MONOGRAFIAS
XXIX

(série didática)

RELATIVIDADE ESPECIAL

por

COLBER G. OLIVEIRA
e
ANTONIO F. DA F. TEIXEIRA

RIO DE JANEIRO BRASIL

INTRODUÇÃO:

Esta monografia corresponde ao curso de Relatividade Especial ministrado no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, em seu programa de pós-graduação em física.

Trata-se de um curso de um semestre, dado pela primeira vez em 1970; as " Notas de Aulas" redigidas nêsse ano foram ampliadas e alteradas em alguns pontos em 1971, daí surgindo a presente versão.

Como referências bibliográficas aconselháveis ao leitor, além das enumeradas na pág. 110, indicamos:

1. Introduction to special relativity - H. Schwartz (Mc Graw Hill, 1968)

2. Introduction to the theory of relativity - P.G. Bergmann (Prentice-Hall)

Agradecemos ao chefe do Depto. de Intercâmbio Cultural (Almte. Lins de Barros) o interêsse e apôio à publicação desta, e à Srta. Maria Gema a paciência e esfôrço no serviço datilográfico.

Agôsto de 1971.

Colber G. Oliveira

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira

Índice

RELATIVIDADE ESPECIAL

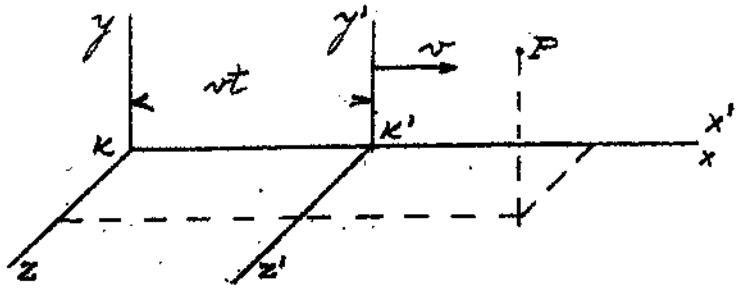
1. AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ E O ESPAÇO-TEMPO DA RELATIVIDADE ESPECIAL

1.1 Os fundamentos da relatividade especial

A mecânica Newtoniana e sua representação Lagrangeana usual estão baseadas sôbre o conceito de tempo absoluto, o mesmo para todos os observadores. Ao se efetuar uma transformação de coordenadas o intervalo de tempo entre dois eventos, que é uma informação física, é considerando invariante. Em particular, entre os referenciais Cartesianos do espaço Newtoniano (o espaço tri-dimensional intuitivo usual) as transformações são descritas pelas fórmulas de Galileo; não será considerada aqui a generalização dessas fórmulas que permite passagem a referenciais acelerados.

Chamam-se sistemas inerciais ou Galileanos, os referenciais que se movem uniformemente (sem aceleração) relativamente uns aos outros ; a todos êles se atribue a capacidade de determinar o intervalo de tempo entre dois dados eventos sempre da mesma maneira, e se supõe que o resultado dessa determinação conduz sempre ao mesmo valor.

Para melhor esclarecer esta questão considere-se 2 observadores com movimento relativo ao longo do eixo X. Um ponto P do 3-espaço terá, com respeito a êsses 2 observadores, um conjunto diferente de coordenadas. Em K o ponto P terá coordenadas (x, y, z). No caso de K'



se mover com velocidade constante v ao longo do eixo Ox , e de o tempo ser contado a partir do instante em que os dois referenciais coincidirem, então as coordenadas de P no referencial K' serão, no instante t, $(x-vt, y, z)$. Portanto a transformação Galileana das coordenadas (que relaciona as informações dos 2 observadores) é, marcadas com linha (') as coordenadas em K',

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Segue-se dessa lei que a combinação das velocidades é feita segundo a regra de combinação usual : se K" se move com respeito a K' velocidade v_1, e êle com respeito a K com velocidade v_2, então K" se move com respeito a K com velocidade $v_1 + v_2$. Em particular, se uma fonte de luz é ligada a K' e essa luz é emitida de K' com velocidade c, ao longo da direção positiva do eixo x', o observador K diria que essa luz está se propagando com velocidade $c+v_1$; esta conclusão mostrou-se incorreta na experiência de Michelson e Morley.

Como as equações de Maxwell não são invariantes sob transformações de Galileo, e como são essas as equações que regem a propagação da luz, fica explicado parcialmente o fracasso do esquema Newtoniano na descrição de fenômenos luminosos.

A fim de eliminar essas dificuldades, Einstein rejeitou a noção de tempo comum a todos os observadores. Com isso, êle propôs um princípio de relatividade mais restritivo que o princípio Galileano de relatividade; êste último afirma que a posição dos corpos no 3-espaço é relativa ao particular referencial escolhido. O princípio de Einstein da relatividade afirma que, além disso, também a simultaneidade de 2 eventos é relativa ao particular referencial escolhido. Em uma nova linguagem, impõe que cada observador Galileano deva possuir, além das suas 3 coordenadas espaciais, também uma coordenada temporal para a descrição de um evento tal como a posição ocupada por uma partícula em um dado momento.

A êsses 4 dados que caracterizam um evento faz-se corresponder um ponto em um espaço 4-dimensional. Diferentes observadores atribuirão a êste evento diferentes conjuntos de 4 valores. A fim de simplificar o tratamento só serão consideradas coordenadas espaciais Cartesianas x, y, z. Assim, a um evento tal como a chegada de um sinal luminoso a um especificado ponto P, dois observadores podem atribuir 2 conjuntos diferentes de números t, x, y, z e t', x', y', z'.

As transformações de Galileo são lineares e se limitam a alterar apenas as 3 coordenadas espaciais (x, y, z) para (x', y', z'). Elas expressam nada mais que o princípio da relatividade da posição, ou o princípio Galileano de relatividade. É sabido hoje que essas transformações são apenas um caso particular da relatividade de Einstein, expressa pelas transformações de Lorentz. O princípio da relatividade especial contido nas fórmulas das transformações de Lorentz ainda pode ser generalizado; é essa a razão da palavra "especial". A generalização conduz à teoria da relatividade geral.

Deve-se ainda observar que o grupo homogêneo de Lorentz, de 6 parâmetros, é sub-grupo do grupo de Poincaré, de 10 parâmetros, também denominado grupo inomogêneo de Lorentz: e que êste é um subgrupo do grupo conforme, de 15 parâmetros. O tratamento dos grupos de Poincaré e conforme não será feito nêste curso.

No esquema Galileo-Newtoniano (ou Lagrangeano usual) o tempo t era considerado um parâmetro independente, comum a todos os observadores. No esquema Einsteiniano ainda se pode usar t como parâmetro para a descrição da evolução de um sistema; há entretanto necessidade de ser encontrado um nôvo parâmetro a fim de que se possa construir um esquema Lagrangeano covariante para o grupo de Lorentz; êste parâmetro deverá ser um invariante 4-dimensional, semelhantemente ao invariante 3-dimensional, tempo, do esquema Galileano. As 4 quantidades t, x, y, z serão agora funções do nôvo parâmetro, e a forma dessa dependência representará as equações do movimento do sistema no espaço-tempo. Mais adiante serão revistas estas considerações.

Como as coordenadas Cartesianas e o tempo não tem as mesmas dimensões, deve-se multiplicar t por uma velocidade invariante a fim de se ter homogeneidade nas 4 variáveis. Einstein postulou que a velocidade c da luz no vácuo é um invariante, o que foi sugerido pelo resultado negativo da experiência de Michelson-Morley. Note-se que êsse postulado, aliado ao princípio da relatividade especial, forma a base sôbre a qual se assenta tôda a teoria.

Êste será o esquema seguido nêste curso; as transformações de Lorentz serão obtidas a partir dêsses 2 postulados. É possível porém postular-se as transformações de Lorentz e daí obter-se a invariância de c.

O que será visto a seguir é a obtenção das transformações de Lorentz. Introduz-se na variedade 4-dimensional uma forma quadrática que conecte dois eventos (t, x, y, z) e

$(t+\Delta t,\ x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, essa forma sendo denominada de intervalo entre os eventos,

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad . \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

Diz-se que essa forma tem assinatura -2, significando usar-se também assinatura $+2$ $(-1,+1,+1,+1)$; convém notar que após escolher uma assinatura não mais se pode usar a outra.

Há ainda quem prefira usar, ao invés das métricas pseudo-Euclidianas anteriores, uma métrica Euclidiana 4-dimensional com $x^4 = ict$ em vez das $x^0 = ct$ anteriores; nêste caso todos os coeficientes são $+1$, que é o que dá característica Euclidiana a êsse espaço.

Define-se transformação de Lorentz como qualquer transformação homogênea e linear das coordenadas que deixa invariante a forma quadrática (1-1-1); a imposição da homogeneidade exclui as translações espaço-temporais, e a imposição da linearidade é consequência da exigência adicional de que um movimento retilíneo e uniforme de uma partícula em um referencial inercial mantenha essas características em qualquer outro referencial inercial. Serão excluidas nêste curso as transformações de inversão que atuam da forma

$T:\quad t'=-t \quad x'=x$ (inversão temporal),

$P:\quad t'=t \quad \vec{x}'=-\vec{x}$ (inversão espacial) e

$TP:\quad t'=-t \quad \vec{x}'=-\vec{x}$ (inversão espaço-temporal),

as quais também mantêm o intervalo invariante. Com a exclusão destas transformações o conjunto resultante constitui o chamado grupo próprio de Lorentz; com a inclusão de T, P, TP obtem-se o grupo impróprio de Lorentz, e com a inclusão adicional das translações espaço-temporais obtém-se o grupo de Lorentz impróprio inomògêneo, ou grupo impróprio de Poincaré.

Usa-se a notação

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^\alpha) \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

os índices gregos variando de 0 a 3; as transformações de Lorentz (lineares e homogêneas) das coordenadas são escritas em forma compacta

$$x^\alpha \to x'^\alpha = L^\alpha{}_\beta \, x^\beta \quad . \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

Define-se a matriz

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad (1\text{-}1\text{-}3a)$$

nota-se que ela é simétrica ($\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$, ou seja, $\eta^T = \eta$) e que tem por quadrado a matriz unidade 4x4 ($\eta^2 = 1$). Por atuação de uma transformação de Lorentz,

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \qquad ;$$

e como $\Delta x'^\mu = L^\mu{}_\alpha \Delta x^\alpha$,

vem que $\eta_{\mu\nu} L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta \Delta x^\alpha \Delta x^\beta = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$;

como Δx^μ são arbitrários, obtem-se por apropriada mudança de índices

$$\eta_{\mu\nu} L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad . \qquad (1\text{-}1\text{-}4)$$

Aqui $L^\mu{}_\alpha$ é o elemento (linha μ, coluna α) da matriz L; designando por L^T a matriz transposta de L, escreve-se

$$L^T \eta L = \eta \quad . \qquad (1\text{-}1\text{-}5)$$

Diz-se então que a matriz L é pseudo-ortogonal.

Como η é simétrica, a (1-1-5) representa 10 relações independentes entre os 16 elementos matriciais $L^\mu{}_\nu$. Há portanto apenas 6 elementos independentes entre êsses 16. Isso significa que o grupo de Lorentz é caracterizado por 6 parâmetros; dêsses, 3 correspondem aos ângulos da orientação espacial relativa entre K e K', e 3 correspondem à velocidade relativa. Tal correspondência já havia sido sugerida pela imposição da linearidade e homogeneidade nas transformações.

Considere-se uma transformação de Lorentz infinitesimal: como o grupo é contínuo a partir da tansformação identidade, pode-se escrever

$L^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \lambda^{\mu}{}_{\nu}$

ou compactamente $\quad L = 1 + \lambda \quad$;

Então a (1-1-4) toma a forma

$$\eta_{\mu\nu}(\delta^{\mu}_{\alpha} + \lambda^{\mu}{}_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} + \lambda^{\nu}{}_{\beta}) = \eta_{\alpha\beta} \;,$$

que em 1ª órdem, com $\lambda^{\mu}{}_{\nu} \ll \delta^{\mu}_{\nu}$, é

(1-1-6) $$\eta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\nu}\lambda^{\nu}{}_{\beta} + \eta_{\mu\beta}\lambda^{\mu}{}_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} \quad ;$$

define-se a matriz infinitesimal $\epsilon = \eta\lambda$ de elementos

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\nu}\lambda^{\nu}{}_{\beta} \quad ,$$

e verifica-se da (1-1-6) que essa matriz é antissimétrica,

$\epsilon = -\epsilon^{T}$.

Como $\eta^{2} = 1$, tem-se que $\eta\epsilon = \eta^{2}\lambda = \lambda$ e portanto

(1-1-8) $$L = 1 + \eta\epsilon$$

com ϵ antissimétrica ; esta é a solução infinitesimal da (1-1-5).

As expressões gerais da $\epsilon_{\alpha\beta}$ e $\lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ são convenientemente escritas definindo-se os 6 parâmetros infinitesimais $\delta\theta_i$ e $\delta\nu_i$ (i=1,2,3) por

$\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ijk}\,\delta\theta_k$ e

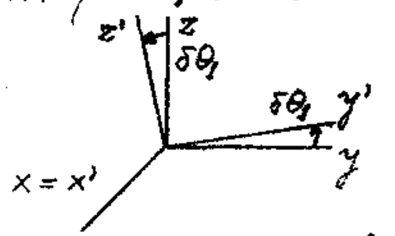
$\epsilon_{0i} = -\delta\nu_i$;

são

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\nu_1 & -\delta\nu_2 & -\delta\nu_3 \\ \delta\nu_1 & 0 & -\delta\theta_3 & \delta\theta_2 \\ \delta\nu_2 & \delta\theta_3 & 0 & -\delta\theta_1 \\ \delta\nu_3 & -\delta\theta_2 & \delta\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \text{e} \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\nu_1 & -\delta\nu_2 & -\delta\nu_3 \\ -\delta\nu_1 & 0 & \delta\theta_3 & -\delta\theta_2 \\ -\delta\nu_2 & -\delta\theta_3 & 0 & \delta\theta_1 \\ -\delta\nu_3 & \delta\theta_2 & -\delta\theta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

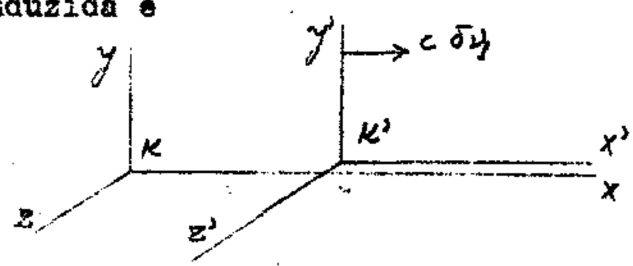
A interpretação de cada um dêsses 6 parâmetros infinitesimais é obtida fàcilmente: no caso de todos serem nulos, com exceção de $\delta\theta_1$, a transformação, que é $x' = L x = x + \eta \epsilon x$, se escreve

$$
\begin{aligned}
t' &= t \\
x' &= x \\
y' &= y + \delta\theta_1 z \\
z' &= -\delta\theta_1 y + z
\end{aligned} \quad ,
$$



e representa uma rotação dos eixos espaciais de um ângulo infinitesimal $\delta\theta_1$, em tôrno do eixo Ox. Anàlogamente se interpreta $\delta\theta_2$ e $\delta\theta_3$ como ângulos infinitesimais de rotação em tôrno de Oy e Oz. Se se considera agora todos os parâmetros nulos com exceção de $\delta\nu_1$, verifica-se que a transformação induzida é

$$
\begin{aligned}
ct' &= ct - \delta\nu_1 x \\
x' &= -\delta\nu_1 ct + x \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned} \quad ,
$$



e representa portanto a passagem para um referencial que move com velocidade infinitesimal $c\delta\nu_1$ relativa ao inicial, na direção Ox. Análoga interpretação é dada a $\delta\nu_2$ e $\delta\nu_3$ infinitesimais.

Considere-se agora o caso de transformações finitas: como 1º exemplo, considere-se uma transformação, caracterizada por um parâmetro θ_1, a qual é uma repetição de n (que $\to \infty$) vêzes a rotação infinitesimal $\delta\theta_1 = \theta_1/n$ em torno de Ox. Dênotando por

$$
I_1{}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

vê-se que a matriz λ é dada por $\lambda^{\mu}{}_{\nu} = -\delta\theta_1 I_1{}^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{\theta_1}{n} I_1{}^{\mu}{}_{\nu}$; portanto a matriz $L^{\mu}{}_{\nu}$ da transformação finita é

$$
L^{\mu}{}_{\nu} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left[\delta^{\mu}_{\alpha} - \frac{\theta_1}{n} I_1{}^{\mu}{}_{\alpha}\right]\left[\delta^{\alpha}_{\beta} - \frac{\theta_1}{n} I_1{}^{\alpha}{}_{\beta}\right] \cdots (n \text{ têrmos}) \right\} =
$$

$$
= \left[\exp(-\theta_1 I_1)\right]^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \theta_1 I_1{}^{\mu}{}_{\nu} + \frac{\theta_1^2}{2!} I_1{}^{\mu}{}_{\alpha} I_1{}^{\alpha}{}_{\nu} - \cdots
$$

É fácil ver que

$$(I_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (I_1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -I_1 \quad ;$$

conseqüentemente

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \left(\theta_1 - \frac{\theta_1^3}{3!} + \cdots\right) I_1{}^{\mu}{}_{\nu} + \left(\frac{\theta_1^2}{2!} - \frac{\theta_1^4}{4!} + \cdots\right) [(I_1)^2]^{\mu}{}_{\nu}$$

$$= \delta^{\mu}_{\nu} + (1 - \cos\theta_1)(I_1{}^2)^{\mu}{}_{\nu} - \operatorname{sen}\theta\, I_1{}^{\mu}{}_{\nu} \quad ,$$

ou seja,

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \quad ;$$

isso nos permite interpretar o parâmetro θ_1 como ângulo total de rotação em tôrno de Ox.

Rotações finitas de ângulos θ_2 e θ_3 em tôrno de Oy e Oz são obtidas de maneira análoga usando os geradores (também chamados operadores infinitesimais) $I_2{}^{\mu}{}_{\nu}$ e $I_3{}^{\mu}{}_{\nu}$ definidos por

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

dando como resultados

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & 0 & \operatorname{sen}\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \text{ e } \quad L^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & -\operatorname{sen}\theta_3 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Demonstra-se que uma rotação espacial de um ângulo θ em tôrno de uma direção caracterizada pelo vetor unitário $\hat{n}$ tem

$$L(\theta,\hat{n})^{\mu}{}_{\nu} = \left[\exp(-\theta\hat{n}\cdot\vec{I})\right]^{\mu}{}_{\nu},$$

onde $\hat{n}\cdot\vec{I}$ é óbvia abreviação de $n^1 I_1 + n^2 I_2 + n^3 I_3$; os casos anteriores são casos particulares em que $\hat{n}$ foi $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.

Problema

Determinar as regras de comutação dos geradores I_i (i=1,2,3) do grupo tridimensional de rotações.

Finalmente, considere-se uma transformação finita de velocidade (caracterizada por um parâmetro ν_1) na direção Ox: ela pode ser considerada como uma sucessão de $n\to\infty$ transformações de velocidades infinitesimais $\delta\nu_1 = \nu_1/n$. Denota-se o gerador correspondente por

$$J_1{}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\lambda^{\mu}{}_{\nu} = -\delta\nu_1 J_1{}^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{\nu_1}{n} J_1{}^{\mu}{}_{\nu} \qquad ,$$

o que nos leva, como anteriormente, a

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \left[\exp(-\nu_1 J_1)\right]^{\mu}{}_{\nu} \quad .$$

Como se verifica, por cálculo direto, que

$$(J_1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{e} \quad (J_1)^3 = J_1 \qquad ,$$

vê-se que $$\underline{L}^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \left(\nu_1 + \frac{\nu_1^3}{3!} + \cdots\right) J_1{}^{\mu}{}_{\nu} + \left(\frac{\nu_1^2}{2!} + \frac{\nu_1^4}{4!} + \cdots\right)(J_1^2)^{\mu}{}_{\nu}$$
$$= \delta^{\mu}_{\nu} - (\mathrm{senh}\, \nu_1)\, J_1{}^{\mu}{}_{\nu} + (\cosh \nu_1 - 1)(J_1^2)^{\mu}{}_{\nu} \quad ,$$

ou seja ,
$$\underline{L}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \nu_1 & -\mathrm{senh}\, \nu_1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{senh}\, \nu_1 & \cosh \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Para interpretar o parâmetro ν_1 escreve-se
$$ct' = ct \cosh \nu_1 - x\, \mathrm{senh}\, \nu_1$$
$$x' = -ct\, \mathrm{senh}\, \nu_1 + x \cosh \nu_1$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

e considera-se o movimento da origem do sistema K' com respeito a K.
A origem de K' é dada por $x'=0$, daí $\tanh \nu_1 = x/ct$;

por outro lado, chamando de v_1 a velocidade de K' ao longo do eixo Ox , vem que

$$v_1 = x/t$$

e portanto

$$\tanh = v_1/c \quad .$$

É fácil verificar que

$$\mathrm{senh}\, \nu_1 = \frac{v_1/c}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}} \qquad \text{e} \qquad \cosh \nu_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}} ,$$

portanto as transformações de Lorentz para o caso são

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad , \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad ,$$
$$y' = y \qquad \text{e} \qquad z' = z$$

De modo inteiramente análogo, usando os geradores

$$J_2{}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_3{}^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

seriam obtidos as transformações de Lorentz ao longo dos eixos Oy e Oz.

Demonstra-se que uma transformação de Lorentz em que k' se desliga com velocidade de módulo v na direção unitária $\hat{v}$ do sistema K é dada por

$L(\vec{v})^{\mu}{}_{\nu} = \left\{ exp\left[-\tanh^{-1}(v/c) \; \hat{v}\cdot\vec{J} \right] \right\}^{\mu}{}_{\nu}$ onde, como anteriormente, $\hat{v}\cdot\vec{J}$ é uma notação abreviada de $\frac{1}{v}(v^1 J_1 + v^2 J_2 + v^3 J_3)$.
É fácil ver como o exemplo dado anteriormente era o caso particular $v^1 = v$, $v_2 = v_3 = 0$.

Uma transformação $L^{\mu}{}_{\nu}$ geral sempre pode ser decomposta em uma rotação 3-dimensional $R\,(\theta, \hat{n})$ seguida de uma transformação de velocidades $V(\vec{v})$,

$$L^{\mu}{}_{\nu} = V^{\mu}{}_{\rho}(\vec{v})\, R^{\rho}{}_{\nu}(\theta, \hat{n}) .$$

É importante notar que à decomposição inversa correspondem em geral outros valores dos parâmetros, isto é, a mesma $L^{\mu}{}_{\nu}$ tem outra decomposição

$$L^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\rho}(\theta', \hat{n}')\, V^{\rho}{}_{\nu}(\vec{v}') \quad ;$$

isso se expressa matemàticamente pela não comutatividade dos geradores I_i com J_i. Mais tarde será revista esta questão.

1.2 Cálculo tensorial referente ao grupo de Lorentz

a) Objetos Geométricos

Efetuada uma transformação de Lorentz das coordenadas (ct, x, y, z)

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\; x^{\nu} \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

define-se um campo escalar $\phi(x)$ como aquele que satisfaz

$$\phi'(x') = \phi(x) \qquad (1\text{-}2\text{-}2)$$

onde x e x' são as coordenadas de um mesmo ponto visto em 2 sistemas de coordenadas. Note-se que a dependência da função ϕ' nas suas coordenadas x' é diferente da dependência de ϕ em x, mas o valor assumido por essas 2 funções em um mesmo ponto P (de coordenadas x_P^{μ} no sistema K e coordenadas $x_P^{\mu\,'}$ no sistema K') é o mesmo.

Um campo vetorial contravariante $V^{\mu}(x)$ é definido pela lei de transformação

$$(1\text{-}2\text{-}3) \qquad V^{\mu}(x) \to V'^{\mu}(x') = L^{\mu}{}_{\nu}\, V^{\nu}(x) \quad .$$

Como antes, x e x' se referem ao mesmo ponto, e estão relacionados por (1-2-1).

Diz-se que um campo de 4 componentes $A_{\mu}(x)$ é um campo vetorial covariante quando

$$A'_{\mu}(x')\, V'^{\mu}(x') = A_{\mu}(x)\, V^{\mu}(x) \quad ;$$

usando a (1-2-3) vê-se que êle se tansforma do modo

$$A_{\mu}(x) \to A'_{\mu}(x') = \left(L^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu}\, A_{\nu}(x) \quad , \qquad (1\text{-}2\text{-}4)$$

onde por $(L^{-1})^{\nu}{}_{\mu}$ entende-se o elemento (linha ν , coluna μ) da matriz inversa à matriz L de elementos $L^{\alpha}{}_{\beta}$ (linha α , coluna β) .

Um exemplo trivial de campo 4-vetorial contravariante é o das próprias coordenadas x^{μ} = (ct,x,y,z), como se vê comparando (1-2-1) com (1-2-3).

Outro exemplo de contravetor é (como os elementos $L^{\mu}{}_{\nu}$ independem de x) obtido por diferenciação de (1-2-1) :

(1-2-5) $$dx^{\mu'} = L^{\mu}{}_{\nu}\, dx^{\nu}$$

de onde se tira

(1-2-6) $$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} = L^{\mu}{}_{\nu}$$

e inversamente $$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} = (L^{-1})^{\mu}{}_{\nu} \quad . \qquad (1\text{-}2\text{-}7)$$

Um 3º exemplo é o campo Δx^{μ} das posições relativas a um dado evento de coordenadas a^{μ},

$$\Delta x^{\mu}(x) = x^{\mu} - a^{\mu} \quad ;$$

É claro que se êsse evento fôr a origem ($a^{\mu} = 0$) recai-se no campo anterior. Note-se que a^{μ} pode ser considerado um campo uniforme, isto é, um campo $a^{\mu}(x)$ cujas componentes independem das coordenadas; entretanto suas componentes se alteram mediante uma transformação de Lorentz, passam a ser $a'^{\mu}(x') = a'^{\mu}$, um campo também uniforme.

Um exemplo de campo vetorial covariante é o quadri-gradiente de um campo escalar; com efeito,

$$\frac{\partial \phi'(x')}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial \phi[x(x')]}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}} = (L^{-1})^{\alpha}{}_{\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^{\alpha}}$$

reproduz a lei (1-2-4) se se chamar $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^{\alpha}} = A_{\alpha}(x)$.

