. Desta forma, diz-se a sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ao invés de dizer-se a sucessão $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ ou $n \in \mathbb{N} \rightarrow z_n \in \mathbb{C}$. Os números complexos z_n , para $n \in \mathbb{N}$, são denominados os termos da sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sendo z_n denominado o termo geral. É importante o leitor observar a distinção entre a sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e o conjunto de números complexos $\{z_n\}$ imagem de \mathbb{N} pela sucessão $n \in \mathbb{N} \rightarrow z_n \in \mathbb{C}$.

Exemplos

$$1. \left((-1)^n + \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

2. A sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sendo $z_0 = 1$, $z_1 = i$ e

$$z_n = \frac{1}{2} [z_{n-1} + z_{n-2}] \text{ para } n = 2, 3, \dots$$

$$3. (z^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Diz-se que duas sucessões $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são iguais, quando $z_n = w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Denomina-se soma de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a sucessão $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sendo $\zeta_n = z_n + w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo - Dadas as sucessões com termos gerais $z_n = (-1)^n$,

$w_n = i^n + (-1)^{n+1}$, elas possuem para soma $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sendo $\zeta_n = (-1)^n + i^n + (-1)^{n+1} = i^n$.

Denomina-se produto de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a sucessão $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\zeta_n = z_n w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo: O produto das sucessões $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(i/n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão $((-1)^n i/n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dadas as sucessões $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $w_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denomina-se quociente de ambas, a sucessão $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sendo $\zeta_n = \frac{z_n}{w_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo: Considerando as sucessões $(i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(n!)_{n \in \mathbb{N}}$, o quociente da primeira pela segunda é $(i^n/n!)_{n \in \mathbb{N}}$.

É importante observar, que as operações anteriormente definidas para sucessões, são casos particulares das mesmas operações para funções definidas em um sub conjunto E de \mathbb{C} com valores em \mathbb{C} , sem que E seja necessariamente \mathbb{N} . Isto será feito no capítulo 2.

Como só trataremos de sucessões de números complexos, diremos sucessão em lugar de sucessão de números complexos.

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $z \in \mathbb{C}$ ou que z é o limite de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quando n tende para o infinito, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Para indicar que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para z , são usadas as seguintes notações: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$; $z_n \rightarrow z$ quando $n \rightarrow \infty$

ou simplesmente, $z_n \rightarrow z$.

Caso $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não seja convergente, diz-se que ela é divergente.

PROPOSIÇÃO 1. Se uma sucessão fôr convergente, o seu limite z é único.

Demonstração

De fato, suponhamos que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convirja para z e z' . Provaremos que $z = z'$. De fato, tem-se

$$|z - z'| \leq |z_n - z| + |z_n - z'|$$

Sendo $z_n \rightarrow z$ e $z_n \rightarrow z'$, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que $|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|z_n - z'| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > n_0$. Portanto, $|z - z'| < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$, provando ser $z = z'$.

DEFINIÇÃO 3. Diz-se que uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, quando existe uma constante $c > 0$ tal que $|z_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSIÇÃO 2. Toda sucessão convergente é limitada.

Demonstração

De fato, suponhamos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para z . Resulta que para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural n_0 tal que $|z_n - z| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Tomemos $\varepsilon = 1$ e seja $c > 0$ o máximo do conjunto finito $\{|z_0|, |z_1|, \dots, |z_{n_0}|, |z| + 1\}$. Portanto, para todo $n > n_0$ obtem-se $|z_n| \leq |z_n - z| + |z| < |z| + 1$. Logo, $|z_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSIÇÃO 3. Sejam $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões convergentes. Então

$$a. \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

$$b. \lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

c. Se os z_n forem não nulos e $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}.$$

Demonstração

a. Suponhamos $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$. Pela definição de convergência, para cada $\varepsilon > 0$ existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|z_n - z| < \varepsilon/2 \text{ para } n > n_1 \text{ e } |w_n - w| < \varepsilon/2 \text{ para } n > n_2.$$

Tomando n_0 , igual ao maior dos números n_1, n_2 , resulta que para cada $\varepsilon > 0$, obtem-se:

$$|(z_n + w_n) - (z + w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$, provando a parte a. da proposição.

b. De fato, suponhamos, como na demonstração anterior, que $z_n \rightarrow z$, e $w_n \rightarrow w$. Tem-se a identidade

$$z_n w_n - zw = z_n(w_n - w) + (z_n - z)w$$

Tomando o valor absoluto de ambos os membros, obtem-se:

$$|z_n w_n - zw| \leq |z_n| |w_n - w| + |z_n - z| |w| .$$

Pela proposição 2, existe $C > 0$ tal que $|z_n| < C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se C' fôr o maior dos números C e $|w|$, obtem-se

$$|z_n w_n - zw| \leq C' (|w_n - w| + |z_n - z|) .$$

Sendo $z_n \rightarrow z$, $w_n \rightarrow w$, para cada $\varepsilon > 0$ existem números naturais $n_1 = n_1(\varepsilon)$, $n_2 = n_2(\varepsilon)$ tais que

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2C'} \text{ para } n > n_1, \quad |w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2C'} \text{ para } n > n_2 .$$

Tomando para $n_0 = n_0(\varepsilon)$ o maior dos números n_1 , n_2 , resulta que

$$|z_n w_n - zw| < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0 ,$$

provando a parte b. da proposição.

c. Seja z o limite de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Consideremos a identidade

$$\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| = \frac{|z_n - z|}{|z_n| |z|}$$

Sendo z diferente de zero por hipótese, e $z_n \rightarrow z$, segue-se que existe $r > 0$ e um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| > r$ para todo $n > n_1$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_2 = n_2(\varepsilon)$ tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon \text{ para todo } n > n_2 .$$

Tomando $n_0 = \max(n_1, n_2)$, obtem-se:

$$\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| = \frac{|z_n - z|}{|z| |z_n|} < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0 .$$

Isto prova a parte c. da proposição.

COROLÁRIO 1. Se os z_n fôrem não nulos e $z_n \rightarrow z$, com $z \neq 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n}{z_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n} .$$

Para demonstrar o corolário é suficiente considerar $\frac{w_n}{z_n} = w_n \cdot \frac{1}{z_n}$ e aplicar as partes b e c da proposição 3.

DEFINIÇÃO 4. Sejam $\{k_1 < k_2 < \dots < k_n \dots\}$ um conjunto infinito de números naturais e $n \rightarrow z_n$ uma sucessão. A função $k_n \rightarrow z_{k_n}$ denomina-se uma subsucessão de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a qual representa-se por $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemplos:

1. Seja $k_n = 2n + 1$ para $n \in \mathbb{N}$. A sub sucessão de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será $(z_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Seja $k_n = 4n+1$ e $(i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sucessão. A subsucessão correspondente é: $z_1 = 1, z_2 = 1, \dots$

DEFINIÇÃO 5. Um ponto $z \in \mathbb{C}$ denomina-se um valor aderente de uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quando para cada disco aberto $V(z)$ e qualquer número natural k , tem-se $z_n \in V(z)$ para algum $n \geq k$.

PROPOSIÇÃO 4. Uma condição necessária e suficiente para que $z \in \mathbb{C}$ seja valor aderente de uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é

que exista uma subsucessão $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para z .

Demonstração

Caso exista uma subsucessão $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para z , segue-se que z é ponto aderente de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Suponhamos z um ponto aderente de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Resulta que para cada $\varepsilon > 0$, existe uma infinidade de valores de n tais que $z_n \in V_\varepsilon(z)$. Tomemos $\varepsilon = 1$ e seja $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $z_{k_1} \in V_1(z_0)$. Façamos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e seja $k_2 \in \mathbb{N}$ com $k_2 > k_1$ tal que $z_{k_2} \in V_{\frac{1}{2}}(z)$. Tendo sido definido o elemento $z_{k_{n-1}}$ toma-se $\varepsilon = 1/n$ e considera-se $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n > k_{n-1}$ e $z_{k_n} \in V_{1/n}(z)$. Dêste modo, define-se uma subsucessão $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de modo que para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{para todo } k_n > k,$$

isto é, $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para z .

Com o método usado na demonstração anterior, demonstra-se também, a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 5. Um número complexo z , é ponto de acumulação de um subconjunto E de \mathbb{C} , se e somente se existe uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termos distintos pertencentes a E , convergente para z .

Demonstração

Seja z um ponto de acumulação de E . Tomando $\varepsilon = 1$, há infinitos elementos de E em $V_\varepsilon(z)$. Seja z_1 um qualquer destes.

Analogamente, em $V_{\frac{1}{2}}(z)$ há uma infinidade de pontos de E . Tomemos z_2 em $V_{\frac{1}{2}}(z)$ com $z_2 \neq z_1$. Repetindo este processo para $1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots$, indefinidamente, define-se uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de pontos distintos de E , tal que

$$|z_n - z| < 1/n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} .$$

Logo, ela converge para z .

Reciprocamente, seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de E com $z_i \neq z_j$ para $i \neq j$. Então, se $z_n \rightarrow z$, segue-se que z é um ponto de acumulação de E .

Exercício - Determine as sub-sucessões $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ para $k_n = 2n; k_n = 2n + 1; k_n = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$, das sucessões $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cujos termos gerais são:

$$z_n = (-1)^n; \quad z_n = (-i)^n; \quad z_n = (-1)^n + i^n .$$

Quais os valores aderentes das sucessões $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Das sub-sucessões obtidas, quais as convergentes?

Observação 1. O teorema de Bolzano-Weierstrass assegura-nos a existência de pelo menos um ponto de acumulação, para todo conjunto limitado, possuindo uma infinidade de pontos de \mathbb{C} . Há um teorema análogo referente a valores aderentes de uma sucessão. Desta forma, o teorema de Bolzano-Weierstrass para sucessões, enuncia-se do seguinte modo: toda sucessão limitada de números complexos possui um valor aderente. Demonstra-se, de maneira simples, recorrendo ao mesmo teorema para sucessões de números reais. De fato, dada sucessão limitada $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

sendo $z_n = x_n + iy_n$, é suficiente considerar as sucessões $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, as quais são limitadas.

DEFINIÇÃO 6. Uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denomina-se de Cauchy, quando para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|z_m - z_n| < \varepsilon \text{ para todo } m > n_0, n > n_0.$$

PROPOSIÇÃO 6. Tôda sucessão de Cauchy é limitada.

Demonstração

De fato, seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy. Portanto para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_m - z_n| < \varepsilon \text{ para todo } m > n_0, n > n_0.$$

Tomando $\varepsilon = 1$, $n = n_0 + 1$, segue-se que

$$|z_m - z_{n_0+1}| < 1 \text{ para todo } m > n_0.$$

Daf resulta que

$$|z_m| \leq |z_m - z_{n_0+1}| + |z_{n_0+1}| < 1 + |z_{n_0+1}|$$

para todo $m > n_0$. Representando por C o máximo do conjunto $\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{n_0}|, |z_{n_0+1}| + 1\}$, conclui-se que

$$|z_n| < C \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

provando ser $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada.

TEOREMA 1 (Cauchy). Uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, se e sômente se ela fôr uma sucessão de Cauchy.

Demonstração

De fato, suponhamos que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja convergente para z . Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|z_m - z| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } m, n > n_0.$$

Sendo

$$|z_m - z_n| \leq |z_m - z| + |z_n - z| \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N},$$

resulta que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Reciprocamente, suponhamos que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja de Cauchy. Da proposição 6 deduz-se que ela é limitada e do teorema de Bolzano-Weierstrass para sucessões (observação 1), conclui-se que ela possui um valor aderente z . Provaremos que z é o limite de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De fato, sendo a sucessão de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_m - z_n| < \varepsilon \quad \text{para todo } m, n > n_0.$$

Sendo z um valor aderente, resulta da proposição 4 a existência de um número natural $m_0 > n_0$ tal que

$$|z - z_{m_0}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto,

$$|z_n - z| \leq |z_n - z_{m_0}| + |z_{m_0} - z| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > n_0,$$

qualquer que seja $\varepsilon > 0$. Isto prova o teorema.

EXERCÍCIOS

1. Demonstre que se $z_n \rightarrow z$, então $|z_n| \rightarrow |z|$. Se $z \neq 0$ e $\theta = \arg z$, existe uma sucessão $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sendo θ_n um valor de $\arg z_n$, tal que $\theta_n \rightarrow \theta$.

2. Sejam $z_n = x_n + iy_n$ e $z = x + iy$. Demonstre que uma condição necessária e suficiente para que $z_n \rightarrow z$, é que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. (Demonstre pela definição de limite e pelo teorema de Cauchy).

3. Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números complexos tal que $|z_n| \rightarrow |z|$ e $\arg z_n \rightarrow \arg z$. Demonstre que $z_n \rightarrow z$.

4. Demonstre que se $z_n \rightarrow z$, então toda subsucessão $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é também convergente para z .

5. Considere em \mathbb{C} o subcorpo formado pelos números complexos da forma $p + iq$, sendo p, q racionais e $|p + iq|^2 = p^2 + q^2$ como em \mathbb{C} . Vale neste sub corpo o teorema de Cauchy?

6. Considere as sucessões cujos termos gerais são os seguintes:

$$z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n; \quad z_n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{3}\right)^n; \quad z_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Represente geometricamente alguns dos seus termos e estude a convergência de cada uma.

7. Estude a convergência das sucessões cujos termos gerais são:

$$z_n = \frac{3ni}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}; \quad z_n = \frac{5i}{n} \cos \frac{\pi}{n}.$$

8. Considere o polinômio $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ de grau k e coeficientes em \mathbb{C} . Demonstre que se $z_n \rightarrow z$ então $p(z_n) \rightarrow p(z)$.

9. Demonstre que se $z_n \rightarrow 0$ então

$$s_n = \frac{1}{n} (z_1 + z_2 + \dots + z_n)$$

também converge para zero.

SOLUÇÃO. Sendo $z_n \rightarrow 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ em \mathbb{N} satisfazendo a condição:

$$|z_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n > n_0.$$

Resulta que para todo $n > n_0$, obtem-se

$$|s_n| \leq \frac{1}{n} |z_1 + z_2 + \dots + z_n| + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pela proposição 2, $|z_n| < C$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo,

$$|s_n| < \frac{n_0 C}{n} + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando n_0 tal que $\frac{n_0 C}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, resulta que $|s_n| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Complete o exercício, demonstrando que se $z_n \rightarrow z$ então $s_n \rightarrow z$.

O exercício que segue generaliza o exercício anterior.

10. Suponha $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para z e $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$

uma sucessão de números reais positivos tais que $k_1 + k_2 + \dots + k_n \longrightarrow +\infty$. Demonstre que a sucessão (s_n) , sendo

$$s_n = \frac{k_1 z_1 + k_2 z_2 + \dots + k_n z_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

também converge para z .

11. Uma sucessão $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ denomina-se uma progressão aritmética, quando existem duas constantes complexas a, b tais que

$$f(n) = an + b \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

1) Demonstre que uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ seja uma progressão aritmética, é que $f(n+1) - f(n)$ seja constante para todo $n \in \mathbb{N}$.

2) Se $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma progressão aritmética, calcule

$$s(f, n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$$

em função de $f(0)$ e $f(n)$, apenas.

3) Obtenha do item anterior, a soma dos n primeiros números naturais.

12. Denomina-se progressão geométrica a uma sucessão $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(n) = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo a um número complexo fixo.

1) Demonstre que uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ seja uma progressão geométrica, é que exista uma constante $a \in \mathbb{C}$ tal que $g(n+1) = a g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2) Se $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma progressão geométrica, calcule

$$s(g, n) = g(0) + g(1) + \dots + g(n)$$

3) Determine uma condição sobre g para que a sucessão $(s(g, n))_{n \in \mathbb{N}}$ seja convergente.

2. SERIES - Consideremos uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e definamos outra sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, fazendo

$$s_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada a sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, obtem-se $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ através das seguintes relações:

$$z_0 = s_0 \text{ e } z_n = s_n - s_{n-1} \text{ para todo } n \geq 1.$$

A um par de sucessões $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assim relacionadas, denomina-se uma série definida pela sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou série de termo geral z_n . Usa-se a notação

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

para representar uma série de termo geral z_n . Os números complexos s_n são denominados as reduzidas ou somas parciais da série. Quando a sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui limite s , diz-se que a série de termo geral z_n é convergente para s , escrevendo-se:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

Quando $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge, diz-se que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é divergente.

Desta forma, aplicando o teorema de Cauchy a $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, resulta que uma condição necessária e suficiente para que uma série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ seja convergente, é que a sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das reduzi-
das desta série uma sucessão de Cauchy. Suponho $m = n+p$, ob-
tem-se

$$s_m - s_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}$$

Portanto, aplicando o teorema de Cauchy, conclui-se que uma sé-
rie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, é convergente, se e somente se para cada $\varepsilon > 0$, e-
xiste um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ e todo número natural $p \geq 1$.

PROPOSIÇÃO 7. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ fôr convergente, a suces-
são $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero.

Demonstração

De fato, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ e todo $p \geq 1$. Tomando $p = 1$, resulta que

$$|z_{n+1}| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > n_0,$$

isto é, $z_n \rightarrow 0$.

Observe que a proposição 7 é apenas uma condição necessá-
ria, pois $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, enquanto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ di-
verge.

DEFINIÇÃO 7. Diz que uma série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge em valor absoluto, quando a série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ fôr convergente.

PROPOSIÇÃO 8. Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge em valor absoluto, ela é convergente e vale a desigualdade

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| .$$

Demonstração

Sendo $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ convergente, para cada $\epsilon > 0$ existe um número natural $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}| < \epsilon$$

para todo $n > n_0$ e $p \geq 1$. Sendo

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}| ,$$

resulta que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é convergente. Portanto, pelo exercício 1 deste parágrafo, seção anterior, obtém-se:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} (z_0 + z_1 + \dots + z_n) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z_0 + z_1 + \dots + z_n|$$

isto é,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|z_0| + |z_1| + \dots + |z_n|) = \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| .$$

Exemplo: Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Demonstremos que esta série converge para todo z no disco aberto $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. De fato, pela proposição 8, é suficiente demonstrar que $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ é convergente no referido disco aberto. Tem-se, pelo exercício 12 seção anterior,

$$s_n = 1 + |z| + |z|^2 + \dots + |z|^n = \frac{|z|^{n+1} - 1}{|z| - 1}$$

isto é,

$$s_n = \frac{|z|^{n+1}}{|z| - 1} - \frac{1}{|z| - 1}.$$

Supondo $|z| < 1$ e tomando o limite de ambos os membros da última igualdade, conclui-se que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $1/(1-|z|)$. Logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ é convergente no disco aberto $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Demonstremos que a sua soma é $1/(1-z)$. De fato,

$$\left| 1 + z + z^2 + \dots + z^n - \frac{1}{1-z} \right| = \left| \frac{|z|^{n+1} - 1}{z-1} - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|},$$

cujo limite é zero quando $n \rightarrow \infty$.

PROPOSIÇÃO 9. Suponhamos $|z_n| \leq |w_n|$ para todo $n > n'$, n' fixo. Então, se $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|$ fôr convergente, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge em valor absoluto.

Demonstração

De fato, sendo $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|$ convergente, para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ de tal modo que

$$|w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \dots + |w_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > n_0 \text{ e todo } p \geq 1.$$

Por hipótese, para todo $n > n'$ tem-se $|z_n| < |w_n|$. Logo, para cada $\varepsilon > 0$, tomando n_1 o maior dos números n' , n_0 , resulta que

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > n_1 \text{ e todo } p \geq 1,$$

implicando a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$.

A proposição que acabamos de demonstrar é de grande utilidade no estudo da convergência de séries, recebendo a denominação de método de comparação. A série $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|$ denomina-se uma majorante de $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$.

O estudo da convergência em valor absoluto reduz-se, deste modo, ao de uma série de números reais positivos. No estudo destas séries, faz-se aplicação, com frequência, das noções de limite superior e inferior de uma sucessão. Por esta razão e como esta noção aparecerá posteriormente no estudo das séries de potências, que será feito no capítulo 5, relembremos, a seguir, as definições correspondentes.

Consideremos uma sucessão limitada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais. Sabe-se que todo conjunto limitado de números reais possui um supremo e um ínfimo, que são únicos. Resulta, portanto, que fixado $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto de números reais $\{x_n; n \gg n_0\}$ possui um supremo e um ínfimo, os quais representam-se, respectivamente, por:

$$\sup_{n \gg n_0} x_n \quad \text{e} \quad \inf_{n \gg n_0} x_n$$

Quando n_0 varia em \mathbb{N} , tem-se os conjuntos limitados

$$\left\{ \sup_{n \gg n_0} x_n; n_0 \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \inf_{n \gg n_0} x_n; n_0 \in \mathbb{N} \right\}$$

Ao ínfimo do primeiro conjunto denomina-se limite superior da sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e ao supremo do segundo conjunto, denomina-se o limite inferior da sua sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Representa-se o limite superior de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

e o limite inferior por

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Quando $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não for limitada superiormente, define-se o seu limite superior como sendo $+\infty$. Caso $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não seja limitada inferiormente, define-se o seu limite inferior como sendo $-\infty$.

Exemplo. A sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais com $x_n = \sin \frac{\pi}{n}$ para $n = 1, 2, \dots$, $x_0 = 0$, possui

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +1 \quad \text{e} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 .$$

PROPOSIÇÃO 10 (Cauchy). Dada uma série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ de números complexos, façamos

$$k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |z_n|^{1/n} .$$

Então, se $0 < k < 1$ a série converge em valor absoluto.

Demonstração

Suponhamos $0 < k < 1$ e seja r um número real do intervalo aberto $(k, 1)$. Pela definição de limite superior de uma sucessão, existe um número natural n_1 tal que

$$|z_n|^{1/n} < r < 1$$

para todo $n \geq n_1$. Portanto, $|z_n| < r^n$ para todo $n \geq n_1$. Sendo $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ convergente, porque $0 < r < 1$, conclui-se, pela proposição 10, que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge em valor absoluto.

Quando $k > 1$, raciocinando de maneira análoga, verifica-se que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.

DEFINIÇÃO 8. Denomina-se permutação do conjunto \mathbb{N} dos números naturais, a uma aplicação $n \rightarrow k_n$ de \mathbb{N} em \mathbb{N} , satisfazendo as seguintes condições:

1. Se $n \neq m$ então $k_n \neq k_m$.
2. Todo número natural n é um certo k_n .

Portanto, uma permutação de \mathbb{N} é uma aplicação biunívoca de \mathbb{N} sobre \mathbb{N} . Desta forma, a sucessão $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sucessão $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ escrita em outra ordem.

Tomemos uma série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ e seja $n \rightarrow k_n$ uma permutação de \mathbb{N} . Fazendo $w_n = z_{k_n}$ obtem-se uma série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ que é a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ com os termos escritos em ordem diferente de 0, 1, 2, No caso de um número finito de parcelas, vale a propriedade comutativa para a adição. Todavia, para séries esta propriedade não vale em geral, isto é, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ não converge, em geral, mesmo que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ convirja. Entretanto, vale o seguinte teorema.

PROPOSIÇÃO 11. Suponhamos $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ convergente em valor absoluto para o número complexo s . Então, a série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ que se obtém da anterior por uma permutação, também converge em valor absoluto para s .

Demonstração

De fato, seja $n \rightarrow k_n$ uma permutação de \mathbb{N} , sendo $w_n = z_{k_n}$. Por hipótese, para cada $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 = n_0(\varepsilon)$ em \mathbb{N} tal que

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_{n+p}| < \varepsilon \quad (15)$$

para $n > n_0$ e todo $p \geq 1$. Sendo $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ uma permutação de $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, podemos tomar n_1, n_0 , com $n_1 > n_0$ suficientemente grandes, de modo que os números naturais $1, 2, \dots, n$ figurem entre os números naturais k_1, k_2, \dots, k_n . Daí resulta que para todo $n \geq n_1 > n_0$ os $|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|$ desaparecem ao fazermos $S_n - s_n$, sendo S_n, s_n as reduzidas de ordem n de $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ respectivamente. Resulta da desigualdade (15), que $|S_n - s_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_1 > n_0$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n) = 0.$$

Sendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \text{e} \quad S_n = s_n + (S_n - s_n),$$

conclui-se que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para s .

Com êste resultado fica estendida para as séries que convergem em valor absoluto, a propriedade comutativa para a soma com um número finito de parcelas. Estendemos também, para séries absolutamente convergentes, a propriedade do valor absoluto que nos diz ser o valor absoluto de uma soma menor do que a soma dos valores absolutos das parcelas. Resta-nos analisar a adição e multiplicação de séries.

Consideremos duas séries $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ convergentes e um número complexo λ . Verifica-se que as séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda z_n$$

são convergentes, valendo as igualdades:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda z_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} z_n .$$

Quanto à multiplicação de séries, carece uma análise mais detalhada.

Consideremos as somas $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ e $w_1 + w_2 + \dots + w_n$ com um número finito de parcelas. Do estudo das propriedades algébricas dos números complexos, resulta que o produto destas somas é igual a soma dos produtos das parcelas, isto é,

$$\left(\sum_{i=1}^n z_i \right) \left(\sum_{j=1}^m w_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_i w_j \quad (16)$$

Ao estudarmos as séries de números complexos, surge a questão de obtermos indicações sôbre a validade desta propriedade.

Inicialmente, formularemos o problema da multiplicação de séries, estudando, a seguir, a solução. Consideremos duas séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

e formemos os produtos $z_i w_j$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Representemos por

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots \quad (17)$$

os produtos assim obtidos, tomados em uma ordem qualquer.

Fixada a sucessão $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n$$

denomina-se produto das séries dadas. Uma questão importante é saber em que condições a série produto é convergente.

PROPOSIÇÃO 12. Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ convergem em valor absoluto, então a série produto $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ também converge em valor absoluto.

Demonstração

De fato, consideremos a reduzida de ordem n

$$S_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$$

e seja m o maior dos índices i, j nos produtos $z_i w_j$ que figuram em S_n . Obtém-se, facilmente,

$$|p_0| + |p_1| + \dots + |p_n| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |z_i| \right) \left(\sum_{j=0}^m |w_j| \right) = s_m \cdot s'_m, \quad (18)$$

sendo s_m, s'_m as reduzidas de $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|$ respectivamente. Sendo estas séries convergentes, representemos por s e s' suas somas, respectivamente. Portanto, de (18) obtém-se

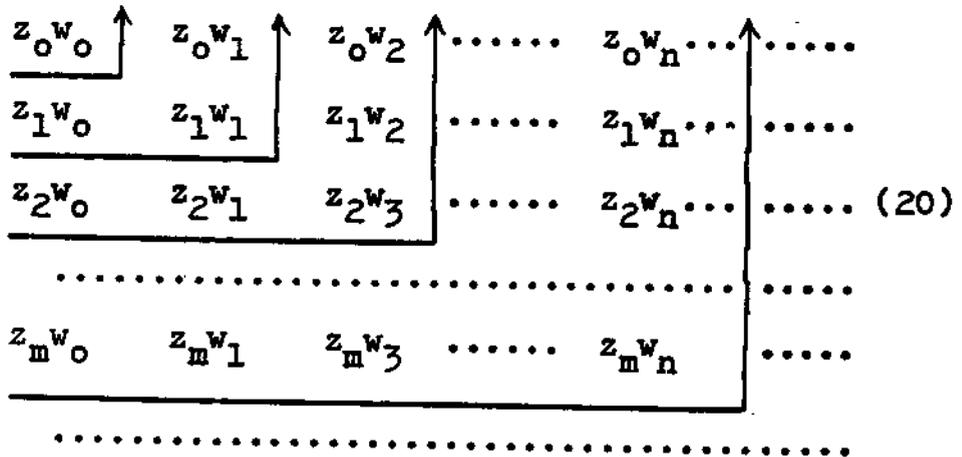
$$|p_0| + |p_1| + \dots + |p_n| < s s'$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n|$ é convergente, pois a sucessão de duas reduzidas é crescente e limitada.

Supondo válidas as hipóteses da proposição anterior, calculemos a soma da série produto. Sendo esta série convergente em valor absoluto, representemos por S a sua soma. Resulta da proposição 11 que tôdas as séries obtidas por permutação de $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$, também são convergentes para S . Tome mos para $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sucessão

$$z_0 w_0, z_1 w_0, z_1 w_1, z_0 w_1, \dots \quad (19)$$

obtida segundo o diagrama (20)



PROPOSIÇÃO 13. Mantendo as hipóteses da proposição 11, se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = s$ e $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = s'$, então $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = ss'$, sendo $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtida segundo o diagrama (20).

Demonstração

De fato, sejam

$$S_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n, \quad s_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n, \quad s'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n.$$

Verifica-se, por indução, que

$$s_n \cdot s'_n = S_{n^2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Resulta desta identidade,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n^2} = s \cdot s'$$

Sendo $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente para S , soma de $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$, conclui-se que a sucessão $(S_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ também convergirá para S , provando a proposição.

O método considerado anteriormente para somar a série produto, denomina-se somação por quadrados, nomenclatura esta sugerida pelo diagrama (20), pois $S_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$ é a soma dos elementos da matriz quadrada $(z_i w_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Há outros métodos para somar a série produto decorrentes das permutações de \mathbb{N} . Entre êstes métodos há um de grande importância em Análise, denominado produto de Cauchy ou convolução das sucessões $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Êste método consiste em adicionar os elementos das diagonais secundárias do quadro (20), isto é, as diagonais d_n , $n \in \mathbb{N}$, formadas pelos produtos $z_i w_j$ com $i+j = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obtem-se:

$$S_0 = z_0 w_0$$

$$S_1 = z_1 w_0 + z_0 w_1$$

$$S_2 = z_2 w_0 + z_1 w_1 + z_0 w_2$$

$$S_n = z_n w_0 + z_{n-1} w_1 + \dots + z_0 w_n$$

A série produto de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ assim obtida, sendo uma permutação da anterior (somação por quadrados), possuirá para soma o produto das somas das séries $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$.

Ao nos referirmos ao produto de séries, fica subentendido tratar-se do produto de Cauchy, isto é, da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n z_{n-i} w_i \right)$$

EXERCÍCIOS

1. Demonstre que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge em valor absoluto, quando existe um número positivo $k < 1$ tal que

$$|z_n|^{1/n} < k \quad \text{para todo } n > n_0.$$

2. Demonstre que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge em valor absoluto, se e somente se a sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com

$$s_n = |z_0| + |z_1| + \dots + |z_n|$$

fôr limitada.

3. Demonstre que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge em valor absoluto, quando existe um número positivo k tal que

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < k < 1$$

para todo n maior do que certo n_0 .

4. Definindo sucessão convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, como aquela em que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

demonstre a seguinte proposição:

"uma condição necessária e suficiente para que o número real x_0 seja o limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é que para cada $\varepsilon > 0$ exista $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > n_0.$$

5. Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Para quais valores de z ela converge? Represente por $S(z)$ a soma desta série. Calcule o produto de Cauchy $S(z) \cdot S(w)$ e verifique que ele é igual a $S(z+w)$. Demonstre que

$$S(z) \cdot S(z) \dots S(z) = S(nz)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, sendo n o número de fatores no produto do primeiro membro.

6. Represente por I a série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$, sendo $w_0 = 1$ e $w_n = 0$ para $n \geq 1$. Determine uma condição sobre uma série

$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ para que exista outra série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergente, tal que o produto de ambas seja igual a I. A série de termo geral b_n , quando existe, denomina-se inverso da série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Calcule o inverso da série do exercício 5. Sendo $S(z)$ a soma da série do exercício 5. Calcule $S(nz)$ para $n \in \mathbb{Z}$.

7. Represente por $\ell^2(\mathbb{C})$ a coleção de tôdas as sucessões $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}$, cuja série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2$ seja convergente. Demonstre as seguintes propriedades de $\ell^2(\mathbb{C})$:

a) Se $z, w \in \ell^2(\mathbb{C})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então $\alpha z + \beta w \in \ell^2(\mathbb{C})$.

b) Se $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertencem a $\ell^2(\mathbb{C})$, então $(z_n \bar{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também pertence a $\ell^2(\mathbb{C})$.

c) Defina $(z|w) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \bar{w}_n$ e prove que se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então

$(\alpha z + \beta z'|w) = \alpha(z|w) + \beta(z'|w)$, $(z|\alpha w) = \bar{\alpha}(z|w)$ para todo $z, z', w \in \ell^2(\mathbb{C})$.

d) Defina $\|z\| = \sqrt{(z|z)}$ e demonstre o seguinte:

$$1) \|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$$

$$2) \|\alpha z\| = |\alpha| \|z\|$$

$$3) \|z\| \geq 0$$

$$4) |(z|w)| \leq \|z\| \cdot \|w\|$$

$$5) \frac{\|z + w\|}{1 + \|z + w\|} \leq \frac{\|z\|}{1 + \|z\|} + \frac{\|w\|}{1 + \|w\|}$$

$$6) \quad | \|z\| - \|w\| | \leq \|z-w\|$$

7) Seja $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\ell^2(\mathbb{C})$. Diz-se que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $w \in \ell^2(\mathbb{C})$, se a sucessão $(\|w_n - w\|)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais for convergente para zero. Defina sucessão de Cauchy em $\ell^2(\mathbb{C})$ e demonstre que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $\ell^2(\mathbb{C})$ se e somente se $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sucessão de Cauchy.

CAPÍTULO 2LIMITE E CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES COMPLEXAS§1. LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Consideremos um sub conjunto E do plano complexo \mathbb{C} . Denomina-se função complexa ou aplicação complexa, a toda correspondência unívoca definida em E com valores em \mathbb{C} . Para representar uma função complexa, usaremos uma qualquer das seguintes notações:

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}; \quad f: z \in E \rightarrow f(z) \in \mathbb{C} \quad \text{ou} \quad w = f(z).$$

O subconjunto E aonde está definida a função f , denomina-se o domínio de f e a parte de \mathbb{C} igual a $\{f(z); z \in E\}$, denomina-se a imagem de E , a qual representaremos por $f(E)$. Para evitar repetição desnecessária, diremos função, ao invés de dizermos função complexa.

Exemplo 1: A correspondência

$$z \in \mathbb{C} \rightarrow z^n \in \mathbb{C} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

é um exemplo de função.

Exemplo 2: Consideremos o polinômio

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{sendo} \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

A correspondência

$$z \in \mathbb{C} \rightarrow a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{C}$$

é uma função. O exemplo 1 é um caso particular dêste.

Dada uma função $w = f(z)$, é usual e prático, imaginar-se

$z = x + iy$ variando em um plano denominado plano dos z e $w = u + iv$ variando em outro plano denominado plano dos w . Tem-se, desta forma, a seguinte visão geométrica de uma aplicação $f: E \rightarrow \mathbb{C}$

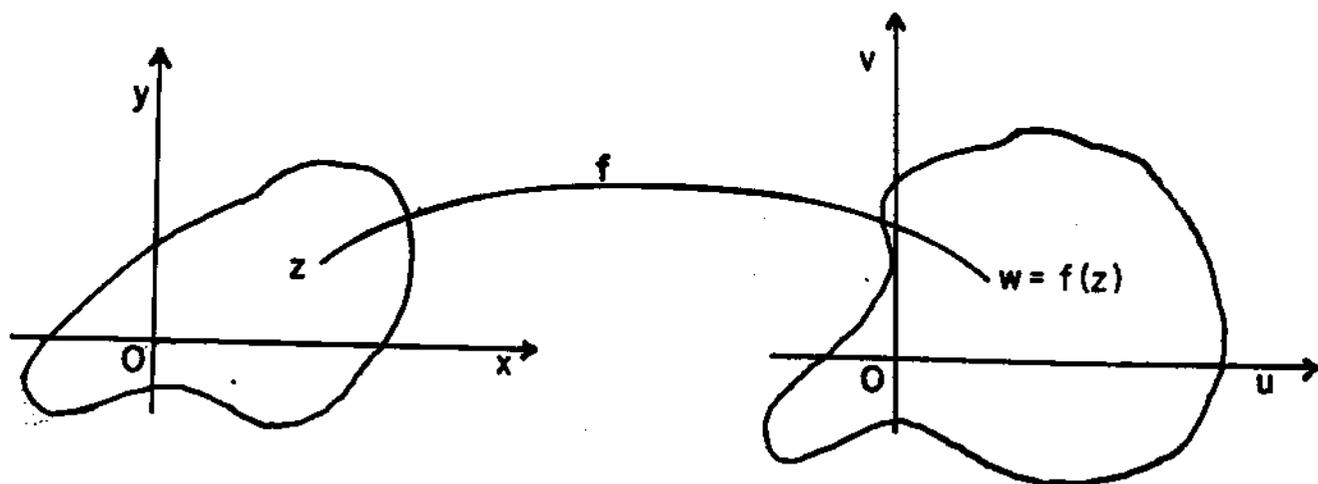


Fig. 3

DEFINIÇÃO 1. Sejam E um subconjunto de \mathbb{C} , z_0 um ponto de acumulação de E e uma função $f: E \rightarrow \mathbb{C}$. Diz-se que um número complexo L é limite de f em z_0 , quando para cada $\varepsilon > 0$, existe um número positivo $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ tal que

$$|f(z) - L| < \varepsilon, \text{ para todo } z \in E \text{ sendo } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Usa-se a notação

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

para significar que L é o limite de f no ponto z_0 . Note que na definição de limite exige-se apenas $|z - z_0| > 0$, isto é, para os z do disco aberto $V_\delta(z_0)$ que sejam distintos de z_0 e que pertençam a E . Isto, porque não é necessário que f esteja definida

em z_0 para que ela aí possua limite. Assim, a noção de limite de uma função em ponto z_0 , diz respeito ao comportamento de f nos pontos próximos de z_0 , excluindo o próprio z_0 . Por exemplo, a função $f: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{z}{|z|},$$

possui limite igual a um no ponto $z_0 = 0$, embora não seja definida neste ponto.

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que uma função $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ é limitada em E , quando o conjunto imagem $f(E)$ fôr limitado, isto é, quando existe $C > 0$, tal que $|f(z)| < C$ para todo $z \in E$. Diz-se que f é limitada em z_0 , quando f fôr limitada em algum disco aberto $V(z_0)$.

Observe que no caso $E = \mathbb{N}$, obtêm-se os correspondentes conceitos para sucessões, como aliás foi observado no capítulo 1, §3. Desta forma, com uma técnica análoga ao caso das sucessões, são demonstradas as seguintes proposições:

1. Unicidade do limite de uma função em um ponto.
2. Se f possui limite L em um ponto z_0 , então f é limitada em z_0 .
3. Suponhamos $f: E \rightarrow \mathbb{C}$, $g: E \rightarrow \mathbb{C}$ e existam os limites de f e g em z_0 . Então, valem as seguintes igualdades:

$$a) \lim_{z \rightarrow z_0} (\lambda f(z) + \mu g(z)) = \lambda \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \mu \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$b) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

c) Se $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$, então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}.$$

Consideremos a função $w = f(z)$ com domínio E . Decompondo o número complexo w em suas partes real e imaginária, obtém-se

$$w = u(x,y) + iv(x,y),$$

sendo u, v funções numéricas reais, definidas no subconjunto do \mathbb{R}^2 que se identifica a E .

PROPOSIÇÃO 1. Uma condição necessária e suficiente para que $L = a + bi$ seja o limite de f em $z_0 = x_0 + iy_0$, é que a e b sejam, respectivamente, os limites de u e v em (x_0, y_0) .

A demonstração desta proposição é simples. É suficiente considerar as desigualdades $|u(x,y) + iv(x,y) - a - ib| < \varepsilon$, $|x + iy - x_0 - iy_0| < \delta$, dadas pela definição 1. Faça os detalhes como exercício.

Quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que

$$|f(z) - L| < \varepsilon \quad \text{para os } z \in E, \text{ com } |z| > C,$$

diz-se que L é o limite de f quando z tende para o infinito.

Quando para cada $k > 0$ existe $C > 0$ tal que

$|f(z)| > k$ para $z \in E$ com $|z| > C$,

diz-se que f tende para o infinito quando z tende para o infinito.

Diz-se que f tende para o infinito quando z tende para z_0 , quando para cada $k > 0$ existe $\delta = \delta(k, z_0)$ tal que

$$|f(z)| > k \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ com } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Observe, entretanto, que ao falarmos em limite de uma função num ponto z_0 , estamos nos referindo ao caso da definição 1. As considerações anteriores sobre o ∞ muito ajudarão em certas formulações.

Observação 1. Na definição 1 a condição $|f(z) - L| < \varepsilon$ para todo $z \in E$ com $0 < |z - z_0| < \delta$ pode ser formulada, equivalentemente, como segue. Represente por $V(z_0) - \{z_0\}$ o disco aberto $V_\delta(z_0)$ excluindo o centro z_0 . Desta forma, a condição anterior pode ser expressa do modo seguinte: $|f(z) - L| < \varepsilon$ para todo $z \in (V_\delta(z_0) - \{z_0\}) \cap E$. Diz-se que L é o limite de f em z_0 relativamente a E .

§2. FUNÇÕES CONTÍNUAS

Seja $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ e z_0 um ponto de acumulação de E pertencente a E . Diz-se que f é contínua em z_0 , quando o limite de f no ponto z_0 for igual a $f(z_0)$. Note que z_0 é um ponto de acumulação pertencente a E . Assim, podemos formalizar a noção de função contínua, em termos da definição 1, como segue. Diz-se que f é contínua num ponto de acumulação z_0 de E , $z_0 \in E$,

quando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ para todo } z \in E \text{ com } |z - z_0| < \delta.$$

Levando em conta a observação 1 feita no parágrafo anterior, o conceito de continuidade definido, é o de continuidade no ponto z_0 , relativamente a E . Diremos apenas continuidade no ponto z_0 .

Diz-se que $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em E , quando f fôr contínua em cada ponto de $E \cap E'$, sendo E' a coleção de todos os pontos de acumulação de E . Quando E' fôr vazio, diz-se que $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em E .

PROPOSIÇÃO 1. Seja $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ e ζ um ponto de acumulação de E pertencente a E . Uma condição necessária e suficiente para que f seja contínua em ζ , é que para cada sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de E convergente para ζ , a sucessão $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de $f(E)$ convirja para $f(\zeta)$.

Demonstração

De fato, seja $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ contínua em ζ . Logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe um número positivo $\delta = \delta(\varepsilon, \zeta)$ tal que

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon \text{ para todo } z \in E \text{ com } |z - \zeta| < \delta.$$

Sendo $z_n \rightarrow \zeta$, conclui-se que $|z_n - \zeta| < \delta$ para n maior que um certo $n_0 = n_0(\delta)$. Portanto, para concluir-se que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|f(z_n) - f(\zeta)| < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0.$$

Isto nos diz que $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(\zeta)$.

Suponhamos que para toda sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de

E , convergente para ζ , a sucessão $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(\zeta)$. Suponhamos f não contínua em ζ . Resulta que para algum $\varepsilon > 0$, obtem-se

$$|f(z) - f(\zeta)| > \varepsilon \text{ para todo } z \in E \text{ com } |z - \zeta| < \delta,$$

qualquer que seja o δ . Logo, obtem-se uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos de E convergindo para ζ sem que $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convirja para $f(\zeta)$, o que é contraditório. Resulta que f é contínua em ζ .

