MONOGRAFIAS DE FÍSICA

XVII

INTRODUÇÃO À TEORIA QUÂNTICA DOS CAMPOS

por

J. Leite Lopes e Alberto Vidal

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1963

INTRODUÇÃO

Estas notas reproduzem um curso oferecido, por um de nós (J. Leite Lopes), aos estudantes de pós-graduação no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. O seu objetivo é desenvolver a fundamentação teórica da técnica de cálculo apresentada em monografia anterior (J. Leite Lopes, Introdução à Eletrodinâmica Quântica, Monografias de Física V, C. B. P. F., 1960).

O leitor lucrará com a consulta às muitas obras sôbre o assunto, entre as quais citamos:

SCHWEBER, BETHE, DE HOFFMANN, Mesons and Fields, I (Row-Peterson);

JAUCH e ROHRLICH, The Theory of Photons and Electrons (Addison-Wesley);

AKHIEZER and BERESTETSKY, Quantum Electrodynamics, I and II (State Technico-Theoretical Literature Press, Moscow);

KALLÉN, Quantenelektrodynamik, in Handbuck der Physik, vol. V, part 1 (Springer-Verlag);

THIRRING, Principles of Quantum Electrodynamics (Academic Press);

HENLEY and THIRRING, Elementary Quantum Field Theory (Mc Graw-Hill);

MANDL, Introduction to Quantum Field Theory (interscience);

BOGOLIUBOV and SHIRKOV, Introduction to the Theory of Quantized Fields (Interscience);

FOLDY, FOWLER, GUNN, BRUECKNER e BOHM, Quantum Theory III, edited by D. R. Bates (Academic Press).

ÍNDICE

Página

* * *

I - TEORIA CLÁSSICA DOS CAMPOS

1. Lagrangeana, tensor energia-momentum

As equações clássicas dos campos são obtidas de um princípio variacional. Define-se uma densidade de lagrangeana $\mathcal{L}=\mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\mu}\right)$ em função das variáveis do campo $\phi(x)$ e de suas derivadas primeiras, de tal modo que a variação da integral de ação:

$$I = \int \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\right) d^4 x \tag{1.1}$$

em relação a ϕ, dê lugar às equações do campo.

Postula-se que I atinja um extremum para tôda variação arbitrária $\delta\phi$ de ϕ que se anule nos limites de integração, isto é:

$$\delta\phi(\vec{x}, t_1) = \delta\phi(\vec{x}, t_2) = 0, \tag{1.2}$$

onde t_1 e t_2 são os limites de tempo da integração sôbre $\mathcal{L}$ em I.

L deve ser invariante em relação ao grupo das transformações de Lorentz inhomogêneas e próprias. Se escolhermos L escalar (poderia ser pseudoescalar, em relação às transformações que incluem reflexão espacial), I será um pseudoescalar (escalar) pois d^4x é pseudoescalar.

Variando (1.1) temos:

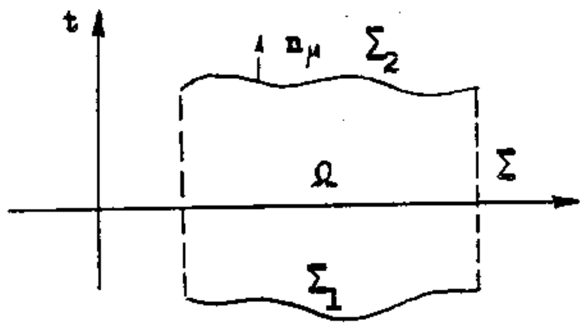
$$\delta I = \int_\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} \delta\phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}} \delta \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right] d^4 x \, , \tag{1.3}$$

onde Ω é o volume quadridimensional de integração, delimitado por uma superfície $\sum$ de normal $n_\mu(x)$ (em cada ponto dirigida para fora).

Integração por partes dá:

$$\delta I = \int_\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}} \right) \right] \delta\phi \, d^4x + \int_\Sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}} n_\mu(x) d\sigma(x) \delta\phi \; . \qquad (1.4)$$

Admitiremos que $\phi(x)$ se anule a grandes distâncias espaciais (fora do cone de luz de origem).



Assim a contribuição da superfície pontilhada à integral sôbre $\sum$ é zero. Como, por hipótese, $\delta\phi = 0$ nas duas superfícies $\sum_1$ e $\sum_2$, então

$$\delta I = 0 \qquad (1.5)$$

exige:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}} = 0 \; , \qquad (1.6)$$

que são as <u>equações do campo ϕ</u>.

Se a L adicionarmos uma divergência:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial F^{\mu}(\phi)}{\partial x^{\mu}} \tag{1.7}$$

L' e L dão lugar às mesmas equações de movimento porque $\int \frac{\partial F^{\mu}}{\partial x^{\mu}} d^4x$ pode ser reduzida, pelo teorema de Gauss, a uma integral sôbre $\sum$ e sua variação se anula. Ha exceção se F^{μ} contém derivadas segundas de ϕ.

Definimos o momento canônicamente conjugado a ϕ por:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \tag{1.8}$$

onde $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$.

A densidade de hamiltoniana é definida por:

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \pi) \tag{1.9}$$

e a hamiltoniana total por:

$$H = \int \mathcal{H} d^3x. \tag{1.10}$$

As equações do campo sob a forma de equações canônicas são:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\delta H}{\delta \pi(x)}, \\ \dot{\pi} &= -\frac{\delta H}{\delta \phi}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

onde a derivada funcional de

$$F = \int \mathcal{F}\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}\right) d^3x$$

é dada por:

$$\frac{\delta F}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x_k}}. \tag{1.12}$$

O tensor energia-momentum é:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}} - \mathcal{L}g^{\mu\nu} \qquad (1.13)$$

e é tal que, na ausência de interações:

$$\frac{d\ T^{\mu\nu}}{dx^\nu} = 0\ , \qquad (1.14)$$

pois:

$$\frac{dT^{\mu\nu}}{dx^\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}} - \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu}$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^\nu\partial x_\mu} + \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^\lambda}} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu\partial x^\lambda} = 0,$$

pelas equações do campo.

Quando L depende explicitamente de x,

$$\frac{dT^{\mu\nu}}{dx^\nu} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\ . \qquad (1.15)$$

O tensor $T^{\mu\nu}$ é tal que:

$$H = \int T^{00}\ d^3x\ , \qquad (1.16)$$

como resulta das definições de H e de $T^{\mu\nu}$.

De (1.14) resulta:

$$\frac{d}{dx^0}\int T^{\mu 0}\ d^3x + \sum_{k=1}^{3} \int \frac{d}{dx^k}\ T^{\mu k}\ d^3x = 0\ .$$

Se $\phi \longrightarrow 0$ no infinito, $\int_V \frac{d}{dx^k} T^{\mu k}\, d^3x = \int_S T^{\mu\nu}\, ds_\nu \longrightarrow 0$ quando $S \longrightarrow \infty$. Assim:

$$\frac{d}{dx^o} \int T^{\mu o}\, d^3x = 0 \,. \tag{1.17}$$

Para $\mu = 0$ tem-se a lei de conservação da energia $\frac{dH}{dt} = 0$. Para $\mu = 1, 2, 3$ tem-se a lei de conservação do momentum do campo, definido por:

$$P^k = \int T^{ko}\, d^3x = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} d^3x = \int \pi \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\, d^3x \,. \tag{1.18}$$

L sendo um escalar, $T^{\mu\nu}$ é um tensor de 2ª ordem e $P^\mu = \int T^{\mu o}\, d^3x$ é um quadrivetor, o quadrivetor energia-momentum.

Como T^{ko} é a densidade de momentum do campo, a definição de momento angular é imediata:

$$m_{k\ell o} = x_k\, T_{\ell o} - x_\ell\, T_{ko} \tag{1.19}$$

e o momento angular total é:

$$M_{k\ell} = \int m_{k\ell o}\, d^3x \,. \tag{1.20}$$

Êste constitui a parte puramente espacial do tensor

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x\, (x_\mu\, T_{\nu o} - x_\nu\, T_{\mu o}) \tag{1.21}$$

e $m_{\mu\nu o} = x_\mu\, T_{\nu o} - x_\nu\, T_{\mu o}$ provem de

$$m_{\mu\nu\rho} = x_\mu\, T_{\nu\rho} - x_\nu\, T_{\mu\rho} \,. \tag{1.22}$$

Devemos ter:

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} m_{\mu\nu\rho} = 0 \,, \tag{1.23}$$

pois daí obtemos por integração:

$$\frac{d}{dx_o}\int m_{\mu\nu o}\, d^3x + \sum_k \int \frac{d}{dx_k} m_{\mu\nu k}\, d^3x = 0 ,$$

que conduz a

$$\frac{d}{dx_o}\int m_{\mu\nu o}\, d^3x = 0 \tag{1.24}$$

ou

$$\frac{d}{dt} M_{\mu\nu} = 0 , \tag{1.25}$$

conservação do momento angular.

Mas, fazendo o cálculo obtem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} m_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial}{\partial x_o}(x_\mu T_{\nu\rho} - x_\nu T_{\mu\rho}) = T_{\nu\mu} - T_{\mu\nu} \tag{1.26}$$

logo por (1.23) a conservação do momento angular exige que $T_{\mu\nu}$ se ja simétrico.

2. Campo mesônico escalar, neutro

A equação dêste campo é:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \mu^2\phi = 0 \tag{2.1}$$

onde $\mu = \frac{mc}{h}$ e m é a massa dos mesons, ϕ é uma função escalar e re al.

A equação se escreve ainda:

$$\Box\phi + \mu^2\phi = 0 \tag{2.2}$$

onde

$$\Box = \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta .$$

A densidade de lagrangeana correspondente é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\mu^2 \phi^2 - g^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\ \frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\mu^2 \phi^2 - \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\ \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right). \qquad (2.3)$$

A equação do campo é:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}} = 0 . \qquad (1.6)$$

Mas:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\mu^2 \phi , \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}} = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} ,$$

logo

$$-\mu^2 \phi - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\ \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} = 0 \qquad (2.5)$$

e como:

$$\Box = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\ \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

vem, como queriamos, a equação de campo,

$$\Box\phi + \mu^2 \phi = 0 . \qquad (2.2)$$

Para obter a hamiltoniana, observe que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu^2 \phi^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + (\nabla\phi)^2\right] \qquad (2.3)$$

e

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{c^2}\,\dot{\phi} \,, \tag{2.4}$$

logo, por (1.9):

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = c^2\pi^2 + \frac{1}{2}\,\mu^2\phi^2 - \frac{1}{2}\,c^2\pi^2 + \frac{1}{2}\,(\nabla\phi)^2 \ ,$$

donde:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\,(c^2\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + \mu^2\phi^2) \ . \tag{2.5}$$

Observe que é positiva-definida, como queremos que seja, e que o tensor momentum-energia é simétrico e está dado por:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\;\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\left(\mu^2\phi^2 - \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\;\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right),$$

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \ . \tag{2.6}$$

3. <u>Campo escalar complexo</u>

A variável do campo é o par $\phi(x)$, $\phi^*(x)$. Podem-se introduzir duas variáveis reais $\phi^{(1)}(x)$, $\phi^{(2)}(x)$ da seguinte maneira:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi^{(1)}(x) + i\phi^{(2)}(x)\right] \tag{3.1}$$

e a teoria pode ser feita em termos de ϕ, ϕ^* ou de $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$. Se usarmos o primeiro par, devemos variar $\mathcal{L}\left(\phi, \phi^*, \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial\phi^*}{\partial x^\mu}\right)$ em relação a ϕ e ϕ^*, independentemente. Se usarmos $\mathcal{L}\left(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x^\mu}, \frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x^\mu}\right)$, devemos variar em relação a $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$ independentemente.

A Lagrangeana do campo é:

$$\mathcal{L} = -\left(\mu^2 \phi^* \phi - \frac{\partial \phi^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) \qquad (3.2)$$

que dá lugar a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}} = 0 \ , \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi^*}{\partial x^\mu}} = 0 \ ,$$

isto é:

$$\Box \phi + \mu^2 \phi = 0 \ ,$$

$$\Box \phi^* + \mu^2 \phi^* = 0 \ . \qquad (3.4)$$

Para os momentos canonicamente conjugados a ϕ e ϕ^* obtem-se:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*$$

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi} \qquad (3.5)$$

De (3.2) e (3.5) vem:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} + \pi^* \dot{\phi}^* - \mathcal{L} =$$

$$= \pi^* \pi + (\vec{\nabla} \phi^*)(\vec{\nabla} \phi) + \mu^2 \phi^* \phi \ . \qquad (3.6)$$

Um vetor corrente j^μ que é conservado, isto é, que obedece à equação:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x_\mu} = 0 \ , \qquad (3.7)$$

é definido por:

$$j^\mu = -e \left(\phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x^\mu} - \phi^{(2)} \frac{\phi^{(1)}}{\partial x^\mu} \right) \qquad (3.8)$$

ou

$$j^{\mu} = -ie\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\phi^{*}}{\partial x^{\mu}}}\phi^{*}\right) . \tag{3.9}$$

Veremos mais tarde a conexão de j^{μ} com a transformação de calibre (gauge) de 1ª espécie.

4. Campo de Dirac

Uma Lagrangeana para o campo de Dirac é [1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\ \bar{\psi}(-i\not{\partial} + m)\,\psi - \frac{1}{2}\left(i\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}\gamma^{\mu} + m\,\bar{\psi}\right)\psi$$

$$= \frac{1}{2}\bar{\psi}\left(-i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + m\right)\psi - \frac{1}{2}\left(i\,\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi}\right)\psi \tag{4.1}$$

Vamos fazer $\hbar = 1$, $c = 1$ daqui por diante; obtemos de (4.1), variando em relação a $\bar{\psi}$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = -\frac{1}{2}\ (-i\not{\partial} + m)\psi\ - \frac{1}{2}m\,\psi, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}} = -\frac{1}{2}\,i\gamma^{\mu}\psi\ , \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}} = -\frac{1}{2}\,i\,\not{\partial}\,\psi. \tag{4.4}$$

De modo que:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}} = 0 \tag{4.5}$$

conduz a:

$$(-i\partial\!\!\!/ + m)\psi = 0 \ , \tag{4.6}$$

por (4.2) e (4.4).

De (4.1) variando em relação a ψ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -\frac{1}{2}\left(i\,\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi} \right) - \frac{1}{2}\, m\bar{\psi} \, , \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}}} = \frac{1}{2}\, i\, \bar{\psi}\gamma^{\mu} \ , \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}}} = \frac{1}{2}\, i\, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}\gamma^{\mu} \ , \tag{4.9}$$

logo a equação de movimento

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}}} = 0 \tag{4.10}$$

dá lugar a:

$$i\,\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi} = 0 \ , \tag{4.11}$$

por (4.7) e (4.9).

De

$$j^{\mu} = ie\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}}}\,\psi - \bar{\psi}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dfrac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}} \right) \tag{4.12}$$

e de (4.3) e (4.8) resulta:

$$j^{\mu} = e\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi , \tag{4.13}$$

que satisfaz a

$$\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{4.14}$$

Daí decorre:

$$\frac{\partial}{\partial x^{0}} \int \overline{\psi}\, \gamma^{0}\, \psi\, d^{3}x = 0 \ , \tag{4.15}$$

conservação da carga.

Não podemos passar à Hamiltoniana por meio dos momentos π porque êstes dependem de ψ e $\overline{\psi}$.

Devemos usar o tensor energia-momentum, $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x^{\nu}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^{\nu}}} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \ . \tag{4.16}$$

De (4.3), (4.8) e (4.16) obtemos:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\, \gamma^{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_{\mu}} \gamma^{\nu}\, \psi \right) \tag{4.17}$$

porque L = 0. $T^{\mu\nu}$ pode ser simetrizado.

O quadri-momentum P^{μ} é então:

$$P^{\mu} = \int T^{\mu 0}\, d^{3}x = \frac{1}{2} \int d^{3}x \left(\overline{\psi}\, \gamma^{0}\, \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_{\mu}} \gamma^{0}\, \psi \right)$$

$$= i \int d^{3}x \left(\overline{\psi}\, \gamma^{0}\, \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} \right). \tag{4.18}$$

Daí:

$$H = P^{0} = \int T^{00}\, d^{3}x =$$

$$= \int d^{3}x\ \overline{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\psi =$$

$$= \int d^{3}x\ \psi^{+}(-i\vec{\alpha}\,\vec{\nabla} + \beta m)\psi \ . \tag{4.19}$$

5. Campo eletromagnético

Uma possível Lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \qquad (5.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} .$$

Como

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad F^{ok} = E^k, \; F^{kl} = \mathcal{H}^j ,$$

tem-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\vec{E}^{\,2} - \mathcal{H}^2) .$$

Variação em relação a A^μ dá as equações de Maxwell para o campo livre:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 , \qquad (5.2)$$

ou, em têrmos de potenciais:

$$\Box A^\mu - \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \qquad \chi = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} . \qquad (5.3)$$

Escolhe-se o calibre de Lorentz $\chi = 0$, o que dá

$$\Box A^\mu = 0 . \qquad (5.4)$$

Contudo, com esta L, π , associado a A_o, anula-se. Para evitar esta dificuldade, Fermi usou a seguinte L:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\chi^2 . \qquad (5.5)$$

As equações do campo são então:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\right)-\frac{\partial \chi}{\partial x^{\nu}}=0 \tag{5.6}$$

ou

$$\Box A^{\nu} = 0 \ . \tag{5.7}$$

Para obter as equações de Maxwell impomos: $\chi(x, t) = 0$ para qualquer t. Basta impôr, entretanto:

$$\chi = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0 \ , \qquad \text{para } t = 0 \ . \tag{5.8}$$

Pois, desenvolvendo χ em tôrno de $t = 0$:

$$\chi = \chi_{t=0} + t\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)_{t=0} + \frac{1}{2}t^2\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\right)_{t=0} + \ldots \ . \tag{5.9}$$

Pelas condições iniciais (5.8):

$$\chi = \frac{1}{2}t^2\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\right)_{t=0} + \ldots \ .$$

Mas:

$$\Box \chi = 0 \ ,$$

logo:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \psi,$$

$$\frac{\partial^3 \chi}{\partial t^3} = c^2 \Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

que se anulam para $t = 0$.

Logo

$$\chi(x, t) = 0 \quad \text{para qualquer } t.$$

Agora:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}\right) - \frac{1}{2}\,\chi^2$$

$$= -\frac{1}{2} A_{\mu,\nu}\, A^{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(A^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right) - \frac{1}{2} A^\nu \frac{\partial \chi}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\chi^2$$

que é: (5.10)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} A_{\mu,\nu}\, A^{\mu,\nu} \,, \tag{5.11}$$

quando se despreza a divergência e se considera $\chi = 0$.

Daí:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,0}} = -A_{\mu,0} \tag{5.12}$$

e

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\,\pi^\mu\,\pi_\mu - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} A_\mu^k\, A^{\mu,k} \,. \tag{5.13}$$

que corresponde a superposição de 4 campos escalares de massa zero. Mas $\mathcal{H}$ não é positiva definida. A condição suplementar será usada mais tarde para tornar $\mathcal{H}$ positiva definida.

6. Interações

6a) Interações locais e não locais

A Lagrangeana que descreve a interação entre diferentes campos consiste na soma da Lagrangeana dos campos livres e da Lagrangeana de interação,

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_{livre} + \mathcal{L}_{int} \,,$$

$\mathcal{L}_{int}$ deve ser então relativìsticamente invariante (como $\mathcal{L}_{livre}$).

Podemos distinguir dois tipos de interações:

i) Locais: constituídos de produtos de grandezas formadas com um campo num ponto x (espaço-tempo) por aquelas formadas com o outro campo no mesmo ponto, de modo que seja invariante em relação ao grupo de Lorentz:

densidade: $A(x)\ B(x)$;

total: $\int A(x)\ B(x)\ d^4x$;

ii) Não locais: são da forma:

$$A(x)\ \ B(x')$$

ou seja, as grandezas formadas pelos diferentes campos não atuam no mesmo ponto, de modo que a interação total exige uma função $F(x - x')$ tal que se tenha:

$$\int A(x)\ B(x')\ F(x-x')\ d^4x\ d^4x$$

relativìsticamente invariante.

A magnitude da interação é medida por um fator multiplicativo chamado constante de acoplamento. Se o acoplamento fôr direto (não aparecem derivadas na interação) denotaremos por G esta constante e por F caso o acoplamento contenha derivadas.

Exemplos de interações locais são:

i) Campo escalar ϕ com campo espinorial ψ:

$$G\,\overline{\psi}\,\psi\phi \tag{6.1}$$

e

$$\frac{F}{\mu}\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\psi\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\ . \tag{6.2}$$

ii) Campo pseudoescalar ϕ com espinorial:

$$G\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\psi\,\phi \tag{6.3}$$

e

$$\frac{F}{\mu}\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\gamma_5\,\psi\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\;. \tag{6.4}$$

iii) Campo vetorial ϕ_μ com espinorial:

$$G\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\,\phi_\mu \tag{6.5}$$

e

$$\frac{F}{\mu}\,\overline{\psi}\,\sigma_{\mu\nu}\,\psi\,F^{\mu\nu} = -\frac{F}{2i^\mu}\,\overline{\psi}\,(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\psi\left(\frac{\partial\phi^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\phi^\mu}{\partial x_\nu}\right)\;. \tag{6.6}$$

Estas, todas, são relativìsticamente invariantes e invariantes em relação à reflexão espacial.

Se relaxarmos esta última invariância podemos escrever para a interação de ψ com campo escalar ϕ:

$$G\,\overline{\psi}\,\psi\,\phi + G'\,\overline{\psi}\,\gamma_5\,\psi\,\phi \tag{6.7}$$

e do mesmo modo para as outras.

6b) <u>Interação de um campo de Dirac com um campo escalar neutro</u>.

A densidade de Lagrangeana total é:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{int}\;, \tag{6.8}$$

onde:

$$\mathcal{L}_\psi = -\frac{1}{2}\,\overline{\psi}\,(-i\not\partial + m)\psi - \frac{1}{2}\left(i\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + m\,\overline{\psi}\right)\psi,$$

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\left(\mu^2\phi^2 - \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\right)\;, \tag{6.9}$$

$$\mathcal{L}_{int} = - G\, \overline{\psi}\, \Gamma\, \psi \phi \, ,$$

isto é, $\mathcal{L}_\psi$ e $\mathcal{L}_\phi$ são as Lagrangeanas para os campos livres espinorial e mesônico e $\mathcal{L}_{int}$ é o têrmo que dá a interação.

Variação de (6.8) em relação a $\overline{\psi}$ dá:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = - m\psi - G\, \Gamma\, \psi\phi + \frac{1}{2}\, i\, \not{\partial}\, \psi, \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^\mu}} = - \frac{1}{2}\, i\, \gamma^\mu\, \psi\, ,$$

obtemos então:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^\mu}} = (i\, \not{\partial} - m)\psi - G\, \Gamma\, \psi\phi = 0$$

ou:

$$(- i\, \not{\partial} + m)\psi = - G\, \Gamma\, \psi\phi \, , \tag{6.11}$$

que é a equação de campo para ψ.

Variação em relação a ψ dá:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = - m\, \overline{\psi} - G\, \overline{\psi}\, \Gamma\, \phi - \frac{1}{2}\, i\, \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^\mu}\, \gamma^\mu, \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}} = \frac{1}{2}\, i\, \overline{\psi}\, \gamma^\mu,$$

logo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}} = - i\, \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^\mu}\, \gamma^\mu - m\, \overline{\psi} - G\, \overline{\psi}\, \Gamma\, \phi = 0 \, ,$$

ou

$$i\, \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x^\mu}\, \gamma^\mu + m\overline{\psi} = - G\, \overline{\psi}\, \Gamma\, \phi \, , \tag{6.13}$$

que é a equação para $\overline{\psi}$.

Finalmente, variação em relação à ϕ dá:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \mu^2 - G\, \overline{\psi}\, \Gamma\, \psi \,, \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}} = - \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \,,$$

então

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - \mu^2 \phi - G\, \overline{\psi}\, \Gamma\, \psi = 0 \,,$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - \mu^2 \phi = G\, \overline{\psi}\, \Gamma\, \psi,$$

isto é:

$$(\Box + \mu^2)\, | = - G\, \overline{\psi}\, \Gamma\, \psi \,, \tag{6.15}$$

equação de campo para ϕ.

T^{oo} define a hamiltoniana, dando lugar a:

$$H = H_o + H_{int} \,, \tag{6.16}$$

onde:

$$H_{int} = G \int \overline{\psi}\, \Gamma\, \psi\, \phi\, d^3 x \tag{6.17}$$

corresponde à energia de interação.