Tensor de Lorentz (de qualquer órdem) é o objeto geométrico de lei de transformação. (1-2-8)

$$T'^{\mu\nu\ldots}_{\alpha\beta\ldots}(x') = L^{\mu}{}_{\rho}\, L^{\nu}{}_{\sigma} \cdots (L^{-1})^{\lambda}{}_{\alpha}\, (L^{-1})^{\tau}{}_{\beta} \cdots T^{\rho\sigma\ldots}_{\lambda\tau\ldots}(x) \quad .$$

Mais tarde serão estudados outros objetos geométricos do grupo de Lorentz, os campos espinoriais e espinoriais pontuados.

b) Uso da notação matricial

Quando se lida com vetores (A^{μ}, B_{μ}), matrizes de Lorentz ($L^{\mu}{}_{\nu}$, $(L^{-1})^{\mu}{}_{\nu}$) e tensores de 2ª ordem ($C^{\mu\nu}, C^{\mu}{}_{\nu}, C_{\mu}{}^{\nu}, C_{\mu\nu}$), é frequentemente útil o emprêgo do cálculo matricial. Para isso, há a necessidade da "preparação" das expressões; essa preparação consiste essencialmente em 1) colocar vizinhos os índices a somar 2) interpreta os vetores como matrizes -linha ou coluna conforme o caso. Seja por exemplo calcular o valor da expressão

$$A^{\mu} B_{\nu} C^{\alpha}{}_{\mu} D^{\rho\sigma} E_{\rho}{}^{\nu} F_{\alpha\sigma} \qquad ;$$

inicialmente definem-se as matrizes 4x4 C,D,E e F como as de elementos (linha-coluna) respectivamente (μ-α), (ρ-σ), (ρ-ν) e (α-σ); a seguir reorganiza-se para, por exemplo,

$A^{\mu} (C^T)_{\mu}{}^{\alpha} F_{\alpha\sigma} (D^T)^{\sigma\rho} E_{\rho}{}^{\nu} B_{\nu}$; por $(C^T)_{\mu}{}^{\alpha}$ entende-se elemento linha μ coluna α da matriz transposta de C.

Pode-se agora eliminar os índices, obtendo $A C^T F D^T E$, e interpreta-se A como matriz-linha, ($C^T F D^T E$) como matrizes 4x4 e B como matriz-coluna: o resultado é um número, uma matriz 1x1. Uma out reorganização seria

$$B_{\nu} (E^T)^{\nu}{}_{\rho} D^{\rho\sigma} (F^T)_{\sigma\alpha} C^{\alpha}{}_{\mu} A^{\mu} ,$$

e agora B seria linha e A coluna; o resultado final é o mesmo.

c) O tensor métrico

Um exemplo de tensor de 2ª órdem covariante é o definido pela "matriz" $\eta_{\mu\nu}$ (1-1-3a) ; a constatação de que se trata de um tensor é feita comparando (1-1-4) com (1-2-8). Êle é invariante em relação à transformação de Lorentz, por invariante entendendo-se que mantém inalterados os valores de suas componentes sob essa transformação.

O tensor $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico da relatividade especial; com isto quer-se dizer que êle associa a um tensor com algum índice contravariante um outro com um índice correspondente covariante, isto é,

$$\eta_{\nu\sigma} T^{\mu\nu\rho\dots}{}_{\alpha\beta\gamma\dots} = T^{\mu}{}_{\sigma}{}^{\rho\dots}{}_{\alpha\beta\gamma\dots} \;;$$

note-se que dado um tensor $T^{\mu\nu}$ pode-se a partir dêle obter os tensores mistos

$T^{\mu}{}_{\nu} = \eta_{\nu\alpha} T^{\mu\alpha}$ e

$T_{\mu}{}^{\nu} = \eta_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu}$

de componentes (linha μ, coluna ν) em geral diferentes.

O único tensor misto de 2ª ordem invariante (a menos de múltiplos por constantes) é $\delta^{\mu}_{\nu} =$ diag (+1,+1,+1,+1) ; que se trata de um tensor invariante se vê de

$$\delta'^{\mu}_{\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} \, (L^{-1})^{\beta}{}_{\nu} \, \delta^{\alpha}_{\beta} = L^{\mu}{}_{\alpha} \, (L^{-1})^{\alpha}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \;.$$

Com o auxílio dos tensores $\eta_{\mu\nu}$ e δ^{μ}_{ν} define-se o tensor $\eta^{\mu\nu}$ por

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \delta^{\rho}_{\mu} \;;$$

por rápida análise matricial verifica-se que $\eta^{\mu\nu} =$ diag(+1,-1,-1,-1), ou seja, $\eta_{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu}$ tem a mesma representação matricial.

Os tensores δ^{μ}_{ν} e $\eta^{\mu\nu}$ são usados consistentemente como "alteradores" e "levantadores" de índices tensoriais:

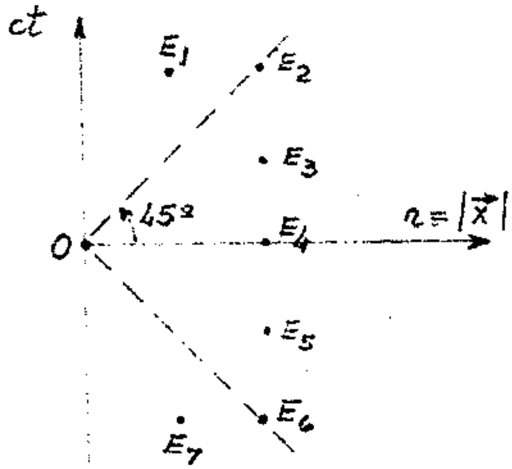
$$\delta^{\beta}_{\alpha} A_{\gamma\beta}(x) = A_{\gamma\alpha}(x) \quad \text{e} \quad \eta^{\alpha\beta} B^{\gamma}{}_{\alpha}(x) = B^{\gamma\beta}(x) \;.$$

A manutenção da letra (A ou B nos exemplos) nas mudanças de índices é uma indicação de que se trata do mesmo objeto, apenas escrito de maneiras diferentes.

1.3. Geometria no espaço de Minkowski

a) Classificação dos vetores

É comum representar-se o espaço 4-dimensional de Minkowski, de uma maneira simbólica, com utilização de apenas 2 eixos: um temporal e outro representando as 3 coordenadas espaciais x, y, z.



Considere-se o evento origem $O(0,0,0,0)$ e o evento $E(ct,x,y,z)$ genérico; no diagrama ao lado fêz-se $r = |\vec{x}|$ como eixo espacial; nota-se nêsse diagrama que o evento $E_1(ct_1, r_1)$ é posterior ao evento $O(0,0)$; é fácil comprovar que um corpo material partindo de O com velocidade $v_1 = \frac{r_1}{t_1} < c$ na direção do ponto de coordenadas (x_1, y_1, z_1) atingirá êsse ponto no instante t_1; em outras palavras, os eventos O e E_1 podem ser feitos colocais por conveniente transformação de velocidade realizável fìsicamente. Sòmente um sinal que se propague com velocidade c partindo de O, poderá atingir o ponto (x_2, y_2, z_2) no instante t_2 (que é o evento E_2).

Os eventos E_3, E_4 e E_5 só podem ser ligados por sinais a O se êsses sinais se propagarem com velocidades superiores a c; o evento E_4, simultâneo a O, requereria sinal de velocidade ∞.

Um sinal luminoso, partindo de E_6, pode atingir O; e finalmente um corpo material partindo de E_7 em direção à origem espacial com velocidade constante $v_7 = \frac{r_7}{|t_7|}$ atingirá esta no instante $t_0 = 0$.

Com a métrica $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$ diz-se que um campo 4-vetorial $A^{\mu}(x)$ é do tipo tempo no ponto P se

$A^{\mu}(x_P)\,A_{\mu}(x_P) > 0$,

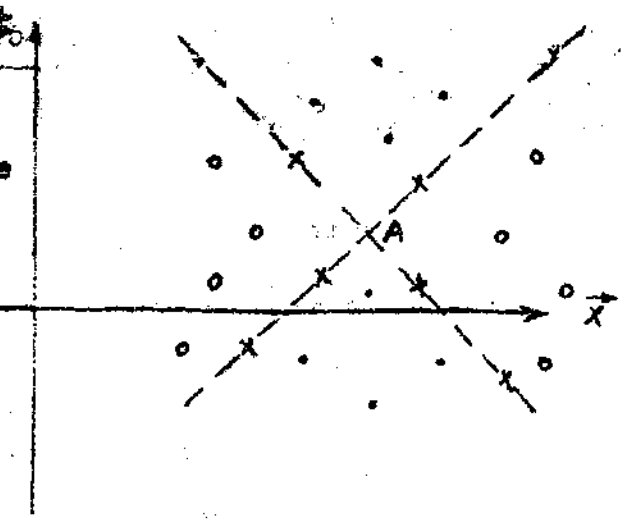
o diz-se que é nulo ou do tipo espaço nêsse ponto se $A^{\mu}A_{\mu} = 0$ ou $A^{\mu}A_{\mu} < 0$; essa classificação do campo em cada ponto é invariante por transformações de Lorentz, pois no ponto P de novas coordenadas x'_P ocorrerá $A'^{\mu}(x'_P)\,A'_{\mu}(x'_P) = A^{\mu}(x_P)\,A_{\mu}(x_P)$. Note-se que um campo vetorial $A^{\mu}(x)$ pode ser de um tipo em um ponto P e de outro tipo em outro ponto Q .

Com respeito aos eventos anteriormente considerados, os 4 - vetores formados pelas diferenças de coordenadas evento-origem são dos três tipos: tipo tempo (x_1^{μ} e x_7^{μ}), nulo ou tipo luz (x_2^{μ} e x_6^{7}) e tipo espaço (x_3^{μ}, x_4^{μ} e x_5^{μ}). Diz-se que x_1^{μ} e x_7^{μ} estão no interior do cone de luz do evento 0 (cones futuro e passado, respectivamente), que x_2^{μ} e x_6^{μ} estão sôbre o cone de luz de 0 (futuro e passado, respectivamente) e que x_3^{μ}, x_4^{μ} e x_5^{μ} estão fora do cone de luz de 0.

Um exemplo disto é o campo formado pelos quadrivetores posição relativa a um especificado evento A, isto é,

$\Delta x^{\mu}(x) = x^{\mu} - x_A^{\mu}$;

no diagrama ao lado o campo $\Delta x^{\mu}(x)$ é do tipo tempo, luz ou espaço conforme o ponto x esteja dentro (.), sôbre (x) ou fora (o) do cone de luz do ponto A.



c) Hipersuperfícies

No espaço tridimensional de coordenadas (x,y,z) define-se uma superfície como o resultado de uma relação de vínculo entre as coordenadas $\omega(\vec{x}) = 0$;

uma família monoparamétrica de superfícies é representável por

$\omega(\vec{x}, \lambda) = 0$,

ou equivalentemente por

$\Omega(\vec{x}) = \lambda$.

Em cada ponto da superfície define-se sua normal como qualquer tri-vetor paralelo a $\vec{\nabla}\omega(\vec{x})$; é facil ver que se $\vec{x}_s$ e $\vec{x}_s + \vec{d_s x}$ são dois pontos vizinhos sôbre a superfície, então $\vec{d_s x} \cdot \vec{\nabla}\omega(\vec{x}_s) = 0$.

Anàlogamente define-se uma hipersuperfície tri-dimensional imersa na variedade quadri-dimensional por

$\omega(x^\mu) = 0$,

e define-se sua normal em cada ponto como qualquer covetor paralelo (proporcional) a

$$\omega_{,\mu}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}\omega(x) \quad ;$$

o mais usual é chamar-se normal a própria $\omega_{,\mu}(x)$. Essa denominação provém de que se

x_H^μ e $x_H^\mu + d_H x^\mu$ estão sôbre a hipersuperfície, e são vizinhos, então

$d_H x^\mu \; \omega_{,\mu}(x) = 0$,

ou seja, provém do fato de que o contra vetor $\eta^{\mu\nu}\omega_{,\nu}(x_H)$ é normal a qualquer deslocamento $d_H x^\mu$ pertencente à hipersuperfície e partindo do x_H^μ .

Uma hipersuperfície é dita temporal (ou tipo tempo) em um especificado ponto quando a sua normal nêsse ponto fôr um vetor espacial (ou tipo espaço); é dita nula (ou luminal ou ainda tipo luz) em um ponto se a normal for nula no ponto; e é dita espacial se a normal fôr temporal no ponto considerado.

Veja-se alguns exemplos:

1) hipersuperfície $t-5=0$: é o conjunto de todos os eventos que ocorrem no instante 5 do referencial considerado. Sua normal é

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu} = \frac{\partial(t-5)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial(x^0/c - 5)}{\partial x^\mu}$$

ou seja, $\omega_{,\mu} = (1/c,0,0,0)$: é um vetor tipo tempo, pois

$$\eta^{\mu\nu}\omega_{,\mu}\omega_{,\nu} = 1/c^2 > 0 \;;$$

portanto a hipersuperfície é do tipo espaço em todos os seus pontos.

2) hipersuperfície $x-y=0$: é o conjunto de todos os eventos que já ocorreram, estão ocorrendo e ocorrerão no plano $x=y$, z qualquer, do referencial considerado: é fácil verificar que a normal é $\omega_{,\mu} = (0,1,-1,0)$ e portanto a hipersuperfície é do tipo tempo em todos os seus pontos.

3) hipersuperfície $-ct+x-3=0$: sua normal é $\omega_{,\mu} = (-1,+1,0,0)$, portanto a hipersuperfície é nula em todos os seus pontos; ela é formada pelos eventos que são a passagem de uma frente de onda plana que se propague na direção Ox positiva com velocidade c.

4) hipersuperfície $(ct)^2 - a^2x = 0$: sua normal é $\omega_{,\mu}(x) = (2ct, -a^2, 0, 0)$. Portanto a hipersuperfície é temporal para $t^2 > a^4/4c^2$ (ou equivalentemente para $x > a^2/4$), e é espacial para $t^2 < a^4/4c^2$. Na fronteira entre essas regiões, isto é, nos pontos em que $x^2 = a^2/4$ e $t^2 = a^4/4c^2$, a hipersuperficie é nula; entretanto o conjunto dos pontos em que essa hipersuperfície é nula não constitue uma hipersuperfície (tri-dimensional) e sim duas superfícies bidimensionais (o plano $x = a^2/4$ nos instantes $t = \pm a^2/2c$).

Na teoria das funções verifica-se que uma função unívoca e analítica de uma variável $f(a)$ pode assumir valores positivos em certas gamas de a, valores negativos em outras gamas, e eventualmente valores nulos em certos valores isolados de a; e que se $f(a) = 0$ em uma gama contínua de a, então será nula toda a gama possível de a. Fato análogo ocorre com as hipersuperfícies descritas por equações que envolvam funções analíticas das variáveis (t, x, y, z); uma análise da função $\eta^{\mu\nu}\omega_{,\mu}\,\omega_{,\nu}$ leva à conclusão de que uma hipersuperfície pode ser temporal em certas regiões, espacial em outras, e nula em superfícies isoladas; e que se uma hipersuperfície é nula em todos os pontos de uma região finita tri-dimensional, e se é descrita por uma função analítica, então será nula também em todos os pontos fora dessa região.

<u>Exercícios</u>:

. Classificar e interpretar fìsicamente as hipersuperfícies

a) $(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) - 4 = 0$

b) $\frac{ct}{2} - \sqrt{x^2 + y^2} - 3 = 0$

c) $f(y - at) = 0$ com f= função arbitrária, a= const

<u>Respostas</u>: a) nula em todos os seus pontos; onda esférica em expansão ou contração com velocidade c.

b) temporal em todos os seus pontos; onda cilíndrica em expansão, com velocidade c/2.

c) temporal (se $|a| < c$), nula (se $|a| = c$) ou espacial (se $|a| > c$) em todos os seus pontos; onda plana se propagando ao longo do eixo Oy com velocidade a .

Em uma hipersuperfície localmente espacial o intervalo entre dois eventos vizinhos sempre é espacial; isto se demonstra partindo de $\omega_{,\mu}\, d_{\mu}x^{\mu} = 0$ e lembrando que $\vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|$, para se chegar a

$$(d_H x^0)^2 \leq \frac{|\vec{\nabla}\omega|^2}{(\omega_{,0})^2}\ |d_H \vec{x}|^2 \quad ; \qquad (1-3-1)$$

como, no caso, $|\vec{\nabla}\omega| < |\omega_{,0}|$, vem que $|d_H x^0| < |d_H \vec{x}|$.

Em uma hipersuperfície nula o intervalo entre dois eventos vizinhos pode ser espacial ou luminal ; pois (1-3-1) implica, como $|\vec{\nabla}\omega| = |\omega_{,0}|$, em que $|d_H x^0| \leq |d_H \vec{x}|$. No caso do intervalo infinitesimal ser nulo, diz-se que os dois eventos vizinhos pertencem a um mesmo raio da hipersuperfície; entende-se por raio uma trajetória percorrida com velocidade c. O quadrivetor posição relativa $d_R x^\mu$ de dois eventos vizinhos sôbre um mesmo raio goza da propriedade de ser paralelo à normal (contravariante) local, i.e., com $a = const$ (demonstre !)

$$d_R x^\mu(x) = a\, \eta^{\mu\nu} \omega_{,\nu}(x) \ .$$

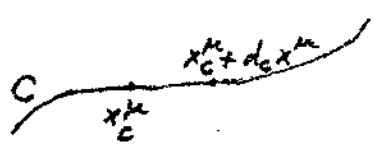
Em uma hipersuperfície localmente temporal o intervalo entre dois eventos vizinhos pode ser de qualquer dos três tipos.

d) Integrações

No quadri-espaço são 4 os tipos de integrações que se pode efetuar.

1º - Integração sôbre uma curva (arco, linha); denotando por $\mathcal{A}(x^\mu)$ um qualquer objeto geométrico (escalar, tensor, espinor,...) escreve-se

$$\int_C \mathcal{A}(x)\, d_c x^\mu$$



onde $d_c x^\mu(x)$ representa a diferença entre 2 eventos vizinhos sôbre a curva C; quando a curva é do tipo tempo em todos os seus pontos, isto é, $(d_c s)^2 > 0$ é usual definir-se $d_c s\,(x) = +\sqrt{(d_c s)^2}$ e $u_c^\mu(x) = \dfrac{d_c x^\mu}{d_c s}$ e $\mathcal{B}(x) = \mathcal{A}(x)\, u_c^\mu(x)$, e então escrever-se

$\int_C \mathcal{B}(x)\, d_c s$ ou abreviadamente $\int_C \mathcal{B}(x)\, ds$.

Como ds é invariante, costuma-se usar $s = \int_C ds$ como parâmetro para especificar cada ponto $x^\mu(s)$ da curva.

2º-Integração sôbre uma superfície (bi-dimensional) ; uma superfície é caracterizável por 2 parâmetros, isto é, seus pontos podem ser especificados por

$x^\mu = x^\mu(\lambda_1, \lambda_2)$.

Definindo $\delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \equiv \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\nu_\alpha \delta^\mu_\beta$ e usando a notação $x^\alpha_{,\lambda_1} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda_1}$ define-se elemento $[\mu\nu]$ de superfície com os parâmetros na ordenação $[\lambda_1, \lambda_2]$ como

$$\underset{[\lambda_1,\lambda_2]}{dS^{\mu\nu}} \equiv \delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\; x^\alpha_{,\lambda_1}\; x^\beta_{,\lambda_2}\; d\lambda_1\, d\lambda_2 \quad ,$$

ou seja ,

$$\underset{[\lambda_1,\lambda_2]}{dS^{\mu\nu}} \equiv \left(x^\mu_{,\lambda_1}\; x^\nu_{,\lambda_2} - x^\nu_{,\lambda_1}\; x^\mu_{,\lambda_2} \right) d\lambda_1\, d\lambda_2 \quad .$$

Como $x^\mu_{,\lambda_1} d\lambda_1$ é a variação de x^μ devida à variação $d\lambda_1$, pode-se designá-la convenientemente por $d_{\lambda_1} x^\mu$ ou abreviadamente $d_1 x^\mu$; então $\underset{[\lambda_1,\lambda_2]}{dS^{\mu\nu}} = d_1 x^\mu d_2 x^\nu - d_1 x^\nu d_2 x^\mu$.

Exemplo: seja uma superfície paralela localmente ao plano (z, t); escolha-se para parâmetros as próprias coordenadas, isto é:

$\lambda_1 = z \equiv x^3$, $\lambda_2 = ct \equiv x^0$;

então a superficie é dada, localmente, pelas equações paramétricas

$$x^0 = \lambda_2 \qquad x^1 = a = const.$$
$$x^2 = b = const. \qquad x^3 = \lambda_1 \quad .$$

Os únicos $d_1 x^\mu$ e $d_2 x^\mu$ não nulos são $d_2 x^0 = d\lambda_2 = c\,dt$ e $d_1 x^3 = d\lambda_1 = dz$, portanto os únicos $dS^{\mu\nu}$ não nulos são

$$\underset{[z,ct]}{dS^{30}} = -\underset{[z,ct]}{dS^{03}} = c\,dt\,dz \quad .$$

É comum empregar-se outra diferencial de superfície: usa-se o tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ invariante, totalmente antissimétrico de componente $\epsilon_{0123} = -1$ e define-se

$$dS^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,dS^{\rho\sigma}$$

(note-se que $dS^*_{\mu\nu} \neq dS_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\,\eta_{\nu\sigma}\,dS^{\rho\sigma}$ e que em geral $dS^{\mu\nu} dS^*_{\mu\nu} \neq 0$). No exemplo anterior, as únicas componentes não nulas de $dS^*_{\mu\nu}$ são

$$\underset{[z,ct]}{dS^*}_{12} = -\underset{[z,ct]}{dS^*}_{21} = c\,dt\,dz \quad .$$

Tanto $dS^{\mu\nu}$ como $dS_{\mu\nu}$ e $dS^*_{\mu\nu}$ são tensores antissimétricos (na relatividade especial).

A indicação $[\lambda_1\,\lambda_2]$ é necessária, de vez que $\underset{[\lambda_1\lambda_2]}{dS^{\mu\nu}} = -\underset{[\lambda_2\lambda_1]}{dS^{\mu\nu}}$, o que aliás já foi sugerido pela própria notação.

3º - Integração sôbre uma hipersuperfície (3-dimensional) ; caracterizando-se a hipersuperfície pelas equações paramétricas

$$x^\mu = x^\mu(\lambda_1\,,\lambda_2\,,\lambda_3)$$

e definindo-se o tensor misto invariante

$$\delta^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma} \equiv \delta^{[\mu\nu\rho]}_{[\alpha\beta\gamma]} = 6\;\delta^{[\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\rho]}_{\gamma} = 6\,\delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\rho}_{\gamma]} = 36\;\delta^{[\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{\rho]}_{\gamma]}$$

define-se elemento de hipersuperfície como o tensor de 3ª ordem contravariante totalmente antissimétrico

$$\underset{[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]}{d\tau^{\mu\nu\rho}} = \delta^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta\gamma}\;\; x^{\alpha}_{,\lambda_1}\;x^{\beta}_{,\lambda_2}\;x^{\gamma}_{,\lambda_3}\;\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3$$

ou seja, como anteriormente,

$$\underset{[123]}{d\tau^{\mu\nu\rho}} = 6\;d_1x^{[\mu}\,d_2x^{\nu}\,d_3x^{\rho]} \quad .$$

Exemplo: seja a hipersuperfície $t = 5$ (tipo espaço em todos os pontos) ; os parâmetros mais convenientes são $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$, $\lambda_3 = z$, e as equações paramétricas ficam

$x^0 = s/c$,

$x^1 = \lambda_1$,

$x^2 = \lambda_2$ e

$x^3 = \lambda_3$;

os únicos $d_i x^\mu$ não nulos são $d_1 x^1 = dx$, $d_2 x^2 = dy$ e $d_3 x^3 = dz$ e portanto os únicos $d\tau^{\mu\nu\rho}$ não nulos são os "espaciais"

$$\underset{[xyz]}{d\tau^{[123]}} = \underset{[\ \ ]}{d\tau^{123}} = \cdots = -\underset{[\ \ ]}{d\tau^{132}} = \cdots = dx\,dy\,dz$$

Define-se o tensor covariante

$$d\tau_\mu = \frac{1}{6}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,d\tau^{\nu\rho\sigma}$$

cujas componentes, no exemplo acima, são

$$\underset{[xyz]}{d\tau^\mu} = (-dx\,dy\,dz,\ 0,\ 0,\ 0) \ .$$

4º- Integração sôbre um volume de 4 dimensional: define-se $dV^{[\mu\nu\rho\sigma]}$ de modo análogo a $dS^{\mu\nu}$ e $d\tau^{\mu\nu\rho}$; entretanto é mais comum e natural empregar-se como diferencial

$$d^4x = -\frac{1}{4!}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,dV^{\mu\nu\rho\sigma} = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c\,dt\,dx\,dy\,dz \ .$$

As integrações não apresentam dificuldades de interpretação.

e. Teorema de Stokes

Usa-se as seguintes expressões do teorema de Stokes:

$$1)\quad \oint_C A_\mu(x)\,\underset{[\lambda_1]}{dx^\mu} = -\int_S \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu(x)\,\underset{[\lambda_1,\lambda_2]}{dS^{\mu\nu}} \ .$$

Nessas integrais, S é uma superfície simplesmente conexa limitada por uma curva C. Essa curva requer o uso de um parâmetro λ_1 para a especificação de cada um dos seus pontos. A superfície S deve ser parametrizada por êsse λ_1, que será seu primeiro parâmetro, e algum outro parâmetro λ_2; esta convenção corresponde à transposição para quatro dimensões da regra-de-saca-rolha usada no teorema do rotacional em três dimensões. Na relatividade especial essa relação ainda é verdadeira se em vez de A_μ se usar qualquer tensor $T^{\alpha\cdots}_{\mu\beta\cdots}(x)$.

$$2)\quad \oint_S T_{\mu\nu}(x)\, \underset{[\lambda_1\lambda_2]}{dS^{\mu\nu}} = -\int_H \frac{\partial}{\partial x^\rho} T_{\mu\nu}(x)\, \underset{[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]}{d\tau^{\mu\nu\rho}} \quad ;$$

aqui H é uma hipersuperfície simplesmente conexa limitada pela superfície S; considerações análogas sôbre os parâmetros seriam feitas, bem como a generalização para $T^{\alpha\cdots}_{\mu\nu\beta\cdots}(x)$ na relatividade especial.

$$3)\quad \oint_H T_{\mu\nu\rho}(x)\, \underset{[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]}{d\tau^{\mu\nu\rho}} = -\int_{V_4} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} T_{\mu\nu\rho}\, \underset{[\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4]}{dV^{\mu\nu\rho\sigma}},$$

onde H é o contôrno do 4-volume V_4 simplesmente conexo.

f. Construção de objetos geométricos

É fácil demonstrar que se $T^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\cdots}(x)$ é um campo tensorial, então $\frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\cdots}(x)$ é um campo tensorial com um índice adicional covariante, $U^{\mu\nu\cdots}_{\rho\alpha\beta\cdots}(x)$; também verifica-se que o traço com respeito a 2 índices (um contra e outro covariante) de um campo tensorial é outro campo tensorial de ordem menor. Por exemplo, de $T^{\mu\nu\rho}_{\alpha\beta}(x)$ se pode construir

$$U^{\mu\rho}_{\beta}(x) = T^{\mu\nu\rho}_{\nu\beta}(x) \equiv T^{\mu 0\rho}_{0\beta}(x) + T^{\mu 1\rho}_{1\beta}(x) + T^{\mu 2\rho}_{2\beta}(x) + T^{\mu 3\rho}_{3\beta}(x) \; .$$

Note-se que outras contrações são possíveis, originando campos diferentes:

$$T^{\alpha\nu\rho}_{\alpha\beta}(x) = V^{\nu\rho}_{\beta}(x) \;,\; T^{\mu\nu\rho}_{\alpha\nu}(x) = X^{\mu\rho}_{\alpha}(x), \text{ etc.}$$

O fato de os campos obtidos serem diferentes é expresso pela mudança das letras U, V, X, e não dos índices; ou seja, afirma-se que os campos U e V são diferentes, apesar de ambos serem 2-contravariante e 1-covariante, escrevendo $U^{\alpha\beta}_{\gamma}(x) \neq V^{\alpha\beta}_{\gamma}(x)$.