PROPOSIÇÃO 2. Sejam f, g funções contínuas em E . Então serão contínuas em E as seguintes funções: $f+g, \lambda f, \lambda \in \mathbb{C}, f \cdot g, f/g$, quando esta última função for definida.

A demonstração desta proposição é deixada como exercício, por ser análoga a que foi feita para sucessão.

Sejam $f: E \rightarrow F$ e $g: G \rightarrow \mathbb{C}$, sendo $F \subseteq G$, duas funções, sendo E, F, G subconjuntos de \mathbb{C} . Suponhamos que $F = f(E)$. A função $h: E \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $h(z) = g(f(z))$, denomina-se função composta de f com g e representa-se por $h = gf$. Se z_0 fôr um ponto de acumulação de E e $w_0 = f(z_0)$ ponto de acumulação de G , tem sentido falar em limite de h no ponto z_0 .

PROPOSIÇÃO 3. Sejam f e g contínuas em z_0, w_0 ($w_0 = f(z_0)$), respectivamente. Então a função composta $h: E \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em z_0 .

Demonstração

De fato, seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de pontos de E convergindo para z_0 . Sendo f contínua resulta que a sucessão

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $w_n = f(z_n)$ para todo n , de pontos de F convergirá para $w_0 = f(z_0)$. Sendo g contínua em w_0 , resulta que $(g(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $g(w_0)$. Obtem-se, portanto, que para toda sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para z_0 , resulta que $(h(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $h(z_0)$, sendo h a composta de f com g . Logo h é contínua em z_0 .

TEOREMA 1. Seja $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ contínua. Se $K \subset \mathbb{C}$ for compacto, então $f(K)$ será compacto.

Demonstração

O caso em que K é finito o teorema é imediato. Suponhamos K com infinitos pontos. Demonstramos, inicialmente, que $f(K)$ é limitado. Sendo f contínua em K , se $\zeta \in K$, para cada $\varepsilon > 0$ existe um disco aberto $V_\delta(\zeta)$, $\delta = \delta(\varepsilon, \zeta)$, tal que

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon \quad \text{para todo } z \in V_\delta(\zeta) \cap K.$$

Dito de modo equivalente,

$$f(V_\delta(\zeta) \cap K) \subset V_\varepsilon(f(\zeta)).$$

A família de discos abertos $(V_\delta(\zeta))_{\zeta \in K}$ cobre K . Sendo K compacto, pelo teorema de Heine-Borel, (cfr. cap. 1, §2), existe um número finito de discos desta família que ainda cobre K . Sejam $(V_{\delta_1}(\zeta_1))$, $i = 1, 2, \dots, n$, a sub família finita que cobre K . Tem-se,

$$f(V_{\delta_1}(\zeta_1) \cap K) \subset V_{\varepsilon_1}(f(\zeta_1)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Sendo

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n f(V_{\delta_1}(\zeta_1) \cap K),$$

resulta que

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\varepsilon_i}(f(\zeta_i))$$

o que prova ser $f(K)$ um sub conjunto limitado de \mathbb{C} .

Demonstremos que $f(K)$ é fechado. De fato, seja w um ponto de acumulação de $f(K)$ e provemos que $w \in f(K)$. Resulta que existe uma sucessão $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos distintos de $f(K)$ convergindo para w . (cap. 1, §2, prop. 5). Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $z_n \in K$ tal que $f(z_n) = w_n$. Sendo os w_n distintos, o conjunto $E = \{z_n \in K; f(z_n) = w_n, n \in \mathbb{N}\}$ é infinito. Sendo $E \subset K$, ele será limitado, logo possui um ponto de acumulação $\zeta \in K$, pois K é fechado. Portanto, existe uma subsucessão $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ da sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ($w_n = f(z_n)$), convergente para ζ . Sendo f contínua em K , resulta que $f(z_{k_n}) \rightarrow f(\zeta)$. Sendo $f(z_{k_n}) \rightarrow w$, conclui-se que $w = f(\zeta)$, isto é, $w \in f(K)$ provando ser $f(K)$ fechado.

DEFINIÇÃO 1. Seja $f: E \rightarrow \mathbb{C}$. Denomina-se valor absoluto ou módulo de f , a função

$$|f|: E \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por $|f|(z) = |f(z)|$, para todo $z \in E$.

Sendo

$$||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)|,$$

quaisquer que sejam $z, z_0 \in E$, conclui-se que se f for contínua em E , então $|f|$ também será contínua em E . Por esta razão, tem-se a seguinte proposição que é um corolário do teore

ma 1.

PROPOSIÇÃO 3. Seja $K \subset \mathbb{C}$ um subconjunto compacto e f contínua sobre K . Então existem dois pontos z_1, z_2 pertencentes a K , tais que

$$|f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|$$

para todo $z \in K$.

Demonstração

De fato, sendo f contínua em K , resulta que $|f|$ também será, como foi visto acima. Logo, pelo teorema 1 conclui-se que

$$|f|(K) = \{ |f(z)| \in \mathbb{R}, z \in K \}$$

é compacto. Desta forma, sendo $|f|(K)$ limitado, êle possui um ínfimo s e um supremo S . Sendo s e S pontos de acumulação do conjunto fechado $|f|(K)$, segue-se que s, S são pontos dêste conjunto. Portanto, existem dois pontos z_1, z_2 de K tais que $|f(z_1)| = s, |f(z_2)| = S$, o que demonstra a proposição.

Na definição de continuidade, fixado $\epsilon > 0$, o número $\delta > 0$ depende de ϵ e z_0 . Quando para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ dependendo apenas de ϵ qualquer que seja o ponto z_0 em E' , diz-se que f é uniformemente contínua em E . Portanto, dizer que f é uniformemente contínua em E , significa dizer que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{para } z \in E \text{ com } |z - z_0| < \delta,$$

para todo ponto de acumulação $z_0 \in E$. O teorema que segue

nos dá uma condição suficiente para que uma função contínua seja uniformemente contínua.

TEOREMA 2 (Heine-Cantor). Se f for contínua num conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, ela será uniformemente contínua em K .

Demonstração

Vamos admitir que todo ponto de K seja ponto de acumulação, em que nada particulariza a demonstração, apenas facilita a linguagem. Devemos demonstrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ para todo par de pontos $z, z' \in K$, tais que $|z - z'| < \delta$.

De fato, sendo f contínua em K , tomando $z \in K$, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, z)$ tal que

$$|f(z') - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } z' \in V(z) \cap K.$$

Sendo $(V(z))_{z \in K}$ uma cobertura de K , e sendo K compacto, resulta que existe um número finito de discos desta família que ainda cobrem K . Seja

$$V_{\frac{\delta_1}{2}}(z_1), V_{\frac{\delta_2}{2}}(z_2), \dots, V_{\frac{\delta_n}{2}}(z_n)$$

a sub família que cobre K . Observe que estamos representando por δ_k o número $\delta(\varepsilon, z_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Consideremos o número $\delta = \delta(\varepsilon)$ definido por

$$0 < \delta(\varepsilon) < \frac{1}{2} \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n).$$

Demonstremos que o δ dado por este mínimo é o conveniente da

continuidade uniforme. De fato, suponhamos que z, z' sejam dois pontos de K tais que $|z-z'| < \delta$. Sendo $z \in K$, êle pertence a algum $V_{\frac{\delta_k}{2}}(z_k)$, para $1 \leq k \leq n$. Logo,

$$|f(z) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tem-se

$$|z' - z_k| \leq |z' - z| + |z - z_k| < \delta + \frac{\delta_k}{2} < \frac{\delta_k}{2},$$

para $k = 1, 2, \dots, n$. Resulta daí que

$$z' \in V_{\frac{\delta_k}{2}}(z_k),$$

logo

$$|f(z') - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, se $|z-z'| < \delta$, obtem-se

$$|f(z) - f(z')| \leq |f(z) - f(z_k)| + |f(z_k) - f(z_k')| < \varepsilon,$$

o que demonstra o teorema.

EXERCÍCIOS

1. Demonstre que a função

$$p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ é contínua em \mathbb{C} .

2. Se p e q fôrem duas funções como no exercício 1, estude a continuidade das funções p/q , $p \cdot q$ e $p+q$.

3. Considere as funções

$$f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad g(z) = \frac{\operatorname{Im} z^2}{|z^2|}, \quad z \neq 0.$$

Estas funções possuem limite no ponto $z = 0$?

4. Dada a função $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}$, calcule o limite quando z tende a zero. É esta função contínua em $z = 0$.

5. Dada a função $f(z) = e^{-\frac{1}{|z|}}$, para $0 < |z| < 1$, calcule o seu limite no ponto $z = 0$. Defina, a partir de f , uma função g contínua em $|z| < 1$. É g uniformemente contínua em $|z| < 1$. A g diz-se uma extensão contínua de f .

6. É $f(z) = \frac{1}{1-z}$ contínua em $|z| < 1$? Demonstre que f não é uniformemente contínua em $|z| < 1$.

7. Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função uniformemente contínua em Ω .

a) Seja $|z| = 1$ e $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de Ω convergente para z . Demonstre que $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

b) Demonstre que o limite da sucessão $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ da parte b, independe da sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Ω .

c) Defina uma extensão contínua de f ao fecho $\bar{\Omega}$ de Ω .

CAPÍTULO 3DERIVADA - FUNÇÕES HOLOMORFAS - EQUAÇÕES DE CAUCHY RIEMANN -
FUNÇÕES ELEMENTARES - NOÇÕES SÔBRE SUPERFÍCIES DE RIEMANN -
FUNÇÕES HOMOGRAFICAS§1. DERIVADAS - FUNÇÕES HOLOMORFAS

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Tome-mos um ponto $z_0 \in \Omega$ e definamos a função $\Delta(f, z_0)$ em $\Omega - \{z_0\}$ do seguinte modo:

$$\Delta(f, z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z \in \Omega - \{z_0\}$$

DEFINIÇÃO 1. Quando existe o limite da função $\Delta(f, z_0)$ no ponto $z_0 \in \Omega$, diz-se que f é derivável em z_0 , sendo êste limite denominado a derivada da função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ no ponto $z_0 \in \Omega$.

Representa-se a derivada de f no ponto z_0 por qualquer uma das seguintes notações:

$$f'(z_0); \quad \text{ou} \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}.$$

Desta forma, quando f for derivável em z_0 , escreve-se

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Exemplo 1. Seja $n \in \mathbb{N}$ e $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$f(z) = z^n$. Calculemos a sua derivada num ponto $z_0 \in \mathbb{C}$.

De fato, tem-se

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1}).$$

Resulta que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1}) = nz_0^{n-1}.$$

Logo,

$$f'(z_0) = n z_0^{n-1}.$$

Observação 1. Na definição de derivada, quando diz-se que $\lim_{z \rightarrow z_0} \Delta(f, z_0)$ existe, fica subentendido que êle é um número complexo w_0 , que independe do caminho seguido por z ao atender a z_0 .

Exemplo 2. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \operatorname{Re} z$.

Se $z = x+iy$, tem-se $f(z) = x$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Seja z_0 um ponto qualquer de \mathbb{C} . Tem-se

$$\Delta(f, z_0) = \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)}.$$

Fazendo $z \rightarrow z_0$, sendo z pertencente a reta $\operatorname{Re} z = x_0$, resulta que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = 0.$$

Analogamente, fazendo $z \rightarrow z_0$, sendo z pertencente a reta $\operatorname{Im} z = y_0$, resulta que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = 1.$$

Conclui-se que a função $f(z) = \operatorname{Re} z$ não possui derivada no sentido da definição 1. Note, todavia, que a restrição $f|_{\mathbb{R}} = g$ de f a \mathbb{R} , é derivável como função de variável real, sendo igual a um a sua derivada. Portanto, a exigência de derivabilidade no caso complexo, é uma condição sôbre a função, mais forte do que a derivabilidade no caso real. Desta forma, embora as definições de derivada nos casos complexo e real sejam semelhantes, é importante observar a grande diferença entre elas existente, como mostra o exemplo anterior. Faremos mais uma observação, a qual servirá para salientar quão forte é a imposição de derivabilidade no caso complexo. No caso de funções reais de variável real, a construção de uma função contínua não possuindo derivada em um conjunto foi elucidada, pela primeira vez, por Weierstrass, publicado por Du Bois Reymond em 1875. Alguns dos exemplos, construídos posteriormente, de tais funções, embora elementares, não são tão simples como no caso das funções complexas. Por exemplo, a função $f(z) = \operatorname{Re} z$ é contínua em \mathbb{C} , mas não possui derivada em \mathbb{C} . Outro exemplo simples é o que segue

Exemplo 3. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \bar{z}$, sendo \bar{z} o conjugado de z , a qual é contínua.

Seja z_0 um ponto qualquer de \mathbb{C} . Tem-se

$$\Delta(f-z_0) = \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0} = \frac{(x-x_0)-i(y-y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}.$$

Repetindo o método do exemplo 2, constata-se que não exis

te

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}.$$

Logo, $f(z) = \overline{z}$ não é derivável em \mathbb{C} .

DEFINIÇÃO 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Diz-se que f é holomorfa em Ω , quando f for derivável em cada ponto z_0 de Ω . Diz-se que f é holomorfa em um ponto z_0 , quando f for holomorfa em um domínio Ω que contém z_0 .

A seguir veremos um exemplo de função f derivável em um ponto z_0 de um domínio, sem que f seja holomorfa em z_0 .

Exemplo 3. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = |z|^2$.

Inicialmente, provaremos que f é derivável em $z_0 = 0$. De fato,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = 0.$$

Assim, f é derivável em $z_0 = 0$, sendo nula a sua derivada.

Seja z_0 um ponto qualquer do plano complexo, diferente da origem. Tem-se

$$\Delta(f, z_0) = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0}.$$

Substituamos $z = x+iy$, $z_0 = x_0 + i y_0$ na expressão de $\Delta(f, z_0)$. Repetindo o argumento do exemplo 2, constata-se que se $z_0 \neq 0$, então $\Delta(f, z_0)$ não possui limite no ponto z_0 . Logo, f é derivável em $z_0 = 0$, sem ser aí holomorfa.

Observação 2. Antes de continuarmos o estudo das funções

holomorfas, faremos um breve comentário sôbre a nomenclatura. No estudo das funções de variável real, diz-se que $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ analítica em um ponto x_0 de (a, b) , quando f é representável por uma série de potências

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

uniformemente convergente em $(x_0 - r, x_0 + r) \subset (a, b)$. Diz-se que $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é analítica em (a, b) quando f é analítica em cada ponto de (a, b) . Demonstra-se que se f for analítica em (a, b) , f possui derivadas de tôdas as ordens. O termo função analítica assim definido, foi introduzido por Lagrange (1736/1813) e adotado por Weierstrass (1815/1897). Ao estudar o caso complexo, demonstra-se, como veremos no capítulo 4, que se uma função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ for derivável em cada ponto de um domínio Ω , então f possui derivada de tôdas as ordens em Ω . Por esta razão, por hereditariedade com o caso real, as funções $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deriváveis, foram denominadas, por alguns autores, analíticas ou regulares em Ω . Quando $\Omega = \mathbb{C}$ e $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável em todo ponto z_0 de \mathbb{C} , diz-se que f é uma função inteira. A função $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ é um exemplo de função inteira. O termo holomorfa, significa que a função é semelhante às funções inteiras. Este termo foi proposto por Briot (1817/1882) e Bouquet (1819/1895), matemáticos pertencentes a escola de Cauchy. Outras nomenclaturas existem. Alguns autores denominam monógena em z_0 a uma função derivável em z_0 e analítica ou regular em um domínio Ω , a uma função f que é monógena em cada ponto de Ω . Adotaremos a no-

menclatura contida na definição 2 dada anteriormente.

PROPOSIÇÃO 1 Se f for holomorfa em um domínio Ω , ela é contínua em Ω .

Demonstração

Seja z_0 um ponto qualquer de Ω . A demonstração é uma consequência imediata da identidade

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)$$

é da hipótese de derivabilidade da f em Ω .

As regras de derivação para funções holomorfas são demonstradas exatamente, como no caso real.

PROPOSIÇÃO 2. Sejam f, g funções holomorfas em um domínio Ω . Então as funções $f + g, \lambda f, \lambda \in \mathbb{C}, f \cdot g, f/g$, onde $g(z) \neq 0$, são holomorfas em Ω , valendo as seguintes regras de derivação:

a) $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

b) $(\lambda f)'(z) = \lambda f'(z)$

c) $(f \cdot g)'(z) = f'(z) g(z) + f(z) g'(z)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{g(z) f'(z) - f(z) g'(z)}{g^2(z)}$

PROPOSIÇÃO 3. Seja $h = g \circ f$ a função composta de f com g . Se f for derivável em z_0 , g derivável em $w_0 = f(z_0)$, então h é derivável em z_0 , valendo seguinte regra de derivação:

$$h'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) . \quad (1)$$

Demonstração

Suponhamos que exista um disco aberto $V(z_0)$ tal que para todo $z \in V(z_0) \cap \Omega$, $f(z) = w \neq w_0$. (Note que estamos trabalhando em um ponto de acumulação e em outro w_0 da imagem.)

Neste caso, obtem-se

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (2)$$

Sendo g holomorfa em Ω , resulta, proposição 1, que g é contínua em Ω . Logo, tomando o limite de ambos os membros de (2) quando z tende para zero, conclui-se a regra de derivação (1).

Suponhamos que todo disco aberto $V(z_0)$, contenha um ponto $z \in \Omega$, $z \neq z_0$, tal que $f(z) = f(z_0) = w_0$. Resulta que existe uma sucessão $\{z_n\}$ de pontos distintos de Ω , convergindo para z_0 e tal que $f(z_n) = f(z_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. para esta sucessão tem-se $(f(z_n) - f(z_0))/(z_n - z_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, como existe o

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

pela hipótese da derivabilidade da f em z_0 , conclui-se que ele será nulo, isto é, $f'(z_0) = 0$. Desta forma, para completar a demonstração da proposição, devemos provar que na hipótese feita, também é nulo o primeiro membro de (1). De fato, é suficiente demonstrar que para toda sucessão $\{\xi_n\}$ de Ω , convergindo, para z_0 , tal que $f(\xi_n) = \zeta_n \neq w_0 = f(z_0)$, se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(\xi_n)) - g(f(z_0))}{\xi_n - z_0} = 0 \quad (3)$$

Realmente, para uma tal sucessão $\{\xi_n\}$, vale a identidade

$$\frac{g(\xi_n) - g(w_0)}{\xi_n - w_0} \cdot \frac{\xi_n - w_0}{z - z_0} = \frac{g(\xi_n) - g(w_0)}{\xi_n - w_0} \cdot \frac{f(\xi_n) - f(z_0)}{z - z_0}$$

da qual resulta, como no primeiro caso, que o limite é $g'(w_0) \cdot f'(z_0)$. Sendo $f'(z_0) = 0$, conclui-se que (3) é verdadeira, terminando, deste modo, a demonstração da proposição.

§2. EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Neste parágrafo, veremos que o problema de sabermos de uma função complexa f é derivável em um ponto $z_0 = x_0 + i y_0$, reduz-se a questão de sabermos se as partes real e imaginária de f são parcialmente deriváveis em (x_0, y_0) . Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, sendo $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e escrevamos f sob a forma:

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

sendo $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

TEOREMA 1. Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 = x_0 + i y_0$. Uma condição necessária para que f seja derivável em z_0 é que u, v possam derivadas parciais de primeira ordem em (x_0, y_0) , satisfazendo a seguinte condição:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0); \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Demonstração

De fato, sendo f derivável em z_0 , podemos escrever

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \xi(z, z_0)(z - z_0) \quad (4)$$

em um disco aberto $V(z_0)$, sendo $\lim_{z \rightarrow z_0} \xi(z, z_0) = 0$. Fazamos $\xi = \xi_1 + i \xi_2$ e $f'(z_0) = a + ib$. Desta forma, a (4) toma a forma

$$f(z) - f(z_0) = (a + ib)(z - z_0) + (\xi_1 + i \xi_2)(z - z_0) \quad (5)$$

sendo $\xi_1 \rightarrow 0$, $\xi_2 \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow z_0$, porque $|\xi_1| \leq |\xi|$, $|\xi_2| \leq |\xi|$. Tomando

$$f(z) - f(z_0) = u(x, y) - u(x_0, y_0) + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)],$$

$$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$$

em (5), efetuando os cálculos e igualando as partes reais e imaginárias, obtem-se:

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = a(x - x_0) - b(y - y_0) + \xi_1(x - x_0) - \xi_2(y - y_0)$$

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = b(x - x_0) + a(y - y_0) + \xi_2(x - x_0) + \xi_1(y - y_0)$$

Estas igualdades implicam a existência das derivadas parciais de u , v no ponto (x_0, y_0) , sendo

$u_x(x_0, y_0) = a$; $u_y(x_0, y_0) = -b$; $v_x(x_0, y_0) = b$; $v_y(x_0, y_0) = a$, provando o teorema 1.

Suponhamos f holomorfa em um domínio Ω . Resulta, do teorema 1, que u e v possuem derivadas parciais de primeira ordem em Ω , satisfazendo a condição:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5)$$

As equações (5) são denominadas equações de Cauchy-Riemann.

Consideremos duas soluções u , v das equações de Cauchy-Riemann. Se com estas funções, definirmos a função complexa $f(z) = u + iv$, ela não será necessariamente derivável nos pontos onde u e v satisfazem a condição (5). Realmente, o exemplo que segue tornará claro o que acabamos de afirmar. Suponhamos u e v definidas no \mathbb{R}^2 por

$$u(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0); u(0,0) = 0$$

$$v(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^3 + y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0); v(0,0) = 0$$

Obtem-se

$$u_x(0,0) = 1; \quad v_x(0,0) = 1$$

$$u_y(0,0) = -1; \quad v_y(0,0) = 1$$

Portanto, as funções u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto $(0,0)$. Vejamos que $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ não é derivável no ponto $z_0 = 0$. De fato, demonstraremos que

$\lim_{z \rightarrow 0} \Delta(f,0)$ possui valores distintos segundo as retas $\operatorname{Re} z = 0$ e $z = (1+i)x$. Quando $\operatorname{Re} z = 0$, resulta

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-y + iy}{iy} = 1 + i$$

Quando $z = x+ix$, obtem-se

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ix}{x+ix} = \frac{1}{2} (1+i) .$$

Conclui-se que apenas as equações de Cauchy-Riemann não são uma condição suficiente para que $f(z) = u+iv$ seja derivável. Com uma hipótese suplementar às equações de Cauchy-Riemann obtem-se, através do teorema que segue uma condição suficiente para que f seja derivável. Antes, porém, relembremos o conceito de função diferenciável. Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^2 e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma função numérica. Diz-se que u é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \Omega$, quando existem números reais a, b , fixos, tais que

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + \varepsilon |z - z_0|,$$

para (x, y) um disco aberto com centro em (x_0, y_0) contida em Ω , sendo $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon = 0$, e $|z - z_0|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Dizer que u é diferenciável em (x_0, y_0) , significa dizer que podemos aproximar u num disco aberto com centro em (x_0, y_0) , pela função linear $(x, y) \rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0)$. Demonstra-se que quando u é diferenciável em (x_0, y_0) , u possui derivadas parciais $u_x(x_0, y_0)$, $u_y(x_0, y_0)$ no ponto (x_0, y_0) , sendo $a = u_x(x_0, y_0)$, $b = u_y(x_0, y_0)$. Desta forma, quando u é diferenciável em (x_0, y_0) , escreve-se:

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon |z - z_0|,$$

com as condições anteriores sobre ε e $|z - z_0|$. Prova-se que se u possui derivadas parciais contínuas no aberto Ω , então u é diferenciável em cada ponto de Ω . Os resultados mencionados sobre funções numéricas diferenciáveis, podem ser encontrados no livro de R. Courant, *Differential and Integral Calculus*,

volume II, Interscience Publ. Inc., N.Y. Entretanto, não é necessário o leitor parar neste ponto em busca das demonstrações; é suficiente procurar entender os enunciados formulados, para usá-los na demonstração do teorema que segue.

TEOREMA 2. Sejam u, v funções numéricas definidas num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, possuindo derivadas de primeira ordem contínuas em Ω e satisfazendo às equações de Cauchy-Riemann. Então $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é holomorfa no domínio Ω .

Demonstração

De fato, seja $z_0 = x_0 + i y_0$ um ponto qualquer de Ω . Como u, v possuem derivadas parciais contínuas, então elas são diferenciáveis em (x_0, y_0) . Logo, pelas considerações feitas, anteriormente, sobre funções numéricas, obtém-se:

$$u(x,y) - u(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon_1 |z - z_0|$$

$$v(x,y) - v(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon_2 |z - z_0|$$

Multiplicando a segunda desigualdade por i e adicionando à primeira, obtém-se

$$f(z) - f(z_0) = \left[u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[u_y(x_0, y_0) + i v_y(x_0, y_0) \right] (y - y_0) + \varepsilon |z - z_0|$$

com $\varepsilon = \varepsilon_1 + i \varepsilon_2$. Note que $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon = 0$, devido às hipóteses sobre ε_1 e ε_2 . Sendo u e v soluções das equações de Cauchy-Riemann, a última igualdade escreve-se sob a seguinte forma:

$$f(z) - f(z_0) = \left[u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) \right] (z - z_0) + \varepsilon |z - z_0|.$$

Supondo $z \neq z_0$, dividindo ambos os membros da última igualdade

por $z-z_0$, obtém-se:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \varepsilon \frac{|z-z_0|}{z-z_0}. \quad (6)$$

Observação 1. Representando por θ o argumento de $z-z_0$, resulta $z-z_0 = |z-z_0| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Logo, $\varepsilon |z-z_0| (z-z_0)^{-1} = \varepsilon (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$ para $z \neq z_0$, resulta que quando $z \rightarrow z_0$, $\varepsilon |z-z_0| (z-z_0)^{-1} \rightarrow 0$.

Tomando em (6) o limite quando $z \rightarrow z_0$, levando em conta a observação 1, conclui-se que f é derivável em z_0 , obtendo-se

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Sendo $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto qualquer de Ω , conclui-se que f é holomorfa em Ω , sendo $f'(z)$ a sua derivada no ponto z , obtida por

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) \quad (7)$$

ou, pelas equações de Cauchy-Riemann,

$$f'(z) = \frac{1}{i} [u_y(x, y) + i v_y(x, y)]. \quad (8)$$

Resumindo os teoremas 1 e 2, podemos dizer que uma condição necessária e suficiente para que $w = f(z) = u+iv$ seja holomorfa em um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, é que u e v possuam derivadas parciais primeiras contínuas, satisfazendo às equações de Cauchy-Riemann.

Reexaminemos os exemplos anteriores em face desta condição.

1. Consideremos a função $f(z) = \operatorname{Re} z$. Tem-se $u = x$, $v = 0$. Logo, $u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = 0$, não sendo satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann em ponto algum de \mathbb{R}^2 .

2. Seja $f(z) = |z|^2$. Tem-se $u = x^2 + y^2$, $v = 0$. Resulta que $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = 0$, $v_y = 0$. As equações de Cauchy-Riemann só são satisfeitas na origem. Logo, esta função só é derivável neste ponto, não sendo, portanto, holomorfa em $z_0 = 0$.
3. A função $f(z) = \bar{z}$, possui, $u = x$, $v = -y$. Tem-se $u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = -1$. As equações de Cauchy-Riemann não são satisfeitas em ponto algum do plano.
4. Se $f(z) = z^2$, obtem-se $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Resulta $u_x = 2x$, $u_y = -2y$, $v_x = 2y$, $v_y = 2x$. Conclui-se que as derivadas parciais primeiras são contínuas em \mathbb{R}^2 e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em qualquer ponto. Logo $f(z) = z^2$ é holomorfa em \mathbb{C} .

PROPOSIÇÃO 1. Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no domínio Ω . Se $f'(z) = 0$ em Ω , então f é constante.

Demonstração

De fato, tem-se $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0$ em Ω . Pelas equações de Cauchy-Riemann conclui-se que $v_y(x,y) - i u_y(x,y) = 0$ em Ω . Resulta que $u_x(x,y) = v_x(x,y) = v_y(x,y) = u_y(x,y) = 0$ em Ω , logo u e v são constantes, provando ser f constante em Ω .

TEOREMA 3. (Função Inversa). Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, contínua e derivável no domínio Ω . Se $f'(z) \neq 0$ em Ω , então f é localmente biunívoca em Ω . Sua inversa f^{-1} é derivável e em cada $w = f(z)$, obtem-se

$$\frac{df^{-1}(w)}{dw} = \frac{1}{f'(z)} .$$

Demonstração

Fixemos um ponto $z = x+iy$ em Ω e seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Pela hipótese do teorema, tem-se $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$ neste ponto. Resulta das equações de Cauchy-Riemann,

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0 \quad (9)$$

Consideremos a aplicação $T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y) \quad (10)$$

De (9) conclui-se que o determinante da matriz jacobiana de T é diferente de zero num disco aberto com centro no ponto (x,y) . Portanto, T^{-1} existe, definida pela solução do sistema (10), que representaremos por

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad (11)$$

sendo estas funções continuamente parcialmente deriváveis. Portanto, para provarmos que $f^{-1}(w) = x(u,v) + iy(u,v)$ é derivável em $w = u + iv$, é suficiente, pelo teorema 2, demonstrar que as funções (11) são soluções das equações de Cauchy-Riemann. Suponhamos as funções (11) substituídas em (10) e derivemos em relação a u ambas as equações. Obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} x_u + \frac{\partial u}{\partial y} y_u = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial x} x_u + \frac{\partial v}{\partial y} y_u = 0 . \quad (12)$$

Resolvendo o sistema (12), levando em conta a (9), conclui-se que

$$x_u = \frac{v_y}{f'(z) f'(z)} ; \quad y_u = \frac{-v_x}{f'(z) f'(z)} \quad (13)$$

De maneira análoga, derivando em relação a v , obtém-se

$$x_v = \frac{-u_y}{f'(z) f'(z)} ; \quad y_v = \frac{u_x}{f'(z) f'(z)} \quad (14)$$

De (13), (14) e as equações de Cauchy-Riemann para as funções (10), conclui-se que $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Sendo x_u, x_v, y_u, y_v contínuas, conclui-se, pelo teorema 2, que $f^{-1}(w) = x(u, v) + i y(u, v)$ é derivável no ponto $w = f(z)$. Sua derivada será:

$$\begin{aligned} \frac{df^{-1}(w)}{dw} &= \frac{\partial x}{\partial u} + i \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{f'(z) f'(z)} (v_y - i v_x) = \\ &= \frac{1}{f'(z) f'(z)} (u_x - i v_x) = \frac{1}{f'(z)} , \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema.

§3. REPRESENTAÇÃO CONFORME

Seja $w = f(z)$ uma função holomorfa em um domínio Ω , sendo $f'(z) \neq 0$. Vamos, em face desta hipótese, interpretar geometricamente a transformação do plano dos z no dos w , determinada pela f . Pelo teorema 3, conclui-se que f é localmente biunívoca. Seja f^{-1} a inversa de f definida em $V(w)$, sendo $w = f(z)$, z tal que $f'(z) \neq 0$. Seja γ um arco de Jordan, de equação paramétrica $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, sendo $x =$

$x = x(t)$, $y = y(t)$ continuamente deriváveis em $[a, b]$, com $x'(t) \neq 0$. Suponhamos o ponto z no qual estamos estudando a inversa, pertencente a um tal arco γ . O coeficiente angular da tangente a γ no ponto z será

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y'(t)}{x'(t)} .$$

Sendo $z'(t) = x'(t) + i y'(t)$, conclui-se que

$$\theta = \arg z'(t) .$$

Seja $V(z)$ um disco aberto no qual f é biunívoca. A imagem por f de $\gamma \cap V(z)$ será uma curva γ' contida em $V(w)$ de equação

$$w = w(t) = f(z(t)) .$$

Pela proposição 2, resulta que

$$w' = f'(z) \cdot z'(t) .$$

Portanto, o coeficiente angular $\arg w'$ da tangente a γ' em w , será

$$\arg w'(t) = \arg f'(z) + \arg z'(t) \quad (10)$$

supondo-se, também, $\arg z'(t) \neq 0$.

Consideremos dois arcos de Jordan, nas condições fixadas anteriormente, se intersectando no ponto z . Sejam $z_1 = z_1(t)$, $z_2 = z_2(t)$ as equações paramétricas de γ_1, γ_2 , respectivamente. Suponhamos que estes arcos formem um ângulo

$$\alpha = \arg z_2'(t) - \arg z_1'(t) .$$

As imagens de γ_1, γ_2 , pela função holomorfa f serão γ_1', γ_2' de equações paramétricas $w_1 = w_1(t) = f(z_1(t))$ e $w_2 = w_2(t) = f(z_2(t))$, cujo ângulo em $w = f(z)$ será

$$\beta = \arg w_2'(t) - \arg w_1'(t) \quad (12)$$

Das igualdades (10), (11), (12), conclui-se que

$$\beta = \arg f'(z) + \arg z_2'(t) - \arg f'(z) - \arg z_1'(t) = \alpha. \quad (13)$$

Resulta de (13) que $w = f(z)$ holomorfa em Ω , com $f'(z) \neq 0$, estabelece uma transformação entre os planos dos z e dos w , conservando o ângulo entre os arcos de Jordan regulares. Por esta razão, diz-se que f é conforme ou que f estabelece uma representação conforme entre os planos dos z e dos w , em todo ponto z no qual $f'(z) \neq 0$.

A seguir, mantendo a hipótese de ser a f holomorfa em Ω , estudaremos a relação entre os comprimentos de um segmento e do seu transformado. De fato, fixemos um ponto z_0 em Ω . Tem-se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|.$$

Daí resulta que pequenos segmentos pelo ponto z_0 de Ω , são transformados por f em uma razão constante $|f'(z_0)|$, independente da direção por z_0 .

As considerações geométricas anteriores, juntamente com convenientes hipóteses sobre as partes real e imaginária de f , dar-nos-ão condições suficientes para que f seja holomorfa. Tomemos $f(z) = u + iv$; sendo u, v com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio Ω . Demonstraremos que se além disto f possui uma das propriedades anteriores, isto é, ser conforme ou manter a razão entre um segmento e o seu transformado, ela é holomorfa.

Consideremos um arco de Jordan derivável, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, com $z'(t) \neq 0$ em $[a, b]$. Seja $w = f(z) = u + iv$, com u, v possuindo derivadas parciais contínuas em Ω . Sendo $w = w(t) = f(z(t))$, obtem-se

$$w'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

ou

$$w'(t) = \frac{1}{2} \left[z'(t) + \overline{z'(t)} \right] \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i} \left[z'(t) - \overline{z'(t)} \right] \frac{\partial f}{\partial y}$$

isto é,

$$w'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) z'(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \overline{z'(t)} .$$

Finalmente, sendo $z'(t) \neq 0$, resulta

$$\frac{w'(t)}{z'(t)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\overline{z'(t)}}{z'(t)} . \quad (14)$$

a. Suponhamos que $w = f(z)$ conserve os ângulos. Sejam γ_1, γ_2 de equações paramétricas $z_1 = z_1(t), z_2 = z_2(t)$, respectivamente dois arcos de Jordan regulares contidos em Ω . Sejam γ'_1, γ'_2 , de equações paramétricas $w_1 = w_1(t), w_2 = w_2(t)$, respectivamente, as imagens por f de γ_1, γ_2 . Por hipótese, tem-se

$$\arg w'_2 - \arg w'_1 = \arg z'_2 - \arg z'_1$$

ou

$$\arg \frac{w'_2}{z'_2} = \arg \frac{w'_1}{z'_1}$$

provando que $\arg \frac{w'(t)}{z'(t)}$ não varia quando varia $z'(t)$. Fazendo $a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ e $Z = \frac{w'(t)}{z'(t)}$, podemos escrever a (14) sob a seguinte forma:

$$Z = a + \bar{a} \frac{\overline{z'(t)}}{z(t)}. \quad (15)$$

Resulta de (15) que quando $z = z(t)$ varia em Ω , Z varia sôbre uma circunferência de raio $|\bar{a}|$ e centro em a . Do fato de $w = f(z)$ conservar os ângulos, deduzimos que $\arg z$ não varia, quando varia $z = z(t)$. Consequentemente, Z descrevendo uma circunferência de raio $|\bar{a}|$, isto só seria possível se $|a| = 0$, isto é,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right| = 0 \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

que são as equações de Cauchy-Riemann. Portanto, conclui-se que f é holomorfa.

b. Fixemos z em Ω . Suponhamos que as razões dos segmentos em z para as suas imagens por f sejam constantes. Sendo

$$w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t)$$

conclui-se que $|Z| = \frac{|w'(t)|}{|z'(t)|}$ é constante quando $z = z(t)$ varia. Como Z varia sôbre uma circunferência de raio $|\bar{a}|$ e centro a , isto seria possível, somente, quando $|\bar{a}| = 0$ ou o centro fôr a origem. Daí resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x} = i \frac{\partial f}{\partial y}$$

que são as equações de Cauchy-Riemann, para $w = f(z)$ ou $\bar{w} = \bar{f}(z)$. Logo f ou \bar{f} será holomorfa. Diz-se que f é holomorfa ou conjugada de função holomorfa.

§4. FUNÇÕES ELEMENTARES

1. POLINÔMIOS. Sabemos que $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ é holomorfa. Análogamente, as constantes também são. Resulta, portanto que todo polinômio

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

é uma função holomorfa em \mathbb{C} . Supondo $a_n \neq 0$, diz-se que o polinômio é de grau n . Sua derivada é dada por

$$p'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + n a_n z^{n-1}.$$

O teorema fundamental da álgebra, nos diz que se $n \geq 1$, $p(z) = 0$ possui pelo menos uma raiz, a qual denomina-se um zero de $p(z)$. Portanto, se z_1 for um zero de $p(z)$, podemos escrever $p(z) = (z - z_1) q(z)$, sendo $q(z)$ um polinômio de grau $n-1$. Com a repetição sucessiva deste argumento escreve-se

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n).$$

Quando há α dos z_i iguais, diz-se que z_i é um zero de ordem α , sendo ele contado α vezes. Desta forma, a soma das ordens dos zeros é igual ao grau do polinômio.

Dado um zero z_1 de $p(z)$, sua ordem pode, facilmente, ser determinada tomando suas derivadas. De fato, suponhamos que z_1 seja de ordem α . Logo, $p(z) = (z - z_1)^\alpha q(z)$, sendo $q(z_1) \neq 0$. Derivando sucessivamente, obtem-se $p(z_1) = p'(z_1) = p''(z_1) = \dots = p^{(\alpha-1)}(z_1) = \dots = p^{(\alpha-1)}(z_1) = 0$, sendo $p^{(\alpha)}(z_1) \neq 0$. Resulta que a ordem de um zero z_1 de $p(z)$, é igual a ordem da primeira derivada diferente de zero em z_1 . Quando $p(z_1) = 0$, $p'(z_1) \neq 0$, diz-se que z_1 é um zero simples.

2. FUNÇÕES RACIONAIS. Consideremos dois polinômios $p(z)$ e $q(z)$ sem zeros comuns. Denomina-se função racional a função de finida por

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

em \mathbb{C} menos os zeros de $q(z)$. Assim definida, $r(z)$ é holomorfa cuja derivada obtem-se pela regra de derivação do quociente de duas funções.

3. FUNÇÃO EXPONENCIAL. Sabe-se que a função exponencial real $x \rightarrow e^x$ é definida em toda a reta \mathbb{R} , é contínua, derivável, satisfaz a equação funcional

$$f(x-y) = f(x).f(y) \quad (16)$$

e a equação diferencial

$$\frac{df}{dx}(x) = f(x) . \quad (17)$$

Ao definirmos a função exponencial complexa, é natural exigirmos que ela seja definida em todo o plano complexo \mathbb{C} , contínua, holomorfa, satisfazendo a equação (17). Além disto, é natural, também supor que sua restrição a \mathbb{R} seja igual a exponencial real. Vamos admitir que uma tal função exista, seja única e vamos defini-la como sendo a exponencial complexa. Demonstra-se que esta função satisfaz a equação funcional (16). Observe que a constante e aparecendo nesta definição, é a base dos logaritmos neperianos. Representa-se por $f|_{\mathbb{R}}$ a restrição de f a \mathbb{R} .

Denomina-se exponencial complexa, a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, holomorfa, solução da equação diferencial

$$\frac{df(z)}{dz} = f(z), \quad (f|_{\mathbb{R}})(x) = e^x \quad (18)$$

Calcularemos as partes real e imaginária da solução $w = f(z) = u + iv$ da equação (18).

De fato, sendo f holomorfa, $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$. Portanto, por hipótese, obtem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u + iv$$

porque f é solução de (18). Daí obtem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v.$$

A primeira destas equações possui a seguinte solução geral:

$$u(x, y) = e^x h(y) \quad (19)$$

sendo h uma função derivável. Substituindo esta solução na equação de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x},$$

observando que $\frac{\partial v}{\partial x} = v$, obtem-se

$$v = - e^x \frac{dh(y)}{dy}. \quad (20)$$

Substituindo (19) e (20) na equação de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

obtem-se

$$h''(y) + h(y) = 0$$

cuja solução geral é

$$h(y) = a \cos y + b \sin y .$$

sendo a e b constantes.

Portanto, escreve-se

$$u(x,y) = e^x h(y) = e^x (a \cos y + b \sin y) \quad (21)$$

$$v(x,y) = -e^x h'(y) = e^x (a \sin y - b \cos y)$$

Por hipótese, quando $y = 0$ devemos ter $f(z) = e^z$, isto é,

$$u(x,0) = e^x , \quad v(x,0) = 0 . \quad (22)$$

De (21) e (22) conclui-se que $a = 1$ e $b = 0$. Portanto, obtém-se

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

Consequentemente, a solução de (18) holomorfa em \mathbb{C} , cuja restrição a \mathbb{R} é igual a exponencial real, é dada por

$$f(z) = e^z (\cos y + i \sin y) \quad (23)$$

para todo $z = x + iy$ em \mathbb{C} . Representa-se o seu valor em z por e^z ou e^{x+iy} .

Verifica-se que a exponencial complexa é solução da equação funcional $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, para z_1, z_2 em \mathbb{C} . De fato, se $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$, obtém-se

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2} [\cos (y_1+y_2) + i \sin (y_1+y_2)] = \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{z_1} \cdot e^{z_2} . \end{aligned}$$

Em particular, $e^z = e^x \cdot e^{iy}$.

Quando $x = 0$, obtém-se

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

e

$$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y .$$

Das duas últimas segue-se

$$\cos y = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}); \operatorname{sen} y = \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}). \quad (24)$$

A função $f(z) = e^z$ é periódica com período $2\pi i$. De fato, para todo $z \in \mathbb{C}$, $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z$.

4. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS. As fórmulas (24) são válidas para todo y real. É natural usá-las como definição de $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$, quando y é substituída pelo número complexo z . Portanto, para z complexo, poremos, por definição,

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}); \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) .$$

Sendo $z = x + iy$, obtem-se

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} (e^{ix-y} + e^{-ix+y}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-y} (\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^y (\cos x - i \operatorname{sen} x) \right] = \\ &= \frac{1}{2} (e^y + e^{-y}) \cos x - \frac{1}{2} (e^y - e^{-y}) \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Dai resulta que

$$\cos z = \cosh y \cos x - i \operatorname{senh} y \operatorname{sen} x$$

sendo $\cosh y$, $\operatorname{senh} y$ o co-seno e seno hiperbólicos de y .

Analogamente, verifica-se que para $z = x + iy$,

$$\operatorname{sen} z = \cosh y \operatorname{sen} x + i \operatorname{senh} y \cos x .$$

As funções $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$ são holomorfas em \mathbb{C} , o que decorre do fato de ser holomorfa a exponencial complexa. Quando z for real, isto é, $y = 0$, conclui-se que estas funções coincidem com o co-seno e seno reais.

5. FUNÇÃO LOGARÍTMICA. Iniciaremos estendendo para números complexos o conceito de logaritmo neperiano de um número real positivo. Denomina-se logaritmo do número real positivo b , a solução a da equação $e^a = b$, escrevendo $a = \log b$. Imitando o caso real, define-se como logaritmo do número complexo $z \neq 0$ a uma raiz $w = a + ib$ da equação $e^w = z$, escrevendo-se $w = \log z$. Como no caso real, $z = 0$ não possui logaritmo, pois $e^w \neq 0$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Calculemos as partes real e imaginária de $\log z$. De $e^w = z$ obtem-se

$$e^a = |z| \quad e \quad e^{ib} = \frac{z}{|z|} .$$

Da primeira obtem-se $a = \log|z|$. O membro da direita da segunda equação sendo um complexo unitário, existe um único $-\pi < b < +\pi$ solução da segunda equação, que é o argumento de z . Todavia, tanto b como $b + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, servem, igualmente, como solução da segunda equação. Assim, escreve-se

$$\log z = \log|z| + i \arg z .$$

Resulta, portanto, que $e^w = z$, fixado z , possui uma infinidade de soluções. Representando por φ a menor determinação de $\arg z$, denomina-se valor principal do $\log z$, ao número complexo:

$$\log|z| + i \varphi$$

Vale a equação

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 .$$

Quando z fôr um número real positivo, o valor principal de $\log z$ coincide com o logaritmo real.

Conhecendo a definição de logaritmo de um número complexo, podemos definir z^b , com z e b complexos, $z \neq 0$. Toma-se por definição,

$$z^b = e^{b \log z} .$$

De maneira análoga, ao caso do logaritmo, há uma infinidade de valores para z^b . Fixado o valor principal de $\log z$ o número complexo $e^{b \log z}$ é denominado valor principal de z^b .

Ao procurarmos definir a função logarítmica, devemos ter muita cautela, uma vez que fixado o número complexo z há uma infinidade de valores para $\log z$. Note que entende-se por função, a uma correspondência unívoca. Desta forma, admitindo $\arg z$ e seus cômgruos módulo 2π , a correspondência $z \rightarrow \log z = \log|z| + i \arg z$ não é uma função. Todavia, fixado $k \in \mathbb{Z}$ exigindo que $(2k-1)\pi < \arg z < (2k+1)\pi$, conclui-se que $z \rightarrow \log z$ é uma correspondência unívoca, logo uma função. Assim, para podermos falar em função logarítmica seríamos obrigados a eleger um número inteiro k privilegiado, exigindo que $(2k-1)\pi < \arg z < (2k+1)\pi$. Por exemplo, $k=0$, $-\pi < \arg z < +\pi$, tem-se que $z \rightarrow \log z$ é uma função. Riemann idealizou uma superfície formada por uma infinidade de planos convenientemente superpostos, de tal modo que quando z pertence a esta superfície, a

correspondência $z \rightarrow \log z$ é unívoca, sem a necessidade de fixarmos o valor de $k \in \mathbb{Z}$. Faremos uma descrição puramente intuitiva desta idéia. Tomemos o valor principal do $\log z$, isto é,

$$\log z = \log|z| + i\varphi$$

com $-\pi < \varphi < +\pi$. Pondo $w = u+iv = \log z$, resulta que

$$u = \log|z| \quad e \quad v = \varphi. \quad (25)$$

Consideremos o plano complexo \mathbb{C} excluindo a semi-reta $\text{Im}z = 0, \text{Re}z < 0$. Temos o domínio

$\Omega_0: \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < +\infty, -\pi < \varphi < +\pi\}$, $\varphi = \arg z$, o qual é transformado por (25) na faixa

$$F_0 = \{(u, v); -\infty < u < +\infty, -\pi < v < +\pi\}$$

do plano dos w . Como uma aplicação de Ω_0 em F_0 , $w = \log z$ é unívoca, logo uma função, que é a inversa de $z = e^w$. Resulta, pelo teorema da função inversa (§3, teorema 3, êste capítulo), que $w = \log z$ é holomorfa, sendo

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{\frac{d}{dw} e^w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Como consequência do não anulamento da derivada de $w = \log z$ deduz-se que ela é conforme. Consideremos o domínio

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < +\infty, +\pi < \arg z < +3\pi\}$$

Êle é transformado por (25) na faixa

$$F_1 = \{(u, v); -\infty < u < +\infty, +\pi < v < 3\pi\}$$

do plano dos w .

Como uma aplicação de Ω_1 em $F_1, w = \log z$ é unívoca, logo uma função, a qual é a inversa de $z = e^w$. É, portanto, holomorfa, conforme, valendo a mesma regra de derivação anterior.

De modo geral, seja $k \in \mathbb{Z}$ e consideremos o domínio

$$\Omega_k = \left\{ z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < +\infty, (2k-1)\pi < \arg z < (2k+1)\pi \right\}$$

o qual, é transformado por (24) na faixa

$$F_k = \left\{ (u, v); -\infty < u < +\infty, (2k-1)\pi < v < (2k+1)\pi \right\}$$

do plano dos w .

Observemos que os F_k são faixas disjuntas do plano dos w , enquanto os Ω_k são cópias iguais do plano complexo \mathbb{C} . Supõe-se os Ω_k como planos distintos, superpostos como uma pilha de folhas de papel. Note que os planos Ω_k não contêm a semi reta $\operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0$. Estes domínios serão conectados pelo processo que segue. Tomemos Ω_0 e Ω_1 e sejam F_0 e F_1 as faixas correspondentes. Observe que a reta $v = +\pi$ é comum as fronteiras de F_0 e F_1 . Seja $w_0 = u_0 + \pi i$ um ponto qualquer da reta $v = +\pi$ no plano dos w e $z_0 = e^{w_0} = -e^{u_0}$. Assim, todo w_0 pertencente a reta $v = +\pi$, possui um disco aberto $V(w_0)$ que é transformada por (25), de modo biunívoco e conforme, em um disco aberto $V(z_0)$. Desta forma, identifica-se a parte da fronteira de Ω_0 situada acima da semi reta $\operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0$, com a parte da fronteira de Ω_1 situada abaixo desta semi reta. Logo, Ω_0 e Ω_1 foram conectadas por esta semi reta obtida com esta identificação, denominada reta de ramificação, pois através desta, passa-se, continuamente, de Ω_0 a Ω_1 . Repete-se com Ω_1 e Ω_2, Ω_0 e Ω_{-1} o mesmo método anterior e

assim sucessivamente. Supondo feita esta construção para todo $k \in \mathbb{Z}$, obtem-se uma superfície constituída por uma infinidade de planos, denominados fôlhas da superfície. Podemos supor a distância entre Ω_k e Ω_{k+1} igual a $\frac{\varepsilon}{k^2}$ se $k > 0$ e $\frac{\varepsilon}{(1-k)^2}$ se $k \leq 0$, sendo $\varepsilon > 0$ um número fixo. Procedendo assim, a distância entre as fôlhas diminui com $\frac{1}{k}$ para $k \in \mathbb{Z}$. A superfície assim obtida denomina-se superfície de Riemann para o logaritmo, a qual vamos representar por S . Resulta, que a aplicação $w = \log z$, para $z \in S$, é unívoca, logo uma função, denominada função logarítmica, a qual continuaremos a representar pelo mesmo símbolo $w = \log z$. A restrição de $w = \log z$, a fôlha Ω_k de S , denomina-se uma determinação de $\log z$. Quando $k=0$, $w = \log z$ em Ω_0 denomina-se a determinação principal do logaritmo. Escreve-se, explicitamente,

$$w = \log|z| + i\varphi, \quad -\pi < \varphi < +\pi.$$

Deduz-se da definição de $w = \log z$, que ela é a inversa da exponencial, sendo holomorfa em S , com derivada $\frac{1}{z}$. Vale a igualdade $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$. A restrição da determinação principal de $w = \log z$ aos números reais positivos, coincide com a função logarítmica real.

Exercícios

1. Considere a função

$$f(z) = \begin{cases} z^5 |z|^{-4} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Verifique que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $(0,0)$, mas f não é derivável.

2. Escreva as equações de Cauchy-Riemann sob a forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -1 \frac{\partial f}{\partial y} .$$

3. Escreva as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

4. Demonstre que se $w = f(z)$ for holomorfa em um domínio Ω , então $w = \overline{f(\bar{z})}$ será holomorfa em Ω .

5. Seja $w = f(z)$ holomorfa em Ω . Demonstre que se $|f'(z)|=0$ então f é constante.

6. Demonstre que $e^z \neq 0$ e que se $\alpha \in \mathbb{C}$ for tal que

$$e^{z+\alpha} = e^z ,$$

então $\alpha = 2k\pi i$, sendo $k \in \mathbb{Z}$.

7. Demonstre as seguintes igualdades:

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$$

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$$

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} z$$

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z$$

$$\operatorname{sen}(z + 2k\pi) = \operatorname{sen} z$$

sendo $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z; \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z$$

8. Definindo $\operatorname{tg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$, escreva $\operatorname{tg} z$ sob a forma $a + bi$. Calcule $|\operatorname{tg} z|$.

9. Sejam f, g holomorfas em \mathbb{C} , soluções do sistema

$$\frac{df(z)}{dz} = g(z), \quad \frac{dg(z)}{dz} = -f(z)$$

$$(f|_{\mathbb{R}})(x) = \sin x, \quad (g|_{\mathbb{R}})(x) = \cos x$$

Calcule as partes real e imaginária de f e g .

10. Sejam $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciáveis. Se u, v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, o mesmo acontece às seguintes funções:

$$u_1 = u^2 - v^2, \quad v_1 = 2uv$$

e

$$u_2 = e^u \cos v, \quad v_2 = e^u \sin v$$

11. Suponha que $z \rightarrow \infty$ ao longo de um feixe de retas pela origem. Encontre as direções segundo as quais existe

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^z.$$

12. Determine as curvas do plano complexo \mathbb{C} ao longo das quais as funções $z \rightarrow e^z$, $z \rightarrow \cos z$ são reais.

13. Calcule as soluções das equações

a) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} w$

d) $\operatorname{sen} z = 5i$

b) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} i$

e) $\cos z = 2i$

c) $\operatorname{sen} z = 10$

f) $\cos z = 0$

14. Calcule:

$$e^{2+i}; \cos(3-2i); \operatorname{sen}(1+4i)$$

$$\log i; i^{\sqrt{3}}; (1+i)^i; \text{ os } z \text{ tais que } \operatorname{sen} z = 1.$$

15. Seja Γ um feixe de retas pela origem. Estude a imagem de Γ pela aplicação $z \rightarrow kz$ de \mathbb{C} em \mathbb{C} , sendo k um número complexo.

16. Calcule a parte real dos números complexos.

$$\alpha) \frac{ae^{it} + b e^{i\theta}}{ae^{it} - b e^{i\theta}}, \quad a, b, \theta, t \text{ reais.}$$

$$\beta) \frac{1}{1 - e^z}, \quad \gamma) \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

17. Escreva $f(z) = x^2 + i y^2$ em função de z e \bar{z} .

18. Verifique que

$$\left(\frac{1 + itg \theta}{1 - itg \theta} \right)^n = \frac{1 + itgn \theta}{1 - itgn \theta}.$$

19. Encontre as imagens das curvas $x = c$, $y = c$, $c = \text{constante}$, pela função $z \rightarrow z^2$ de \mathbb{C} em \mathbb{C} .

20. Sejam $z = x + iy$, $x \neq 0$, $a = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

Verifique

$$r = \rho \frac{|z|}{x} e^{-\frac{n\theta}{x}}$$

sendo $r = |a^z|$.

21. Demonstre que se $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ for holomorfa, então

$$\Delta |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

22. Calcule $\lim e^z$ quando $z \rightarrow \infty$ ao longo dos quatro ramos da

hipérbole $xy = 1$.

23. Sejam r, s duas retas pelo ponto $z_0 = x_0 + i y_0$ de \mathbb{C} e considere a aplicação $z \rightarrow z^2$ de \mathbb{C} em \mathbb{C} .

a) Se $z_0 \neq 0$, o ângulo de r, s é conservado pela aplicação $z \rightarrow z^2$.

b) Se $z_0 = 0$ o ângulo das imagens de r, s é $2 \text{ang}(r, s)$.

24. Suponha que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ seja holomorfa em $z_0 \in \Omega$.

a) Suponha que z tenda a z_0 segundo uma direção ν fazendo um ângulo θ com a direção positiva do eixo dos x . Demonstre que

$$f'(z_0) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + i \frac{\partial v}{\partial \nu} \right).$$

$\frac{\partial}{\partial \nu}$ derivada na direção ν .

b) Se o ângulo de ν' com a direção positiva do eixo dos x for $\theta + \frac{\pi}{2}$, demonstre que

$$f'(z_0) = e^{i\theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu'} - i \frac{\partial u}{\partial \nu'} \right)$$

c) Obtenha um critério, em termos de derivadas direcionais para a existência da derivada de f em z_0 .

d) Deduza do item c) as equações de Cauchy-Riemann.

25. Qual a imagem da reta $\text{Im}z=0$ pela aplicação

$$z \rightarrow \frac{1-iz}{1+iz}$$

de $\mathbb{C} - \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$?

26. Considere a função $w = \operatorname{sen} z$, para $z \in \mathbb{C}$, fazendo $z = x+iy$ e $w = u+iv$. Demonstre que a imagem das curvas $x = c$, $y = c$, c constante, são, respectivamente, hipérboles e elipses no plano dos w . Faça as figuras.

27. Dado um número complexo $z \neq 0$, vimos no capítulo 1, que há dois valores para $w = \sqrt{z}$, precisamente, os seguintes:

$$w_0 = \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right); w_1 = \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi+2\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi+2\pi}{2} \right)$$

sendo $0 < \varphi < 2\pi$ o argumento de z . Conclui-se que a correspondência $z \rightarrow \sqrt{z}$ não é unívoca. Com o objetivo de obter uma correspondência unívoca, usaremos o método empregado no caso da função logarítmica. Construiremos uma superfície de Riemann, S de modo que a aplicação $z \rightarrow \sqrt{z}$ de S em \mathbb{C} seja unívoca. Consideremos o domínio

$$\Omega_0 = \left\{ z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < +\infty, 0 < \operatorname{arg} z < 2\pi \right\},$$

que é o plano complexo menos a semi-reta $\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq 0$. Quando z varia em Ω_0 , $w = u + iv$, sendo

$$u = \sqrt{|z|} \cos \frac{\operatorname{arg} z}{2}, \quad v = \sqrt{|z|} \operatorname{sen} \frac{\operatorname{arg} z}{2},$$

varia em

$$F_0 = \left\{ (u, v); -\infty < u < +\infty, 0 < v < +\infty \right\}$$

que é o semiplano superior dos w . A correspondência $z \rightarrow \sqrt{z}$ de Ω_0 em F_0 é unívoca, logo uma função, que é holomorfa, sendo $w^2 = z$ sua inversa. Logo sua derivada será:

$$\frac{d\sqrt{z}}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Consideremos o domínio

$$\Omega_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < +\infty, 2\pi < \arg z < 4\pi \right\}.$$

Quando z varia em Ω_1 , $w = u + iv$, sendo

$$u = \sqrt{|z|} \cos \frac{\arg z}{2}, \quad v = \sqrt{|z|} \operatorname{sen} \frac{\arg z}{2},$$

varia em

$$F_1 = \left\{ (u, v); -\infty < u < +\infty, -\infty < v < 0 \right\}$$

que é o semiplano inferior dos w . Tem-se que $z \rightarrow \sqrt{z}$, de Ω_1 em F_1 é uma função holomorfa, sendo $\frac{d\sqrt{z}}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

Convencionaremos chamar a semi-reta $\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0$ de corte do plano \mathbb{C} . Assim, Ω_0 e Ω_1 são o plano \mathbb{C} com o corte ao longo da semi-reta $\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0$. Entende-se o que seja parte inferior e superior deste corte. Desta forma, identifica-se a parte inferior do corte de Ω_1 com a parte superior do corte de Ω_0 ; a parte inferior do corte de Ω_0 com a superior do corte de Ω_1 . Obtem-se, desta forma, uma superfície ideal, S tal que $z \rightarrow \sqrt{z}, S \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa. Diz-se que S é a superfície de Riemann de $z \rightarrow \sqrt{z}$. A origem de \mathbb{C} pertence às duas folhas Ω_0 e Ω_1 de S e denomina-se um ponto de ramificação de S .

Como exercício, estude a função $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, construindo a superfície de Riemann S , de modo que a função $w = z^n$ possua uma inversa de S em \mathbb{C} . Verifique ser esta inversa holomorfa e calcule a sua derivada.

28. Sejam a, z números complexos sendo $z = x + iy$. Demonstre

que uma condição necessária e suficiente para todos os valores de a^2 sejam reais é que $2x$ e $(y \log|a| + x \operatorname{arg}z)/\pi$ sejam números inteiros.

29. Calcule $\left| x^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}} \right|$ sendo $x > 0$.

30. Seja $z = \operatorname{tg} w$ e $w = \operatorname{tg}^{-1} z$. Demonstre

a) $\operatorname{tg}^{-1} z = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$; b) $\frac{d}{dz} \operatorname{tg}^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$ $z \neq \pm i$.

Analogamente, demonstre:

c) $\operatorname{sen}^{-1} z = -i \log(iz \pm \sqrt{1-z^2})$ e $\frac{d}{dz} \operatorname{sen}^{-1} z = \pm \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$; $z \neq \pm 1$.

d) $\operatorname{cos}^{-1} z = -i \log(z \pm i \sqrt{1-z^2})$ e $\frac{d}{dz} \operatorname{cos}^{-1} z = \mp \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$; $z \neq \pm 1$.

31. Sejam f e g holomorfas em Ω , sendo $z_1 \in \Omega$ tal que $f(z_1) = g(z_1) = 0$, $g'(z_1) \neq 0$. Demonstre que

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_1)}{g'(z_1)}.$$

Como aplicação, demonstre o seguinte:

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+az)}{z} = a$

b) $\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{\operatorname{sen}(z-z_1)}{z-z_1} = 1$.

Deduza da parte a) que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{z} \right)^z = e^a$$

32. Sejam φ, ψ duas funções numéricas, definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e harmônicas. Sejam $u = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$. Demonstre que $f(z) = u + iv$ é holomorfa em Ω .

33. Sejam u, v funções numéricas definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Consideremos a função complexa $f(z) = u + iv$ e os limites:

$$a) \lim_{z \rightarrow z_0} \arg \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$b) \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|.$$

Demonstre que se u e v forem continuamente diferenciais e um dos limites a ou b existe, então f é derivável em z_0 .

Observação 1: O exercício 33 é um teorema de D. Menchoff, enunciado em seu livro "Les Conditions de Monogénéité" - Coleção Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 329, Hermann, 1936, Paris.

§5. FUNCÕES HOMOGRAFICAS

Estudaremos neste parágrafo, uma particular classe de funções racionais, constituída pelo quociente de polinômios do grau um. Sejam a, b, c, d números complexos fixos. A função racional

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (26)$$

denomina-se função homográfica ou transformação de Möbius. Suponhamos $ad - bc \neq 0$, caso contrário f independe de z . Podemos

supor $ad - bc = 1$, o que é obtido dividindo o numerador e denominador de (26) por $\sqrt{ad-bc}$. Nos pontos em que $cz+d \neq 0$, a f é holomorfa, logo, conforme. Fazendo $w = f(z)$, a inversa de f calcula-se, facilmente, obtendo-se

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Sejam g e f duas funções homográficas. Denomina-se produto de f por g a função $f \cdot g$ definida por $(f \cdot g)(z) = f(g(z))$. Verifica-se que $f \cdot g$ é uma função homográfica e que com esta operação, a coleção das funções homográficas forma um grupo. Diz-se que z é um ponto fixo de f quando $f(z) = z$. Resulta que para encontrar os pontos fixos devemos resolver a equação

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0. \quad (27)$$

Observação 1: Nesta seção, trabalharemos no plano complexo estendido, isto é, com o ponto no infinito ∞ . Continuaremos, entretanto, representando por \mathbb{C} o plano complexo estendido.

Casos Particulares Importantes:

1. Suponhamos $w = z+b$. O único ponto fixo é ∞ , se $b \neq 0$.
2. Seja $w = az$, com $a \neq 0$. Tem-se

$$|w| = |a| |z|, \quad \arg w = \arg a + \arg z.$$

Se a for um número real positivo, $w = az$ é tal que $\arg w = \arg z$ e $|w| = a|z|$. Portanto, se z pertence a uma reta de \mathbb{C} , sua imagem w pertence a mesma reta, apenas com o módulo alterado. Consequentemente, $w = az$, é uma homotetia com centro na origem. Os dois pontos fixos são 0 e ∞ . Consideremos uma família de circunferências com centro na origem e uma família de semi re

tas com centro na origem. A função $w = az$, com a real positivo, leva uma semi reta da família nela mesma e uma circunferência noutra da mesma família. Pode-se pensar na família de homotetias $w = az$ com centro na origem, como um fluxo a partir da origem ao longo das semi retas do feixe.

Suponhamos que a seja um complexo unitário. Se $w = az$, obtém-se $|w| = |z|$ e $\arg w = \arg a + \arg z$. Resulta que z é transformado em um complexo w de mesmo módulo, enquanto $\arg w$ é aumentado de $\arg a$. Pensemos nas famílias de circunferências e semi-retas anteriormente consideradas. Resulta que cada circunferência é transformada nela mesma e cada semi reta noutra semi reta da mesma família. Estas funções $w = az$, a complexo unitário, são as rotações em torno da origem.

Seja a um qualquer número complexo não nulo, isto é, $a = |a| e^{i\theta}$. Resulta que

$$w = |a| e^{i\theta} z$$

será o produto da rotação $\zeta = e^{i\theta} z$, pela homotetia $w = |a| \zeta$.

Neste caso, $w = az$ é uma semelhança.

Em qualquer caso, os pontos fixos de $w = az$ são 0 e ∞ .

Definição: Consideremos quatro números complexos z_1, z_2, z_3, z_4 . Denomina-se razão dupla destes números, ao número complexo (z_1, z_2, z_3, z_4) definido por

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

Caso z_1, z_2, z_3 ou z_4 seja ∞ , definiremos a razão dupla como

sendo

$$\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} ; \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} ; \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \text{ ou } \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} .$$

Dados os números complexos z_2, z_3, z_4 , quando z varia em \mathbb{C} , a razão dupla (z_1, z_2, z_3, z_4) define uma função homográfica f por

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} . \quad (28)$$

Sendo $f(z_2) = 0, f(z_3) = 1, f(z_4) = \infty$.

Vejamos que f dada por (28) é a única função homográfica com estas propriedades. De fato, seja g outra função homográfica tal que $g(z_2) = 0, g(z_3) = 1, g(z_4) = \infty$. Se f^{-1} é a inversa de f , o produto gf^{-1} é uma função homográfica, possuindo $0, 1, \infty$ para pontos fixos. Escrevendo

$$(gf^{-1})(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

resulta, $b = c = 0, a = d$ não nulos. Logo gf^{-1} é a identidade do grupo das funções homográficas, logo $g = f$, provando a unicidade da f .

A seguir enunciaremos duas propriedades da razão dupla e uma das funções homográficas, sugerindo sejam demonstradas pelo leitor.

Proposição 1. A razão dupla é invariante por funções homográficas.

Proposição 2. A razão dupla é real se e somente se os quatro números complexos pertencem a uma mesma circunferência ou a uma

mesma reta.

Proposição 3. As circunferências são invariantes por funções homográficas.

Classificaremos as funções homográficas através de seus pontos fixos. Sendo estes pontos dados pelas raízes da equação (27), conclui-se que se f não for a identidade, ela possui no máximo dois pontos fixos distintos.

Suponhamos $c \neq 0$ e f possua dois pontos fixos finitos, distintos ζ_1, ζ_2 . Resulta que $f(\zeta_1) = \zeta_1, f(\zeta_2) = \zeta_2$ e $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Portanto, como f conserva a razão dupla, se $z \in \mathbb{C}$ e $w = f(z)$, conclui-se que

$$(w, \zeta_1, \frac{a}{c}, \zeta_2) = (z, \zeta_1, \infty, \zeta_2)$$

isto é,

$$\frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} = k \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}$$

sendo $k = \frac{a - c \zeta_1}{a - c \zeta_2}$, denominado o multiplicador da função homográfica f . Vamos classificar as funções homográficas através de k . Antes, porém, vamos escrevê-lo em função das constantes a, b, c, d .

Tem-se

$$k + \frac{1}{k} = \frac{a - c \zeta_1}{a - c \zeta_2} + \frac{a - c \zeta_2}{a - c \zeta_1}$$

ou

$$k + \frac{1}{k} = \frac{2a^2 - 2ac(\zeta_1 + \zeta_2) + c^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)}{a^2 - ac(\zeta_1 + \zeta_2) + c^2 \zeta_1 \zeta_2}. \quad (29)$$

Sejam ζ_1, ζ_2 as raízes da equação (27), obtem-se

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \frac{a-d}{c}, \quad \zeta_1 \zeta_2 = -\frac{b}{c},$$

resultando portanto,

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = (\zeta_1 + \zeta_2)^2 - 2\zeta_1 \zeta_2 = \frac{(a-d)^2 + 2bc}{c^2}. \quad (30)$$

Substituindo (30) em (29), vem:

$$k + \frac{1}{k} = (a+d)^2 - 2. \quad (31)$$

No caso $c = 0$, $f(z) = \frac{az+b}{d}$ e os pontos fixos são ∞ e $\zeta_1 = \frac{b}{d-a}$. Neste caso tem-se $f(\zeta_1) = \zeta_1$, $f(\infty) = \infty$, $f(0) = \frac{b}{d}$. Se $z \in \mathbb{C}$ e $w = f(z)$, obtem-se

$$(w, \zeta_1, \frac{b}{d}, \infty) = (z, \zeta_1, 0, \infty)$$

isto é

$$w - \zeta_1 = k(z - \zeta_1)$$

sendo $k = \frac{\zeta_1 - \frac{b}{d}}{\zeta_1} = \frac{a}{d}$, porque $\zeta_1 = \frac{b}{d-a}$.

Dada uma função homográfica f com dois pontos fixos distintos ζ_1, ζ_2 , se $w = f(z)$, podemos escrever

$$\frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} = k \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} \quad (32)$$

sendo k constante. Consideremos as funções homográficas g e h definidas por

$$g(w) = \frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} \quad \text{e} \quad h(z) = \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2}.$$

sendo k constante. Consideremos as funções homográficas g e h definidas por

$$g(w) = \frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2} \text{ e } h(z) = \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} .$$

Fazendo $W = g(w)$ e $Z = h(z)$ escreve-se a (32) sob a forma

$$W = k Z . \quad (33)$$

Consideremos a função homográfica

$$W = k \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} \quad (34)$$

transformando 0 e ∞ , respectivamente, em ζ_1 e ζ_2 . Interpretamos, geomêtricamente esta função, através do artifício de considerar z e w variando em dois planos. Desta forma, as circunferências do plano dos z passando por ζ_1 , ζ_2 , possuem para imagem no plano dos W as semi retas pela origem. A família de circunferência $|W| = r$ com centro na origem do plano dos W , é a imagem das curvas

$$\frac{|z - \zeta_1|}{|z - \zeta_2|} = \frac{r}{k} .$$

Quando $z \in \mathbb{C}$ as curvas cuja razão das distâncias a dois pontos fixos ζ_1 , ζ_2 é constante, são circunferências, denominadas circunferências de Apolônio com pontos limites ζ_1 , ζ_2 . Representaremos por C_1 as circunferências por ζ_1 , ζ_2 e por C_2 as circunferências de Apolônio com pontos limites ζ_1 , ζ_2 . Estas duas famílias de circunferências são ortogonais; por cada ponto do plano dos z passa uma circunferência de C_1 e outra de C_2 e somente uma, excetuando-se ζ_1 e ζ_2 . Isto decorre do fato das

circunferências C_1 serem imagens do feixe de semi retas com centro na origem do plano dos W e as C_2 imagens da família de circunferências com centro na origem do plano W . As circunferências C_1, C_2 denomina-se circunferências de Steiner. Veja Fig. 4.

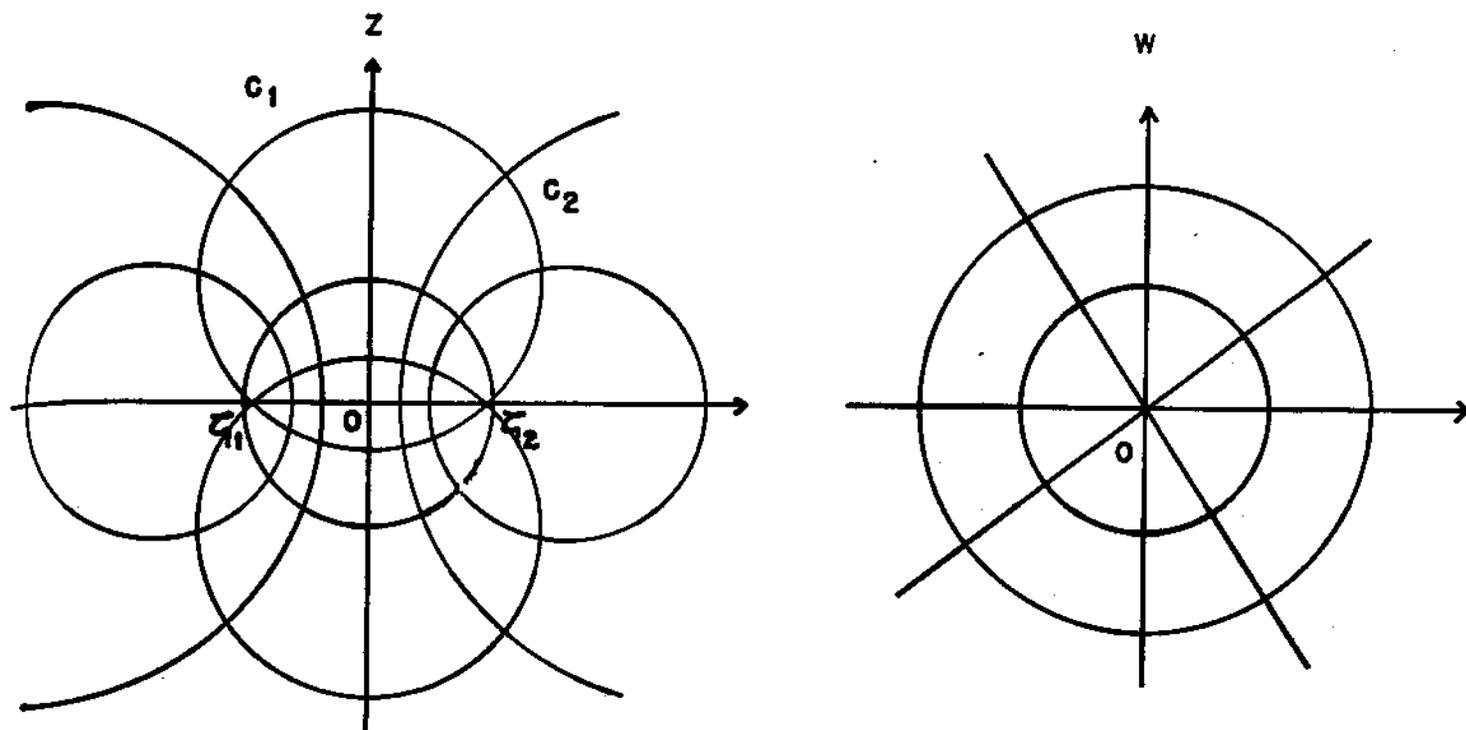


Fig. 4

Definição 2. Diz-se que uma função homográfica f é hiperbólica, quando possui dois pontos fixos e o multiplicador k é um número real positivo.

Seja f hiperbólica, sendo ζ_1, ζ_2 os seus dois pontos fixos. Tem-se $k \neq 1$, logo $k + \frac{1}{k} > 2$ se k for um número real positivo. Por (31) obtem-se $(a+d)^2 > 4$. Conclui-se que f é hiperbólica se e somente se $a+d$ for um número real com $|a+d| > 2$.

Vejamos a interpretação geométrica do caso hiperbólico. Por (33), obtem-se $W = kZ$ com k real positivo, logo uma homotetia com o centro na origem. Esta aplicação, como vimos, transforma cada circunferência com centro na origem em outra da mesma família, e uma semireta com a origem em zero, nela mesma. Retornando a forma (32), conclui-se que uma função hiperbólica leva uma circunferência da família C_1 nela mesma, e uma da família C_2 em outro da família C_2 . A função $W = kZ$ pode ser pensada como um fluxo ao longo das semi retas, de 0 para ∞ . Retornando a (32), podemos interpretar o caso hiperbólico nas famílias C_1, C_2 , como um fluxo de ζ_1 para ζ_2 ao longo das circunferências C_1 .

Definição 3. Diz-se que uma função homográfica é elítica, quando possui dois pontos fixos, sendo o multiplicador k um número complexo unitário.

Seja f elítica e $k = e^{i\theta}$, $\theta \neq 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, o seu multiplicador. Tem-se

$$(a+d)^2 - 2 = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta .$$

Sendo $0 \leq 2 + 2 \cos \theta < 4$ pois $\theta \neq 2n\pi$, obtem-se $(a+d)^2 < 4$. Logo, f será elítica se e somente se $a+d$ for um número real, com $|a+d| < 2$.

Interpretemos geometricamente as transformações elíticas. Por (33) obtem-se $W = kZ$ sendo $k = e^{i\theta}$, $\theta \neq 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Como vimos, estas são rotações em torno da origem. Desta forma, cada circunferência com centro na origem é transformada nela mesma. Entretanto, cada semi reta de origem no zero, é transfor-

mada noutra semi reta da mesma família. Retornando a forma (32), conclui-se que se f fôr elítica, ela transforma cada circunferência C_2 nela mesma, e uma C_1 em uma C_2 . Interpreta-se geomêtricamente as funções homográficas elíticas, como rotações em tórno de ζ_1, ζ_2 ao longo das circunferências C_2 .

Definição 4. Diz-se que uma função homográfica é loxodrômica, quando ela possui dois pontos fixos e o multiplicador k complexo.

Seja $k = \rho e^{i\theta}$ o multiplicador de uma loxodrômica. Quando $\theta = 0$ temos o caso hiperbólico e quando $\rho = 1$ temos o caso elítico. Suporemos, então, ρ um número real positivo diferente de um e $\theta \neq 2k\pi$. Daí, obtem-se

$$(a+d)^2 - 2 = \rho e^{i\theta} + \frac{e^{i\theta}}{\rho} = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \theta + i\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \operatorname{sen} \theta.$$

O segundo membro será real, somente quando θ fôr igual a π módulo 2π . Nêste caso, obtem-se

$$(a+d)^2 = 2 - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \quad (35)$$

Sendo $\rho + \frac{1}{\rho} > 2$, conclui-se que o segundo membro de (35) é negativo, logo $a+d$ é um número complexo. Resulta que f será uma loxodrômica se e somente se $a+d$ fôr um número complexo.

Repetindo o argumento usado nos casos anteriores, segue-se que $W = kZ$ é o produto de uma rotação por uma homotetia, isto é, uma semelhança. Daí resulta que uma loxodrômica é o produto de uma elítica por uma hiperbólica.

Definição 5. Uma função homográfica é denominada parabólica quando possui um único ponto fixo.

Para encontrar o único ponto fixo, resolve-se a equação (27) sob a condição $(d+a)^2 + 4bc = 0$, de onde obtém-se $(a+d)^2 - 4 = 0$, isto é $a + d = \pm 2$. O multiplicador no caso de uma única raiz, é $k=1$.

Admitamos $c \neq 0$ e seja ζ o único ponto fixo de f . Sendo $f(\infty) = \frac{a}{c}$, $f(-\frac{d}{c}) = \infty$, $f(\zeta) = \zeta$, e pondo $w = f(z)$, obtém-se

$$(w, \frac{a}{c}, \infty, \zeta) = (z, \infty, -\frac{d}{c}, \zeta)$$

isto é,

$$\frac{w - \frac{a}{c}}{w - \zeta} = \frac{-\frac{d}{c} - \zeta}{z - \zeta} \quad (36)$$

Adicionando -1 a ambos os membros de (36) resulta

$$\frac{\zeta - \frac{a}{c}}{w - \zeta} = -\frac{\zeta + \frac{d}{c}}{z - \zeta} - 1 \quad (37)$$

Tem-se $\zeta - \frac{a}{c} = \pm \frac{1}{c}$, $\zeta + \frac{d}{c} = \pm \frac{1}{c}$, porque $a+d = \pm 2$ e $\zeta = \frac{a-d}{2c}$.

Deste modo a equação (37) assume a forma

$$\frac{1}{w - \zeta} = \frac{1}{z - \zeta} + \lambda \quad (38)$$

sendo $\lambda = +c$. Multiplicando ambos os membros de (38) por $\bar{\lambda}$, fazendo $r = \lambda \bar{\lambda}$, resulta

$$\frac{\bar{\lambda}}{w - \zeta} = \frac{\bar{\lambda}}{z - \zeta} + r \quad (39)$$

com r real.

Vejamos a interpretação geométrica das parabólicas. Como

$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, a configuração das circunferências de Steiner, veja Fig. 4, assume a forma da Fig. 5

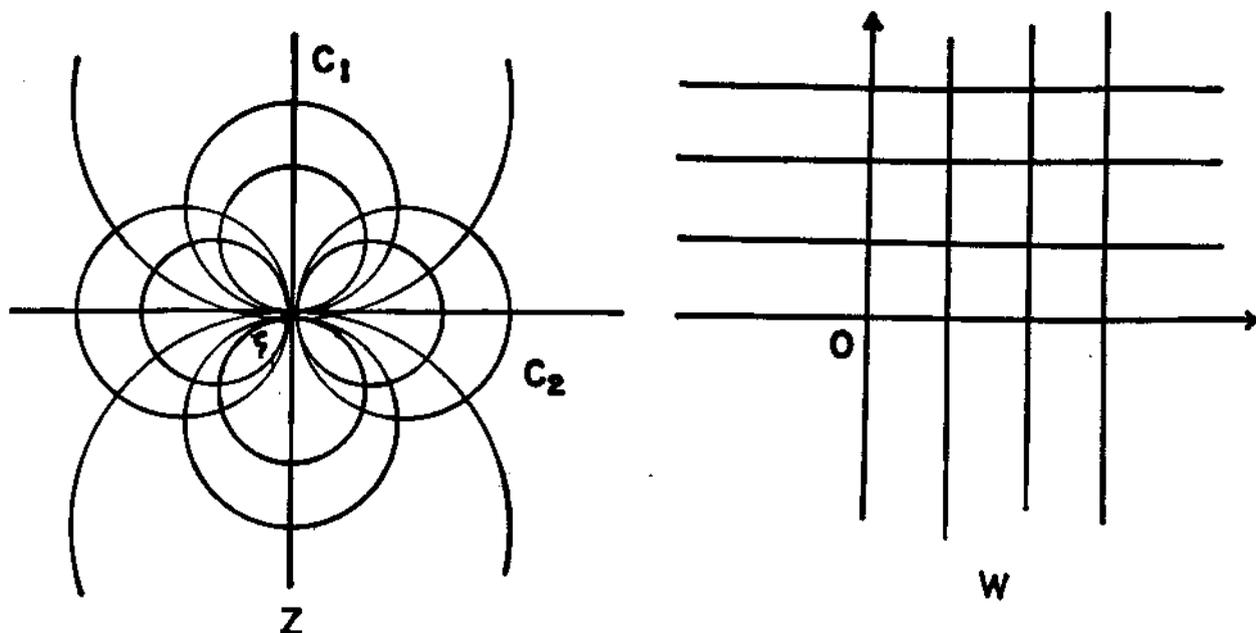


Fig. 5

Fazendo $W = \frac{\bar{\lambda}}{w-\zeta}$, $Z = \frac{\bar{\lambda}}{w-r}$, a (39) escreve-se sob a forma

$$W = Z + r \quad (40)$$

sendo r um número real. A (40) é uma translação paralela ao eixo real. As paralelas ao eixo imaginário ficam fixas. Na família de circunferências, conclui-se que cada C_2 é transformada em outra da família, enquanto cada C_1 é transformada nela mesma. Interpreta-se o caso parabólico, como um fluxo ao longo dos C_1 .

Exercícios:

- 1) Classifique a função homográfica

$$w = \frac{iz + (1+3i)}{z+1} .$$

- 2) Determine o parâmetro
- λ
- para que

$$w = \frac{z + \lambda i}{z + 2i}$$

seja parabólica.

- 3) Quais os pontos fixos da função homográfica

$$w = \frac{z-i}{z+1} .$$

Demonstre que ela transforma o semi plano $\text{Im}z \geq 0$ no círculo $|w| \leq 1$.

4. Demonstre que a condição necessária e suficiente para que

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

transforme $\text{Im}z > 0$ em $\text{Im}w < 0$, é que $ad-bc$ seja um número real negativo.

5. Determine as funções homográficas
- f
- nos seguintes casos:

a) $f(-1) = i$, $f(\infty) = 1$, $f(i) = 1+i$

b) $f(-1) = i$, $f(i) = \infty$, $f(1+i) = 1$.

6. Determine as funções homográficas nos seguintes casos:

a) possui 1, 1 para pontos fixos; sendo $f(0) = 1$.

b) possui $1/2$, 2 para pontos fixos, sendo $f\left(\frac{5+3i}{4}\right) = \infty$.

c) possui um único ponto fixo 1, sendo $f(1) = \infty$.

Classifique as funções nos casos a e b dos exercícios 5 e 6.

CAPÍTULO 4

INTEGRAL. TEOREMA DE CAUCHY-FÓRMULA. INTEGRAL DE CAUCHY. TEOREMA DE MORERA. TEOREMA DE LIOUVILLE. TEOREMA FUNDAMENTAL DE ÁLGEBRA. PRINCÍPIO DO MÁXIMO.

§1. INTEGRAL DE FUNÇÕES COMPLEXAS. TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY.

Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, contínua, sendo z_0, z_1 dois pontos do domínio Ω . Neste parágrafo estaremos interessados em definir o conceito de integral de f desde z_0 a z_1 . Para isto, considera-se um arco γ de Jordan retificável contido em Ω , com extremos z_0, z_1 . Seja $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ uma representação paramétrica de γ . A restrição de f ao arco γ é uma função contínua $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $g(t) = f(z(t))$. Denomina-se integral da função complexa f de z_0 a z_1 , a integral de Riemann-Stieltjes de g , em relação a função $z = z(t)$ em $[a, b]$. Representa-se a integral de f por um dos símbolos

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz; \int_{\gamma} f(z) dz; \int_a^b f(z(t)) dz(t) \quad (1)$$

Com o objetivo de tornar este texto auto-suficiente, relembremos o conceito de integral de Riemann-Stieltjes. Considera-se, para cada decomposição $D: a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a, b]$, a soma

$$S(D) = \sum_{j=1}^n f(z(\xi_j)) [z(t_j) - z(t_{j-1})],$$

sendo ξ_j um ponto qualquer de $[t_{j-1}, t_j]$. Dada uma decomposição D de $[a, b]$, façamos $\mu(D) = \sup_{1 \leq j \leq n} |t_{j-1} - t_j|$.

Diz-se que um número complexo S é o limite de $S(D)$, ao atender $\mu(D)$ a zero, quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|S(D) - S| < \varepsilon$ para toda decomposição D de $[a, b]$, com $\mu(D) < \delta$. Quando existe o número S nas condições anteriores, êle denomina-se a integral de Riemann-Stieltjes de f em relação a $z = z(t)$ no intervalo $[a, b]$. Demonstra-se que se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ fôr contínua e $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, uma representação paramétrica de um arco de Jordan retificável contido em Ω , então existe a integral de f em relação a $z = z(t)$ em $[a, b]$. Do mesmo modo demonstra-se também, que se o arco γ contido em Ω , com extremos z_0, z_1 , fôr um arco de Jordan segmentariamente regular (um caminho em Ω , veja cap. 1, §2), então $\int_{\gamma} f(z) dz$ existe, e

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(z(t)) z'(t) dt \quad (2)$$

Na fórmula anterior os pontos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ são os extremos dos intervalos $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n)$ de derivabilidade de $z = z(t)$.

A igualdade (2) nos indica um método para o cálculo das integrais complexas.

A integral de uma função complexa não depende da representação paramétrica de γ . De fato, seja $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, uma representação paramétrica de γ e $t = t(\zeta)$ uma função crescente de $\alpha \leq \zeta \leq \beta$ em $a \leq t \leq b$, sendo $t = t(\zeta)$ continuamente derivável, ex-

ceto em um número finito de pontos. Fazendo esta mudança de variáveis na integral de Riemann (2), obtém-se

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_\alpha^\beta f(z(t(\zeta))) z'(t(\zeta)) t'(\zeta) d\zeta,$$

demonstrando que $\int_\gamma f(z) dz$ não depende da representação paramétrica de γ , pois $z'(t(\zeta)) t'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} z(t(\zeta))$.

Enunciaremos, sem demonstração, algumas propriedades importantes da integral de uma função complexa, as quais são consequência da teoria da integral de Stieltjes.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e f, g funções complexas contínuas em $\Omega \subset \mathbb{C}$. Se γ for um arco de Jordan segmentariamente regular contido em Ω , obtém-se

$$\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_\gamma f(z) dz + \beta \int_\gamma g(z) dz.$$

Seja γ com representação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. O arco $-\gamma$ possui representação paramétrica $z = z(-t)$, $-b \leq t \leq -a$. Por (2) obtém-se:

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t)) dz(-t) = \int_{-b}^{-a} f(z(-t)) [-z'(-t)] dt.$$

Fazendo a mudança de variáveis, $s = -t$, obtém-se:

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = \int_b^a f(z(s)) dz(s) = - \int_a^b f(z(s)) dz(s) = - \int_\gamma f(z) dz$$

Quando $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n$, resulta

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz$$

Vale a desigualdade

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$$

Sendo $f = 1$ sobre γ , $\int_{\gamma} |dz| = C(\gamma)$. Resultada última desigualdade, que se M for o máximo de f em γ , obtém-se:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq MC(\gamma)$$

Exemplos

1. Calcule $\int_0^{1+i} z dz$ ao longo da parábola $z(t) = t+it^2$. Pela igualdade (2), obtém-se

$$\int_0^{1+i} z dz = \int_0^{1+i} z(t) z'(t) dt = \int_0^{1+i} (t+it^2)(1+2it) dt = \frac{3}{4} (1+i)^3$$

2. Calcule $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, sendo γ a circunferência de raio ρ e centro na origem.

A equação paramétrica de γ é

$$z(t) = \rho (\cos t + i \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Pela igualdade (2) obtém-se:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho(\cos t + i \sin t)} \cdot \rho (-\sin t + i \cos t) dt = 2\pi i$$

O exercício anterior é um caso particular do seguinte.

3. Seja $n \in \mathbb{Z}$ e γ uma circunferência com centro em z_0 e raio R .

Calcule a integral

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz$$

A equação paramétrica de γ é $z(t) = z_0 + R(\cos t + i \sin t)$,
 $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sendo $z'(t) = R(-\sin t + i \cos t) = iR(\cos t + i \sin t)$, obtem-

se

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t] dt .$$

Tem-se

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \, dt = \int_0^{2\pi} \sin kt \, dt = 0 \text{ se } k \neq 0 \text{ e } \int_0^{2\pi} \cos kt \, dt = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \, dt = 0 \text{ se } k = 0.$$

Dai resulta que

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = -1 \\ 0 & \text{para } n \neq -1. \end{cases}$$

O teorema seguinte, denominado teorema integral de Cauchy, é um dos mais importantes da teoria das funções holomorfas. Faremos a demonstração usando o lema de Gauss ou, equivalentemente, a fórmula de Green. Para tal imporemos uma condição mais restrita à função f do enunciado. A título de informação, apenas enunciaremos o caso geral sem demonstrá-lo.

TEOREMA 1 (Teorema integral de Cauchy). Seja Ω um domínio simplesmente conexo do plano complexo e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função continuamente derivável em Ω . Então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda curva γ de Jordan, regular, toda contida em Ω .

Demonstração

Seja $f(z) = u + iv$ continuamente derivável em Ω . Pela fórmula (2), obtém-se

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy). \quad (3)$$

Da continuidade de

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

conclui-se a continuidade das derivadas parciais primeiras de u , v em Ω . Portanto, estas derivadas parciais são contínuas no fecho do interior da curva fechada γ . Representada por Ω_1 este fecho, conclui-se ser γ a sua fronteira a qual suporemos orientada. Pela fórmula de Green, escreve-se

$$\int_{\gamma} (u dx - v dy) = \iint_{\Omega_1} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad (4)$$

$$\int_{\gamma} (u dx + u dy) = \iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (5)$$

Sendo f derivável, resulta que u , v são soluções das equações de Cauchy-Riemann. Como consequência, os integrandos dos segundos membros de (4) e (5) são nulos. Portanto, ambas as parcelas no segundo membro de (3) são nulas, provando o teorema.

Observação 1. A demonstração do teorema 1 continua a valer, com óbvias modificações, se tomarmos um caminho γ fechado contido em Ω no lugar de uma curva de Jordan regular.

Observação 2. Em uma formulação mais fina do teorema integral de Cauchy, supõe-se que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ seja apenas derivável em Ω , isto é, f holomorfa em Ω e γ um caminho fechado todo contido em Ω . Preferimos a formulação enunciada, por possibilitar o uso do teorema de Gauss-Green. Convém observar que vale o teorema de Cauchy com $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ derivável em Ω domínio simplesmente conexo, e contínua na fronteira $\partial\Omega$ de Ω . Supondo $\partial\Omega$ um caminho, o teorema nos diz que $\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0$. Os detalhes sobre as várias formulações do teorema de Cauchy são aconselháveis para um segundo curso de Análise Complexa.

Obteremos certas consequências importantes do teorema de Cauchy, algumas baseadas em considerações puramente intuitivas.

Consideremos $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, supondo válido o teorema de Cauchy para todo caminho fechado contido no domínio Ω . Sejam z_0, z_1 dois pontos de Ω e γ_1, γ_2 dois arcos regulares de Jordan contidos em Ω , com extremos z_0, z_1 , sem outros pontos comuns, como mostra a figura 6. Suponhamos γ_1, γ_2 orientados de z_0 para z_1 . Assim $-\gamma_1 \cup \gamma_2$ é um caminho fechado contido em Ω . Resulta do teorema de Cauchy que

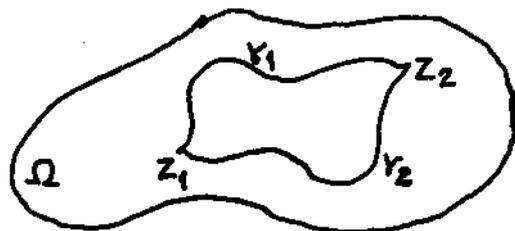


Fig. 6

$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = 0$. Consequentemente, $\int_{-\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$.
Obtem-se, daí,

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad (6)$$

quaisquer que sejam γ_1, γ_2 , nas condições fixadas.

Observação 3. Seja f holomorfa em Ω e admitamos o teorema de Cauchy válido neste caso geral, veja observação 2. Então, a (6) nos diz que a integral de f de $z_0, z_1 \in \Omega$, não depende dos arcos γ_1, γ_2 conectando z_0 a z_1 .

Observação 4. No teorema de Cauchy, veja obs. 2, supuzemos que o domínio Ω fôsse simplesmente conexo e f holomorfa em Ω . Quando retira-se esta hipótese sôbre Ω , o fato de ser f holomorfa em Ω deixa de ser uma condição suficiente para o anulamento das integrais ao longo de tôdas as curvas fechadas contidas em Ω . Por exemplo, vimos que

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = -1 \\ 0 & \text{se } n \neq -1. \end{cases}$$

sendo $\gamma \subset \Omega$ uma qualquer circunferência com centro em z_0 . Para $n = 2$, $1/(z-z_0)^2$ não é derivável em z_0 , logo não é aí holomorfa, porém sua integral é zero ao longo de qualquer circunferência γ com centro em z_0 . A função $1/(z-z_0)^2$ é holomorfa no domínio $\mathbb{C} - \{z_0\}$, que não é simplesmente conexo.

PROPOSIÇÃO 1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínua e z_0, z dois pontos quaisquer de Ω . Supo

nhamos que

$$\int_{z_0}^z f(\sigma) d\sigma$$

independa do caminho $\Gamma \subset \Omega$, com extremos z_0, z , dependendo sômente de z , para cada z_0 fixe. Então, a função

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z f(\sigma) d\sigma \quad (7)$$

é derivável em todo $z \in \Omega$ e $\varphi'(z) = f(z)$.

Demonstração

Para todo par z e ζ em Ω , obtem-se

$$\varphi(\zeta) - \varphi(z) = \int_z^\zeta f(z) dz, \quad (8)$$

porque a integral não depende do caminho γ com extremos z_0 e z , contido em Ω . Demonstraremos a existência da derivada de φ em z . Seja $V_\varepsilon(z)$ um disco aberto com centro em z cujo fêcho $V_\varepsilon(z) \subset \Omega$, e ζ um ponto interior a $V_\varepsilon(z)$. De (8) obtem-se

$$\left| \varphi(\zeta) - \varphi(z) - \int_z^\zeta f(z) d\sigma \right| = \left| \int_z^\zeta [f(\sigma) - f(z)] d\sigma \right|$$

Fazendo $M(\zeta) = \max \{ |f(\sigma) - f(z)|; \sigma \in \gamma \}$, obtem-se

$$\left| \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z)}{\zeta - z} - f(z) \right| \leq M(\zeta).$$

Quando ζ tende a z , $M(\zeta)$ tende a zero, pois f é contínua, logo φ é derivável com $\varphi'(z) = f(z)$.

Suponha f holomorfa no domínio simplesmente conexo Ω . Pelo teorema de Cauchy a integral (7) não depende do caminho contido em Ω , com extremos z_0, z . Desta forma, vale a proposição quando supõe-se f holomorfa, que é o análogo do teorema fundamental do cálculo integral para funções reais.

Denomina-se primitiva de f , a uma função φ derivável tal que $\varphi' = f$. A proposição 1 nos diz, após as considerações acima, que se f for holomorfa em um domínio simplesmente conexo Ω , então a função φ definida por (7), é uma primitiva de f .

PROPOSIÇÃO 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em Ω . Se φ for uma primitiva de f , então

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = \varphi(z_1) - \varphi(z_0)$$

para todo $z_1, z_0 \in \Omega$.

Demonstração

Dadas duas primitivas de f , elas diferem por uma constante. Pela proposição 1, sabe-se que $\varphi(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt$ é uma primitiva de f . Logo, todas as primitivas de f são obtidas adicionando uma constante a φ , isto é,

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = \varphi(z_1) + C$$

para todo $z_1 \in \Omega$. Fazendo $z_1 = z_0$, obtém-se $C = -\varphi(z_0)$ o que

demonstra a proposição.

Seja Ω um domínio de \mathbb{C} e γ um caminho fechado contido em Ω , cujo fecho do seu interior, que representaremos por $I(\gamma)$, está contido no interior de Ω . Suponhamos $f; \Omega - I(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Note que $\Omega - I(\gamma)$ não é simplesmente conexo. Desta forma $\int_{\gamma} f(z)dz$ não será necessariamente zero. Consideremos um caminho fechado Γ contido em Ω tal que $I(\gamma) \subset I(\Gamma)$, como indica a Fig. 7. Suponhamos Γ e γ orientadas no sentido das flechas da Fig. 7. Deduziremos, através de considerações intuitivas, que $\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$, para toda Γ nas condições anteriores. Para isto, tomemos um ponto z_1 em γ e outro z_2 em Γ . Seja γ_1 um caminho com extremos z_1 e z_2 , contido em $I(\Gamma) - I(\gamma)$, como mostra a Fig. 7.

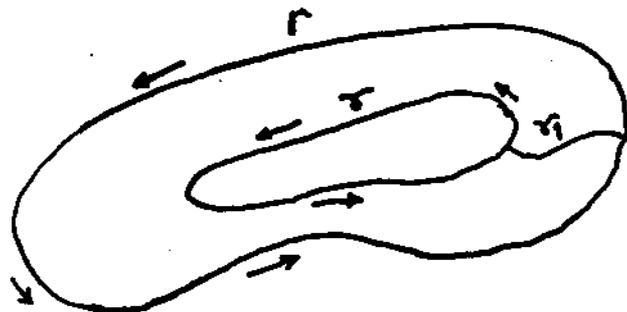


Fig. 7

Consideremos o caminho Γ_1 definido por

$$\Gamma_1 = \Gamma \cup \gamma_1 \cup (-\gamma) \cup (-\gamma_1) \quad (9)$$

Note que $-\gamma_1$ é o caminho γ_1 com orientação invertida em relação a escolhida para γ_1 . Desta forma, Γ_1 é um caminho fechado, cujo interior suporemos simplesmente conexo, sendo f holomorfa no seu fecho. Pelo teorema integral de Cauchy resulta

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0 .$$

Obtem-se daí e de (9)

$$\int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma} f(z)dz + \int_{-\gamma_1} f(z)dz = 0$$

Conclui-se, portanto, que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz \quad (10)$$

Um exemplo típico desta situação é aquêle em que a função f é holomorfa em um domínio Ω , exceto em um número finito de pontos interiores a Ω . Por exemplo, seja $w = p(z)$ um polinômio do grau n . Sendo z_1, z_2, \dots, z_k as raízes de $p(z) = 0$ com ordens de multiplicidades $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = n$. Desta forma, a função $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ é definida no plano complexo \mathbb{C} do qual foram excluídos os pontos z_1, z_2, \dots, z_k . Portanto, f não é definida em um domínio simplesmente conexo. Escolhendo um caminho qualquer γ contendo os pontos z_1, z_2, \dots, z_k em seu interior, obtem-se o domínio $\mathbb{C} - I(\gamma)$. A restrição de $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ a $\mathbb{C} - I(\gamma)$ é holomorfa. Esta é uma situação semelhante a anteriormente considerada para a obtenção da fórmula (10).

Para completar estas considerações e exemplificar com situações simples, resolva os exercícios 1, 2, 3, 4 e 5 propostos no final dêste capítulo.

§2. FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Demonstraremos uma representação integral de f ao longo de caminhos fechados contidos em Ω . De posse deste resultado, demonstraremos que se f for holomorfa em Ω , então ela será indefinidamente continuamente derivável em Ω . Por esta razão, por analogia com o caso real, as funções holomorfas são também denominadas funções analíticas.

TEOREMA 2. Sejam $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no domínio simplesmente conexo Ω e Γ um qualquer caminho fechado contido em Ω . Para todo z no interior de Γ , tem-se:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (11)$$

denominada fórmula integral de Cauchy.

Demonstração

De fato, sendo Ω aberto, para cada z no interior de Γ existe um disco fechado de centro em z e raio $\rho > 0$ contido no interior de Γ . Seja γ a fronteira deste disco. Veja Fig. 8. Suponhamos Γ e γ orientadas no sentido das setas como indicado na Fig. 8. A função

$$\zeta \longrightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

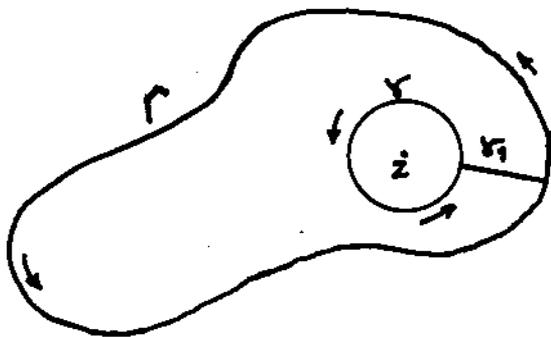


Fig. 8

é holomorfa em $\Omega - I(\gamma)$. Repetindo o argumento usado no parágrafo anterior resulta que

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \quad (12)$$

Uma representação paramétrica de γ é dada por $\zeta = z + \rho e^{it}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Daí, a (12) pode ser escrita sob a forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt, \quad (13)$$

da qual obtem-se

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + \rho e^{it}) - f(z)| dt \quad (14)$$

Sendo f contínua em Ω , por ser holomorfa, segue-se que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $|f(z + \rho e^{it}) - f(z)| < \varepsilon$, para todo $\rho < \delta$. Resulta que (14) implica a fórmula integral de Cauchy (10).

Observemos que a fórmula integral de Cauchy, nos diz que se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ fôr holomorfa no domínio simplesmente conexo Ω , então, o seu valor $f(z)$ em todo ponto z no interior de um qualquer caminho fechado Γ contido em Ω , é obtido através do conhecimento de f sobre Γ .

Demonstraremos, como observado no início deste parágrafo, que se f fôr holomorfa em Ω ela será continuamente, indefinidamente, derivável em Ω . Com a notação e hipótese do teorema 2, seja $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínua. Segue-se que

$$z \rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

é uma função definida em $\Omega - \Gamma$.

TEOREMA 3. A função $f: \Omega - \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (15)$$

com $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínua é holomorfa em $\Omega - \Gamma$, sendo sua derivada igual a

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \quad (16)$$

Demonstração

De fato, demonstraremos a (16) em um ponto z_0 , qualquer de $\Omega - \Gamma$. Para isto, consideremos a diferença

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) \varphi(\zeta) d\zeta$$

ou

$$f(z) - f(z_0) = \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta.$$

Obtem-se daí

$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^2} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(z-z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2(\zeta-z)} d\zeta \right| \leq$$

$$\leq \frac{|z-z_0|}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|\varphi(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta-z_0|^2 |\zeta-z|}. \quad (17)$$

Seja z_0 não pertencente a Γ , seja $d > 0$, fixo, menor do que a distância de z_0 a Γ . Como z também não pertence a Γ , podemos restringi-lo ao disco $|z-z_0| < \frac{d}{2}$. Por ser φ contínua no compacto Γ conclui-se que $|\varphi(\zeta)| < M$ para todo $\zeta \in \Gamma$, sendo $M > 0$ constante. Assim, destas considerações e da desigualdade (17), obtem-se:

$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^2} \right| \leq K(d, c(\Gamma)) |z-z_0|, \quad (18)$$

sendo $K(d, c(\Gamma)) = \frac{4M}{\pi d^3} c(\Gamma)$ independente de z . De (18), fazendo $z \rightarrow z_0$ segue-se a validade de (16) em z_0 . Sendo z_0 um ponto qualquer de $\Omega - \Gamma$, conclui-se que a (16) é válida em $\Omega - \Gamma$.

COROLÁRIO 1. Nas hipóteses do teorema 3, a função f definida por (15) possui derivadas de tôdas as ordens, sendo a derivada de ordem n dada por

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta, \quad (19)$$

para todo z em $\Omega - \Gamma$.

Demonstração

Demonstraremos por indução. Para $n = 1$ tem-se a (16) do teorema 3. Suponhamos a (19) válida para $n-1$ e vamos demonstrá-la para n . Tomemos um ponto z_0 qualquer de $\Omega - \Gamma$.

$$\frac{f^{(n-1)}(z) - f^{(n-1)}(z_0)}{z - z_0} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^n} \right] \frac{\varphi(\zeta)}{z - z_0} d\zeta \quad (20)$$

A função $g: \Omega - \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \frac{1}{(\zeta - z)^n} \text{ para } \zeta \in \Gamma$$

é holomorfa em $\Omega - \Gamma$. Portanto, ela é derivável em $z_0 \in \Omega - \Gamma$, sendo sua derivada dada por

$$\frac{n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^n} \right] \times \frac{1}{z - z_0}.$$

Portanto, existe o limite do segundo membro de (20) quando $z \rightarrow z_0$, sendo igual

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (21)$$

O primeiro membro de (20) tem, portanto, limite, que é a derivada n -ésima de f no ponto $z_0 \in \Omega - \Gamma$. De (21) segue-se, portanto,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Sendo z_0 um ponto qualquer de $\Omega - \Gamma$, conclui-se a validade de (19) em um ponto qualquer de $\Omega - \Gamma$.

Tomemos $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no domínio simplesmente conexo Ω . Para cada caminho fechado $\Gamma \subset \Omega$, o teorema 1 nos diz que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

O corolário 1 do teorema 2, nos diz que esta função possui derivadas contínuas de tôdas as ordens em Ω , sendo, para cada n , sua derivada n -ésima dada por

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad (22)$$

para todo $z \neq \zeta$. A (22) é conhecida sob a denominação de fórmula integral de Cauchy, para a derivada de ordem n da função holomorfa f .

O teorema que demonstraremos a seguir, é uma condição suficiente para que uma função contínua em um domínio simplesmente conexo Ω , seja aí holomorfa.

TEOREMA 4. (Morera). Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua no domínio simplesmente conexo Ω . Se

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para todo caminho fechado contido em Ω , segue-se que f é holomorfa em Ω .

Demonstração

Sendo $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para todo caminho contido em Ω , conclui-se que fixado $z_0 \in \Omega$, a integral

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

depende unívocamente de z . Portanto,

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

é uma função definida em Ω , derivável, (Proposição 1, §1 d'êste capítulo) sendo $\varphi'(z) = f(z)$. Portanto, f é igual a derivada da uma função holomorfa, φ , logo holomorfa, o que prova o teorema de Morera.

§3. FUNÇÕES HARMÔNICAS

Evidentemente, não iremos fazer nêste parágrafo um estudo completo das funções harmônicas, mas sim salientar a relação entre as funções harmônicas definidas em domínios do \mathbb{R}^2 , com as funções holomorfas em domínios de \mathbb{C} . Representemos por Δ o operador diferencial de segunda ordem $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, denominado operador de Laplace ou Laplaciano.

DEFINIÇÃO 1. Seja Ω um domínio do \mathbb{R}^2 e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em Ω . Diz-se que u é harmônica em Ω , quando u fôr continuamente derivável até a segunda ordem em Ω e $\Delta u = 0$ em Ω .

Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ holomorfa em um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$.
 Daí, resulta que u, v são soluções das equações de Cauchy-Riemann, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (23)$$

Sabemos do parágrafo anterior, que f é indefinidamente continuamente derivável. Portanto, as derivadas parciais de tôdas as ordens de u, v existem e são contínuas. Derivando a primeira das equações (23) em relação a x , a segunda em relação a y , adicionando membro a membro, lembrando o lema de Schwarz sobre derivadas parciais mixtas, obtem-se $\Delta u = 0$, em Ω . De maneira análoga demonstraríamos que $\Delta v = 0$ em Ω . Conclui-se, deste modo, que se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ for holomorfa em Ω , então u e v são funções harmônicas em Ω .

Demonstraremos que a recíproca da afirmativa anterior é também válida. De fato, seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica em Ω . Sejam $(x_0, y_0), (x, y)$ dois pontos de Ω , sendo (x_0, y_0) fixo. Representemos por γ um caminho contido em Ω com extremos nestes dois pontos. Consideremos a forma diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, sendo $P(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$. Por ser $\Delta u = 0$, conclui-se que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, provando ser a forma exata, isto é, existe uma $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, continuamente diferenciável em Ω , tal que $dw = Pdx + Qdy$. Desta forma,

$$\int_{\gamma} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right\}$$

depende sômente dos extremos de γ . Fixado (x_0, y_0) , ela define em Ω a função numérica

$$v(x, y) = \int_{\gamma} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right\} \quad (24)$$

possuindo derivadas parciais de primeira ordem, contínuas em Ω , satisfazendo a condição

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

que são as equações de Cauchy-Riemann (23). Conclui-se que a função $f(z) = u + iv$ é holomorfa em Ω . A função v definida pela integral (24) denomina-se função harmônica conjugada da u . Assim, dado um par de funções harmônicas conjugadas em um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, a função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = u + iv$ é holomorfa em Ω .

Exemplo: Seja Ω o semi plano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ e $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2),$$

que é harmônica em Ω . Consideremos a harmônica conjugada

$$v(x, y) = \int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} + C$$

sendo $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} < +\frac{\pi}{2}$. Obtem-se

$$f(z) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} < +\frac{\pi}{2},$$

do que resulta ser f um ramo da função logarítmica.

§4. TEOREMA DE LIOUVILLE. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA. PRINCÍPIO DO MÁXIMO

Nêste parágrafo faremos mais aplicações da fórmula integral de Cauchy demonstrando, inicialmente, o teorema de Liouville. Nele baseado, demonstraremos o teorema de Gauss-d'Alembert sôbre a existência de raízes de uma equação algébrica, também denominado teorema fundamental da Álgebra. Finalizando, provaremos o princípio do máximo para funções holomorfas.

TEOREMA 5. (Liouville). Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em \mathbb{C} . Se f for limitada em todo o \mathbb{C} ela será constante.

Demonstração

Seja z_0 um ponto qualquer de \mathbb{C} e $V_\rho(0)$ um disco aberto com centro na origem contendo z_0 em seu interior. Representemos por γ a fronteira de $V_\rho(0)$. Sendo f holomorfa em \mathbb{C} ,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0},$$

pela fórmula integral de Cauchy. Tem-se, também,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta}.$$

De (25) e (26) obtem-se

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|z_0| |f(\zeta)|}{|\zeta - z_0| |\zeta|} |d\zeta|$$

Sendo f limitada em \mathbb{C} , existe uma constante $K > 0$ tal que $|f(z)| < K$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Consequentemente,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{K|z_0|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_0||\zeta|} \quad (27)$$

Tem-se $\zeta \in \mathcal{Y}$, logo $|\zeta - z_0| \geq \rho - |z_0|$. Portanto, de (27) resulta

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{K|z_0|}{(\rho - |z_0|)}$$

sendo $K, |z_0|$ números independentes de ρ . Fazendo $\rho \rightarrow \infty$ em (28), conclui-se que para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) = f(0)$, provando ser f constante em \mathbb{C} .

TEOREMA 6 (d'Alembert Gauss). Seja

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

um polinômio com $a_0 \neq 0$ e coeficientes complexos. Então a equação algébrica

$$p(z) = 0$$

possui uma raiz em \mathbb{C} .

Demonstração

De fato, suponhamos $p(z) \neq 0$ em \mathbb{C} . Daí resulta que

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

é holomorfa em \mathbb{C} . Provaremos que f é limitada em \mathbb{C} . Em cada compacto $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho\}$, $\rho > 0$, f é limitada porque é contínua. Vejamos que ela também é limitada no exterior destes discos fechados.

Realmente, sendo

$$p(z) = z^n \left[a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right],$$

obtem-se

$$|p(z)| \geq |z^n| \left[|a_0| - \frac{|a_1|}{|z|} - \frac{|a_2|}{|z^2|} - \dots - \frac{|a_n|}{|z^n|} \right].$$

Seja $r > 0$ tal que

$$\frac{|a_1|}{|z|} + \frac{|a_2|}{|z^2|} + \dots + \frac{|a_n|}{|z^n|} < \frac{|a_0|}{2}, \text{ para todo } |z| > r.$$

Resulta, portanto,

$$|p(z)| \geq \frac{1}{2} |a_0| r^n, \text{ para todo } |z| > r.$$

Esta desigualdade implica

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|a_0| r^n} \text{ para todo } |z| > r,$$

provando que f é, também, limitada no exterior dos discos $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \rho\}$. Pelo teorema de Liouville resulta que f é constante em \mathbb{C} , o que é uma contradição, pois $a_0 \neq 0$ implica $p(z)$ não constante. Logo, $p(z) = 0$ possui solução em \mathbb{C} .

TEOREMA 7. (Princípio do Máximo). Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{C} , $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em Ω e contínua no fecho $\bar{\Omega}$. O máximo de $|f|$ é assumido em um ponto da fronteira $\partial\Omega$.

Demonstração

Caso f seja constante o teorema é evidente. Suponhamos f

não constante em Ω . Por ser $|f|$ contínua no compacto $\bar{\Omega}$, resulta que existe um ponto z_0 em $\bar{\Omega}$ tal que $|f(z_0)|$ é o máximo de $|f|$ em $\bar{\Omega}$. Demonstraremos que $z_0 \in \partial\Omega$. Supondo que $z_0 \in \Omega$ e não a $\partial\Omega$, chegaremos a uma contradição. De fato, sendo f holomorfa em Ω , se γ fôr a fronteira de um qualquer disco fechado $V_{\Omega}(z_0) \subset \Omega$, obtemos, pela fórmula de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{z-z_0} d\zeta . \quad (29)$$

Seja $\zeta = z_0 + r e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ uma representação paramétrica de γ . A (29) toma a forma

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta . \quad (30)$$

Representemos por $M(r)$ o máximo de $|f|$ sobre $V_{\Omega}(z_0)$. De (30) obtemos

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{i\theta})| d\theta \leq M(r) . \quad (31)$$

Não podemos ter $|f(z_0)| < M(r)$ estritamente, porque $|f(z_0)|$ é o máximo em $\bar{\Omega} \supset V_{\Omega}(z_0)$. Logo, vale a igualdade, $|f(z_0)| = M(r)$, provando ser $|f|$ constante em $V_{\Omega}(z_0)$.

Demostremos que $|f|$ será constante em Ω , o que implica em uma contradição. Seja ζ um ponto qualquer de Ω e Γ uma poligonal contida em Ω , com extremos z_0, ζ , e representação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Suponhamos $d > 0$, a distância de Γ a fronteira $\partial\Omega$. Em virtude da continuidade uniforme de $z = z(t)$, existe uma decomposição $D(t_0, t_1, \dots, t_n)$, $t_0 = a$, $t_n = b$,

de $a \leq t \leq b$, tal que $|z_1 - z_{1-1}| < d$, sendo $z_i = z(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Note que $z(t_0) = z_0$ e $z(t_n) = \zeta$. No disco $V_d(z_0)$ tem-se $|f(z)| = |f(z_0)|$. Sendo $|z_1 - z_0| < d$, $z_1 \in V_d(z_0)$ e $|f(z_1)| = |f(z_0)|$. Resulta, pelo argumento usado no início da demonstração que $|f(z)| = |f(z_0)|$ para todo $z \in V_d(z_1)$. Desta forma, cobriríamos Γ com um número finito de discos, sendo o último $V_d(\zeta)$ com $|f(\zeta)| = |f(z_0)|$ provando ser $|f|$ constante em Ω . Vejamos que isto implica f constante em Ω . Seja $|f(z)| > 0$ em Ω , f holomorfa em Ω por hipótese. Consideremos a função holomorfa em Ω

$$\log f(z) = \log |f(z)| + iv, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2},$$

sendo v a função harmônica conjugada de $u = \log |f(z)|$. Sendo u constante em Ω , sua harmônica conjugada v também é constante em Ω . Resulta que a função $\log f(z) = u + iv$ é constante em Ω , isto é, f é constante em Ω o que é uma contradição. Logo o máximo de $|f|$ é assumido em um z_0 pertencente a fronteira $\partial\Omega$.

Exercícios

1. Demonstre a (10) quando são considerados $n+1$ caminhos fechados $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, repetindo um argumento análogo ao usado no texto.
2. Considere a função

$$f(z) = [(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)]^{-1}$$

definida em $\mathbb{C} - \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Tome n circunferências γ_1 duas a duas disjuntas definidas por

$$\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_1| = \varepsilon\}$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Se Γ fôr um caminho fechado contendo tôdas as γ_i em seu interior, prove que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz$$

3. Seja Γ um caminho fechado e z_0 um ponto no interior de Γ . Demostre que

$$\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = -1 \\ 0 & \text{se } n \neq -1 \end{cases}$$

4. Calcule

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$$

sendo γ um caminho fechado contendo em seu interior os pontos $+i$ e $-i$.

5. Faça o cálculo direto, (usando a igualdade (2) no texto) da integral do exercício 3, para Γ nos seguintes casos:

- a) Γ é uma elipse com z_0 no seu interior
- b) Γ é um quadrado com centro em z_0 .

6. Calcule as seguintes integrais

- a) $\int_{\gamma} e^z dz$, sendo γ a poligonal com vértices nos números complexos $-1, +1, 1+i$.
- b) $\int_{\gamma} (\sin z - \cos z) dz$, sendo γ o segmento de reta com extremos em $-1, +i$.

c) $\int_{\gamma} z^n dz$, para $n \in \mathbb{Z}$ e γ a poligonal com vértices em $-i$, $+2i$, $1+i$.

7. Calcule as integrais:

a) $\int_{|z|=4} \frac{e^z + z^6}{(z-1)^4} dz$

b) $\int_0^{2+i} (z^2 - iz + 2) dz$ ao longo de um segmento de reta.

c) $\int_0^{4i} (z^3 - 2iz + 4) dz$, ao longo da poligonal com vértices em 0 , $1+i$, $+4i$.

d) $\int_{|z|=5} \frac{\operatorname{sen} z \operatorname{cos} z}{z^2 - 2z + 1} dz$

8. Calcule as derivadas

a) $\frac{d^3}{dz^3} \int_{\gamma} \frac{e^{\zeta^2} d\zeta}{(\zeta - z)^2}$, sendo γ um caminho fechado em \mathbb{C} contendo z em seu interior. Após a derivação, substitua z por i , calculando a integral resultante.

b) $\frac{d^n}{dz^n} \int_{|\zeta|=3} \frac{e^{\zeta} \operatorname{sen} \zeta}{\zeta - z} d\zeta$, sendo $|z| \leq 2$.

Após a derivação substitua z por $1+i$, calculando a integral resultante.

9. Demonstre que as seguintes funções são harmônicas e calcule as funções harmônicas conjugadas nos respectivos domínios.

a) $u(x,y) = 2xy$ em \mathbb{C} .

b) $u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ em $\mathbb{C} - \{0\}$.

c) $u(x,y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ em \mathbb{C} .

10. Seja $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e integrável em \mathbb{R} . Demonstre que

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^2 + y^2}$$

é harmônica no semiplano $-\infty < x < +\infty, y > 0$.

CAPÍTULO 5SÉRIES DE FUNÇÕES COMPLEXAS - CONVERGÊNCIA UNIFORME - SÉRIES DE POTÊNCIAS - TEOREMA DE CAUCHY-HADAMARD - SÉRIES DE TAYLOR§1. SÉRIES DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Seja Ω um domínio de \mathbb{C} . A aplicação que a cada número natural n , associa uma função $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, denomina-se uma sucessão de funções complexas. Representa-se uma sucessão de funções complexas por $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sendo f_n denominada seu termo geral. Diz-se que a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em z_0 pertencente a Ω , quando a sucessão numérica $(f_n(z_0))_{n \in \mathbb{N}}$ fôr convergente. Diz-se que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em Ω , quando a sucessão numérica $(f_n(z_0))_{n \in \mathbb{N}}$ fôr convergente em todo z_0 de Ω .

De modo análogo ao caso numérico (Cap. 1, §3), define-se série de funções complexas a partir de uma sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Consideremos, portanto, uma série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de funções complexas. A sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das reduzidas desta série, é constituída pelas funções $s_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definidas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} s_0 &= f_0 \\ s_1 &= f_0 + f_1 \\ s_2 &= f_0 + f_1 + f_2 \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= f_0 + f_1 + \dots + f_n \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Diz-se que uma série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de funções $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, é convergente em $z_0 \in \Omega$, quando a sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de suas reduzidas

fôr convergente em z_0 . Diz-se que uma série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, de funções $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, é convergente em Ω , quando ela fôr convergente em todo ponto de Ω . Seja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ convergente em Ω . A função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z)] ,$$

denomina-se a soma da série dada.

Consideremos uma série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ convergente em um subconjunto infinito $E \subseteq \Omega$. Para todo $z_0 \in E$ a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ é convergente. Logo, pelo teorema de Cauchy (Cap. 1, §3), para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon, z_0)$ satisfazendo a seguinte condição:

$$|f_{n+1}(z_0) + f_{n+2}(z_0) + \dots + f_{n+p}(z_0)| < \varepsilon \quad (1)$$

para todo $n > n_0$ e $p \geq 1$. Fixado $\varepsilon > 0$ e fazendo z_0 variar em E , a igualdade (1) continua válida para valores distintos de $n_0 = n_0(\varepsilon, z_0)$, em geral. São importantes em Análise, as séries para as quais existe um valor de $n_0 = n_0(\varepsilon; z_0)$, tal que a (1) seja válida para todo $n > n_0$, qualquer que seja $z_0 \in E$, fixado apenas o $\varepsilon > 0$. Por esta razão, define-se, como faremos a seguir, o conceito de convergência uniforme de uma série.

DEFINIÇÃO 1. Diz-se que uma série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de funções complexas $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, converge uniformemente em um subconjunto infinito $E \subseteq \Omega$ quando para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ satisfazendo a seguinte condição:

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

para todo $n_0 = n_0(\varepsilon)$, $p \geq 1$, qualquer que seja z em E .

Exemplos de séries uniformemente convergentes veremos no parágrafo seguinte, ao estudarmos as séries de potências. Tendo em vista o estudo destas séries, demonstraremos alguns resultados de caráter geral sobre séries de funções complexas, tendo em mente sua aplicação no parágrafo 2.

PROPOSIÇÃO 1 (Weierstrass). Seja $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ uma série convergente de números reais positivos. Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ for uma série de funções $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, tais que

$$|f_n(z)| < M_n, \text{ para todo } z \in \Omega,$$

exceto para um número finito de valores de n , então $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em Ω .

Demonstração

De fato, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \dots + M_{n+p} < \varepsilon \quad (3)$$

para todo $n > n_0$, $p \geq 1$. De (2) e (3), conclui-se que para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$, tal que

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0(\varepsilon)$, $p \geq 1$, qualquer que seja $z \in \Omega$. Decorre daí que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em Ω .

PROPOSIÇÃO 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e para cada $n \in \mathbb{N}$ suponhamos $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínua e $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ convergente em Ω , com

soma f . Se esta série converge uniformemente em cada compacto $K \subset \Omega$, então f é uma função contínua em Ω .

Demonstração

Fazendo $R_{n+1} = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j$, para cada $z \in \Omega$, escreve-se

$$f(z) = s_n(z) + R_{n+1}(z).$$

Seja z_0 um ponto qualquer de Ω e provemos que f é contínua em z_0 . Sendo Ω aberto, existe um disco aberto $V_\rho(z_0)$, $\rho > 0$, tal que $\overline{V_\rho(z_0)} \subset \Omega$. Sendo $V_\rho(z_0)$ um compacto de Ω , a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ nêle converge uniformemente. Portanto, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|R_{n+1}(z)| < \varepsilon/3, \text{ para todo } z \in \overline{V_\rho(z_0)} \quad (3)$$

Sendo s_n a reduzida de ordem n da série dada, conclui-se que s_n é uma função contínua em Ω , por ser a soma de um número finito de funções contínuas em Ω . Desta forma, sendo s_n contínua no compacto $\overline{V_\rho(z_0)}$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$|s_n(z) - s_n(z_0)| < \varepsilon/3, \text{ para todo } z \in V_\delta(z_0) \subset \overline{V_\rho(z_0)} \quad (4)$$

De (3) e (4) resulta que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ satisfazendo a seguinte condição:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |s_n(z) - s_n(z_0)| + |R_{n+1}(z)| + |R_{n+1}(z_0)| < \varepsilon$$

para todo $z \in V_\delta(z_0)$. Isto prova que f é contínua em z_0 , logo em Ω , em virtude da arbitrariedade de z_0 .

COROLÁRIO 1. Com as hipóteses da proposição 2, se Γ for um caminho contido em Ω , a soma f da série é integrável ao longo de Γ , valendo a igualdade

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz . \quad (5)$$

Demonstração

De fato, f é integrável ao longo de Γ porque é contínua em Ω . Obtem-se

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} f_j(z) dz + \int_{\Gamma} R_{n+1}(z) dz ,$$

de onde resulta

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} f_j(z) dz \right| < \int_{\Gamma} |R_{n+1}(z)| |dz| .$$

Sendo $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ uniformemente convergente sobre Γ , segue-se que para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $|R_{n+1}(z)| < \varepsilon / c(\Gamma)$, para $n > n_0$, qualquer que seja $z \in \Gamma$. Note que estamos representando por $c(\Gamma)$ o comprimento de Γ . Portanto, a igualdade anterior implica a (5) provando o corolário.

PROPOSIÇÃO 3. Seja Ω um domínio simplesmente conexo e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em Ω . Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge em Ω , sendo uniformemente convergente em cada compacto K de Ω , vale o seguinte:

- a) A soma f da série é uma função holomorfa em Ω .
- b) A série das derivadas de ordem p de f_n converge uniformemente em cada compacto K de Ω , para a derivada de ordem p da f .