6c) Interação com o campo eletromagnético

Para descrever a interação de um campo carregado com o campo eletromagnético devemos substituir, onde aparecer,

$$p_\mu \text{ por } p_\mu + e A_\mu \text{ ou } \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ por } \frac{\partial}{\partial x^\mu} + i e A_\mu \tag{6.18}$$

Assim no caso de um campo espinorial em interação com A_μ, a densidade Lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2i}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i e A_\mu\right)\psi + i m \bar{\psi}\psi\right] +$$

$$+ \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\mu} - i e A_\mu \bar{\psi}\right)\gamma^\mu \psi - i m \bar{\psi}\psi\right] \qquad (6.19)$$

$$= \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_n - e\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \,.$$

As variações em relação a A_μ, $\bar{\psi}$ e ψ dão respectivamente:

$$\Box A_\mu = e\,\bar{\psi}\gamma_\mu\psi,$$

$$(i\,\partial\!\!\!/ - e\,A\!\!\!/) - m\,\psi = 0, \qquad (6.20)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial x^\mu} + e A_\mu\right)\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0.$$

A Lagrangeana (6.19) é invariante em relação às transformações:

$$\psi \longrightarrow \psi\, e^{ie\Lambda},$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}\, e^{-ie\Lambda} \qquad (6.21)$$

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu}\,.$$

No caso de um campo escalar em interação com o campo eletromagnético temos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \mu^2\phi^*\phi +$$

$$+\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x^\mu} - i e A_\mu \phi^*\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + i e A^\mu \phi\right), \qquad (6.22)$$

então, variando em relação a A^{μ}, obtemos:

$$\Box A_{\mu} = j_{\mu}, \tag{6.23}$$

onde:

$$j^{\mu} = -ie\left[\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x^{\mu}} - ieA_{\mu}\phi^*\right)\phi - \right.$$

$$\left. - \phi^*\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} + ieA_{\mu}\phi\right)\right]. \tag{6.24}$$

Vemos que:

$$\mathcal{L}_{int} = ie\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial x^{\mu}}\phi - \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}\right) A^{\mu} + \tag{6.25}$$

$$+ e^2 A_{\mu} A^{\mu} \phi^* \phi$$

e que (6.22) é invariante em relação às transformações:

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi\, e^{ie\Lambda}, \\ \phi^* &\longrightarrow \phi^*\, e^{-ie\Lambda}, \\ A_{\mu} &\longrightarrow A_{\mu} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{\mu}}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

(6.21) e (6.26) constituem as transformações de calibre ("gauge") de 2ª espécie e formam um grupo.

* * *

II - TEORIA QUÂNTICA DOS CAMPOS

1. Introdução

1a. Vetores de estado, operadores e transformações unitárias

Na mecânica quântica, um sistema é descrito por um vetor de estado que representaremos por ψ ou pelo símbolo "bra" $|>$. A êle está associado um dual $\psi^+ = <|$ ("ket"). Um operador α que atue sôbre ψ à esquerda, terá seu hermitiano conjugado atuando à direita de ψ^+:

$$\alpha\psi = \alpha|> \longrightarrow \psi^+ \alpha^+ = <|\alpha^+ .$$

Um observável é um operador linear e hermitiano: $\alpha^+ = \alpha$. Um auto-estado ou auto-vetor de um operador α é representado por

$$\psi_{\alpha'} = |\alpha'>, \tag{1.1}$$

onde:

$$\alpha\psi_{\alpha'} = \alpha'\psi\alpha'$$

ou

$$\alpha|\alpha'> = \alpha'|\alpha'> . \tag{1.2}$$

Os auto-vetores são ortonormais:

$$<\alpha'|\alpha''> = (\psi_{\alpha'}, \psi_{\alpha''}) = \delta(\alpha', \alpha'') \tag{1.3}$$

e formam um sistema completo:

$$\sum_{\alpha'} |\alpha'><\alpha'| = 1 . \tag{1.4}$$

Isto quer dizer que posso desenvolver um $|>$ em série de

$|\alpha'\rangle$. Pois

$$|\rangle = \sum_{\alpha'} |\alpha'\rangle C_{\alpha'} , \tag{1.5}$$

onde:

$$\langle\alpha'|\rangle = C_{\alpha'} \tag{1.6}$$

já que por (1.4):

$$|\rangle = \sum_{\alpha'} |\alpha'\rangle\langle\alpha'|\rangle . \tag{1.7}$$

Na outra notação:

$$\Psi = \sum_{\alpha'} \Psi_{\alpha'} C_{\alpha'}$$

onde:

$$C_{\alpha'} = (\Psi_{\alpha'}, \Psi) ,$$

$$\Psi(A') = \sum_{\alpha'} \Psi_{\alpha'}(A') \int \Psi^{+}_{\alpha'} (A'') \Psi(A'') \, dA'' ,$$

já que:

$$\sum_{\alpha'} \Psi_{\alpha'}(A') \Psi^{+}_{\alpha'}(A'') = \delta(A' - A'') .$$

$(\psi_{\alpha'}, \psi) = \langle\alpha'|\rangle$ é a componente de $|\rangle$ na direção de $|\alpha'\rangle$. A probabilidade de encontrar-se o auto-valor α' numa medida é:

$$|\langle\alpha'|\rangle|^2. \tag{1.8}$$

A função de Schrodinger de uma partícula é:

$$\psi(x) \equiv \langle x|\rangle . \tag{1.9}$$

Temos então:

$$\langle x|\rangle = \int \langle x|p\rangle\langle p|\rangle \, dp , \tag{1.10}$$

pois $\int |p\rangle\langle p| dp = 1$ e podemos escolher

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} px} .$$

1b. Transformações Unitárias

Uma transformação U é unitária se

$$u^+ u = uu^+ = 1$$

ou

$$u^+ = u^{-1} \tag{1.11}$$

Se considerarmos agora que:

$$\hat{\alpha} = u \alpha u^{-1} \tag{1.12}$$

poderemos anotar as propriedades seguintes:

i) Os auto-valores de $\hat{\alpha}$ são os mesmos de α.

$$\alpha|\alpha'\rangle = \alpha'|\alpha'\rangle ,$$

$$u \alpha u^{-1} u|\alpha'\rangle = \alpha' u|\alpha'\rangle ;$$

ou

$$\hat{\alpha}|\hat{\alpha}'\rangle = \alpha'|\hat{\alpha}'\rangle \quad , \quad \text{onde} \quad |\hat{\alpha}'\rangle = u|\alpha'\rangle \quad ;$$

ii) $\hat{\alpha}$ é hermitiano se α o fôr:

$$\hat{\alpha}^+ = (u \alpha u^{-1})^+ = (u^{-1})^+ \alpha \; u^+ = u \alpha u^{-1} = \hat{\alpha} \; ;$$

iii) as equações são invariantes em relação a transformações unitárias. Chame

$$\hat{\alpha} = u \alpha u^{-1}, \quad |\hat{\psi}\rangle = u|\psi\rangle ,$$

então:

$$\langle\hat{\psi}| = |\hat{\psi}\rangle^+ = (u|\psi\rangle)^+ = \langle\psi|u^+ \; .$$

Então a normalização se conserva:

$$\langle\hat{\psi}|\hat{\psi}\rangle = \langle\psi|u^+ u|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \; .$$

De:

$$\alpha_1 \alpha_2 |\psi\rangle = |\phi\rangle$$

resulta:

$$u\alpha_1 u^{-1} \cdot u\alpha_2 u^{-1} u|\psi\rangle = u|\phi\rangle ,$$

$$\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 |\hat{\psi}\rangle = |\hat{\phi}\rangle .$$

De:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)|\psi\rangle = |\phi\rangle$$

resulta:

$$(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2)|\hat{\psi}\rangle = |\phi\rangle .$$

Se U é transformação unitária infinitesimal, então:

$$u = 1 - i\epsilon F \tag{1.13}$$

onde ε é o parâmetro infinitesimal. Então temos:

$$u^{-1} = 1 + i\epsilon F . \tag{1.14}$$

F é hermitiano, pois

$$u^{+}u = (1+\epsilon F^{+})(1-\epsilon F) = 1 + i\epsilon(F^{+} - F) = 1$$

de onde

$$F^{+} = F .$$

Por esta transformação, α se transforma em:

$$\hat{\alpha} = u_{\alpha} u^{-1} = (1 - i\epsilon F)\alpha(1 + \epsilon F) =$$

$$= \alpha - i\epsilon(F_{\alpha} - \alpha F) = \alpha - i\epsilon[F,\alpha] \tag{1.15}$$

$$\hat{\alpha} - \alpha = - i\epsilon[F, \alpha] .$$

1. Representação de Schrödinger

Seja, num instante t_o, $|\psi(t_o)\rangle$ o vetor de estado e seja $\alpha_i(t_o)$ um conjunto de operadores.

Admita que os operadores não dependam do tempo. Então, a evolução temporal do sistema é descrita pela evolução de $|\psi(t)\rangle$, e devemos ter uma transformação ligando $|\psi(t_o)\rangle$ a $|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = T(t, t_o)|\psi(t_o)\rangle \qquad (1.16)$$

A conservação de probabilidade impõe que a transformação T seja unitária. Para uma mudança infinitesimal do tempo δt:

$$T(t+\delta t, t) = 1 - i\delta t \frac{H}{\hbar} \qquad (1.17)$$

onde H é operador hermitiano com dimensões de energia. De (1.16) a (1.17) vem:

$$|\psi(t+\delta t)\rangle = \left(1 - i\frac{H}{\hbar}\delta t\right)|\psi(t)\rangle$$

então

$$|\psi(t+\delta t)\rangle - |\psi(t)\rangle = -i\frac{H}{\hbar}\delta t|\psi(t)\rangle$$

logo

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle \qquad (1.1°)$$

que é a equação de Schrödinger.

Para uma partícula a função de onda de Schrödinger,

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle \quad \text{satisfaz:}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi(x, t) \qquad (1.20)$$

Em vez da equação de Schrödinger podemos usar a equação:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} T(t, t_o) = HT(t, t_o) , \qquad (1.20)$$

com

$$T(t_o, t_o) = 1 , \qquad (1.21)$$

cuja solução formal é:

$$T(t, t_o) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t - t_o)} . \qquad (1.22)$$

A evolução temporal do sistema, então, é descrita, formalmente, por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t - t_o)} |\psi(t_o)\rangle .$$

1d. Representação de Heisenberg

Admitamos que a dependência do tempo seja dos operadores e não do vetor de estado.

Como na representação de Schrödinger:

$$|\psi(t)\rangle_S = T(t, t_o) |\psi(t_o)\rangle_S , \qquad (1.16)$$

defino o vetor de estado de Heisenberg por:

$$|\psi(t)\rangle_H = T^{-1}(t, t_o) |\psi(t)\rangle_S = |\psi(t_o)\rangle S \qquad (1.23)$$

Dado um vetor de Schrodinger em qualquer instante, giro-o para a posição inicial e este é $|\psi(t)\rangle_H$, que não depende do tempo. Então, como o valor das grandezas físicas independe da representação considerada, para os operadores α_H de Heisenberg, temos:

$$\alpha_H(t) = T^{-1}(t, t_o)\, \alpha_S(t)\, T(t, t_o)$$

$$= T^{-1}(t, t_o)\, \alpha_S(t_o)\, T(t, t_o).$$

Derivando em relação ao tempo:

$$i\hbar \frac{\partial \alpha_H(t)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial T^{-1}}{\partial t} \cdot \alpha_s \cdot T + T^{-1} \alpha_s \, i\hbar \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$= - T^{-1} H \alpha_s T + T^{-1} \alpha_s HT$$

$$= T^{-1} \alpha_s T T^{-1} HT - T^{-1} H T T^{-1} \alpha_s T$$

$$= \alpha_H(t) H_H(t) - H_H(t) \alpha_H(t) .$$

Portanto:

$$i\hbar \frac{\partial \alpha_H(t)}{\partial t} = \left[\alpha_H(t), H_H(t)\right] \tag{1.24}$$

Aqui, usamos:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} T = H T \tag{1.20}$$

e:

$$- i\hbar \frac{\partial T^+}{\partial t} = T^+ H$$

ou:

$$+ i\hbar \frac{\partial T^{-1}}{\partial t} = - T^{-1} H . \tag{1.25}$$

(1.24) é a <u>equação de movimento de Heisenberg</u>.

De

$$\alpha_S = \alpha_s (q_s, p_s) \equiv \alpha(q_s, p_s)$$

resulta:

$$\alpha_H = T^{-1} \alpha_s T = \alpha(q_H, p_H)$$

por desenvolvimento em série de potências.

A relação de comutação

$$\left[q_H, p_H\right] = \left[q_S, p_S\right] = i\hbar \qquad (1.26)$$

é a mesma nas duas representações.

1e. Representação da interação

Se considerarmos a Hamiltoniana total H composta de uma parte H_o, correspondente ao campo livre, a outra, H_{int}, devida a interação:

$$H = H_o + H_{int} , \qquad (1.27)$$

então, o vetor de estado de Schrodinger satisfaz a:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_s = H(t_o)|\psi(t)\rangle_s =$$

$$= (H_o(t_o) + H_{int}(t_o)|\psi(t)\rangle_s . \qquad (1.28)$$

Defina um $|\psi(t)\rangle_I$ assim:

$$|\psi(t)\rangle_s = R(t, t_o)|\psi(t)\rangle_I , \qquad (1.29)$$

i.e.:

$$|\psi(t)\rangle_I = R^{-1}(t, t_o)|\psi(t)\rangle_s ,$$

onde $R(t,t_o)$ satisfaz a:

$$i\hbar \frac{\partial R(t, t_o)}{\partial t} = H_o(t_o) R(t, t_o) ,$$

$$R(t_o, t_o) = 1 ,$$

isto é:

$$R(t, t_o) = e^{-\frac{i}{\hbar} H_o(t-t_o)} \tag{1.31}$$

Então de (1.28) e (1.29) vem:

$$i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I + i\hbar R \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I =$$

$$= H_o R|\psi(t)\rangle_I + H_{int} R|\psi(t)\rangle_I$$

e por (1.30):

$$i\hbar R \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I = H_{int} R|\psi\rangle_I ,$$

ou:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I = H_I^{int}|\psi\rangle_I , \tag{1.32}$$

onde:

$$H_{int} = R^{-1}(t, t_o) H_{int}(t_o) R(t, t_o)$$

$$= H_{int} (q_I(t), p_I(t)) . \tag{1.33}$$

Os operadores têm dependência do tempo como os de Heisenberg para sistemas sem interação, e a dependência temporal do vetor de estado é determinada pela interação.

2. Quantização do campo escalar real

Na mecânica quântica usual, na representação de Schrödinger, a quantização é efetuada pela regra de comutação:

$$[q_r, q_s] = [p_r, p_s] = 0 , \tag{2.1}$$

$$[q_r, p_s] = i\delta_{rs} , \qquad \hbar = 1 ,$$

onde q_r e p_r são operadores independentes do tempo que correspondem respectivamente, às coordenadas generalizadas do sistema e aos momentos canônicamente conjugados a elas, e n é o número de gráus da liberdade do sistema mecânico.

Na teoria dos campos, o sistema tem uma infinidade de gráus de liberdade e é descrito por funções $\phi(\vec{x}, t)$. Na representação de Schrödinger, definimos:

$$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}, 0) \ ,$$
$$\pi(\vec{x}) = \pi(\vec{x}, 0) \tag{2.2}$$

e generalizamos os comutadores (2.1) para o presente caso assim: [2]

$$\left[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x}')\right] = \left[\pi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')\right] = 0 \ ,$$
$$\left[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')\right] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \ . \tag{2.3}$$

Assim como na mecânica quântica de um corpúsculo a função de Schrodinger é $\psi(q_r, t)$, aqui a função de Schrösinger é um funcional:

$$\Psi_s = \Psi\left[\phi(\vec{x}), t\right] \tag{2.4}$$

e podemos representar $\pi(\vec{x})$ por $- i \dfrac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}$.

A equação de movimento é:

$$i \frac{\partial\Psi_s}{\partial t} = H_s \Psi_s \ , \tag{2.5}$$

onde:

$$H_s = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{\pi^2(\vec{x}) + \left[\nabla\phi(\vec{x})\right]^2 + \mu^2 \phi^2(\vec{x})\right\} . \tag{2.6}$$

As três componentes do momentum do campo são, como já vimos, (1.18):

$$p^k = \int T^{ko} d^3x = \int d^3x \ \pi(x) \frac{\partial\phi}{\partial x_k} \ .$$

Usando (2.3) e (1.8) obtemos:

$$\left[P^k, \phi(\vec{x})\right] = \int d^3x' \left[\pi(\vec{x}'), \phi(\vec{x})\right] \frac{\partial\phi(x')}{\partial x_k}$$

$$= - i \int d^3x' \, \delta(\vec{x} - \vec{x}') \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'_k} = -i \frac{\partial\phi(\vec{x})}{\partial x_k} \qquad (2.7)$$

e:

$$\left[P^k, \pi(\vec{x})\right] = \int d^3x' \, \pi(x') \frac{\partial}{\partial x'_k} \left[\phi(\vec{x}'), \pi(\vec{x})\right]$$

$$= i \int d^3x' \, \pi(x') \frac{\partial}{\partial x'_k} \delta(x' - x) = -i \frac{\partial \pi(\vec{x})}{\partial x_k} . \qquad (2.\circ)$$

Resulta daí que para todo operador F(x) construido com ϕ e π:

$$\left[P_k, F(x)\right] = -i \frac{\partial F(x)}{\partial x_k} . \qquad (2.9)$$

Na representação de Heisenberg já vimos que

$$\left[H, F(\vec{x}, t) = -i \frac{\partial F(\vec{x}, t)}{\partial t} ; \qquad (2.10)$$

como

$$H = P^0 = \int T^{00} \, d^3x , \qquad (1.16)$$

podemos englobar esta e as equações acima na fórmula:

$$\left[P^\mu, F(x)\right] = -i \frac{\partial F}{\partial x_\mu} . \qquad (2.11)$$

Em particular, quando $F(x) = \mathcal{H} = T^{00}$:

$$\left[P^k, H\right] = -i \int d^3x \, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} = 0 ,$$

logo

$$\left[P^{\mu}, P^{\nu}\right] = 0 . \qquad (2.12)$$

A quantização é melhor visualizada no espaco dos momentos. Desenvolvemos, então, em série de Fourier:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k q_k \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} ,$$
$$\pi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k p_k \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} , \qquad (2.13)$$

onde V é o volume em que consideramos o campo, de aresta L e $K_i = n_i \frac{2\pi}{L}$. Como o campo é real:

$$\phi(x) = \phi^{+}(x) ,$$
$$\pi(x) = \pi^{+}(x) ,$$

o que implica:

$$q_{-k} = q_k^{+}, \qquad p_{-k} = p_k^{+} .$$

Também, por (2.13):

$$\left[\phi(x), \pi(x')\right] = \frac{1}{V} \sum_{kk'} \left[q_{k'}, p_{k'}\right] e^{i(\vec{k}\vec{x} - \vec{k}'\vec{x})} =$$

$$= \frac{1}{V} \sum_k e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} ,$$

se:

$$\left[q_k, p_k\right] = i\delta_{kk'} . \qquad (2.14)$$

No limite $V \longrightarrow \infty$, $\left[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')\right] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$. Analogamente de $\left[\phi(x), \phi(x')\right] = 0$ temos: $\left[q_k, q_{k'}\right] = 0$ e de

$$\left[\pi(x), \pi(x')\right] = 0 \quad \text{obtemos:} \quad \left[p_k, p_{k'}\right] = 0, \qquad (2.15)$$

que são (2.14) e (2.15), as regras de comutação no espaço dos momenta.

3. O operador de energia e do número de partículas

3.1. A Hamiltoniana no espaço dos momenta pode ser calculada por (2.9) e (2.13) assim:

$$H_s = \frac{1}{2} \int \left\{ \pi^2 + (\nabla\phi)^2 + \mu^2 \phi^2 \right\} d^3x = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ p_k^+ p_k + \omega_k^2 q_k^+ q_k \right\} ,$$

onde:

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2} .$$

Pondo:

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_k + a_{-k}^+) , \qquad (3.2)$$

$$p_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}}\, i(a_k^+ - a_{-k}) ,$$

tem-se, usando (2.14) e (2.15):

$$\left[a_k, a_{k'}\right] = \left[a_{k'}^+ , a^+_{k'}\right] = 0 ,$$

$$\left[a_k , a_{k'}^+\right] = \delta_{kk'} . \qquad (3.3)$$

Obtem-se, então, para a Hamiltoniana:

$$H_s = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k (a_k^+ a_k + a_k a_k^+) . \qquad (3.4)$$

Os auto-valores de H_s e $a_k^+ a_k$, como vamos mostrar, são respectivamente:

$$E_s = \sum_k \omega_k \left(n_k + \frac{1}{2}\right),$$

$$n_k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.5)$$

Façamos

$$H_s = \sum_k H_k, \quad H_k = \frac{1}{2} \omega_k (a_k^+ a_k + a_k a_k^+).$$

Temos, para um dado k, de (3.3) e (3.4):

$$H - \frac{1}{2}\omega = \omega a^+ a ,$$

$$H + \frac{1}{2}\omega = \omega a a^+ . \tag{3.6}$$

Daí:

$$\omega a^+ a a^+ = H a^+ - \frac{1}{2}\omega a^+ ,$$

$$\omega a^+ a a^+ = a^+ H + \frac{1}{2}\omega a^+ , \tag{3.7}$$

$$H a^+ - a^+ H = \omega a^+ .$$

Do mesmo modo:

$$\omega a a^+ a = a H - \frac{1}{2}\omega a ,$$

$$\omega a a^+ a = Ha + \frac{1}{2}\omega a , \tag{3.8}$$

$$a H - H a = \omega a .$$

Seja $|E\rangle$ o auto-vetor de H:

$$H|E\rangle = E|E\rangle \tag{3.9}$$

Temos de (3.6) e (3.7):

$$\omega \langle E|a^+ a|E\rangle = \langle E|H - \frac{1}{2}\omega|E\rangle = \left(E - \frac{1}{2}\omega\right)\langle E|E\rangle .$$

Como

$$\langle E|a^+ a|E\rangle \equiv |a|E\rangle|^2 \quad e \quad \langle E|E\rangle = 1 ,$$

resulta daí:

$$E \geqslant \frac{1}{2}\omega . \tag{3.10}$$

Também, por (3.8) e (3.9):

$$Ha|E\rangle = a H|E\rangle - \omega a|E\rangle = (E - \omega)\, a|E\rangle . \tag{3.11}$$

Assim se E fôr auto-valor de H, $E - \omega$ também o será e se $E - \omega \neq \frac{1}{2}\omega$, $a|E\rangle \neq 0$, $E - 2\omega$ também será auto-valor.

Logo, tenho os seguintes auto-valores de H:

$$E,\ E-\omega,\ \ E-2\omega\ , \ \dots \ . \tag{3.12}$$

Agora, por (3.7) e (3.9):

$$Ha^{+}|E\rangle = a^{+}\ H|E\rangle + \omega a^{+}|E\rangle = (E+\omega)a^{+}|E\rangle$$

Se $a^{+}|E\rangle \neq 0$, $E+\omega$ também é auto-valor de H pois, segundo (3.6) e (3.10):

$$\omega a\ a^{+}|E\rangle = \left(E+\frac{1}{2}\omega\right)|E\rangle \quad \text{e } E \geqslant \frac{1}{2}\omega\ . \tag{3.14}$$

Logo, tenho os autovalores

$$E+\omega,\ \ E+2\omega\ , \ \dots \tag{3.15}$$

Os autovalores de H são, pois:

$$\frac{1}{2}\ \omega,\ \frac{3}{2}\ \omega,\ \frac{5}{2}\ \omega,\ \dots \tag{3.16}$$

Os de $a^{+}a = \dfrac{H-\frac{1}{2}\omega}{\omega}$, obtidos de (3.6) e (3.16), são:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ n\ \dots\ . \tag{3.17}$$

Vejamos, agora, como operam a e a^{+}.

Seja $|0\rangle$ o autovetor de H de autovalor $\frac{1}{2}\ \omega$, então:

$$\langle 0|a^{+}a|0\rangle = 0 \tag{3.1°}$$

e daí:

$$a|0\rangle = 0\ ,$$

normalizando os estados de $a^{+}a$

$$\langle 0|0\rangle = 1\ . \tag{3.19}$$

Da regra de comutação vem:

$$\langle 0|aa^{+}|0\rangle = \langle 0|a^{+}a|0\rangle + 1$$

ou:

$$\langle 0|aa^{+}|0\rangle = 1\ . \tag{3.20}$$

Seja $|1\rangle$ o autovetor de H de energia $\frac{3}{2}\omega$:

$$\langle 1|a^+ a|1\rangle = 1 \; . \tag{3.21}$$

As duas últimas igualdades conduzem a

$$\begin{aligned} a|1\rangle &= |0\rangle \, , \\ a^+|0\rangle &= |1\rangle \end{aligned} \tag{3.22}$$

desde que

$$\langle 0|0\rangle = 1, \;\; \langle 1|1\rangle = 1$$

Da regra de comutação vem:

$$\langle 1|aa^+|1\rangle - \langle 1|a^+a|1\rangle = 1$$

ou:

$$\langle 1|aa^+|1\rangle = 2 \tag{3.23}$$

à qual satisfaço com:

$$\begin{aligned} a^+|1\rangle &= \sqrt{2}|2\rangle \\ a|2\rangle &= \sqrt{2}|1\rangle \end{aligned} \tag{3.24}$$

Em geral, satisfaço a:

$$\langle n|aa^+|n\rangle - \langle n|a^+a|n\rangle = 1$$

com:

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \, , \\ a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \;\text{ e }\; a|0\rangle = 0 \, . \end{aligned} \tag{3.25}$$

No nosso caso:

$$H_s = \sum_k H_k \; , \tag{3.4}$$

$$E_k = \omega_k(n_k + 1/2). \tag{3.5}$$

Os números n_k são interpretados como números de corpúsculos de frequência ω_k (energia).