Não há dificuldade em verificar-se que o "produto" de dois campos tensoriais é outro campo tensorial

$$A^{\mu\nu}(x)\, B^{\rho}_{\sigma}(x) = C^{\mu\nu\rho}_{\sigma}(x) \quad ,$$

o mesmo ocorrendo com a contração ou com o produto com contração

$$D^{\mu\nu\rho}(x)\, E^{\alpha\beta}_{\nu\gamma}(x) = F^{\mu\rho\alpha\beta}_{\gamma}(x) \quad .$$

Quando um campo tensorial depende de parâmetros λ_i (objetos invariantes por transformações de Lorentz), então sua derivada com relação a cada parâmetro é outro campo: por exemplo de $T^{\mu\nu}_{\rho}(x;\lambda_1,\lambda_2)$ se pode construir

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_1} T^{\mu\nu}_{\rho}(x;\lambda_1,\lambda_2) = A^{\mu\nu}_{\rho}(x;\lambda_1,\lambda_2) \quad e$$
$$\frac{\partial}{\partial\lambda_2} T^{\mu\nu}_{\rho}(x;\lambda_1,\lambda_2) = B^{\mu\nu}_{\rho}(x;\lambda_1,\lambda_2) \quad .$$

g. Velocidade e Aceleração

Um exemplo disto é o campo da velocidade de uma partícula. Considere-se em um referencial K o conjunto de eventos x^{μ}_{P} que são a passagem de uma partícula P pelos pontos do 4-espaço. Esse conjunto pode ser ordenado por meio de algum parâmetro de crescimento monotônico.

Se fôr escolhido para parâmetro o arco invariante s_P percorrido por P a partir de algum dos pontos da trajetoria, escreve-se

$$x^{\mu}_{P} = x^{\mu}(s_P)$$

e define-se como velocidade da partícula P o contravetor $u^{\mu}_{P}(s_P)$, $u^{\mu}_{P} = dx^{\mu}_{P}/ds_P$; note-se que êsse vetor não tem dimensão. Em verdade trata-se de um campo contravetorial $u^{\mu}_{P}(x)$, que entretanto só tem componentes não nulas nos pontos x^{μ}_{P}; o mesmo se dá com o campo contravetorial $x^{\mu}_{P}(x)$.

O contravetor u^{μ}_{P} tem norma 1 (tipo tempo), pois como

$$(ds_P)^2 = \eta_{\mu\nu}\, d_P x^{\mu}\, d_P x^{\nu}$$

vem que

$$(u^{\mu}u_{\mu})_P = \eta_{\mu\nu}\, u^{\mu}_{P} u^{\nu}_{P} = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}_{P}}{ds_P}\frac{dx^{\nu}_{P}}{ds_P} = \frac{(ds_P)^2}{(ds_P)^2} = 1 \, .$$

As componentes espaciais do contravetor u^{μ} não são as componentes do vetor velocidade $\vec{v}_P$ usual 3-dimensional; pois como

$$ds_P = +\sqrt{\eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu}_{P}\, dx^{\nu}_{P}} = +\sqrt{c(dt)^2_P - (d\vec{x})^2_P} = +\sqrt{1 - (\dot{\vec{x}}_P/c)^2}\, |c\,dt|_P \, ,$$

vem que, em notação simplificada,

$$u^{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2}} \, , \, \frac{\dot{\vec{x}}/c}{\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2}} \right) .$$

Usualmente define-se

$$\vec{\beta} = \dot{\vec{x}}/c \quad e \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e então diz-se que

$$u^{\mu} = \gamma(1, \vec{\beta}) \, .$$

Nota-se que para pequenas velocidades $\left(|\dot{\vec{x}}| \ll c\right)$ ocorre $\beta \sim 0$, $\gamma \sim 1$, e então as componentes espaciais de u^{μ} coicidem com as de $\dot{\vec{x}}/c$.

Define-se aceleração da partícula P como o contravetor

$w^{\mu}_{p} = \dfrac{du^{\mu}_{p}}{ds_{p}}$; nete-se que tem dimensãe $(L)^{-1}$.

Simplificande a netaçãe e chamande $d^2\vec{x}/dt^2 = \vec{a}$ (aceleraçãe usual tridimensional) obtem-se

$$w^{\mu} = \frac{\gamma^2}{c^2}\left[\gamma^2\vec{\beta}\cdot\vec{a}\ ,\ \vec{a} + \gamma^3(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\,\vec{\beta}\right] .$$

Ne limite $|\dot{\vec{x}}| \ll c$ as cemponentes espàciais de $c^2 w^{\mu}$ tendem às de $\vec{a}$ .Os quadrivetores u^{μ} e w^{μ} sãe ertegenais, peis

$$0 = \frac{d}{ds}(u^{\mu}u_{\mu}) = \frac{d}{ds}\left(\eta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}\right) = \eta_{\mu\nu}\left(w^{\mu}u^{\nu} + u^{\mu}w^{\nu}\right) = 2w^{\mu}u_{\mu} .$$

Note-se que e fate de que $x^{\mu}(s)x_{\mu}(s)$ ser em geral uma f(s) faz com que x^{μ} e u^{μ} não sejam ortogonais, em geral.

Exercície:

Mostrar que, para $\vec{\beta} \neq 0$,

1) $\vec{w} = 0 \Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{\beta} = 0 \Longrightarrow \vec{a} = 0$, e

2) $w^0 = 0 \not\Rightarrow \vec{a} = 0$.

2. O movimento de uma partícula livre

2.1. O princípio variacional para a partícula livre

O movimento de uma partícula livre, percebido por um observador inercial K, é descrito por um conjunto de fórmulas que são a generalização relativista das equações de Newton $\ddot{\vec{X}} = 0$.

Para obtenção dessas fórmulas, deve-se ter em mente que o processo matemático a empregar deve ser covariante, de vez que a trajetória a ser descrita ocorre no espaço 4-dimensional. Como a velocidade Newtoniana $\dot{\vec{X}}$ não é um quadri-vetor, deve-se substituí-la pelo quadri vetor u^{μ}. Semelhantemente $\ddot{\vec{X}}$ será substituída pela quadri-aceleração w^{μ}.

Espera-se que as equações do movimento sejam

$$w^{\mu} = 0 \tag{2-1-1}$$

e busca-se uma expressão da ação que conduza a êsse resultado. Evidentemente, se $w^{\mu} \equiv 0$, então é nula a integral

$$\int_a^b w_{\mu}\, \delta x^{\mu}\, ds \quad ,$$

calculada ao longo do movimento real da partícula entre dados eventos a e b fixados. Toma-se então

$$\delta S = \alpha \int_a^b w_{\mu}\, \delta x^{\mu}\, ds = 0 \tag{2-1-2}$$

e busca-se especificar o valor da constante α que dê a S a dimensão correta, e um correto limite não-relativista.

Inicialmente busca-se a expressão da ação S partindo da expressão de δS dada em (2-1-2)

Como

$$\delta S = \alpha \int_a^b \frac{du_\mu}{ds} \, \delta x^\mu \, ds = \alpha \int_a^b \delta x^\mu \, du_\mu \quad ,$$

convém integrar por partes: obtem-se

$$\delta S = -\alpha \int_a^b u_\mu \, \delta(dx^\mu) + \alpha \left(u_\mu \, \delta x^\mu \right)_a^b ;$$

como δx^μ foram supostos nulos nos pontos extremos, fica apenas

$$\delta S = -\alpha \int_a^b u_\mu \, \delta(dx^\mu) \quad .$$

Notando-se que

$$u_\mu \, \delta(dx^\mu) = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \, \delta(dx^\mu) = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu \, \delta(dx^\mu)}{\sqrt{\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}} = \delta \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \delta(ds)$$

obtem-se

$$\delta S = -\alpha \int_a^b \delta(ds)$$

Portanto a ação correspondente ao movimento de uma partícula livre é, na relatividade especial,

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

Pode-se definir uma Lagrangeana no formalismo lagrangeano usual para a relatividade especial, a qual não é entretanto um escalar da teoria. Escolhe-se um referencial para escrever

$$S = -\alpha \int_a^b \frac{ds}{dt} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt \qquad (2\text{-}13)$$

então chamando de $\dot{\vec{x}}$ a 3-velocidade da partícula nesse referencial, vem que

$$L = -\alpha \frac{ds}{dt} = -\alpha c \sqrt{1 - (\dot{\vec{x}}/c)^2} \quad .$$

No caso $|\dot{\vec{x}}| \ll c$ ocorre que

$$L \sim -\alpha c + \frac{\alpha}{2}\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c} ,$$

o que sugere fixar $\alpha = mc$ a fim de que essa L coincida com a Lagrangeana não-relativística da partícula para baixa velocidade(a menos da constante aditiva $-mc^2$ que nada altera as equações de movimento).

Com

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -mc^2\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2} = L(\dot{\vec{x}}) \qquad (2\text{-}1\text{-}4)$$

define-se a variável canônicamente conjugada à posição

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2}} \qquad (2\text{-}1\text{-}5)$$

e a Hamiltoniana

$$H = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2}} \qquad (2\text{-}1\text{-}6)$$

ou, substituindo $\dot{\vec{x}} = \vec{p}/\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^2}$, obtem-se (2-1-7)

$$H(\vec{p}) = \sqrt{m^2c^4+\vec{p}^2c^2} . \qquad (2\text{-}1\text{-}8)$$

Define-se o quadrivetor momentum da partícula de massa m como

$$p^\mu = mcu^\mu \qquad (2\text{-}1\text{-}9)$$

ou seja, comparando a expressão de u^μ com (2-1-5) e (2-1-6),

$$p^\mu = (H/c , \vec{p}) . \qquad (2\text{-}1\text{-}10)$$

Nota-se que para baixas velocidades ($|\dot{\vec{x}}| \ll c$) ocorre

$$p^i \sim m(\dot{\vec{x}})^i ,$$

ou seja, as componentes espaciais de momentum relativística coicidem com as componentes de momentum Newtoniano; e a componente temporal, multiplicada por c,

$$cp^0 \sim mc^2\left[1 + \frac{1}{2}(\dot{\vec{x}}/c)^2\right] = mc^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}})^2$$

difere da energia cinética não relativística por uma parcela constante mc^2.

Define-se energia de uma partícula livre como sendo

$$E \equiv cp^0 = H \quad ; \tag{2-1-11}$$

chama-se energia de repouso da partícula à energia no referencial em que ela está em repouso,

$$E_0 = mc^2, \tag{2-1-12}$$

e define-se energia cinética relativista por

$$T = E - E_0 = E - mc^2 = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2}} - 1\right] = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}})^2\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\right)^2 + \dots\right] \tag{2-1-13}$$

note-se que $\vec{p}$, E e T divergem para $|\dot{\vec{x}}| \to c$.

No tratamento Newtoniano da partícula livre, a equação de movimento

$$\vec{a} = 0$$

implicava na conservação temporal do momentum linear Newtoniano

$$\vec{p}_N \equiv m\dot{\vec{x}} \quad , \quad \frac{d\vec{p}_N}{dt} = 0 .$$

E como a energia cinética Newtoniana era

$$T_N = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}})^2 = \frac{\vec{p}_N^{\,2}}{2m} \quad ,$$

automàticamente decorria conservação da T_N para partícula livre.

Também na relatividade especial há uma conexão entre E e $\vec{p}$ a qual independe tanto do referencial como do ponto considerado, devido à definição de p^μ e à invariância de $w^\mu u_\mu$: essa conexão é

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2 . \tag{2-1-14}$$

Das quatro equações $w^\mu = 0$, as três espaciais

$$0 = w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2}} \frac{du^i}{dt} = \frac{1}{mc\sqrt{}} \frac{d}{dt} p^i$$

indicam a conservação do momentum linear relativista em cada referencial. Devido a (2-1-14), também a energia relativista E deve se conservar; efetivamente, a equação

$$0 = w^0 = \frac{du^0}{ds} = \frac{1}{mc^2\sqrt{}} \frac{d}{dt} E$$

espelha a autoconsistência do esquema relativístico.

2.2- Leis das conservações na mecânica relativística

Na mecânica Newtoniana utiliza-se o teorema de Nœther para obter as grandezas dinâmicas que se conservam temporalmente, no estudo de um sistema mecânico. Êsse teorema afirma que quando a ação S_N mantem seu valor inalterado por uma transformação das coordenadas $\vec{x} \to \vec{x}'$ então, correspondendo a essa transformação, alguma grandeza dinâmica do sistema tem seu valor conservado no tempo (que é Newtonianamente um parâmetro absoluto).

Supõe-se a transformação como infinitesimal,

$$x_i \to x'_i = x_i + \delta x_i(\vec{x}) , \tag{2-2-1}$$

e caracterizada por n parâmetros infinitesimais $\delta\omega_A$

(A=1...n) da forma

$$\delta x_i(\vec{x}) = \sum_A f_{iA}(\vec{x})\ \delta\omega_A \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

Então se a ação

$$S_N \equiv \int L_N(\vec{x}, \dot{\vec{x}})\, dt \qquad (2\text{-}2\text{-}3)$$

mantem inalterado seu valor, $\delta S = 0$, o que implica em

os n objetos

$$\Theta_A(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = f_{iA}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \qquad (2\text{-}2\text{-}4)$$

manterem inalterados seus valores ao longo da evolução temporal do sistema,

$$\frac{d}{dt}\, \theta_A(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = 0\ . \qquad (2\text{-}2\text{-}5)$$

Para compreensão das grandezas acima mencionadas, considere-se o caso da partícula livre, de

$$L_N(x_i, \dot{x}_i) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_i)^2 \quad ; \qquad (2\text{-}2\text{-}6)$$

a ação mantém inalterado seu valor se for efetuada a translação espacial infinitesimal com parâmetros δa_i :

$$x_i \rightarrow x_i' = x_i + \delta a_i\ .$$

Comparando com (2-2-2) vê-se que as funções f são no caso

$$f_{iA}(\vec{x}) = \delta_{iA}\ ;$$

então os objetos conservados θ são

$$\theta_A = \delta_{iA} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2\right) = \delta_{iA}\, m \dot{x}_i = m \dot{x}_A$$

ou seja, são os momento Newtonianos.

Outra transformação infinitesimal que mantém inalterada essa S_N é a rotação

$$x_i \to x'_i = x_i + \delta\Omega_{ij}\, x_j$$

com

$$\delta\Omega_{ij} = -\delta\Omega_{ji}$$

o que restringe a transformação a 3 parâmetros. Convém a reparametrização

$$\delta\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\,\delta\Omega_k$$

a qual dá para as funções f a expressão

$$f_{ik}(\vec{x}) = \epsilon_{ijk}\, x_j \quad ;$$

as funções conservadas são então

$$\theta_k = f_{ik}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\tfrac{1}{2} m \dot{x}^2\right) = m\, \epsilon_{ijk}\, x_j\, \dot{x}_i$$

e representam o momento angular Newtoniano

$$M^N_k = -\theta_k = m\left(x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i\right) \quad , \quad (i,j,k) = \text{cíclicos.}$$

Um tratamento análogo na mecânica relativística com o emprêgo da Lagrangeana da partícula livre leva à conservação temporal das componentes espaciais do momentum relativístico,

$$\vec{p} = m\,\dot{\vec{x}} / \sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2} \;,$$

e das componentes puramente espaciais do momento angular relativístico

$$M^{\mu\nu} \equiv x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu ,$$

quais sejam,

$$M^i = x^j p^k - x^k p^j \quad , \quad (i,j,k) = \text{cíclicos} \;.$$

Exercício: demonstrar êstes resultados relativísticos.

Leis de conservação envolvendo, de forma semelhante , translações do espaço e do tempo, assim como rotações de Lorentz, podem ser obtidas no formalismo Lagrangeano covariante que será tratado adiante.

3. A INTEGRAL DE AÇÃO PARA INTERAÇÕES DA PARTÍCULA COM CAMPOS EXTERNOS

Viu-se no capítulo 2 que a integral de Ação correspondente ao movimento de uma partícula livre é

$$S = -mc\int ds \equiv -mc\int\sqrt{\eta_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu} \; . \qquad (3\text{-}1)$$

Se a partícula interagir com um campo vetorial $A_\mu(x)$, a ação correspondente ao nôvo movimento deverá conter um têrmo que represente essa interação; êsse termo S_i deve ser Lorentz - invariante, a fim de que as equações do movimento sejam covariantes. No caso de a fôrça que atua sôbre a partícula ser a fôrça de Lorentz então A_μ representarão os potenciais eletromagnéticos: e como a fôrça de Lorentz é linear nas derivadas dos potenciais, e na velocidade da partícula, tenta-se para a Ação da interação a expressão de integrando Lorentz-escalar linear em A_μ e nos deslocamentos da partícula,

$$S_i = \alpha\int A_\mu\,dx^\mu \; , \qquad (3\text{-}2)$$

α uma constante a ser determinada.

A Ação total é então

$$S = \int\left(-mc\,ds + \alpha\,A_\mu\,dx^\mu\right) . \qquad (3\text{-}3)$$

O problema variacional

$$\delta S = 0 \quad \text{com} \quad \delta x^\mu\Big|_{limites} = 0$$

conduz às equações de movimento; *como*

$$\delta S = \int \left(mc w_\nu \delta x^\nu ds + \alpha \delta A_\mu dx^\mu + \alpha A_\mu d\delta x^\mu \right) ,$$

e como

$$\int \delta A_\mu dx^\mu = \int \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu dx^\mu \quad \text{e}$$

$$\int A_\mu d\delta x^\mu = (A_\mu \delta x^\mu)_{limites} - \int \delta x^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu = - \int \delta x^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

vem que, chamando

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu , \tag{3-4}$$

se obtém

$$\delta S = \int \left(mc w_\nu \delta x^\nu ds - \alpha F_{\mu\nu} \delta x^\nu dx^\mu \right) .$$

As equações de movimento são portanto

$$mc w_\nu - \alpha F_{\mu\nu} u^\mu = 0 . \tag{3-5}$$

Exercício: com $\eta_{\mu\nu} = diag(+---)$, $A^\mu = (\phi, \vec{A})$, $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ e $\vec{B} = rot\,\vec{A}$

verificar que

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3-6}$$

A interpretação física do parâmetro α é obtida tomando o limite não relativístico da (3-5); assim, para $\nu = 1$, se obtem

$$-mc \frac{a^1}{c^2} = \alpha \left(E^1 + \frac{\dot{y}}{c} B^3 - \frac{\dot{z}}{c} B^2 \right) = \alpha \left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right)^1$$

donde se conclue que $\alpha = -e/c$, onde e = carga da partícula.

As equações do movimento são portanto

$$w_\mu = \frac{e}{mc^2} F_{\mu\nu} u^\nu ; \tag{3-7}$$

usualmente chama-se 4-fôrça de Lorentz a grandeza

$$\mathcal{F}_\mu = F_{\mu\nu}\, u^\nu \tag{3-8}$$

e escreve-se

$$mc^2 w^\mu = e\,\mathcal{F}^\mu \quad . \tag{3-9}$$

Como $w_\nu u^\nu \equiv 0$, as quatro equações (3-7) não são independentes, isto é, uma qualquer delas resulta das outras três.

Exercício: Obter as componentes contravariantes da 4-fôrça de Lorentz.

Como segundo exemplo considere-se a interação com um campo vetorial de Procca; a equação de Procca é obtida a partir do Lagrangeano

$$\mathcal{L}[A_\mu(x)\,,\, A_{\mu,\nu}(x)] = -m^2\eta^{\mu\nu}A_\mu A_\nu - \frac{1}{4}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu})(A_{\beta,\alpha}-A_{\alpha,\beta}) \tag{3-10}$$

e é

$$2m^2A^\rho - \eta^{\rho\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta,\nu} = 0 \;; \tag{3-11}$$

é a equação de movimento de um campo de spin 1, com massa associada não nula, ou seja a equação do meson vetorial.

As equações homogêneas de Maxwell são o caso particular $m=0$, ou seja,

$$\eta^{\beta\nu}F_{\alpha\beta,\nu} = 0 \quad . \tag{3-12}$$

Exercícios: 1) obter as (3-11), utilizando as equações de Euler-Lagrange.

Exercícios: 2) obter as equações do movimento de um campo escalar $\phi(x)$ a partir das imposições a) invariância de Lorentz

b) linearidade

c) ordem diferencial máxima igual a 2;

use o princípio da mínima Ação.

3) obter as equações se a 3ª imposição é abandonada e se permite que a ordem diferencial máxima seja 4.

Como o campo eletromagnético é um tensor antissimétrico, isto é, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$,

o traço desse tensor é nulo,

$$F^{\mu}{}_{\mu} = 0 \quad ; \tag{3-13}$$

então nenhum escalar do campo eletromagnético pode ser linear em $F_{\mu\nu}$. Há apenas dois escalares quadráticos em $F_{\mu\nu}$ que são linearmente independentes: tome-se-os

$$u_1(x) = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \qquad e \tag{3-14}$$

$$u_2(x) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad . \tag{3-15}$$

Pode-se imaginar um espaço vetorial abstrato de 6 dimensões, E_6, no qual o campo tensorial $F_{\mu\nu}(x)$ fôsse representados pelo vetor $F_A(x)$ da forma

$$\begin{gathered} F_{23} = F_1 \quad , \quad F_{31} = F_2 \quad , \quad F_{12} = F_3 \quad , \\ F_{01} = F_4 \quad , \quad F_{02} = F_5 \quad e \quad F_{03} = F_6 \quad ; \end{gathered} \tag{3-16}$$

nêsse espaço o tensor invariante totalmente antissimétrico $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, que satisfaz em particular

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} \tag{3-17}$$

é representado pela quantidade simétrica $\chi^{AB} = \chi^{BA}$ da forma

$$\epsilon^{0123} = \chi^{41}(=+1) \quad \text{, etc. ;} \tag{3-18}$$

e o tensor invariante

$$\eta^{\mu\nu\alpha\beta} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} \tag{3-19}$$

cujas simetrias são apenas

$$\eta^{\mu\nu\alpha\beta} = -\eta^{\nu\mu\alpha\beta} = -\eta^{\mu\nu\beta\alpha} = \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \tag{3-20}$$

é representado por outra quantidade simétrica $\varphi^{AB} = \varphi^{34}$ da forma

$$\eta^{0123} = \varphi^{41}(=0) \quad \text{, etc..} \tag{3-21}$$

Nêsse espaço hexadimensional os escalares $u_1(x)$ e $u_2(x)$ são simplesmente

$$u_1(x) = 2\,\varphi^{AB}\, F_A(x)\; F_B(x) \qquad \text{e} \tag{3-22}$$

$$u_2(x) = 4\,\chi^{AB}\, F_A(x)\; F_B(x) \quad . \tag{3-23}$$

Exercícios: 1) escrever explicitamente as 3 matrizes simétricas que representam os objetos χ^{AB} , φ^{AB} e $\mathcal{F}_{AB} \equiv F_A F_B$.

2) verificar que os objetos simétricos ψ_{AB} (construído segundo as mesmas regras a partir de $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ com $\epsilon_{0123} = -1$) e ρ_{AB} (a partir de $\eta_{\mu\nu\rho\sigma}$) têm representações matriciais iguais respectivamente às de $-\chi^{AB}$ e φ^{AB}.

Exercícios: 3) relacionar o objeto identidade de E_6, δ^A_B com os tensores invariantes $\eta^{\mu\nu}$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ etc. Sugestão: $\chi^{AB}\psi_{BC} = -\delta^A_C = -\varphi^{AB}\rho_{BC}$.

A equação do movimento da partícula sujeita a interações pode também ser obtida a partir da Lagrangeana, isto é, desdobrando-se explicitamente t e $\vec{x}$ na integral de Ação. Adiante será vista a obtenção de Lagrangeanas covariantes. A partir da (3-3) obtem-se, para o caso da interação eletromagnética,

$$L = -mc^2\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2} - e\phi(t,\vec{x}) + \frac{e}{c}\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(t,\vec{x}) = L[\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t),t] \qquad (3\text{-}24)$$

e as equações de movimento resultantes de

$$\partial L/\partial\vec{x} - \frac{d}{dt}\left(\partial L/\partial\dot{\vec{x}}\right) = 0$$

são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2}}\right) = e\left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c}\times\vec{B}\right) \qquad (3\text{-}25)$$

Note-se que o momentum $\vec{P}$ canônicamente conjugado à posição $\vec{x}$ é agora

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2}} + \frac{e}{c}\vec{A} \qquad (3\text{-}26)$$

Exercícios: 1) confirmar (3-24), e obter as (3-25); obter seu limite não-relativístico.

2) Obter a Hamiltoniana correspondente à Lagrangeana (3-24); escrever as duas no limite não relativístico.

Como último assunto dêste capítulo, considere-se a interação com um campo tensorial simétrico de 2ª ordem $\phi_{\alpha\beta}(x) = \phi_{\beta\alpha}(x)$.