Demonstração

a. Seja Γ um caminho fechado contido em Ω . Por hipótese, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge em Ω e uniformemente sobre Γ . Resulta, pela proposição 2, que f é contínua em Ω , logo integrável ao longo de Γ . Pelo corolário 1, obtém-se

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz \quad (6)$$

Sendo $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em Ω e Γ todo contido em Ω , conclui-se, pelo teorema de Cauchy, que

$$\int_{\Gamma} f_n(z) dz = 0, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Conclui-se da (6) que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

qualquer que seja o caminho fechado Γ contido em Ω . Sendo f contínua em Ω , resulta, pelo teorema de Morera, que f é holomorfa em Ω .

b. Sejam K um compacto contido em Ω , Γ um caminho fechado contido em Ω e contendo K em seu interior. Demonstra-se que existe um tal caminho Γ , sendo a distância de Γ a K um nú

mero d estritamente positivo. Pela fórmula de Cauchy, para a derivada de ordem p , obtem-se:

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} d\zeta \quad (7)$$

para todo $z \in \Omega$. Sobre Γ a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente, tendo soma f . Logo, pelo corolário 1 e a fórmula integral de Cauchy, a (7) toma a forma:

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z),$$

para todo $z \in \Omega$. Logo, a série das derivadas de ordem p converge em Ω para a derivada de mesma ordem da soma f . Provaremos que esta convergência é uniforme sobre o compacto K . De fato, para todo $z \in K$, obtem-se:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+s} f_k^{(p)}(z) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+s} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} d\zeta \right| = \\ &= \left| \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{k=n+1}^{n+s} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{p!}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\left| \sum_{k=n+1}^{n+s} f_k(\zeta) \right|}{|\zeta-z|^{p+1}} |d\zeta| \end{aligned} \quad (8)$$

Seja $z \in K$ e $\zeta \in \Gamma$, resulta que $|\zeta - z| \gg d > 0$. Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformemente convergente em Γ , para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+s} f_k(\zeta) \right| < \left(\frac{2\pi d^{p+1}}{p!c(\Gamma)} \right) \varepsilon \quad (9)$$

para todo $n > n_0(\varepsilon)$, $s \geq 1$, qualquer que seja $\zeta \in \Gamma$. Resulta de (8) e (9), que para cada $z \in K$.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+s} f_k^{(p)}(z) \right| < \varepsilon$$

para cada $\varepsilon > 0$, quando $n > n_0(\varepsilon)$, $s \geq 1$, provando ser uniforme a convergência sobre o compacto K .

Diz-se que uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é convergente em valor absoluto em Ω , quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ for aí convergente. O conjunto dos pontos do plano \mathbb{C} no qual uma série de funções é convergente, denomina-se o domínio de convergência da série. No parágrafo que segue, estudaremos um tipo particular, muito importante, de série de funções, denominado série de potências. Há, para estas séries um teorema, de Cauchy e Hadamard, que caracteriza o seu domínio de convergência.

§2. SÉRIES DE POTÊNCIAS

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a aplicação $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, sendo z_0 e a_n para cada $n \in \mathbb{N}$, números complexos fixos. A série de funções assim obtida é de

nominada série de potências. Escreve-se uma série de potências sob a forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Os números a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, são denominados os coeficientes da série e $a_n (z-z_0)^n$ o termo geral. É claro que uma tal série é convergente no ponto $z = z_0$.

Dada uma série de potências com coeficientes a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, consideremos a sucessão de números reais positivos

$$|a_0|, |a_1|, \sqrt{|a_2|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}, \dots \quad (10)$$

Caso esta sucessão não seja limitada superiormente, definiremos o seu limite superior como sendo $+\infty$. Tanto esta sucessão, como a sub-sucessão dela obtida suprimindo os dois primeiros termos, possuem o mesmo comportamento quando n tende para o infinito. Assim, consideremos a sucessão

$$\sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \dots, \sqrt[n]{|a_n|}, \dots \quad (11)$$

em lugar da (10). Desta forma, façamos

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

definindo-se $R = 0$ quando $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ e $R = \infty$ se este limite superior for zero. O número real R , obtido através dos coeficientes a_n da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, determina o domínio de convergência desta série, como demonstra o teorema a seguir.

TEOREMA 1. (Cauchy-Hadamard). Se $R \neq 0$ for finito, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (13)$$

é convergente em valor absoluto para todo z tal que $|z-z_0| < R$ e divergente para os z tais que $|z-z_0| > R$. Quando $R = +\infty$ a série converge em valor absoluto para todo z pertencente a \mathbb{C} . Se $R = 0$ só converge em z_0 .

Demonstração

De fato, suponhamos que seja finito o limite superior da sucessão (11). Tem-se

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (14)$$

Em (14), para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-z_0| < R$, obtem-se que o limite superior no primeiro membro é estritamente menor do que um. Logo, (Cap. 1, §3, prop. 10), a (14) implica ser $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ convergente para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-z_0| < R$. Analogamente, quando $|z-z_0| > R$, de 14, resulta, (Cap. 1, §3, prop. 10) que a série (13) é divergente.

No caso $R = \infty$, prova-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ é convergente em todo o plano complexo \mathbb{C} . Em z_0 é trivial que converge. Demonstraremos que converge em um qualquer $z_1 \neq z_0$. De fato, sendo $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z_1-z_0|}$ para todo $n > n_0$. Resulta, portanto, que $\sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} < \frac{1}{2}$ para todo $n > n_0$. Consequentemente,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z_1-z_0)^n|} < \frac{1}{2}$$

de onde conclui-se (Cap. 1, §3, prop. 10), que a série (13) con

verge em valor absoluto em z_1 , provando ser ela convergente em valor absoluto em \mathbb{C} .

Suponhamos $R=0$. Para $z = z_0$ a série converge, pois reduz-se ao coeficiente a_0 . Demonstramos que ela não converge em qualquer outro ponto $z_1 \neq z_0$. De fato, se ela fôsse convergente em z_1 , resultaria que a sucessão $\{a_n(z_1 - z_0)^n\}$ seria limitada, o mesmo acontecendo a sucessão $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, o que é absurdo, pois o limite superior desta sucessão é $+\infty$ por hipótese. Logo, a série não converge em z_1 . Isto completa a demonstração do teorema 1.

O teorema de Cauchy-Hadamard nos diz que se R fôr finito, o domínio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ é o disco aberto de raio R e centro em z_0 . Este disco denomina-se círculo de convergência da série, sendo R denominado o raio de convergência da série.

Observação 1. Situações há, em que a sucessão $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ é convergente. Nestes casos, o raio de convergência é dado por

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Se existe o limite da sucessão $\left\{ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right\}$, verifica-se que o raio de convergência da série é dado, também, por

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

Este resultado decorre do estudo da convergência de séries numé-

ricas de termos positivos. Isto resulta da igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

O comportamento da série (13) sobre a circunferência do círculo de convergência, escapa às informações dadas pelo teorema de Cauchy-Hadamard. Existem teoremas esclarecendo este fato em certas situações. Os exemplos que seguem servem para chamar a atenção do leitor para a questão.

1. Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$. A sucessão $\{\sqrt[n]{n}\}$ converge para um. Logo, $R=1$ e a série converge no círculo de raio um e centro na origem. Ela não converge sobre a circunferência deste círculo. De fato, se ela convergisse em valor absoluto em algum z tal que $|z|=1$, deveríamos ter $\lim_{n \rightarrow \infty} |nz^n| = 0$, o que não acontece.

2. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ possui $R=1$. Ela converge sobre todos os pontos da circunferência do círculo de convergência.

3. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge no círculo de raio um e centro na origem. Para $z=+1$ diverge e para $z=-1$ converge.

Aplicaremos ao estudo das séries de potências, os resultados obtidos no parágrafo 1 deste capítulo.

PROPOSIÇÃO 4. Seja R o raio de convergência de uma série de potências. Então, ela converge uniformemente em todo disco aberto de raio $r < R$, concêntrico ao círculo de convergência.

Demonstração

De fato, seja $z = z_0 + re^{i\theta}$, um número complexo no interior do círculo de convergência. Do teorema de Cauchy-Hadamard conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ é convergente. Para todo $|z - z_0| < r$, tem-se $|a_n(z - z_0)^n| < |a_n| r^n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$

Resulta da proposição 1 (Weierstrass) que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente em $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ para todo $r < R$.

Observemos que as aplicações de \mathbb{C} em \mathbb{C} definidas por $z \rightarrow a_n(z - z_0)^n$ são holomorfas em \mathbb{C} . Assim, uma série de potências é uma série de funções holomorfas em \mathbb{C} . Quando ela possui raio de convergência $R > 0$, ela convergindo uniformemente em todo disco fechado $V_r(z_0)$, $r < R$, conclui-se, proposição 3 parte a, que a sua soma f é uma função holomorfa no seu círculo de convergência. Pela parte b da mesma proposição 3, resulta que as derivadas de f no disco fechado $V_r(z_0)$, $r < R$ são obtidas derivando a série (13) termo à termo.

PROPOSIÇÃO 5. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ possui raio de convergência $R > 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ das derivadas, possui o mesmo raio R de convergência.

Demonstração

De fato, sabe-se que $\{n\sqrt{n}\}$ é uma sucessão convergente para 1. Representando por R' o raio de convergência da série derivada, obtém-se

$$R' = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n}|a_n|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{|a_n|}}$$

da qual obtem-se $R = R'$.

Deduz-se que se uma série de potências possui raio de convergência R , a série obtida derivando p vezes esta, também possui raio de convergência R .

Consideremos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

série de potências com raio de convergência R . Derivando esta série termo a termo p vezes, obtem-se:

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) a_n (z-z_0)^{n-p}.$$

Fazendo a mudança $n-p = m$ e posteriormente fazendo $m = n$, obtem-se

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\dots(n+p) a_{n+p} (z-z_0)^n. \quad (15)$$

Representando por $\binom{m}{n}$ os números binomiais definidos por

$$\binom{m}{p} = \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{p!},$$

sendo $n! = 1, 2, 3, \dots, n$, $0! = 1$, a (15) assume a forma seguinte:

$$f^{(p)}(z) = p! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} a_{n+p} (z-z_0)^n. \quad (16)$$

Calculando a (16) no ponto $z = z_0$, obtem-se

$$f^{(p)}(z_0) = p! a_p. \quad (17)$$

Seja γ a fronteira orientado do disco aberto $V_r(z_0)$, $0 < r < R$.

Seja a soma f desta série holomorfa no círculo de convergência

resulta, pela fórmula integral de Cauchy, que

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}} d\zeta \quad (18)$$

para todo z interior a $V_r(z_0)$. De (17), calculando $f^{(p)}(z_0)$ pela (18), resulta:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}, \quad (19)$$

que é a expressão dos coeficientes de uma série de potências.

Representemos por $M(r)$ o máximo de $|f(\zeta)|$ para $\zeta \in \gamma$. De (19) obtem-se

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} 2\pi r$$

ou

$$|a_n| < \frac{M(r)}{r^n}, \quad (20)$$

denominada desigualdade de Cauchy.

O resultado anteriormente obtido, afirma ser a soma de uma série de potências, uma função holomorfa no interior de seu círculo de convergência. A seguir, demonstraremos que se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ for holomorfa no domínio Ω , então, todo z_0 no interior de Ω é centro do círculo de convergência de uma série de potências, cuja soma é f . A representação de f através desta série de potências, denomina-se desenvolvimento de Taylor da função holomorfa f .

TEOREMA 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em Ω . Para todo z_0 pertencente a Ω , existe uma e somente uma série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

convergente em um disco aberto $V_r(z_0)$ contido em Ω , cuja soma é igual a f neste disco. Os coeficientes desta série são dados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Demonstração

Seja z_0 um ponto de Ω e $V_R(z_0)$ um disco aberto com centro z_0 , raio $R > 0$ contido em Ω . Tomemos $0 < r < R$ e seja γ a fronteira de $V_r(z_0)$. Supondo $\zeta \in \gamma$ e $|z-z_0| < r$, obtem-se

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{(\zeta-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{\zeta-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

Sendo $|z-z_0| < |\zeta-z_0|$, podemos escrever:

$$\frac{1}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \quad (21)$$

uniformemente convergente para todo $|z-z_0| < r$. Multiplicando ambos os membros de (21) por $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ e integrando termos à termo ao longo de γ , obtem-se:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

Da fórmula integral de Cauchy, conclui-se:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad (22)$$

para todo z no interior de γ , isto é, para os z tais que $|z-z_0| < r$. A representação (22) denomina-se a série de Taylor da função f .

Vejamos que em cada $z_0 \in \Omega$ o desenvolvimento de Taylor (22) é único. De fato, suponhamos que em $V_r(z_0)$ f fôsse representada, também, sob a forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad (23)$$

sendo b_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, números complexos fixos. Devemos provar que

$$b_0 = f(z_0) \text{ e } b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

A série (23) é uniformemente convergente no interior de $V_r(z_0)$, portanto derivável termo à termo. Tem-se $f(z_0) = b_0$ e a derivada n -ésima de f em z_0 é dada por $f^{(n)}(z_0) = n! b_n$ para $n = 1, 2, \dots$, provando a unicidade.

Observação 1. O teorema 2 põe em evidência, uma vez mais, a diferença existente entre a análise real e a complexa, como é elucidado pelo exemplo clássico a seguir. Sabe-se que a aplicação $f(x) = e^{-1/x^2}$ para x real não nulo e $f(0) = 0$, possui derivada de tôdas as ordens, em qualquer intervalo com centro na origem. Verifica-se, entretanto, que a série de Taylor de f no ponto $x_0 = 0$ não converge para esta função. No caso complexo, todavia, o teo-

rema 2 garante, que para $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ possuir uma representação em série de Taylor em $V_r(z_0) \subset \Omega$, é suficiente que f seja holomorfa em Ω .

Observação 2. Quando $z_0 = 0$, a representação de Taylor de f , é, habitualmente, denominada representação de Maclaurin de f . Pode-se demonstrar um resultado mais geral sobre unicidade de representação em séries de potências, como mostra a proposição que segue.

TEOREMA 3. Se as somas de duas séries de potências em $z-z_0$ coincidem em um conjunto E com ponto de acumulação z_0 , então as potências de $z-z_0$ com iguais expoentes possuem coeficientes idênticos.

Demonstração

De fato, consideremos as séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, sendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

para todo z pertencente a E .

Seja $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de pontos de E convergindo para z_0 com $z_k \neq z_0$ para todo k . Sendo a soma de uma série de potências uma função contínua no círculo de convergência, resulta que

$$a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_k - z_0)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z_k - z_0)^n = b_0 .$$

Portanto $a_0 = b_0$. Suponhamos $a_1 = b_1, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}$ e vamos de

monstrar que $a_n = b_n$. Pela hipótese da igualdade até $n-1$, resulta que

$$\sum_{j=n}^{\infty} a_j (z_k - z_0)^j = \sum_{j=n}^{\infty} b_j (z_k - z_0)^j .$$

Sendo $z_k - z_0 \neq 0$ por hipótese, após dividirmos ambos os membros da última igualdade por $(z_k - z_0)^n$, tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$, resulta $a_n = b_n$, o que prova a proposição.

Observação 3. O teorema 3 é conhecido sob a denominação de teorema de identidade para séries de potências. Note que êle nos diz que duas séries de potências coincidem no círculo comum de convergência, desde que coincidam, apenas, em um conjunto infinito E , possuindo um ponto de acumulação z_0 .

TEOREMA 4. Consideremos duas funções f e g holomorfas em um domínio Ω . Seja $E \subset \Omega$ um conjunto infinito com um ponto de acumulação $z_0 \in \Omega$. Se $f(z) = g(z)$ para todo $z \in E$, então $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Demonstração

Sendo f e g contínuas em Ω , conclui-se que $f(z_0) = g(z_0)$. Vamos demonstrar que $f(\zeta) = g(\zeta)$ em qualquer outro ponto $\zeta \in \Omega$. De fato, consideremos uma poligonal Γ contida em Ω , possuindo extremos z_0, ζ . Seja $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, $z(a) = z_0$, $z(b) = \zeta$, uma representação paramétrica de Γ . Suponha que $d > 0$ seja a distância de Γ a $\partial\Omega$. Pela continuidade uniforme de $z = z(t)$ em $a \leq t \leq b$, existe uma decomposição $D(t_0, t_1, \dots, t_n)$ de $a \leq t \leq b$, tal que $|z_i - z_{i-1}| < d$; $i = 1, 2, \dots, n$ sendo $z_1 = z(t_1)$, $z(t_0) = z(a) = z_0$,

$z(t_n) = z(b) = \zeta$. Pelo teorema 2, f e g são unívocamente representadas em série de potências no círculo $V_d(z_0) \subset \Omega$. Por hipótese a soma destas séries, f e g respectivamente, são iguais sobre o conjunto infinito $E \subset \Omega$ com ponto de acumulação z_0 . Portanto, pelo teorema 3 resulta que as séries possuem coeficientes iguais, logo coincidem em $V_d(z_0)$. Resulta que $f(z) = g(z)$ em $V_d(z_0)$. Sendo $z_1 \in V_d(z_0)$, z_1 será ponto de acumulação de um conjunto infinito de pontos aonde f e g são iguais. Repetindo o argumento anterior, conclui-se que $f(z) = g(z)$ em $V_d(z_1)$. Assim sucessivamente, concluiríamos que $f(\zeta) = g(\zeta)$, provando ser f e g iguais em Ω .

Observação 4. O teorema 4 é usualmente conhecido, sob a denominação de teorema de identidade para funções holomorfas. O método usado para demonstrá-lo é o mesmo adotado na demonstração do princípio do máximo (cfr. Cap. 4, teorema 7). Decorre do teorema 4, que se f e g fôrem iguais em um disco aberto com centro $z_0 \in \Omega$, ou sobre um arco de Jordan contido em Ω com extremo em z_0 , então f e g serão iguais em Ω . Desta forma, se uma função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, holomorfa num domínio Ω , fôr constante em um conjunto infinito $E \subset \Omega$, possuindo $z_0 \in \Omega$ para ponto de acumulação, então f será constante em Ω . Se f é holomorfa em Ω , $z_0 \in \Omega$, e f é nula em z_0 com tôdas as suas derivadas, então f é a função nula em Ω . Pelo teorema 2 existe $V_r(z_0) \subset \Omega$ tal que para todo $z \in V_r(z_0)$ tem-se:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z-z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n + \dots$$

Por hipótese, $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n)}(z_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $f(z) = 0$ em $V_r(z_0)$. Resulta, como consequência do teorema 4, que f é igual a função nula em Ω .

A título de aplicação do teorema 2, estabeleceremos as representações em série de Taylor, para as funções exponencial e logarítmica.

1. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Foi demonstrado que $f(z) = e^z$ é uma função holomorfa em \mathbb{C} . Calcularemos a sua série de Taylor para $z_0 = 0$.

Tem-se $f'(z) = e^z$, $f''(z) = e^z, \dots, f^{(n)}(z) = e^z$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Resulta que $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$ para todo n . Portanto, pelo teorema 2, podemos escrever

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

válido para todo $z \in \mathbb{C}$, porque a série possui raio de convergência $R = +\infty$.

2. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Tomemos para domínio Ω o plano complexo \mathbb{C} , excluindo a semireta $\{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq -1\}$. Consideremos em Ω a função $f(z) = \log(1+z)$. Tem-se f holomorfa em Ω , sendo a derivada n -ésima dada por

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n (n-1)! (1+z)^{-n}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Conclui-se, daí, que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) =$

$= (-1)^{n-1}(n-1)$. Logo no círculo $V_1(0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ obtem-se, pelo teorema 2,

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Esta série denomina-se série logarítmica.

As operações de adição de séries de potências e multiplicação de uma série por um número complexo, são definidas de maneira análoga a que foi feita no caso de séries numéricas. (Cap. 1, §3). A multiplicação entre séries de potências define-se como a convolução ou multiplicação segundo Cauchy da sucessão dos seus coeficientes. (Cap. 1, §3). Dadas duas séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ convergentes em $V_R(z_0)$, $R > 0$, denomina-se convolução ou produto de Cauchy de ambas, a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, na qual

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

Exercícios

1. Demonstre que se $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ for limitada, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é convergente em todo disco aberto $V_\rho(0)$, sendo $0 < \rho < |z_0|$.

2. Demonstre que quando $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente para λ , o raio R de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ é igual a $\frac{1}{\lambda}$.

3. Para $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = \alpha.$$

Usando o exercício 2, prove que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

possui $V_1(0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ para círculo de convergência.

4. Considerando o ramo principal de $f(z) = (1+z)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, demonstre, como aplicação do teorema 2 e do exercício 3, que

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad \text{para } |z| < 1.$$

5. Calcule o círculo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$, $0 < s \leq 1$. Ela converge em $z=1$?

6. Usando a representação em série de e^z , $z \in \mathbb{C}$, demonstre que

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

para todo $y \in \mathbb{R}$.

7. Verifique os seguintes desenvolvimentos em série:

$$a) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

$$b) \operatorname{sen} z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

8. Represente em série de potências a função:

$$\operatorname{tg}^{-1} z = \frac{1}{2i} \left[\log(1+iz) - \log(1-iz) \right]$$

Demonstre que converge em $V_1(0)$.

9. Demonstre o teorema de Liouville (Cap. 4, §4, teorema 5) como consequência da desigualdade de Cauchy (20).

10. Demonstre que no interior do círculo de convergência de uma série de potências, ela converge em valor absoluto.

11. Represente em séries de potências em $V_\rho(0)$ as seguintes funções:

$$a) e^z \log(1+z) \quad ; \quad b) \frac{\operatorname{sen} z}{1-z} ,$$

$$c) \frac{\cos z}{(1+z)^2} \quad ; \quad d) \operatorname{sen} z \cos z$$

$$e) \operatorname{arc} \operatorname{sen} z \quad ; \quad f) \int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta ;$$

$$g) \int_0^z \frac{\operatorname{sen} \zeta}{\zeta} d\zeta .$$

12. Seja $R > 0$ constante. Considere a aplicação $f(z) = \frac{R}{R-z}$ para $|z| < R$. Calcule $f^{(n)}(0)$ a partir da série de potências de f .

13. Calcule o raio de convergência das séries:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n , \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$$

14. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e limitada em \mathbb{C} . Se existem constantes $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$, tais que

$$|f(z)| \leq C|z|^m \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} ,$$

então f será um polinômio de grau $n \leq m$. (Use a representação em série de potências de f e a desigualdade de Cauchy (20).

CAPÍTULO 6

REPRESENTAÇÃO DE LAURENT. PONTOS SINGULARES DAS FUNÇÕES HÓLOMORFAS. RESÍDUOS.

§1. REPRESENTAÇÃO DE LAURENT

Dos resultados obtidos no capítulo 5, deduz-se que as séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, são o instrumento apropriado para o estudo das funções holomorfas em domínios Ω simplesmente conexos ou, de modo mais específico, em discos abertos. Realmente, seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Demonstrou-se no capítulo 5, a existência de um disco aberto de raio máximo $r > 0$, $V_r(z_0) \subset \Omega$, no qual a f é representada, univocamente, por uma série de potências com círculo de convergência igual a $V_r(z_0)$. Foi demonstrada, também, a recíproca. Dêste modo, toda série de potências convergente, possui para soma uma função holomorfa em seu círculo de convergência. Todavia, se f for holomorfa em Ω exceto em um ponto z_0 , o argumento anterior não mais será válido. Estudaremos, neste parágrafo, outro tipo de representação para funções no caso em que Ω não é simplesmente conexo, como o caso simples de f holomorfa em Ω , exceto em um ponto interior z_0 .

Seja, portanto, z_0 fixo em \mathbb{C} e consideremos a série de funções

$$\frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \dots, \quad (1)$$

sendo $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ constantes complexas. Tomemos a transformação homográfica $w = \frac{1}{z-z_0}$, interpretando, como tivemos oportunidade de fazer, z no plano dos z e w no plano dos w . Desta forma, no plano dos w , tem-se a série de potências

$$b_1 w + b_2 w^2 + \dots + b_n w^n + \dots, \quad (2)$$

obtida da (1). Suponhamos que o raio de convergência de (2) seja $R > 0$. Resulta que ela converge no disco aberto $V_R(0) = \{w \in \mathbb{C}; |w| < R\}$, sendo sua soma φ uma função af holomorfa. Retornando a série (1), deduz-se que ela converge no domínio

$$\Omega_{r_1} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z-z_0| > \frac{1}{R} = r_1 \right\},$$

sendo a sua soma φ uma função holomorfa neste domínio. Observe que Ω_{r_1} é o complemento do disco fechado $\{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| \leq r_1\}$. A soma da série (1) será, portanto, a função holomorfa f em Ω_{r_1} definida por

$$f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right).$$

Assim, para todo $z \in \Omega_{r_1}$, tem-se

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \dots$$

É importante lembrar que a série (1) converge uniformemente em Ω_{r_1} .

Consideremos uma série de potências

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad (3)$$

com raio de convergência $r_2 > r_1$. A soma g de (3) é holomorfa em

seu círculo de convergência, isto é, em $V_{r_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r_2\}$. Observe, também, que a série (3) converge uniformemente em $V_{r_2}(z_0)$. Conclui-se que na interseção $\Omega_{r_1} \cap V_{r_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - z_0| < r_2\}$, as séries (1) e (2) convergem uniformemente, sendo a soma de cada série uma função holomorfa neste domínio de convergência. Ao conjunto de pontos $\Omega_{r_1} \cap V_{r_2}(z_0)$ denomina-se coroa circular. As circunferências γ_1, γ_2 , com centro z_0 e raios r_1, r_2 , denominam-se circunferências da coroa circular. Portanto, na coroa circular considerada, a função ψ definida por

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (4)$$

é holomorfa.

A expressão (4) denomina-se representação de Laurent da função ψ na coroa circular $\{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.

Fazendo $b_n = a_{-n}$, é usual escrever a representação de Laurent sob a seguinte forma:

$$\psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n. \quad (5)$$

Por abuso de linguagem, a representação de Laurent é também denominada série de Laurent.

O ponto importante desta ordem de idéias é o argumento recíproco do que acabamos de completar. Suponhamos que se tenha uma função f holomorfa numa coroa circular. Decorre desta hipótese, que f admite uma única representação de Laurent, uniformemente convergente para f nesta coroa? A resposta é dada pelo teorema

l a seguir. Antes, porém, observemos que uma representação de Laurent diz-se uniformemente convergente numa coroa circular, quando aí forem uniformemente convergentes as séries (1) e (2). Quando a série (2) fôr convergente em todo o plano \mathbb{C} exceto em z_0 , segue-se que a representação (4) é uniformemente convergente no domínio $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < r_2\}$, que é o disco aberto $V_{r_2}(z_0)$, $r_2 > 0$, excluindo o centro z_0 . Ainda neste caso, se a série (3) fôr também convergente em todo o plano complexo \mathbb{C} , conclui-se que a representação (4) é válida em \mathbb{C} , excluindo o ponto z_0 . Observe que em qualquer dos casos, obtém-se, sempre, um domínio não simplesmente conexo.

TEOREMA 1 (Laurent) Seja f holomorfa na coroa circular $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Então f admite uma única representação de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

uniformemente convergente em Ω . Os coeficientes a_n são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

sendo Γ um caminho fechado contido em Ω e contendo z_0 em seu interior.

Demonstração

Consideremos dois discos abertos $V_{R_1}(z_0)$, $V_{R_2}(z_0)$, tais que $r_1 < R_1 < R_2 < r_2$, sendo γ_1, γ_2 suas fronteiras orientadas

respectivamente. Desta forma, γ_1, γ_2 são as circunferências de uma coroa circular, cujo fêcho está contido na coroa circular Ω . Suponhamos γ_1, γ_2 com orientações iguais. Representemos por γ o segmento de reta com extremos em γ_1, γ_2 , tendo para suporte uma reta por z_0 . Obtem-se, deste modo, um caminho Γ_1 contido na coroa circular Ω , definido por

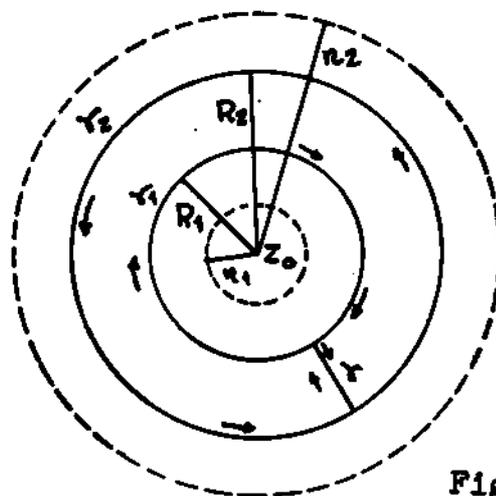


Fig. 9

sendo f holomorfa em Ω , para todo z no interior de Γ_1 obtem-se pela fórmula integral de Cauchy:

$$\Gamma_1 = (-\gamma_1) \cup (+\gamma_2) \cup (-\gamma) \cup (+\gamma)$$

sendo f holomorfa em Ω , para todo z no interior de Γ_1 obtem-se pela fórmula integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

ou

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (6)$$

Representaremos em série cada uma das integrais em (6).

Primeira Integral - Sendo $\zeta \in \gamma_2$ e z no interior de Γ_1 , conclui-se que $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$. Portanto,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$\frac{1}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n, \quad (7)$$

uniformemente convergente para todo $\zeta \in \gamma_2$ e z no interior de Γ_1 . Multiplicando ambos os membros de (7) por $f(\zeta)/2\pi i$ e integrando termo à termo ao longo de γ_2 , obtém-se:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (8)$$

sendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

Observação 1. Na integral dando os coeficientes a_n , podemos substituir a circunferência γ_2 por qualquer caminho fechado Γ contendo z_0 em seu interior e contido na coroa circular $\{z \in \mathbb{C}; R_1 < |z-z_0| < R_2\}$. Esta afirmativa é uma consequência do teorema integral de Cauchy.

Segunda Integral - Sendo $\zeta \in \gamma_1$ na segunda integral, resulta que $|\zeta-z_0| < |z-z_0|$.

Obtem-se

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-\zeta} = -\frac{1}{(z-z_0) - (\zeta-z_0)} = -\frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$$

Dai resulta

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0} \right)^n,$$

sendo esta série uniformemente convergente para $\zeta \in \gamma_1$ e z no interior de Γ_1 , porque $|\zeta - z_0| = R_1$ e $|z - z_0| > R_2$. Como no caso da primeira integral, obtem-se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta$$

ou

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} (z - z_0)^{-n} \quad (9)$$

Fazendo

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}},$$

obtem-se a (9) sob a forma seguinte:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}. \quad (10)$$

Substituindo (8) e (10) em (6), resulta

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad (11)$$

que é a representação de Laurent para f no interior da coroa circular Ω .

Observação 2. Na integral dando os a_{-n} , a circunferência γ_1 pode ser substituída por um caminho fechado Γ contendo z_0 em seu interior e contido na coroa circular $\{z \in \mathbb{C}; R_1 < |z - z_0| < R_2\}$.

Para demonstrar a unicidade da representação de Laurent, suponhamos que na coroa Ω , a função holomorfa f admitisse duas representações

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{e} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n .$$

No interior de Ω estas séries convergem uniformemente, logo podem ser integradas termo à termo. Seja γ uma circunferência com centro em z_0 contida em Ω . Sabemos que para $n \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = -1 \\ 0 & \text{se } n \neq -1 \end{cases} \quad (12)$$

Para todo z no interior de Ω tem-se

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n \quad (13)$$

Multiplicando ambos os membros de (13) por $(z-z_0)^{-k-1}$ para $k \in \mathbb{Z}$, integrando termo à termo ao longo de γ as séries obtidas, levando em conta igualdade (12), obtém-se

$$2\pi i a_k = 2\pi i b_k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z} .$$

Dai resulta a unicidade da representação de Laurent, completando a demonstração do teorema.

Exemplo 1. A função $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ é holomorfa na coroa circular $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$ com centro na origem. Segue-se, facilmente, que

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Para $|z| < 2$, obtém-se

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Sendo $|z| > 1$ resulta

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n}$$

Consequentemente, obtém-se a representação de Laurent

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

uniformemente convergente na coroa $\{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\}$.

Exemplo 2. Consideremos a função $f(z) = e^{1/z}$ holomorfa no domínio $\mathbb{C} - \{0\}$. A representação de Laurent de f será

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > 0$.

Exemplo 3. Consideremos a função $f(z) = \frac{e^{z-1}}{(z-1)^3}$ holomorfa no domínio $\mathbb{C} - \{1\}$. A representação de Laurent de f neste domínio será:

$$\frac{e^{z-1}}{(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{2(z-1)^2} + \frac{1}{3!} + \frac{z-1}{4!} + \frac{(z-1)^2}{5!} + \dots$$

§2. SINGULARIDADES ISOLADAS DAS FUNÇÕES HOLOMORFAS

1. Zeros - Antes de iniciarmos o estudo sôbre as singularidades, faremos algumas considerações sôbre os pontos que anulam uma função. Consideremos uma aplicação $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no domínio Ω . Diz-se que $z_0 \in \Omega$ é um zero de f , quando $f(z_0) = 0$. Pelo teorema de identidade para funções holomorfas (cfr. cap. 5, §2, obs. 4), deduz-se que se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ fôr diferente da função nula, a coleção de seus zeros não possui ponto limite em Ω . Dêste modo, sôbre todo compacto $K \subset \Omega$, a função não nula não possui uma infinidade de zeros.

Consideremos f diferente da função nula e seja $z_0 \in \Omega$ um zero de f . Sendo f holomorfa em Ω , existe um disco aberto de raio máximo $V_R(z_0) \subset \Omega$, tal que

$$f(z) = \frac{f'(z_0)}{1!} (z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z-z_0)^2 + \dots \quad (13)$$

para todo $z \in V_R(z_0)$, pois $f(z_0) = 0$. Sendo f diferente da função nula em Ω , deduz-se de (13) que pelo menos umas das derivadas $f^{(n)}$ da função f , não se anula em z_0 . Seja, então, k o primeiro número natural tal que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Resulta que a (13) toma a forma seguinte:

$$f(z) = (z-z_0)^k \left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} (z-z_0) + \dots \right] \quad (14)$$

O número natural k denomina-se a ordem ou a multiplicidade do zero z_0 . Quando $k=1$ diz-se que z_0 é um zero simples. Quando $k>1$ diz-se que z_0 é um zero múltiplo. Dêste modo, conclui-se de (14),

que f possui em $z_0 \in \Omega$ um zero de ordem k , se e somente se

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \dots, \quad f^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Quando $K \subset \Omega$ fôr um compacto, êle possui apenas um número finito de zeros de f , como observamos. Todavia, ao contarmos êstes zeros pertencentes a K , cada um será repetido um número de vezes igual a sua multiplicidade.

PROPOSIÇÃO 1. Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, holomorfa no domínio Ω e $z_0 \in \Omega$ um zero de f . Uma condição necessária e suficiente para que z_0 seja de ordem k , é que a função $g: \Omega - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}, \quad (15)$$

seja holomorfa em algum disco aberto $V_R(z_0)$, $R > 0$, sendo

$$g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0. \quad (16)$$

Demonstração

De fato, seja $z_0 \in \Omega$ um zero de ordem k de f . Da representação de f dada por (14), definamos

$$g(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} (z-z_0) + \dots$$

para $z \in V_R(z_0)$. Tem-se g é analítica em $V_R(z_0)$ sendo $g(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$.

Reciprocamente, suponhamos válidas (15) e (16). Do fato de g ser holomorfa em $V_R(z_0)$ resulta que

$$g(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \quad (17)$$

para todo $z \in V_{\mathbb{R}}(z_0)$, sendo $g(z_0) = a_0 \neq 0$ por hipótese. Substituindo $g(z)$ dada por (17) em (15), obtém-se:

$$f(z) = a_0(z-z_0)^k + a_1(z-z_0)^{k+1} + \dots,$$

provando ser z_0 um zero de ordem k de f .

Exemplo. Calcule a ordem do zero $z_0 = 0$ da função

$$f(z) = 6 \operatorname{sen} z^3 + 2z^3(z^6 - 3)$$

Sabe-se que

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Resulta, daí, que

$$\operatorname{sen} z^3 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{6n+3}}{(2n+1)!}$$

e portanto

$$6 \operatorname{sen} z^3 + 2z^3(z^6 - 3) = \frac{6}{5!} z^{15} - \frac{6}{7!} z^{21} + \dots$$

isto é,

$$6 \operatorname{sen} z^3 + 2z^3(z^6 - 3) = z^{15} g(z),$$

que é a relação (15) da proposição 1. Logo $z_0 = 0$ possui multiplicidade $k = 15$.

Observação 1. Diz-se que $z_0 \in \Omega$ é um ponto de f , não constante em Ω , quando z_0 for um zero da função $f-a$. As considerações feitas para os zeros de f são válidas para os seus pontos.

2. Singularidades Removíveis. Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ diz-se um ponto singular isolado de uma função complexa f , quando existe um disco aberto $V_R(z_0)$, $R > 0$, tal que f seja holomorfa em $V_R(z_0) - \{z_0\}$. Estamos, portanto, no caso em que f é holomorfa no domínio $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < R\}$ não simplesmente conexo. Resulta do §1, que a representação de Laurent convergente nesta coroa com centro em z_0 , é o instrumento apropriado para o estudo do comportamento de uma função em um ponto singular isolado. Portanto, consideremos

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

uniformemente convergente na coroa $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < R\}$. Os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, sendo γ a circunferência $|z - z_0| = r$, com $0 < r < R$.

DEFINIÇÃO 1. Uma singularidade isolada diz-se removível, quando f for limitada em $V_R(z_0) - \{z_0\}$.

PROPOSIÇÃO 2. Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ a família de coeficientes da representação de Laurent de f , uniformemente convergente em $V_R(z_0) - \{z_0\}$. Uma condição necessária e suficiente para que z_0 seja uma singularidade isolada removível de f , é que $a_n = 0$ para $n = -1, -2, -3, \dots$

Demonstração

Suponhamos que a representação de Laurent da f seja uniformemente convergente em $V_R(z_0) - \{z_0\}$. Se $a_n = 0$ para $n = -1, -2, -3, \dots$, resta a parte

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

uniformemente convergente em $V_R(z_0)$, cuja soma é $f(z)$ para todo z . Resulta ser f limitada em $V_R(z_0)$, provando que z_0 é uma singularidade removível.

Reciprocamente, admitamos que $|f(z)| < M$ para todo $z \in V_R(z_0) - \{z_0\}$. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta - z_0|^{n+1}}$$

onde γ é a circunferência $|z - z_0| = r$, $0 < r < R$. Sendo $\zeta \in \gamma$, e $|f(\zeta)| < M$, para todo $\zeta \in \gamma$, obtem-se:

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}.$$

Quando n for negativo, $|a_n| \rightarrow 0$ se $r \rightarrow 0$. Portanto, $a_n = 0$ para $n = -1, -2, \dots$, provando a proposição.

COROLÁRIO 1. Um ponto z_0 é uma singularidade removível se e somente se existe, sendo finito, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Demonstração

Se o limite existe, sendo finito, resulta que f é limitada em $V_R(z_0)$. Suponhamos z_0 uma singularidade removível. Pela pro

posição 2, a representação de Laurent reduz-se a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

uniformemente convergente em $V_R(z_0)$.

Portanto, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$ é finito.

O Corolário 1 justifica a definição de ponto singular removível. De fato, como existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$, obtem-se

$g: V_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \neq z_0 \\ a_0 & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

holomorfa em $V_R(z_0)$, cuja restrição a $V_R(z_0) - \{z_0\}$ é a função f . Diz-se, por esta razão, que g é uma extensão holomorfa de f ao domínio $V_R(z_0)$.

3. Polos. Resta analisar o caso em que z_0 é um ponto singular isolado, sendo f não limitada em $V_R(z_0) - \{z_0\}$. Há dois casos a saber: um quando f diverge para ∞ no ponto z_0 e outro quando f é indeterminada em z_0 . Estudaremos nesta seção as singularidades do primeiro tipo.

DEFINIÇÃO 2. Um ponto singular isolado z_0 de uma função holomorfa f , denomina-se um polo, se $f(z) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow z_0$.

Exemplo. A função $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, possui z_0 como singularidade isolada, pois ela é holomorfa no domínio $\mathbb{C} - \{z_0\}$. Como $\frac{1}{(z-z_0)^k} \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow z_0$, conclui-se que z_0 é um polo.

PROPOSIÇÃO 3. Um ponto z_0 é um polo de f , se e somente se z_0 for um zero da extensão holomorfa de $\frac{1}{f}$ a um disco aberto $V_R(z_0)$.

Demonstração

De fato, se z_0 for um polo de f existe um disco aberto $V_R(z_0)$, tal que $|f(z)| > 1$ para todo $z \in V_R(z_0) - \{z_0\}$. Observe que em z_0 a f não é definida. A aplicação $g: V_R(z_0) - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ é holomorfa neste domínio, logo, z_0 é uma singularidade isolada de g . Sendo $|g(z)| < 1$ em $V_R(z_0) - \{z_0\}$, conclui-se que z_0 é uma singularidade removível de g . Pelo corolário 1 da proposição 2, podemos estender g ao domínio $V_R(z_0)$, através da seguinte definição:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{se } z \in V_R(z_0) - \{z_0\} \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

A função g é uma extensão holomorfa de $\frac{1}{f}$ ao domínio $V_R(z_0) - \{z_0\}$, e tem-se $g(z_0) = 0$.

Reciprocamente, seja $g: V_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, diferente da função nula e possuindo um zero em z_0 . Sendo g diferente da função nula, resulta que z_0 não é ponto de acumulação de zeros de g em $V_R(z_0)$. Portanto, existe um número $\delta > 0$ tal que em $V_\delta(z_0)$ não existem zeros de g distintos de z_0 . Consideremos a função holomorfa $f: V_\delta(z_0) - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{1}{g(z)}$. Como $f(z) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow z_0$, conclui-se que z_0 é um polo de f .

Da relação existente entre polos e zeros de uma função holo-

morfa, conclui-se que se f fôr diferente da função nula, os seus polos não possuem ponto de acumulação pertencente ao domínio de definição da f . Decorrente também da proposição 3, define-se o conceito de ordem de um polo. Diz-se que um polo z_0 de uma função holomorfa é de ordem $k \in \mathbb{N}$, se z_0 fôr um zero de ordem k da extensão holomorfa de $\frac{1}{f}$. Quando $k = 1$, diz-se que z_0 é um polo simples de f .

PROPOSIÇÃO 4. Uma condição necessária e suficiente para que z_0 seja um polo de ordem k de uma função holomorfa f , é que a representação de Laurent uniformemente convergente em $V_R(z_0) - \{z_0\}$, se reduza a

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

com $a_{-k} \neq 0$.

Demonstração

De fato, seja z_0 um polo de ordem k de f . Pela proposição 3, z_0 é um zero da extensão holomorfa de $\frac{1}{f}$, que continuaremos a representar por $\frac{1}{f}$. Logo, pela proposição 1 sôbre zeros, resulta que

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^k g(z),$$

sendo g holomorfa em $V_r(z_0)$, $r > 0$, com $g(z_0) \neq 0$. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, $b_0 \neq 0$, a representação de g em $V_r(z_0)$.

Tem-se

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \frac{1}{b_0 + b_1(z-z_0) + \dots} \quad (14)$$

Como $b_0 \neq 0$, pode-se determinar o inverso desta série, encontrando-se a série

$$\beta_0 + \beta_1(z-z_0) + \beta_2(z-z_0)^2 + \dots \quad (15)$$

sendo $\beta_0 = \frac{1}{b_0} \neq 0$. Resulta de (14) e (15)

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

sendo $a_{-k} = \beta_0 \neq 0$, $a_{-k+1} = b_1, \dots$, $a_0 = b_k$, $a_1 = b_{k+1}, \dots$. A convergência sendo uniforme em $V_R(z_0) - \{z_0\}$.