O operador $a_k^+ a_k$ é então o "operador número de partículas".

Os autovetores podem ser caracterizados, nesta representação, pelos números n_1, n_2, ... n_k, ... e se escreverão:

$$|n_1, n_2, \ldots\ldots n_k, \ldots\rangle$$

que descreve um estado com n_1 mesons de energia ω_1, n_2 de energia ω_2, etc.

Os operadores a_k e a_k^+ são então os operadores de absorção ou aniquilação e emissão ou creação de mesons respectivamente, desde que:

$$a_k|n_1, n_2 \ldots n_k,\ldots\rangle = \sqrt{n_k}|n_1, n_2, \ldots n_k - 1, \ldots\rangle, \qquad (3.26)$$

$$a_k^+|n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots\rangle = \sqrt{n_k + 1}\,|n_1, n_2, \ldots n_k + 1,\ldots\rangle. \qquad (3.27)$$

O momentum do campo:

$$\vec{P}_{op} = \int d^3x\, \pi(\vec{x})\, \vec{\nabla}\phi\,(\vec{x})$$

se escreve agora:

$$\vec{P} = \sum_k \vec{K}\left(n_k + \frac{1}{2}\right). \qquad (3.2o)$$

Usualmente, omitimos a energia e o momentum do ponto zero $\frac{1}{2}\sum_k \omega_k$ e $\frac{1}{2}\sum_k \vec{K}$, que corresponde ao caso $n_k = 0$.

O estado no qual todos os n_k são zero é o vácuo:

$$\psi_o = |0, 0, \ldots\ldots 0, \ldots\rangle \qquad (3.29)$$

É então o de energia e momentum nulos.

Os vetores de estado básicos são construídos aplicando os a^+ a ψ_o. Assim:

$a_k^+\psi_o$ representa estado com 1 meson de energia ω_k e momentum k.

$a_k^+ a_{k'}^+ \psi_o$ representa estado com 2 mesons, etc.

Um estado qualquer é superposição de tais auto-estados orto normais:

$$\psi = c_o \psi_o + \frac{1}{\sqrt{1!}} \int d^3k \; c_1(\vec{k}) \, a_k^+ \psi_o + $$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2!}} \iint d^3k \, d^3k' \; c_2(\vec{k}, \vec{k}') a_k^+ a_{k'}^+ \psi_o + \dots \tag{3.30}$$

onde:

$$\left[a_k, a_{k'}^+ \right] = \delta(k - k') \; .$$

As funções c são as amplitudes para encontrar-se nenhuma partícula (c_o), 1 partícula (c_1) etc. no estado ψ. De fato, por exemplo:

$$(a_p^+ a_{p'}^+ \psi_o, \psi) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \iint d^3k \, d^3k' \quad c_2(k, k')(a_p^+ a_{p'}^+ \psi_o, a_k^+ a_{k'}^+ \psi_o)$$

pois:

$$(a_p^+ \, a_{p'}^+ \psi_o, \psi_o) = (a_{p'}^+ \psi_o, a_p \psi_o) = 0 \; ,$$
$$(a_p^+ \, a_{p'}^+ \psi_o, a_k^+ \psi_o) = (a_{p'}^+ \psi_o, a_p \, a_k^+ \psi_o) =$$
$$= \delta(\vec{p} - \vec{k})(a_p^+ \psi_o, \psi_o) = 0 \; . \tag{3.31}$$

e anàlogamente para os têrmos superiores ao 3º. Agora:

$$(a_p^+ \, a_{p'}^+ \psi_o, a_k^+ \, a_{k'}^+ \psi_o) = (a_{p'}^+ \psi_o, a_p a_k^+ a_{k'}^+ \psi_o) =$$
$$= (a_{p'}^+ \psi_o, a_k^+ \psi_o) \, \delta(p - k') + \delta(p - k)(a_{p'}^+ \psi_o, a_{k'}^+ \psi_o) =$$
$$= \delta(p' - k) \, \delta(p - k') + \delta(p - k) \, \delta(p' - k') \tag{3.32}$$

suponho $(\psi_o, \psi_o) = 1$.

Logo, substituindo (3.32) em (3.31),

$$(a_p^+ \, a_{p'}^+ \, \psi_o, \psi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c(p', p) + c(p, p') \right] = \sqrt{2} \, c(p, p') \tag{3.33}$$

Os fatores numéricos são de normalização. Pois então (os c são simétricos):

$$(\psi,\psi) = |c_o|^2 + \int d^3k\, |c_1(k)|^2 + \int d^3k \int d^3k'\, |c_2(k,k')|^2 + \ldots = 1 \tag{3.34}$$

O desenvolvimento de $\phi(\vec{x})$(real) no espaço dos momentos, no contínuo é:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{ a(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^+(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \tag{3.35}$$

4. Quantização do campo espinorial

A quantização do campo de Dirac pode-se efetuar de modo análogo ao campo escalar. Desenvolve-se $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ em têrmos do conjunto completo de autofunções, $\omega_n(x)$ da equação de Dirac para partícula livre e interpretam-se os coeficientes da expansão b_n e b_n^+, como operadores de aniquilação e criação.

Escrevemos então:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_n \sqrt{\frac{1}{2|E_n|}}\; b_n\, \omega_n(x) \;, \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_n \sqrt{\frac{1}{2|E_n|}}\; b_n^+\, \bar{\omega}_n(x) \;. \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_n(x) &= \omega^r(p_n)\, e^{i\vec{p}_n\cdot\vec{x}} \;, \quad r = 1,\, 2, \\ &= \omega^r(p_n)\, e^{-i\vec{p}_n\cdot\vec{x}} \;, \quad r = 3,\, 4. \end{aligned} \tag{4.2}$$

O operador Hamiltoniano do campo será então de acôrdo com (I.4.19) e (4.1):

$$H = \int d^3x \bar{\psi}(x)\left[-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m\right]\psi(x) =$$

$$= \frac{1}{V}\int d^3x \sum_{nn'}\sqrt{\frac{1}{2|E_n|2|E_{n'}|}}\; b_n^+ \bar{\omega}_n(x)(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}+m)\,\omega_{n'}\; b_{n'} ,$$

mas:

$$(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}+m)\,\omega_n(x) = \beta E_n\,\omega_n(x)$$

Logo:

$$H = \frac{1}{V}\int d^3x \sum_{nn'}\sqrt{\frac{1}{2|E_n|2|E_{n'}|}}\; b_n^+ b_n\, \bar{\omega}_n(x)\,\beta E_{n'}\,\omega_{n'}(x)$$

e como

$$\int d^3x\, \bar{\omega}_n(x)\,\beta\omega_n = \int d^3x\, \omega_n^+(x)\,\omega_n(x) = V\delta_{nn'}2|E_{n'}|$$

vem, finalmente:

$$H = \sum_n b_n^+ b_n E_n \tag{4.3}$$

onde E_m são os autovalores do operador de Dirac.

A quantização pelo comutador como fizemos no caso mesônico, daria a $b_n^+ b_n$ autovalores inteiros de qualquer grandeza, violando o princípio de Pauli. Para o evitar fazemos:

$$\begin{aligned} b_n b_m + b_m b_n &= 0 \\ b_n^+ b_m^+ + b_m^+ b_n^+ &= 0 \\ b_n b_m^+ + b_m^+ b_n &= \left[b_n, b_m^+\right]_+ \delta_{nm} . \end{aligned} \tag{4.4}$$

ou seja, impomos que os operadores satisfaçam às regras de anticomutação (4.4).

Segue-se daí que:

$$b_n^2 = 0, \qquad b_n^{+2} = 0 \tag{4.5}$$

e que os autovalores de $N_m = b_m^+ b_m$ são 0 e 1, pois:

$$N_m^2 = b_m^+ b_m b_m^+ b_m = b_m^+(1 - b_m^+ b_m)b_m =$$
$$= b_m^+ b_m = N_m \ .$$

Logo:

$$N_m^2 = N_m \tag{4.6}$$

e $n_m = 0,1$.

Êstes resultados estão de acôrdo com o princípio de Pauli. Não obstante, a Hamiltoniana H ainda não é positiva definida porque nela ocorrem valores $E < 0$. Para eliminar esta dificuldade fazemos uso da teoria dos furos.

A expansão de ψ no contínuo de p é:

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)}\,3/2\,\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d^3p}{E_p^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sum_{r=1,2} b_r(\vec{p})\, \omega^r(\vec{p})\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \right. \tag{4.7}$$

$$\left. + \sum_{r=3,4} b_r(-\vec{p})\, \omega^r(\vec{p})\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right\} , \quad E_p = + \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \ .$$

Fazendo:

$$N_r^{(+)}(\vec{p}\,) = b_r^+(p)\, b_r(p) \ , \qquad r = 1,\ 2 \ ,$$

$$N_r^{(-)}(-\vec{p}) = b_{r+2}^+\,(-p)\, b_{r+2}(p) \ , \quad r = 1,\ 2 \ , \tag{4.8}$$

vem:

$$H = \int d^3p \sum_{r=1,2} E_p \left\{ N_r^{(+)}(p) - N_r^{(-)}(p) \right\} \tag{4.9}$$

e a carga também pode-se escrever em têrmos dos operadores número de partículas (4.8):

$$Q = e \int d^3x\, \overline{\psi}\, \gamma^o\, \psi =$$
$$= e \int d^3p \sum_{r=1,2} \left\{ N_r^{(+)}(p) + N_r^{(-)}(p) \right\} . \tag{4.10}$$

Na teoria dos positrons, o vácuo é definido por:

$$N_r^{(-)}(\vec{p}) = 1 \ , \qquad N_r^{(+)}(\vec{p}) = 0 \ ,$$

para todos os p e r, ou seja, todos os estados de energia negativa estão ocupados. Logo a energia e carga total do vácuo estão dadas por:

$$\begin{aligned} E_o &= -\sum_{r=1,2} \int d^3p \ Ep \ , \\ Q_o &= e \sum_{r=1}^{2} \int d^3p \ , \end{aligned} \tag{4.11}$$

que são infinitas. Elas, sem embargo, não são observáveis. Devemos definir então:

$$\begin{aligned} H' = H - E_o &= \int d^3p \sum_{r=1,2} \left\{ N_r^{(+)}(p) - N_r^{(-)}(p) \right\} Ep \ + \\ &+ \int d^3p \sum_{r=1}^{2} Ep \ , \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$Q' = Q - Q_o = e \int d^3p \sum_{r} \left\{ N_r^{(+)}(p) - \left[1 - N_r^{(-)}(p) \right] \right\} . \tag{4.13}$$

Agora, H'e Q'estão de acôrdo com a teoria dos furos. A contribuição a H' e Q' de estados de energia negative só se dá quando $N_r^{(-)} = 0$, estado desocupado, e é positiva para H e de carga oposta à doelectron.

Podemos definir:

$$\begin{aligned} b_{r+2}(-\vec{p}) &= d_r^{+}(\vec{p}), \\ b_{r+2}^{+}(-\vec{p}) &= d_r(\vec{p}), \end{aligned} \qquad r = 1,2 \tag{4.14}$$

então teremos para as regras de anticomutação (4.4):

$$\left[d_r^+(\vec{p}),\ d_s(\vec{p}')\right]_+ = \delta_{rs}\ \delta(\vec{p}-\vec{p}') ,$$

$$\left[d_r(\vec{p}),\ b_s(\vec{p}')\right]_+ = \left[d_r^+(\vec{p}),\ b_s^+(\vec{p}')\right]_+ = 0 \ , \qquad (4.15)$$

$$\left[d_r(\vec{p}),\ b_s^+(\vec{p})\right]_+ = \left[d_r^+(\vec{p}),\ b_s(\vec{p}')\right]_+ = 0 \ .$$

Em têrmos destes operadores, podemos escrever $1 - N_r^{(-)}(-\vec{p})$ assim:

$$N_r^{(-)}(\vec{p}) = 1 - N_r^{(-)}(-\vec{p}) = 1 - b_{r+2}^+(-p)b_{r+2}(-p) =$$

$$= b_{r+2}(-p)b_{r+2}^+(-p) = d_r^+(p)dr(p) \ , \qquad (4.16)$$

onde $d_r(p)$ e $d_r^+(p)$ são operadores de absorção e criação de antipartículas e $N_r^{(-)}(\vec{p})$ é o operador número de antipartículas. Logo, o desenvolvimento do operador $\psi(x)$ fica:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{Ep}} \sum_{r=1,2} \left\{ b_r(p)\, w^r(p)\ e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d_r^+(p) v^r(p) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right\} \qquad (4.17)$$

isto é, assim $\psi(x)$ é um operador destruição de partículas como também um operador criação de antipartículas.

O vácuo é agora definido por:

$$N_r^{(+)}(\ )\ \psi_o = N_r^{(-)}(p)\ \psi_o = 0 \qquad (4.1\text{o})$$

ou

$$b_r(p)\ \psi_o = d_r(p)\ \psi_o = 0$$

O estado de um electron de spin r e momentum p é:

$$b_r^+(\vec{p})\ \psi_o$$

do pósitron:

$$d_r^+(p)\ \psi_o$$

de 2 electrons:

$$b_r^+(\vec{p})\ b_{r'}^+(p')\,\psi_o\ ,\quad \text{etc}$$

Das regras de anticomutação dos b e d, (4.14) e (4.16), vem:

$$\left[\psi_k(\vec{x}),\ \psi_\beta(\vec{x}')\right]_+ = \gamma^o_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \qquad (4.19)$$

ou:

$$\left[\psi_\alpha(\vec{x}),\ \psi^+_\beta(\vec{x}')\right]_+ = \delta(x-x')\,\delta_{\alpha\beta}. \qquad (4.20)$$

5. <u>Ilustração do uso dos operadores de emissão e absorção</u>

a) Campo espinorial em interação com campo real pseudoescalar.

Consideraremos a interação de nucleons com mesons π neutros. A Hamiltoniana total é:

$$H = H_o + H_1. \qquad (5.1)$$

com

$$H_o = \int d^3x\ \psi^+(\vec{x})\left\{\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m\right\}\psi(\vec{x}) + $$
$$+ \frac{1}{2}\int d^3x\left\{\pi^2(\vec{x}) + \left[\nabla\phi(\vec{x})\right]^2 + \mu^2\,\phi^2(\vec{x})\right\} \qquad (5.2)$$

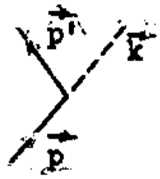
e

$$H_1 = G\int d^3x\ \bar{\psi}(x)\ \Gamma\ \psi(x)\,\phi(x) \qquad (5.3)$$

onde $\Gamma = \gamma_5$ provem do caráter pseudoescalar do meson pi.

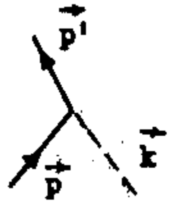
Substituindo em H_1, $\bar{\psi}$, ψ, ϕ pelas expansões de Fourier obtemos os seguintes têrmos em:

1. $b^+_{p'}\ b_p\ a^+_k$



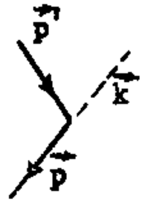
espalhamento de 1 nucleon com emissão de 1 meson

2. $b^+_{p'}\ b_p\ a_k$



espalhamento de 1 nucleon com absorção de 1 meson

3. $d^+_{p'}\ d_p\ a^+_k$

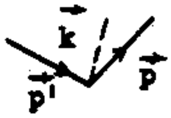


espalhamento de 1 antinucleon com emissão de 1 meson

4. $d^+_{p'}\ d_p\ a_k$

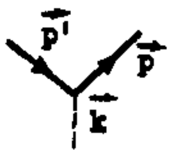
espalhamento de 1 antinucleon com absorção de 1 meson

5. $d^+_{p'}\ b^+_p\ a^+_k$



creação de 1 par com emissão de 1 meson

6. $d^+_{p'}\ b^+_p\ a_k$



creação de 1 par por 1 meson

7. $d_{p'}\ b_p\ a^+_k$

aniquilação de 1 par com emissão de 1 meson

8. $d_{p'}\ b_p\ a_k$

aniquilação de 1 par com absorção de 1 meson

O momentum se conserva nos vértices como resultado da integração sôbre x.

Assim, a parte de H_1 que corresponde a 1. é:

$$H_{i1} = g(2\pi)^{-9/2} \int d^3x \int d^3p' \int d^3p \int d^3k \sum_{r=1,2} \sum_{s=1,2}$$

$$\left(\frac{1}{2E(p)} \; \frac{1}{(2E(p')}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\omega(k)}\right)^{\frac{1}{2}} b_r^+(\vec{p}') \, b_s(\vec{p}) \, a^+(\vec{k}) \,.$$

$$\cdot \, \bar{\omega}_r(\vec{p}') \, \Gamma \omega_s(p) \, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \, e^{-i \, \vec{\ } \cdot \vec{x}} = \tag{5.4}$$

$$= g\,(2\pi)^{-3/2} \int d^3p \int d^3p' \int d^3k \left[\frac{1}{8E(p)\; E(p')\, \omega(k)}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\sum_{r,s=1,2} \delta_3(-\vec{p}' + \vec{p} - \vec{k}) \, b_r^+(p') \, b_s(p) \, a^+(k) \, \bar{\omega}_r(p') \, \Gamma \omega_s(p)$$

a função δ define a conservação de momentum.

Pode-se verificar que nenhum processo de primeira ordem é possível por conservação de energia e momentum.

Entretanto, processos de segunda ordem são possíveis e o elemento de matriz destes processos é:

$$T_{fi}^{(2)} = \sum_{\substack{m \\ E_m \neq E_o}} \frac{(\psi_f, \, H_i \, \psi_m)(\psi_m, \, H_i \, \psi_i)}{E_o - E_m} \,. \tag{5.5}$$

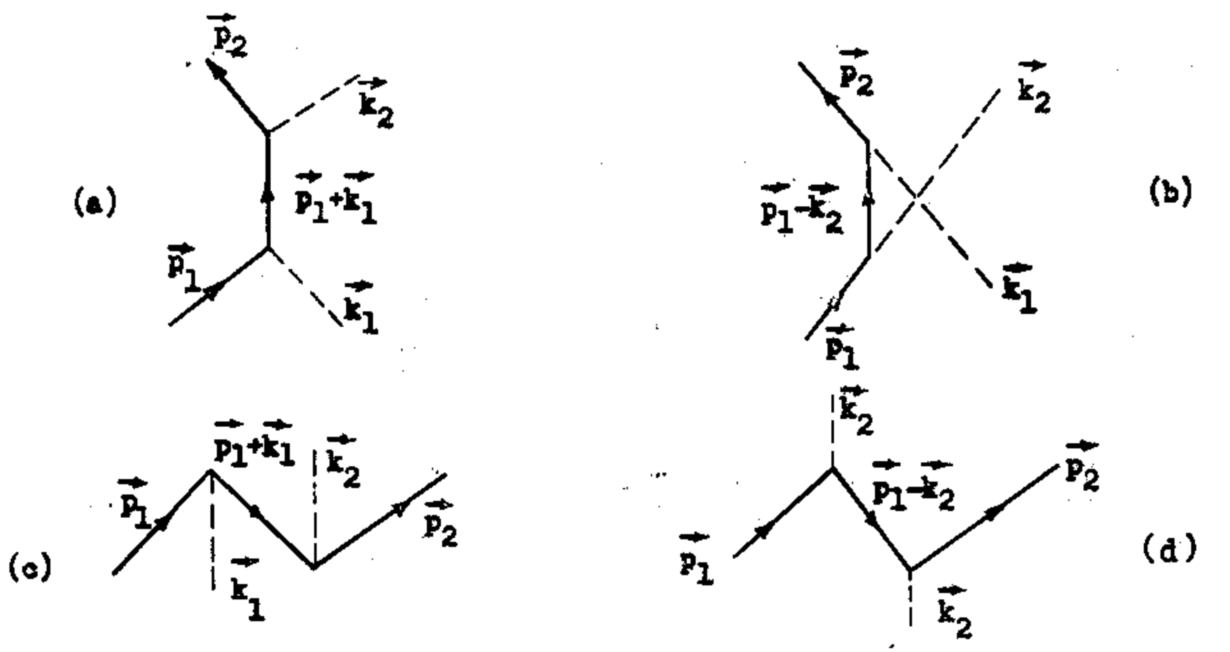
Consideremos, como exemplo, o <u>espalhamento de mesons neutros por um nucleon</u>.

Teremos:

Estado inicial: $\psi_i = b_{s_1}^+(\vec{p}') \, a^+(k_1) \, \psi_o$

Estado final: $\psi_f = b_{s_2}^+(\vec{p}) \, a^+(k_2) \, \psi_o$

A transição de ψ_i a ψ_f pode dar-se através de vários esta dos intermediários ψ_m, ilustrados nos gráficos:



Consideremos o gráfico (a). O nucleon inicial absorve o meson inicial passando para o estado intermediário em que existe um nucleon de momentum $\vec{p}_1 + \vec{k}_1$, êste emite o meson final e passa para seu estado final. O elemento de matriz para êste gráfico é:

$$
\begin{aligned}
T_{fi}^{(2)}(a) &= \sum_m \left(\psi_f, \frac{H_i^{(2)}}{E_o - E_m} \psi_m \right) \left(\psi_m, H_i^{(1)} \psi_i \right) \\
&= \left(\psi_f, H_i^{(2)} \frac{1}{E_o - H_o} H_i^{(1)} \psi_i \right)
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

onde $H_i^{(1)}$ e $H_e^{(2)}$ são as interações correspondentes aos gráficos de 1ª ordem 1 e 2 respectivamente. $H_i^{(1)}$ é aqui:

$$H_i^{(1)} = (2\pi)^{-3/2} g \int d^3p \int d^3p' \, d^3k \left[\frac{1}{8E(p)\,E(p')\,\omega(k)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\sum_{r,s=1,2} \delta_3(p' + p + k)\, b_r^+(p')\, b_s(p)\, a(k)\, \bar{\omega}^r(p')\, \Gamma\, \omega^s(p) \qquad (5.4)$$

e, similarmente, $H_i^{(2)}$ é dado por (5.4) com $\Gamma = \gamma_5$.

Agora em $H_i^{(1)} \psi_i$ há um fator do tipo:

$$b_r^+(p')\, b_s(p)\, a(k)\, a^+(k_1)\, b_s^+(p_1)\, \psi_o =$$

$$= \delta(\vec{k} - \vec{k}_1)\, b_r^+(p')\, b_s(p)\, b_s^+(p_1)\, \psi_o = \qquad (5.7)$$

$$= \delta(k - k_1)\, \delta_{s s_1} \delta(\vec{p} - \vec{p}_1)\, b_r^+(p')\, \psi_o$$

Substituindo em $H_i^{(1)} \psi_i$ obtemos:

$$H_i^{(1)} \psi_i = (2\pi)^{-3/2} g \left[\frac{1}{8E(p_1 + k_1)\, E(p_1)\, \omega(k_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{r=1,2} \bar{\omega}^r(p_1 + k_1)\, \Gamma\, \omega^{s_1}(p_1)\, b_r^+(p_1 + k_1)\psi_o \, . \qquad (5.8)$$

que dá o estado intermediário com um nucleon de momentum $p_1 + k_1$: $b_r^+(p_1 + k_1)\, \psi_o$. Então H_o aplicado a êste estado dá êste vezes

$$E(p_1 + k_1) = \left\{ (p_1 + k_1)^2 + m^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Logo:

$$\frac{1}{E_o - H_o} H_i^{(1)} \psi_1 = (2\pi)^{-3/2} g \left[\frac{1}{8E(p_1 + k_1)\, E(p_1)\, \omega(k_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\frac{1}{E_o - E(p_1 + k_1)} \sum_{r=1,2} \bar{\omega}^r(p_1 + k_1)\, \Gamma\, \omega^{s_1}(p_1)\, b_r^+(p_1 + k_1)\psi_o \qquad (5.9)$$

Obtemos, assim, de (5.4) e (5.9):

$$H_i^{(2)} \frac{1}{E_o - H_o} H_i^{(1)} \psi_i = (2\pi)^{-3/2} g \int d^3p \int d^3p' \int d^3k \left[\frac{1}{8E(p')\,E(p)\,\omega(k)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\sum_{r,s=1,2} \delta\,(-p + p' - k)\; b_r^+(p)\; b_s(p')\; a^+(k)\; \bar{\omega}_r(p)\; \Gamma \omega_s(p') \times$$

$$\times\, (2\pi)^{-3/2}\; g \left[\frac{1}{8E(p_1 + k_1)E(p)\,\omega(k_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{E_o - E(p_1 + k_1)} \times$$

$$\times \sum_{r=1,2} \bar{\omega}^{\,r}(p_1 + k_1)\; \Gamma\; \omega^{s_1}(p_1)\; b_r^+(p_1 + k_1)\; \psi_o =$$

$$= (2\pi)^{-3} g^2 \int d^3p \int d^3k \left[\frac{1}{8E(p+k)\;E(p)\,\omega(k)} \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \sum_{r,s=1,2} b_{r'}^+(p)\; b_{s'}(p+k)\; a^+(k)\; \bar{\omega}_{r'}(p)\; \omega_{s'}(p+k) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{8E(p_1+k_1)E(p_1)\omega(k_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{E_o - E(p_1+k_1)} \sum_{r=1,2} \bar{\omega}_r(p_1+k_1)\Gamma\omega_s(p_1) b_r^+(p_1+k_1)\psi_o =$$

$$= (2\pi)^{-3} g^2 \int d^3k\; \frac{1}{E(p_1 + k_1)} \left[\frac{1}{8E(p_1 + k_1 - k)\;E(p_1)\,\omega(k_1)\,\omega(k)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\sum_{r,s} \frac{\bar{\omega}_r(p_1+k_1-k)\Gamma\omega_{s'}(p_1+k_1)\bar{\omega}_{s'}(p_1+k_1)\Gamma\omega_{s'}(p_1)}{E_o - E(p_1 + k_1)}\; b_{r'}^+(p_1+k_1-k)a^+(k)\psi_o \ldots \tag{5.10}$$

Agora

$$\psi_f = b_{s_2}(p_2)\; a^+(k_2)\; \psi_o$$

de modo que:

$$\left(\psi_f,\ b^+_{r'}(p_1+k_1-k)\ a^+(k)\psi_o\right) = \left(b^+_{s_2}(p_2)a^+(k_2)\psi_o,\ b^+_{r'}(p_1+k_1-k)a^+(k)\psi_o\right) =$$

$$= \delta_{s_2\, r'}\,\delta_3(p_2-p_1-k_1+k)\delta_3(k_2-k_1) \quad (5.11$$

Logo, por (5.6), (5.10) e (5.11) obtemos:

$$T^{(2)}_{fi} = \frac{g^2}{2(2\pi)^3}\,\frac{1}{E(p_1+k_1)}\left(\frac{1}{2E(p_2)\ E(p_1)\ \omega(k_2)\ \omega(k_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \delta(p_2-p_1-k_1+k_2)\times$$

$$\times \sum_{r=1,2} \frac{\bar{\omega}_{s_2}(p_2)\ \Gamma\omega_r(p_1+k_1)\,\bar{\omega}_r(p_1+k_1)\Gamma\omega_{s_1}(p_1)}{E_o - E(p_1+k_1)} \qquad (5.12)$$

Os elementos de matriz para os processos (b), (c) e (d) podem ser obtidos anàlogamente e escritos logo, sem cálculo, interpretando as energias nos estados intermediários e calculando os gráficos.