Seja a integral de Ação

$$S = S_0 + S_i = -mc\int ds - mc\int \phi_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta ds \quad ;$$

busca-se a equação do movimento pelo princípio da minima Ação. Calcula-se δS :

$$\delta S = -mc\left[\delta\int\sqrt{u^\alpha u_\alpha}\, ds + \delta\int \phi_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta ds\right] =$$

$$= -mc\left[\int \delta\sqrt{u^\alpha u_\alpha}\, ds + \int\delta\phi_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta ds + \int \phi_{\alpha\beta}\, \delta u^\alpha dx^\beta + \int\phi_{\alpha\beta}\, u^\alpha \delta dx^\beta\right] =$$

$$= -mc\left[\int \frac{\partial\sqrt{u^\alpha u_\alpha}}{\partial u^\mu}\delta u^\mu ds + \int \phi_{\alpha\beta,\lambda}\,\delta x^\lambda u^\alpha u^\beta ds + \int\phi_{\alpha\beta}\,\delta\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right)dx^\beta + \int \phi_{\alpha\beta}\, u^\alpha d\,\delta x^\beta\right] =$$

$$= -mc\left[\int \frac{u_\mu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}}\,\delta\left(\frac{dx^\mu}{ds}\right)ds + \int\phi_{\alpha\beta,\lambda}\,\delta x^\lambda u^\alpha u^\beta ds + \int \phi_{\alpha\beta}\,\delta dx^\alpha u^\beta - \int d\left(\phi_{\alpha\beta}u^\alpha\right)\delta x^\beta\right] =$$

$$= -mc\left[-\int du_\mu\, \delta x^\mu + \int \phi_{\alpha\beta,\lambda}\,\delta x^\lambda u^\alpha u^\beta ds - \int d\left(\phi_{\alpha\beta}u^\beta\right)\delta x^\alpha - \int\left(\phi_{\alpha\beta,\gamma}u^\gamma u^\alpha + \phi_{\alpha\beta}w^\alpha\right)ds\,\delta x^\beta\right] =$$

$$= -mc\int\delta x^\lambda ds\left[-w_\lambda + \phi_{\alpha\beta,\lambda}u^\alpha u^\beta - \phi_{\lambda\beta,\alpha}u^\beta u^\alpha - \phi_{\lambda\beta}w^\beta - \phi_{\alpha\lambda,\beta}u^\beta u^\alpha - \phi_{\alpha\lambda}w^\alpha\right] =$$

$$= -mc\int\delta x^\lambda ds\left[-w^\alpha\left(\eta_{\alpha\lambda}+2\phi_{\alpha\lambda}\right) - \left(\phi_{\lambda\beta,\alpha}+\phi_{\lambda\alpha,\beta}-\phi_{\alpha\beta,\lambda}\right)u^\alpha u^\beta\right] \quad ;$$

as equações do movimento são portanto

$$w^\alpha\left(\eta_{\alpha\lambda}+2\phi_{\alpha\lambda}\right) + \left(\phi_{\alpha\lambda,\beta}+\phi_{\beta\lambda,\alpha}-\phi_{\alpha\beta,\lambda}\right)u^\alpha u^\beta = 0 \quad .$$

Define-se

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2\phi_{\mu\nu}(x) \quad ,$$

que ocasiona

$$\phi_{\mu\nu,\alpha} = \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu,\alpha}$$

e portanto as equações do movimento ficam

$$w^\alpha g_{\alpha\lambda} + \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\beta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}\right)u^\alpha u^\beta$$

define-se a inversa $g^{\mu\nu}(x)$ da $g_{\mu\nu}(x)$

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$$

com o que as equações ficam

$$\dot{u}^{\mu} + \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\alpha\lambda,\beta} + g_{\beta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}) u^{\alpha} u^{\beta} = 0$$

ou, utilizando os símbolos de Christoffel,

$$\dot{u}^{\mu} + \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} u^{\alpha} u^{\beta} = 0 \ .$$

Esta última equação mostra que a interação da partícula com um campo de 2ª ordem simétrico pode ser relacionada a uma mudança da métrica $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x)$ do espaço. A equação de movimento da partícula é uma geodésica em um espaço de métrica $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2\,\phi_{\mu\nu}(x)$.

4. REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA

4.1. Formulação Lagrangeana covariante do movimento da partícula

A ação, que é um invariante de Lorentz, tem na relatividade especial a forma

$$S = \int_a^b \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} A_\mu dx^\mu\right) .$$

A Lagrangeana decorrente desta ação prediz corretamente as equações do movimento, porém não é um escalar de Lorentz. Isto se deve ao fato de que se usa t como parâmetro da trajetória, o que quebra a simetria quadri-dimensional entre o espaço e o tempo. A fim de evitar esta assimetria, será proposta nesta seção a formulação de uma representação Lagrangeana covariante.

Este tipo de formulação é util em vista da generalidade dos resultados que serão obtidos. Embora seja aqui apresentada apenas no âmbito da relatividade especial, ela permite uma antevisão de métodos análoges necessários em outras teorias. Por exemplo, a formulação Hamiltoniana do campo gravitacional na relatividade geral é um tipo de teoria no qual os resultados da representação paramétrica são essenciais.

Começa-se por enunciar o princípio covariante de Hamilton: há um escalar de Lorentz, S, funcional de x^ν e $x'^\nu = \dfrac{dx^\nu}{d\theta}$, onde θ é um escalar,

$$S(\theta_2,\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbb{L}(x^\nu, x'^\nu, \theta)\, d\theta \qquad (4\text{-}1\text{-}1)$$

calculado sôbre a evolução real do sistema; a variação dessa integral será um extremo quando for ocasionada por variações $\delta x^\nu(\theta)$ que são nulas nos extremos θ_1 e θ_2, fora o que são arbitrá -

rias, i.é., $\delta S = 0$ para $\delta x^{\nu}(\theta_1) = \delta x^{\nu}(\theta_2) = 0$

Faz-se a imposição fundamental de que S seja independente da escolha do parâmetro θ, isto é,

$$\mathbb{L}(x^{\nu}, x'^{\nu}, \theta)\, d\theta = \mathbb{L}\left(x^{\nu}, \tilde{x}'^{\nu}, \bar{\theta}(\theta)\right) d\bar{\theta}$$

onde

$$\tilde{x}'^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{d\bar{\theta}} = x'^{\nu}\frac{d\theta}{d\bar{\theta}} = x'^{\nu}\alpha(\bar{\theta})$$

portanto

$$\mathbb{L}\left(x^{\nu}, \alpha x'^{\nu}, \bar{\theta}(\theta)\right) = \alpha\, \mathbb{L}\left(x^{\nu}, x'^{\nu}, \theta\right) \qquad (4\text{-}1\text{-}2)$$

ou seja, $x'^{\nu} \to \alpha x'^{\nu}$ implica em $\mathbb{L} \to \alpha \mathbb{L}$.

Isto significa que, como consequência da imposição fundamental, $\mathbb{L}$ é uma função homogênea das "velocidades" x'^{ν}, de 1º grau. Convém notar, da definição

$$f(\alpha x^1, \alpha x^2, \ldots) = \alpha^n f(x^1, x^2, \ldots)$$

de homogeneidade de grau n de uma função em seus argumentos, que homogeneidade de grau 1 não implica necessàriamente em linearidade nos argumentos, bem como homogeneidade de grau zero não implica em independência nos argumentos; como exemplos,

$$f(x,y,z) = 2x^2/y + 3y\,\mathrm{sen}(y/x) + xz \qquad \text{e} \qquad g(x,y,z) = y/x - e^{x^2/y^2} + xz/y$$

são homogêneas de graus 1 e 0, respectivamente, nos argumentos x e y (não em z). Lembrando o teorema de Euler a respeito das funções homogêneas, que afirma que se $f(x_1, \ldots, x_k)$ for uma função homogênea de grau n nos argumentos, e se for diferenciável, então

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = nf \quad ,$$

obtem-se

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x'^{\nu}}\, x'^{\nu} = \mathbb{L} \tag{4-1-3}$$

Outro resultado que será usado é: se $f(x_1 \cdots x_k)$ for homogênea de grau n nos argumentos, então $\partial f / \partial x_i$ serão homogêneas de grau (n-1) nos argumentos.

Como $\mathbb{L}$ e θ são escalares, segue-se que a grandeza

$$p_\mu = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x'^{\mu}} \tag{4-1-4}$$

é um quadrivetor; portanto nesta formulação o momentum canônico é um quadrivetor. Devido à (4-1-3),

$$p_\mu\, x'^{\mu} = \mathbb{L} .$$

As equações de Enler-Lagrange serão da forma

$$\frac{\delta \mathbb{L}}{\delta x^{\mu}} \equiv \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x'^{\mu}} = 0 \quad ,$$

e foram obtidas de

$$\delta S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\delta \mathbb{L}}{\delta x^{\mu}}\, \delta x^{\mu} d\theta = 0 .$$

Um caso particular de $\delta x^{\mu}(\theta)$ são os tangentes à trajetória,

$$\delta x^{\mu}(\theta) = \alpha(\theta)\, x'^{\mu}(\theta) \quad ,$$

com as restrições sôbre a função infinitesimal $\alpha(\theta)$ de se anular nos limites,

$$\alpha(\theta_1) = \alpha(\theta_2) = 0 \quad ;$$

com os $\delta x^{\mu}(\theta)$ tangentes à trajetória do sistema, não se tem uma variação no sentido do cálculo variacional, daí

$$\delta S \equiv 0$$

ou seja,

$$x'^{\mu} \frac{\delta \mathbb{L}}{\delta x^{\mu}} \equiv 0 \quad ; \tag{4-1-8}$$

para isto se considerou a arbitrariedade de $\alpha(\theta)$ no intervalo (θ_1 , θ_2). Conclue-se portanto que as 4 equações de Euler-Lagrange não são algèbricamente independentes.

Considere-se agora a evolução real do sistema, $\delta \mathbb{L}/\delta x^{\mu} = 0$, partindo de θ_0 e passando pelo ponto final variável θ , com apenas

$$\delta x^{\mu}(\theta_0) = 0 \quad ;$$

então

$$\delta S = \left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x'^{\mu}} \delta x^{\mu}\right)_{\theta_0}^{\theta} = p_{\mu} \delta x^{\mu}(\theta) \ .$$

Neste caso $S = S\left(x^{\mu}(\theta)\right)$ e se tem

$$p_{\mu} = \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} \quad ,$$

e portanto

$$p_{\mu} - \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad . \tag{4-1-9}$$

Supõe-se que em geral esta relação possa ser tomada da forma

$$x^{\mu}\left(p_{\mu} - \frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\right) = 0$$

ou da forma ainda mais geral

$$f(x^{\mu}, p_{\mu}) = 0 \quad .$$

A propriedade de $\mathbb{L}$ ser homogênea de grau 1 em x'^{μ} implica em p_{μ} ser homogênea de grau zero em x'^{ν}

$$x'^{\nu}\,\partial p_{\mu}/\partial x'^{\nu} = 0$$

ou seja

$$x'^{\nu}\;\partial^2\mathbb{L}/\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu} = 0\;;$$

a matriz $\Lambda_{\mu\nu} \equiv \partial^2\mathbb{L}/\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}$ tem portanto x'^{ν} como autovetor correspondente ao autovalor zero, i.é.,

$$\Lambda_{\mu\nu}\, x'^{\nu} = 0 \tag{4-1-10}$$

e é portanto uma matriz singular.

Tem-se admitindo a partir dêste ponto que $\partial\mathbb{L}/\partial\theta = 0$, que

$$\frac{\delta\mathbb{L}}{\delta x^{\mu}} \equiv \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial x^{\mu}} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial x'^{\mu}} \equiv \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2\mathbb{L}}{\partial x'^{\mu}\partial x^{\nu}}\,x'^{\nu} - \frac{\partial^2\mathbb{L}}{\partial x'^{\mu}\,\partial x'^{\nu}}\,x''^{\nu} =$$
$$\equiv \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2\mathbb{L}}{\partial x'^{\mu}\partial x^{\nu}}\,x'^{\nu} - \Lambda_{\mu\nu}\,x''^{\nu}\;;$$

multiplicando por x'^{μ} e considerando a (4-1-8) e a (4-1-10) vem que

$$x'^{\mu}\frac{\delta\mathbb{L}}{\delta x^{\mu}} \equiv x'^{\mu}\left(\frac{\partial\mathbb{L}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2\mathbb{L}}{\partial x'^{\mu}\partial x^{\nu}}\,x'^{\nu}\right) \equiv 0 \tag{4-1-11}$$

Como $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\,x^{\nu},\ x'^{\nu}\,)$ segue-se que a combinação linear entre as quatro equações do movimento $\delta\mathbb{L}/\delta x^{\nu} = 0$ não depende dos x''^{μ},

$$x'^{\mu}\frac{\delta\mathbb{L}}{\delta x^{\mu}} \equiv \phi\left(x^{\alpha}(\theta)\;,\; x'^{\alpha}(\theta)\right) \equiv 0\;. \tag{4-1-12}$$

Uma relação dêste tipo é uma vinculação que limita a escolha dos dados iniciais $x^{\mu}(\theta_0)$ e $x'^{\mu}(\theta_0)$ sôbre a hipersuperfície θ_0 = const. Os x^{α} e x'^{α} devem satisfazer às condições (4-1-12) para qualquer valor de θ e em particular em $\theta = \theta_0$, não podendo portanto ser arbitràriamente escolhidos sôbre a hipersuperfície $\theta = \theta_0$.

Eis um resumo dos resultados desta seção:

i) $\mathbb{L}$ é homogênea em x'^{μ}, com grau 1; isto implica em que p_{μ} é homogênea em x'^{μ} com grau zero;

ii) entre as 4 quantidades p_{μ} existe uma relação

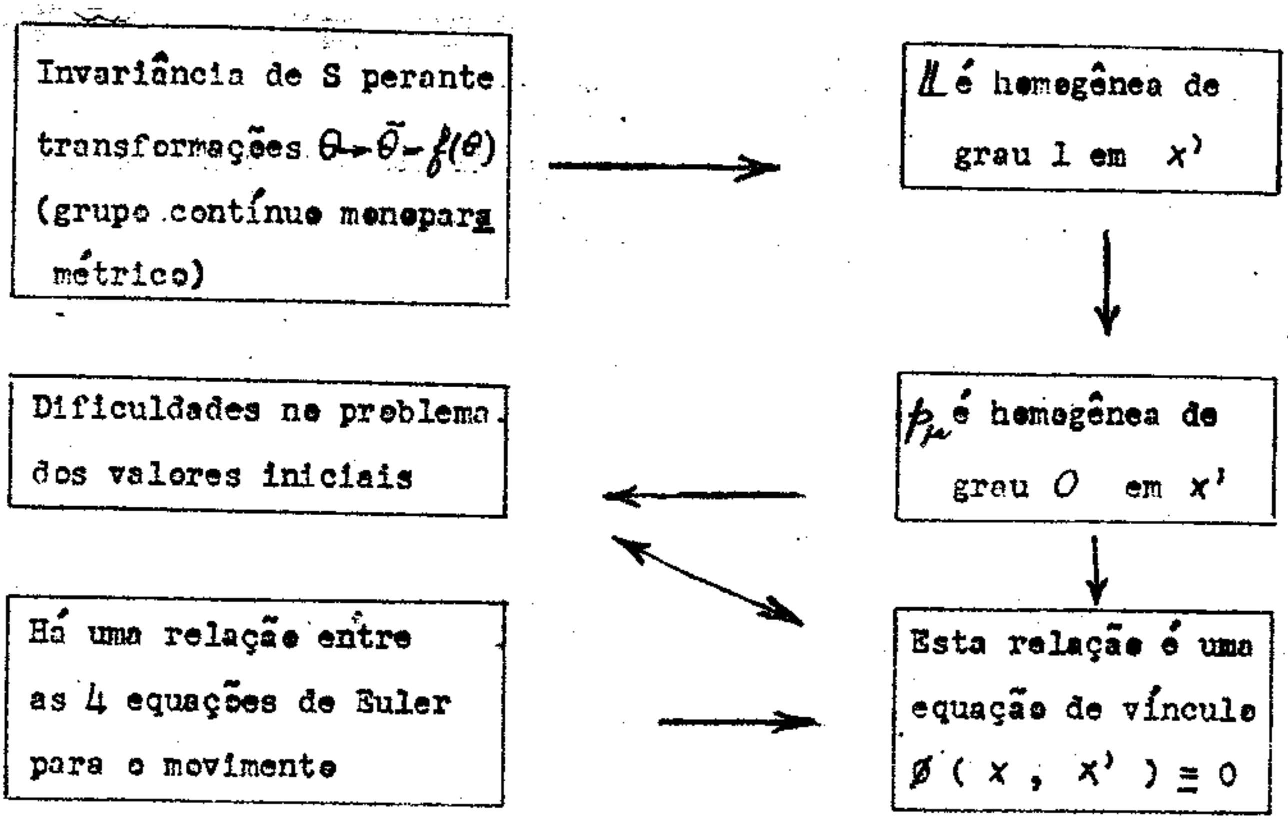
$$f(x^{\mu}, p_{\mu}) = 0 \quad ;$$

iii) as 4 equações de movimento $\delta \mathbb{L}/\delta x^{\mu} = 0$ são sujeitas à condição $x'^{\mu}\delta \mathbb{L}/\delta x^{\mu} \equiv 0$; a propriedade de que p_{μ} é homogênea de ordem zero em x' implica em que esta condição é uma equação de vinculação (envolvendo x e x', mas não as x'')

$$x'^{\mu}\frac{\delta \mathbb{L}}{\delta x^{\mu}} = \phi(x\,,\,x') \equiv 0 \quad .$$

São êstes os resultados de uma formulação Lagrangeana covariante para o movimento da partícula.

Pode-se esquematizar êsses resultados da seguinte forma:



Em teorias mais avançadas vê-se que esta sequência de propriedades é característica das formulações que apresentam invariância perante um grupo de transformações que dependem de funções, no presente caso $\tilde{\theta} = f(\theta)$. Em geral obtem-se tantas vinculações quantas forem as funções presentes nos geradores do grupo de invariância.

4-2. FORMULAÇÃO HAMILTONIANA COVARIANTE DO MOVIMENTO DA PARTÍCULA

Foi visto, na seção anterior, que existe uma relação conectando x^μ e o momentum p_μ; será visto agora que essa relação envolve a Hamiltoniana.

De $f(x^\mu, p_\mu) = 0$ obtem-se

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial f}{\partial p_\mu} dp_\mu \quad ;$$

e como

$$p_\mu \equiv \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x'^\mu} = \phi_\mu(x, x')$$

vem que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\, dx^\mu + \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha + \frac{\partial p_\mu}{\partial x'^\alpha}\, dx'^\alpha\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\mu}\right) dx^\mu + \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial x'^\alpha}\, dx'^\alpha \quad ;$$

portanto, como $df = 0$, obtem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\mu} = 0 \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial x'^\alpha} = 0 \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

Esta última relação pode ser escrita como

$$\frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial x'^\mu \partial x'^\alpha} = 0 \quad ,$$

e como $x'^\mu \partial^2 \mathbb{L}/\partial x'^\mu \partial x'^\alpha = 0$ (4-1-11) segue-se que $\partial f/\partial p_\mu$ é proporcional à velocidade x'^μ ,

$$x'^\mu = \alpha \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \quad .$$

Substituindo esta equação na (4-2-1) vem

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + x'^\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\mu} = 0$$

ou seja

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + x'^\alpha \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial x'^\alpha \partial x^\mu} = 0 \quad .$$

A equação de vínculo $x'^\mu \delta \mathbb{L}/\delta x^\mu \equiv 0$ (4-1-12) dá

$$x'^\alpha \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial x'^\alpha \partial x^\mu} = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x^\mu}$$

e portanto

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad ; \qquad (4\text{-}2\text{-}4)$$

e como

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\theta}\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x'^\mu} = 0 = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\theta} p_\mu \quad ,$$

vem

$$\frac{dp_\mu}{d\theta} - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x^\mu} = 0 \, ,$$

ou seja,

$$p'_\mu = \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x^\mu} \quad ;$$

usando (4-2-4) obtem-se

$$p'_\mu = -\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad . \qquad (4\text{-}2\text{-}5)$$

Portanto obteve-se o sistema simultâneo

$$\begin{cases} x'^\mu = \alpha \, \partial f / \partial p_\mu \\ p'_\mu = -\alpha \, \partial f / \partial x^\mu \quad ; \end{cases} \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

estas são as equações covariantes de Hamilton para a função Hamiltoniana

$$H = \alpha f(x^\alpha, p_\alpha) = 0 \quad .$$

Esta função é um escalar de Lorentz construido com x^α e p_α . Como esta última quantidade é uma função homogênea das velocidades de grau zero, a Hamiltoniana se anula; outra maneira, mais simples, de provar isso é:

$$H = x'^\alpha p_\alpha - \mathbb{L} = x'^\alpha \partial \mathbb{L} / \partial x'^\alpha - \mathbb{L} = \mathbb{L} - \mathbb{L} \equiv 0 \quad .$$

Para a obtenção das equações canônicas (4-2-6) usou-se a equação do vínculo $\phi(x, x') = 0$ da representação Lagrangeana ; essa vinculação é transposta para a representação Hamiltoniana na forma $H \approx 0$. Esta é a chamada vinculação da Hamiltoniana.

Para melhor compreensão do papel desempenhado pela vinculação Hamiltoniana introduza-se o parêntese de Poisson escalar entre dois escalares de Lorentz $A(x^\alpha, p_\alpha)$ e $B(x^\alpha, p_\alpha)$,

$$[A, B]_\theta \equiv \frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial B}{\partial p_\mu} - \frac{\partial A}{\partial p_\mu}\frac{\partial B}{\partial x^\mu} \qquad (4\text{-}2\text{-}8)$$

Para qualquer escalar

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta} + [A, H]_\theta \quad ; \qquad (4\text{-}2\text{-}9)$$

em particular a Hamiltoniana é uma constante de movimento,

$$\frac{dH}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial \theta}$$

Recomenda-se ao leitor o pormenorizado trabalho de Dirac sôbre teorias canônicas com Jacobiano nulo; alguns dos conceitos ali emitidos são de interêsse no presente capítulo.

Por definição uma "vinculação de fraca anulação" é qualquer função das variáveis dinâmicas que deva ser anulada após todos os seus parênteses de Poisson com outros escalares haverem sido calculados; por exemplo, $\xi(x^\alpha, p_\alpha)$ é tal variável se, para qualquer $A(x^\alpha, p_\alpha)$,

$$[\xi, A] = c_1 B(x^\alpha, p_\alpha) + c_2 \xi(x^\alpha, p_\alpha) = c_1 B(x^\alpha, p_\alpha) \ .$$

Em outras palavras, a relação $\xi = 0$ é verdadeira, porém $\partial\xi/\partial x^\alpha$ e $\partial\xi/\partial p_\alpha$ não são nulos.

A vinculação Hamiltoniana é de fraca anulação, pois em particular pode-se escrever as (4-2-6) como

$$x'^{\mu} = [x^{\mu}, H]_{\theta}$$

$$p'_{\mu} = [p_{\mu}, H]_{\theta} \quad .$$

Prosseguindo com a interpretação de H, usa-se a propriedade das transformações canônicas infinitesimais que diz que a variação infinitesimal em uma variável dinâmica ϕ gerada por outra variável dinâmica $G\delta\epsilon$ é dada por

$$\delta\phi = \delta\epsilon[\phi, G] \quad .$$

Estritamente deve-se escrever $\delta\phi = [\phi, \delta\epsilon G]$, entretanto no presente caso isto não é relevante pois o gerador em consideração é $-\delta\theta H$, que se anula fracamente. Assim,

$$\delta\phi = [\phi, G(\theta)] ,$$

$$G(\theta) = -\xi(\theta)H(\theta)$$

$$\xi(\theta) = \delta\theta(\theta)$$

portanto, a menos de um termo de anulação fraca,

$$\delta\phi(\theta) = -\xi(\theta)[\phi(\theta), H(\theta)]_{\theta} = -\xi(\theta)\,\phi'(\theta) \quad . \qquad (4\text{-}2\text{-}10)$$

A fim de se compreender o significado desta variação, relembre-se que p_{μ} é homogênea de ordem zero em x'^{μ}, o que implica em que perante uma tranformação de parâmetro,

$$\bar{\theta} = \theta + \xi(\theta) \quad ,$$

o p_{μ} fica invariante, $\bar{p}_{\mu} = p_{\mu}$. O mesmo ocorre para os x^{μ}, isto é, $\bar{x}^{\mu} = x^{\mu}$; portanto, as variáveis canônicas (x^{μ}, p_{μ}) formam um conjunto de 8 escalares no Ω - espaço.

Consequentemente, qùalquer função delas, em particular a Hamiltoniana, é um escalar do θ- espaço. Para uma $\phi(x\,,\,p)$ genérica, isto representa dizer que ela se altera como um escalar perante a transformação de parâmetro $\bar{\theta} = \theta + \xi(\theta)$ com gerador $-\xi(\theta)\,H(\theta)$. O vínculo Hamilniano é o gerador do grupo mono-paramétrico contínuo dos mapeamentos infinitesimais no θ-espaço. A Hamiltoniana $H(\theta)$ é mais do que um escalar, comporta-se como um invariante pois comuta consigo mesmo, $\delta H(\theta)=0$.

A equação (4-2-10) para $\phi(\theta) = x^{\mu}(\theta)$ é

$$\delta x^{\mu}(\theta) = -\xi(\theta)\; x'^{\mu}(\theta) \quad ,$$

e repete que $x^{\mu}(\theta)$ é um conjunto de quatro escalares no θ-espaço. Que ocorre com $x'^{\mu}(\theta)$? Êles se comportam como quatro vetores no θ - espaço. Eis como se vê isso:

$$\bar{x}'^{\mu}(\bar{\theta}) \equiv \frac{dx^{\mu}}{d\bar{\theta}} = \frac{dx^{\mu}}{d\theta}\frac{d\theta}{d\bar{\theta}} \simeq \left(1 - \frac{d\xi}{d\theta}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\theta}$$

ou

$$\delta x'^{\mu}(\theta) = \bar{x}'^{\mu}(\theta) - x'^{\mu}(\theta) = -\frac{d\xi}{d\theta}\,x'^{\mu}(\theta) - \xi(\theta)\,x''^{\mu}(\theta) \qquad (4\text{-}2\text{-}11)$$

ou ainda na nova notação

$$\delta x'^{\mu}(\theta) = \left[x'^{\mu}(\theta)\,,\,G(\theta)\right] = \left[\left[x^{\mu}(\theta), H(\theta)\right],\,G(\theta)\right] \quad ;$$

usando a identidade de Jacobi escreve-se isso da forma

$$\delta x'^{\mu}(\theta) = \left[\left[x^{\mu}(\theta)\,,\,G(\theta)\right],\,H(\theta)\right]$$

ou

$$\begin{aligned}\delta x'^{\mu}(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\left[x^{\mu}(\theta)\,,\,G(\theta)\right] = \frac{d}{d\theta}\left(-\xi(\theta)\,x'^{\mu}(\theta)\right)\\ &= -\frac{d\xi}{d\theta}\,x'^{\mu}(\theta) - \xi(\theta)\,x''^{\mu}(\theta)\end{aligned}$$

que é a repetição da (4-2-11) ; isto mostra que $x'^{\mu}(\theta)$ forma um conjunto de 4 vetores no θ-espaço (vetores contravariantes). O mesmo ocorre com $p'_{\mu}(\theta)$.

Como resultado, uma variável dinâmica (não necessàriamente um escalar de Lorentz) invariante no θ-espaço é uma variável que tem parêntese de Poisson nulo com a Hamiltoniana H,

$$\left[U(x,p)\,,\,H\right]_{\theta}=0\qquad ;$$

ou então

$$\left[U(x,p)\,,\,H\right]_{\theta}=\alpha H \qquad (4\text{-}2\text{-}12)$$

para α = constante arbitrária. Por definição, chama-se variáveis de 1ª classe um conjunto de quantidades que formam, com respeito ao parêntese de Poisson, uma álgebra de Lie:

$$\left[C_i(x,p)\,,\,C_j(x,p)\right]_{\theta}=\alpha_{ij}^{k}\,C_k(x,p)\qquad ;$$

os supracitados U (invariante no θ- espaço) e H são duas variáveis de 1ª classe.