Reciprocamente, suponhamos que

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (16)$$

com $a_{-k} \neq 0$, uniformemente convergente em $V_R(z_0) - \{z_0\}$. Obtem-se de (16)

$$f(z) = (z-z_0)^k \left[a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \dots \right] \quad (17)$$

sendo $a_{-k} \neq 0$. Resulta que a série entre colchetes possui inversa uniformemente convergente em um disco aberto $V(z_0)$, a qual representaremos por $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, com $b_0 = \frac{1}{a_{-k}} \neq 0$. Portanto, de (17) resulta

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^k g(z)$$

sendo $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, holomorfa em um disco aberto $V(z_0)$, sendo $g(z_0) = b_0 \neq 0$. Logo z_0 é um zero de ordem k de $\frac{1}{f}$, portanto, um polo de ordem k da função f .

4. Pontos Singulares Essenciais. Resta-nos examinar o caso, em que f é não limitada em z_0 , porém indeterminada neste ponto, isto é, não possui limite finito nem diverge para ∞ .

Exemplo: Seja $f: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = e^{1/z}$$

Esta função é holomorfa em seu domínio de definição. Vejamos o comportamento em $z_0 = 0$. Suponhamos que $z \rightarrow 0$ segundo as semi-retas $\text{Im}z = 0$. Tem-se

$$e^{1/x} \rightarrow \infty \text{ se } x > 0$$

sendo

$$e^{1/x} \rightarrow 0 \text{ se } x < 0,$$

levando-nos a concluir que $f(z) = e^{1/z}$ é indeterminada na origem.

DEFINIÇÃO 3. Seja z_0 um ponto singular isolado de uma função holomorfa f . Diz-se que z_0 é um ponto singular essencial se f for indeterminada em z_0 , isto é, f não possui limite em z_0 nem diverge para ∞ neste ponto.

A função $f(z) = e^{1/z}$, anteriormente considerada, possui uma singularidade essencial em $z_0 = 0$.

PROPOSIÇÃO 5. Uma condição necessária e suficiente para que uma função holomorfa f possua uma singularidade essencial em z_0 , é que o desenvolvimento de Laurent de f , uniformemente convergente em $V_R(z_0) - \{z_0\}$, possua uma infinidade de coeficientes a_k , $k = -1, -2, \dots$, diferentes de zero.

Demonstração

Demonstrámos que z_0 é uma singularidade removível se e somente se $a_k = 0$ para $k = -1, -2, \dots$. No caso em que f é não limitada em z_0 , demonstramos que z_0 é um polo se e somente se $a_k \neq 0$ somente para um número finito de valores negativos de k . Resta, finalmente, o caso em que há uma infinidade de $a_k \neq 0$ para $k = -1, -2, \dots$, como uma condição necessária e suficiente para que z_0 seja uma singularidade essencial.

Resulta que se z_0 for uma singularidade essencial de uma função holomorfa f , tem-se

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

uniformemente em $V_R(z_0) - \{z_0\}$. O primeiro somatório denomina-se parte singular de f em z_0 e o segundo parte regular de f em z_0 . Quando z_0 é um polo, a proposição 4 nos diz que a parte singular de f em z_0 é um polinômio em $w = \frac{1}{z-z_0}$.

Exemplo. A função $f(z) = e^{1/z}$ possui em $V_R(0) - \{0\}$ a representação de Laurent

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

A parte regular é a constante 1 e a singular é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$.

PROPOSIÇÃO 6. (Casorati-Weierstrass). Seja z_0 um ponto singular essencial de uma função holomorfa f . Então, dado um qualquer número complexo L existe uma sucessão $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo a seguinte condição:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = L .$$

Demonstração

Sendo f não limitada em todo disco aberto $V(z_0)$, segue-se que existe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z_n \rightarrow z_0$ e $f(z_n) \rightarrow \infty$.

Seja, portanto, z_0 um ponto singular essencial de f e L um número complexo dado. Admitamos falsa a proposição. Resulta que existe uma vizinhança $V_R(z_0)$ e uma constante $M > 0$ satisfazendo a condição:

$$|f(z) - L| > M \quad \text{para todo } z \in V_R(z_0) - \{z_0\} .$$

Desta forma, a aplicação $g: V_R(z_0) - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - L}$$

é holomorfa neste domínio. Sendo

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - L|} < M$$

para todo $z \in V_R(z_0) - \{z_0\}$, resulta que z_0 é uma singularidade removível de g , logo, existe o limite de g no ponto z_0 (cfr. corolário 1, proposição 2). A extensão holomorfa h de g ao domínio $V_R(z_0)$ é definida em z_0 por

$$h(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - L}$$

Entretanto, sendo f não limitada em todo disco aberto $V(z_0)$, conclui-se que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - L} = 0 ,$$

resultando que h possui um zero em z_0 . Por conseguinte, z_0 é um polo de $\frac{1}{h} = f - L$ (cfr. proposição 3), logo um polo de f , o que é uma contradição, porque z_0 é um ponto singular essencial. Isto prova a proposição.

Exemplo. Consideremos a função

$$f(z) = e^{1/z},$$

possuindo uma singularidade essencial em $z_0 = 0$. Se $z_n = \frac{1}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$, segue-se que $e^n \rightarrow \infty$ se $n \rightarrow \infty$. Se $L = 0$, a sucessão $z_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ é tal que $e^{1/z_n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Consideremos um número complexo não nulo L . Resolvendo a equação

$$e^{1/z} = L,$$

constroem-se uma sucessão (z_n) sendo $z_n = \frac{1}{\log L + 2n\pi i}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $e^{1/z_n} \rightarrow L$.

5. Comportamento no Infinito. Entenda-se por comportamento de u a função f no infinito, o seu comportamento no domínio não limitado $\{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$ $R > 0$, isto é, o comportamento de f no exterior de qualquer disco aberto de raio $R > 0$. Diz-se, também, o comportamento de f quando $|z|$ é suficientemente grande. Abreviadamente, diz-se o estudo do comportamento de f no ∞ . Seja f uma função holomorfa no domínio não limitado $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$, $R > 0$. A aplicação $w = \frac{1}{z}$, para $z \in \Omega$, transforma Ω no domínio $V_{1/R}(0) - \{0\} = \{w \in \mathbb{C}; |w| < \frac{1}{R}\}$. Consideremos a aplicação g definida neste último domínio por $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. Sendo f holomorfa em Ω resulta que g é holomorfa em $V_{1/R}(0) - \{0\}$, que é uma coroa

circular. O estudo de funções holomorfas em coroas foi feito anteriormente. Desta forma, define-se o comportamento de f no infinito, pelo comportamento de g no ponto zero.

DEFINIÇÃO 4. Diz-se que o infinito é singularidade removível, polo de ordem k ou singularidade essencial de f , se o número complexo zero fôr respectivamente, singularidade removível, polo de ordem k ou singularidade essencial da função g .

Para determinar o comportamento de g em $z_0 = 0$, é suficiente analisar a sua representação de Laurent, ou melhor, examinar a sua parte singular desta representação. Seja, portanto,

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n w^n \quad (18)$$

a representação de Laurent de g uniformemente convergente em $\{w \in \mathbb{C}; 0 < |w| < \frac{1}{R}\}$. Deduz-se daí, a seguinte representação para f em $\{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad (19)$$

sendo $a_{-n} = b_n$ e $w = \frac{1}{z}$. Desta forma, a parte não singular em (18) irá determinar a natureza da singularidade da f no infinito.

Temos os seguintes casos:

a. O infinito é uma singularidade removível de f . Então

$$g(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots$$

$$f(z) = a_0 + a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots$$

Não aparecem as potências de expoentes positivos em (19). A extensão holomorfa de f , é obtida definindo $g(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a_0$.

b. O infinito é um polo de ordem k de f . Tem-se

$$g(w) = b_{-k} w^{-k} + \dots + b_{-1} w^{-1} + b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots$$

$$f(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots$$

sendo $a_k \neq 0$. Logo, aparece em (19) um número finito de potências com expoentes positivos.

c. O infinito é uma singularidade essencial de f . Obtem-se,

$$g(w) = \dots + b_{-2} w^{-2} + b_{-1} w^{-1} + b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \dots$$

com uma infinidade de coeficientes não nulos para as potências de expoentes negativos. Resulta daí

$$f(z) = \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots,$$

com uma infinidade de coeficientes não nulos para as potências de expoentes negativos.

Exemplos

1. Estudar o comportamento da função $f(z) = e^z$ no infinito. Sabe-se que

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

uniformemente em \mathbb{C} . Conclui-se que a (19) possui uma infinidade de coeficientes não nulos, para as potências de expoentes negativos.

2. Considere a função racional

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

com o numerador um polinômio de grau m e o denominador de grau n .

Suponhamos m e n não nulos. Seja z_0 um zero de ordem β_0 do denominador, e de ordem α_0 do numerador. Tem-se

$$p(z) = (z-z_0)^{\alpha_0} p_0(z), \quad q(z) = (z-z_0)^{\beta_0} q_0(z)$$

sendo $p_0(z)$, $q_0(z)$ polinômios não nulos em z_0 . Portanto,

$$f(z) = (z-z_0)^\alpha g(z)$$

sendo $\alpha = \alpha_0 - \beta_0$ e $g(z) = \frac{p_0(z)}{q_0(z)}$ holomorfa em $V_R(z_0)$. Logo, se $\alpha > 0$, isto é, $\alpha_0 > \beta_0$, a função f possui em z_0 um zero de ordem $\alpha_0 - \beta_0$. Caso $\alpha < 0$, isto é, $\alpha_0 < \beta_0$, a função f possui em z_0 um zero de ordem $\beta_0 - \alpha_0$. Conclui-se que as únicas singularidades de uma função racional em \mathbb{C} , são polos, em número finito.

A seguir estudaremos o comportamento da função racional no infinito. Fazendo a transformação $w = \frac{1}{z}$, obtém-se

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{a_0 + \frac{a_1}{w} + \dots + \frac{a_m}{w^m}}{b_0 + \frac{b_1}{w} + \dots + \frac{b_n}{w^n}}$$

ou

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w^n}{w^m} \frac{a_m + a_{m-1} w + \dots + a_0 w^m}{b_n + b_{n-1} w + \dots + b_0 w^n}.$$

Observe que estamos supondo m e n não nulos, logo a_m e b_n são, também, não nulos. Logo, $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w^n}{w^m} h(w)$, sendo $h(w)$ uma função racional com $h(0) \neq 0$. Tem-se os seguintes casos:

a) Quando $m < n$, $g(w) = w^{n-m} h(z)$, e $w_0 = 0$ é um zero de ordem $n-m$ de g , de onde resulta que w_0 é um zero de ordem $n-m$ da função f .

b. Se $m = n$, obtem-se $g(0) = \frac{a_m}{b_m}$, provando que g é regular na origem. Logo f é regular no infinito.

c. Suponhamos $m > n$. Neste caso tem-se $g(w) = \frac{h(w)}{w^{m-n}}$. Resulta que $w_0 = 0$ é um polo de ordem $m-n$ de g , logo w_0 é um polo de ordem $m-n$ de f .

3. Estudar a função $f(z) = \frac{\cotgz}{z^2}$ no ponto $z_0 = 0$.

Sendo $\cotgz = \frac{\cos z}{\sen z}$, as singularidades de f são localizadas nos zeros da função $g(z) = z^2 \sen z$. Resolvendo a equação $\sen z = 0$, verifica-se que $+\pi$ e $-\pi$ são os zeros de g mais próximos de $z_0 = 0$. Portanto, $z_0 = 0$ é um ponto singular isolado de \cotgz . Para classificar este ponto singular isolado, efetua-se a divisão das séries de Taylor de $\sen z$ e $\cos z$ em $V_R(0)$, $R < \pi$.

Encontra-se

$$\cotgz = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \dots$$

em $V_R(0) - \{0\}$. Portanto,

$$\frac{\cotgz}{z^2} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3} \frac{1}{z} - \frac{1}{45} z - \dots$$

que é a representação de Laurent em $V_R(0) - \{0\}$. Examinando a parte singular, conclui-se que $z_0 = 0$ é um polo de ordem três.

Exercícios

1. Verifique que $f(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z}$ possui uma singularidade essencial em $z_0 = 0$. Dado um número complexo L , determine uma sucessão $\{z_n\}$ tal que $\left\{ \operatorname{sen} \frac{1}{z_n} \right\}$ convirja para L . (cfr. a proposição 6 de Casorati-Weierstrass).
2. Classifique as singularidades em \mathbb{C} e o comportamento no infinito, das seguintes funções:
- a) $\frac{z^4}{1+z^2}$, b) $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$
- c) $\operatorname{tg} z$ d) $z e^{1/z}$
- e) $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$; f) $e^{-z} \operatorname{cotg} \frac{1}{z}$.
- g) $\frac{z}{\operatorname{sen} z}$ h) $\frac{z^2-1}{z^2+1}$
3. Classifique a singularidade das funções

$$z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z}, \quad \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}$$

no ponto $z_0 = 0$. Qual a parte singular neste ponto?

4. Obtenha a representação de Laurent para as seguintes funções:

a) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ para $|z| < 1$

b) $\frac{1}{(z-2)^2}$ para $|z| > 2$.

Sugestão:
$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

c)
$$\frac{1}{(z-a)^m} \quad \text{para } |z| < |a|$$

sendo $m \in \mathbb{N}$.

5. Determine o conjunto de pontos singulares de $\cos z$. Represente esta função em série de Laurent em $z_0 = 0$, e na coroa $\pi < |z| < 2\pi$.
6. Considere a função racional $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$. Denomina-se função racional simples aquela da forma $h(z) = \frac{a}{(z-z_0)^k}$, sendo a, z_0 número complexos fixos e $k \in \mathbb{N}$. Demonstre que toda função racional, decompõe-se na soma de um polinômio e de um número finito de funções racionais simples. (Sugestão: subtraía de f as partes singulares de seus polos, incluindo o infinito e use o teorema de Liouville).
7. Seja f holomorfa em \mathbb{C} . Demonstre que se as únicas singularidades de f em \mathbb{C} e no infinito são polos, então f é uma função racional. (Sugestão; Deduz-se da hipótese de que f possui um número finito de polos, pois os polos são pontos isolados. Assim, f possui uma coleção de pontos singulares isolados sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que é compacta. Imita o exercício 6 usando o teorema de Liouville para completar a demonstração do exercício 7).

§3. RESÍDUOS

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, exceto no ponto singular isolado $z_0 \in \Omega$. Consideremos uma circunferência γ com centro z_0 e contida em Ω . A integral $P = \int_{\gamma} f(z) dz$ não é necessariamente nula. O número complexo $R = \frac{P}{2\pi i}$ é tal que a função $z \rightarrow f(z) - \frac{R}{z-z_0}$ de $\Omega - \{z_0\}$ em \mathbb{C} possui integral nula ao longo de γ . Por esta razão, o número complexo R é denominado o resíduo de f no ponto singular isolado z_0 .

Consideremos a representação de Laurent de f , uniformemente convergente na coroa $\{z \in \Omega; 0 < |z| < r\}$ contida em Ω . Seja γ a circunferência $\{z \in \Omega; |z| = r_1, 0 < r_1 < r\}$. Sendo $\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = 0$, para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, conclui-se que a função

$$z \rightarrow f(z) - \frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

possui integral nula ao longo de γ . Conclui-se que, o resíduo de f num ponto singular isolado z_0 , é o coeficiente a_{-1} do desenvolvimento de Laurent no ponto z_0 . Caso z_0 seja um polo simples, a representação de Laurent reduz-se a

$$f(z) = g(z) + \frac{a_{-1}}{z-z_0},$$

isto é,

$$(z-z_0) f(z) = (z-z_0) g(z) + a_{-1},$$

sendo g holomorfa. Daí, obtém-se,

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z).$$

Exemplo. Seja $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-i| < 1$.

Esta função possui um polo simples em $z_0 = +i$. O resíduo será

$$\lim_{z \rightarrow +i} \frac{z-i}{z^2+1} = \frac{1}{2i}$$

TEOREMA 2 (Teorema dos Resíduos). Seja $w = f(z)$ holomorfa no domínio Ω exceto nos pontos singulares isolados z_1, z_2, \dots, z_n pertencentes a Ω . Represente por R_j o resíduo de f em z_j para $j = 1, 2, \dots, n$. Então

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n R_j,$$

sendo Γ um caminho fechado contido em Ω e contendo todos pontos z_j em seu interior.

Demonstração

Considere os números $\alpha = \min_{1 \leq j, k \leq n} |z_j - z_k|$ e β o mínimo das distâncias dos pontos z_j a Γ , para $j = 1, 2, \dots, n$. Tomemos o número positivo $\delta = \min(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2})$. Representemos por γ_j a circunferência de raio $0 < r < \delta$ e centro em z_j para $j = 1, 2, \dots, n$. Como consequência do teorema de Cauchy, obtem-se:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz \quad (19)$$

Representando por R_j o resíduo de f em z_j para $j = 1, 2, \dots, n$, obtem-se

$$\int_{\gamma_j} \left[f(z) - \frac{R_j}{z - z_j} \right] dz = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ou

$$\int_{\gamma_j} f(z) dz = R_j \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z-z_j} = 2\pi i R_j \quad (20)$$

para $j = 1, 2, \dots, n$. De (19) e (20) resulta a demonstração do teorema dos resíduos.

A seguir serão dados alguns métodos para o cálculo do resíduo.

Seja $f = g/h$. Suponhamos que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, isto é, z_0 é um zero simples de h . Resulta que z_0 é um polo simples de f . Represente por R_0 o resíduo da f em z_0 . Tem-se

$$R_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Exemplo. Calcule o resíduo de $f(z) = \cotg z$ em $z_0 = 0$. Portanto, se R_0 é o seu resíduo, obtem-se:

$$R_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{(\text{senz})^2} = 1.$$

Admitamos que f possua em z_0 um polo de ordem m . Vejamos como calcular o resíduo. Devemos calcular o coeficiente a_{-1} na representação de Laurent da f . Temos:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots \quad (21)$$

uniformemente em uma coroa circular com centro z_0 , contida em Ω . Multiplicando ambos os membros de (21) por $(z-z_0)^m$, obtemos:

$$(z-z_0)^m f(z) = a_m + a_{m-1}(z-z_0) + \dots + a_1(z-z_0)^{m-1} + \\ + a_0(z-z_0)^m + a_{-1}(z-z_0)^{m+1} + \dots \quad (22)$$

Tomando a derivada de ordem $m-1$ de ambos os membros da (22) resulta:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)! a_{-1} + \frac{m!}{1!} a_0(z-z_0) + \frac{(m+1)!}{2!} a_1(z-z_0)^2 + \dots$$

portanto

$$(m-1)! a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)],$$

da qual obtém-se, facilmente, o resíduo a_{-1} de f no polo z_0 de ordem m .

Exemplo. Consideremos a função

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3},$$

possuindo um polo de ordem três em $z_0 = 0$.

Se R_0 for o seu resíduo, obtém-se

$$R_0 = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} [z^3 f(z)] = \frac{1}{2}.$$

Analizemos o ponto no infinito. Para isto, suponhamos $w = f(z)$ holomorfa no domínio $\{z \in \mathbb{C}; r < |z| < \infty\}$ e seja

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \quad (23)$$

a representação de Laurent de f , uniformemente convergente neste domínio. Seja γ a fronteira de um disco aberto qualquer $V_\rho(0)$ com $\rho > r$, com a sua orientação habitual. Integremos ambos os membros de (23) ao longo de $-\gamma$. Resulta

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = \int_{-\gamma} \frac{a_{-1}}{z} dz = i a_{-1} \int_{2\pi}^0 d\theta = -2\pi i a_{-1}$$

Portanto, define-se o resíduo da função f no ∞ como sendo o número complexo $-a_{-1}$. Tem-se:

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = 2\pi i R_\infty.$$

sendo R_∞ o resíduo de f no ∞ .

PROPOSIÇÃO 6. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, exceto em um número finito de pontos singulares isolados. Então a soma dos resíduos de f é igual a zero.

Demonstração

De fato, sejam z_1, z_2, \dots, z_n as singularidades de f em \mathbb{C} e $V_\rho(0)$ um disco aberto que os contem. Seja γ a fronteira de $V_\rho(0)$. Representando por R_j o resíduo de f em z_j , $j = 1, 2, \dots, n$, obtem-se pelo teorema dos resíduos:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n R_j \quad (24)$$

Tem-se

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = 2\pi i R_\infty.$$

Adicionando (24) e (25) membro a membro, obtém-se a demonstração da proposição.

1. Aplicação Ao Cálculo de Integrais Reais.

Nesta seção, faremos algumas aplicações do teorema dos resíduos ao cálculo de certas integrais reais.

a. Seja f uma função racional, isto é, $f = h/g$ sendo h e g polinômios. Estudaremos integrais da forma

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad . \quad (26)$$

Admitamos h e g primos entre si e que a equação algébrica $q(x) = 0$ não possua raiz real. Com relação ao comportamento de f no infinito, suponhamos que $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm \infty$, isto é, supõe-se que para cada $\rho > 0$, existe $M > 0$ tal que $|z^2 f(z)| < M$, para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > \rho$. Com estas hipóteses sobre f , a integral (26) existe. Demonstraremos, que integrais reais desta forma podem ser calculadas através do teorema dos resíduos.

Seja $w = f(z)$ a função racional definida em \mathbb{C} menos os zeros de g , por $f(z) = h(z)/g(z)$ cuja restrição a \mathbb{R} é o integrando de I . Vamos demonstrar que a integral (26) é igual a $2\pi i$ multiplicado pela soma dos resíduos de $w = f(z)$ no semiplano $\text{Im } z > 0$.

Consideremos a semi circunferência $\gamma = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0, |z| = \rho\}$, como mostra a Fig. 10. Seja Γ o caminho orientado, composto de γ e do segmento de reta $[-\rho, +\rho]$. Tomemos $\rho > 0$ de tal modo que todos os polos de $w = f(z)$ situados no semipla-

no $\text{Im } z > 0$, estejam no interior de Γ . Representando por R_j o resíduo de $\omega = f(z)$ no polo z_j situado no interior de Γ , obtém-se, pelo teorema dos resíduos,

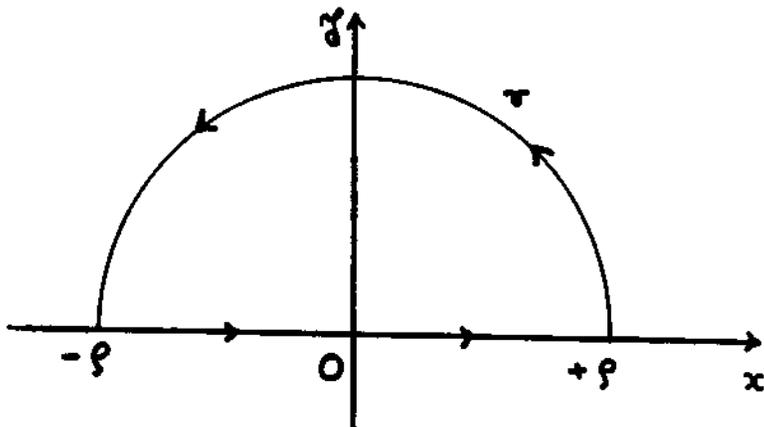


Fig. 10

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum R_j$$

Por ser $\Gamma = [-\rho, +\rho] \cup \gamma$, a última igualdade toma a forma seguinte:

$$\int_{-\rho}^{+\rho} f(x) dx + \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum R_j \quad (27)$$

Em virtude da hipótese feita sobre f , para cada $\varepsilon > 0$, existe $\rho_0 > 0$ tal que

$$|zf(z)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad |z| = \rho > \rho_0.$$

Logo, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\rho_0 > 0$ tal que

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |zf(z)| \left| \frac{dz}{z} \right| < \varepsilon \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|} = \pi \varepsilon$$

para todo $\rho > \rho_0$. Resulta, que se tomarmos o limite em (27) quando $\rho \rightarrow +\infty$, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum R_k. \quad (28)$$

Note que $\sum R_k$ é a soma dos resíduos de $\omega = f(x)$ no semiplano $\text{Im } z > 0$.

Exemplo. Calcule a integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Tem-se $h(x) = 1$, $g(x) = 1+x^4$, sendo os zeros de g não reais. Os polos do integrando são as raízes de $1+x^4 = 0$, que são os seguintes números complexos:

$$z_k = e^{(1+2k)\frac{\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Observe, também, que o integrando satisfaz a condição de crescimento no infinito, exigido para garantir a convergência da integral. Desta forma, podemos aplicar o resultado demonstrado, expresso através de (28).

Os polos situados no semiplano $\text{Im } z > 0$, são

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{4}} \quad \text{e} \quad z_3 = e^{\frac{3}{4}\pi i},$$

cujos resíduos representaremos por R_1, R_2 . De (28) deduz-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i (R_1 + R_2).$$

Para calcular o resíduo, note que sendo $(1+z^4)^{-1} = 4z^3$ e os polos simples, obtem-se:

$$R_1 = \frac{1}{4 e^{\frac{3\pi i}{4}}} = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$R_2 = \frac{1}{4 e^{\frac{\pi i}{4}}} = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Dai, obtem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Exercício. Demonstre que obtem-se o mesmo resultado, se considerarmos os polos situados no semiplano $\operatorname{Im} z < 0$.

Estudaremos um outro método para o cálculo de integrais da forma (26). Mantendo as hipóteses sobre a função racional f , consideremos a aplicação:

$$\omega = \frac{z-1}{z+1} \quad (29)$$

de $\mathbb{C} - \{-1\}$ em \mathbb{C} , cuja inversa é dada por

$$z = i \frac{1+\omega}{1-\omega} \quad (30)$$

A função (29) aplica a reta real \mathbb{R} , isto é, $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z = 0\}$, na circunferência

$$\Gamma = \{\omega \in \mathbb{C}; |\omega| = 1\},$$

excluindo o ponto $+1$. Tem-se

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{2i}{(1-\omega)^2}.$$

Em virtude da hipótese feita sobre o comportamento da f no infinito, conclui-se que a função

$$\omega \longrightarrow f \left(i \frac{1+\omega}{1-\omega} \right) \frac{2i}{(1-\omega)^2}$$

é integrável sobre Γ , valendo a igualdade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{\Gamma} f \left(i \frac{1+\omega}{1-\omega} \right) \frac{2i}{(1-\omega)^2} d\omega.$$

Portanto, pelo teorema dos resíduos podemos escrever:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{resíduos de } f \left(i \frac{1+\omega}{1-\omega} \right) \frac{2i}{(1-\omega)^2} \text{ no interior de } \Gamma.$$

Exemplo. Calcule a integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Devemos calcular a soma dos resíduos de

$$\omega \longrightarrow -\frac{2i}{4\omega} \frac{(1-\omega)^{2n}}{(-4\omega)^n}$$

no interior de $+\Gamma$. Para tal, tem-se:

$$\frac{1}{2i} \frac{(1-\omega)^{2n}}{(-4)^n \omega^{n+1}} = \frac{1}{2i} \frac{\sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-\omega)^p}{(-4)^p \omega^{n+1}}$$

que é holomorfa, salvo em $\omega = 0$. O resíduo em $\omega = 0$ é o coeficiente $\binom{2n}{n}$ de $\frac{1}{\omega}$, o qual é obtido fazendo $p = n$ no desenvolvimento anterior. Sendo

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

obtem-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = (-1)^n \frac{\pi(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

Suponhamos válidas tôdas as hipóteses anteriores sôbre a função racional f , exceto a não existência de polos reais, isto é, sôbre o eixo dos x . De modo mais preciso, suponhamos que a função racional f possua um único polo simples sôbre o eixo dos x , situado na origem. Desta forma, a integral de f sôbre a reta não existe. Consideremos as semicircunferências γ e γ' de raios ρ , ε , sendo $0 < \varepsilon < \rho$, como mostra a Fig. 11.

Tomemos ρ , ε de tal modo que todos os polos de $\omega = f(z)$, situados no semi plano $\text{Im } z > 0$, estejam no interior da semi coroa limitada por γ e γ' . Consideremos o Caminho Γ da-

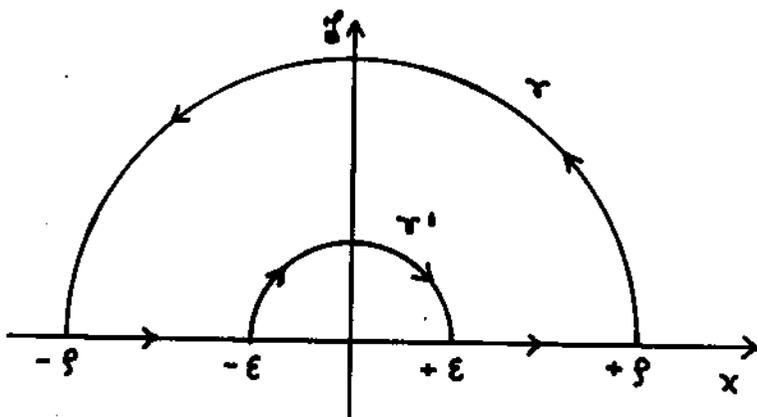


Fig. 11

do por:

$$\Gamma = \gamma \cup [-\rho, -\varepsilon] \cup \gamma' \cup [\varepsilon, +\rho] ,$$

orientado como mostra a Fig. 10. Pelo teorema dos resíduos, obtem-se:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum R_j ,$$

sendo R_j o resíduo de $\omega = f(z)$ no polo z_j , situado no semiplano $\text{Im } z > 0$. Resulta, daí, que

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \int_{-\rho}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\gamma'} f(z) dz + \int_{\varepsilon}^{+\rho} f(x) dx = 2\pi i \sum R_j . \quad (31)$$

Demonstramos anteriormente que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 0 .$$

Para a integral sobre γ' , tem-se:

$$\int_{\gamma'} f(z) dz = \int_{-\pi}^0 f(\varepsilon e^{i\theta}) i \varepsilon e^{i\theta} d\theta .$$

Sendo $z_0 = 0$ polo de ordem um de $\omega = f(z)$, obtem-se $f(z) = \frac{1}{z} \varphi(z)$, sendo φ racional, com $\varphi(0) \neq 0$. Portanto,

$$\int_{\gamma'} f(z) dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \varphi(\varepsilon e^{i\theta}) i \varepsilon e^{i\theta} d\theta = \int_{-\pi}^0 \varphi(\varepsilon e^{i\theta}) i d\theta .$$

Sendo φ contínua, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtem-se:

$$\int_{-\pi}^0 \varphi(\varepsilon e^{i\theta}) i d\theta \rightarrow i\pi\varphi(0).$$

Da hipótese de ser f integrável sobre as semi retas $(-\infty, -\varepsilon)$, $(+\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$, resulta de (31) que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \right) = 2\pi i \sum R_j - i\varphi(0)\pi.$$

Seja $\psi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, e $a < c < b$, tal que ψ é integrável em $(a, c - \varepsilon)$, $(c + \eta, b)$, para todo ε, η positivos, com $a < c - \varepsilon < b$, $a < c + \eta < b$. Diz-se que ψ é integrável em (a, b) quando

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} \psi(x) dx, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{c+\eta}^b \psi(x) dx$$

existem, com ε, η independentes. Casos há, em que estes limites não existem, porém, para $\eta = \varepsilon$ existe o seguinte:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b \psi(x) dx \right)$$

Nêste caso, diz-se que a integral de ψ em (a, b) , converge em valor principal segundo Cauchy, escrevendo-se:

$$\text{v.p.} \int_a^b \psi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b \psi(x) dx \right)$$

No caso estudado, isto é, f uma função racional com um único polo simples real na origem integrável em $(-\infty, -\varepsilon)$, $(+\varepsilon, +\infty)$ para todo $\varepsilon > 0$, verificamos que

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{resíduos de } f \text{ no semiplano } \text{Im } z > 0, \text{ me}$$

nos $i\pi\varphi(0)$.

b. Mantendo as hipóteses do caso a. sôbre a função racional f , vamos calcular integrais da forma

$$I = \int_0^{\infty} f(x) dx .$$

Consideremos a função

$$g(z) = f(z) \log z$$

e o caminho $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, sendo γ_1 e γ_2 circunferências de raios, respectivamente, ε , ρ , $0 < \varepsilon < \rho$. Representamos por γ_3 e γ_4 respectivamente, o segmento $[\varepsilon, \rho]$ com sentidos invertidos, veja Fig. 12.

Suponhamos que todos os polos de $f(z) \log z$ a distância finita, estejam no interior do caminho Γ . Quando z descreve uma vez a circunferência γ_1 , o argumento de z aumenta de 2π , enquanto $\log z$ fica $\log z + 2\pi i$. Se z descreve uma vez a cir-

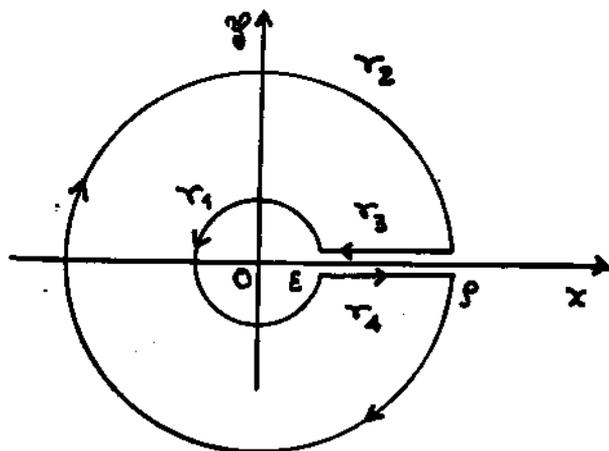


Fig. 12

conferência γ_2 , o argumento de z diminui de 2π e $\log z$ passa a

$\log z - 2\pi i$. Pelo teorema dos resíduos, tem-se

$$\int_{\Gamma} f(z) \log z \, dz = 2\pi i \sum \text{resíduos de } f(z) \log z$$

nas singularidades interiores a Γ .

Tem-se

$$\int_{\Gamma} g(z) \, dz = \int_{\gamma_1} g(z) \, dz + \int_{\gamma_2} g(z) \, dz + \int_{\gamma_3} g(z) \, dz + \int_{\gamma_4} g(z) \, dz. \quad (32)$$

Tomando $\varepsilon > 0$ de modo que $|f(z)| < M$ em $|z| < \varepsilon$, resulta que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} f(z) \log z \, dz = 0.$$

Sendo $|z^2 f(z)| < M$ quando $|z| \rightarrow +\infty$, conclui-se que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) \log z \, dz = 0.$$

Destas considerações e de (32), quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow \infty$, obtem-se:

$$\int_0^{\infty} f(x) [\log x + 2\pi i] \, dx - \int_0^{2\pi} f(x) \log x \, dx =$$

$$= 2\pi i \sum \text{resíduos de } f(z) \log z \text{ em } \mathbb{C} - [0, \infty).$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx = \sum \text{resíduos de } f(z) \log z \text{ em } \mathbb{C} - [0, \infty).$$

Exemplo. Calcule a integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pelo que foi demonstrado, obtém-se:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \sum \text{resíduos de } \frac{\log z}{1+z^n} \text{ em } \mathbb{C} - [0, \infty).$$

Os únicos polos de $\omega = \frac{\log z}{1+z^n}$ em $\mathbb{C} - [0, +\infty)$ são as raízes de $z^n + 1 = 0$, isto é, os números complexos

$$z_k = e^{(1+2k) \frac{\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Sendo simples êstes polos, o resíduo em z_k será

$$R_k = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\log z}{nz^{n-1}} = \frac{\log z_k}{n z_k^{n-1}} = \frac{1}{n} z_k \log z_k.$$

Portanto,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} z_k \log z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{(1+2k) \frac{i\pi}{n}} (1+2k) \frac{i\pi}{n} = \frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (1+2k) e^{(1+2k) \frac{i\pi}{n}}.$$

Calculando esta soma, obtém-se:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen} \pi/n}.$$

Observação. Para calcular a soma anterior, seja z número complexo. Tem-se

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (1+2k) e^{(1+2k)z} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{n-1} e^{(1+2k)z}.$$

Logo,

$$S_n(z) = \frac{d}{dz} \frac{e^{(2n+1)z} - e^z}{e^{2z} - 1}.$$

Efetuando esta derivada, fazendo $z = \frac{i\pi}{n}$, obtem-se, após cálculos simples,

$$S_n\left(\frac{i\pi}{n}\right) = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen} \pi/n}.$$

Outro método de calcular a integral I é tomar a substituição

$$x^n = \omega, \quad x = \omega^{1/n}, \quad \frac{dx}{d\omega} = \frac{1}{n} \omega^{1/n-1}.$$

Dai, ela assume a seguinte forma

$$I = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\omega^{1/n-1}}{1+\omega} d\omega,$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Esta é um caso particular da integral

$$J = \int_0^{\infty} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz$$

sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, com $0 < \alpha < 1$, a qual demonstraremos ser igual a $\pi + \operatorname{sen} \alpha\pi$. Tomemos o plano complexo \mathbb{C} com um corte ao longo da semi-reta $[0, +\infty)$, isto é, o conjunto $\mathbb{C} - [0, +\infty)$. Neste conjunto, consideremos o caminho orientado $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, como mostra a Fig. 13. Observe que Γ é o caminho da Fig. 12 com

a orientação inversa. Desta forma, γ_1 e γ_2 são circunferências de raios ε e ρ , respectivamente, com os centros na origem. Os arcos γ_3 e γ_4 são segmentos de reta. Na parte superior do cor

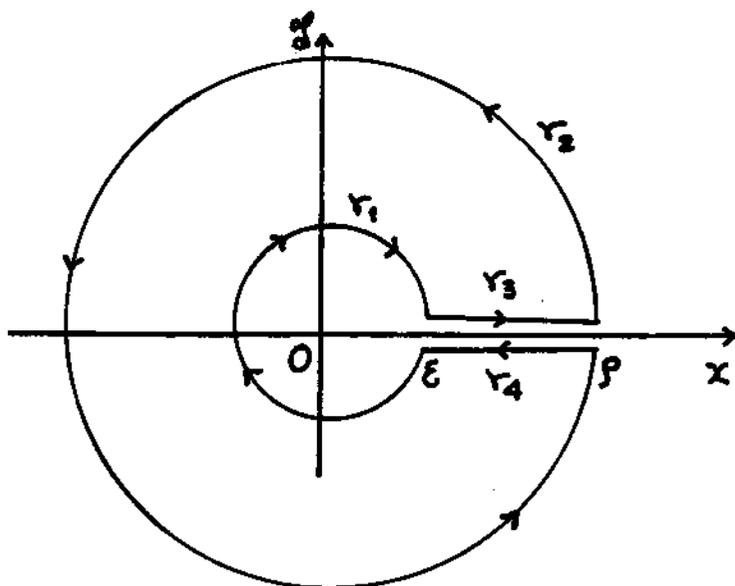


Fig. 13

te, sendo $y = 0$, o valor de $z^{\alpha-1}$ é $x^{\alpha-1}$. Na parte inferior, tem-se

$$z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\log z} = e^{(\alpha-1)(\log x + 2\pi i)} = x^{\alpha-1} e^{2\pi i \alpha}.$$

Seja Ω o domínio interior ao caminho fechado Γ . Tomemos $0 < \varepsilon < 1$ e $1 < \rho < +\infty$. Tem-se que

$$\omega = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$$

é holomorfa em Ω , exceto em $z_0 = -1$, aonde possui um polo simples, cujo resíduo R_0 é:

$$R_0 = \lim_{z \rightarrow -1} (1+z) \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)} = \lim_{z \rightarrow -1} z^{\alpha-1} = (-1)^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\pi i}.$$

Portanto, pelo teorema dos resíduos, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{(\alpha-1)\pi i},$$

ou seja:

$$\int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_{\gamma_2} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz + \int_{\rho}^{\varepsilon} \frac{x^{\alpha-1} e^{2\pi i \alpha}}{1+x} dx + \int_{\gamma_1} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)} \quad (33)$$

Tem-se:

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{\alpha} d\theta}{\rho-1} = 2\pi \frac{\rho^{\alpha}}{\rho-1}, \quad 1 < \rho < +\infty, \quad 0 < \alpha < 1,$$

portanto

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = 0$$

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^{\alpha}}{1-\varepsilon} d\theta = 2\pi \frac{\varepsilon^{\alpha}}{1-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

resultando que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = 0.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow \infty$ em (33), obtém-se:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = 2\pi i \frac{e^{i\pi(\alpha-1)}}{1-e^{2\pi i \alpha}}.$$

Fazendo $1 - e^{2\pi i \alpha} = e^{i\pi \alpha} (e^{-i\pi \alpha} - e^{i\pi \alpha}) = -e^{i\pi \alpha} 2i \operatorname{sen} \pi \alpha$, resulta que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi \alpha}.$$

Exercício. Seja $0 < \alpha < 1$ e

$$I(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} dx .$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$x = \frac{t}{1+t} ,$$

verifique ser

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \alpha \pi} .$$

c. Calcularemos neste item, integrais da forma

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$$

$\alpha > 0$, real e f uma função racional, satisfazendo as hipóteses do caso a.

Consideremos a função

$$\omega = f(z) e^{i\alpha z}$$

para $z \in \mathbb{C}$. Tomemos $\rho > 0$, suficientemente grande, de tal modo que o semi círculo

lo

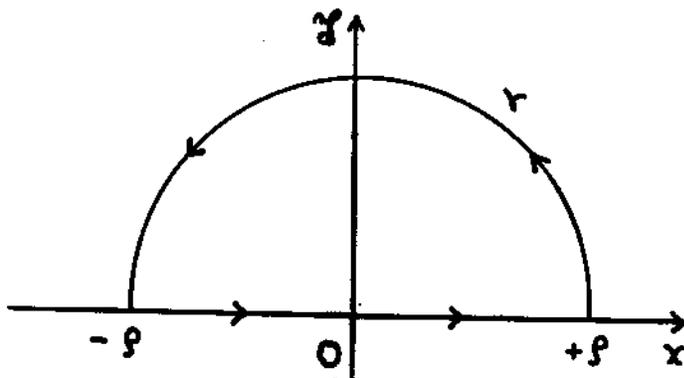


Fig. 14

$$z = \rho e^{i\theta} , \quad 0 < \rho < +\infty , \quad 0 \leq \theta \leq \pi ,$$

contenha em seu interior, todos os polos de

$$\omega = f(z) e^{i\alpha z},$$

localizados no semi plano $\text{Im}z > 0$. Representemos por γ a semi circunferência dêste semi círculo. Consideremos o caminho orientado $\Gamma = \gamma \cup [-p, +p]$. Pelo teorema dos resíduos, tem-se

$$\int_{\Gamma} f(z) e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum \text{resíduos de } f(z) e^{i\alpha z} \text{ no interior de } \Gamma.$$

isto é,

$$\int_{\gamma} f(z) e^{i\alpha z} dz + \int_{-p}^{+p} f(z) e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum \text{resíduos de } f(z) e^{i\alpha z}. \quad (34)$$

Tem-se

no interior de Γ .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &= \left| \int_{\gamma} f(\rho e^{i\theta}) e^{i\alpha \rho (\cos\theta + i \text{sen}\theta)} \rho i e^{i\theta} d\theta \right| \leq \\ &\leq \frac{M}{\rho} \int_0^{\pi} e^{-\alpha \rho \text{sen}\theta} d\theta = \frac{2M}{\rho} \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha \rho \text{sen}\theta} d\theta \end{aligned}$$

Fixando $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$, obtem-se

$$\left| \int_{\gamma} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq \frac{2M}{\rho} \left[\int_0^{\epsilon} d\theta + \int_{\epsilon}^{\pi/2} e^{-\alpha \rho \text{sen}\theta} d\theta \right],$$

porque $y = \text{sen}\theta$ é contínua, crescente e positiva em $[\theta, \pi/2]$.