6. Regras covariantes de comutação

6a. Campo escalar

Vimos que, na representação de Schrödinger:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{ a(\vec{k})\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^+(\vec{k})\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\}$$

onde:

$$\left[a(\vec{k}),\ a^+(\vec{k}')\right] = \delta(\vec{k}-\vec{k}') \qquad (6.1a)$$

$$\left[a(k),\ a(k')\right] = \left[a^+(k),\ a^+(k')\right] = 0 \qquad (6.1b)$$

Para ter as regras covariantes precisamos de ir à representação de Heisenberg ou à de interação, de modo que ϕ dependa também de t.

Na representação de interação temos:

$$\phi_I(x) = e^{iHot}\, \phi(\vec{x})\, e^{-iHot} , \tag{6.2}$$

onde:

$$H_o = \sum_k \omega_k a_k^+ a_k = \sum_k \omega_k N_k . \tag{6.3}$$

Daí:

$$\phi_I(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k}} \Big\{ e^{iH_o t}\, a(\vec{k})\, e^{-iH_o t}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + $$

$$+ e^{iH_o t}\, a^+(\vec{k})\, e^{-iH_o t}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Big\} . \tag{6.4}$$

Precisamos de calcular os têrmos:

$$e^{iH_o t}\, a(\vec{k})\, e^{-iH_o t} = e^{i\sum_{k'}\omega_{k'} N_{k'} t}\, a(\vec{k})\, e^{-i\sum_{k''}\omega_{k''} N_{k''} t}$$

$$= e^{i\omega_k N_k t}\, a(\vec{k})\, e^{-i\omega_k N_k t} . \tag{6.5}$$

Com êsse propósito consideremos o operador:

$$a_k(\lambda) \equiv e^{i\omega_k N_k t \lambda}\, a(\vec{k})\, e^{-i\omega_k N_k t\lambda} . \tag{6.6}$$

Diferenciando êste operador com respeito a λ temos:

$$\frac{d\, a_k(\lambda)}{d\lambda} = i\omega_k t\, e^{i\omega_k N_k t\lambda} \left[N_k , a_k \right] e^{-i\omega_k N_k t\lambda} \tag{6.7}$$

$$= - i\omega_k t\, a_k(\lambda) ,$$

de onde:

$$a_k(\lambda) = a_k(0)\, e^{-i\omega_k t \lambda}$$

ou:

$$a_k(1) = a(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t} . \tag{6.8a}$$

Analogamente para o operador de criação:

$$a_k^+(1) = a^+(\vec{k})\, e^{i\omega_k t} \; . \qquad (6.8b)$$

Assim, por (6.4), (6.6) e (6.8):

$$\phi_I(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{ a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} + a^+(k) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t)} \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k_o>0} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{ a(k)\, e^{-ikx} + a^+(k)\, e^{ikx} \right\} . \qquad (6.9)$$

Vemos que a (k) está multiplicado por $e^{-i\omega t}$ enquanto $a^+(k)$ está multiplicado por um têrmo de frequência negativa: $e^{i\omega t}$

$$\phi_I(x) = \phi_I^{(+)}(x) + \phi_I^{(-)}(x) \; . \qquad (6.10)$$

A parte de frequência positiva $\phi_I^{(+)}(x)$ é operador de destruição de partícula de qualquer momento no ponto x do espaço-tempo:

$$\phi_I^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\, a(k)\, e^{-ikx}, \qquad (6.11)$$

enquanto $\phi_I^{(-)}(x)$ é operador de criação:

$$\phi_I^{(-)}(x) = \left(\phi_R^{(+)}(x) \right)^+ . \qquad (6.12)$$

O vácuo foi definido como:

$$a(\vec{k})\; \psi_o = 0$$

para todos os $\vec{k}$, logo se tem:

$$\phi_I^{(+)}\; \psi_o = 0 \; . \qquad (6.13)$$

ψ_o, que na representação de Schrodinger foi uma autofunção de H_o

com autovalor 0, ainda descreve o vácuo na representação da interação pois, de

$$H_o \psi_o = 0 \quad \text{se tem:} \quad H_o\, e^{iH_o t}\, \psi_o = 0\ .$$

A regra de comutação entre os ϕ_i^I é agora fácil de obter-se usando (6.1):

$$\left[\phi_I(x),\ \phi_I(x')\right] = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{k_o>0} \frac{d^3k}{\sqrt{\omega_k}}\int \frac{d^3k'}{\sqrt{\omega_{k'}}}\left\{\left[a(k),\ a^+(k')\right]e^{i(k'x'-kx)} + \right.$$

$$\left. + \left[a^+(k),\ a(k')\right]\ e^{-i(k'x'-kx)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\omega_k>0} \frac{d^3k}{\omega_k}\left(e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}\right) = \qquad (6.14a)$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{k_o>0} \frac{d^3k}{\omega_k}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\ \text{sen}\ k_o(x_o - x_o') \qquad (6.14b)$$

$$= i\,\Delta(x-x')\ , \qquad (6.15)$$

onde, por definição:

$$\Delta(x) = -\frac{i}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\omega_k>0} \frac{d^3k}{k}\left(e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}\right), \qquad (6.16)$$

ou, como

$$\delta(k^2-\mu^2) = \frac{1}{2|k_o|}\left\{\delta(k_o+\omega_k) + \delta(k_o-\omega_k)\right\}\ , \qquad (6.17)$$

podemos escrever:

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k\, e^{-ikx}\,\delta(k^2-\mu^2)\,\epsilon(k) \qquad (6.18)$$

onde

$$\epsilon(k) = \frac{k_o}{|k_o|} = \begin{cases} 1 & \text{para } k_o > 0 \\ -1 & \text{para } k_o < 0 \end{cases} .$$

Desta expressão deduz-se que $\Delta(x)$ satisfaz as propriedades seguintes:

$$\Delta(-x) = -\ \Delta(+x); \qquad (6.19)$$

$$\Delta(x') = \Delta(x) \quad \text{onde} \quad x' = \Lambda x \ \text{é} \ 0 \qquad (6.20)$$

ponto transformado de Lorentz do ponto x;

$$(\Box^2 + \mu^2)\,\Delta(x) = 0 \ . \qquad (6.21)$$

ou seja, a função $\Delta(x)$ é uma solução impar de x e invariante da equação de Klein-Gordon. Pois, é invariante por uma transformação homogênea e própria de Lorentz (cada fator de (6.18) o é) e (6.21) resulta da formada função com $\delta(k^2-\mu^2)$ na integral como do fato que $\phi(x)$, logo o comutador $\left[\phi(x),\ \phi(x')\right]$, satisfaz à equação de Klein-Gordon.

Além disso, de (6.19-20) segue-se a importante propriedade:

$$\Delta(x) = 0 \qquad\qquad x^2 < 0 \ , \qquad (6.22)$$

pois a Lorentz-invariância implica que Δ é uma função de x^2 só para $x^2 < 0$, e de x^2 e $\epsilon(x_o)$, sinal do tempo, para $x^2 \geqslant 0$; isto é, sôbre ou dentro do cone de luz. ($\epsilon(x_o)$ so tem significado invariante sôbre ou dentro do cone). Assim, para space-like x, $\Delta(x) = f_1(x^2)$, mas uma função de x^2 não pode ser impar, logo $f_1(x^2) = 0$. Dentro do cone $\Delta(x) = \epsilon(x_o)\, f_2(x^2)$ para ser invariante e impar. Al ternativamente, nota-se que a invariância rotacional do comutador para tempos iguais

$$\Delta(\vec{x},\ 0) = \Delta(R\vec{x},\ 0)$$

implica:

$$\Delta(\vec{x},\ 0) = \Delta(\vec{x}^2,\ 0)$$

que junto com (6.20) dá:

$$\Delta(\vec{x},\ 0) = 0\ , \tag{6.23}$$

ou seja:

$$\left[\phi(\vec{x},\ x_o),\ \phi(\vec{x}',\ x_o)\right] = 0\ . \tag{6.24}$$

Outra propriedade importante de $\Delta(x)$, como deduz-se de (6.14), é:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x - x')\Big|_{t=t'} = -\ \delta(\vec{x} - \vec{x}')\ . \tag{6.25}$$

Logo,

$$\left[\pi(\vec{x}),\ \phi(\vec{x}')\right] = -\ \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{6.26}$$

com

$$\pi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial\phi(\vec{x},t)}{\partial t}\right)_{t=0}\ .$$

A função $\Delta(x)$ é então determinada univocamente pela equação diferencial

$$(\Box + \mu^2)\ \Delta(x) = 0 \tag{6.27a}$$

e as condições iniciais:

$$\Delta(\vec{x},\ 0) = 0 \tag{6.27b}$$

$$\frac{\partial\Delta(x)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = -\ \delta(\vec{x}) \tag{6.27c}$$

e pode-se expressar calculando a representação integral (6.14) assim:

$$\Delta(\vec{x}, x_o) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3}{\sqrt{k^2+\mu^2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \operatorname{sen} k_o x_o =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2+\mu^2}} \frac{\operatorname{sen} kr \operatorname{sen} k_o x_o}{kr}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2+\mu^2}} \cos kr \operatorname{sen} k_o x_o \qquad (6.28a)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} F(r, x_o)$$

onde:

$$F(r,x_o) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2+\mu^2}} \cos kr \operatorname{sen} k_o x_o$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2+\mu^2}} \cos kr \operatorname{sen} k_o x_o$$

Agora, faça:

$$k = \mu \operatorname{senh} y$$

$$k^2 + \mu^2 = \mu^2(1+\operatorname{senh}^2 y) = \mu^2 \cosh^2 y$$

$$dk = \mu \cosh y \, dy$$

$$F(r, x_o) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \cos(\mu r \operatorname{senh} y) \operatorname{sen}(\mu x_o \cosh y)$$

Daí:

$$F(r, x_o) = 0$$

Observe que de:

$$s^2 = x_o^2 + r^2$$

obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial s}{\partial r}\frac{d}{ds} = -\frac{r}{s}\frac{d}{ds}$$

logo:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}$$

portanto:

$$\Delta(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{s}\frac{d}{ds}F(r, x_o)$$

e assim $F(r,x_o)$ é Lorentz-invariante.

Portanto:

$$F(r,x_o) = 0 \quad \text{para } x^2 < 0 \quad \text{ou} \quad -r < x_o < r .$$

Além disso vemos que:

$$F(0, x_o) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy\ \text{sen}(\mu x_o \cosh y)$$

e pela definição de função de Bessel J_o:

$$J_o(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(z \cosh u)\ du$$

temos:

$$F(0, x_o) = J_o(\mu x_o), \qquad x_o > 0 .$$

Por invariância:

$$F(r,x_o) = J_o\left(\mu\sqrt{x_o^2 - r^2}\right), \quad x_o > r$$

e

$$F(r,x_o) = -J_o\left(\mu\sqrt{x_o^2 - r^2}\right), \quad x_o < -r .$$

Assim:

$$F(r,x_o) = \begin{cases} J_o\left(\mu\sqrt{x_o^2 - r^2}\right), & x_o > r \quad (x^2 > 0) \\ 0 & -r < x_o < r \quad (x^2 < 0) \\ -J_o\left(\mu\sqrt{x_o^2 - r^2}\right), & x_o < -r \quad (x^2 > 0) \end{cases} \qquad (6.28b)$$

ou

$$F(r,x_o) = J_o\left(\mu\sqrt{x_o^2 - r^2}\right)\theta(x^2)\,\epsilon(x)\,.$$

Como:

$$\frac{d}{ds}\,\theta(x^2) = \frac{d}{ds}\,\theta(s^2) = \delta(s^2)\,2s$$

$$\frac{d}{ds}\,J_o(\mu s) = -\mu\;J_1(\mu^s)$$

vem:

$$\Delta(x) = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{s}\,\frac{d}{ds}\,F(r,x_o)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\,\epsilon(x)\;\;\delta(x^2) + \frac{1}{4\pi}\;\frac{\mu}{s}\;J_1(\mu s)\theta(x^2)\epsilon(x)$$

pois $J_o(0) = 1$. O têrmo proveniente de

$$\frac{d}{ds}\,\epsilon(x) = \frac{d}{dx_o}\,\epsilon(x_o) = 2\delta(x_o) \quad \text{dá} \quad J_o\;\theta(x^2)\,\delta(x_o) = J_o\,\theta\,(-r^2)\delta(x_o) = 0$$

pois $\theta(-r^2) = 0$

Assim:

$$\Delta(x) = -\frac{1}{2\pi}\,\epsilon(x)\left\{\delta(x^2) - \frac{\mu}{2s}\;J_1(\mu s)\;\theta(s^2)\right\}$$

onde

$$s = \sqrt{x_o^2 - r^2}\;.$$

Para $x^2 \longrightarrow 0$

$$\Delta(x) \sim -\frac{1}{2\pi}\,\epsilon(x)\left\{\delta(x^2) - \frac{\mu^2}{4}\,\theta(x^2) + \theta(x^2)\right\} \qquad (6.29)$$

pois

$$J_1(\mu s) \sim \frac{\mu s}{2} \quad \text{para} \quad s \longrightarrow 0 .$$

$\Delta(x)$ tem uma singularidade δ no cone e uma descontinuidade finita.

Além da função $\Delta(x)$ que é impar, ha uma outra solução, par, da equação de Klein-Gordon:

$$(\Box + \mu^2)\, \Delta^{(1)}(x) = 0 \tag{6.30a}$$

$$\Delta^{(1)}(-x) = \Delta^{(1)}(x) . \tag{6.30b}$$

Tínhamos visto que:

$$\Delta(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0>0} \frac{d^3k}{\omega_k}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \text{sen}\, k_0 x_0$$

A representação integral de $\Delta^{(1)}$ é:

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0>0} \frac{d^3k}{\omega_k}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \cos k_0 x_0 \tag{6.31}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k\, e^{-ikx} \delta(k^2 - \mu^2) .$$

Procedendo como para $\Delta(x)$, encontra-se:

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F_1(r, x_0) \tag{6.32a}$$

$$F_1(r, x_0) = -\frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\omega_k} \cos k_0 x_0 \cos kr =$$

$$= \begin{cases} N_0\left(\mu\sqrt{x_0^2 - r^2}\right), & |x_0| > r \\ -i\, H_0^{(1)}\left(i\mu\sqrt{r^2 - x_0^2}\right), & r > |x_0| . \end{cases} \tag{6.32b}$$

$\Delta^{(1)} \neq 0$ fóra do cone de luz, cae exponencialmente a grandes distâncias fóra do cone.

Determinaremos agora as regras de comutação entre $\phi^{(+)}$ e $\phi^{(-)}$.

Vimos que:

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)$$

sendo:

$$\phi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_o}}\, a(k)\, e^{-ikx} \qquad (6.11a)$$

$$\phi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_o}}\, a^+(k)\, e^{+ikx} \qquad (6.11b)$$

Então, por (6.1) e (6.11), as regras de comutação são:

$$\left[\phi^{(+)}(x),\, \phi^{(+)}(x')\right] = \left[\phi^{(-)}(x),\, \phi^{(-)}(x')\right] = 0 \qquad (6.33)$$

$$\left[\phi^{(+)}(x),\, \phi^{(-)}(x')\right] = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_o}\, e^{-ik(x-x')} \qquad (6.34)$$

$$= i\Delta^{(+)}(x-x') \qquad (6.35)$$

onde

$$\Delta^{(+)}(x-x') = -\frac{i}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_o}\, e^{-ik(x-x')}, \qquad (6.36)$$

$$\Delta^{(-)}(x-x') = \frac{i}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k_o}\, e^{ik(x-x')}, \qquad (6.37)$$

as quais, por definição, são as partes de frequência positiva e negativa de $\Delta(x-x')$. Logo:

$$\Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x) = \Delta(x),$$
$$\Delta^{(+)}(x) - \Delta^{(-)}(x) = -i\,\Delta^{(1)}(x)$$

ou:

$$\Delta^{(+)}(x) = \frac{1}{2}\left[\Delta(x) - i\,\Delta^{(1)}(x)\right], \qquad (6.38a)$$

$$\Delta^{(-)}(x) = \frac{1}{2}\left[\Delta(x) + i\,\Delta^{(1)}(x)\right]. \qquad (6.38b)$$

Δ, $\Delta^{(+)}$, $\Delta^{(-)}$ ocorrem nas relações de comutação indicadas. $\Delta^{(1)}$ ocorre no "vacuum expectation value" de $\{\phi(x), \phi(y)\}_+$. Assim, usando a definição (6.13) e (6.12) encontra-se:

$$\left(\Phi_o, \{\phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x)\}\Phi_o\right) = 2\left(\Phi_o, \phi(x)\phi(y)\,\Phi_o\right) - i\,\Delta(x-y) =$$

$$= 2\left(\Phi_o, \left[\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)\right]\left[\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\,\Phi_o\right]\right) - i\Delta(x-y)$$

$$= 2\left(\Phi_o, \phi^{(+)}(x)\,\phi^{(-)}(y)\,\Phi_o\right) - i\,\Delta(x-y) =$$

$$= 2\left(\phi^{(-)}(x)\,\Phi_o, \phi^{(-)}(y)\,\Phi_o\right) - i\,\Delta(x-y) \;.$$

Mas

$$\left(\Phi_o, \phi^{(+)}(x)\,\phi^{(-)}(y)\,\Phi_o\right) = \left(\Phi_o, \left(\phi^{(+)}(x)\,\phi^{(-)}(y) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \phi^{(-)}(y)\,\phi^{(+)}(\quad)\right)\Phi_o\right) = i\Delta^{(+)}(x-y). \qquad (6.39)$$

Logo:

$$\left\langle \{\phi(x), \phi(y)\}_+ \right\rangle_o = 2i\Delta^{(+)}(x-y) - i\Delta(x-y) = \Delta^{(-)}(x-y) \qquad (6.40)$$

As formas das funções singulares como integrais de Fourier são:

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, e^{-ikx}\delta(k^2-\mu^2)\,\epsilon(k)\;, \qquad (6.41)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\, e^{-ikx}\delta(k^2-\mu^2)\;, \qquad (6.42)$$

$$\Delta^{(+)}(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, e^{-ikx}\,\delta(k^2-\mu^2)\,\frac{1+\epsilon(k)}{2}\;, \qquad (6.43)$$

$$\Delta^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k\, e^{-ikx}\, \delta(k^2 - \mu^2)\, \frac{1 - \epsilon(k)}{2} . \qquad (6.44)$$

6b. <u>Campo espinorial</u>

Para o campo espinorial, consideramos:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{E_p}} \left\{ b_r(p)\, \omega^r(p)\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d_r^+(p)\, v_r(p)\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right\} \qquad (II.4.17)$$

em que:

$$\left.\begin{aligned} \left\{ b_r^+(\vec{p}),\ b_s(\vec{p}\,') \right\}_+ &= \delta_{rs}\, \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') \\ \left\{ d_r^+(p),\ d_s(\vec{p}\,') \right\}_+ &= \delta_{rs}\, \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') \end{aligned}\right\} \qquad (II.4.15)$$

$$\left\{ b_r(\vec{p}),\ b_s(\vec{p}\,') \right\}_+ = \left\{ b_r^+(\vec{p}),\ b_s^+(\vec{p}\,') \right\}_+ = \left\{ d_r(\vec{p}),\ d_s(\vec{p}\,') \right\}_+ = \qquad (II.4.15)''$$

$$= \left\{ d_r^+(\vec{p}),\ d_s^+(\vec{p}\,') \right\} = 0$$

$$\left\{ b_s(\vec{p}),\ d_r(\vec{p}\,') \right\}_+ = \left\{ b_r^+(\vec{p}),\ d_s(\vec{p}\,') \right\} = \left\{ b_s(\vec{p}),\ d_r^+(\vec{p}\,') \right\} = \left\{ b_r^+(\vec{p}),\ d_s(\vec{p}) \right\}_+ =$$

Na representação da interação fazemos, como para o caso escalar:

$$\psi_I(x) = e^{iH_ot}\, \psi(x)\, e^{-iH_ot} . \qquad (6.45)$$

Daí:

$$b_r(k, \lambda) = e^{iE_k N_{rk}^{(+)} t\lambda}\, b_r(k)\, e^{-iE_k N_{rk}^{(+)} t\lambda}$$

$$\frac{db_r(k,\lambda)}{d\lambda} = i\, E_k\, t\, e^{iE_k N_{rk} t\lambda} \left[N_{r_k}^{(+)},\ b_r(k) \right] e^{-iE_k N_{rk} t\lambda} . \qquad (6.46)$$

Agora:

$$\left[N_{rk}^{(+)},\ b_{rk}\right] = \left[b_r^+(k)\ b_r(k),\ b_r(k)\right]$$

e como $b_r^2(k) = 0$, vem:

$$\left[N_{rk}^{(+)},\ b_{rk}\right] = -\ b_r(k)\ b_r^+(k)\ b_r(k) = -\ b_r(k)\ . \qquad (6.47)$$

Logo, como no caso escalar:

$$e^{i\sum_k \sum_r E_k (N_r^+(k) + N^-(k)\,t}\ b_r(k)\ e^{-i\sum_k \sum_r E\ (N_r^+(k) + N_r^+(k) + N_r^-(k))t} =$$

$$= b_r(k)\ e^{-iE_k t}\ . \qquad (6.48a)$$

Anàlogamente

$$d_r^+(k) = d_r^+(k)\ e^{iE_k t}\ . \qquad (6.48b)$$

Assim por (II.4.17) e (6.48):

$$\psi_I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{E_p}} \sum_{r=1,2} \left\{ b_r(p)\ \omega^r(p)\ e^{-ipx} + d_r^+(p) v^r(p) e^{ipx} \right\}.$$

$$(6.49)$$

Logo, as regras de anticomutação podem ser obtidas fàcilmente:

$$\left\{ \psi_\alpha(x),\ \bar{\psi}_\beta(x') \right\}_+ = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{d^3p\ d^3p'}{\sqrt{E_p\ E_{p'}}} \sum_{rs} \left\{ b_r(p),\ b_s^+(p') \right\}_+$$

$$\omega_\alpha^r(p)\ \bar{\psi}_\beta^s(p')\ e^{-i(px - p'x')} + \left\{ d_r^+(p),\ ds(p) \right\}_+\ v_\alpha^r(p)\ \bar{v}_\beta^s(p') \times e^{i(px-p'x')} \Big\} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p} \sum_{r=1,2} \left\{ \omega_\alpha^r(p)\ \bar{\omega}_\beta^r(p)\ e^{-ip(x-x')} + v_\alpha^r(p) \bar{v}_\beta^r(p) e^{ip(x-x')} \right\}$$

$$(6.50)$$

Precisamos de calcular $\sum_{r=1,2} \omega_\alpha^r\ \bar{\omega}_\beta^r$ e $\sum_{r=1,2} v_\alpha^r\ \bar{v}_\beta^r$.