4.3- O PROBLEMA DAS CONDIÇÕES INICIAIS

Na representação Lagrangeana o problema dos valores iniciais é estabelecido assim: dados em $\theta=\theta_0$ as oito variáveis

$x^{\mu}(\theta)$ e $x'^{\mu}(\theta)$, buscar determinar pelas equações de Lagrange a evolução do sistema na região $\theta>\theta_0$ das variáveis $x^{\mu}(\theta)$.

Pode-se escrever, tomando $\theta_0=0$,

$$x^{\mu}(\theta)=x^{\mu}(0)+\theta x'^{\mu}(0)+\frac{\theta^2}{2!}x''^{\mu}(0)+\cdots \qquad ; \qquad (4\text{-}3\text{-}1)$$

das equações do movimento já foi obtida a equação

$$\frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial x^\mu \partial x'^\nu} x'^\mu + \Lambda_{\mu\nu} x''^\mu - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x^\nu} = 0 \quad ;$$

se esta equação puder ser resolvida para os x''^μ , isto é, se se puder obter

$$x''^\mu = (\Lambda^{-1})^{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial x^\alpha \partial x'^\nu} x'^\alpha \right\} = \Psi^\mu(x, x') \quad ,$$

então se estará com a expressão de $x''^\mu(0)$ em função dos dados de Cauchy $x^\mu(0)$ e $x'^\mu(0)$. O mesmo ocorre com todas as derivadas superiores a $x''^\mu(\theta)$.

Assim sendo, a existência de soluções para o problema dos valores iniciais se reduz à existência da matriz inversa à matriz Λ . Já foi visto que em geral esta matriz não tem inversa, e consequentemente o problema de Cauchy não tem solução.

Na seção seguinte serão dados alguns exemplos das possíveis escolhas de parâmetros; entretanto, para maior clareza, convem discutir um pouco mais as implicações contidas na indeterminação acima menciona - da. O resultado obtido foi o seguinte: dados $x^\mu(\theta_0)$ e $x'^\mu(\theta_0)$ em algum ponto da trajetória da partícula, referidos ao parâmetro θ , então em geral $x^\mu(\theta)$ e consequentemente $x'^\mu(\theta)$ para $\theta > \theta_0$ não são determinados pelas equações de movimento.

Se se escolher θ = tempo próprio da partícula (ou tempo próprio instantâneo, no caso das interações), ocorre que:

1 - <u>para partículas livres</u>: $x^\mu(\tau_0)$ e $x'^\mu(\tau_0)$ são dados, mas $x^\mu(\tau)$ e $x'^\mu(\tau)$ não são determinados. Isto não está em desacôrdo com o formalismo usual pois não se pode usar a conhecida relação

$$u^\mu = \dot{x}^\mu \frac{dt}{d\tau} \quad , \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$$

pois t não é covariante (a reparametrização $\tau \to t$ não é permitida) e portanto a não obtenção de $x^\mu(\tau)$ não implica em uma não determinação de

$$u^\mu(t) = \dot{x}^\mu \frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{x}^\mu / c}{\sqrt{1-(\dot{\vec{x}}/c)^2}} \quad .$$

ii - <u>para partículas com interação</u> : no tempo próprio instantâneo inicial τ_0 são dados $x^\mu(\tau_0)$ e $u^\mu(\tau_0)$; em um instante posterior τ êles não são determinados, pelo mesmo argumento.

É possível ver a origem dêsse fracasso na tentativa de determinação das variáveis de movimento na formulação covariante. Dados os valores de $x^\mu(\theta_0)$ e $x'^\mu(\theta_0)$ sempre se pode considerar a transformação $\bar{\theta} = f(\theta)$ tal que se reduza a θ_0 em $\theta = \theta_0$, isto é,

$f(\theta) \to \theta_0$ quando $\theta \to \theta_0$,

sendo arbitrária no restante. Os dados de Cauchy permanecem fixos, mas $x^\mu(\theta)$ mudam arbitràriamente. Como essas transformações são permitidas, vê-se que $x^\mu(\theta)$ não pode ser determinado univocamente.

Uma outra forma simples de se verificar isso é notar que $x^\mu(\theta)$ formam um conjunto de escalares no θ-espaço, e mudam da forma

$$\delta x^\mu(\theta) = -\xi(\theta)\, x'^\mu(\theta)$$

perante uma transformação $\bar{\theta} = \theta + \xi(\theta)$. Como $\xi(\theta)$ é arbitrária, as $x^\mu(\theta)$ são também arbitrárias como funções de θ ; o mesmo se aplica para $x'^\mu(\theta)$.

4.4- <u>ESCOLHA DO PARÂMETRO NA PRÁTICA</u>

A escolha natural é $\theta = c\tau$, com τ = tempo próprio , que em verdade já foi usado no problema variacional $\delta S = 0$ (entretanto, naquêle problema não foi feito uso de Lagrangeana ou Hamiltoniana).

Para esta escolha x'^{μ} coincide com a quadrivelocidade u^{μ}.

Anteriormente foi usado, com $A^{\mu} = (\phi, \vec{A}) = A^{\mu}(x)$

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(-mc - \frac{e}{c} A_{\mu} u^{\mu}\right) c\, d\tau \quad ; \qquad (4\text{-}4\text{-}1)$$

entretanto a Lagrangeana que dá as corretas equações do movimento e que é homogênea de grau 1 nas velocidades é (como $u^{\mu}u_{\mu} = 1$),

$$\mathbb{L} = -mc^2\sqrt{u^{\mu}u_{\mu}} - eA_{\mu}u^{\mu} \; ;$$

como

$$\partial\mathbb{L}/\partial x^{\mu} = -e u^{\nu}\partial A_{\nu}/\partial x^{\mu} \; ,$$

$$\partial\mathbb{L}/\partial u^{\mu} = -mc^2 u_{\mu} - eA_{\mu} \qquad \text{e}$$

$$(\partial/c\partial\tau)(\partial\mathbb{L}/\partial u^{\mu}) = -mc^2 w_{\mu} - e u^{\nu}\partial A_{\mu}/\partial x^{\nu} \; ,$$

as equações do movimento resultam ser

$$-e u^{\nu} A_{\nu,\mu} + mc^2 w_{\mu} + e u^{\nu} A_{\mu,\nu}$$

ou seja, com $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$,

$$w_{\mu} = \frac{e}{mc^2} F_{\mu\nu} u^{\nu} .$$

A não-independência dessas 4 equações fica patente se se notar que

$$u^{\mu}\left(w_{\mu} - \frac{e}{mc^2} F_{\mu\nu} u^{\nu}\right) \equiv 0 \quad , \qquad (4\text{-}4\text{-}3)$$

que corresponde à condição $x'^{\mu}\frac{\delta\mathbb{L}}{\delta x^{\mu}} \equiv 0$ entre as equações de Euler - Lagrange.

É fácil constatar que p_{μ} é efetivamente homogênea de grau zero em u^{μ}, pois

$$p_{\mu} = \frac{\partial\mathbb{L}}{\partial u^{\mu}} = -\frac{mc^2 u_{\mu}}{\sqrt{u^{\rho}u_{\rho}}} - eA_{\mu} \quad ;$$

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ -mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\, x'^{\mu} x'^{\nu}} - \frac{e}{c} A_{\mu} x'^{\mu} \right\} d\theta$$

e portanto

$$L = -mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\, x'^{\mu} x'^{\nu}} - \frac{e}{c} A_{\mu} x'^{\mu} \qquad (4\text{-}4\text{-}4)$$

é homogênea de grau 1 em x'^{μ}. Obtem -se

$$p_{\mu} \equiv \partial L / \partial x'^{\mu} = \frac{mc\, \eta_{\mu\nu} x'^{\nu}}{\sqrt{\eta_{\alpha\beta}\, x'^{\alpha} x'^{\beta}}} - \frac{e}{c} A_{\mu} \qquad (4\text{-}4\text{-}5)$$

que é homogênea de grau zero em x'^{μ} .

5. Campos Espinoriais na Relatividade Especial

5.1. Redefinição do Grupo de Lorentz Próprio e Homogêneo

No capítulo 1 definiu-se provisòriamente grupo de Lorentz próprio como o constituido pelas matrizes $4x4$ $L^{\mu}{}_{\nu}$ satisfazendo $L^T\eta L = \eta$; verificou-se que é um grupo de 6 parâmetros λ_a (a=1...6) que por conveniência de interpretação física foram separados em θ_i e ν_i $(i=1,2,3)$.

Para transformações infinitesimais, pôde-se impor aos parâmetros θ_i e ν_i interpretação de ângulos e velocidades ($\div$ c); para tal, foi necessário definir-se as 6 matrizes $4x4$ I_i e J_i , e impor à matriz de Lorentz correspondente à transformação a expressão ,

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \left[\exp(\delta\theta_i I_i + \delta\nu_i J_i)\right]^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \left(\delta\theta_i I_i + \delta\nu_i J_i\right)^{\mu}{}_{\nu} \qquad (5\text{-}1\text{-}1)$$

No caso de transformações finitas, diz-se então que os parâmetros são λ_a quando a matriz for escrita da forma (com $J_i \equiv I_{i+3}$)

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \left[\exp(\lambda_a I_a)\right]^{\mu}{}_{\nu} = \left[\exp(\theta_i I_i + \nu_i J_i)\right]^{\mu}{}_{\nu} . \qquad (5\text{-}1\text{-}2)$$

Fica a cargo do leitor verificar que essas matrizes satisfazem às seguintes regras de comutação:

$$[I_i , I_j]_- = \epsilon_{ijk} I_k \quad , \qquad (5\text{-}1\text{-}3)$$

$$[I_i , J_j]_- = \epsilon_{ijk} J_k \quad \text{e} \qquad (5\text{-}1\text{-}4)$$

$$[J_i , J_j]_- = -\epsilon_{ijk} I_k \quad . \qquad (5\text{-}1\text{-}5)$$

Os campos escalares e tensoriais não são os únicos campos que podem existir na variedade de Minkowski, com lei de transformação homogênea e linear perante uma transformação de Lorentz das coordenadas;

há também os campos espinoriais, espinoriais pontuados, e outros.

A grandeza física que está associada a cada tipo de campo e que a diferencia dos demais é o momento angular intrínseco, ou spin. Esta questão será vista no final dêste capítulo (Apêndice A)

É fácil verificar que as matrizes 2x2

$$I_1' = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad I_2' = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \quad I_3' = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$$J_1' = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad J_2' = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} \text{ e } J_3' = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

satisfazem às mesmas regras de comutação (5-1-3,4,5). Há uma infinidade de outros conjuntos de 6 matrizes de ordem n que satisfazem às mesmas regras . A cada conjunto se associa um particular objeto geométrico.

No caso das matrizes de ordem 4 os elementos do grupo eram as matrizes $L^{\mu}{}_{\alpha}(\vec{\theta},\vec{\nu})$, $L = exp[\theta_i I_i + \nu_i J_i]$; no caso recém-mencionado das matrizes I_i' e J_i' de ordem 2, os elementos do grupo serão as matrizes $\mathbb{L}^{A}{}_{B}(\vec{\theta},\vec{\nu})$, $\mathbb{L} = exp[\theta_i I_i' + \nu_i J_i']$.

Diz-se que as matrizes $L^{\mu}{}_{\nu}(\theta_i,\nu_i)$ e $\mathbb{L}^{A}{}_{B}(\theta_i,\nu_i)$ são representações diferentes de um mesmo grupo, com isso querendo-se dizer que os geradores correspondentes satisfazem às mesmas regras de comutação (ver Apêndice B).

5.2. Classificação das Representações do Grupo de Lorentz Próprio

Essa classificação pode ser feita usando-se um par de números (s, s') com $s, s' = 0, 1/2, 1, \ldots$. Serão tratadas aqui as representações (0,0), (1/2, 1/2), (1/2, 0) e (0,1/2) denominadas respectivamente escalar, tensorial, espinorial e espinorial pontuada.

Os elementos do grupo de Lorentz próprio são matrizes quadradas $L^{(s,s')}$ de ordem $(2s+1)(2s'+1)$; da mesma ordem são as matrizes que correspondem aos geradores, $I_i^{(s,s')}$ e $J_i^{(s,s')}$.

A origem dos números s e s' é a seguinte; as matrizes

$$M_j^{(s,s')} \equiv \frac{1}{2}\left[I_j^{(s,s')} + i\, J_j^{(s,s')}\right] \quad \text{e} \tag{5-2-1}$$

$$N_j^{(s,s')} \equiv \frac{1}{2}\left[I_j^{(s,s')} - i\, J_j^{(s,s')}\right] \tag{5-2-2}$$

satisfazem, com $\mathbb{1}_n$ matriz unidade de ordem n,

$$\vec{M}^{(s,s')} \cdot \vec{M}^{(s,s')} = -s(s+1)\ \mathbb{1}_{(2s+1)(2s'+1)} \tag{5-2-3}$$

e

$$\vec{N}^{(s,s')} \cdot \vec{N}^{(s,s')} = -s'(s'+1)\ \mathbb{1}_{(2s+1)(2s'+1)} \quad , \tag{5-2-4}$$

além de satisfazerem, como consequência direta de (5-1-3,4,5),

$$[M_i\,, M_j]_- = \epsilon_{ijk}\, M_k \quad , \tag{5-2-5}$$

$$[N_i\,, N_j]_- = \epsilon_{ijk}\, N_k \quad \text{e} \tag{5-2-6}$$

$$[M_i\,, N_j]_- = 0 \qquad ; \tag{5-2-7}$$

ou seja, s é um número associado às matrizes M_i, enquanto que s' se relaciona às matrizes N_i.

Como as (5-2-5) e (5-2-6) são as regras de comutação dos geradores do grupo ortogonal tridimensional(O_3), diz-se que o grupo de Lorentz constitue uma "duplicação de O_3".

Portanto o caminho geral para a obtenção dos elementos do grupo em uma representação (s,s') é:

1º. encontrar 6 matrizes M_i e N_i de órdem $(2s+1)(2s'+1)$ que satisfaçam (5-2-3,4,5,6,7)

2º. obter as I_i e J_i por meio das (5-2-1) e (5-2-2)

3º. o elemento correspondente à transformação (θ_i, ν_i) é

$$L = \exp\left[\theta_i I_i + \nu_i J_i\right] \quad . \tag{5-2-8}$$

5.3. As representações escalar e tensorial do grupo próprio de Lorentz

5.3.1. A representação (0,0) é chamada escalar de Lorentz. Suas matrizes devem ser de ordem $(2\times0+1)(2\times0+1)\equiv 1$, ou seja, números. Como os únicos três números $M_i^{(0,0)}$ que satisfazem (5-2-5,6,7) são os números 0,0 e 0, o mesmo ocorrendo com $N_i^{(0,0)}$ vem que $I_i^{(0,0)}=J_i^{(0,0)}=0$.

Então, por (5-2-8), para quaisquer valores dos parâmetros (θ_i, ν_i) se terá $L^{(0,0)}(\theta_i,\nu_i)=\exp[0]=1$, e portanto a lei de transformação de um campo escalar é $\phi(x)\to\phi'(x')=L^{(0,0)}(\theta_i,\nu_i)\,\phi(x)=\phi(x)$ (5-3-1)

5.3.2. A representação (1/2,1/2) é composta de matrizes 4x4 e é a representação tensorial de Lorentz (note-se que também as representações (3/2,0) e (0,3/2) são de 4ª ordem, mas seus objetos não são tensores).

Exercício: comprovar que as expressões de I_i e J_i dadas no capítulo 1, levam, por meio de (5-2-1,2) e (5-2-3,4) à conclusão de que trata da representação S=1/2 , S'=1/2 .

Note-se que há uma infinidade de conjuntos de 6 matrizes de 4ª ordem , M_i e N_i , satisfazendo (5-2-5,6,7) e $\vec{M}^2=\vec{N}^2=-3/4$; dado um dêsses conjuntos (M_i, N_i), pode-se obter um outro conjunto (M_i', N_i') por uma transformação de similaridade por uma matriz não singular arbitrária de 4 ordem S:

$$M_i' = S M_i S^{-1} \quad , \quad N_i' = S N_i S^{-1} \quad ; \qquad (5\text{-}3\text{-}3)$$

há portanto uma infinidade de conjuntos de 6 matrizes I_i e J_i que servem de geradores na representação tensorial. Para cada um dêsses conjuntos, os parâmetros θ_i e ν_i têm uma interpretação físico-geométrica diferente; se quizermos atribuir aos θ_i e ν_i as interpretações (quando infinitesimais) de ângulos e velocidades na direção i , então os I_i e J_i terão que ser os indicados no capítulo 1 ; esta obrigatoriedade é decorrência de que os objetos tensoriais, como os escalares, podem corresponder linearmente a grandezas físicas mensuráveis.

5.4. A Representação Espinorial do Grupo de Lorentz

Chama-se a representação (1/2,0) de espinorial de Lorentz. É composta de matrizes 2x2. Como na representação tensorial, há uma infinidade de conjuntos de 6 matrizes

$M_i^{(1/2,0)}$ e $N_i^{(1/2,0)}$ satisfazendo (5-2-5,6,7) e

$$[\vec{M}^{(1/2,0)}]^2 = -3/4 \quad e \quad [\vec{N}^{(1/2,0)}]^2 = 0 \,. \qquad (5\text{-}4\text{-}1)$$

Como todos os objetos espinoriais que contribuem para a formação de uma grandeza física o fazem de uma forma invariante nos índices espinoriais (mais adiante será vista melhor esta questão), conclue-se que não há preferência por um particular conjunto de matrizes $I_i^{(1/2,0)}$ e $J_i^{(1/2,0)}$ por questões de interpretação dos parâmetros θ_i e ν_i ; assim sendo, somente por conveniências de cálculo escolhe-se (não é possível evitar matrizes complexas)

$$I_j^{(1/2,0)} = -\frac{i}{2}\,\sigma_P^j \qquad e \qquad J_i^{(1/2,0)} = -\frac{1}{2}\,\sigma_P^i \qquad (5\text{-}4\text{-}2)$$

onde σ_P^i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,, \quad \sigma_P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \sigma_P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \,. \qquad (5\text{-}4\text{-}3)$$

Exercícios: 1) Verificar que as matrizes I_i e J_i de (5-4-2) satisfazem (5-1-3,4,5)

2) Verificar que as matrizes M_i e N_i correspondentes satisfazem (5-4-1).

Define-se então campo espinorial contravariante de 1ª ordem como o objeto geométrico de componentes $\psi^A(x)$ $(A=1,2)$ que mediante uma transformação de Lorentz própria caracterizada pelos parâmetros θ_i e ν_i se transformam como

$$\psi^A(x) \rightarrow \psi'^A(x') = \left\{ \exp\left[-\tfrac{1}{2}(i\theta_j + \nu_j)\,\sigma_P^j \right] \right\}^A{}_B\ \psi^B(L^{-1}x') \quad , \tag{5-4-4}$$

ou abreviadamente

$$\psi'^A(x') = \mathbb{L}^A{}_B(\vec{\theta},\vec{\nu})\,\psi^B(x) \quad ; \tag{5-4-5}$$

trata-se de um campo de componentes usualmente complexas,

$$\psi^A(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) + i f_2(x) \\ f_3(x) + i f_4(x) \end{pmatrix} \quad , f\text{'s reais} . \tag{5-4-6}$$

A questão do spin do campo espinorial está no apêndice C.

Define-se campo espinorial covariante de 1ª ordem como o objeto $\psi_A(x)$ tal que mediante uma transformação de Lorentz própria se tenha

$$\chi^A(x)\,\psi_A(x) \quad = \text{inv.} \tag{5-4-7}$$

Exercício: Demonstrar que

$$\psi'_A(x') = \left(\mathbb{L}^{-1}\right)^B{}_A\,\psi_B(L^{-1}x') \quad . \tag{5-4-8}$$

A definição de campos espinoriais de ordem superior é óbvia:

$$\psi'^{AB\ldots}_{C\ldots}(x') = \mathbb{L}^A{}_D\,\mathbb{L}^B{}_E \cdots \left(\mathbb{L}^{-1}\right)^F{}_C \cdots \psi^{DE\ldots}_{F\ldots}(L^{-1}x') \quad . \tag{5-4-9}$$

Seja um campo espinorial constante e uniforme ϵ^{AB} que em algum especificado referencial tenha componentes

$$\epsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \qquad (5\text{-}4\text{-}10)$$

êsse campo tem a propriedade de ser invariante por transformações de Lorentz próprias, i.e.,

$\epsilon'^{AB} = \epsilon^{AB}$,

à semelhança do tensor de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$.

Exercício: Demonstrar essa propriedade mediante uma transformação infinitesimal ($\delta\vec{\theta}$, $\vec{\delta\nu}$). Nota: $\operatorname{tr} \sigma^i_p = 0$.

Convém notar que essa propriedade independe da escolha dos geradores de vez que resulta apenas do fato do traço dos geradores ser nulo, o que necessàriomente ocorre.

Convém aindo notar que não há nehum campo espinorial uniforme e constante η^{AB} que seja invariante e simétrico.

Define-se o campo espinorial uniforme e constante δ^A_B por suas componentes

$$\delta^A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}4\text{-}11)$$

em algum especificado referencial; demonstra-se que é invariante,

$\delta'^A_B = \delta^A_B$.

Exercício: Demonstrar essa propriedade para uma arbitrária $\mathbb{L}^A{}_B$.

Define-se o campo espinorial uniforme e constante ϵ_{AB} como aquêle tal que

$$\epsilon^{AB}\epsilon_{BC} = -\delta^A_C \quad ;$$

é obvio que também êle é invariante,

$$\epsilon'_{AB} = \epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \qquad (5\text{-}4\text{-}13)$$

Usa-se os espinores invariantes de 2ª ordem ϵ^{AB}, δ^A_B e ϵ_{AB} como levantadores, alteradores e abaixadores de índices espinoriais (à semelhança de $\eta^{\mu\nu}$, δ^μ_ν e $\eta_{\mu\nu}$); assim, a um campo espinorial contravariante $\psi^A(x)$ pode-se associar um covariante, que se indica com a mesma letra ψ, da forma

$$\psi_A(x) = \psi^B(x)\,\epsilon_{BA} \qquad (5\text{-}4\text{-}14)$$

com a contração no 1º índice do ϵ covariante.

Consequentemente (demonstre)

$$\psi^A(x) = \epsilon^{AB}\psi_B(x) \qquad (5\text{-}4\text{-}15)$$

com a contração no 2º índice do ϵ contravariante.

Convém notar que a antissimetria de ϵ^{AB} e ϵ_{AB} obrigam a uma certa atenção na preparação de expressões para emprêgo do cálculo matricial. Assim,

$$\psi_A = -\epsilon_{AB}\psi^B \quad \text{e} \quad \psi^A = -\psi_B\,\epsilon^{BA} \; .$$

Enquanto que na representação tensorial se tem

$$\eta^\mu{}_\nu = \eta_\nu{}^\mu = \delta^\mu_\nu \quad ,$$

na espinorial ocorre

$$\epsilon^A{}_B = \epsilon_B{}^A = -\delta^A_B \quad .$$

Exercício: Demonstrar estas igualdades. Notar que elas se traduzem em $\eta^2 = 1$ e $\epsilon^2 = -1$. (5-4-16)

A antissimetria de ϵ_{AB} ocasiona a anulação da "norma" do campo $\psi^A(x)$, $\epsilon_{AB}\psi^A(x)\psi^B(x) \equiv 0$; entretanto esta anulação, por ser uma identidade, não impõe uma relação entre os valores das componentes, diferentemente do que ocorre com os quadrivetores de norma nula.

O abaixamento e levantamento de cada índice de espinores de 2ª ordem se faz como se o espinor só tivesse êsse índice; é necessário respeitar a ordenação dos índices:

$$\epsilon^{AB} T_{BC} = T^A{}_C \quad , \quad \epsilon^{AB} T_{DB} = T_D{}^A \left(= T_{DB}\epsilon^{AB} = -T_{DB}\,\epsilon^{BA} \right) \; ,$$

$$T_A{}^B \epsilon_{BC} = T_{AC} \quad e \quad T^{AB}\epsilon_{AC} = T_C{}^B \left(= \epsilon_{AC} T^{AB} = -\epsilon_{CA} T^{AB} \right) .$$

Para espinores de órdem superior o cálculo matricial perde a utilidade; entretanto há ainda que manter a ordenação dos índices:

$$\epsilon^{AB} T^C{}_D{}^E{}_A = -\epsilon^{BA} T^C{}_D{}^E{}_A = -T^C{}_D{}^{EB} \; ,$$

$$\epsilon_{AB} U^{BC}{}_D = -\epsilon_{BA} U^{BC}{}_D = -U_A{}^C{}_D \; .$$

Exercícios: 1) mostrar que $T^A U_A (\equiv U_A T^A) = -U^A T_A \; (\equiv -T_A U^A)$;

2) mostrar que se $T^{ABC}(x)$ e $U^A{}_B(x)$ são campos espinoriais, então $T^{ABC}U^D{}_B$ também o é, i.e., $T^{ABC}(x)U^D{}_B(x) = V^{ACD}(x)$;

3) mostrar que se $\hat{n}$ = unitário então

$$\left(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}_P \right)^2 = \mathbb{1}_2 \qquad (5\text{-}4\text{-}17)$$

4) mostrar que

$$\exp\left(i\frac{\theta}{2}\, \hat{n} \cdot \vec{\sigma}_P \right) = \cos\frac{\theta}{2}\, \mathbb{1}_2 + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \left(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}_P \right) \qquad (5\text{-}4\text{-}18)$$

5) mostrar que, com $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$,

$$\exp\left(\tfrac{1}{2}\tanh^{-1}\beta \quad \hat{\beta}\cdot\vec{\sigma}_P\right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)}\ \mathbb{1}_2 + \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\ \hat{\beta}\cdot\vec{\sigma}_P \qquad (5\text{-}4\text{-}19)$$

6) mostrar que com $\vec{c} = \vec{a} + i\vec{b}$ e $\vec{c}^{\,2} \equiv \vec{c}\cdot\vec{c} (\neq \vec{c}\cdot\vec{c}^{\,*})$,

$$e^{i\vec{c}\cdot\vec{\sigma}_P} = \cos\sqrt{\vec{c}^{\,2}}\ \mathbb{1}_2 + i\,\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\vec{c}^{\,2}}}{\sqrt{\vec{c}^{\,2}}}\ \vec{c}\cdot\vec{\sigma}_P \qquad (5\text{-}4\text{-}20)$$

Uma questão importante é que para dados valores dos parâmetros θ_i e ν_i, corresponde apenas uma matriz $L^{\mu}{}_{\nu}$ e apenas uma $\mathbb{L}^A{}_B$, desde que os geradores I_i e J_i das duas representações hajam sido pré-escolhidos; entretanto dada uma matriz $L^{\mu}{}_{\nu}$, a ela corresponde uma infinidade de parâmetros θ_i, todos diferindo entre si por $2n_i\pi$ com $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Isso corresponde a que uma rotação de 2π em torno de uma qualquer direção $\hat{n}$ não altera a descrição dos objetos tensoriais e escalares. Tal não ocorre com os objetos espinoriais, entretanto. A matriz $\mathbb{L}^A{}_B\,(\vec{\theta} = \theta\hat{n}\ ,\ \vec{\nu} = 0)$ é, pela (5-4-13),

$$\mathbb{L}^A{}_B\,(\theta,\hat{n}) = \cos\frac{\theta}{2}\,\delta^A_B + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}_P\right)^A{}_B ;$$

portanto

$$\mathbb{L}^A{}_B(0,\hat{n}) = \delta^A_B \quad , \quad \mathbb{L}^A{}_B(2\pi,\hat{n}) = -\delta^A_B \qquad ;$$

ou, de um modo geral, para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$\mathbb{L}^A{}_B(\theta + 2k\pi, \hat{n}) = (-1)^k\ \mathbb{L}^A{}_B(\theta, \hat{n}) \quad . \qquad (5\text{-}4\text{-}21)$$

Daí resulta que a cada matriz $L^{\mu}{}_{\nu}$ correspondem 2 matrizes $\mathbb{L}^A{}_B$, de sinais opostos (e determinantes iguais), mesmo com os geradores

I_i e J_i fixados.