Daf, obtem-se:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \leq \frac{2M}{\rho e^{\alpha \rho \text{sen}\epsilon}} \left(\epsilon + \frac{\pi}{2} \right)$$

Assim,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Resulta de (34),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum \text{resíduos de } f(z)e^{i\alpha z}, \alpha > 0,$$

no semi plano $\text{Im } z > 0$.

Exercício. Suponha $\alpha < 0$ e demonstre que vale o resultado anterior, quando se considera o semi plano inferior $\text{Im } z < 0$.

No caso em que a função racional f possui um único polo simples real, supõe-se situado na origem e considera-se um caminho Γ como na Fig. 11.

Exemplo. Calcule a integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$$

Considera-se a função

$$\omega = \frac{e^{iz}}{z}$$

e o caminho orientado Γ

da Fig. 15. Como a in-

tegral ao longo que γ_2 tende para zero quando $\rho \rightarrow +\infty$, resta

$$\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = 2\pi i \sum \text{resíduo de } \frac{e^{iz}}{z} \text{ no semi pla}$$

no $\text{Im } z > 0$.

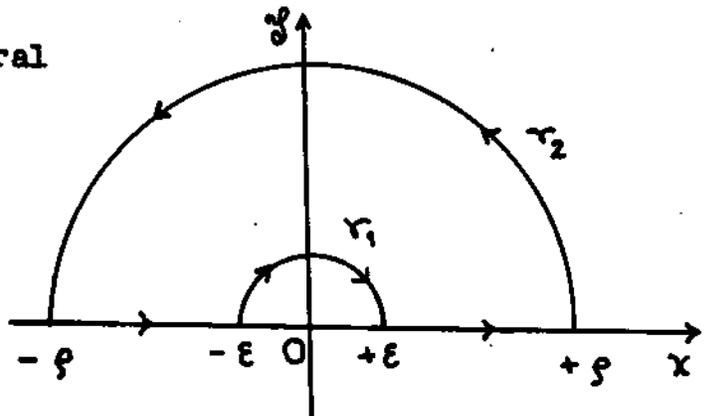


Fig. 15

Seja $\omega = \frac{e^{iz}}{z}$ holomorfa no semi plano $\text{Im } z > 0$, resulta que a soma dos resíduos é zero. Sendo

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{e^{-ix}}{x} dx ,$$

segue-se que

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

isto é,

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = -\frac{1}{2i} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz .$$

Tem-se

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon(\cos \theta + i \text{sen } \theta)} d\theta \rightarrow -i\pi$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Logo,

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

d. Cálculo de integrais da forma

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos x, \text{sen } x) dx ,$$

sendo f uma função racional, sem polos em $[0, 2\pi]$.

Fazendo $z = e^{ix}$, encontra-se

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Quando $0 \leq x \leq 2\pi$, z descreve, uma vez, a circunferência unitária com centro na origem, que representaremos por γ . Assim, a integral anterior reduz-se

$$I = \int_{\gamma} f \left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i} \right) \left(-\frac{1}{z} \right) dz.$$

Logo, pelo teorema dos resíduos,

$$\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x) dx = 2\pi i \sum \text{resíduos de } f \left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i} \right) \left(-\frac{1}{z} \right) \text{ no interior de } \gamma.$$

e. Cálculo de integrais da forma

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}.$$

Sendo $\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z})$, resulta que $\frac{1}{\cosh z}$, $z \in \mathbb{C}$, é regular, exceto para os z tais que

$$e^z + e^{-z} = 0$$

ou seja, $e^{2z} = -1 = e^{i\pi + 2k\pi i}$, da qual obtem-se

$$z = \frac{i\pi}{2} + k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Considere o caminho fechado, orientado, Γ , como mostra a Fig.16.

obtem-se:

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\cosh z} = \int_{-p}^{+p} \frac{dx}{\cosh x} +$$

$$+ i \int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh(\rho+iy)} -$$

$$- i \int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh(-\rho+iy)} - \int_{-p}^{+p} \frac{dx}{\cosh(x+i\pi)}$$

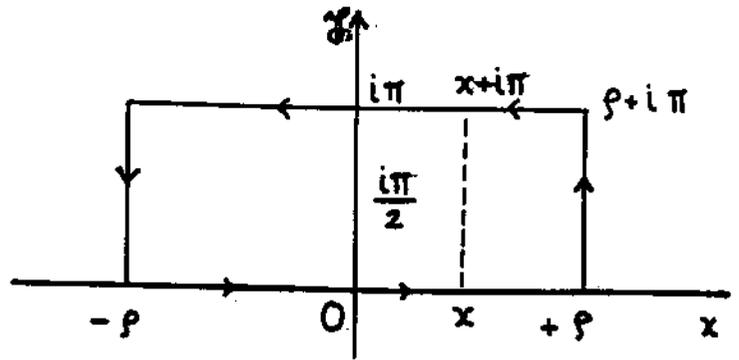


Fig. 16

ou seja,

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\cosh z} = 2 \int_{-p}^{+p} \frac{dx}{\cosh x} + i \int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh(\rho+iy)} - i \int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh(-\rho+iy)}. \quad (35)$$

O único ponto singular de $\frac{1}{\cosh z}$ no interior de Γ é $\frac{i\pi}{2}$, cujo resíduo representaremos por R_0 . Logo

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{\cosh z} = 2\pi i R_0. \quad (36)$$

Sendo $\cosh(x+i\pi) = -\cosh x$ e quando $x \rightarrow +\infty$, $|\cosh(x+iy)|$ se comportando como e^x , resulta que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh(\rho+iy)} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{dy}{\cosh(-\rho+iy)} = 0.$$

Tomando o limite quando $\rho \rightarrow +\infty$ em (35) e levando em conta a (36),

obtem-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = i\pi R_0 .$$

$$R_0 = \lim_{x \rightarrow \frac{i\pi}{2}} \frac{1}{(\cosh x)'} = \frac{1}{1}, \text{ sendo } (\cosh x)' \text{ a derivada de } \cosh x .$$

Obtem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \pi$$

f) Cálculo da integral

$$I = \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} x \, dx .$$

Do estudo da função logarítmica, sabemos que para obter o seu ramo principal é suficiente considerar $\omega = \log z$, quando z varia em $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$, isto é, um corte em \mathbb{C} ao longo da semi reta $(-\infty, 0]$. Consideremos a função

$$\omega = \log(1 - e^{2iz})$$

para $z \in \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}; 1 - e^{2iz} \text{ seja um real negativo}\}$.

Tomando $z = x + iy$, $1 - e^{2iz} = 1 - e^{-2y}(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$. Daí, resulta que $1 - e^{2iz}$ será real se e só se $\operatorname{sen} 2x = 0$, isto é, se e só se $x = \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, os z serão tais que $1 - e^{2y} \cos k\pi \leq 0$. Esta desigualdade será verdadeira se e só se $y \leq 0$ e k inteiro par. Portanto, o domínio de

$$\omega = \log(1 - e^{2iz})$$

é o plano complexo \mathbb{C} excluindo a família de semi retas $z_k = k\pi + iy$, com $y < 0$ e k inteiro par.

Consideremos o caminho Γ , orientado, como mostra a Fig. 17. Como não há ponto singular de $\omega = \log(1 - e^{2iz})$ no interior de Γ , segue-se que sua integral sôbre Γ é zero.

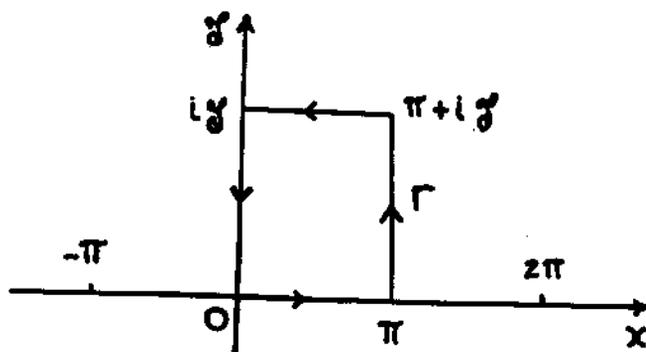


Fig. 17

Tem-se, portanto,

$$\int_{\Gamma} \log(1 - e^{2iz}) dz = 0.$$

Dai, obtem-se:

$$\int_{iy}^0 \log(1 - e^{-2s}) ds + \int_0^{\pi + iy} \log(1 - e^{2\pi i - 2s}) ds + \int_0^{\pi} \log(1 - e^{2ix}) dx + \int_{\pi}^0 \log(1 - e^{-2y + 2ix}) dx = 0.$$

Sendo $e^{-2s} = e^{-2s + 2\pi i}$, a soma das duas primeiras parcelas é zero e fazendo $y \rightarrow +\infty$ obtem-se que a última parcela é zero. Resulta que

$$\int_0^{\pi} \log(1 - e^{2ix}) dx = 0$$

Sendo $1 - e^{2ix} = -2i e^{ix} \operatorname{sen} x$, substituindo no integrando da última integral, obtem-se:

$$\pi \log 2 + \pi \log(-1) + i \frac{\pi^2}{2} + \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} x dx = 0$$

da qual resulta

$$\int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} x dx = \pi \log 2 .$$

2. Resíduo logarítmico. Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no domínio simplesmente conexo Ω e γ um caminho fechado, positivamente orientado, contido em Ω . Suponhamos que f não possua zeros sobre γ . O número complexo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (37)$$

denomina-se o resíduo logarítmico da função f relativamente a γ . É evidente a motivação para o qualificativo logarítmico, pois o integrando é a derivada de $\omega = \log f(z)$.

Faremos um estudo da integral (37) em face da existência de zeros e polos de f no interior de γ .

Suponhamos que f possua no interior de γ um único zero z_0 de ordem n . Note que, por hipótese, a f não se anula sobre γ . Por

definição,

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z) , \quad (38)$$

sendo g holomorfa e diferente de zero sobre γ e no seu interior. Tomando a derivada de (38), obtem-se:

$$f'(z) = m(z-z_0)^{m-1} g(z) + (z-z_0)^m g'(z). \quad (39)$$

De (38) e (39) resulta:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-z_0} + h(z) , \quad (40)$$

sendo h uma função holomorfa sobre γ e no seu interior. Integrando ambos os membros de (40) ao longo de γ encontra-se:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m . \quad (41)$$

Admitamos que em lugar de zero, a f possua no interior de Ω , um único polo z_0 de ordem p . Obtem-se

$$f(z) = (z-z_0)^{-p} \left[a_{-p} + a_{-p+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{p-1} + a_0 + \dots \right]$$

sendo $a_{-p} \neq 0$. Portanto,

$$f(z) = (z-z_0)^{-p} g(z) ,$$

sendo g holomorfa em γ , no seu interior, e aí diferente de zero. Repetindo o mesmo método usado para obter a (41), conclui-se que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -p . \quad (42)$$

De um modo geral, suponhamos que f possua no interior de γ os zeros z_1, z_2, \dots, z_k cuja soma das ordens é N e os polos $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s$ cujas somas das ordens é igual a P . Resulta de

(41) e (42) que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P . \quad (43)$$

Façamos uma interpretação geométrica da integral (43). Note que γ está orientada no sentido positivo. Tomemos sôbre γ um ponto z_0 que será escolhido para os extremos coincidentes de γ , porquanto ela é fechada. Ao variar z sôbre γ desde z_0 , a função $w = \log f(z)$ varia continuamente desde $w_0 = \log f(z_0)$. Quando z retorna ao ponto z_0 , o ponto $w = \log f(z)$ não retornará, em geral, a w_0 . Realmente, tem-se

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z) ,$$

havendo uma variação no $\arg f(z)$ quando z retorna a z_0 . Façamos $\theta_0 = \arg f(z_0)$ na origem z_0 e representemos por $\theta_1 = \arg f(z)$ quando z retorna a z_0 , após percorrer γ uma vez no sentido positivo.

Obtem-se:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[\log |f(z_0)| + i\theta_1 - \log |f(z_0)| - i\theta_0 \right] = \frac{\theta_1 - \theta_0}{2\pi} . \quad (44)$$

Representemos por $\Delta_{\gamma} \log f(z)$ a variação do argumento de $\log f(z)$ quando z percorre γ uma vez no sentido positivo, iniciando e terminando em z_0 .

Desta forma, de (43) e (44) obtem-se

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \log f(z) . \quad (45)$$

Dáí, enuncia-se o seguinte resultado, denominado princípio do argumento: a soma das ordens dos zeros menos a dos polos de

f no interior de γ , é igual a $\frac{1}{2\pi}$ multiplicado pela variação do argumento de $\log f$, quando z descreve γ uma vez no sentido positivo.

TEOREMA 3. (Rouché). Seja γ um caminho fechado de \mathbb{C} , sendo f e g holomorfas sobre γ e no seu interior. Se

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{para todo } z \in \gamma,$$

as funções f e $f+g$ possuem igual número de zeros no interior de γ .

Demonstração

De fato, sendo $|f(z)| > |g(z)|$ para todo $z \in \gamma$, resulta que f não se anula sobre γ , pois do contrário a g seria a função nula, pelo princípio do máximo, e o teorema seria trivial. Logo, sendo $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \gamma$, obtem-se

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma} \arg |f(z)+g(z)| &= \Delta_{\gamma} \arg \left\{ f(z) \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \right\} = \Delta_{\gamma} \arg f(z) + \\ &+ \Delta_{\gamma} \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Sendo

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1 \quad \text{para todo } z \in \gamma.$$

o número complexo

$$w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$$

varia no disco $|w-1| < 1$ quando z varia em γ . Consequentemente, w não dá voltas em torno da origem quando $z \in \gamma$. Resulta, portan

to, que a variação total do argumento de w é nula, isto é,

$$\Delta_{\gamma} \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0 . \quad (47)$$

Por (47) a (46) reduz-se a

$$\Delta_{\gamma} \arg |f(z) + g(z)| = \Delta_{\gamma} \arg f(z) ,$$

o que demonstra o teorema de Rouché, porque f e $f+g$ não possuem polos sobre γ , nem no seu interior.

O teorema que se segue é praticamente um corolário do teorema de Rouché.

TEOREMA 4. (Hurwitz). Seja γ um caminho fechado de \mathbb{C} e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções holomorfas no fêcho do interior de γ , que representa-se por $I(\gamma)$. Suponhamos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente para f sobre $I(\gamma)$, sendo f diferente da função nula. Se f não se anula em γ , existe um número natural $n_0(\gamma)$, tal que f e f_n possuem o mesmo número de zeros no interior de γ , para todo $n > n_0(\gamma)$.

Demonstração

De fato, seja $\mu = \min_{z \in \gamma} |f(z)|$, o qual é estritamente positivo. Sendo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente para f sobre γ , fixado o $\mu > 0$ anterior, existe $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \mu < |f(z)|$$

para todo $z \in \gamma$ e $n > n_0(\gamma)$. Logo, pelo teorema de Rouché, as funções f e $f + (f_n - f) = f_n$ possuem o mesmo número de zeros no interior de γ .

APLICACÃO 1. Com base no teorema de Rouché, podemos dar uma outra demonstração do teorema fundamental da álgebra, o que foi feito como consequência do teorema de Liouville. Demonstraremos que todo polinômio $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ de grau $n \geq 1$ com coeficientes complexos, possui exatamente n zeros em \mathbb{C} . De fato, façamos $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$, sendo $a_0 \neq 0$, por hipótese. Seja r um número real estritamente positivo, satisfazendo a seguinte condição:

$$\left| \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right| < |a_0|, \text{ para todo } |z| \gg r.$$

Obtem-se daí, que para todo z sobre a circunferência $\gamma = \{z \in \mathbb{C}; |z| = r\}$, vale a seguinte desigualdade:

$$|g(z)| = |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| = |z^n| \left| \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right| < |a_0 z^n| = |f(z)|.$$

Portanto, f e g são holomorfas no fecho do interior de γ , sendo $|g(z)| < |f(z)|$ para todo z sobre γ . Resulta, pelo teorema de Rouché, que $f(z) = a_0 z^n$ e $f(z) + g(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$, possuem o mesmo número de zeros no interior de γ . O interior de γ é o disco $\{z \in \mathbb{C}; |z| < r\} = V_r(0)$. Tem-se que $f(z) = a_0 z^n$ possui um zero de multiplicidade n no centro de $V_r(0)$. Logo $p(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$ possui n zeros no interior de $V_r(0)$. No exterior de $V_r(0)$ e na fronteira, $p(z)$ não possui zeros porque

$$|p(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

para todo $|z| \gg r$. Portanto $p(z)$ possui exatamente n zeros em \mathbb{C} .

APLICACÃO 2. Encontre o número de zeros de $p(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ no interior da circunferência $\gamma = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

Façamos

$$f(z) = -5z^4 \quad \text{e} \quad g(z) = z^7 + z^2 - 2.$$

Para $|z| = 1$, obtem-se

$$|f(z)| = 5 \quad \text{e} \quad |g(z)| = |z^7 + z^2 - 2| \leq |z^7| + |z^2| + 2 = 4,$$

isto é, $|f(z)| > |g(z)|$ para todo $z \in \gamma$.

Consequentemente, $f(z) + g(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 + 2$ possui no interior de γ o mesmo número de zeros que $f(z) = -5z^4$. Como f possui $z_0 = 0$ com multiplicidade 4, conclui-se que $p(z) = 0$ possui quatro raízes no interior de γ .

Exercícios:

1. Calcule as integrais seguintes, fazendo uso do teorema dos resíduos

$$a) \int_{|z|=2} \frac{\sinh z}{z^6} dz.$$

Sugestão: Tem-se

$$\frac{\sinh z}{z^6} = \frac{1}{z^5} + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z} + \frac{z}{7!} + \dots$$

para $|z| > 0$.

$$b) \int_{|z|=3} \frac{(z^2+5) dz}{(z+2i)(z-1)^3}$$

$$c) \int_{|z|=5} \frac{z^2 - z + 1}{(z-1)(z-4)(z+3)} dz$$

$$d) \int_{|z|=1} \frac{(1-z^4) e^{2z}}{z^5} dz$$

$$e) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{\operatorname{sen} z} dz$$

$$f) \int_{|z|=4} \frac{z^2 + 1}{(z-1)(z-1)^4} dz$$

2. Calcule o número de zeros no círculo $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, de cada um dos seguintes polinômios:

a) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$;

b) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$.

3. Calcule as raízes da equação

$$z^4 - 5z + 1 = 0 ,$$

situadas na coroa circular $\{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\}$.

4. Calcule as seguintes integrais:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + \cos \varphi)^2} , \quad a > 0, \quad b > 0 .$$

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos\varphi}, \quad a > 1.$$

5. Calcule o resíduo de $\omega = e^{z + \frac{1}{z}}$ no ponto $z_0 = 0$.

APÊNDICE

RESULTADOS ELEMENTARES SOBRE REPRESENTAÇÃO CONFORME. LEMA DE SCHWARZ. FUNÇÕES UNIVALENTES. TEOREMA DE MONTEL. TEOREMA DE RIEMANN. FÓRMULA DE SCHWARZ-CHRISTOPFEL.

INTRODUÇÃO. Do capítulo 3, §3, concluímos que se $\omega = f(z)$ for holomorfa com $f'(z) \neq 0$ em Ω , então f é localmente biunívoca e conforme. Demonstramos, também, que se $\omega = f(z) = u + iv$, com u, v possuindo derivadas parciais contínuos em Ω , conserva os ângulos ou mantém constante a razão entre pequenos segmentos e os seus transformados, então f ou sua conjugada \bar{f} será holomorfa em Ω . Desta forma, no caso em que \bar{f} for holomorfa, os ângulos sofrem uma mudança de sentido de rotação, sendo por isto dito que \bar{f} estabelece uma transformação conforme indireta. A determinada por f denomina-se direta. Denominaremos, como no capítulo 3, §3, simplesmente conforme, quando não houver necessidade de qualificar se é direta ou inversa.

§1. RESULTADOS INTRODUTÓRIOS. Neste parágrafo estudaremos alguns exemplos importantes de representação conforme, que faremos uso posteriormente.

Consideremos uma circunferência

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = R\}$$

Diz-se que dois números complexos z_1 e z_2 são inversos em rela-

ção à circunferência Γ , quando êles pertencem a uma mesma semi-reta de origem em z_0 e satisfazem a seguinte condição:

$$|z_1 - z_0| |z_2 - z_0| = R^2.$$

Tem-se

$$z_1 = z_0 + be^{i\theta}, \quad z_2 = z_0 + \frac{R^2}{b} e^{i\theta}$$

sendo θ , b números reais.

Escreveremos a equação de Γ em função de dois de seus pontos inversos z_1 e z_2 . Seja $z - z_0 = Re^{i\varphi}$ a equação de Γ . Quando $z \in \Gamma$, tem-se

$$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \frac{|Re^{i\varphi} - be^{i\theta}|}{|Re^{i\varphi} - \frac{R^2}{b} e^{i\theta}|} = \frac{b}{R} \frac{|Re^{i\varphi} - be^{i\theta}|}{|be^{i\varphi} - Re^{i\theta}|} = \frac{b}{R}$$

que é a equação de Γ escrita em função de z_1 e z_2 .

PROPOSIÇÃO 1. Sejam z_1, z_2 números complexos fixos e $k \neq 1$ constante. A coleção dos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z - z_1| = k|z - z_2|$, é uma circunferência possuindo z_1, z_2 para pontos inversos.

Demonstração

De fato, tem-se

$$(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = k^2(z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2)$$

ou

$$|z|^2 - 2\operatorname{Re} z \bar{z}_1 + |z_1|^2 = k^2(|z|^2 - 2\operatorname{Re} z \bar{z}_2 + |z_2|^2)$$

Sendo $k \neq 1$, obtem-se

$$|z|^2 - \frac{2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 - k^2 \bar{z}_2)z}{1 - k^2} + \frac{|z_1|^2 - k^2|z_2|^2}{1 - k^2} = 0$$

ou

$$\left| z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2} \right|^2 = \frac{|z_1 - k^2 z_2|^2}{(1 - k^2)^2} - \frac{|z_1|^2 - k^2|z_2|^2}{1 - k^2}.$$

Por ser

$$|z_1 - k^2 z_2|^2 - (1 - k^2)(|z_1|^2 - k^2|z_2|^2) = k^2|z_1 - z_2|^2$$

obtem-se:

$$\left| z - \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2} \right| = \frac{k|z_1 - z_2|}{1 - k^2}$$

que é uma circunferência com o centro em

$$z_0 = \frac{z_1 - k^2 z_2}{1 - k^2} \text{ e raio } R = \frac{k|z_1 - z_2|}{1 - k^2}.$$

Para provar que z_1 e z_2 são inversos, consideremos

$$z_1 - z_0 = \frac{k^2(z_2 - z_1)}{1 - k^2} \quad \text{e} \quad z_2 - z_0 = \frac{z_2 - z_1}{1 - k^2}$$

Sendo $(z_1 - z_0)/(z_2 - z_0)$ igual a k^2 , real positivo, conclui-se que z_1 e z_2 pertencem a mesma semi reta com origem em z_0 . Sendo

$$|z_1 - z_0||z_2 - z_0| = R^2,$$

segue-se que z_1 e z_2 são inversos em relação a Γ .

Quando $k=1$, z é equidistante de z_1 e z_2 . Logo o z varia sobre uma reta perpendicular ao suporte de z_1z_2 , passando pelo ponto médio. Os pontos z_1 e z_2 são simétricos em relação a esta reta.

PROPOSIÇÃO 2. As imagens de pontos inversos por funções homográficas, são pontos inversos.

Demonstração

De fato, seja Γ uma circunferência e z_1 e z_2 pontos inversos em relação a Γ . Podemos escrever a equação de Γ sob a forma

$$\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = k .$$

Consideremos a função homográfica

$$\omega = \frac{az+b}{cz+d}$$

e sua inversa

$$z = \frac{d\omega-b}{-c\omega+a} .$$

A imagem Γ' de Γ pela função homográfica é

$$\frac{|d\omega - b - z_1(-c\omega + a)|}{|d\omega - b - z_2(-c\omega + a)|} = k$$

ou

$$\frac{|\omega - \omega_1|}{|\omega - \omega_2|} = h$$

sendo $\omega_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d}$, $\omega_2 = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$, $h = k \cdot \left| \frac{cz_2+d}{cz_1+d} \right|$, o que demonstra a proposição.

Sabemos que se $\omega = f(z)$ fôr uma função homográfica, então f é conforme exceto no ponto que anula o denominador da fração racional f . A seguir, faremos alguns exemplos de transformação conforme por funções homográficas, necessitando do Exemplo 1 na demonstração do teorema de Riemann.

Exemplo 1. Encontre tódas as funções homográficas que transformam

$$\overline{V_R(0)} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$$

em $\overline{V_R(0)}$, transformando $z_0 \in V_R(0)$ em 0.

Devemos determinar os coeficientes de

$$\omega = \frac{az+b}{cz+d}$$

a menos de um parâmetro. Suponhamos que 0 seja a imagem de z_0 por esta função e seja Γ a circunferência fronteira de $V_R(0)$. Tem-se que 0 é o inverso de 0 em relação a Γ . Logo pela proposição 3, o correspondente de 0 pela função homográfica, será o inverso de z_0 em relação a Γ , ou seja $\frac{R^2}{\bar{z}_0}$. Logo, substituindo na expressão de ω , obtem-se,

$$z_0 = -\frac{b}{a}, \quad \frac{R^2}{\bar{z}_0} = -\frac{d}{c}.$$

Resulta que

$$\omega = \frac{a}{c} \frac{z-z_0}{z-R^2/\bar{z}_0} = \frac{a\bar{z}_0}{c} \frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-R^2} = -\frac{a\bar{z}_0}{c} \frac{z-z_0}{R^2-\bar{z}_0 z}.$$

O ponto $z = R$ corresponde a um ponto de $|\omega| = R$. Logo,

$$|\omega| = \left| -\frac{a \bar{z}_0}{c} \right| \left| \frac{R - z_0}{R - \bar{z}_0} \right| = R^2 .$$

Resulta que

$$\left| -\frac{a \bar{z}_0}{c} \right| = R^2$$

de onde resulta que

$$-\frac{a \bar{z}_0}{c} = R^2 e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R} .$$

Deduz-se, dêste modo, que a função homográfica mais geral, transformando o disco fechado $\underline{V}_R(0)$ nêle mesmo e levando z_0 em 0, é

$$\omega = e^{i\varphi} R^2 \cdot \frac{z - z_0}{R^2 - \bar{z}_0 z} \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

Conclui-se, dêste exemplo, que a função homográfica anterior, estabelece uma correspondência biunívoca e conforme, do disco $\underline{V}_R(0)$ sôbre si mesmo.

Exemplo 2. Encontre tôdas as funções homográficas que transformam o semi plano $\text{Im } z \geq 0$ em $\underline{V}_R(0)$, com z_0 sendo transformado em 0.

Pontos inversos em relação a uma reta, são simétricos. Logo, os inversos em relação a $\text{Im } z = 0$ são complexos conjugados.

Representemos por

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d}$$

a função homográfica procurada. Seja z_0 o ponto do semi plano $\text{Im } z \geq 0$ que corresponde a origem 0. Sabe-se que ∞ é o inverso de 0 em relação a $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}; |z| = R\}$ e seu correspondente será o inverso de z_0 em relação a $\text{Im } z = 0$, sendo Γ a imagem de $\text{Im } z = 0$ pela função homográfica. Logo z_0, \bar{z}_0 são os correspondentes de 0 e ∞ , isto é,

$$z_0 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \bar{z}_0 = -\frac{d}{c}.$$

Portanto,

$$\omega = \frac{a}{c} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Como $z = 0$ corresponde a um certo ω tal que $|\omega| = R$, resulta que

$$\left| \frac{a}{c} \right| \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| = R$$

ou seja,

$$\frac{a}{c} = R e^{i\varphi} \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\omega = R e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Como $\text{Im } z = 0$ corresponde a $|\omega| = R$ e $\text{Im } z > 0$ a $|\omega| < R$, vem que $z_0 \in \text{Im } z > 0$.

Finalizaremos este parágrafo demonstrando um resultado importante, conhecido sob a denominação de Lema de Schwarz.

LEMA DE SCHWARZ - Seja f holomorfa no disco $V_R(0)$, tal que $f(0) = 0$ e $|f(z)| \leq M < \infty$, sôbre a circunferência $|z| = R$. Então,

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R} |z|$$

para todo $z \in V_R(0)$ e

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}.$$

O sinal de igualdade é válido (para z diferente de zero na primeira igualdade) se e sômente se f é definida por

$$f(z) = \frac{M}{R} e^{i\theta} z$$

com θ real.

Demonstração

Para todo $z \in V_R(0)$, tem-se

$$f(z) = f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots$$

pois $f(0) = 0$. A função

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + \frac{f''(0)}{2} z + \dots$$

é holomorfa em $V_R(0)$, sendo $\varphi(0) = f'(0)$. Seja γ_ρ a circunferência de raio ρ e centro na origem, sendo $0 < \rho < R$. Para todo $z \in \gamma_\rho$, tem-se:

$$|\varphi(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{M}{\rho}.$$

Logo, resulta do princípio do máximo que

$$|\varphi(z)| \leq \frac{M}{\rho}$$

para todo z no interior de γ_ρ . Tomando o limite quando $\rho \rightarrow R$, obtem-se

$$|\varphi(z)| \leq \frac{M}{R}$$

para todo $z \in V_R(0)$. Para $z \neq 0$ obtem-se

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R} |z| ,$$

que é válido em $z = 0$ por hipótese. Sendo $\varphi(0) = f'(0)$, resulta, também, que

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R} .$$

Observe que $|f(z)|$ pode assumir o valor $\frac{M}{R}|z|$ em algum ponto de $V_R(0)$. Isto acontece se e somente se $|\varphi(z)| = M/R$ em algum ponto de $V_R(0)$. Logo, como o máximo é atingido em $|z| = R$, resulta que $|\varphi(z)| = M/R$ em $V_R(0)$, isto é,

$$\varphi(z) = \frac{M}{R} e^{i\theta} , \quad \theta \text{ real}$$

$$f(z) = \frac{M}{R} e^{i\theta} z , \quad \theta \text{ real} .$$

§2. FUNÇÕES UNIVALENTES. Uma função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ denomina-se univalente, quando ela for holomorfa e injetiva em Ω , isto é, para todo par $z_1, z_2 \in \Omega$ com $z_1 \neq z_2$ implica $f(z_1) \neq f(z_2)$.

PROPOSIÇÃO 1. Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ for univalente, então sua derivada f' não se anula em Ω .

Demonstração

De fato, suponhamos que existe um ponto $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) = 0$. Demonstraremos que isto implica numa contradição. Da hipótese resulta que $g(z) = f(z) - f(z_0)$ possui em z_0 um zero de ordem $n \geq 2$. Sendo f não constante, pois f é univalente, existe uma circunferência Γ com centro em z_0 contida em Ω , sobre a qual $g(z) = f(z) - f(z_0)$ não se anula e de modo que f' não possua outro zero no interior de Γ diferente de z_0 . Seja

$$M = \inf_{z \in \Gamma} |f(z) - f(z_0)|$$

e $a \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |a| < M$. Aplicando o teorema de Rouché as funções $g(z) = f(z) - f(z_0)$ e $h(z) = f(z) - f(z_0) - a = g(z) - a$, conclui-se que h e g possuem o mesmo número de zeros no interior de Γ , ou seja $h(z) = g(z) - a$ possui um zero de ordem $n \geq 2$ no interior de Γ , isto é, existe mais de um ponto z em Ω tal que $f(z) = b$ sendo $b = f(z_0) + a$, o que é absurdo, pois f é univalente em Ω .

PROPOSIÇÃO 2. A composta de duas funções univalentes é univalente.

Demonstração

De fato, sejam $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ univalentes, sendo Ω_1 contendo a imagem de Ω por f . Resulta que se $g(f(z_1)) = g(f(z_2))$, tem-se $f(z_1) = f(z_2)$, pois g é univalente, logo $z_1 =$

$= z_2$ pois f é univalente, logo a composta gf é univalente.

PROPOSIÇÃO 3. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções univalentes em Ω . Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente no interior de Ω , então, se f não for constante ela será univalente em Ω .

Demonstração

A possibilidade de f ser constante, verifica-se considerando a sucessão de funções $\left(\frac{z}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, para $z \in \mathbb{C}$. Estas são univalentes sendo zero o limite.

Suponhamos que o limite f da sucessão não seja constante. Do conhecido resultado sobre convergência uniforme de sucessões de funções holomorfas, deduz-se que f é holomorfa em Ω . Admitamos que f não seja univalente. Daí resultaria que existem dois pontos distintos z_1, z_2 , pelo menos, em Ω , tais que $f(z_1) = f(z_2) = \omega_0$. Consideremos duas circunferências Γ_1 com centro em z_1 , Γ_2 com centro em z_2 , contidas em Ω e disjuntas, tais que $g(z) = f(z) - \omega_0$ não se anule em $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (É possível pois f não é constante). Seja

$$M = \inf_{z \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} |f(z) - \omega_0|.$$

Como $f_n \rightarrow f$ uniformemente em cada compacto de Ω , resulta que existe um $n_0 = n_0(M)$ tal que $|f(z) - f_n(z)| < M$ para todo $n > n_0$ e todo $z \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Aplicando o teorema de Rouché as funções

$$g(z) = f(z) - \omega_0, \quad h(z) = f_n(z) - \omega_0 = [f(z) - \omega_0] + [f_n(z) - f(z)],$$

conclui-se que h possui em $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ o mesmo número de zeros que g .

Logo, $f_n(z) - \omega_0$ possui dois zeros, pelo menos, no interior de Γ , o que é uma contradição, porque f_n é univalente para cada n .

PROPOSIÇÃO 4. Seja Ω um domínio simplesmente conexo e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ univalente em Ω . Então a imagem de Ω por f é simplesmente conexa.

Demonstração

De fato, seja Ω um domínio do plano complexo \mathbb{C} sem o ponto no infinito e Ω' a imagem de Ω por f . Devemos demonstrar que se Γ' for um caminho fechado contido em Ω' , então todo ponto ω_0 do interior de Γ' pertence a Ω' . De fato, ω_0 pertencendo ao interior de Γ' , obtem-se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} = 1$$

supondo-se Γ' com orientação positiva. Seja Γ o caminho contido em Ω tal que a imagem por $\omega = f(z)$ seja Γ' . Fazendo esta mudança de variáveis na última integral, obtem-se

$$\pm N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - \omega_0}$$

sendo N o número de zeros de $f(z) - \omega_0$ no interior de Γ . Se a orientação de Γ for a mesma de Γ' , o sinal será + e se for discrepante com Γ' será -. Retornando a primeira integral, verifica-se que o sinal é +, e $N=1$. Logo, existe um z pertencente a Ω tal que $f(z) = \omega_0$, isto é, $\omega_0 \in \Omega'$, o que demonstra o teorema.

Observe que nas hipóteses da proposição, $f'(z) \neq 0$ em Ω logo conforme, portanto, se f representa de modo conforme Ω sobre Ω' , se Ω fôr simplesmente conexo, resulta que Ω' também será. Note também, que o plano complexo \mathbb{C} não pode ser representado conformemente sobre um disco $V_R(0)$. De fato, se isto acontecesse, a função f que estabelecesse esta representação, seria holomorfa em todo o plano \mathbb{C} e limitada, pois $|f(z)| < R$. Logo pelo teorema de Liouville f seria constante o que seria contraditório. Logo, se desejarmos que um domínio Ω do plano complexo seja conforme ao disco $V_R(0)$, devemos esperar que Ω além de simplesmente conexo seja diferente de \mathbb{C} . A resposta a esta questão será dada pelo teorema de Riemann. Uma observação simples é que da demonstração da proposição 4, verifica-se que se f fôr conforme os caminhos fechados Γ e Γ' se correspondem, o mesmo acontece aos seus interiores.

§3. FAMÍLIAS DE FUNÇÕES HOLOMORFAS - TEOREMA DE MONTEL

Seja Ω um domínio de \mathbb{C} e $H(\Omega)$ uma família de funções holomorfas em Ω . Diremos que uma propriedade desta família é válida no interior de Ω , quando ela fôr verificada em cada compacto K contido em Ω .

DEFINIÇÃO 1. Diz-se que uma família $H(\Omega)$ de funções, é uniformemente limitada no interior de Ω , quando para todo compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante positiva $M(K)$ tal que $|f(z)| < M(K)$ para todo $z \in K$ e qualquer $f \in H(\Omega)$.

DEFINIÇÃO 2. Uma família $H(\Omega)$ de funções holomorfas em Ω denomina-se equicontínua no interior de Ω , quando para cada $\varepsilon > 0$ e cada compacto $K \subset \Omega$, corresponde um número positivo $\eta = \eta(\varepsilon, K)$, tal que para todo par $z, z' \in K$ com $|z - z'| < \eta(\varepsilon, K)$, tem-se $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ para toda $f \in H(\Omega)$.

Como todo compacto $K \subset \Omega$ admite uma cobertura por uma família finita de discos, para verificarmos se uma propriedade de H é válida no interior de Ω é suficiente verificar a sua validade em todo disco contido no interior de Ω .

PROPOSIÇÃO 1. Se $H(\Omega)$ fôr equilimitada em Ω , $H'(\Omega)$ a família das funções derivadas dos elementos de $H(\Omega)$ também é equilimitada no interior de Ω .

Demonstração

Seja $V_\rho(z)$ um disco tal que $\overline{V_\rho(z)} \subset \Omega$ e $V_R(z)$, com $R > \rho$, outro disco tal que $\overline{V_R(z)} \subset \Omega$. Sejam γ e Γ as fronteiras de $V_\rho(z)$ e $V_R(z)$ respectivamente. Sendo $H(\Omega)$ equilimitada no interior de Ω , obtem-se $|f(z)| < M(R)$ para todo $z \in \overline{V_R(z)}$ e toda $f \in H(\Omega)$. Resulta da fórmula integral de Cauchy, que

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} |d\xi| \leq \frac{M(R)}{2\pi} \frac{R}{R - \rho}$$

para todo $z \in V_\rho(z)$. (Note que R é função de ρ , sendo o segundo membro uma função de ρ apenas).

PROPOSIÇÃO 2. Se $H(\Omega)$ fôr equilimitada no interior de Ω , ela será equicontínua no interior de Ω .

Demonstração

Seja $V_\rho(z)$ um disco tal que $\overline{V_\rho(z)} \subset \Omega$ e z, z' dois pontos de $V_\rho(z)$. Pela proposição anterior, tem-se

$$|f(z) - f(z')| \leq \int_{z'}^z |f'(\zeta)| |d\zeta| \leq M(\rho) |z - z'|$$

para toda $f \in H(\Omega)$, de onde conclui-se a equicontinuidade da família.

PROPOSIÇÃO 3. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções holomorfas em Ω e equilimitada no interior de Ω . Se esta sucessão converge em um conjunto D denso em Ω , então ela converge uniformemente no interior de Ω .

Demonstração

Seja $V_\rho(z)$ um qualquer disco, sendo $\overline{V_\rho(z)} \subset \Omega$. Sendo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ equilimitada em $\overline{V_\rho(z)}$ segue-se pela proposição 2 que ela é equicontínua sobre $V_\rho(z)$. O mesmo resultado é válido para $V_R(z) \subset \Omega$ com $R > \rho$. Tomemos um número positivo d tal que

$$d < \min \left(\frac{R-\rho}{2}, \eta(\varepsilon, R) \right)$$

sendo $\eta(\varepsilon, R)$ o número obtido da equicontinuidade quando toma-se o compacto $K = \overline{V_R(z)}$. Suponhamos feita uma decomposição de Ω por retas paralelas aos eixos, em quadrados cuja diagonal é o número d fixado. Sejam z, z' dois pontos quaisquer de $V_\rho(z)$

pertencentes a um mesmo quadrado contido em $V_R(z)$. Devido a equicontinuidade de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, resulta que

$$|f_n(z) - f_n(z')| < \epsilon/3$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como D é denso em Ω , cada quadrado Q_k contém um ponto z_k de D no qual a sucessão de funções converge. Como há apenas um número finito de quadrados, tem-se

$$|f_n(z_k) - f_m(z_k)| < \epsilon/3$$

para todo $n, m > N$.

Seja z um ponto qualquer de $V_\rho(z)$. Segue-se que z pertence a algum quadrado Q_k , para algum k . Se z_k for um ponto de D pertencente a Q_k , obtém-se:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(z_k)| + |f_n(z_k) - f_m(z_k)| + |f_m(z_k) - f_m(z)|$$

Como z, z_k pertencem a Q_k , resulta que $|z - z_k| < d$. Resulta que para todo $z \in V_\rho(z)$ e todo $\epsilon > 0$, existe um $N = N(\epsilon)$ tal que

$|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ para todo par $n, m \geq N$. Logo a sucessão converge uniformemente no interior de Ω .

TEOREMA DE MONTEL - Seja $H(\Omega)$ uma família de funções holomorfas e equilimitada no interior de Ω . Então, toda sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções da família $H(\Omega)$ possui uma subsucessão uniformemente convergente no interior de Ω .

Demonstração

Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão densa em Ω e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma suces

são de funções de H . Consideremos a sucessão numérica $(f_n(z_1))_{n \in \mathbb{N}}$. Sendo $H(\Omega)$ equilimitada, resulta que existe uma constante positiva M tal que $|f_n(z_1)| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Geometricamente, tem-se que os números complexos $\omega_{1,n} = f_n(z_1)$ pertencem ao disco $V_M(0)$. Assim, sendo $(\omega_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ limitada, ela possui uma subsucessão $(\omega_{1,n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, convergente para um número complexo $\omega_1 \in \overline{V_M(0)}$. Sendo $\omega_{1,n_k} = f_{n_k}(z_1)$, e representando a função f_{n_k} por $f_{1,k}$, conclui-se que $(f_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{1,k}(z_1) = \omega_1.$$

Tomemos o ponto z_2 da sucessão densa em Ω . A sucessão numérica $(\omega_{2,k})$, sendo $k = n_k$, subsucessão de \mathbb{N} , com $\omega_{2,k} = f_{1,k}(z_2)$, é limitada, pois $\omega_{2,k} \in V_M(0)$ para todo $k = n_k$. Resulta do argumento usado anteriormente, que existe uma subsucessão $(f_{2,n})$ de $(f_{1,k})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2,n}(z_2) = \omega_2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{2,n}(z_1) = \omega_1$$

sendo $\omega_2 \in \overline{V_M(0)}$. Da mesma forma, obtém-se a subsucessão $(f_{3,n})$ da sucessão $(f_{2,n})$ que converge em z_1, z_2, z_3 . De um modo geral, definida a subsucessão $(f_{m,n})$, que converge em z_1, z_2, \dots, z_m , obtém-se a subsucessão $(f_{m+1,n})$ que converge em $z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+1}$. Desta família de sucessões, considere a sucessão diagonal $(f_{p,q})$, que é uma subsucessão de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e que converge em $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$. Então, a sucessão diagonal é de funções holomorfas, equilimitada e converge em um conjunto D denso em Ω . Logo, pela proposição 3 conclui-se que ela converge uniformemente em Ω .