Temos: $$\frac{1}{2m}(\not p+m)_{\alpha\lambda}\omega^r_\lambda(p)=\omega^r_\alpha(p) \qquad \text{para } r=1,2 \tag{6.51}$$
e
$$(\not p+m)_{\alpha\lambda}\omega^r_\lambda(p)=0 \qquad \text{para } r=3,4$$
Logo:
$$\sum_{r=1}^{4}\frac{1}{2m}(\not p+m)_{\alpha\lambda}\,\omega^r_\lambda(p)\,\bar\omega^r_\beta\,\epsilon^r=\sum_{r=1,2}\epsilon_r\,\omega^r_\alpha\,\bar\omega_\beta=$$
$$=\sum_{r=1,2}\omega^r_\alpha\,\overline{\omega^r_\beta}=(\not p+m)_{\alpha\beta} \tag{6.52}$$
pois:
$$\epsilon_r=\begin{cases}1, & r=1,2\\ -1, & r=3,4\end{cases}$$
e
$$\sum_{r=1}^{4}\epsilon_r\,\omega^r_\lambda(p)\,\overline{\omega^r_\beta}(p)=\delta_{\alpha\beta}\cdot 2m\ .$$

Do mesmo modo (sendo $v^r=\omega^{r+2}$):
$$\sum_{r=1}^{4}\frac{\epsilon^r}{2m}(\not p-m)_{\alpha\lambda}\omega^r_\lambda\,\overline{\omega^r_\beta}=\sum_{r=3,4}\omega^r_\alpha\,\overline{\omega^r_\beta}=\sum_{r=1,2}v^r_\alpha\,\overline{v^r_\beta}= \tag{6.53}$$
$$=(\not p-m)_{\alpha\beta}$$
Portanto:
$$\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{E_p}\sum_{r=1,2}\left\{\omega^r_\alpha(p)\,\overline{\omega^r_\beta}(p)\,e^{-ip(x-x')}+v^r_\alpha\,v^r_\beta\,e^{ip(x-x')}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{E_p}\left\{(\not p+m)_{\alpha\beta}e^{-ip(x-x')}+(\not p-m)_{\alpha\beta}\,e^{ip(x-x')}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{E_p}(i\not\nabla+m)_{\alpha\beta}\left\{e^{-ip(x-x')}-e^{ip(x-x')}\right\}$$
$$=(-\not\nabla_x+im)_{\alpha\beta}\,\Delta(x-x')\ . \tag{6.54}$$

Definindo:

$$S(x-x') = -(i\not\partial_x + m)\,\Delta(x-x') \qquad (6.55)$$

de que resulta:

$$-iS(\vec{x}-\vec{x}',0) = \left(-\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0}(x-x')\right)_{x'_0=x_0} = \gamma^0\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'), \qquad (6.56)$$

vem:

$$\left\{\psi_\alpha(x),\,\bar{\psi}_\beta(x')\right\}_+ = -i\,S_{\alpha\beta}(x-x'), \qquad (6.57)$$

que são as regras de anticomutação procuradas; como se vê, são compatíveis com as equações do campo, pois de

$$(\Box + m^2)\,\Delta(x) = 0 \qquad (6.58)$$

vem:

$$(i\not\partial_x - m)\,S(x-x') = -(i\not\partial_x - m)(i\not\partial_x + m)\,\Delta(x-x')$$

$$= (\Box + m^2)\,\Delta(x-x') = 0\,. \qquad (6.59)$$

Das interpretações dadas antes, de b e d, resulta:

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3p}{\sqrt{E_p}}\sum_{r=1,2} b_r(p)\,\omega^r(p)\,e^{-ipx} \qquad (6.60)$$

é o operador de <u>destruição de um fermion</u>;

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3}}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}}\sum_{r=1,2} d_r^+(p)\,v^r(p)\,e^{ipx} \qquad (6.61)$$

é o operador de <u>criação de um antifermion</u>;

$$\bar{\psi}^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}}\sum_{r=1,2} b_r^+(p)\,\bar{\omega}^r(p)\,e^{ipx} \qquad (6.62)$$

<u>cria um fermion</u>;

$$\bar{\psi}^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}}\sum_{r=1,2} d_r(p)\,\bar{v}^r(p)\,e^{-ipx} \qquad (6.63)$$

<u>destroe um antifermion.</u>

O vácuo Φ_0 é agora caracterizado por

$$\psi^{(+)}(x)\,\Phi_0 = 0, \qquad \bar{\psi}^{(+)}(x)\,\Phi_0 = 0\ . \tag{6.64}$$

Ademais:

$$\left\{\psi^{(+)}(x),\, \psi^{(-)}(x')\right\}_+ = \left\{\bar{\psi}^{(-)}(x),\, \bar{\psi}^{(+)}(x')\right\} = 0 \tag{6.65a}$$

$$\left\{\bar{\psi}^{(+)}(x),\, \psi^{(+)}(x')\right\}_+ = \left\{\bar{\psi}^{(-)}(x),\, \bar{\psi}^{(-)}(x)\right\} = 0 \tag{6.65b}$$

enquanto que:

$$\left\{\psi_\alpha^{(+)}(x),\, \bar{\psi}_\beta^{(-)}(x')\right\}_+ = -i\,S^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x') = i(i\not\nabla_x + m)\,\Delta^{(+)}(x-x'), \tag{6.66a}$$

$$\left\{\psi_\alpha^{(-)}(x),\, \bar{\psi}_\beta^{(+)}(x')\right\}_+ = -i\,S^{(-)}_{\alpha\beta}\,(x-x')\ . \tag{6.66b}$$

Também, por (6.60-63):

$$\psi^{(+)}(x) = \bar{\psi}^{(-)}(x)\ ,$$

$$\bar{\psi}^{(-)}(x) = \bar{\psi}^{(+)}(x)\ .$$

De:

$$\psi_c(x) = C\,\bar{\psi}^T(x)\ ,$$

onde C é o operador conjugação de carga, vem:

$$\psi^{(-)}(x) = C\left[\overline{\psi_c^{(+)}}(x)\right]^T$$

$$\bar{\psi}^{(+)}(x) = \left[C^{-1}\,\psi_c^{(+)}(x)\right]^T$$

Talvez fique mais claro chamar:

$$\psi^{(+)}(x) = u(x), \quad \psi^{(-)}(x) = \bar{v}(x) \; ,$$

$$\psi(x) = u(x) + \bar{v}(x) \; ,$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{u}(x) + v(x) \; .$$

u e v são operadores de destruição de um fermion e um antifermion respectivamente; $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são os de criação:

$$\left\{u(x),\ \bar{v}(x')\right\} = \left\{\bar{u}(x),\ v(x')\right\} = 0 \; ,$$

$$\left\{v(x),\ u(x)\right\} = \left\{\bar{v}(x),\ \bar{u}(x')\right\} = 0 \; ,$$

$$\left\{u_{\alpha}(x),\ u_{\beta}(x')\right\} = -iS^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x'); \left\{\bar{v}_{\alpha}(x),\ v_{\beta}(x')\right\} = -iS^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x') \; .$$

6c. Campo eletromagnético

Vimos que o tratamento de Fermi do campo eletromagnético conduziu a:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} A_{\mu,\nu} A^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} \; , \tag{I.5.11}$$

$$\pi^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,0}} = -A_{\mu,0} = -\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{0}} \; , \tag{I.5.12}$$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \pi^{\mu} \pi_{\mu} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} A_{\mu},^{k} A^{\mu,k}. \tag{I.5.13}$$

O desenvolvimento de Fourier de A_{μ} é:

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^{3}k}{\sqrt{2\omega_{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon^{(\lambda)}(k) \left\{ a^{(\lambda)}(\vec{k})\, e^{-ikx} + a^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{ikr} \right\} \tag{6.67a}$$

onde os $\epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\vec{k})$ são quatro vetores de polarização unitários tais que:

$$\epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda')\mu} = g^{\lambda\lambda'} \qquad (6.6^{\circ})$$

onde $g^{\lambda\lambda'}$ é o tensor métrico e a soma sôbre μ é euclidiana.

No que se segue não consideramos estados de definida polarização. Logo temos:

$$A_{\mu} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left\{ A_{\mu}(\vec{k})\, e^{-ikx} + A_{\mu}^{+}(\vec{k})\, e^{ikx} \right\}, \qquad (6.67b)$$

com

$$A_{\mu}(k) = \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}\, a^{(\lambda)}(\vec{k}) \,. \qquad (6.68)$$

As regras de comutação são, então:

$$\left[\pi^{\mu}(\vec{x}),\ A_{\nu}(\vec{x}')\right] = -i\delta_{\nu}^{\mu}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}'), \qquad (6.69)$$

ou:

$$\left[A^{\mu,0}(\vec{x}),\ A_{\nu}(\vec{x}')\right] = -i\delta_{\nu}^{\mu}\ \delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$= \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} A_{\mu}\ (\vec{x}, t\ ),\ A_{\nu}(\vec{x}',t) \right] \right\}_{t=0} . \qquad (6.70)$$

Como antes, se chega a:

$$\left[A_{\mu}(x),\ A_{\nu}(x')\right] = -ig_{\mu\nu} D(x-x') \ , \qquad (6.71)$$

onde $D(x)$ é $\Delta(x)$ para $m=0$:

$$D(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_0>0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\ \frac{\operatorname{sen} k_0 \cdot x_0}{k_0}\ d^3k =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kr\ \operatorname{sen}\ k x_0}{kr} k\, d\, k = -\frac{1}{4\pi r} \left\{ \delta(r - x_0) - \delta(r + x_0) \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\epsilon(x)\,\delta(x^2) \tag{6.72}$$

enquanto que

$$D^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{k_o}\cos k_o\, x_o\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = -\frac{1}{2\pi^2}\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\,.$$

$$\text{(valor principal} = \mathcal{P}) \tag{6.73}$$

Para os operadores (6.68) tem-se:

$$\left[A_\mu(\vec{k}),\, A_\nu^+(\vec{k}')\right] = -\, g_{\mu\nu}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')\ , \tag{6.74a}$$

$$\left[A_\mu(\vec{k}),\, A\,(\vec{k}')\right] = \left[A_\mu^+(\vec{k}),\, A_\nu^+(\vec{k})\right] = 0\ , \tag{6.74b}$$

como pode ser verificado de (6.71):

A condição de Lorentz não pode ser nem:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{6.75}$$

nem

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\,\psi = 0$$

porque contradizem a regra de comutação.

É:

$$\frac{\partial A_\mu^{(+)}(x)}{\partial x_\mu}\,\psi = 0 \tag{6.77}$$

condição que se deve a Gupta e Bleuler. Dela resulta que os fotons são polarizados transversalmente.

Chame:

$$f_\mu^{(1)}(\vec{k}) = (\Phi_o,\, A_\mu(\vec{k})\,\psi\,) \tag{6.78}$$

que é a amplitude para encontrarmos um foton no estado ψ de momentum K, com $k_\nu k^\nu = 0$, e polarização μ. Logo a condição (6.77) exige:

$$k^\mu f_\mu^{(1)}(\vec{k}) = 0 \tag{6.79}$$

condição que garante a polarização transversal dos fotons.

Com efeito realize uma transformação de calibre (gauge):

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^\mu} \qquad \text{com } \Box\Lambda = 0 \, . \tag{6.80}$$

Seja:

$$\Lambda(x) = \int \Lambda(\vec{k})\, e^{-ikx}\, d^4 k \tag{6.81}$$

$\Lambda(k)$ depende só de $\vec{k}$, pois de $k^2\Lambda(k) = 0$ resulta $\Lambda(k) = 0$ exceto quando $k^2 = 0$.

Assim no espaço dos k, (6.80) lê-se:

$$A_\mu(\vec{k}) \longrightarrow A_\mu(\vec{k}) + k_\mu \Lambda(\vec{k}) \tag{6.82}$$

e $f_\mu^{(1)}(k) + k_\mu\Lambda(\vec{k})$ descreve o mesmo estado que $f_\mu^{(1)}(k)$. Escolhamos $\Lambda(k) = -\dfrac{f_o^{(1)}(\vec{k})}{k_o}$. Então:

$$f'_\mu(\vec{k}) = f_\mu^{(1)}(\vec{k}) - \frac{k_\mu}{|\vec{k}|}\, f_o^{(1)}(\vec{k}) \tag{6.83}$$

é tal que

$$f'_o(\vec{k}) = 0$$

e assim:

$$k^\mu f'_\mu(k) = \vec{k}\cdot\vec{f}'(\vec{k}) = 0 \;, \tag{6.84}$$

logo a função de onda que descreve 1 foton é transversal.

O vetor energia-momentum é:

$$p^\mu = -\int k^\mu A_\nu^+(k)\, A_\nu(k)\, d^4k \tag{6.85}$$

Agora escolhamos ϵ e k assim:

$$k_o = |\vec{k}|, \quad k_1 = |\vec{k}|, \quad k_2 = k_3 = 0 ,$$

isto é:

$$k_\mu = |\vec{k}|(1, 1, 0, 0) \tag{6.86a}$$

e:

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^{(o)}(\vec{k}) &= (1, 0, 0, 0) , \\ \epsilon_\mu^{(1)}(\vec{k}) &= (0, 0, 1, 0) , \\ \epsilon_\mu^{(2)}(\vec{k}) &= (0, 0, 0, 1) , \\ \epsilon_\mu^{(3)}(\vec{k}) &= (0, 1, 0, 0) . \end{aligned} \tag{6.86b}$$

isto é:

$$k^\mu \epsilon_\mu^{(1)}(\vec{k}) = k^\mu \epsilon_\mu^{(2)}(\vec{k}) = 0 , \tag{6.87a}$$

$$- k^\mu \epsilon_\mu^{(3)}(\vec{k}) = k^\mu \epsilon_\mu^{(o)}(\vec{k}) = 1 . \tag{6.87b}$$

De:

$$A_\mu(\vec{k}) = \sum_{\lambda=1}^{4} \epsilon_\mu^{(\lambda)} a^{(\lambda)}(\vec{k}) \tag{6.88}$$

resulta:

$$k^\mu A_\mu (\vec{k})\psi = 0 = |\vec{k}| \left[a^{(o)}(\vec{k}) - a^{(3)}(\vec{k})\right]\psi \tag{6.89a}$$

ou:

$$a^{(o)}(k)\psi = a^{(3)}(\vec{k})\psi . \tag{6.89b}$$

Logo, usando (6.88), (6.89) e o fato de que os vetores de polarização são reais, deduz-se:

$$- A_\mu^+(\vec{k}) A^\mu(\vec{k})\psi = - \sum_{\lambda\lambda'} a^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda')}(\vec{k}) g_{\lambda\lambda'} \psi \tag{6.90}$$

$$= \left[a^{(1)+}(\vec{k}) a^{(1)}(\vec{k}) + a^{(2)+}(\vec{k}) a^{(2)}(\vec{k})\right]\psi$$

e só fotons transversais contribuem a P_μ.

Devemos, entretanto, usar métrica indefinida para definir os produtos internos. Pois $A_o(k)\ A_o^+(k)$ é positiva semidefinida enquanto que, pela regra usual:

$$(\psi_o,\ A_o(k)\ A_o^+(k')\psi_o) = (A_o^+(k)\psi_o,\ A_o^+(k')\ \psi_o) =$$
$$= \left(\psi_o,\ \left[A_o(k),\ A_o^+(k)\right]\psi_o\right) = -\delta(k-k'). \qquad (6.91)$$

A contradição é eliminada se usarmos um operador η tal que:

$$\left[A_1(x),\eta\right] = 0\ ,$$

$$\left\{A_o(x),\eta\right\}_+ = 0\ ,$$

ou:

$$A_1(k)\eta = \eta A_1(k)\ ,$$
$$A_o(k)\eta = -\eta A_o(k)$$

e:

$$\eta^+ = \eta\ , \quad \eta^2 = 1\ .$$

Assim:

$$\eta A_1^+(k)\eta = A_1^+(k)\ ,$$

$$\eta A_o^+(k)\eta = -\ A_o^+(k)\ . \qquad (6.94)$$

Admito η diagonal na representação em que $A_1^+(k)\ A_1(k)$ e $A_o^+(k)\ A_o(k)$ são diagonais.

Tenho então:

$$(n|\eta|n)(n|A_1(k)|n+1) = (n|A_1(k)|n+1)(n+1|\eta|n+1)$$

$$(n_o|\eta|n_o)(n_o|A_o(k)|n_o+1) = -\ (n_o|A_o(k)|n_o+1)(n_o+1|\eta|n_o+1), \quad (6.95)$$

i.e.:

$$\eta_{n_i+1} = \eta_{n_i}, \qquad i = 1, 2, 3, \qquad (6.96)$$

$$\eta_{n_o+1} = -\eta_{n_o}.$$

Isto permite-nos escrever:

$$(n_1, n_2, n_2, n_o|\eta|n_1', n_2', n_3', n_o') = (-1)^{n_o} \delta_{n_1 n_1'} \delta_{n_2 n_3'} \delta_{n_2 n_3'} \delta_{n_o n_o'}$$

isto para um dado k. Em geral:

$$\eta\psi = \prod_k (-1)^{n_o(k)} \psi, \qquad \text{onde } n_o(k) \text{ ocorre no estado } \psi, \qquad (6.97)$$

ou:

$$(n_1(k),\ldots n_2(k)\ldots n_3(k)\ldots n_o(k)\ldots|\eta|n_1'(k),\ldots) =$$

$$\prod_k (-1)^{n_o(k)} \delta_{n_1(k)n_1'(k)} \cdots \delta_{n_o(k)n_o'(k)}$$

Definindo assim η, postulamos agora definir o valor esperado de um operador F assim:

$$\langle F \rangle = (\psi, \eta F \psi) \qquad (6.98)$$

e a norma de um estado, ψ por:

$$(\psi, \eta\, \psi) \qquad (6.99)$$

Se F fôr tal que:

$$\eta F^+ \eta = F \qquad (6.100)$$

então $\langle F \rangle$ é real. Pois:

$$\langle F \rangle = \sum_{nm\ell} \psi_n^* \eta_{nm} F_{m\ell} \psi_\ell$$

$$\langle F \rangle^* = \sum_{nm\ell} \psi_n \eta_{nm}^* F_{m\ell}^* \psi_\ell^* = \sum_{nm\ell} \psi_\ell^* (F^+)_{\ell m} \eta_{mn} \psi_n$$

porque $\eta^*_{nm} = \eta_{mn}$, e em virtude de (6.67):

$$= \sum_{nm\ell} \psi^*_\ell \, \eta_{\ell p} \, F_{pq} \, \eta_{qm} \, \eta_{mn} \, \psi_n = \sum_{nm\ell} \psi^*_\ell \, \eta_{\ell p} \, F_{pn} \, \psi_n = \langle F \rangle$$

porque $\eta^2 = 1$.

É claro que

$$(\psi_i, \eta \, \psi_j) = \delta_{ij} \prod_k (-1)^{n_o(k)} , \qquad (6.101)$$

$n_o(k)$ é o número de fotons (time-like) no estado ψ_j.

A contradição sôbre $A_o A_o^+$ e seu valor esperado é eliminada, pois:

$$(\psi_o, \eta A_o(k) \, A_o^+(k')\psi_o) = - (\psi_o, \, A_o(k) \, \eta \, A_o^+(k') \, \psi_o)$$

$$= - \; (A_o^+(k)\psi_o, \, \eta A_o^+(k') \; \psi_o) = - \, (\psi_1, \eta \psi_1) = \delta(k - k') \; . \qquad (6.102)$$

Precisamos agora de construir as funções de estado ψ que satisfaçam às condições:

$$a^{(o)}(k)\psi = a^{(3)}(k)\psi \qquad (6.103)$$

e

$$(\psi, \eta \, \psi') = (\psi^{(o)}, \eta \, \psi'^{(o)}) \; , \qquad (6.104)$$

onde $\psi^{(o)}$ é o funcional de estado no qual não há fotons longitudinais nem escalares (pois ψ, em geral, deve conter $n^o(k)$ e $n^{(3)}(k)$ para que sejam definidos os operadores $A_o(x)$ e $A_e(x)$). O ponto importante é que os ψ possíveis, que satisfazem às condições acima, dão os mesmos valores esperados para as grandezas físicas que os obtidos com $\psi^{(o)}$, a menos de uma transformação de gauge.

Para determinar êsses estados, recorremos às fórmulas para $a^{(o)}(k)$ e $a^{(3)}(k)$:

$$a^{(3)}(k)\,\psi(\ldots n^{(3)}(k)\ldots) = \sqrt{n^{(3)}(k)}\,\psi(\ldots n^{(3)}(k)-1\,\ldots),$$

$$a^{(o)}(k)\,\psi(\ldots n^{(o)}(k)\ldots) = \sqrt{n^{(o)}(k)+1}\,\psi(\ldots n^{(o)}(k)-1\ldots), \quad (6.105)$$

$$a^{(3)+}(k)\psi(\ldots n^{(3)}(k)\ldots) = \sqrt{n^{(3)}(k)+1}\,\psi(\ldots n^{(3)}(k)+1\ldots),$$

$$a^{(o)+}(k)\psi(\ldots n^{(o)}(k)\ldots) = \sqrt{n^{(o)}(k)+1}\,\psi(\ldots n^{(o)}(k)+1\ldots)$$

e fazendo (para um dado k)

$$\psi = \sum_{n_1 n_2 n_3 n_o} c_{n_1 n_2 n_3 n_o}\,\psi(n_1 n_2 n_3 n_o) \quad (6.106a)$$

a relação:

$$a^{(3)}(k)\,\psi = a^{(o)}(k)\,\psi$$

dá:

$$\sqrt{n^{(3)}}\,c_{n_1 n_2 n_3 -1\, n_o} - \sqrt{n^{(o)}}\,c_{n_1 n_2 n_3 n_o -1} = 0 \quad (6.107)$$

o que nos permite escrever:

$$\psi = \sum c_i\,\psi_i \;, \quad c_o = 1 \;, \quad (6.106b)$$

onde:

$$\psi_o = \psi(n_1,n_2,0,0) \;,$$

$$\psi_1 = \psi(n_1,n_2,1,0) + \psi(n_1,n_2,0,1),$$

$$\psi_2 = \psi(n_1,n_2,2,0) + \sqrt{2}\,\psi(n_1,n_2,1,1) + \psi(n_1,n_2,0,2), \quad (6.10?)$$

....

$$\psi_j = \sum_{r=1}^{j} \sqrt{\frac{j!}{r!(j-r)!}}\,\psi(n_1,n_2,j-r,r).$$

Agora:

$$(\psi_j, \eta\psi_\ell) = \sum_{r=0}^{j} \sum_{s=0}^{\ell} \sqrt{\frac{j!}{r!(j-r)!}} \sqrt{\frac{\ell!}{s!(\ell-s)!}} \cdot$$

$$\cdot\Big(\psi(n_1, n_2, j-r, r), \eta\,\psi(n_1, n_2, \ell-s, s)\Big) \tag{6.109}$$

$$= \sum_{r=0}^{j} \sum_{s=0}^{\ell} \sqrt{\frac{j!}{r!(j-r)!}} \sqrt{\frac{\ell!}{s!(\ell-s)!}} (-1)^s \delta_{n_1 n_1'} \delta_{n_2 n_2'} \delta_{j\ell}\, \delta_{rs} =$$

$$= \delta_{n_1 n_1'}\ \delta_{n_2 n_2'}\ \delta_{j\ell} \sum_{r=0}^{j} \frac{j!}{r!(j-r)!} (-1)^r =$$

$$= \delta_{n_1 n_1'}\ \delta_{n_2 n_2'}\ \delta_{j\ell}\, \delta_{jo}$$

pois: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r}\ b^r$ dá (6.110)

$$0^n = \delta_{no} = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} (-1)^r . \tag{6.111}$$

Vemos que:

$$(\psi_1\, \eta\, \psi) = (\psi_o, \eta\, \psi_o) . \tag{6.112}$$

Observe que cada ψ em ψ_o, ψ_1,..., em geral, é um produto correspondente aos diferentes valores de k:

$$\psi_o = \prod_k \psi(n_1(k), n_2(k), 0, 0), \tag{6.113a}$$

$$\psi_1 = \prod_k c_1(k)\Big[\psi(n_1(k), n_2(k), 1, 0) + \psi(n_1(k), n_2(k), 0, 1)\Big],$$

.... (6.113b)

$$\psi = \psi_o + \psi_1 + \dots .$$

Tomemos agora os dois seguintes estados:

$$\psi_o = \prod_k \psi(n_1(k),\ n_2(k),\ n,\ 0),$$

$$\psi_1 = \prod_k C_1(k)\Big[\psi(n_1(k),\ n_2(k),\ 1,\ 0) + \psi(n_1(k),\ n_2(k),\ 0,\ 1)\Big]$$

e calculemos a esperança de $A_\mu(x)$.