5.5. A representação Espinorial Pontuada de Lorentz

A representação (0,1/2) do grupo de Lorentz também é caracterizada por 6 geradores $I_i^{(0,1/2)}$ e $J_i^{(0,1/2)}$ que são matrizes 2x2; entretanto as M_i e N_i agora satisfazem

$$\left[\vec{M}^{(0,1/2)}\right]^2 = 0 \quad \text{e} \quad \left[\vec{N}^{(0,1/2)}\right]^2 = -3/4 \ . \qquad (5\text{-}5\text{-}1)$$

Como no caso da representação espinorial, tem-se total liberdade na escolha dos geradores, desde que satisfaçam às regras de comutação características do grupo de Lorentz, e cujos $\vec{M}$ e $\vec{N}$ correspondentes satisfaçam (5-5-1); aproveita-se essa liberdade para obter matrizes de transformação que sejam as complexo-conjugadas das correspondentes na representação espinorial, i.e.,

$$\mathbb{L}^{\dot{A}}{}_{\dot{B}}(\vec{\theta},\vec{v}) = \left[\mathbb{L}^{A}{}_{B}(\vec{\theta},\vec{v})\right]^{*} \ ; \qquad (5\text{-}5\text{-}2)$$

nêste caso diz-se tratar-se da representação espinorial pontuada do grupo de Lorentz. A conveniência dessa escolha será posteriormente percebido.

Os geradores que ocasionam (5-5-2) são

$$I_j^{(0,1/2)} = \frac{i}{2}\,\sigma_P^{j\,*} \quad \text{e} \quad J_i^{(0,1/2)} = -\frac{1}{2}\,\sigma_P^{i\,*} \qquad (5\text{-}5\text{-}3)$$

onde $\sigma_P^{j\,*}$ é a matriz complexo-conjugada à matriz σ^j_{PAULI} ; consequentemente

$$\mathbb{L}^{\dot{A}}{}_{\dot{B}}(\vec{\epsilon},\vec{v}) = \exp\left[-\frac{1}{2}(-i\vec{\epsilon}+\vec{v})\cdot\vec{\sigma}_p^{*}\right]^{\dot{A}}{}_{\dot{B}} \quad . \qquad (5\text{-}5\text{-}4)$$

Exercícios: 1) mostrar que as matrizes (5-5-3) satisfazem (5-1-3,4,5); e que as suas correspondentes M_i e N_i satisfazem (5-5-1).

2) mostrar que com a escolha (5-5-4) ocorre efetivamente o (5-5-2).

3) mostrar que $I_j = -\frac{i}{2}\sigma^j_p$ e $J_i = \frac{1}{2}\sigma^i_p$ também servem como geradores da representação (0,1/2).

A definição do campo espinorial pontuado contravariante de 1ª ordem é feita analogamente a (5-4-5),

$$\psi^{\dot{A}}(x) \to \psi'^{\dot{A}}(x') = \mathbb{L}^{\dot{A}}{}_{\dot{B}}(\vec{\epsilon},\vec{v})\,\psi^{\dot{B}}(L^{-1}x') \quad ; \qquad (5\text{-}5\text{-}5)$$

todos os demais objetos da representação espinorial pontuada são definidos e tratados analogamente aos da representação espinorial. Em particular,

$$\epsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \qquad (5\text{-}5\text{-}6)$$

são invariantes e usados como espinores pontudos métricos.

Exercícios: 1) em um especificado referencial, um campo $\psi^{A}(x)$ tem componentes

$$\begin{pmatrix} a(x) + i\,b(x) \\ c(x) + i\,d(x) \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}5\text{-}7)$$

com a,b,c,d=funções reais.

a) que componentes tem $\psi_A(x)$ nêsse referencial?
b) é possível haver algum $\chi_A(x)$ com os componentes (5-5-7)?
c) é possível haver algum $\eta^{\dot{A}}(x)$ com as componentes (5-5-7)?

2) mostre que se dois campos $\psi^{A}(x)$ e $\eta^{\dot{A}}(x)$ tem mesmas componentes em um referencial, não as terão iguais em outro referencial, em geral.

3) mostre que se $\psi^{A}(x)$ e $\eta^{\dot{A}}(x)$ tem componentes correspondentes complexo conjugados em um referencial, as terão complexo-conjugadas em qualquer outro referencial.

Como consequência do verificado no exercício 3 acima, pode-se associar a um campo $\psi^{A}(x)$ um campo $\psi^{\dot{A}}(x)$ cujos componentes, em qualquer referencial, são os complexo-conjugados do $\psi^{A}(x)$; e quando se tem uma equação do tipo

$$\psi^{A} \epsilon^{\dot{B}\dot{C}} + i\, \epsilon^{AD} \chi_{D} \eta^{\dot{B}} \xi^{\dot{C}} = 0 \quad ,$$

pode-se complexo-conjugá-la,

$$\psi^{\dot{A}} \epsilon^{BC} - i\, \epsilon^{\dot{A}\dot{D}} \chi_{\dot{D}} \eta^{B} \xi^{C} = 0 \quad .$$

Note-se que isto só foi possível graças à escolha dos geradores da representação pontuada como complexo-conjugados da não pontuada.

5.6. Os Objetos $\sigma^{\mu A\dot{B}}$ e $\sigma^{\mu \dot{A}B}$.

No espaço de Minkowski pode-se definir campos com lei de transformação envolvendo várias representações, p.e.,

$$\mathcal{C}'^{\mu A\dot{B}}(x') = L^{\mu}{}_{\nu}\, \mathbb{L}^{A}{}_{C}\, \mathbb{L}^{\dot{B}}{}_{\dot{D}}\, \mathcal{C}^{\nu C\dot{D}}(L^{-1}x') \tag{5-6-1}$$

Em particular, demonstra-se ser invariante o objeto de componentes uniformes e constantes $\sigma^{\mu A\dot{B}}$:

$$\sigma^{0A\dot{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \sigma^{1A\dot{B}} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^{2A\dot{B}} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma^{3A\dot{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (5\text{-}6\text{-}2)$$

<u>Exercício</u>: Demonstrar que, mediante a transformação infinitesimal arbitrária ($\delta\theta_i$, δv_i), do tipo de (5-6-1), se obtem

$$\sigma'^{\mu A\dot{B}} = \sigma^{\mu A\dot{B}} . \quad (5\text{-}6\text{-}3)$$

Outro objeto invariante é o $\sigma^{\mu\dot{A}B}$ de componentes complexo-conjugados do $\sigma^{\mu A\dot{B}}$, isto é,

$$\sigma^{0\dot{A}B} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \sigma^{1\dot{A}B} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \sigma^{2\dot{A}B} \doteq \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma^{3\dot{A}B} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (5\text{-}6\text{-}4)$$

<u>Exercício:</u> Demonstrar que a invariância de $\sigma^{\mu\dot{A}B}$ decorre da de $\sigma^{\mu A\dot{B}}$.

A partir de $\sigma^{\mu A\dot{B}}$ e $\sigma^{\mu\dot{A}B}$ pode-se construir uma série de objetos invariantes correlatos, com a utilização dos objetos métricos invariantes $\eta_{\mu\nu}$, ϵ_{AB} , etc; daí resultam os invariantes $\sigma^{\mu A}{}_{\dot{B}}$, $\sigma_{\mu A\dot{B}}$, $\sigma_{\mu}{}^{\dot{A}}{}_{B}$, etc., cujas representações matriciais diferem, em geral, das (5-6-2) e (5-6-4).

<u>Exercícios</u>: 1) mostrar, partindo das representações matriciais (onde o 1º índice $\mu = 0,1,2,3$, o 2º índice se refere à linha e o 3º índice à coluna) de $\sigma^{\mu A\dot{B}}$ e $\sigma_{\mu A\dot{B}}$ dados abaixo, que as representações matriciais dos objetos que os seguem são corretas:

$\sigma^{\mu A\dot{B}}$ e $\sigma_{\mu\dot{A}B}$: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$;

$\sigma^{\mu A}{}_{\dot{B}}$ e $-\sigma_{\mu\dot{A}}{}^{B}$: $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$; (5-6-5)

$\sigma^{\mu}{}_{A}{}^{\dot{B}}$ e $-\sigma_{\mu}{}^{\dot{A}}{}_{B}$: $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-i&0\\0&-i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ e

$\sigma^{\mu}{}_{A\dot{B}}$ e $\sigma_{\mu}{}^{\dot{A}B}$: $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

2) mostrar, por cálculo direto, que

$$\sigma^{\mu A}{}_{\dot{B}}\,\sigma^{\nu\dot{B}}{}_{C}+\sigma^{\nu A}{}_{\dot{B}}\,\sigma^{\mu\dot{B}}{}_{C}=2\eta^{\mu\nu}\epsilon^{A}{}_{C}\equiv-2\eta^{\mu\nu}\delta^{A}_{C} \qquad (5\text{-}6\text{-}6)$$

e que consequentemente

$$\sigma^{\mu\dot{A}}{}_{B}\,\sigma^{\nu B}{}_{\dot{C}}+\sigma^{\nu\dot{A}}{}_{B}\,\sigma^{\mu B}{}_{\dot{C}}=2\eta^{\mu\nu}\epsilon^{\dot{A}}{}_{\dot{C}}\equiv-2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{A}}_{\dot{C}} .$$

3) mostrar que

$$\sigma^{\mu A}{}_{\dot{B}}\,\sigma^{\nu\dot{B}}{}_{A}=-2\eta^{\mu\nu}=\sigma^{\mu\dot{A}}{}_{B}\,\sigma^{\nu B}{}_{\dot{A}} . \qquad (5\text{-}6\text{-}7)$$

4) usualmente denota-se por σ^{μ} , τ^{μ} e ϵ as matrizes representativos de $\sigma^{\mu A\dot{B}}$, $\sigma^{\mu}{}_{\dot{A}B}$ e ϵ_{AB} $(\epsilon\,\epsilon_{\dot{A}\dot{B}})$; mostrar que

$$\tau^{\mu}=-\epsilon\sigma^{\mu *}\epsilon \text{ , e que } \quad \tau^{0}=\mathbb{1}_{2} \quad \text{e} \quad \tau^{i}=-\sigma^{i}_{P} . \qquad (5\text{-}6\text{-}8)$$

5) mostrar, por cálculo direto, que

$$\sigma^{\mu A\dot{B}}\sigma_{\mu}{}^{C\dot{D}}=2\epsilon^{AC}\epsilon^{\dot{B}\dot{D}}=\sigma^{\mu A\dot{B}}\sigma_{\mu}{}^{\dot{D}C}=\sigma^{\mu\dot{B}A}\sigma_{\mu}{}^{\dot{D}C} . \qquad (5\text{-}6\text{-}9)$$

Convém esclarecer que se se definir um campo $\mathcal{A}^{\mu A\dot{B}}$ que em algum referencial tenha componentes uniformes (i.e., independentes de $\vec{x}$) e constantes (i.e., independentes de t), diga-se, as (5-6-2), então em outro referencial de Lorentz as componentes ainda serão uniformes e constantes, porém não mais as (5-6-2), ou seja, não será invariante: $\mathcal{A}'^{\mu\dot{A}B} \neq \mathcal{A}^{\mu\dot{A}B}$.

5.7. Correspondência entre Campos de Diferentes Representações

Dado um campo espinorial $\psi^A(x)$, é possível associou-se a êle um campo vetorial $V^\mu(x)$ com certas particularidades; isto é feito do seguinte modo: com as componentes $\psi^1(x)$ e $\psi^2(x)$ constroe-se consistentemente o campo espinorial pontuado $\psi^{\dot{A}}(x)$ de componentes $\psi^{1*}(x)$ e $\psi^{2*}(x)$, e define-se

$$V^\mu(x) \equiv \sigma^\mu{}_{A\dot{B}}\, \psi^A(x)\psi^{\dot{B}}(x) \equiv \sigma^\mu{}_{\dot{A}B}\, \psi^{\dot{A}}(x)\psi^B(x) \qquad (5\text{-}7\text{-}1)$$

Exercícios:

1) mostrar que

$$\begin{aligned} V^0 &= \psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*} , \\ V^1 &= -(\psi^1\psi^{2*} + \psi^2\psi^{1*}) , \\ V^2 &= -i(\psi^1\psi^{2*} - \psi^2\psi^{1*}) \text{ e} \\ V^3 &= -(\psi^1\psi^{1*} - \psi^2\psi^{2*}) . \end{aligned} \qquad (5\text{-}7\text{-}2)$$

2) usando (5-6-9), mostrar que

$$V^\mu(x)\, V_\mu(x) = 0 .$$

Dos exercícios anteriores se verifica que o campo $V^\mu(x)$ associado ao $\psi^A(x)$ arbitrário da forma (5-7-1) é necessáriamente real, nulo, e tem componente $V^0(x) \geq 0$. Obviamente o campo

$$A^\mu(x) \equiv -\sigma^\mu{}_{A\dot{B}}\, \psi^A(x)\psi^{\dot{B}}(x) \qquad (5\text{-}7\text{-}3)$$

é real, nulo, e tem componente $A^0(x) \leq 0$.

Ainda pela análise de (5-7-2) se verifica que ao campo

$$\chi^A(x) = e^{i\omega(x)}\psi^A(x)\,,\quad \omega(x)=\text{real} \tag{5-7-4}$$

se associa, pela (5-7-1), o mesmo campo $V^{\mu}(x)$.

Passe-se agora ao problema inverso: dado um campo $V^{\mu}(x)$ real nulo, buscar associar a êle um campo $\psi^A(x)$, a menos de um fator de fase *dependente do ponto*. Para isso define-se a função degrau antissimétrica, de uma única variável b,

$$\begin{aligned} \epsilon(b) &= -1 \quad (b<0) \\ &= +1 \quad (b>0)\,, \end{aligned} \tag{5-7-5}$$

e escreve-se a (5-7-1) e (5-7-3) da forma

$$V^{\mu}(x) = \epsilon\left[V_0(x)\right]\ \sigma^{\mu}{}_{A\dot{B}}\ \psi^A(x)\,\psi^{\dot{B}}(x) \ . \tag{5-7-6}$$

Exercícios: 1) mostrar que se $V^{\mu}(x)$ é um campo real de norma não negativa em um ponto P então o sinal da sua componente $V^0(x)$ nêsse ponto não se altera por transformações de Lorentz; em outras palavras, a função escalar $\epsilon\left[V^0(x)\right]$ é invariante nêsse ponto. Sugestão: lembrar que $V'^0(x') = \left[V^0(x) - \frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{V}(x)\right]\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

2) verificar que se $V^{\mu}V_{\mu}=0$ e $V^0=0$, decorre das (5-7-2) que $\psi^1 = \psi^2 = 0$; com êste resultado, a descontinuidade da função degrau carece de importância na (5-7-6).

É fácil verificar que de 5-7-6 resultam, como soluções de equações semelhantes às (5-7-2),

$$\psi^1(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left|V^0(x) - V^3(x)\right|}\ e^{i\omega(x)} \qquad \text{e}$$

$$\psi^2(x) = -\frac{V^1(x)+i\,V^2(x)}{\sqrt{2|V^0(x)-V^3(x)|}}\;\epsilon[V^0(x)]\,e^{i\omega(x)} \qquad (5\text{-}7\text{-}7)$$

com $\omega(x)$ = real arbitrário.

Visto como associar um campo real nulo $V^{\mu}(x)$ a um campo $\psi^A(x)$, a menos de fator de fase **dependente do ponto**, passe-se a associar um campo complexo arbitrário $V^{\mu}(x)$ a algum campo espinorial; usualmente a associação é feita da forma

$$V^{A\dot{B}}(x) = \sigma_{\mu}{}^{A\dot{B}}\,V^{\mu}(x) \qquad (5\text{-}7\text{-}8)$$

ou reciprocamente, pela (5-5-7),

$$V^{\mu}(x) = \frac{1}{2}\,\sigma^{\mu}{}_{\dot{B}A}\,V^{A\dot{B}}(x)\,. \qquad (5\text{-}7\text{-}9)$$

Também se pode associar ao $V^{\mu}(x)$ o campo

$$\mathbb{V}^{\dot{A}B}(x) = \sigma_{\mu}{}^{\dot{A}B}\,V^{\mu}(x) \qquad (5\text{-}7\text{-}10)$$

cuja relação invertida é

$$V^{\mu}(x) = \frac{1}{2}\sigma^{\mu}{}_{B\dot{A}}\,\mathbb{V}^{\dot{A}B}(x) \qquad (5\text{-}7\text{-}11)$$

Exercício: mostrar que $\mathbb{V}^{\dot{A}B}(x) = V^{B\dot{A}}(x)$ (5-7-12)

Convém salientar que a representação matricial de $\mathbb{V}^{\dot{A}B}(x)$ não é em geral nem a complexo-conjugada de $V^{A\dot{B}}(x)$, nem a Hermiteano-conjugado; sòmente no caso de $V^{\mu}(x)$ ser real são Hermiteano-conjugadas as duas matrizes.

Exercícios: 1) Demonstrar que $V^{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} V^0-V^3 & -V^1+iV^2 \\ -V^1-iV^2 & V^0+V^3 \end{pmatrix}$ (5-7-13)

e que $\mathbb{V}^{\dot{A}B} = \begin{pmatrix} V^0-V^3 & -V^1-iV^2 \\ -V^1+iV_2 & V^0+V^3 \end{pmatrix}$

(5-7-14)

2) mostrar que
$$V^0 = \frac{1}{2}\left(V^{1\dot{1}} + V^{2\dot{2}}\right)$$
$$V^1 = -\frac{1}{2}\left(V^{1\dot{2}} + V^{2\dot{1}}\right)$$
$$V^2 = -\frac{i}{2}\left(V^{1\dot{2}} - V^{2\dot{1}}\right)$$
$$V^3 = -\frac{1}{2}\left(V^{1\dot{1}} - V^{2\dot{2}}\right) \qquad (5\text{-}7\text{-}15)$$

3) mostrar que
$$V^{\mu}V_{\mu} = \frac{1}{2} V^{A\dot{B}} V_{A\dot{B}} = \frac{1}{2} V^{\dot{A}B} V_{\dot{A}B} \qquad (5\text{-}7\text{-}16)$$
Algumas observações relacionando propriedades de V^{μ} com a matriz V que representa $V^{A\dot{B}}$ são vistos diretamente dos exercícios :

a) $\det V = V^{\mu}V_{\mu}$; (5-7-17)

b) $\operatorname{tr} V = 2V^0$; (5-7-18)

c) $V^{\mu} = V^{\mu *} \Rightarrow V = V^{\dagger}$. (5-7-19)

4) mostrar, por cálculo direto, que os campos $V^{A\dot{B}}(x)$ e $\Psi_{\dot{B}}(x, \omega(x))$ associados ao campo nulo $V^{\mu}(x)$ por (5-7-3) e por outra forma obtida da $\Psi^{A}(x,\omega)$ dada em (5-7-7) satisfazem
$$V^{A\dot{B}}(x)\, \Psi_{\dot{B}}(x, \omega(x)) \equiv 0 \, .$$

Usualmente aos campos tensoriais de ordem mais elevada se faz corresponder campos espinoriais de órdem superior, p.e.,
$$T^{A\dot{B}C\dot{D}}(x) = \sigma_{\mu}{}^{A\dot{B}}\, \sigma_{\nu}{}^{C\dot{D}}\, T^{\mu\nu}(x) \qquad (5\text{-}7\text{-}20)$$
ou
$$T^{\mu\nu}(x) = (1/2)^2\, \sigma^{\mu}{}_{A\dot{B}}\, \sigma^{\nu}{}_{C\dot{D}}\, T^{A\dot{B}C\dot{D}}(x) \; ; \qquad (5\text{-}7\text{-}21)$$
também o operador $\partial_{\mu} \equiv \partial/\partial x^{\mu}$ pode ser relacionado ao operador
$$\partial^{A\dot{B}} = \sigma^{\mu A\dot{B}}\partial_{\mu} = \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix} \; ; \qquad (5\text{-}7\text{-}22)$$
reciprocamente
$$\partial_0 = \frac{1}{2}\left(\partial^{1\dot{1}} + \partial^{2\dot{2}}\right) \quad , \quad \partial_1 = \frac{1}{2}\left(\partial^{1\dot{2}} + \partial^{2\dot{1}}\right) \; ,$$
$$\partial_2 = \frac{i}{2}\left(\partial^{1\dot{2}} - \partial^{2\dot{1}}\right) \quad e \quad \partial_3 = \frac{1}{2}\left(\partial^{1\dot{1}} - \partial^{2\dot{2}}\right) \; ; \qquad (5\text{-}7\text{-}23)$$

e finalmente o operador d'Alembertiano (verifique)

$$\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}\partial^{A\dot{B}}\partial_{A\dot{B}}$$

Exercício: mostrar que o único objeto $\mathcal{C}^{\mu A}$ invariante por uma transformação de Lorentz arbitrária infinitesimal ($\delta\theta_i$, $\delta\nu_i$) é o de todas as componentes nulas .

5.8. A Função de Onda de Dirac

Usualmente descfeve-se o estado de um eletron livre por uma função de onda $\Psi(x)$ complexa de 4 componentes; sua evolução no espaço-tempo é dado pelas 4 equações

$$-i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = m\Psi \tag{5-8-1}$$

onde γ^μ são quatro matrizes invariantes por transformação de Lorentz e satisfazem

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4 \tag{5-8-2}$$

Mediante uma transformação de Lorentz a função $\Psi(x)$ se twansforma

$$\Psi(x) \to \Psi'(x') = S(\vec{\theta},\vec{\nu})\,\Psi(L^{-1}x') \tag{5-8-3}$$

com o matriz 4x4 S satisfazendo

$$\gamma^\mu = L^\mu{}_\nu S\gamma^\nu S^{-1} \quad ; \tag{5-8-4}$$

verifica-se que $\Psi^\dagger\Psi$ não é um escalar, mas sim $(\Psi^\dagger\gamma^0)\Psi \equiv \bar{\Psi}\Psi$; e que $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ é um contravetor.

Serão vistos a seguir todos êstes conceitos dentro dos formalismos espinorial e espinorial pontuado.

Um estado de um eletron livre é representado por 2 campos $\xi^{\dot{A}}(x)$ e $\chi^A(x)$ cuja evolução no espaço-tempo é dado pelas 4 equações complexa

$$\partial^{A}{}_{\dot B}\, \xi^{\dot B}(x) = m\chi^{A}(x) \qquad (5\text{-}8\text{-}10)$$

$$\partial^{\dot A}{}_{B}\, \chi^{B}(x) = m\,\xi^{\dot A}(x)\ . \qquad (5\text{-}8\text{-}11)$$

A forma (5-8-1) é obtida com as substituições

$$\partial^{A}{}_{\dot B} = \sigma^{\mu A}{}_{\dot B}\ \partial_\mu$$

$$\partial^{\dot A}{}_{B} = \sigma^{\mu \dot A}{}_{B}\ \partial_\mu$$

e com as correspondências (verifique)

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi^{\dot A}(x) \\ \chi^{A}(x) \end{pmatrix} \quad \text{e} \qquad (5\text{-}8\text{-}12)$$

$$\gamma^{\mu} = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu \dot A}{}_{B} \\ \sigma^{\mu A}{}_{\dot B} & 0 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}8\text{-}13)$$

A (5-8-2) decorre diretamente das (5-6-6) (verifique).

A matriz $S(\vec{\theta},\vec{v})$ apontada na (5-8-3) é obviamente

$$S(\vec{\theta},\vec{v}) = \begin{pmatrix} \mathbb{L}^{\dot A}{}_{\dot B}(\vec{\theta},\vec{v}) & 0 \\ 0 & \mathbb{L}^{A}{}_{B}(\vec{\theta},\vec{v}) \end{pmatrix} \quad \text{(verifique)} \qquad (6\text{-}8\text{-}14)$$

e satisfaz a (5-8-4) considerando a (5-8-13) .

A matriz γ^{o} que aparece na definição $\bar{\psi} \equiv \psi^{+}\gamma^{o}$ não é a

$$i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^{o\dot A}{}_{B} \\ \sigma^{oA}{}_{\dot B} & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}8\text{-}15)$$

mas sim a

$$i\begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{AB} \\ \epsilon_{\dot A\dot B} & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}8\text{-}15')$$

com isso obtem-se (verifique)

$$\bar{\psi}\psi = i\left[\xi_{A}\,\chi^{A} - \xi_{\dot A}\,\chi^{\dot A}\right] \qquad (5\text{-}8\text{-}16)$$

onde por $\xi_{A}(x)$ e $\chi^{\dot A}(x)$ entende-se os campos de componentes complexo-conjugados dos $\xi_{\dot A}$ e χ^{A} ; a (5-8-16) indica claramente que $\bar{\psi}(x)\psi(x)$

é um campo escalar.

A corrente toma a forma

$$\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi = i\left[\chi_{\dot{B}}\sigma^{\mu\dot{B}}{}_{C}\chi^{C} + \xi_{B}\sigma^{\mu B}{}_{\dot{C}}\xi^{\dot{C}}\right] , \qquad (5\text{-}8\text{-}17)$$

na qual se vê seu caráter de contravetor.

A matriz $\gamma^5 \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ é (verifique: agora o γ^0 é o indicado em(5-8-15)).

$$\gamma^5 = i\begin{pmatrix} \delta^{\dot{A}}_{\dot{B}} & 0 \\ 0 & \delta^{A}_{B} \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}8\text{-}18)$$

e efetivamente anticomuta (verifique) com todas as γ^{μ} .