§4. REPRESENTAÇÃO CONFORME DE DOMÍNIOS SIMPLEMENTE CONEXOS

Este parágrafo contém o resultado fundamental do estudo da representação conforme de domínios simplesmente conexos. Ele afirma, que dado um domínio simplesmente conexo do plano complexo estendido, cuja fronteira possui mais de um ponto, existe uma função $\omega = \varphi(z)$, biunívoca e conforme de Ω num disco $|\omega| < R$. Tal φ pode ser determinada de modo que um ponto z_0 corresponda ao centro do disco e mantenha uma direção por z_0 . Com esta condição sobre φ , demonstra-se que ela é única. Este resultado é conhecido sob a denominação de teorema de Riemann, o qual tem consequências importantes. Por exemplo, uma delas é a sua aplicação ao estudo da equação do potencial em um domínio simplesmente conexo do plano \mathbb{R}^2 . No estudo desta equação é importante a existência de uma função associada a Ω , denominada a função de Green de Ω . O teorema de Riemann nos permite, com relativa facilidade, demonstrar a existência de uma função de Green para os domínios simplesmente conexos acima mencionados. Uma outra consequência do teorema de Riemann, embora um tanto banal, é que ele nos diz serem abundantes as funções holomorfas em \mathbb{C} . De fato, para todo Ω nas condições mencionadas existe uma função holomorfa $\omega = \varphi(z)$ definida em Ω com valores num disco $|\omega| < R$.

TEOREMA 1: (RIEMANN) - Seja Ω um domínio simplesmente conexo do plano complexo estendido, tal que sua fronteira $\partial\Omega$ contém mais de um ponto. Então, existe uma função

$$\omega = \varphi(z)$$

que transforma Ω de maneira biunívoca e conforme, sôbre um disco com centro na origem e raio $R > 0$.

Demonstração

Primeira Etapa - Demonstraremos que as funções univalentes em Ω contêm funções limitadas. É claro que o conjunto das funções univalentes em Ω não é vazio, pois êle contém as funções homográficas. Inicialmente, suponhamos Ω limitado. Conclui-se, neste caso, que $f(z) = z$ é univalente e limitada em Ω . Seja Ω não limitado, mas admitamos que o seu exterior contenha um ponto z_0 . Logo, existe um disco $V_\rho(z_0)$ contido no exterior de Ω (exterior de Ω é o complemento do fêcho de Ω). Consideremos a função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

que é univalente em Ω . Sendo $z \in \Omega$, $|z - z_0| > \rho$, logo $|f(z)| < 1/\rho$ para todo $z \in \Omega$, logo f é limitada. Suponhamos Ω não limitado, mas com o exterior vazio. Por hipótese, a fronteira de Ω possui pelo menos dois pontos z' e z'' . Observe que sendo Ω simplesmente conexo, a fronteira de Ω é conexa. Consideremos a função $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$h(z) = \sqrt{\frac{z - z'}{z - z''}}$$

sendo z' , z'' pontos da fronteira de Ω , que é um compacto conexo, resulta que quando z varia em Ω , ficam definidas duas funções holomorfas h_1 e h_2 , diferindo apenas pelo sinal. É simples

verificar que ambas são univalentes em Ω . Se Ω_1, Ω_2 fôrem as imagens de Ω por h_1 e h_2 , segue-se que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ é vazia, porque $h_1(z) = -h_2(z)$ para todo $z \in \Omega$. Conclui-se que se $\omega_0 \in \Omega_2$ existe um disco $V_\rho(\omega_0)$ contido no exterior de Ω_1 . Assim, a função $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{h_1(z) - \omega_0}$$

é univalente. Sendo $\omega_0 \in \Omega_2$, $|\varphi_1(z) - \omega_0| > \rho$, para todo $z \in \Omega$, logo f é limitada, o que completa a primeira etapa da demonstração.

Seja f uma função univalente e limitada em Ω e $z_0 \neq \infty$ um ponto de Ω . Tem-se $f'(z_0) \neq 0$ (§2, proposição 1). Consideremos a $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(z_0)}.$$

Resulta que g é univalente e limitada em Ω , sendo

$$g(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad g'(z_0) = 1.$$

Conclui-se, que fixado um ponto $z_0 \neq \infty$ em Ω , é não vazia a coleção das funções $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, univalentes, limitadas em Ω , tais que $g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) = 1$. Representemos por $U(z_0)$ esta classe de funções.

Consideremos a função real μ definida em $U(z_0)$ por

$$\mu(g) = \sup_{z \in \Omega} |g(z)| > 0$$

Observe que fixada g em $U(z_0)$, o número real positivo $\mu(g)$ representa o raio do menor disco com centro na origem, contendo a imagem de Ω por g .

O conjunto numérico

$$\Lambda = \{ \mu(g); g \in U(z_0) \}$$

possui um ínfimo porque é limitado inferiormente, o qual representaremos por R .

Segunda Etapa - Vamos demonstrar que existe uma função $\varphi \in U(z_0)$ tal que R é o valor de μ nesta função.

De fato, sendo $R = \inf \Lambda$, resulta que existe uma sucessão $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de $U(z_0)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(g_n) = R.$$

Logo, a sucessão numérica $(\mu(g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, portanto limitada. Desta forma, existe um $M > 0$ tal que $\mu(g_n) < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $g_n \in U(z_0)$. Resulta que

$$\sup_{z \in \Omega} |g_n(z)| < M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, a sucessão $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções de $U(z_0)$ é equilimitada em Ω . Conclui-se do teorema de Montel que (g_n) possui uma subsucessão $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, uniformemente convergente no interior de Ω para uma função φ holomorfa em Ω .

Tem-se

$$\varphi(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} g'_{n_k}(z_0) = 1,$$

portanto φ não é constante em Ω , logo φ é univalente (§2 propo

sição 3).

Para todo $z \in \Omega$,

$$\varphi(z) = \lim g_{n_k}(z) \quad \text{e} \quad |g_{n_k}(z)| \leq \mu(g_{n_k}), \quad \text{de onde}$$

obtem-se que para cada $\varepsilon > 0$ existe n_{k_0} tal que

$$|\varphi(z)| < |g_{n_k}(z)| + \varepsilon/2 < R + \varepsilon$$

para $n_k > n_{k_0}$, porque $\mu(g_{n_k}) \rightarrow R$. Portanto, $|\varphi(z)| \leq R$ qualquer que seja $z \in \Omega$.

Conclui-se, dêste modo, que sendo φ univalente, limitada, $\varphi(z_0) = 0$ e $\varphi'(z_0) = 1$, ela será um elemento de $U(z_0)$, o que implica $\sup_{z \in \Omega} |\varphi(z)| \geq R$. Sendo $|\varphi(z)| \leq R$ para $z \in \Omega$, conclui-se que

$$\mu(\varphi) = \sup_{z \in \Omega} |\varphi(z)| = R.$$

Terceira Etapa - Para completar a demonstração do teorema de Riemann provaremos que a função $\omega = \varphi(z)$, tal que $\mu(\varphi)$ é o mínimo de Λ , é uma representação conforme de Ω no disco $V_R(0)$.

De fato, φ é univalente em Ω e $\varphi(\Omega) \subset V_R(0)$, porque $|\varphi(z)| \leq R$ para todo $z \in \Omega$. Resta provar que todo ponto do disco $V_R(0)$ pertence a $\varphi(\Omega)$. Suponhamos que isto não aconteça e provaremos que implica em uma contradição. Com esta hipótese, conclui-se que $V_R(0)$ contém um ponto da fronteira de $\varphi(\Omega)$. Seja ω_0 , $0 < |\omega_0| < R$ um tal ponto. A função

$$\omega_1 = \varphi_1(z) = R^2 \frac{\omega - \omega_0}{R^2 - \omega \bar{\omega}_0}$$

sendo $\omega = \varphi(z)$, $z \in \Omega$, é univalente. Sabe-se que φ_1 é biunívoca e conforme do disco $V_R(0) = \{\omega \in \mathbb{C}; |\omega| < R\}$ em $V_R(0)$, sendo $\varphi_1(\omega_0) = 0$. Para êste resultado veja §2 exemplo 1. Daí, conclui-se que $\varphi_1(\Omega)$ está contido em $V_R(0)$, possuindo $\varphi_1(\omega_0) = 0$ para ponto fronteira.

Quando $\omega \in \varphi(\Omega)$, a raiz quadrada de $(\omega - \omega_0)/(R^2 - \bar{\omega}_0 \omega)$ não muda de sinal. De fato, a mudança de sinal ocorre na raiz quadrada, quando ω descreve caminhos fechados possuindo ω_0 e $R^2/\bar{\omega}_0$ como pontos interiores. Sendo $\varphi(\Omega) \subset V_R(0)$, $0 < |\omega_0| < R$, resulta que $|R^2/\bar{\omega}_0| > R$, logo $R^2/\bar{\omega}_0$ não pertence a $\varphi(\Omega)$. Como ω_0 pertence a fronteira de $\varphi(\Omega)$, não é possível um caminho fechado $\Gamma \subset \varphi(\Omega)$ possuir ω_0 no seu interior. Logo, para $\omega \in \varphi(\Omega)$ a raiz quadrada de $(\omega - \omega_0)/(R^2 - \bar{\omega}_0 \omega)$ não muda de sinal. Portanto, podemos considerar a função

$$\omega_2 = \varphi_2(z) = (R \omega_1)^{\frac{1}{2}}$$

sendo $\omega_1 = \varphi_1(z)$. Sendo φ_1 uma aplicação de $V_R(0)$ em $V_R(0)$, resulta que φ_2 também é uma aplicação de $V_R(0)$ em $V_R(0)$, tendo $\omega_2 = 0$ como imagem de $\omega_1 = 0$. Assim, φ_2 é uma função univalente, tal que $\varphi_2(\Omega) \subset V_R(0)$, sendo $\omega_2 = 0$ um ponto da fronteira de $\varphi_2(\Omega)$.

A função

$$\omega_3 = \varphi_3(z) = R^2 \frac{\omega_2 - \varphi_2(z_0)}{R^2 - \varphi_2(z_0) \omega_2}$$

é univalente, transforma $V_R(0)$ em $V_R(0)$, e $\varphi_2(z_0)$ na origem. Lo-

go, φ_3 é uma aplicação de Ω em $V_R(0)$. A sua derivada em relação a z , no ponto z_0 , é:

$$\varphi_3'(z_0) = \frac{d\omega_3}{d\omega_2} \Big|_{\sqrt{-R\omega_0}} \cdot \frac{d\omega_2}{d\omega_1} \Big|_{-\omega_0} \cdot \frac{d\omega_1}{d\omega} \Big|_0 \cdot \frac{d\omega}{dz} \Big|_{z_0}.$$

Obtem-se:

$$\frac{d\omega}{dz} \Big|_{z=z_0} = \varphi'(z_0) = 1; \quad \frac{d\omega_2}{d\omega_1} \Big|_{\omega_1=-\omega_0} = \frac{R}{2(-R\omega_0)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d\omega_1}{d\omega} \Big|_{\omega=0} = \frac{R^2 - |\omega_0|^2}{R^2}; \quad \frac{d\omega_3}{d\omega_2} = \frac{R^2}{R^2 - R|\omega_0|}$$

Conclui-se que

$$\varphi_3'(z_0) = \frac{R + |\omega_0|}{2(-R\omega_0)^{\frac{1}{2}}}$$

de onde resulta que $|\varphi_3'(z_0)| > 1$ (usamos a desigualdade entre $R^2 + |\omega_0|^2 > 2|\omega_0|R$). Dêste modo, φ_3 não pertence a $U(z_0)$.

A função

$$\omega_4 = \varphi_4(z) = \frac{\varphi_3(z)}{\varphi_3'(z_0)}$$

é univalente, limitada, $\varphi_4(z_0) = 0$, $\varphi_4'(z_0) = 1$. Logo φ_4 é uma função de $U(z_0)$. Sendo

$$|\omega_4| < \frac{R}{|\varphi_3'(z_0)|} < R$$

conclui-se que $\varphi_4(\Omega) \subset V_R(0)$. Resulta que

$$\sup_{z \in \Omega} |\varphi_4(z)| < \frac{R}{|\varphi_3'(z_0)|} < R$$

o que é uma contradição, pois R é o ínfimo dos números

$$\left\{ \sup_{z \in \Omega} |g(z)|; \quad g \in U(z_0) \right\}.$$

Dêste modo fica demonstrada a existência da função $\omega = \varphi(z)$, que é biunívoca e conforme de Ω no disco $V_R(0)$.

Observemos que fixado o domínio simplesmente conexo Ω e o ponto $z_0 \neq \infty$ em Ω , o raio R do disco $V_R(0)$ fica unívocamente determinado. Dêste modo, a função

$$\omega = \psi(z) = \frac{1}{R} \varphi(z),$$

é biunívoca e conforme de Ω no disco $V_1(0)$ de raio um e centro na origem. Esta função satisfaz a condição:

$$\psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) = \frac{1}{R} > 0.$$

A condição $\psi(z_0) = 0$ nos diz que a imagem de $z_0 \in \Omega$ por ψ é o centro do disco. A outra, $\psi'(z_0) > 0$, nos diz que as direções por z_0 não sofrem rotações pela função $\omega = \psi(z)$.

A seguir, demonstraremos a unicidade da representação conforme de Ω no disco $V_1(0)$, que transforma z_0 no centro do disco e conserva as direções por z_0 .

TEOREMA 2. Seja Ω um domínio nas condições do teorema 1 e $z_0 \neq \infty$ um ponto de Ω . Então existe uma única função $\omega = \psi(z)$ que transforma Ω no disco $V_1(0)$, de raio um, de maneira biunívoca

ca e conforme, sendo

$$\psi(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi'(z_0) > 0.$$

Demonstração

De fato, suponhamos que exista outra função $\omega = g(z)$ nas mesmas condições. Então a função $\tilde{\Phi} : V_1(0) \rightarrow V_1(0)$ definida por

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \psi|g^{-1}(\omega)|$$

é biunívoca e conforme, de $V_1(0)$ sobre $V_1(0)$. Ela satisfaz as condições:

$$\tilde{\Phi}(0) = \psi|g^{-1}(0)| = \psi(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\Phi}'(0) = \frac{\psi'(z_0)}{g'(z_0)} > 0.$$

Aplicando o lema de Schwarz, sendo $|\tilde{\Phi}(z)| \leq 1$, obtem-se:

$$|\tilde{\Phi}(\omega)| \leq |\omega|,$$

isto é,

$$|\psi(z)| \leq |g(z)|$$

para todo $z \in \Omega$. Permutando ψ e g resulta

$$|g(z)| \leq |\psi(z)|$$

para todo $z \in \Omega$.

Daf obtem-se

$$|\psi(z)| = |g(z)|$$

para todo $z \in \Omega$, isto é,

$$|\tilde{\Phi}(\omega)| = |\omega|.$$

Do lema de Schwarz no caso em que vale o sinal de igualdade, ob

tem-se:

$$\Phi(\omega) = e^{i\theta} \omega, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Sendo $\Phi'(0) > 0$, devemos ter $e^{i\theta} = 1$, logo

$$\Phi(\omega) = \omega$$

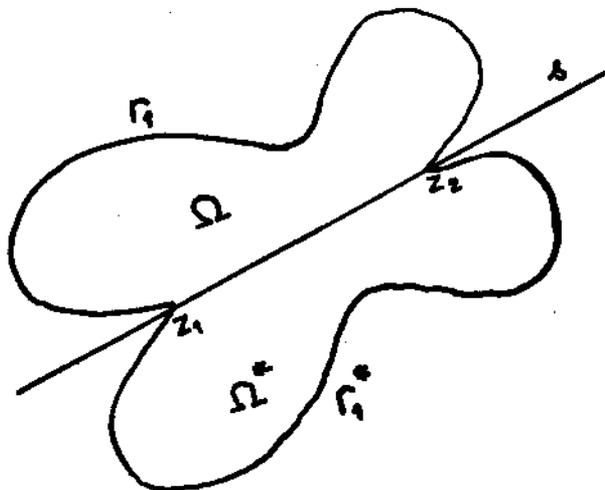
isto é, Φ é a identidade, ou seja, as funções ψ e g coincidem sobre Ω .

§5. PRINCÍPIO DE SIMETRIA. FÓRMULA DE SCHWARZ-CHRISTOFFELL

O objetivo principal deste parágrafo, é estabelecer a fórmula de Schwarz-Christoffell, que dá a representação biunívoca e conforme de um polígono sobre um semiplano. Inicialmente, será demonstrado um resultado básico, conhecido sob a denominação de princípio de simetria de Schwarz, que consiste em obter um prolongamento holomorfo de uma função holomorfa, em determinadas condições sobre a fronteira do domínio no qual a função está definida, conforme as considerações que faremos a seguir. Seja $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em um conjunto E e Ω um domínio contendo E . Denomina-se prolongamento holomorfo de f ao domínio Ω , a uma função holomorfa $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\varphi(z) = f(z)$ para todo $z \in E$. Do teorema de identidade para funções holomorfas, deduz-se que se E possui um ponto de acumulação $z_0 \in \Omega$, então φ é o único prolongamento holomorfo de f ao domínio Ω .

Consideremos um segmento de reta γ de extremos z_1, z_2 , sendo s a reta suporte de γ . Representemos por Γ_1 um caminho com

extremos z_1, z_2 , situado em um mesmo semiplano de \mathbb{C} determinado por s . Dêste modo, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \gamma$ é um caminho fechado cujo interior vamos representar por Ω . Seja Ω^* o simétrico de Ω em relação a s , e Γ_1^* o caminho simétrico de Γ_1 em relação a s . Como será demonstrado, veja teorema 1, o princípio de simetria de Schwarz nos garante o prolongamento holomorfo a Ω^* de uma função f holomorfa em Ω . Quando z_1, z_2 forem números reais, a reta s é o eixo real, isto é, $\text{Im } z = 0$. Neste caso, o domínio Ω^* é constituído dos números complexos conjugados dos elementos de Ω , análogamente os pontos de Γ_1^* . Um domínio como o anterior, cuja fronteira compõe-se de um segmento de reta γ e contido no semi plano determinado pelo suporte s de γ que não contem s , denomina-se suportado por γ . O domínio Ω^* é denominado o simétrico de Ω .



TEOREMA 1: (Princípio de Simetria). Consideremos um domínio Ω suportado por um segmento de reta γ , cuja fronteira compõe-se de um caminho Γ e de γ . Seja $\omega = f(z)$ uma função contínua em $\Omega \cup \gamma$, holomorfa em Ω e real para todo z pertencente a γ . Então existe um prolongamento holomorfo φ de f ao domínio simétrico Ω^* , tal que se z^* for o simétrico de $z \in \Omega$, então $\varphi(z^*)$ será o simétrico de $f(z)$ em relação ao suporte do segmento $\Delta =$

$= f(\gamma)$.

Demonstração

Consideremos o domínio $\Omega \cup \Omega^*$ cuja fronteira $\Gamma_1 \cup \Gamma_1^*$ suporemos orientada. Sendo Ω suportado por γ , resulta que Ω é o interior do caminho $\Gamma_1 \cup (+\gamma)$ e Ω^* o interior de $\Gamma_1^* \cup (-\gamma)$. (Note que a orientação de γ fica determinada pela de $\Gamma_1 \cup \Gamma_1^*$.)

Seja

$$f^*: \Omega^* \cup \gamma \rightarrow \mathbb{C}$$

a função definida por $\omega^* = f^*(z^*)$, sendo ω^* o número complexo simétrico de $\omega = f(z)$ em relação ao suporte de $\Delta = f(\gamma)$, sendo z^* o simétrico de z em relação ao suporte de γ . Demonstraremos que f^* é holomorfa em Ω^* . Para isto, suponhamos que se tenha feito uma homografia no plano complexo \mathbb{C} , que leve a reta s , suporte de γ , no eixo real $\text{Im } z = 0$. Já demonstramos que pontos simétricos correspondem a pontos simétricos por homografias, no caso geral de inversão em relação a uma circunferência. Além disto, as transformações homográficas conservam a continuidade e holomorfia das funções. Portanto, não há particularização em supor que s é o eixo real. Com esta hipótese em mente, seja z_0 um ponto qualquer de Ω . Sendo ela holomorfa tem-se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in V_R(z_0) \subset \Omega$. Tomando os conjugados, obtém-se:

$$\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n$$

para todo $\bar{z} \in V_R(\bar{z}_0)$. Sendo $z^* = \bar{z}$ o simétrico de z e $\overline{f(z)}$ o simétrico de $f(z)$, obtem-se $f^*(z^*) = \overline{f(z)}$, isto é,

$$f^*(z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n (z^* - z_0^*)^n$$

para todo $z^* \in V_R(z_0^*)$. Resulta que f^* é holomorfa em Ω^* .

Sendo f^* holomorfa em Ω^* , resulta que ela é aí contínua. Demonstramos que ela é contínua em $\Omega^* \cup \gamma$. De fato, seja $z_0 = x_0$ um ponto qualquer de γ . Sabe-se que f é contínua em $\Omega \cup \gamma$, por hipótese, sendo ela real sôbre γ . Resulta que se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, obtem-se

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega \cup \gamma}} f(z) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in \Omega \cup \gamma}} u(x,y) = u(x_0, 0),$$

concluindo-se que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in \Omega \cup \gamma}} v(x,y) = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\substack{z^* \rightarrow z_0^* \\ z^* \in \Omega^* \cup \gamma}} f^*(z^*) = \lim_{\substack{z \rightarrow x_0 \\ z \in \Omega \cup \gamma}} \overline{f(z)} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in \Omega \cup \gamma}} |u(x,y) -$$

$$-iv(x,y)| = u(x_0,0) = f(x_0) = f^*(z_0^*).$$

Para completar a demonstração do teorema, consideremos a função

$$\varphi: \Omega \cup \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$$

definida do seguinte modo:

$$\varphi(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega \\ f(z) = f^*(z^*) & \text{se } z^* = z \in \gamma \\ f^*(z^*) & \text{se } z^* \in \Omega^* \end{cases}$$

Demonstremos que φ é holomorfa em $\Omega \cup \Omega^*$. Para demonstrar este fato, usaremos o teorema integral de Cauchy, no caso em que a função no integrando é apenas contínua sobre o caminho fechado e holomorfa em seu interior. Seja z' um ponto qualquer de $\Omega \cup \Omega^*$ e provaremos que φ é holomorfa em z' . Seja Γ um caminho fechado contido em $\Omega \cup \Omega^*$, contendo z' em seu interior, e de modo que êle intersepte γ , no máximo, em dois pontos distintos, ζ_1, ζ_2 . Seja δ o segmento de reta $\zeta_1 \zeta_2$. Logo Γ decompõe-se em Γ' e Γ'' , dois caminhos com extremos ζ_1 e ζ_2 , sendo $\Gamma' \subset \Omega$ e $\Gamma'' \subset \Omega^*$.

Suponhamos $z' \in \Omega$. Tem-se pela fórmula de Cauchy

$$\varphi(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\delta} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z'} + \frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma'} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z'}$$

Sendo $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z'}$ holomorfa em Ω^* , pois $z' \in \Omega$, resulta do teorema de Cauchy que a integral desta função sobre $+\Gamma'' \cup (-\delta)$ é nula, portanto,

$$0 = \int_{-\delta} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z'} + \int_{+\Gamma''} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z'}$$

Adicionando as duas últimas igualdades, resulta que

$$\varphi(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z'}$$

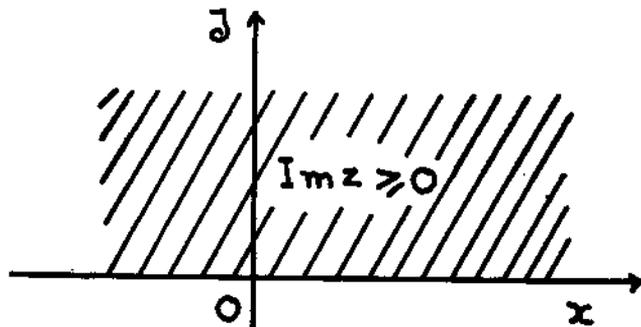
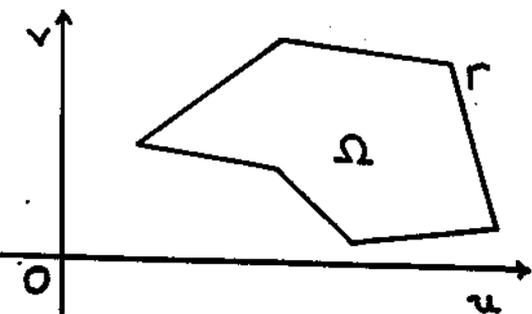
para todo $z' \in \Omega$ ou $z' \in \Omega^*$, pois $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$. Sendo φ contínua sobre δ , esta fórmula é válida quando z' é um ponto interior a δ . Logo, sendo

$$z' \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z'}$$

uma função holomorfa para z' no interior de Γ , conclui-se que φ é holomorfa em z' . Fica completa a demonstração do teorema 1.

1. Representação Conforme de um Polígono num Semi Plano:

A seguir estudaremos a função que representa de maneira biunívoca e conforme, um polígono de n lados no semiplano $\text{Im}z \geq 0$, transformando a fronteira do polígono na reta $\text{Im}z = 0$. De fato, seja Γ uma poligonal simples, fechada, com n lados, isto é, um particular caminho simples, fechado, do plano complexo, como observa-se na figura.



O interior de Γ representaremos por Ω e o conjunto $\Omega \cup \Gamma$ será denominado um polígono de n lados, o qual representaremos por P . Pelo teorema de Riemann, existe uma função $z = f(\omega)$ biunívoca e conforme, do polígono P no semi plano $\text{Im}z > 0$, de modo que quando ω varia sôbre Γ com uma orientação fixa, sua imagem $z = f(\omega)$ varia sôbre $\text{Im}z = 0$ de $-\infty$ a $+\infty$. A questão principal a resolver é obter uma expressão de f em função dos vértices e dos ângulos da poligonal Γ , expressão esta conhecida sob a denominação de Fórmula de Schwarz-Christoffell. Consideremos a função inversa f^{-1} da f , a qual representaremos por φ . Vamos estudar a função $\omega = \varphi(z)$ quando z varia no semi plano $\text{Im}z > 0$.

Seja z_0 um ponto no semiplano $\text{Im}z > 0$ e ω_0 o seu correspondente no interior de P , isto é, $\omega_0 = \varphi(z_0)$. Sendo φ univalente, resulta que $\varphi'(z_0) \neq 0$ e

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + \frac{\varphi'(z_0)}{1!} (z-z_0) + \frac{\varphi''(z_0)}{2!} (z-z_0)^2 + \dots$$

em um disco $V_R(z_0)$ contido em $\text{Im}z > 0$. Tem-se, sendo $\omega = \varphi(z)$,

$$\omega - \omega_0 = (z-z_0) \psi(z-z_0)$$

sendo ψ holomorfa em $V_R(z_0)$ com $\psi(0) \neq 0$. Este resultado é válido do qualquer que seja o ponto z_0 em $\text{Im}z > 0$.

Suponhamos que $\omega_0 = \varphi(z_0)$ pertença a um lado Γ_1 da poligonal Γ , sendo ω_0 distinto dos extremos de Γ_1 , isto é, dos vértices situados em Γ_1 , como mostra a figura. Seja $k\pi$ a medida do ângulo formado pela direção positiva do eixo $\text{Im}\omega = 0$ com a direção de Γ_1 .

Desta forma, quando ω pertence a Γ_1 , tem-se $\arg(\omega - \omega_0) = h\pi$ se ω segue ω_0 e $\arg(\omega - \omega_0) = k\pi + \pi$ se ω precede ω_0 . Consideremos a função

$$g(\omega) = (\omega - \omega_0) e^{-k\pi i}$$

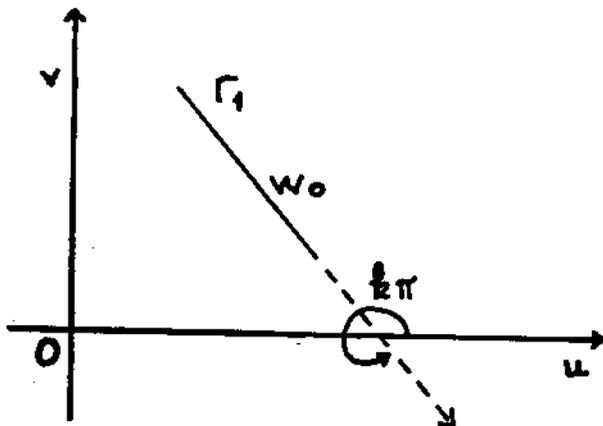
para ω pertencente ao polígono P e $\omega_0 \in \Gamma_1$, mas distinto dos extremos. Segue-se que g é holomorfa no interior de P . Fazendo $\rho = |\omega - \omega_0|$ para $\omega \in \Gamma_1$, conclui-se que g é contínua em Γ_1 , sendo negativa quando ω precede ω_0 , $g(\omega_0) = 0$ e positiva quando ω segue ω_0 . Logo, pelo princípio de simetria conclui-se que g é holomorfa em ω_0 . Da mesma forma, $h(z) = g(\varphi(z)) = g(\varphi(z))$ é holomorfa em z_0 , sendo $h'(z_0) \neq 0$, onde $\varphi(z_0) = \omega_0$. Logo, sendo $h(z_0) = 0$, obtém-se

$$h(z) = (z - z_0) \psi_1(z - z_0) \quad (1)$$

sendo ψ_1 uma função holomorfa em z_0 , com $\psi_1(0) \neq 0$. Substituindo $h(z)$ obtém-se

$$(\omega - \omega_0) e^{-k\pi i} = (z - z_0) \psi_1(z - z_0)$$

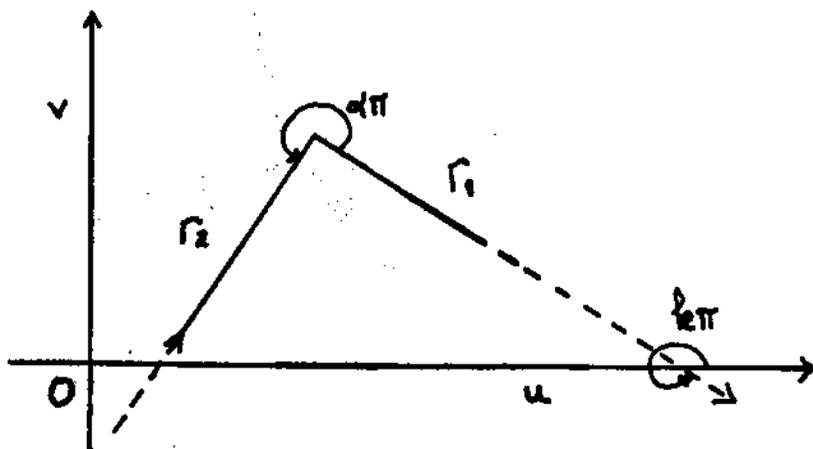
Observe que $(z - z_0) \psi_1(z - z_0)$ é real para $\text{Im}z = 0$, pois para tais z , $\omega = \varphi(z)$ pertence a Γ . Conclui-se que



$$\omega - \omega_0 = e^{-k\pi i} (z - z_0) \psi_1(z - z_0).$$

Falta analisar o caso em que ω_0 coincide com um dos vértices da poligonal Γ . Sejam Γ_1 e Γ_2 dois lados consecutivos de Γ com o vértice comum ω_0 , como na figura.

Suponhamos que o ângulo interno de Γ em ω_0 tenha sua medida igual a $\alpha\pi$. Sendo $\omega - \omega_0 = \rho e^{i\theta}$, tem-se $\theta = k\pi$ para $\omega \in \Gamma_1$ e $\theta = k\pi + \alpha\pi$ quando $\omega \in \Gamma_2$. Consideremos a função g_1 definida sobre Γ por



$$g_1(\omega) = [(\omega - \omega_0)e^{-k\pi i}]^{1/\alpha}$$

ou

$$g_1(\omega) = \rho^{1/\alpha} e^{\frac{\theta - k\pi}{\alpha} i}$$

Se $\omega \in \Gamma_1$, $\theta = k\pi$ e $g_1(\omega) = \rho^{1/\alpha}$. Se $\omega \in \Gamma_2$, $\theta = k\pi + \alpha\pi$ e $g_1(\omega) = -(\rho^{1/\alpha})$. Tem-se $g_1(\omega_0) = 0$. Portanto g_1 é uma função holomorfa no interior do polígono P , contínua e real sobre $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Do princípio de simetria de Schwarz, segue-se que g_1 é holomorfa em ω_0 . Se $\omega_0 = \varphi(z_0)$, conclui-se que $h_1(z) = g_1(\omega(z)) = g_1(\varphi(z))$ é holomorfa em z_0 , sendo $h_1'(z_0) \neq 0$. Portanto, podemos escrever

$$g_1(\omega) = (z - z_0) \psi_2(z - z_0)$$

sendo ψ_2 holomorfa em z_0 , com $\psi_2(0) \neq 0$. Obtem-se

$$[g_1(\omega)]^\alpha = (z-z_0) \psi_3(z-z_0)$$

ou

$$\omega - \omega_0 = e^{ik\pi} (z-z_0)^\alpha \psi_3(z-z_0) \quad (2)$$

com ψ_3 holomorfa em z_0 com $\psi_3(0) \neq 0$.

Examinemos o caso em que ω_0 é a imagem do ponto $z_0 = \infty$. Para tal é suficiente considerar a aplicação $z \rightarrow 1/z$ que leva $z_0 = \infty$ na origem, repetindo-se o raciocínio usado. Obtem-se

$$\omega - \omega_0 = e^{ik\pi} z^{-\alpha} \psi_4(1/z) \quad (2')$$

com ψ_4 holomorfa na origem $\psi_4(0) = 0$.

Convencionando que quando $\omega_0 \in \Gamma$ sem ser vértice, faz-se $\alpha = 1$, isto é, o ângulo em ω_0 é π , conclui-se que a fórmula (1) é caso particular de (2). Usaremos esta convenção.

2. Fórmula de Schwarz-Christoffel. Iniciemos observando que em (2) há duas constantes, o ponto ω_0 e o número real k . Para eliminar ω_0 é suficiente derivar ambos os membros de (2) em relação a z , obtendo-se

$$\frac{d\omega}{dz} = e^{ik\pi} (z-z_0)^{\alpha-1} \psi_5(z-z_0) \quad (3)$$

na qual só aparece a constante k . Para eliminar k , é suficiente tomar o logaritmo de ambos os membros e derivar em relação a z , obtendo a função

$$S(\omega) = \frac{d}{dz} \log \frac{d\omega}{dz}$$

que não mais depende de ω_0 e k . Passemos ao estudo das propriedades de ω .

a) Tem-se $\frac{d\omega}{dz} \neq 0$ no semi plano $\text{Im}z > 0$, logo $\log \frac{d\omega}{dz}$ é bem definido e holomorfo neste domínio. Assim $\frac{d}{dz} \log \frac{d\omega}{dz}$ existe neste domínio.

b) Seja z_0 pertencente a reta $\text{Im}z_0 = 0$ e $\omega_0 = \varphi(z_0)$ pertencente a poligonal Γ . Suponhamos que ω_0 seja um vértice de Γ cujo ângulo mede $\alpha\pi$. Tem-se de (3) que ψ_5 é holomorfa com $\psi_5(0) \neq 0$ mesmo quando $\alpha = 1$, sendo ψ_5 real sobre $\text{Im}z = 0$. Logo, tomando logaritmos em (3) e derivando membro a membro, obtém-se:

$$S(\omega) = \frac{\alpha - 1}{z - z_0} + \psi_6(z - z_0) \quad (4)$$

sendo ψ_6 holomorfa em z_0 e real sobre $\text{Im}z = 0$. Dêste modo, se $\text{Im}z = 0$, no caso b) em estudo, sendo $\omega = \varphi(z)$, $S(\omega)$ será real. Quando $\omega_0 = \varphi(z_0)$, pertence a Γ e não é vértice, tem-se $\alpha = 1$, logo de (4) conclui-se que $S(\omega)$ é holomorfa. Portanto, $\frac{d}{dz} \log \frac{d\omega}{dz}$ é holomorfa sobre $\text{Im}z = 0$, exceto nos pontos z_0 que correspondem a vértices de P , nos quais possui polos simples com resíduo $\alpha - 1$, sendo $\alpha\pi$ a medida do ângulo de Γ neste ponto.

c) Suponhamos $z_0 = \infty$. Neste caso, considera-se a (2'), obtendo-se

$$\frac{d\omega}{dz} = e^{ikr} \frac{1}{z^{\alpha+1}} \psi_6\left(\frac{1}{z}\right)$$

sendo ψ_6 holomorfa em 0 com $\lim_{z \rightarrow \infty} \psi_6\left(\frac{1}{z}\right) \neq 0$. No caso $\alpha = 1$, $z_0 =$

∞ não corresponde a vértice. Tomando logaritmos e derivando, obtem-se:

$$\frac{d}{dz} \log \frac{d\omega}{dz} = -\frac{\alpha+1}{z} + \psi_7\left(\frac{1}{z}\right)$$

sendo $\lim_{z \rightarrow \infty} \psi_7\left(\frac{1}{z}\right) = 0$. De fato, isto decorre de (2') escrita sob a forma

$$\omega - \omega_0 = e^{ik\pi} z^{-\alpha} \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right)$$

a manipulação com derivadas, logaritmo e inversão de séries.

Do estudo do comportamento de $\frac{d}{dz} \log \frac{d\omega}{dz}$ em $\text{Im}z \gg 0$, deduz-se, do princípio de simetria de Schwarz, que existe uma função $\omega = \bar{\Phi}(z)$, holomorfa em \mathbb{C} exceto em um número finito de polos sobre a reta $\text{Im}z = 0$, tal que a restrição de $\bar{\Phi}$ ao semi plano $\text{Im}z \geq 0$ (excetos os pontos que são polos) é igual a $\frac{d}{dz} \log \frac{d\omega}{dz}$. Observe que $\lim_{z \rightarrow \infty} \bar{\Phi}(z) = 0$.

Sejam

$$\omega_1 = \varphi(z_1), \quad \omega_2 = \varphi(z_2) \dots \omega_n = \varphi(z_n)$$

os vértices do polígono, cujas medidas dos ângulos internos são, respectivamente,

$$\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi,$$

de onde resulta que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2$. Pelo que acabamos de concluir sobre a função $\bar{\Phi}$, conclui-se que a função

$$z \rightarrow \bar{\Phi}(z) - \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r - 1}{z - z_r}$$

é holomorfa em todo o plano complexo e no infinito. Portanto, pelo teorema de Liouville, ela é constante, isto é,

$$\Phi(z) = C + \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r - 1}{z - z_r}$$

sendo $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = 0$, conclui-se que $C = 0$, isto é

$$\Phi(z) = \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r - 1}{z - z_r}$$

para todo z no campo de definição de Φ . Logo, se $\text{Im}z > 0$, obtem-

se:

$$\frac{d}{dz} \log \frac{d\omega}{dz} = \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r - 1}{z - z_r} \quad (5)$$

ou

$$\log \frac{d\omega}{dz} = \log C + \sum_{r=1}^n (\alpha_r - 1) \log(z - z_r)$$

isto é,

$$\frac{d\omega}{dz} = C(z - z_1)^{\alpha_1 - 1} (z - z_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - z_n)^{\alpha_n - 1}$$

isto é,

$$= C \int_{z_0}^z (\zeta - z_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - z_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - z_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + C'$$

Podemos eliminar C' considerando a translação $\omega - C'$. Tomando a rotação $\theta \rightarrow e^{-i\theta}$, sendo $C = |C|e^{i\theta}$, podemos supor C um número real R . Portanto, $\omega = \varphi(z)$ é dada por

$$\omega = R \int_{z_0}^z (\zeta - z_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - z_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - z_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta \quad (6)$$

que é denominada fórmula de Schwarz-Christoffel.

Observe que se $z_n = \infty$, de (5) conclui-se que o somatório

vai até $n-1$, resultando que a fórmula é análoga, apenas com $n-1$ fatores no produto do integrando.

Na integral (6), z_1, z_2, \dots, z_n são números reais cujas imagens por φ são os vértices $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ do polígono P . Quando $|\zeta| \rightarrow \infty$ o integrando de (6) se comporta como $|\zeta|^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - n}$, portanto a integral converge, pois sabemos que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - n = -2$.

3. Representação de um Polígono num Disco - Consideremos a função homográfica

$$\omega = \frac{z-i}{z+i}$$

Quando z é real, $|\omega| = 1$, concluindo-se que quando z varia sobre a reta $\text{Im}z = 0$ de $-\infty$ a $+\infty$, ω descreve a circunferência $|\omega| = 1$. Para os z no semi plano $\text{Im}z > 0$, isto é, $z = x + iy$, $y > 0$, tem-se: $x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2$, logo $|\omega| < 1$. Resulta, que $\text{Im}z > 0$ é transformado em $|\omega| < 1$. Dêste modo, a função $\omega = (z-1)/(z+i)$, é biunívoca e conforme, do semi plano $\text{Im}z \geq 0$ sobre o disco $|\omega| \leq 1$, de modo que $+i$ se transforma no centro do disco e a reta $\text{Im}z = 0$ na circunferência $|\omega| = 1$.

Para obtermos a função que representa um polígono num disco, é suficiente fazermos a mudança de variáveis

$$t = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

na integral (6). Daí, obtem-se,

$$\zeta = i \frac{1+t}{1-t}.$$

Fazendo

$$\zeta_k = \frac{z_k - i}{z_k + i}$$

sendo os z_k os números reais que correspondem aos vértices, obtem-se $|\zeta_k| = 1$. Logo,

$$z_k = i \frac{1 + \zeta_k}{1 - \zeta_k}$$

e

$$\zeta - z_k = i \left[\frac{1+t}{1-t} - \frac{1+\zeta_k}{1-\zeta_k} \right] = \frac{2i}{1-\zeta_k} \frac{t-\zeta_k}{1-t}$$

sendo

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2i}{(1-t)^2}$$

A integral (6) se transforma em:

$$\omega(t) = K \int_{t_0}^t (\sigma - \zeta_1)^{\alpha_1 - 1} (\sigma - \zeta_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\sigma - \zeta_n)^{\alpha_n - 1} d\sigma \quad (7)$$

Note que quando ζ varia no semi plano $\text{Im}z \geq 0$ t varia no disco $|\omega| \leq 1$. Na integral (7) tem-se $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ são pontos da circunferência unitária, t varia no disco $|t| \leq 1$. Na fórmula (7) K é uma constante complexa.