Temos:

$$(\psi_o, \eta\, A_\mu(x)\, \psi_o) = 0 \qquad (6.114)$$

$$(\psi_o + \psi_1, \eta\, A_\mu(x)\Big[\psi_o + \psi_1\Big] = (\psi_o, \eta\, A_\mu^{(+)}\, \psi_1) + (\psi_1, \eta\, A_\mu^{(-)}\psi_o). \quad (6.115)$$

Como:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \left\{ a^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-ikx} + a^{(\lambda)+}(\vec{k}) e^{ikx} \right\}$$

e:

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)}\Big(\psi_o, \eta a^{(\lambda)}(\vec{k}) \prod_k C_1(k)\Big[\psi(n_1(k), n_2(k), 1, 0) + \psi(n_1(k), n_2(k), 0, 1)\Big]\Big) =$$

$$= C_1(k)\Big(\epsilon_\mu^{(3)}(k) + \epsilon_\mu^{(o)}(k)\Big)(\psi_o, \eta\, \psi_o)$$

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)} \Big(\psi_1, \eta\, a^{(\lambda)+}(k)\, \psi_o\Big) = \sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)}\Big(\pi_k C_1(k)\Big[\psi(n_1(k), n_2(k), 1, 0) + \cdots$$

$$+ \psi(n_1(k),\ n_2(k), 0, 1\Big], \eta\, a^{(\lambda)+}(k) \pi_k \psi(n_1, n_2, 0, 0)\Big) =$$

$$= \Big(\epsilon_\mu^{(3)}(k) + \epsilon_\mu^{(o)}\Big)\Big(C_1(k)\Big[\ldots\ldots\Big], - a^{(o)+}(k)\eta\, \psi(n_1(k), n_2(k), 0, 0)\Big) =$$

$$= - C_1^*(k)\ \Big(\epsilon_\mu^{(3)}(k) + \epsilon_\mu^{(o)}(k)\Big)\ |\psi_o, \eta\, \psi)$$

porque

$$a^{(3)}\psi = a^{(o)}\,\psi \ . \tag{6.116}$$

Logo:

$$\left(\psi_o + \psi_1, \eta\, A_\mu(x)\left[\bar{\psi}_o + \psi_1\right]\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \left\{ C_1(\vec{k})\left(\epsilon_\mu^{(3)}(k) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \epsilon_\mu^{(o)}(\vec{k})\right) e^{-ikx} - C_1^*(k)\left(\epsilon_\mu^{(3)} + \epsilon_\mu^{(o)}\right) e^{ikx} \right\} .$$

e como na nossa escolha:

$$\epsilon_\mu^{(3)}(\vec{k}) + \epsilon_\mu^{(o)}(\vec{k}) = \frac{k_\mu}{|k|} ,$$

vem:

$$\left(\psi_o + \psi_1, \eta\, A_\mu(x)\left[\psi_o + \psi_1\right]\right) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \frac{k_\mu}{|k|} \left\{ C_1(k)\, e^{-ikx} - \right.$$

$$\left. - C_1^*(k)\, e^{ikx} \right\} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \tag{6.117}$$

onde

$$\Lambda = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|^3}} \left\{ C_1(k) e^{-ikx} + C_1^*(k) e^{ikx} \right\} \tag{6.11°}$$

satisfaz a

$$\Box \Lambda(x) = 0 ,$$

o que mostra que os "expectation values" de A_μ com ψ_o ou com $\psi_o +$ $+ \psi_1$ só diferem por uma transformação de gauge.

Assim, os funcionais acima construidos são equivalentes na descrição do campo eletromagnético. O vácuo, por exemplo, pode ser descrito por

$$\psi(0, 0, 0, 0)$$

ou por

$$\Psi(0,0,1,0) + \Psi(0,0,0,1) \tag{6.119}$$

ou:

$$\Psi(0,0,2,0) + \sqrt{2}\,\Psi(0,0,1,1) + \Psi(0,0,0,2)$$

etc.

Podemos escolher o especial gauge para o vácuo, tal que (Kallën):

$$(\Psi_o, \eta\, A_\mu(x)\, \Psi_o) = 0 \,. \tag{6.120}$$

7. <u>Valores esperados no vácuo</u> (Vacuum expectation values)

7a. Vimos que:

$$\left[A_\mu(x),\ A_\nu(x')\right] = -ig_{\mu\nu}\, D(x-x'). \tag{6.71}$$

Queremos calcular a esperança no vácuo de expressões que intervirão mais tarde.

i) $\langle\left\{A_\mu(x),\ A_\nu(x')\right\}\rangle_0 \equiv \langle A_\mu(x)\, A_\nu(x') + A_\nu(x')A_\mu(x)\rangle_0$.

Temos (no gauge especial de Källen):

$$\left(\Psi_o,\ \left\{A_\mu(x)\ A_\nu(x') + A_\nu(x')\ A_\mu(x)\right\}\ \Psi_o\right) = 2\left(\Psi_o, \eta\, A_\mu(x)\ A_\mu(x')\ \Psi_o\right) - $$
$$- ig_{\mu\nu}\ D(x'-x).$$

O 1º termo do 2º membro dá:

$$2\left(\Psi_o,\ \eta\left[A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x)\right]\left[A_\mu^{(+)}(x') + A_\nu^{(-)}(x')\right]\ \Psi_o\right) =$$

$$= 2\left(\Psi_o, \eta\, A_\mu^{(+)}(x)\ A_\nu^{(-)}(x')\ \Psi_o\right) = 2\left(\Psi_o, \eta\left[A_\mu^{(+)}(x),\ A_\nu^{(-)}(x')\right]\Psi_o\right)$$

$$= -\,2ig_{\mu\nu}\ D^{(+)}(x-x').$$

Assim:

$$\langle\{A_\mu(x),\ A_\nu(x')\}\rangle_0 = -2ig_{\mu\nu}D^{(+)}(x-x') + ig_{\mu\nu}D(x-x') = -g_{\mu\nu}D^{(1)}(x-x') \tag{7.1}$$

onde:

$$D^{(1)}(x) = 2i\ D^{(+)}(x-y) - i\ D(x-y)\,. \tag{7.2}$$

ii) <u>Produto cronológico</u>

$$P\Big(A_\mu(x)\ A_\nu(x')\Big) = \begin{cases} A_\mu(x)\ A_\nu(x') & \text{se}\quad x_0 > x'_0; \\ A_\nu(x')\ A_\mu(x) & \text{se}\quad x'_0 > x_0, \end{cases}$$

isto é:

$$P(A_\mu(x)\ A_\nu(x') = A_\mu(x)\ A_\nu(x')\ \frac{1+\epsilon\,(x-x')}{2} + A_\nu(x')\ A_\mu(x)\ \frac{1-\epsilon\,(x-x')}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ \{A_\mu(x),\ A_\nu(x')\} + \frac{\epsilon(x-x')}{2}\ \Big[A_\mu(x),\ A_\nu(x')\Big]$$

logo:

$$\langle P(A_\mu(x)\ A_\nu(x')\rangle_0 = \frac{1}{2}\ \Big[-D^{(1)}(x-x') - i\epsilon(x-x')\ D(x-x')\Big]g_{\mu\nu} =$$

$$= -\ \frac{1}{2}\ g_{\mu\nu}\Big[D^{(1)}(x-x') + i\epsilon(x-x')\ D(x-x')\Big]$$

$$= -\ \frac{1}{2}\ g_{\mu\nu}\quad D_F(x-x')\ , \tag{7.3}$$

onde:

$$D_F(x-x') = D^{(1)}(x-x') + i\epsilon(x-x')\ D(x-x')\,. \tag{7.4}$$

iii) <u>Produto normal ou ordenado</u> $N(A_\mu(x)\ A_\nu(x')\ )$ no qual os operadores de emissão são postos à esquerda dos de absorção:

$$N(A_\mu(x), A_\nu(x')) = N\ \Big[\Big(A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x)\Big)\Big(A_\nu^{(+)}(x') + A_\nu^{(-)}(x')\Big)\Big] =$$

$$= N\left[A_\mu^{(+)}(x)A_\nu^{(+)}(x')+A_\mu^{(+)}(x)A_\nu^{(-)}(x') + A_\mu^{(-)}(x)A_\nu^{(+)}(x')+A_\mu^{(-)}(x)A_\nu^{(-)}(x')\right]$$

$$= A_\mu^{(+)}(x)A_\nu^{(+)}(x')+A_\nu^{(-)}(x')\, A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x)A_\nu^{(+)}(x')+A_\mu^{(-)}(x)A_\nu^{(-)}(x') \,.$$

Verifique:

$$P(A_\mu(x)\ A_\nu(x')\ ) - N(A_\mu(x)\ A_\nu(x')\ ) = \\ = -\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\ D_F(x-x') , \tag{7.5}$$

$$P(A_\mu(x)A_\nu(x')) = \frac{1}{2}\left\{A_\mu(x),\ A_\nu(x')\right\}+\frac{\epsilon(x-x')}{2}\left[A_\mu(x),\ A\ (x')\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\left\{A_\mu^{(+)}(x),\ A_\nu^{(+)}(x')\right\} + \left\{A_\mu^{(+)}(x),\ A_\nu^{(-)}(x')\right\} + \left\{A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(x')\right\} +$$

$$+ \left\{A_\mu^{(-)}(x),\ A_\nu^{(-)}(x')\right\}\Big] + \frac{\epsilon(x-x')}{2}\left[A_\mu(x),\ A_\nu(x')\right].$$

Subtraindo a expressão de $N(A_\mu(x)\ A_\nu(x')\ )$ e levando em conta as relações de comutação

$$\left[A_\mu^{(+)}(x),\ A_\nu^{(+)}(x')\right] = \left[A_\mu^{(-)}(x),\ A_\nu^{(-)}(x')\right] = 0$$

$$\left[A_\mu^{(+)}(x),\ A_\nu^{(-)}(x')\right] = -\ i g_{\mu\nu} D^{(+)}(x-x') \ ,$$

$$\left[A_\mu^{(-)}(x),\ A^{(+)}(x')\right] = -\ i g_{\mu\nu} D^{(-)}(x-x') \ , \tag{7.6}$$

$$D^{(+)}(-x) = -D^{(-)}(x) ,$$

obtem-se a relação mencionada.

É claro que:

$$\langle N(A_\mu(x)\ A_\nu(x')\rangle_0 = 0 \ . \tag{7.7}$$

7b. Para o campo espinorial, anàlogamente:

i) <u>Cálculo de</u> $\langle [\bar{\psi}_\alpha(x),\ \psi_\beta(x')] \rangle_0$. Temos:

$$\langle [\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(x')] \rangle_0 = 2 \langle \bar{\psi}_\alpha(x)\ \psi_\beta(x') \rangle_0 + i\ S_{\beta\alpha}(x'-x)$$

$$\begin{aligned}\langle \bar{\psi}_\alpha(x)\, \psi_\beta(x') \rangle_0 &= \langle \left(\bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x) + \bar{\psi}_\alpha^{(-)}(x)\right)\left(\psi_\beta^{(+)}(x') + \psi_\beta^{(-)}(x')\right) \rangle_0 \\ &= \langle \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\ \psi_\beta^{(-)}(x') \rangle_0 = \langle \left\{ \bar{\psi}_\alpha^{(+)}(x),\ \psi_\beta^{(-)}(x') \right\} \rangle_0 = \\ &= -i\, S_{\beta\alpha}^{(-)}(x'-x).\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\langle [\bar{\psi}_\alpha(x),\ \psi_\beta(x')] \rangle_0 &= -2i S_{\beta\alpha}^{(-)}(x'-x) + i S_{\beta\alpha}(x'-x) \\ &= S_{\beta\alpha}^{(1)}(x'-x) \ .\end{aligned} \tag{7.8}$$

ii) <u>Cálculo de</u> $\langle P(\bar{\psi}_\alpha(x)\ \psi_\beta(x') \rangle_0$.

$$\begin{aligned}P(\bar{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')) &= \bar{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')\,\frac{1+\epsilon(x-x')}{2} + \psi_\beta(x')\,\bar{\psi}_\alpha(x)\,\frac{1-\epsilon(x-x')}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(x')\right\} + \frac{\epsilon(x-x')}{2}\left[\bar{\psi}_\alpha(x),\ \psi_\beta(x')\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle P\left(\bar{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')\right) \rangle_0 &= \frac{i}{2}\, S_{\beta\alpha}(x'-x) + \frac{\epsilon(x-x')}{2}\, S_{\beta\alpha}^{(1)}(x'-x) \\ &= -\frac{1}{2}\left\{i\ S_{\beta\alpha}(x'-x) + \epsilon(x'-x)\ S_{\beta\alpha}^{(1)}(x'-x)\right\} = \\ &= -\frac{1}{2}\,\epsilon(x'-x)\left\{S_{\beta\alpha}^{(1)}(x'-x) + i\epsilon(x'-x) S_{\beta\alpha}(x'-x)\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\,\epsilon(x'-x)\ S_F^{\beta\alpha}(x'-x) \ .\end{aligned} \tag{7.9}$$

Também:

$$\left\langle P\left(\psi_\alpha(x)\ \bar{\psi}_\beta(x')\right)\right\rangle_0 = \frac{1}{2}\,\epsilon(x-x')\ S_F^{\alpha\beta}(x-x')\ . \qquad (7.10)$$

iii) Cálculo de $N(\psi(x)\ \bar{\psi}(y))$. O produto normal de espinores coloca os operadores de emissão à esquerda dos de absorção, levando em conta o sinal de anticomutação.

$$N(\psi(x)\ \bar{\psi}(y)) = N\left[(u(x)+\bar{v}(x))(\bar{u}(y)+v(y)\right] =$$

$$= N\left[u(x)\bar{u}(y)+u(x)v(y)+\bar{v}(x)\bar{u}(y)+\bar{v}(x)v(y)\right]$$

$$= -\bar{u}(y)u(x)+u(x)v(y)+\bar{v}(x)\bar{u}(y)+\bar{v}(x)v(y)\ ,$$

$$N(\bar{\psi}(y)\psi(x)) = N\left[(\bar{u}(y)+v(y))(u(x)+\bar{v}(x))\right] =$$

$$= N\left[\bar{u}(y)u(x)+\bar{u}(y)\bar{v}(x)+v(y)u(x)+v(y)\bar{v}(x)\right]$$

$$= \bar{u}(y)\ u(x)+\bar{u}(y)\bar{v}(x)+v(y)u(x)-\bar{v}(x)v(y)\ .$$

Pelas regras de anticomutação:

$$N(\psi(x)\bar{\psi}(y))+N(\bar{\psi}(y)\ \psi(x)) = 0$$

$$N(\psi(x)\psi(y)) = N\left[(u(x)+\bar{v}(x))(u(y)+\bar{v}(y))\right] =$$

$$= u(x)\ (y)-\bar{v}(y)u(x)+\bar{v}(x)u(y)+\bar{v}(x)\bar{v}(y)$$

$$= \psi(x)\ \psi(y)\ . \qquad (7.11)$$

$$N(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)) = \bar{\psi}(x)\ \bar{\psi}(y)\ .$$

Temos a seguinte relação:

$$\epsilon(x-x')\ P(\bar{\psi}_\alpha(x)\ \psi_\beta(x'))-N(\bar{\psi}_\alpha(x)\ \psi_\beta(x')) =$$
$$= \frac{1}{2}\ S^F_{\beta\alpha}(x'-x) \qquad (7.12)$$

que se mostra diretamente:

$$P(\overline{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')) = \frac{1}{2}\left\{\overline{\psi}_\alpha(x),\,\psi_\beta(x')\right\} + \frac{\epsilon(x-x')}{2}\left[\overline{\psi}_\alpha(x),\;\psi_\beta(x')\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\,S_{\beta\alpha}(x'-x) + \frac{\epsilon(x-x')}{2}\left[\overline{\psi}_\alpha(x),\;\psi_\beta(x')\right],$$

$$\epsilon(x-x')\,P\,(\overline{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')) = -\frac{1}{2}\,\epsilon(x-x')\;S_{\beta\alpha}(x-x') + \frac{1}{2}\,(\overline{u}_\alpha(x)u_\beta(x') -$$

$$- u_\beta(x')\,\overline{u}_\alpha(x) + \overline{u}_\alpha(x)\,\overline{v}_\beta(x') - \overline{v}_\beta(x')\,\overline{u}_\alpha(x) +$$

$$+ v_\alpha(x)u_\beta(x') - u_\beta(x')v_\alpha(x) + v_\alpha(x)\overline{v}_\beta(x') - \overline{v}_\beta(x')v_\alpha(x)),$$

$$N(\overline{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')) = \overline{u}_\alpha(x)u_\beta(x') + \overline{u}_\alpha(x)\,\overline{v}_\beta(x') + v_\alpha(x)u_\beta(x') - \overline{v}_\beta(x')\,v_\alpha(x)\;.$$

Logo:

$$\epsilon(x-x')P(\overline{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x')) - N(\overline{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')) = -\frac{1}{2}\;\epsilon(x-x')\;S_{\beta\alpha}(x'-x)\;-$$

$$-\frac{1}{2}\Big(\left\{\overline{u}_\alpha(x),u_\beta(x')\right\} + \left\{\overline{u}_\alpha(x),\;\overline{v}_\beta(x')\right\} + \left\{v_\alpha(x),\;u_\beta(x')\right\} -$$

$$-\left\{v_\alpha(x),\,\overline{v}_\beta(x')\right\}\Big) = \frac{1}{2}\;S^{(+)}_{\beta\alpha}(x'-x) - \frac{1}{2}\;S^{(-)}_{\beta\alpha}(x'-x) - \frac{1}{2}\;\epsilon(x'-x)\;S_{\beta\alpha}(x'-x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(S^{(1)}_{\beta\alpha}(x'-x) + \epsilon(x'-x)\,i\;S_{\beta\alpha}(x'-x)\right) = \frac{1}{2}\;S^{F}_{\beta\alpha}(x'-x)\;.$$

8. <u>Forma da corrente de fermions</u>

Vimos que:

$$j_\mu = e\,\overline{\psi}\,\gamma_\mu\,\psi \qquad \text{(I.4.13)}$$

Contudo o valor esperado da carga, por essa expressão, no vácuo, é infinito:

$$\langle j_\mu \rangle_0 \quad \text{diverge} \qquad (8.1)$$

Pois:

$$\langle j_\mu(x)\rangle_o = e\langle \overline{\psi}_\alpha(x)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta(x)\rangle_o =$$

$$= e(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\langle \overline{\psi}_\alpha(x)\ \psi_\beta(x)\rangle =$$

$$= -ie(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\ S^{(-)}_{\beta\alpha}(0) =$$

$$= -ie\ \mathrm{Tr}(\gamma_\mu\ S^{(-)}(0)\ . \tag{8.2}$$

Agora:

$$S^{(-)}(x) = (i\nabla\!\!\!/ + m)\ \Delta^{(-)}(x) =$$

$$= -(i\nabla\!\!\!/ + m)\ \frac{(+i)}{(2\pi)^3}\int d^4k\ e^{-ikx}\ \delta(k^2-m^2)\ \frac{1-\epsilon(k)}{2}$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k(k\!\!\!/ + m)e^{-ikx}\delta(k^2-m^2)\ \frac{1-\epsilon(k)}{2}\ . \tag{8.3}$$

$$\text{Traço }(\gamma_\mu S^{(-)}(0)) = -\frac{4i}{(2\pi)^3}\int d^4k\ k_\mu\ \delta(k^2-m^2)\ \frac{1-\epsilon(k)}{2}$$

$$= -\frac{4i}{(2\pi)^2}\int d^3k\int dk_o\ k_\mu\ \frac{1}{2|k_o|}\ \delta(k_o+\omega_k)\ .$$

$$\text{Traço }(\gamma_o\ S^{(-)}(0)) = \frac{4i}{2(2\pi)^3}\int d^3k = \infty\ .$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma_1\ S^{(-)}(0)) = -\frac{4i}{(2\pi)^3}\int k_1\ dk^3\int dk_o\ \frac{1}{2|k_o|}\ \delta(k_o+\omega k) = 0$$

Heisenberg propôs definir a corrente assim:

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}\left[\overline{\psi}\ \gamma_\mu\psi - \psi(\overline{\psi}\ \ \gamma_\mu)\right]$$

$$= \frac{e}{2}\left[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu, \psi(x)\right]$$

$$= \frac{e}{2}\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi - \psi\,\gamma_\mu^T\,\bar{\psi}\right). \tag{8.4}$$

Nêste caso:

$$\langle j_\mu(x)\rangle_o = 0 . \tag{8.5}$$

Pois:

$$\langle j_\mu(x)\rangle_o = \frac{e}{2}\left\langle\left(\bar{\psi}_\alpha(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\;\psi_\beta - \psi_\beta\;(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\;\bar{\psi}_\alpha\right)\right\rangle_o =$$

$$= \frac{e}{2}\;(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left\langle\left[\bar{\psi}_\alpha(x),\;\psi_\beta(x)\right]\right\rangle_o =$$

$$= \frac{e}{2}\;(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\;S^{(1)}_{\beta\alpha}(0) = \frac{e}{2}\;\mathrm{Tr}(\gamma_\mu S^{(1)}(0)) .$$

Agora:

$$S^{(1)}(x) = -\,(i\,\not\partial + m)\,\Delta^{(1)}(x) =$$

$$= -\,(i\,\not\partial + m)\;\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\;e^{-ikx}\;\delta(k^2-m^2)$$

$$= -\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\;e^{-ikx}(\not k + m)\;\delta(k^2-m^2) ,$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu S^{(1)}(0)) = -\,\frac{4}{(2\pi)^3}\int d^4k\;k_\mu\delta(k^2-m^2) ,$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma_i\;S^{(1)}(0)) = -\,\frac{4}{(2\pi)^3}\int k_i d^3k\int dk_o\;\frac{1}{2|k_o|}\left[\delta(k_o+\omega_k) + \right.$$

$$\left. + \;\delta(k_o-\omega_k)\right] = 0 ,$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma_o\ S^{(1)}(0)) = -\frac{4}{(2\pi)^3}\int d^3k \int dk_o\ \frac{k_o}{2|k_o|}\left[\delta(k_o+\omega_k)+\delta(k_o-\omega_k)\right] = 0.$$

Outra expressão do j_μ assim definido é:

$$j_\mu(x) = e\ N(\bar{\psi}\,\gamma_\mu\psi) = e(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\ N(\bar{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x)) \quad (8.6)$$

ou seja, como um produto normal.