Apêndice A

O tratamento anterior ao capítulo 5 refere-se ao grupo próprio e homogêneo de Lorentz, porém pode-se também considerar o grupo não-homogêneo, ou seja, o grupo de Poincaré. As regras de comutação (5-1-3,4,5) definindo o grupo próprio e homogêneo podem ser realizados por diversos conjuntos de 6 matrizes. Cada um desses conjuntos define uma representação do grupo e corresponde ao "spin" do campo sôbre o qual as matrizes atuam. Como exemplo, considere-se um campo vetorial covariante $V_{\mu}(x)$, e seja a transformação infinitesimal do grupo de Poincaré,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}{}_{\alpha}x^{\alpha} + a^{\mu}. \qquad (A\text{-}1)$$

Explìcitamente usa-se essa transformação para mostrar que além das matrizes I_i e J_i existirão outros operadores associados ao grupo de Poincaré. Tem-se

$$V'_{\mu}(x') = V_{\mu}(x) - \epsilon^{\alpha}{}_{\mu}V_{\alpha}(x). \qquad (A\text{-}2)$$

Expandindo em série o lado esquerdo, vem, em 1ª ordem,

$$V'_\mu(x) - V_\mu(x) = -\epsilon^\alpha{}_\mu V_\alpha - \epsilon^\beta{}_\rho x^\rho \partial V_\mu/\partial x^\beta - a^\beta \partial V_\mu/\partial x^\beta . \qquad (A-3)$$

Definindo

$$V'_\mu(x) - V_\mu(x) = \bar{\delta} V_\mu(x)$$

ter-se-á

$$-\bar{\delta} V_\mu(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\rho}\left\{\left(S^{[\sigma\rho]}\right)^\alpha{}_\mu + \delta^\alpha_\mu M^{[\sigma\rho]}\right\} V_\alpha(x) + \delta^\alpha_\mu a^\beta P_\beta V_\alpha(x) \qquad (A-4)$$

onde,

$$\left(S^{[\sigma\rho]}\right)^\alpha{}_\mu = \eta^{\alpha\sigma}\delta^\rho_\mu - \eta^{\alpha\rho}\delta^\sigma_\mu \qquad (A-5)$$

$$M^{[\sigma\rho]} = \eta^{\beta\rho} x^\sigma \partial_\beta - \eta^{\beta\sigma} x^\rho \partial_\beta \qquad (A-6)$$

$$P_\beta = \partial_\beta . \qquad (A-7)$$

Dessa relação vê-se que os operadores $\left(S^{[\sigma\rho]}\right)^\alpha{}_\mu$, e $\delta^\alpha_\mu M^{[\sigma\rho]}$, $\delta^\alpha_\mu P_\beta$ são definidos em dois espaços diferentes: $\left(S^{[\sigma\rho]}\right)^\alpha{}_\mu$ é definido no que se pode chamar um "espaço interno", ou espaço do "spin", o qual satisfaz as regras (5-1,3,4,5) se se notar que (5-1-1) pode ser reescrita como,

$$\left(\delta\theta_i I_i + \delta\nu_i J_i\right)^\alpha{}_\mu = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{\sigma\rho} S^{[\sigma\rho]}\right)^\alpha{}_\mu$$
$$= \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\rho}\left(S^{[\sigma\rho]}\right)^\alpha{}_\mu$$

qual seja,

$$S^{[oi]} = J^i \qquad (A-8)$$

$$S^{[ij]} = \epsilon^{ijk} I^k \qquad (A-9)$$

enquanto que $\delta^\alpha_\mu M^{[\sigma\rho]}$ e $\delta^\alpha_\mu P_\beta$ serão do tipo $\mathbb{1}\cdot M^{[\sigma\rho]}$, $\mathbb{1}\cdot P_\beta$ ou seja, comutam com os operadores $\left(S^{[\sigma\rho]}\right)^\alpha{}_\mu$, dado que sua "parte interna" é simplesmente o operador identidade $\mathbb{1}$. Os operadores

$M^{[\sigma\rho]}$, P_β são definidos (ou operam) no espaço de coordenadas. A presente demonstração foi feita para um co-vetor, porém pode-se provar que para qualquer objeto geométrico se tem sempre os mesmos operadores $M^{[\sigma\rho]}$, P_β porém o operador ($S^{[\rho\sigma]}$) variará dependendo do objeto geométrico escolhido. Em particular para um escalar se terá $S^{[\sigma\rho]} = 0$, e então

$$-\bar{\delta}\phi(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{\sigma\rho}\, M^{[\sigma\rho]}\phi(x) + a^\sigma P_\sigma\, \phi(x) \quad . \qquad \text{(A-10)}$$

As regras de comutação dos operadores $M^{[\sigma\rho]}$ e P_σ , que definem a álgebra de Lie dêsses operadores é:

$$[M^{[\alpha\beta]},\ M^{[\mu\nu]}]_- = -\eta^{\alpha\mu}M^{[\beta\nu]} - \eta^{\beta\nu}M^{[\alpha\mu]} + \eta^{\alpha\nu}M^{[\beta\mu]} + \eta^{\beta\mu}M^{[\alpha\nu]}, \qquad \text{(A-11)}$$

$$[M^{[\alpha\beta]},\ P^\sigma]_- = -\eta^{\alpha\sigma}P^\beta + \eta^{\beta\sigma}P^\alpha \qquad e \qquad \text{(A-12)}$$

$$[P^\rho,\ P^\sigma]_- = 0 \qquad \text{(A-13)}$$

onde,

$$P^\rho \equiv \eta^{\rho\sigma}P_\sigma \quad . \qquad \text{(A-14)}$$

<u>Exercícios</u>:

1- Determine a expressão de $\bar{\delta}T_{\lambda\nu}(x)$ para um tensor $T_{\lambda\nu}(x)$. Essa expressão é do tipo,

$$-\bar{\delta}T_{\lambda\nu}(x) = \epsilon_{\sigma\rho}\ S^{[\sigma\rho]\tau\kappa}{}_{\lambda\nu}\, T_{\tau\kappa}(x) + \epsilon_{\sigma\rho}\, M^{[\sigma\rho]}T_{\lambda\nu}(x) + a^\sigma P_\sigma\, T_{\lambda\nu}(x)$$

de modo que $S^{[\sigma\rho]}$ é aqui uma matriz (16x16). No caso de $T_{\lambda\nu}$ ser antissimétrico ela será (6x6). Se $T_{\lambda\nu}$ for simetrico ela será (10x10). Todas elas satisfazem as (5-1-3,4,5).

2. Prove que usando as identificações anteriores podemos reescrever as (5-1-3,4,5) sob a forma covariante

$$[S^{[\rho\sigma]},\ S^{[\lambda\beta]}]_- = -\eta^{\rho\lambda}S^{[\sigma\beta]} - \eta^{\sigma\beta}S^{[\rho\lambda]} + \eta^{\rho\beta}S^{[\sigma\lambda]} + \eta^{\sigma\lambda}S^{[\rho\beta]} \qquad \text{(A-15)}$$

ou seja, as $S^{[\rho\sigma]}$ satisfazem regras de comutação $\underbrace{\text{idênticas}}_{}$ às $M^{[\rho\sigma]}$. Isso permite interpretar a soma $(S^{[\sigma\rho]})^{\alpha}{}_{\mu} + \delta^{\alpha}_{\mu} M^{[\sigma\rho]}$ como o momentum angular total do sistema sob consideração.

3. Demonstre que as regras de comutação dos $M^{[\alpha\beta]}$ e P^{σ} são de fato as escritas antes.

4. Determine a expressão de $\bar{\delta}\phi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)$ e $\bar{\delta}\phi^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)$. Interprete os operadores de "spin" nêsse caso geral.

Apêndice B

Note que para um vetor as matrizes $S^{[\sigma\rho]}$ eram (4x4), para um tensor simétrico de 2ª ordem eram (10x10). Se formalmente fizermos a ordem da matriz igual a $2s+1$,

$r = 2s+1$

com S=0,1,2..., teremos, as rep. tensoriais:

escalar: r=1 $\rightarrow$ S=0

4-vetor: r=4 $\rightarrow$ S=1,0 (uma mistura)

4-tensor simétrico: r=10 $\rightarrow$ S=2,1,0 (uma mistura)

para valôres $S=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ teremos os casos spinoriais :

spinor de Van der Waerden: r=2 $\rightarrow$ $S=\frac{1}{2}$ (corresponderá à SL_2).

Apêndice C

Deve-se observar que a (5-4-4) pode ser escrita, para transformações infinitesimais como

$$\psi'^A(x) = \psi^A(x) - \frac{1}{2}(i\theta_j + \nu_j)\sigma_j{}^A{}_B\,\psi^B(x) - \epsilon^\alpha{}_\beta\, x^\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\psi^A(x)$$

(translações no espaço tempo não são consideradas, porém sua introdução é evidente, basta acrescentar $-a^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\psi^A(x)$ no 2º membro) ou

$$\bar{\delta}\psi^A(x) = S^A{}_B\,\psi^B(x) - \epsilon^\alpha{}_\beta\, x^\beta\, \psi^A_{,\alpha}(x)$$

(Note que $\mathrm{tr}\, S = 0$).

Portanto, além da contribuição do operador do spin $S^A{}_B$ teremos a contribuição do momentum angular usual através do têrmo

$$\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\left(x^\beta\partial^\alpha - x^\alpha\partial^\beta\right)\psi^A(x) \quad .$$

É importante frisar aqui que êsses resultados só se aplicam ao grupo de Lorentz, ou seja em relatividade restrita. Em relatividade geral, o conceito de spinor tem que ser reformulado de tal forma que o operador do spin $S^A{}_B$ além de ser localizado (função de ponto), opera indepemdentemente do operador "orbital" $M^{\alpha\beta}$. Em outras palavras, o espaço onde $S^A{}_B(x)$ atua é um espaço interno independente das coordenadas, de forma que o spinor é caracterizado pelas duas leis independentes de transformação:

$$\bar{\delta}_1\psi^A(x) \equiv \psi'^A(x) - \psi^A(x) = S^A{}_B(x)\,\psi^B(x) \qquad \text{e}$$

$$\bar{\delta}_2\psi^A(x) \equiv \tilde{\psi}^A(x) - \psi^A(x) = -\xi^\rho(x)\frac{\partial}{\partial x^\rho}\psi^A(x) \quad ,$$

com $\xi^\rho(x)$ uma função arbitrária. Essa 2ª lei de transformação diz que $\psi^A(x)$ é um escalar em relação às transformações de coordenadas.

6. ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

O principal objetivo desta seção é desenvolver, a partir da teoria clássica da eletrodinâmica, alguns conceitos que serão usados por correspondência na teoria quântica.

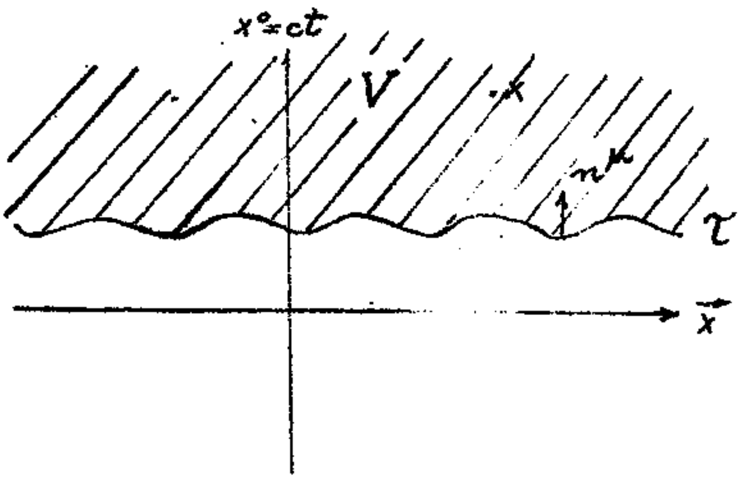
Serão estudados a função de Jordan-Pauli, as funções de Green adiantada e retardada e o parêntese de Poisson para o campo, o qual por correspondência gera o comutador da teoria quântica.[4]

6.1. Integração da equação homogênea das ondas

O campo eletromagnético nas regiões vazias satisfaz à equação homogênea das ondas

$$\Box A_\mu = 0 \quad ;$$

ver-se-á que o campo nas regiões vazias fica univocamente especificado em todos os pontos do espaço-tempo se se tiver $A_\mu(x)$ e $n^\nu A_{\mu,\nu}$ sôbre todos os pontos de uma hipersuperfície tipo-espaço (temporalmente anterior).



Isto representa o problema dos valores iniciais de Cauchy, e aqui aparece em forma integral (não como uma relação diferencial obtida por expansão em série de potências como foi feito anteriormente), supondo a existência de uma função (de Jordan-Pauli) escalar $D(x)$ definida pelas condições

$$(i) \quad \Box D(x) = 0 \tag{6-1}$$

$$(ii) \quad D(x) = 0 \quad \text{se} \quad X = \text{tipo espaço} \tag{6-2}$$

$$(iii) \quad \int_H \phi(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} D(x-a)\, n^\nu\, d^3\tau = \phi(a) \quad ; \tag{6-3}$$

aqui H é uma hipersuperfície, tipo espaço, contôrno de um quadrivolume que circunde o evento a, e n^ν é o quadrivetor unitário normal a H em cada ponto e voltado para fora do 4-volume; em particular, se $\phi(x) = 1$ então $\phi(a) = 1$.

---- x ---- x ----

Inicialmente demonstra-se, a partir de (6-1,2,3), que $D(x)$ é função ímpar de x,

$$D(x) = -D(-x) \quad ; \tag{6-5}$$

a demonstração é a seguinte: considere-se no teorema de Gauss

$$\int_{V_4} \frac{\partial}{\partial x^\mu} J_\mu(x)\, d^4V = \oint_H J_\mu(x)\, n^\mu(x)\, d^3\tau$$

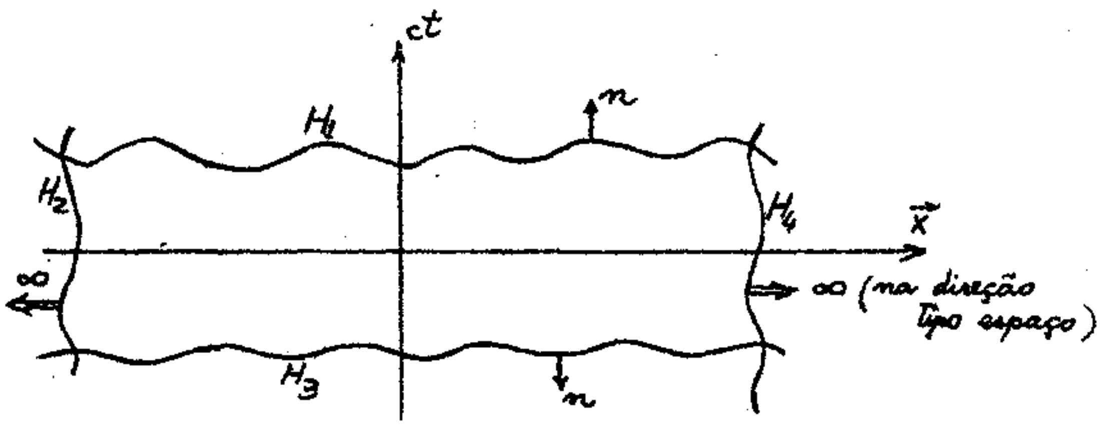
com a função $J_\mu(x)$ da forma

$$J_\mu(x, x', x'') = D(x-x') \frac{\partial}{\partial x^\mu} D(x-x'') - D(x-x'') \frac{\partial}{\partial x^\mu} D(x-x')$$

e considera-se a condição (i) $\Box D = 0$ para concluir que

$$\oint_H \left[D(x-x') \frac{\partial}{\partial x^\mu} D(x-x'') - D(x-x'') \frac{\partial}{\partial x^\mu} D(x-x') \right] n^\mu\, d^3\tau = 0 \quad .$$

Pode-se subdividir o domínio dessa integração em 4 hipersuperfícies,



;

em H_2 e H_4 as componentes espaciais $\vec{x}$ são muito grandes, $|\vec{x}| \to \infty$. Os pontos (eventos) x' e x'' são supostos na região finita, portanto $|\vec{x}'|$ e $|\vec{x}''|$ são finitos. Assim sendo, sôbre H_2 e H_4 os $|\vec{x}-\vec{x}'| \to \infty$ e $|\vec{x}-\vec{x}''| \to \infty$, sendo portanto maiores que $(x^0-x^{0'})$ e $(x^0-x^{0''})$ que são supostos finitos. Daí os intervalos $x-x'$ e $x-x''$ serem tipo espaço para os x sôbre H_2 e H_4. Portanto, considerando (ii), vem que

$$\int_{H_2 \text{ ou } H_4} \left[D(x-x')\,\partial_\mu D(x-x'') - D(x-x'')\,\partial_\mu D(x-x') \right] n^\mu d^3\tau \to 0 \quad ;$$

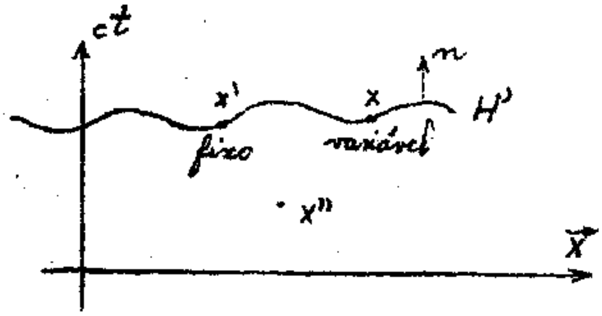
invertendo o sentido das normais a H_3 (ou seja, apontando-as para o futuro) obtem-se

$$\int_{H_1} \left[D(x-x')\,\partial_\mu D(x-x'') - D(x-x'')\,\partial_\mu D(x-x') \right] n^\mu d^3\tau =$$

$$= \int_{H_3} \left[D(x-x')\,\partial_\mu D(x-x'') - D(x-x'')\,\partial_\mu D(x-x') \right] n^\mu d^3\tau \quad ,$$

o que mostra que essas integrais, que serão chamadas de $I(x', x'')$ independem da hipersuperfície sôbre a qual se efetua a integração.

Pode-se então tomar para H uma hipersuperfície tipo espaço contendo x' ,



;

nêsse caso x-x' é tipo espaço, portanto $D(x-x')= 0$ e daí, usando-se (iii),

$$I(x', x'') = -\int_{H'} D(x-x'') \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} D(x-x') \quad n^{\mu} d^3\tau = -D(x'-x'') \; . \quad (6\text{-}6)$$

Tomando-se agora outra hipersuperfície tipo espaço contendo x'' vem x-x''= tipo espaço, daí $D(x-x'')= 0$ e então

$$I(x', x'') = \int_{H''} D(x-x') \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} D(x-x'') \; n^{\mu} d^3\tau = D(x''-x') \quad ;$$

comparando êste resultado com a (6-6) conclue-se

$$D(x'-x'') = -D(x''-x') \quad ,$$

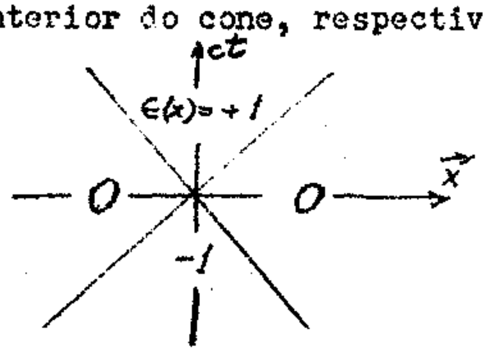
o que demonstra que $D(x)$ é função ímpar.

--- x-----x---

Sendo $D(x)$ ímpar, e nulo fora do cone de luz do evento origem, pode ser escrita

$$D(x) = \epsilon(x) \, f(x^2) \qquad \text{dentro do cone de luz} \qquad (6\text{-}7)$$

onde $\epsilon(x)$ é a função que assume os valores 0 fora do cone de luz do evento origem, e ± 1 no interior do cone, respectivamente no futuro e no passado.



Ainda não foi visto como $D(x)$ se comporta para $x^2=0$; mais adiante será visto que ela é singular sôbre o cone de luz.

Feitas estas considerações preliminares sôbre a função de Jordan-Pauli, volte-se à proposição inicial.

Tome-se o teorema de Gauss para o quadrivetor $\phi_\mu = u\,\partial v/\partial x^\mu - v\,\partial u/\partial x^\mu$,

$$\int_{V_4} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(u\,\partial v/\partial x^\mu - v\,\partial u/\partial x^\mu\right) d^4V = \oint \left(u\,\partial v/\partial x^\mu - v\,\partial u/\partial x^\mu\right) n^\mu d^3\tau \quad ,$$

com os n^μ apontando para fora do quadrivolume.

Supondo que u e v decresçam suficientemente rápido nas direções tipo-espaço, e portanto se anulam sôbre H_2 e H_4, obtem-se, orientando para o futuro a normal à hipersuperfície H_3 (tipo espaço)

$$\int_{V_4} (u\Box v - v\Box u)\, d^4V = \int_{H_1} (u v_{,\mu} - v u_{,\mu}) n^\mu d^3\tau - \int_{H_3} (u v_{,\mu} - v u_{,\mu})\, n^\mu d^3\tau \;;$$

aplica-se essa fórmula para $u = D(x'-x)$ e $v = A_\mu(x)$:

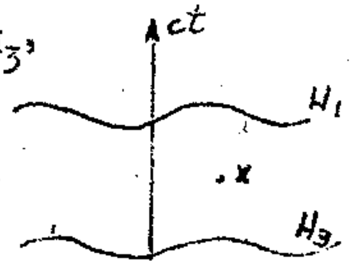
$$\int_{V_4} \left[D(x-x')\;\Box' A_\mu(x') - A_\mu(x')\;\Box' D(x-x')\right] d^4V' =$$

$$= \left[\int_{H_1} - \int_{H_3}\right]\left[D(x-x')\,\frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'^\nu} - A_\mu(x')\,\frac{\partial D(x-x')}{\partial x'^\nu}\right] n'^\nu d^3\tau' \quad . \quad (6\text{-}8)$$

O que se pretende com esta fórmula é obter o comportamento de $A_\mu(x)$ em um especificado ponto x^μ, conhecidos $A_\mu(x')$ e $n^\nu \partial A_\mu(x')/\partial x'^\nu$ sôbre uma especificada hipersuperfície tipo espaço, e sabendo-se que $\Box A_\mu = 0$. Um argumento físico de que se dispõe é o de que o campo se propaga com velocidade finita **c**, portanto todas as informações que atingem x^μ devem previr do passado relativo a x^0.

O teorema de Gauss situa x^μ entre as hipersuperfícies

H_1 e H_3,



Òbviamente sòmente os pontos de H_3 podem afetar o campo em x^μ (causalidade). A fim de evitar contribuição de H_1 toma-se

$$H_1 \to +\infty \quad .$$

Entretanto com isso não se pode supor que

$$A_\mu(x')\Big|_{H_1} \to 0 \qquad \text{e} \qquad A_{\mu,\nu}(x')\Big|_{H_1} \to 0 \quad ;$$

essas condições são obtidas considerando que o campo se propaga com velocidade finita, partindo (para os atuais propósitos) de H_3 e prosseguindo na direção crescente da coordenada tempo. Portanto, para o observador em x^0 não há informação proveniente de $t = +\infty$, e pode-se tomar aquelas quantidades como nulas.

Especificação causal do problema de Cauchy

Nêsse diagrama, todos os pontos x no futuro relativo a H_3 estão capacitados a receber informações de pontos de H_3. Como a escolha de H_3 é arbitrária, qualquer ponto x de R_4 pode ser incluido, pois sempre se pode construir uma hipersuperfície tipo espaço no passado de x. Portanto o problema de Cauchy pode ser proposto para qualquer ponto de R_4.

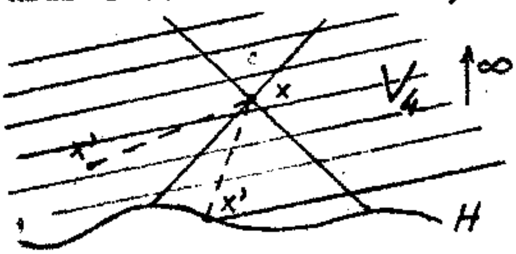
Com essas considerações, a (6-8) toma a forma, onde se denota H_3 por H,

$$\int_{V_4}\left[D(x-x')\,\Box' A_\mu(x') - A_\mu(x')\,\Box' D(x-x')\right] d^4V' =$$

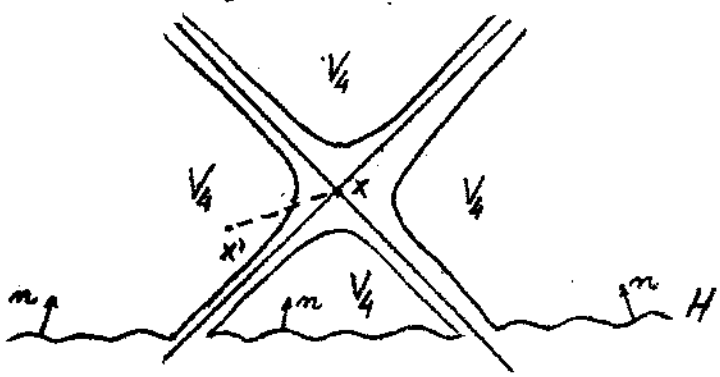
$$= -\int_{H}\left[D(x-x')\frac{\partial}{\partial x'^\nu} A_\mu(x') - A_\mu(x')\frac{\partial}{\partial x'^\nu} D(x-x')\right] n'^\nu\, d^3\tau' \quad ,$$

onde n'^μ aponta para o futuro.

Como $D(x-x')$ é singular para $(x-x')^2=0$, busca-se evitar cruzar o cone de luz de x, nas integrações.

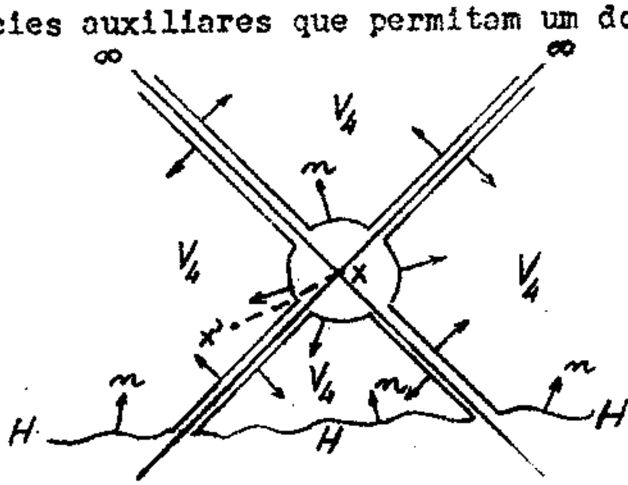


Isto poderia ser feito se se tivesse que integrar apenas em



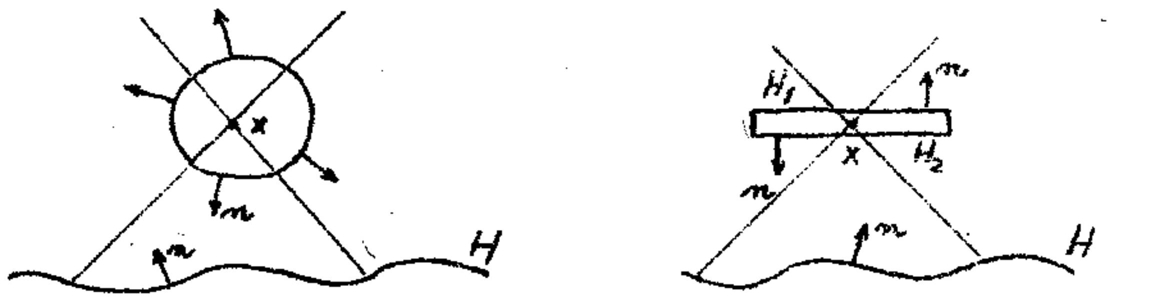
$$\begin{cases} x' \in V_4 \\ H' \text{ é limite de } x' \end{cases}$$

Essa situação pode ser obtida pela consideração de várias hipersuperfícies auxiliares que permitem um domínio contínuo para integração,



$$\begin{cases} x' \in V_4 \\ \Box' A_\mu(x') = 0 \\ \Box' D(x-x') = 0 \end{cases}$$

A integral quadrivolumétrica em (6-9) se anula, e resta apenas a integral de hipersuperfície estendida agora a todas as hipersuperfícies do diagrama anterior. Todas essas integrais são bem definidas. Supõe-se a seguir que todas essas hipersuperfícies auxiliares tendam ao cone de luz de x; daí resulta que as que estão simètricamente dispostas com relação ao cone se cancelam, restando apenas



Assim sendo, a (6-9) passa a ser, já que $\int_{V_4} = 0$,

$$\int_{H+H_1+H_2} \left[D(x-x') \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} A_\mu(x') - A_\mu(x') \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} D(x-x') \right] n'^{\nu} d^3\tau' = 0 .$$

Supõe-se agora que H_1 e H_2 sejam hipersuperfícies do tipo espaço, arbitràriamente pequenas, passando por x; então (x-x') é do tipo espaço para todo $x' \in H_1, H_2$, do que resulta $D(x-x') \to 0$ para todo $x' \in H_1, H_2$, e portanto

$$\int_{H_1} D(x-x') \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} A_\mu(x')\, n'^{\nu} d^3\tau' = \int_{H_2} \cdots = 0 \quad ;$$

e como, pela (6-3) e (6-5),

$$\int_{H_1+H_2} A_\mu(x') \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} D(x-x')\, n'^{\nu} d^3\tau' = -A_\mu(x)$$

vem que

$$A_\mu(x) = \int_H \left[D(x'-x) \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} A_\mu(x') - A_\mu(x') \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} D(x'-x) \right] n'^{\nu} d^3\tau' \qquad (6\text{-}11)$$

que é a relação buscada: dados $A_\mu(x')$ e $n'^{\nu}\partial A_\mu(x')/\partial x'^{\nu}$ sôbre uma hipersuperfície tipo espaço tôda anterior a x, pode-se determinar unìvocamente $A_\mu(x)$ no ponto x. Para $n'^{\nu} = (1,0,0,0)$ reobtem-se o resultado usual de Couchy para a representação

Lagrangeana não covariante do campo. A fim de definir (6-11) unìvocamente foi necessário recorrer à existência da função escalar $D(x)$. Em termos matemàticamente mais precisos, $D(x)$ não é realmente uma função, mas uma distribuição; isto pode ser visto da relação (6-3): $n^\nu \partial D(x)/\partial x^\nu$ se comporta como uma distribuição delta de Dirac $\delta(x)$ associada não a um quadrivolume, mas a um hiperplano.

6.2. Integração da equação inomogênea das ondas: as funções de Green

Considere-se a equação, com $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ conhecido,

$$\Box A_\mu(x) = -\frac{1}{c}\, j_\mu(x) \quad ; \tag{6-12}$$

suas soluções são

$$A_\mu(x) = \frac{1}{c}\int \bar{D}(x-x')\, j_\mu(x')\, d^4x' \quad , \tag{6-13}$$

onde $\bar{D}(x)$ é a função de Green correspondente ao operador d'Alembertiano,

$$\Box \bar{D}(x) = -\delta_4(x) \quad , \tag{6-14}$$

com a delta de Dirac no espaço-tempo sendo

$$\delta_4(x) = \delta(x^0)\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3) \quad ;$$

portanto o conhecimento das soluções da (6-14) permitirá o imediato conhecimento das soluções da (6-12).

A escolha das condições iniciais determina a escolha da particular solução da (6-14) que sirva para êsse propósito. Por generalidade estuda-se a função de Green $\bar{\Delta}(x)$ correspondente ao operador de Klein-Gordon,

$$\left(\Box - m^2\right)\bar{\Delta}(x) = -\delta_4(x) \quad , \quad m = const \quad ; \tag{6-15}$$

esta é a função de Green relacionada à equação dos mésons

$$\left(\Box - m^2\right) A_\mu(x) = -\frac{1}{c} j_\mu(x) \;.$$

No limite em que $m \to 0$ ocorre $\bar{\Delta}(x) \to \bar{D}(x)$; semelhantemente introduz-se uma generalização $\Delta(x)$ da $D(x)$ de Jordan-Pauli da forma

$$\text{(j)} \quad \left(\Box - m^2\right) \Delta(x) = 0 \quad , \tag{6-16}$$

$$\text{(jj)} \quad \Delta(x) = 0 \quad \text{para } x^\mu \text{ tipo espaço, e} \tag{6-17}$$

$$\text{(jjj)} \quad \int_H \phi(x') \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \Delta(x - x') \, n^\nu(x') \, d^3\tau' = \phi(x) \tag{6-18}$$

(aqui H e n^ν são os descritos na (6-3)).

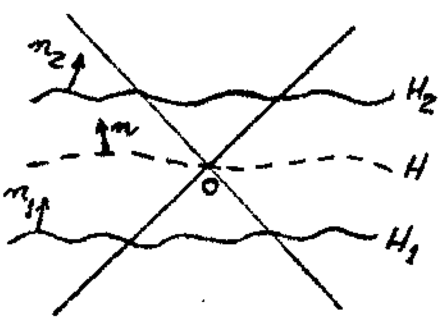
Prova-se a seguir que

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{2} \Delta(x) \epsilon(x) \quad ; \tag{6-19}$$

inicialmente, considere-se $x^2 \neq 0$: então $\epsilon(x)$ é constante (+ 1 ou - 1 ou 0) e se tem a concordância entre (i), (j) e (6-19):

$$\left(\Box - m^2\right)\bar{\Delta} = -\frac{1}{2}\left(\Box - m^2\right)\left(\Delta\epsilon\right) = -\frac{1}{2}\,\epsilon\left(\Box - m^2\right)\Delta = 0 \qquad (\text{para } x^2 \neq 0).$$

O caso em que $x^\mu = 0$ (o evento origem) requer maior cuidado, nêsse ponto $\epsilon(x)$ tem uma descontinuidade finita. Para tal, considere-se em pequeno quadri-volume $\Delta\omega$ contendo êsse ponto;



Como $\Delta(x)$ se anula para os pontos fora do cone, obtem-se

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\int_{\Delta\omega}(\Box - m^2)\bar{\Delta}(x)\, d^4V = \lim_{\Delta\omega\to 0}\int_{\Delta\omega}\Box\bar{\Delta}(x)\, d^4V - m^2 \lim_{\Delta\omega\to 0}\int_{\Delta\omega}\bar{\Delta}(x)\, d^4V \quad ;$$

para a última integral aplica-se o teorema do valor médio no cálculo integral,

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\int_{\Delta\omega}\bar{\Delta}(x)\, d^4V \longrightarrow \lim_{\Delta\omega\to 0}\bar{\Delta}(x^\mu \to 0)\,\Delta\omega \longrightarrow 0 \quad .$$

Portanto

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\int_{\Delta\omega}(\Box - m^2)\bar{\Delta}(x)\, d^4V = \lim_{H_2, H_1 \to H}\left(\int_{H_2} - \int_{H_1}\right)\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial x^\mu}\, n^\mu d^3\tau \, .$$

Considerando os sinais de $\epsilon(x)$ nêsse cálculo obtem-se usando a (6-19)

$$\lim_{H_2, H_1 \to H}\left(\int_{H_2} - \int_{H_1}\right)\frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial x^\mu}\, n^\mu d^3\tau = -\int_{H}\frac{\partial\Delta}{\partial x^\mu}\, n^\mu d^3\tau \quad ;$$

da (6-18), tomando-se $\phi(x') = \phi(x) = 1$, vem que

$$\int_{H}\frac{\partial\Delta(x)}{\partial x^\mu}\, n^\mu d^3\tau = 1$$

e portanto

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\int_{\Delta\omega}(\Box - m^2)\bar{\Delta}(x)\, d^4V = -1 \quad ;$$

como isso implica a (6-15), fica provado que a (6-19) é verdadeira.

Da (6-19) se vê que

$\bar{\Delta}(x) = 0$ para x tipo espaço.

Essas propriedades das funções $\bar{\Delta}(x)$ e $\Delta(x)$ se anularem fora do cone de luz definem o que se pode chamar de caráter da propagação da equação hiperbólica

$$(\Box - m^2) A_\mu(x) = -\frac{1}{c} j_\mu(x)$$

e em particular, para $m = 0$, da equação $\Box A_\mu = -j_\mu / c$.

6.3. Representação das funções $\Delta(x)$ e $\bar{\Delta}(x)$

De acôrdo com as condições (6-16,17,18), $\Delta(x)$ satisfaz à equação diferencial hiperbólica de 2ª ordem

$$(\Box - m^2)\Delta(x) = 0$$

e as duas condições iniciais (jj) e (jjj); essas condições podem ser apresentadas também da forma

$$\Delta(x^0 = 0 , \vec{x}) = 0 \quad \text{para todo } \vec{x} \tag{6-20}$$

$$\left.\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x^0}\right|_{x^0 = 0} = 0 \quad \text{para todo } \vec{x} \tag{6-21}$$

que claramente especifica o caráter de condições iniciais (em $x^0 = 0$). Para obter o (6-21) tomou-se na (6-18) $n^\nu = (n^0 = 1, \vec{n} = 0)$.

Expande-se $\Delta(x^0, \vec{x})$ em série de potências de x^0 ,

$$\Delta(x^0, \vec{x}) = \Delta(0, \vec{x}) + x^0 \left.\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x^0}\right|_{x^0 = 0} + \frac{x^{0^2}}{2!}\left(\frac{\partial^2 \Delta(x)}{\partial x_0^2}\right)_{x^0 = 0} + \cdots \quad ;$$

pela (6-20), $\Delta(0, \vec{x}) = 0$. A (6-16) dá

$$\partial_0{}^2 \Delta(x) = (m^2 + \vec{\nabla}^2)\Delta(x)$$

$$\partial_0{}^3 \Delta(x) = (m^2 + \vec{\nabla}^2)\Delta_{,0}(x)$$

e portanto

$$\partial_0{}^2 \Delta(x)\Big|_{x^0 = 0} = 0$$

$$\partial_0{}^3 \Delta(x)\Big|_{x^0 = 0} = (m^2 + \vec{\nabla}^2)\,\delta(\vec{x}) \quad .$$

Substituindo na expansão obtem-se

$$\Delta(x^0, \vec{x}) = x^0 \delta(\vec{x}) + \frac{x^{0^3}}{3!}(m^2 + \vec{\nabla}^2)\,\delta(\vec{x}) + \cdots \tag{6-22}$$

que é uma das formas de representar $\Delta(x)$. Desta fórmula, e da propriedade de que $\delta(x^2)$ é par pela transformação $x^\mu \to -x^\mu$, vê-se que $\Delta(x)$ é impar, pois apenas potências ímpares de x^0 comparecem,

$$\Delta(-x) = -\Delta(x) \quad .$$

Esta propriedade é análoga à da $D(x)$.

Outras representações explícitas da $\Delta(x)$ podem ser encontradas no trabalho de Schwinger (5), por exemplo,

$$\Delta(x) = -\frac{1}{2\pi}\,\epsilon(x)\left[\delta(x^2) + \frac{m^2}{2}\,\frac{J_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}}\right] \quad . \tag{6-23}$$

Devido à relação

$$\frac{J_1(a)}{a} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(ia/2)^{2l}}{l!\,(l+1)!}$$

obtem-se para x próximos do cone de luz (pequenos x^2)

$$\Delta(x) \xrightarrow[x^2 \to 0]{} -\frac{1}{2\pi}\,\epsilon(x)\left[\delta(x^2) + \frac{m^2}{4}\,\theta(x^2)\right] \quad ;$$

isso indica que além da singularidade delta há ainda uma descontinuidade finita sôbre o cone de luz.

Usando $\bar{\Delta} = -\epsilon\Delta/2$ pode-se escrever diretamente a representação da $\bar{\Delta}(x)$,

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{4\pi}\left[\delta(x^2) + \frac{m^2}{2}\,\theta(x^2)\,\frac{J_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}}\right] , \tag{6-24}$$

onde $\theta(x^2) = [\epsilon(x)]^2$ satisfaz $\theta(x^2) = +1$ (x tipo tempo)

$= 0$ (x tipo espaço) .

Tomando o limite $m \to 0$ obtem-se

$$\overline{D}(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) \tag{6-25}$$

$$D(x) = -\frac{1}{2\pi} \epsilon(x)\, \delta(x^2) \tag{6-26}$$

ou seja,

$$A_\mu(x) = \frac{1}{4\pi c} \int \delta\left[(x-x')^2\right] j_\mu(x')\, d^4V' \quad ,$$

que era a fórmula buscada.

Portanto $\Delta(x)$ e $\overline{\Delta}(x)$ se anulam fora do cone de luz da origem, mas não se anulam no interior : aí $\delta(x^2) \to 0$ porém a função de Bessel dá contribuição. Ambos apresentam singularidades na hipersuperfície do cone. Por outro lado, $D(x)$ e $\overline{D}(x)$ se anulam dentro e fora do cone de luz, e são singulares sôbre a hipersuperfície.

A interpretação física dêsses resultados é: Δ e $\overline{\Delta}$ estão associados à propagação de campos com velocidade inferior a c, enquanto D e $\overline{D}$ indicam propagação sôbre hipersuperfície nula: D se associa aos campos de radiação , e $\overline{D}$ à radiação que interage com as fontes.

6.4. A formulação Hamiltoniana da eletrodinâmica no espaço plano

A teoria de Maxwell da eletrodinâmica é caracterizada pela invariância perante dois diferentes grupos: o grupo relativístico de Poincaré e o grupo de Gauge. O primeiro é um grupo de Lie de 1ª espécie, i.é., depemde de um conjunto de parâmetros; o outro é um grupo de Lie de 2ª espécie, dependendo de uma função. Foi visto na seção 4 que uma teoria que apresente invariância perante êste último tipo de grupos conterá vinculações na sua versão Hamiltoniana. Espera-se portanto que a formulação Hamiltoniana da eletrodinâmica seja semelhante a uma teoria Hamiltoniana parametrizada, o que realmente ocorre. O papel da vinculação, bem como do procedimento para eliminá-la, serão tratados aqui.

A densidade de Lagrangeana é

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^{\mu} A_{\mu} = L_f + L_i \quad ; \tag{6-27}$$

A Lagrangeana livre L_f é invariante perante as transformações de gauge dos potenciais,

$$A_{\mu}(x) \longrightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x^{\mu}}$$

com a função $\Lambda(x)$ restringida apenas por

$$\Box \Lambda(x) = 0 \quad .$$

A integral de Ação é também gauge-invariante, mesmo com o têrmo correspondente à interação; pois como

$$S = \int L \, d^4x = S_f - \int j^{\mu} A_{\mu} \, d^4x \quad ,$$

e sabendo-se que S_f é invariante perante transformações de gauge, o mesmo ocorrendo com j^{μ} (que não depende de A_{μ}), vê-se que

$$S'_i = \int j^{\mu} A'_{\mu} \, d^4x = \int j^{\mu} A_{\mu} \, d^4x + \int j^{\mu} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^{\mu}} \, d^4x =$$
$$= S_i + \int \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (j^{\mu} \Lambda) \, d^4x - \int \Lambda \frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \, d^4x \quad ,$$

ou seja, (note-se que $\partial j^{\mu}/\partial x^{\mu} = 0$), a nova integral de Ação difere da anterior pela adição de uma quadridivergência $\partial(\Lambda j^{\mu})/\partial x^{\mu}$ à Lagrangeana, mantendo-se S invariante.

Desdobrando -se a (6-27) obtem-se

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2 - \rho\phi + \vec{j}\cdot\vec{A} \quad ; \qquad (6\text{-}28)$$

os momenta canônicos são

$$\vec{p} = \partial L/\partial\dot{\vec{A}} = \dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}\phi = -\vec{E} \qquad (6\text{-}29)$$

$$\pi = \partial L/\partial\dot{\phi} = 0 \quad . \qquad (6\text{-}30)$$

Chama-se vinculação primária à relação $\pi = 0$; ela se deve à gauge-invariância de L_f . Pois enquanto que com $\dot{\vec{A}}$ se pode formar a expressão gauge-invariante não nula $-\vec{E} = \dot{\vec{A}} + \vec{\nabla}\phi$, o mesmo não ocorre com $\dot{\phi}$, pois com êle a única expressão gauge-invariante que se pode formar é $A^{\mu}_{,\mu} = \dot{\phi} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, a qual é nula (condição de Lorentz). Com efeito,

$$A'^{\mu}_{,\mu}(x) = A^{\mu}_{,\mu}(x) + \Box\Lambda(x) = A^{\mu}_{,\mu}(x)$$

indica a gauge-invariância de $A^{\mu}_{,\mu}$. Como não há expressão gauge-invariante não-nula contendo $\dot{\phi}$, ocorre que L_f , que é gauge-invariante, não pode conter $\dot{\phi}$; daí π ser nulo.

A Hamiltoniana é

$$\mathcal{H} = \int d^3x \; H$$

com

$$H = \vec{p}\cdot\dot{\vec{A}} - L = \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2 - \vec{j}\cdot\vec{A} + \phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{p} + \rho) \quad .$$

Pode-se verificar que a vinculação primária $\pi = 0$ não é a única vinculação da teoria; para isso, examine-se

$$\dot{\pi}(x) = \int d^3y \left[\pi(\vec{x},t) \, , \, H(\vec{y},t)\right] = \vec{\nabla}\cdot\vec{p} + \rho \quad ,$$

e note-se que ela é nula, pois pelas equações de Maxwell

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \rho = 0 \quad ;$$

então a vinculação primária $\pi=0$ é mantida ao longo do tempo, ocasionando a chamada vinculação secundária

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{p}+\rho=0\ . \tag{6-31}$$

Estas duas são as únicas vinculações da teoria.

Tanto a primária como a secundária ocorrem em todos os instantes e em todos os pontos do tri-espaço, pois não fazem menção a qualquer particular evento x.

Considere-se agora $j^{\mu}=0$; então

$$H=\frac{1}{2}\vec{p}^{\,2}+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2+\phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{p}$$

não é gauge invariante, devido à presença de ϕ; entretanto reduz-se à usual densidade de energia $(\vec{E}^2+\vec{B}^2)/2$ gauge-invariante sôbre a hipersuperfície de vinculação

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{p}(x)=0\ .$$

A densidade de Hamiltoniana H não especifica como varia ϕ no tempo, pois não contém o correspondente momentum canônico π ; como consequência, ϕ não é uma variável dinâmica. Isso já era de se esperar, pois ϕ sempre é especificado a menos de uma função $\partial\Lambda/\partial t$.

Por outro lado, a Hamiltoniana não determina um tipo direto de problema de Cauchy. A existência da vinculação secundária faz com que o problema dos valores iniciais fique condicionado a uma relação entre as variáveis dinâmicas; além do mais, H não é função apenas de variáveis gauge-invariantes, mas também de ϕ . Isto implica em uma diversidade de soluções ao problema do valor inicial. Estas dificuldades podem ser removidas com uma escolha adequada de representação de $\vec{p}$ e de $\vec{A}$, e com a escolha de uma condição de gauge.

A vinculação secundária pode ser eliminada fazendo-se a decomposição ortogonal

$$\vec{p}(x) = \vec{p}_T(x) + \vec{p}_L(x) \quad , \quad \vec{A}(x) = \vec{A}_T(x) + \vec{A}_L(x) \quad ,$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{p}_T = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_T = 0 \quad ,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{p}_L = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{A}_L = 0 \quad .$$

A vinculação secundária $\vec{\nabla}\cdot\vec{p} = 0$ reduz-se a uma condição sôbre apenas $\vec{p}_L$, não sôbre $\vec{p}_T$,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{p}_L = 0 \quad ;$$

como além disso $\vec{p}_L$ deve satisfazer $\vec{\nabla}\times\vec{p}_L = 0$, vem que $\vec{p}_L = 0$.

[Convém notar que se $\rho \neq 0$ vem $\vec{\nabla}\cdot\vec{p}_L = -\rho$, e $\vec{p}_L$ é dado únicamente por ρ , $\vec{p}_L = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\nabla^2}\right)\rho$ onde ∇^{-2} é o operador integral de Coulomb; daí se deduz que $\vec{p}_L$ não é uma variável selecionável para quantização, ela se anula na zona de onda, ou seja, na zona da radiação.]

A densidade de Hamiltoniana toma então uma forma dependente únicamente das variáveis transversais,

$$H = \frac{1}{2}\vec{p}_T^{\,2} + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}_T\right)^2 \quad ;$$

as variáveis dinâmicas nessa representação são apenas $\vec{A}_T$ e $\vec{p}_T$.
Os correspondentes parênteses de Poisson são

$$\left[p_T^i(t,\vec{x})\, ,\, A_{T_j}(t,\vec{y})\right]_{p,A} = \delta^i_j\, \delta_{TT}(\vec{x}-\vec{y}) = \delta^{\,i}_{TT_j}(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\left[p_T^i(t,\vec{x})\, ,\, p_T^j(t,\vec{y})\right] = \left[A_{T_i}(t,\vec{x})\, ,\, A_{T_j}(t,\vec{y})\right] = 0$$

onde $\delta^{\,i}_{TT_j}(\vec{x}-\vec{y})$ é uma distribuição com todas as propriedades da delta de Dirac, com as propriedades adicionais de ter nulas suas tri-divergências

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\delta^{\,i}_{TT_j}(\vec{x}-\vec{y})\right] = \frac{\partial}{\partial y^i}\left[\delta^{\,i}_{TT_j}(\vec{x}-\vec{y})\right] = 0 \quad .$$

Os campos elétrico e magnético são então

$$\vec{E} = -\vec{p} = -\vec{p}_T$$
$$\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_T$$

ou seja:

$$\vec{E}_L = \vec{H}_L = 0 \;, \quad \vec{E}_T = -\vec{p}_T \quad , \quad \vec{H}_T = \vec{\nabla}\times\vec{A}_T \quad .$$

A situação $\vec{A}_L = 0$ é conseguida por uma transformação de gauge: suponha-se $\vec{A}_L(x) \neq 0$ e efetue-se

$$\vec{A}(x) \rightarrow \vec{A}'(x) = \vec{A}(x) - \vec{\nabla}\Lambda(x) \quad ;$$

ocorrem

$$\vec{A}'_T = \vec{A}_T \qquad e \quad \vec{A}'_L = \vec{A}_L - \vec{\nabla}\Lambda \quad ;$$

então pode-se obter $\vec{A}'_L = 0$, bastando escolher uma função $\Lambda(x)$ que satisfaça $\vec{\nabla}\Lambda = \vec{A}_L$.

Com $\vec{p}_L = 0$ e $\vec{A}_L = 0$ fica especificado o sistema, e a quantização pode então se processar por correspondência.

6.5. O parêntese de Poisson covariante

Viu-se que dadas as variáveis canônicas $\vec{A}(x)$, $\vec{p}(x)$, pode-se formar os "comutadores clássicos" para tempos iguais, o que foi feito nas (6-32,33,34).

Se for usada uma representação paramétrica para a Lagrangeana como a da seção 4,pode-se escrever essas "relações de comutação" envolvendo quadrivetores $\pi^\mu(x)$, $A_\nu(x')$; elas se refeririam a intervalos(x-x') arbitrários, pois são calculadas para um valor fixado apenas do parâmetro. Entretanto a introdução de uma representação paramétrica para o campo é de um certo modo uma complicação desnecessária, pois superpõe à vinculação já existente, uma nova vinculação, a paramétrica.

É possível obter diretamente um "comutador clássico" para intervalos (x-x') arbitrários sem apelar para a representação paramétrica. Considera-se $A_i(x^o, \vec{x})$ e $A_j(x'^o, \vec{x}')$ com $x'^o = x^o + \epsilon$, com ϵ infinitesimal ; em primeira ordem tem-se

$$A_j(x'^o, \vec{x}') = A_j(x^o, \vec{x}') + \epsilon \dot{A}_j(x^o, \vec{x}') .$$

Definindo-se então a operação

$$\left[A_i(x), A_j(x')\right]_{x'^o = x^o + \epsilon} \equiv \left[A_i(x), A_j(x^o, \vec{x}')\right] + \epsilon\left[A_i(x), \dot{A}(x')\right]_{x'^o = x^o}$$

obtem-se

$$\left[A_i(x), A_j(x')\right]_{x'^o = x^o + \epsilon} = \epsilon\left[A_i(x), \left[A_j(x^o, \vec{x}'), \mathcal{H}(x^o)\right]\right] ;$$

se não se considera a vinculação (efetuando-se todos os cálculos na hipersuperfície da vinculação, por exemplo), obtem-se

$$\left[A_j(x^o, \vec{x}'), \mathcal{H}(x^o)\right] = \frac{1}{2}\int d^3y \left[A_j(x^o, \vec{x}'), p^i(x^o, \vec{y}) p^i(x^o, \vec{y})\right] =$$
$$= p^i(x^o, \vec{x}') \delta^i_j = p_j(x^o, \vec{x}')$$

e como

$$\left[A_i(x), p_j(x^o, \vec{x}')\right] = \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}') ,$$

vem

$$\left[A_i(x), A_j(x')\right]_{x'^o = x^o + \epsilon} = \epsilon \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{x}') .$$

Portanto os $A_i(x)$ não "comutam" em geral com os $A_j(x')$ em outra hipersuperfície de tempo constante. Para separações finitas, i.e., tomando todos os termos na expansão em série de potências de $(x'^o - x^o)$ prova-se que (ver a 6-22)

$$[A_i(x), A_j(x')] = \delta_{ij} D(x-x')$$

onde $D(x)$ é a distribuição de Jordan-Pauli .

Se se efetuar o mesmo cálculo para

$[p^i(x), p^j(x')]$ e para $[p^i(x), A_j(x')]$ se obtem "relações de comutação" para $\vec{E}(x)$ com $\vec{E}(x')$ e de $\vec{E}(x)$ com $\vec{H}(x')$; neste último caso toma-se $[p^i(x), \partial A_k(x')/\partial x'^j]$. As "relações de comutação" obtidas valem para (x'-x) arbitrários.

REFERÊNCIAS

1. Landau-Lifshitz - The Classical theory of fields, pag.62
2. P.A.M. Dirac - Lectures in quantum mechanics - Yeshiva Univ. monographs.
3. J. Synge - Relativity, the special theory - North Holland, Amsterdam 1956 .
4. J. Leite Lopes - Fundamentos da Eletrodinâmica Clássica - Publicações da F.N.Fi. Univ. Brasil 1960.
5. J. Schwinger - Phys. Rev. 75, 651(1949)
   Schweber, Bethe, de Hoffman - Mesons and Fields - vol.1 - pág. 176 (1955) - Row, Peterson.