Pois:

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}\,(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left[\bar{\psi}_\alpha\,\psi_\beta - \psi_\beta\,\bar{\psi}_\alpha\right] =$$

$$= \frac{e}{2}\,(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left[(\bar{u}_\alpha+v_\alpha)\,(u_\beta+\bar{v}_\beta) - (u_\beta+\bar{v}_\beta)(\bar{u}_\alpha+v_\alpha)\right] =$$

$$= \frac{e}{2}\,(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left[\bar{u}_\alpha u_\beta + \bar{u}_\alpha\bar{v}_\beta + v_\alpha u_\beta + v_\alpha\bar{v}_\beta - u_\beta\bar{u}_\alpha - u_\beta v_\alpha - \bar{v}_\beta\,\bar{u}_\alpha - \bar{v}_\beta\,v_\alpha\right].$$

Mas:

$$\bar{u}_\alpha\,\bar{v}_\beta = -\bar{v}_\beta\,\bar{u}_\alpha\ ;\quad v_\alpha\,u_\beta = -u_\beta v_\alpha\ ;$$

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\ \left\{\bar{u}_\alpha u_\beta + u_\beta\bar{u}_\alpha\right\} = -i\ \mathrm{Tr}(\gamma_\mu\,S^{(+)}(0)) =$$

$$= \frac{4}{(2\pi)^3}\int d^4k\ k_\mu\ \delta(k^2-m^2)\ \frac{1+\epsilon(k)}{2}\ ;$$

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left\{\bar{v}_\beta\,\bar{v}_\alpha + v_\alpha v_\beta\right\} = -i\ \mathrm{Tr}(\gamma_\mu\,S^{(-)}(0)) = -\frac{4}{(2\pi)^3}\int d^4k\ k_\mu\,\delta(k^2-m^2)\ \frac{1-\epsilon(k)}{2}.$$

Logo:

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left\{\bar{u}_\alpha u_\beta + u_\beta\bar{u}_\alpha\right\} = (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left\{v_\alpha\bar{v}_\beta + \bar{v}_\beta v_\alpha\right\}$$

ou

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\ (\bar{u}_\alpha u_\beta - \bar{v}_\beta v_\alpha) = (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(v_\alpha\bar{v}_\beta - u_\beta\bar{u}_\alpha)$$

e, portanto:

$$j_\mu(x) = e\, N\,(\bar{\psi}\,\gamma_\mu\,\psi)$$

Outro produto é o chamado produto-T que ordena cronològicamente os fatores levando em conta o sinal das permutações dos ψ:

$$T(\psi_1\psi_2\ldots) = \delta_P\ \psi_{i_1}\,\psi_{i_2}\ \ldots \qquad (8.7)$$

Assim:

$$T(\psi_1\psi_2\ldots) = \delta_P\ P(\psi_1\psi_2\ldots)\ . \qquad (8.8)$$

Expressando o produto cronológico em têrmos de uma soma de produtos normais, temos:

$$T\,(\bar{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')) - N(\bar{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')) = \frac{1}{2}\,S^F_{\beta\alpha}(x'-x)\ , \qquad (8.9)$$

$$T(\psi_\beta(x')\,\bar{\psi}_\alpha(x)) - N(\psi_\beta(x')\,\bar{\psi}_\alpha(x)) = -\frac{1}{2}\,S^F_{\beta\alpha}(x'-x)\ , \qquad (8.10)$$

$$T(\psi_\beta(x')\,\psi_\alpha(x)) - N(\psi_\beta(x')\,\psi_\alpha(x)) = 0\ , \qquad (8.11)$$

$$T(\bar{\psi}_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(x')) - N(\bar{\psi}_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(x')) = 0\ . \qquad (8.12)$$

Daí:

$$\langle 0|T(\bar{\psi}_\alpha(x)\,\psi_\beta(x')|0\rangle = \frac{1}{2}\,S^F_{\beta\alpha}(x'-x)\ , \qquad (8.13)$$

$$\langle 0|T(\psi_\beta(x')\,\bar{\psi}_\alpha(x)|0\rangle = -\frac{1}{2}\,S^F_{\beta\alpha}(x'-x)\ , \qquad (8.14)$$

$$\langle 0|T(\psi_\beta(x')\,\psi_\alpha(x))|0\rangle = 0\ , \qquad (8.15)$$

$$\langle 0|T(\bar{\psi}_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(x'))|0\rangle = 0\ . \qquad (8.16)$$

9. Conjugação na carga e lagrangeana

Vimos a lagrangeana do campo eletromagnético e do campo de electrons e pósitrons em interação.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{A^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\bar{\psi}\left[i\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ieA\mu\right) - m\right]\psi$$

$$-\frac{1}{2}\bar{\psi}\left[i\gamma^\mu\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} - ieA_\mu\right) + m\right]\psi\ . \tag{I.6.19}$$

onde

$$\bar{\psi}\ \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu}\ .$$

As equações daí resultantes são:

$$\Box A_\mu = j_\mu\ ,\qquad j_\mu = e\,\bar{\psi}\,\gamma_\mu\psi,$$

$$i\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA^\mu\right)\psi = m\,\psi, \tag{I.6.20}$$

$$\bar{\psi}\ \left[i\gamma^\mu\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} - ieA_\mu\right) + m\right] = 0\ .$$

A parte que contem ψ e $\bar{\psi}$, como já vimos, difere de outra mais simples por uma divergência, isto é,

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \bar{\psi}\ \left[i\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ieA_\mu\right) - m\right]\psi$$

e

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}' = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\ (i\bar{\psi}\,\gamma_\mu\,\psi)\ .$$

$\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ dão as mesmas equações de movimento. Em particular, dão a corrente $j_\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$. Mas, para eliminar a divergência do valor esperado de j_μ no vácuo vimos que devemos adotar a definição:

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}\left[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu,\ \psi(x)\right]. \tag{8.4}$$

Uma lagrangeana que conduz a esta corrente é a que se obtem substituindo

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial\mu^\mu} + ieA_\mu\right) - m\right)\ \psi$$

pelo comutador:

$$\frac{1}{2}\left[\overline{\psi}(x),\left(i\gamma^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+ieA_{\mu}\right)-m\right)\psi(x)\right]. \qquad (9.1)$$

Somos levados a este comutador pelo seguinte argumento. Chame Ω o operador $i\gamma^{\mu}\ \dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}} + ieA_{\mu} - m$. Então:

$$\overline{\psi}\,\Omega\,\psi = \frac{1}{2}\left[\overline{\psi},\Omega\,\psi\right]+\frac{1}{2}\left\{\overline{\psi},\Omega\,\psi\right\}.$$

Mas:

$$\begin{aligned}\left\{\overline{\psi}(x),\Omega\psi(x)\right\} &= \overline{\psi}(x)\Omega\psi(x)+\Omega\psi(x)\,\overline{\psi}(x)\\ &= \lim_{x'\to x}\Omega'_{\alpha\beta}\left\{\overline{\psi}_{\alpha}(x),\ \psi_{\beta}(x')\right\} = \qquad (9.2)\\ &= -i\lim_{x'\to x}\Omega_{\alpha\beta}\ S_{\beta\alpha}(x'-x)\ .\end{aligned}$$

é singular. Portanto, põe-se de lado o anticomutador que dá lugar a uma constante infinita. Pode-se, pois, adotar a lagrangeana:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}}+\frac{1}{2}\left[\overline{\psi}(x),\left(i\gamma_{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+ieA_{\mu}\right)-m\right)\psi(x)\right].$$

Contudo é conveniente escolher ainda uma outra forma. Vimos que, para um campo espinorial livre, a hamiltoniana e a carga totais eram:

$$H=\sum_{r=1,2}\int d^{3}p\left(N_{r}^{(+)}(p)+N_{r}^{(-)}(p)\right)E_{p}\ ,$$

$$Q=\sum_{r=1,2}e\int d^{3}p\left(N_{r}^{(+)}(p)-N_{r}^{(-)}(p)\right)\ ,$$

onde

$$N_{r}^{(+)}(p)=b_{r}^{+}(p)\,b_{r}(p)\quad e\quad N_{r}^{(-)}(p)=d_{r}^{+}(p)\,d_{r}(p)\ .$$

H e Q são invariantes quande se faz a substituição:

$$N^{(+)} \rightleftarrows N^{(-)} ,$$

$$e \longrightarrow -e ,$$

a teoria é simétrica em relação a electrons e pósitrons (a carga Q muda de sinal se se deixar e invariante). Ora trocar electrons com pósitrons significa trocar operadores de aniquilação de electrons pelos de pósitrons, logo, no espaço dos x, isto quer dizer trocar $\psi(x)$ com $\overline{\psi}(x)$:

$$u(x) \longrightarrow v(x) ,$$

logo, sendo:

$$\psi(x) = u(x) + \overline{v}(x) ,$$

$$\overline{\psi}(x) = \overline{u}(x) + v(x) , \qquad (9.3)$$

$$\psi(x) \longrightarrow \overline{\psi}(x) . \qquad (9.4)$$

Esta troca não é, em geral, suficiente. Em geral devemos fazer a operação de conjugação da carga:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = C\,\overline{\psi}(x) , \qquad (9.5a)$$

isto é:

$$\psi_\alpha(x) \longrightarrow \psi'_\alpha(x) = C_{\alpha\beta}\,\overline{\psi}_\beta(x) ,$$

em que C é tal que:

$$C^{-1}\gamma_\mu\, C = -\gamma_\mu^T . \qquad (9.6)$$

Dêste modo, a equação

$$\left\{ i\,\gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu \right) - m \right\} \psi'(x) = 0$$

dá:

$$\left\{ i\,\gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right) - m \right\} \psi'(x) = \left\{ i\gamma^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu \right) - m \right\} C\,\overline{\psi}^T(x) =$$

$$= \left\{ i\, C\, C^{-1} \gamma^{\mu} C \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - ieA_{\mu} \right) - mC \right\} \overline{\psi}^{\,T}(x) = \qquad (9.7)$$

$$= -C \left\{ i\gamma^{\mu T} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - ieA_{\mu} \right) + m \right\} \overline{\psi}^{T}(x) = -C \left\{ \overline{\psi}(x) \left(i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - ieA_{\mu} \right) + m \right\}^{T} = 0,$$

que é a equação para $\overline{\psi}(x)$.

Assim a lagrangeana:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2} \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{1}{4} \left[\overline{\psi}(x), \left(i\gamma^{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + ieA_{\mu} \right) - m \right) \psi(x) \right] +$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\overline{\psi}'(x), \left(i\gamma^{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - ieA_{\mu} \right) - m \right) \psi'(x) \right] \qquad (9.8)$$

dá as equações de movimento desejadas e é manifestamente simétrica em relação à troca de electrons com pósitrons:

$$\begin{aligned} e &\longrightarrow -e \\ \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) \\ \overline{\psi}(x) &\longrightarrow \overline{\psi}'(x) \end{aligned} \qquad (9.5b)$$

Aqui:

$$\overline{\psi}'_{\alpha}(x) = \psi^{*}_{\beta}(x)\, \gamma_{4_{\beta\alpha}} = C^{*}_{\beta\lambda} (\gamma_4)_{\lambda\nu}\, \psi_{\nu} (\gamma_4)_{\beta\alpha} =$$

$$= -C^{-1}_{\beta\lambda} (\gamma_4)_{\lambda\nu} \psi_{\nu} (\gamma_4)_{\beta\alpha} \qquad \text{porque } C^{+} = C^{-1},\ C = -C^{T}$$

$$= -(C^{-1} \gamma_4 \psi)_{\beta} (\gamma_4)_{\beta\alpha} = (C^{-1} \gamma_4\, C\, C^{-1} \psi)_{\beta} (\gamma_4)_{\beta\alpha} \qquad (9.9)$$

$$= -(C^{-1} \gamma_4 C)_{\beta\epsilon} (C^{-1}\psi)_{\epsilon} (\gamma_4)_{\beta\alpha} = (\gamma_4)_{\epsilon\beta} (\gamma_4)_{\beta\alpha} (C^{-1} \psi)_{\epsilon} =$$

$$= (C^{-1}\psi)_{\alpha} = (C^{-1})_{\alpha\beta}\ \psi_{\beta},$$

$$\overline{\psi}'(x) = C^{-1}\,\psi(x) \,, \tag{9.10}$$

ou, como

$$C = -C^T \,,$$

$$\overline{\psi}'\,(x) = -\,\psi(x)\,C^{-1}\,. \tag{9.11}$$

Assim:

$$\frac{1}{4}\left[\overline{\psi}'(x),\left(i\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu\right) - m\right)\psi'(x)\right] \equiv$$

$$\frac{1}{4}\left[\psi(x),\left(i\gamma^{\mu\,T}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu\right) + m\right)\overline{\psi}(x)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\left(i\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu\right)\overline{\psi}\gamma^\mu + m\overline{\psi}\right),\psi(x)\right].$$

Com a nova lagrangeana, j_μ fica o mesmo, pois, por (9.5a,b):

$$\left[\overline{\psi}'(x),\,\gamma^\mu\,\psi'(x)\right] = -\left[\psi(x),\,C^{-1}\gamma^\mu\,C\,\overline{\psi}(x)\right] =$$

$$= +\left[\psi(x),\gamma^{\mu\,T}\,\overline{\psi}(x)\right] = -\left[\overline{\psi}(x),\,\gamma^\mu\,\psi(x)\right]$$

e como da lagrangeana resulta:

$$j_\mu(x) = \frac{e}{4}\left(\left[\overline{\psi}(x),\gamma^\mu\psi(x)\right] - \left[\overline{\psi}'(x),\gamma^\mu\psi'(x)\right]\right),$$

logo:

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}\left[\overline{\psi}(x),\gamma^\mu\psi(x)\right]. \tag{8.4}$$

O vácuo é invariante em relação à conjugação da carga

$$u(x)|\rangle_0 = 0 \,,$$
$$v(x)|\rangle_0 = 0 \,, \qquad (9.12)$$

pois:

$$u'(x) = c\,v(x) \,, \qquad \bar{v}'(x) = c\,\bar{u}(x) \,,$$
$$v'(x) = c^{-1}\,u(x) \,, \quad \bar{u}'(x) = c^{-1}\,\bar{v}(x) \,,$$

como resulta de:

$$\psi'(x) = u'(x) + \bar{v}'(x) = c\,\bar{\psi}(x) = c\bar{u}(x) + cv(x) \,,$$
$$\bar{\psi}'(x) = \bar{u}'(x) + v'(x) = c^{-1}\psi(x) = c^{-1}u(x) + c^{-1}\bar{v}(x) \,,$$

logo:

$$u(x)|\rangle_0 = 0 \longrightarrow u'(x)|\rangle_0 = c\,v(x)|\rangle_0 = 0 \,,$$
$$v(x)|\rangle_0 = 0 \longrightarrow v'(x)|\rangle_0 = c^{-1}\,u(x)|\rangle_0 = 0$$

As regras de anticomutação são também invariantes em relação à conjugação da carga. Temos:

$$\left\{u_\alpha(x),\, \bar{u}_\beta(x')\right\} = -i\,S^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x') \,,$$
$$\left\{\bar{v}_\alpha(x),\, v_\beta(x')\right\} = -i\,S^{(-)}_{\alpha\beta}(x-x') \,.$$

Então:

$$\left\{u'_\alpha(x),\, \bar{u}'_\beta(x')\right\} = \left\{(c\,v(x))_\alpha \,,\, (c^{-1}\bar{v}(x')_\beta\right\} =$$
$$= -\left\{(cv(x))_\alpha \,,\, (\bar{v}(x')c^{-1})_\beta\right\} =$$
$$= -c_{\alpha\lambda}\left\{v_\lambda(x),\, \bar{v}_\delta(x')\right\} c^{-1}_{\delta\beta} = \qquad (9.13)$$
$$= i\,c_{\alpha\lambda}\,S^{(-)}_{\delta\lambda}(x'-x)\,c^{-1}_{\delta\beta} = -i\,c_{\alpha\lambda}\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu} + m\right)_{\delta\lambda} c^{-1}_{\delta\beta}\,\Delta^{(-)}(x'-x)$$
$$= -i\left(i\,c\,\gamma^T_\mu\,c^{-1}\frac{\partial}{\partial x'_\mu} + m\right)_{\alpha\beta}\Delta^{(-)}(x'-x) = -i\left(-i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu} + m\right)_{\alpha\beta}\Delta^{(-)}(x'-x)$$

$$= i\left(-i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}+m\right)_{\alpha\beta}\Delta^{(+)}(x-x') = i\left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}+m\right)_{\alpha\beta}\Delta^{(+)}(x-x') =$$

$$= -iS^{(+)}_{\alpha\beta}(x-x') .$$

Aliás, vimos que:

$$\left[\bar{\psi}'(x),\ \gamma_{\mu}\,\psi'(x)\right] = -\left[\bar{\psi}(x),\gamma_{\mu}\,\psi(x)\right],$$

logo

$$\left\langle\left[\bar{\psi}'(x),\ \gamma_{\mu}\,\psi'(x)\right]\right\rangle_{0} = -\left\langle\left[\bar{\psi}(x),\gamma_{\mu}\,\psi(x)\right]\right\rangle_{0} .$$

Mas como o vácuo é invariante, devemos ter:

$$\left\langle\left[\bar{\psi}'(x),\gamma_{\mu}\psi'(x)\right]\right\rangle_{0} = \left\langle\left[\bar{\psi}(x),\gamma_{\mu}\,\psi(x)\right]\right\rangle_{0} , \tag{9.14}$$

logo:

$$\left\langle\left[\bar{\psi}'(x),\gamma^{\mu}\,\psi'(x)\right]\right\rangle_{0} = \left\langle\left[\bar{\psi}(x),\gamma^{\mu}\psi(x)\right]\right\rangle_{0} = 0$$

e

$$\left\langle j_{\mu}(x)\right\rangle_{0} = 0 . \tag{9.15}$$

Até agora tratamos da conjugação na carga considerando a transformação de ψ e de $\bar{\psi}$ e fazendo $e \longrightarrow -e$ e deixando inalterado $A_{\mu}(x)$.

A transformação rigorosa é:

$$e \longrightarrow e \qquad \text{(pois é uma constante)}$$

$$\psi \longrightarrow \psi'$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}'$$

$$A_{\mu} \longrightarrow A'_{\mu} .$$

Como por essa transformação:

$$j_\mu(x) = \frac{e}{4}\left(\left[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)\right] - \left[\bar{\psi}'(x), \gamma_\mu \psi'(x)\right] \rightarrow\right.$$

$$\rightarrow j'_\mu(x) = - j_\mu(x) \qquad (9.16)$$

e como a interação é $j_\mu(x)\, A_\mu(x)$, vemos que a lagrangeana será invariante se

$$A'_\mu(x) = - A_\mu(x) .$$

Assim a transformação de conjugação de carga é definida por:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = u_c\, \psi(x)\, u_c^{-1} = \eta_c\, c\, \bar{\psi}(x) ,$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = u_c\, \bar{\psi}(x)\, u_c^{-1} = \eta_c^*\, c^{-1} \psi(x) , \qquad (9.5c)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = u_c\, A_\mu(x)\, u_c^{-1} = - A_\mu(x) .$$

Aplicando a operação novamente:

$$u_c\, \psi'(x)\, u_c^{-1} = \psi(x) = u_c\left(u_c\, \psi(x) u_c^{-1}\right) u_c^{-1} =$$

$$= \eta_c\, c\, u_c \bar{\psi}(x)\, u_c^{-1} = \eta_c\, \eta_c^*\, c\, c^{-1}\, \psi(x) ,$$

logo deve ser:

$$\eta_c\, \eta_c^* = 1 . \qquad (9.5c)$$

η_c é um fator de fase.

É claro que o funcional de estado se transforma segundo a regra:

$$| \rangle' = \mathcal{U}_c | \rangle .$$

Podemos escrever $\mathcal{U}_c$ como o produto de dois operadores, um, $\mathcal{U}_\gamma$, atua sôbre as variáveis do campo eletromagnético, o outro, $\mathcal{U}_e$, sôbre as do campo espinorial:

$$\mathcal{U}_c = \mathcal{U}_\gamma \, \mathcal{U}_e \, . \tag{9.17}$$

De:

$$\mathcal{U}_\gamma A_\mu(x) \, \mathcal{U}_\gamma^{-1} = - A_\mu(x)$$

resulta:

$$\mathcal{U}_\gamma \, A_\mu(x) = - A_\mu(x) \, \mathcal{U}_\gamma . \tag{9.18}$$

Logo, no espaço dos momentos:

$$\mathcal{U}_\gamma \, A_\mu(k) = - A_\mu(k) \, \mathcal{U}_\gamma \tag{9.19}$$

e supondo $\mathcal{U}_\gamma$ diagonal na representação em que o número de fotons é diagonal, vem:

$$(n|\mathcal{U}_\gamma|n)(n|A\ (k)|n+1) = -(n|A\ (k)|n+1)(n+1|\mathcal{U}_\gamma|n+1)$$

i.e.,

$$(\mathcal{U}_\gamma)_n = - (\mathcal{U}_\gamma)_{n+1} \, , \tag{9.20a}$$

o que nos permite escrever:

$$(\mathcal{U}_\gamma)_n = (-1)^n \, , \tag{9.20b}$$

n é o número de fotons no campo.

Quanto a $\mathcal{U}_e$, temos:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{E_p}} \sum_{r=1,2} \left\{ b_r(p)\, \omega^r(p)\, e^{-ipx} + d_r^+(p) v^r e^{ipx} \right\},$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{E_p}} \sum_{r=1,2} \left\{ b_r^+(p)\, \bar{\omega}^r(p)\, e^{ipx} + d_r(p)\, \bar{v}^r(p)\, e^{-ipx} \right\} .$$

Temos:

$$\mathcal{U}_e \, \psi(x) \, \mathcal{U}_e^{-1} = c \, \bar{\psi}(x) \cdot \eta_c$$

logo:

$$\mathcal{U}_e \, b_r(p) \, \mathcal{U}_e^{-1} = \eta_c \, dr(p) \tag{9.21}$$

e

$$\mathcal{U}_e \, d_r^+(p) \, \mathcal{U}_e^{-1} = \eta_c' \, b_r^+(p)$$

desde que:

$$\omega^r(p) = c \, \bar{v}^r(p), \qquad v^r(p) = c \, \bar{\omega}^r(p) \tag{9.22}$$

Mas:

$$(\not p - m) \, \omega^r(p) = 0 \qquad r = 1, 2 \tag{9.23}$$

$$(\not p + m) \, \omega^r(p) = 0 \quad r = 1, 2, \quad v^r = \omega^{r+2} \tag{9.24}$$

e:

$$\bar{\omega}^r(p)(\not p - m) = 0 \tag{9.25}$$

$$\bar{v}^r(p)(\not p + m) = 0 \tag{9.26}$$

Agora se: $\omega^r = c \, \bar{v}^r(p)$ temos:

$$c^{-1}(\not p - m)\omega^r = c^{-1}(\not p - m) \, c \, \bar{v}^r = (c^{-1}\gamma^\mu c \, p_\mu - m) \, \bar{v}^r$$

$$= (-\gamma^{\mu T} p_\mu - m) \, \bar{v}^r = -\bar{v}^r(\not p + m) = 0$$

e também de $v^r = c \, \bar{\omega}^r$ tiramos:

$$c^{-1}(\not p + m)v^r = c^{-1}(\not p + m) \, c \, \bar{\omega}^r = (c^{-1}\gamma^\mu c \, p_\mu + m)\bar{\omega}^r =$$

$$= (-\gamma^{\mu T} p_\mu + m)\bar{\omega}^r = -\bar{\omega}^r(\not p - m) = 0$$

o que mostra que as relações são verdadeiras.

Aliás de

$$\omega = c \, \bar{v}$$

resulta:

$$\bar{\omega} = c^+ v = c^{-1} v \tag{9.27}$$

$$v = c \, \bar{\omega}$$

Portanto a lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\ \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{1}{4}\left[\overline{\psi}(x),\ \left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right)\ \psi(x)\right] +$$

$$+ \frac{1}{4}\left[\overline{\psi}'(x),\ \left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right)\ \psi'(x)\right] - j^{\mu} A_{\mu}, \qquad (9.28)$$

$$j_{\mu} = \frac{e}{4}\left(\left[\overline{\psi}(x),\ \gamma_{\mu}\psi(x)\right] - \left[\overline{\psi}'(x),\ \gamma_{\mu}\ \psi'(x)\right]\right). \qquad (8.4)$$

é invariante em relação à conjugação na carga:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = u_c\ \psi(x)\ u_c^{-1} = \eta_c\ c\ \overline{\psi}(x)\ ,$$

$$\overline{\psi}(x) \longrightarrow \overline{\psi}'(x) = u_c\ \overline{\psi}(x)\ u_c^{-1} = \eta_c^{*}\ c^{-1}\psi(x),$$

$$A_{\mu}(x) \longrightarrow A'_{\mu}(x) = u_c\ A_{\mu}\ u_c^{-1} = -\ A_{\mu}(x). \qquad (9.5c)$$

Isto quer dizer que:

$$\left[\mathcal{L},\ u_c\right] = 0, \qquad \text{pois} \quad \mathcal{L} = u_c\,\mathcal{L}\ u_c^{-1}\ , \qquad (9.29)$$

o operador $\mathcal{U}_c$ é "bom" (constante de movimento). Por outro lado, a carga total Q também é um operador "bom":

$$\left[\mathcal{L},\ Q\right] = 0\ . \qquad (9.30)$$

Mas

$$\left[u_c,\ Q\right] \neq 0\ , \qquad (9.31)$$

pois

$$u_c\ Q\ u_c^{-1} = -\ Q\ , \qquad (9.32)$$

$$\left\{u_c,\ Q\right\}_{+} = 0\ . \qquad (9.33)$$

Portanto, em geral, não podemos ter um funcional de estado que seja auto-estado de u_c e de Q.

Se, porém, tivermos:

$$Q|\rangle = 0$$

então:

$$\langle [\mathcal{U}_c, Q] \rangle = 0$$

e $|\rangle$ pode ser auto-estado de $\mathcal{U}_c$ e Q.

Como os autovalores de $\mathcal{U}_c$ são ± 1 (pois $u_c^2 = 1$), um estado neutro tem um destes dois valores (paridade da carga).

Assim um sistema de um número par (impar) de fotons tem paridade de carga par (impar).

Um sistema neutro, auto-estado da paridade de carga, só pode decair em um número par ou em um número impar de fótons.

De $\pi_o \longrightarrow 2\gamma$ resulta que π_o tem paridade de carga par.

Para o positrônio, considerando a carga do electron e do pósitron como uma variável interna de duas partículas idênticas, o princípio de Pauli exige que o sistema seja antissimétrico em relação à troca das duas partículas.

A troca significa troca das posições, que dá o fator $(-1)^{l}$ onde l é o momento angular orbital, troca dos spins que dá o fator $(-1)^{s+1}$ onde s é o spin total e troca das cargas, que dá o fator u_c:

$$(-1)^{l}\,(-1)^{s+1}\,\mathcal{U}_c = -1 \longrightarrow \mathcal{U}_c = (-1)^{\ell+s} \,.$$

Mas se o positrônio decae em n fotons $\mathcal{U}_c = (-1)^{n}$, logo

$$(-1)^{n} = (-1)^{\ell+s} \,.$$

O estado ^3S decae em número impar de fotons, ^1S em número par.

$$^3S \longrightarrow 3\gamma$$
$$^1S \longrightarrow 2\gamma$$

Um sistema neutro pode não ter paridade de carga definida. Assim se Φ_H fôr a função de onda do átomo de hidrogênio:

$$\mathcal{U}_c \, \Phi_H = \Phi_H$$

a transformada Φ_H' é a do átomo de anti-hidrogênio (antiproton e antieléctron).

* * *

III - TEORIA DOS CAMPOS EM INTERAÇÂO

1. Representação da interação e teoria das perturbações.

Na representação de Schrodinger, o sistema é representado por operadores independentes do tempo e por um funcional de estado, dependente do tempo, que satisfaz à equação:

$$H\psi = i\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\,. \tag{1.1}$$

Aqui:

$$H = H_o + V\,, \tag{1.2}$$

$H_o = H_e + H_\gamma$ é a soma das hamiltonianas do campo espinorial e do campo de radiação, livres. Como a parte da interação da Lagrangeana não contem derivadas no tempo das variáveis do campo, V se obtem trocando o sinal da lagrangeana de interação e integrando:

$$V = \int j_\mu(x)\, A_\mu(x)\, d^3x\,. \tag{1.3}$$

Consideremos as autofunções $\varphi_n(t)$ de H_o:

$$H_o\, \varphi_n(t) = E_n\, \varphi_n(t) = i\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}\,, \tag{1.4a}$$

$$\varphi_n(t) = \varphi_n(0)\, e^{-iE_nt}\,, \tag{1.4b}$$

$$(\varphi_n(0),\, \varphi_{n'}(0)) = \delta_{nn'}\,. \tag{1.4c}$$

Por exemplo, na representação dos números de ocupação:

$$\varphi_n(0) = \prod_{e,\gamma} \delta_{N_e N_e^o}\, \delta_{N_\gamma N_\gamma^o}$$

Vamos desenvolver a função $\Psi(t)$ do problema, em série destas autofunções:

$$\psi(t) = \sum_n \varphi_n(t)\, \Phi_n(t) \tag{1.5}$$

onde os coeficientes $\Phi_n(t)$ dependem do tempo. Se no instante t_o, o sistema é caracterizado por uma distribuição de fotons e electrons, no instante t a probabilidade de que esta distribuição tenha mudado por efeito da interação e se torne caracterizada por n, é $|\Phi_n(t)|^2$.

Substituo na equação de Schrodinger, êste desenvolvimento:

$$\sum_n \left\{ i \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \Phi_n + i\, \varphi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \right\} = \sum_n \Phi_n(t)\, H_o\, \varphi_n +$$

$$+ \sum_n \Phi_n\, V\, \varphi_n\ , \tag{1.6}$$

logo:

$$i \frac{\partial \Phi_n(t)}{\partial t} = \sum_{n'} (n|V|n')\, \Phi_{n'}(t), \tag{1.7a}$$

onde:

$$(n|V|n') = (\varphi_n,\ V\, \varphi_{n'}) = (\varphi_n(0),\ V\, \varphi_{n'}(0))\, e^{-i(E_{n'}-E_n)t} . \tag{1.7b}$$

Observe que V está na representação de Schrödinger mas $(n|V|n')$ está na representação da interação. A equação acima pode ser escrita:

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = V_I\, \Phi(t)\ , \tag{1.7a}$$

onde V_I é dado pela última relação.

Podemos escrever:

$$\Phi(t) = S(t, t_o)\, \Phi(t_o)\ , \tag{1.8}$$

onde o operador $S(t, t_o)$ satisfaz à condição:

$$S(t_o, t_o) = 1 \tag{1.9a}$$

e à equação

$$i \frac{\partial S(t,t_o)}{\partial t} = V S(t, t_o) . \tag{1.9b}$$

Desenvolvendo $S(t, t_o)$ em série de potências de **e**:

$$S(t, t_o) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t, t_o) \tag{1.10}$$

vem:

$$i \frac{\partial S_k(t, t_o)}{\partial t} = V(t)\, S_{k-1}(t, t_o) ,$$

daí:

$$S_k(t, t_o) = - i \int_{t_o}^{t} V(t')\, S_{k-1}(t', t_o) dt' , \tag{1.11}$$

$$S_o(t, t_o) = 1 . \tag{1.12}$$

Portanto:

$$S_1(t, t_o) = - i \int_{t_o}^{t} V(t') dt' \tag{1.13}$$

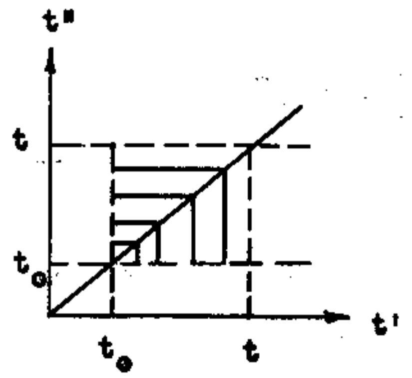
$$S_2(t, t_o) = - i \int_{t_o}^{t} dt'\, V(t')(-i) \int_{t_o}^{t'} V(t'') dt'' \tag{1.14a}$$

$$S_k(t, t_o) = (-i)^k \int_{t_o}^{t} dt' \int_{t_o}^{t'} dt'' \ldots \int_{t_o}^{t^{(k-1)}} dt^{(k)} V(t') V(t'') \ldots V(t^{(k)}) \tag{1.15}$$

Esta integral pode ser escrita sob outra forma:

Considere $k = 2$:

$$S_2(t, t_o) = (-i)^2 \int_{t_o}^{t} dt' \int_{t_o}^{t'} dt'' V(t') V(t'') \tag{1.14a}$$



A região de integração aí (no plano t', t") é o triângulo abaixo da bissetriz do ângulo dos eixos. Mas em (t' ⟶ t"):

$$S_2(t,t_o) = (-i)^2 \int_{t_o}^{t} dt'' \int_{t_o}^{t''} dt' \; V(t'')V(t') \qquad (1.14b)$$

a região de integração é o triângulo acima da bissetriz.

Mas a segunda expressão para S_2 difere da primeira na ordem do produto V(t') V(t"). Se os dois fatores comutam, ambas as expressões são iguais e S_2 pode ser escrito como a semi-soma das duas, isto é, como a semi-integral tomada sôbre o quadrado.

Em geral introduzo o produto cronológico, já visto anteriormente:

$$P(V(t')\,V(t'')) = \begin{cases} V(t')\,V(t'') & \text{se} \quad t' > t'' \\ V(t'')\,V(t') & \text{se} \quad t'' > t' \end{cases} \qquad (1.16)$$

então (1.14) escreve-se:

$$S_2(t,\, t_o) = \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_o}^{t} dt' \int_{t_o}^{t} dt'' \; P(V(t')\,V(t'')) \qquad (1.17)$$

Em geral:

$$S_k(t,\, t_o) = \frac{(-i)^k}{k} \int_{t_o}^{t} dt' \int_{t_o}^{t} dt'' \ldots \int_{t_o}^{t} dt^{(k)} \; P(V(t')V(t'')\ldots V(t^{(k)})) \qquad (1.18)$$

(1.10) com (1.18) constituem a solução de (1.9b).

A representação da interação também pode ser obtida assim:

$$\Psi(t) = e^{-iH_o t}\,\Phi(t) \quad \text{ou} \quad \Phi(t) = e^{iH_o t}\,\Psi(t)$$

que dá:

$$i\,\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(-H_o + H_o + e^{iH_o t}\,V e^{-iH_o t}\right)\Phi(t) = V_I\Phi(t)$$

onde V_I é a interação na representação da interação

$$V_I = e^{iH_o t}\;V e^{-iH_o t} = V(\Psi_I,\, A_{\mu I})$$

Os campos nesta representação satisfazem as equações de campos livre. Em geral para um operador Ω da representação de Schrodinger, se tem:

$$\Omega_I = e^{iH_o t}\,\Omega\, e^{-iH_o t}$$

e:

$$i\,\frac{\partial \Omega_I}{\partial t} = \left[\Omega_I,\, H_o\right] .$$

2. Teoria das perturbações na representação de Heisenberg

As equações dos campos são:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\psi = e\,\gamma_\mu\, A^\mu \psi, \tag{2.1}$$

$$\overline{\psi}\left(i\gamma_\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} + m\right)\psi = -e\,\overline{\psi}\,\gamma_\mu\, A^\mu, \tag{2.2}$$

$$\Box A_\mu = \frac{e}{2}\left[\overline{\psi}(x),\, \gamma_\mu\, \psi(x)\right]. \tag{2.3}$$

Desenvolvemos ψ e A_μ em série de potências de e:

$$A_\mu = A_\mu^{(o)} + e\,A_\mu^{(1)} + e^2\,A_\mu^{(2)} + \,\ldots\ldots\,, \tag{2.4}$$

$$\psi = \psi^{(o)} + e\,\psi^{(1)} + e^2\,\psi^{(2)} + \,\ldots\ldots\,, \tag{2.5}$$

$$\overline{\psi} = \overline{\psi}^{(o)} + e\,\overline{\psi}^{(1)} + e^2\,\overline{\psi}^{(2)} + \,\ldots\ldots\,. \tag{2.6}$$

Substituindo nas equações, obtemos:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\psi^{(o)} = 0 \ , \tag{2.7}$$

$$\bar{\psi}^{(o)}\left(i\gamma_\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x_\mu} + m\right) = 0 \ ; \tag{2.8}$$

$$\Box A_\mu^{(o)} = 0 \ , \tag{2.9}$$

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\psi^{(1)} = \gamma_\mu \ A_\mu^{(o)} \ \psi^{(o)} \ ,$$

$$\Box A_\mu^{(1)} = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}^{(o)}(x), \gamma_\mu \psi^{(o)}(x)\right],$$

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\psi^{(2)} = \gamma_\mu\left(A_\mu^{(o)} \psi^{(1)} + A_\mu^{(1)} \psi^{(o)}\right) \ ,$$

$$\Box A_\mu^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}^{(o)}, \gamma_\mu \psi^{(1)}\right] + \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}^{(1)}, \gamma_\mu \psi^{(o)}\right] .$$

Em geral:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\psi^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} A_\mu^{(k)}(x)\,\gamma^\mu\,\psi^{(n-k)}(x) \ , \tag{2.10}$$

$$\Box A_\mu^{(n+1)}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\bar{\psi}^{(k)}(x), \gamma_\mu \psi^{(n-k)}(x)\right] \ , \tag{2.11}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$.

Estas equações expressam $\psi^{(1)}$, $A_\mu^{(1)}$, $\psi^{(2)}$, $A_\mu^{(2)}$, ... em têrmos de $\psi^{(o)}$ e $A_\mu^{(o)}$, logo devemos dar as condições quânticas satisfeitas por êstes últimos operadores. Mas êstes satisfazem às equações de campos livres logo podem satisfazer às regras de comutação para êstes:

$$\left[A_\mu^{(o)}(x), A_\nu^{(o)}(x)\right] = -\, i g_{\mu\nu}\, D(x - x') \ ,$$

$$\left\{\psi_\alpha^{(o)}(x), \psi_\beta^{(o)}(x')\right\}_+ = -\, i \ S_{\alpha\beta}(x - x') \ ,$$

$$\left\{\psi_\alpha^{(o)}(x), \psi_\beta^{(o)}(x')\right\}_+ = 0 \ ,$$

$$\left\{\bar{\psi}_\alpha^{(o)}(x), \bar{\psi}_\beta^{(o)}(x')\right\}_+ = 0 \ .$$

As equações acima são a solução formal do problema.

Uma solução particular da equação inhomogênea de Dirac que se anula para $t = -\infty$:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\chi(x) = +\xi(x) \ , \qquad (2.12)$$

$$\chi(\vec{x}, -\infty) = 0 \ , \qquad (2.13)$$

é a solução retardada:

$$\chi_\alpha(x) = \int S^R_{\alpha\beta}(x-x')\ \xi_\beta(x')\, d^4x' \ , \qquad (2.14)$$

onde $S^R(x)$ é a função de Green retardada:

$$S^R(x) = -\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\Delta^R(x) \ , \qquad (2.15)$$

que satisfaz a:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) S^R(x) = -\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\Delta^R(x) =$$
$$= (\Box + m^2)\Delta^R(x) = +\delta(x) \qquad (2.16b)$$

pois de:

$$\Delta^R(x) = -\frac{1+\epsilon(x)}{2}\ \Delta(x) = \begin{cases} -\Delta(x), & x_o > 0 \\ 0 & , x_o < 0 \end{cases} ; \qquad (2.17)$$

$$\Delta^A(x) = \frac{1-\epsilon(x)}{2}\Delta(x) = \begin{cases} 0, & x_o > 0 \\ \Delta(x), & x_o < 0 \end{cases} ; \qquad (2.18)$$

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{2}\epsilon(x)\Delta(x) \ , \qquad (2.19)$$

resulta:

$$(\Box + m^2)\,\Delta^R(x) = \delta(x)\ , \qquad (2.20)$$

$$(\Box + m^2)\,\Delta^A = \delta(x)\ , \qquad (2.21)$$

$$(\Box + m^2)\,\bar{\Delta}(x) = \delta(x)\ , \qquad (2.22)$$

$$\Delta(x) = -\,(\Delta^R(x) - \Delta^A(x))\ , \qquad (2.23)$$

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{2}\,(\Delta^R(x) + \Delta^A(x))\ . \qquad (2.24)$$

Aliás, de $\Delta_F(x) = \Delta^{(1)}(x) + i\epsilon(x)\Delta(x)$ e de $(\Box + m^2)\,\Delta^{(1)}(x) = 0$ resulta:

$$(\Box + m^2)\,\Delta_F = -\,2i\,\delta(x)\ . \qquad (2.25)$$

Já vimos

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\; e^{-ikx}\,\delta(k^2-m^2)\,\epsilon(k)\ , \qquad (\text{II}.6.18)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\; e^{-ikx}\,\delta(k^2-m^2)\ . \qquad (\text{II}.6.31)$$

Agora, de:
$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}\; mx}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0\ , \end{cases}$$

vem:
$$\frac{x_0}{|x_0|} \equiv \epsilon(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\text{sen}(\tau x_0) = \frac{1}{i\pi}\,P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau}\,e^{i\tau x_0}\ . \qquad (2.26)$$

Portanto:

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{2}\,\epsilon(x)\,\Delta(x) = \frac{1}{2\pi i}\,P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau}\,e^{i\tau x_0}\;\frac{(-i)}{(2\pi)^3}\int d^4k\; e^{-ikx}\delta(k^2-m^2)\epsilon(k) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\; e^{-ikx}\,P\int\frac{d\tau}{\tau}\,\delta((k_0+\tau)^2 - \vec{k}^2 - m^2)\,\epsilon(k_0+\tau), \qquad (2.27a)$$

onde a última igualdade é obtida substituindo-se k_o por $k_o + \tau$ para eliminar $e^{i\tau x_o}$.

Agora:

$$\int \frac{d\tau}{\tau}\, \delta\left((k_o+\tau)^2 - \vec{k}^2 - m^2\right)\epsilon(k_o+\tau) = \int \frac{du}{u-k_o}\, \delta(u^2-k^2-m^2)\epsilon(u) =$$

$$= \int \frac{du}{u-k_o} \frac{1}{2\sqrt{\vec{k}^2+m^2}} \left(\delta\left(u-\sqrt{k^2+m^2}\right) - \delta\left(u+\sqrt{k^2+m^2}\right)\right) \quad (2.28)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}-k_o} + \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2+m^2}+k_o}\right) =$$

$$= \frac{1}{\vec{k}^2+m^2-k_o^2} = \frac{1}{m^2-k^2} \,.$$

Logo:

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\, P \int \frac{d^4k}{k^2-m^2}\, e^{-ikx} \,. \qquad (2.27b)$$

De:

$$\Delta^R(x) = \bar{\Delta}(x) - \frac{1}{2}\Delta(x) \qquad (2.28)$$

$$\Delta^A(x) = \bar{\Delta}(x) + \frac{1}{2}\Delta(x) \qquad (2.29)$$

resulta:

$$\Delta^R(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\; e^{-ikx}\left\{P\,\frac{1}{k^2-m^2} - i\pi\,\delta(k^2-m^2)\epsilon(k)\right\} \qquad (2.30)$$

$$\Delta^A(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\; e^{-ikx}\left\{P\,\frac{1}{k^2-m^2} + i\pi\,\delta(k^2-m^2)\,\epsilon(k)\right\} . \qquad (2.31)$$

De:

$$\Delta_F(x) = \Delta^{(1)}(x) + i\epsilon(x)\,\Delta(x) = \Delta^{(1)}(x) - 2i\,\bar{\Delta}(x) \qquad (2.32)$$

vem:
$$\Delta_F(x) = \frac{2i}{(2\pi)^4} \int d^4k \; e^{-ikx} \left\{ P \frac{1}{k^2-m^2} - i\pi\,\delta(k^2-m^2) \right\} . \quad (2.33)$$

Estas funções podem ser escritas como integrais sôbre certos contornos.

Para isto, fazemos a convenção de associar à função $\delta(Z-a)$ no plano complexo, o integrando $\frac{1}{2\pi i}\ \frac{1}{Z-a}$, a integral sendo tomada sôbre contorno fechado em tôrno de a com certo sentido:

$$\delta(Z-a) = \frac{1}{2\pi i}\ \frac{1}{Z-a} \quad \text{e contôrno} \qquad (2.34)$$

pois:
$$\int f(z)\ \delta(z-a)\ dz = \int_c \frac{1}{2\pi i}\ \frac{f(z)}{z-a}\ dz = f(a) .$$

Agora:
$$\int f(z)\ \delta(z^2-a^2)dz = \int f(z)\ \frac{1}{2a} \left\{ \delta(z-a) + \delta(z+a) \right\} dz$$
$$= \frac{1}{2a} \left\{ f(a) + f(-a) \right\} \qquad (2.35)$$

Por outro lado (indicando com $\text{Res}\left[F(z),\ z_o\right]$ o resíduo de $F(z)$ no ponto z_o):

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)\ \frac{1}{z^2-a^2}\ dz = - \text{Res}\left[\frac{f(z)}{z-a}\ ,\ -a\right] + \text{Res}\left[\frac{f(z)}{z+a}\ ,\ a\right] =$$
$$= \frac{f(-a)}{2a} + \frac{f(a)}{2a} \qquad (2.36a)$$

onde C é o contôrno

Logo:
$$\delta(z^2-a^2) = - \frac{1}{2\pi i}\ \frac{1}{z^2-a^2} \quad \text{e contôrno} \qquad (2.37a)$$

ou:

$$\delta(z^2-a^2) = \frac{1}{2\pi i}\;\frac{1}{z^2-a^2} \quad \text{e contôrno}$$ 

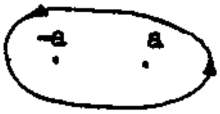
. (2.37b)

De:

$$\delta(z^2-a^2)\,\epsilon(z) = \frac{1}{2a}\left\{\delta(z-a) - \delta(z+a)\right\} \qquad (2.38)$$

e:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^2-a^2}\,dz = \text{Res}\left[\frac{f(z)}{z-a} - a\right] + \text{Res}\left[\frac{f(z)}{z+a}, a\right] = -\frac{f(-a)}{2a} + \frac{f(a)}{2a} \qquad (2.36b)$$

onde C é o contôrno 

,

vem:

$$\delta(z^2-a^2)\,\epsilon(z) = \frac{1}{2\pi i}\;\frac{1}{z^2-a^2} \quad \text{e contôrno}$$ 

(2.39)

De:

$$P\,\frac{1}{z^2-a^2} \quad \text{com contôrno}$$ 

(2.40)

vem:

$$P\,\frac{1}{z^2-a^2} - i\pi\,\delta(z^2-a^2) = P\,\frac{1}{z^2-a^2} + \frac{1}{2}\;\frac{1}{z^2-a^2} \qquad (2.41a)$$

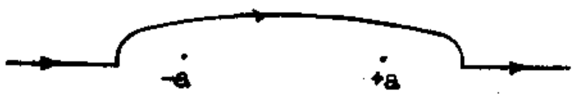
isto é: $= \dfrac{1}{z^2-a^2}$ e contôrno: 

Também:

$$P\,\frac{1}{z^2-a^2} - i\pi\,\delta(z^2-a^2)\,\epsilon(z) = P\,\frac{1}{z^2-a^2} - \frac{1}{2}\;\frac{1}{z^2-a^2},$$

logo

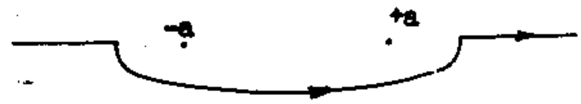
$$= \frac{1}{z^2-a^2} \quad \text{e contôrno} \qquad (2.41b)$$



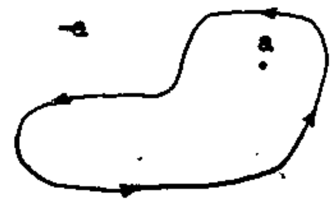
$$P\,\frac{1}{z^2-a^2} + i\pi\,\delta(z^2-a^2)\,\epsilon(z) = \underline{P}\,\frac{1}{z^2-a^2} + \frac{1}{2}\;\frac{1}{z^2-a^2}$$

isto é:

$$= \frac{1}{z^2-a^2} \qquad \text{e contôrno} \tag{2.41c}$$



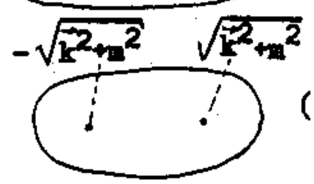
$$\delta(z^2-a^2)\,\frac{1+\epsilon(z)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\;\frac{1}{z^2-a^2} \qquad \text{e contôrno} \tag{2.42a}$$



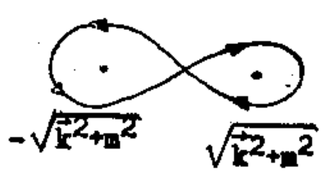
$$\delta(z^2-a^2)\,\frac{1-\epsilon(z)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\;\frac{1}{z^2-a^2} \tag{2.42b}$$

Portanto:

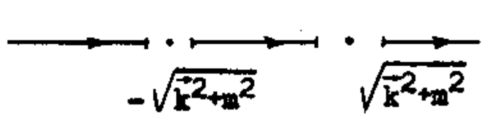
$$\Delta(x) = -\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int_C \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k \qquad \text{e contôrno} \tag{2.43}$$



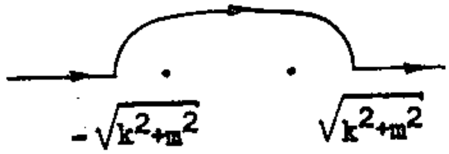
$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k\;, \tag{2.44}$$



$$\bar{\Delta}(x) = -\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\bar{C}} \frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k\;, \tag{2.45}$$

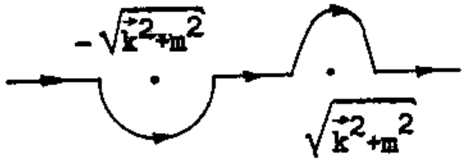


$$\Delta^R(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_R}\frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k \tag{2.46}$$

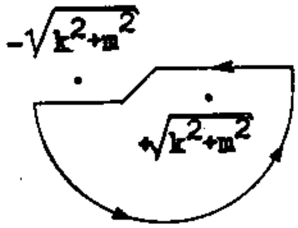


$$\Delta^A(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_A}\frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k \tag{2.47}$$

$$\Delta_F(x) = \frac{2i}{(2\pi)^4}\int_{C_F}\frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k \tag{2.48}$$



$$\Delta^{(+)}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_{(+)}}\frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k\,,\quad x_o > 0 \tag{2.49}$$



$$\Delta^{(-)}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C_{(-)}}\frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2}\,d^4k,\quad x_o < 0 \tag{2.50}$$

Observe que

$$\Delta^R(-x) = -\frac{1+\epsilon(-x)}{2}\Delta(-x) \tag{2.51}$$

e como $\epsilon(-x) = -\epsilon(x)$, $\Delta(-x) = -\Delta(x)$, vem de (2.51):

$$\Delta^R(-x) = \frac{1-\epsilon(x)}{2}\Delta(x) = \Delta^A(x)\ ,$$

$$\Delta^R(-x) = \Delta^A(x)\ . \tag{2.52}$$

Também:

$$\left(i\gamma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right)\, S^{A}(x-x') = \delta(x-x') \qquad (2.16a)$$

do mesmo modo que

$$\left(i\gamma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right)\, S^{R}(x-x') = \delta(x-x')\ . \qquad (2.16b)$$

Agora:

$$S^{A}(x-x')\left(i\gamma^{\mu}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x'^{\mu}} + m\right) = -\left(-i\gamma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + m\right)\Delta^{A}(x-x')\left(i\gamma^{\mu}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x'^{\mu}} + m\right) =$$

$$= -\left(i\gamma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + m\right)\Delta^{A}(x-x')\left(-i\gamma^{\mu}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}} + m\right) =$$

$$= -(\Box + m^{2})\,\Delta^{A}(x-x') = -\,\delta(x-x')\ .$$

Portanto:

$$S^{A}(x-x')\left(i\gamma^{\mu}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x'^{\mu}} + m\right) = -\,\delta(x-x')\ . \qquad (2.53)$$

Esta última equação mostra como obter uma integral particular da equação:

$$\bar{\chi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + m\right) = -\,\xi(x)\ . \qquad (2.54)$$

É:

$$\bar{\chi}(x) = \int \bar{\xi}(x')\, S^{A}(x'-x)\, d^{4}x'\ . \qquad (2.55)$$

Assim, se:

$$\chi(x) = \int S^{R}(x-x')\,\xi(x')\, d^{4}x', \qquad (2.56)$$

então:

$$\left(i\gamma_{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m\right)\chi(x) = \int \left(i\gamma_{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m\right) S^{R}(x-x')\,\xi(x')\,d^{4}x' \qquad (2.57)$$

$$= \int \delta(x-x')\,\xi(x')\, d^{4}x' = \xi(x)\ .$$

Do mesmo modo, a solução retardada de:

$$\Box A_\mu(x) = j_\mu(x) \qquad (2.58)$$

é:

$$A_\mu(x) = \int D^R(x-x') j_\mu(x')\, d^4x'. \qquad (2.59)$$

Portanto, se a interação é "ligada" no instante $t = -\infty$, e se $A_\mu^{(o)}$ e $\psi^{(o)}$ são conhecidos, as equações de recurrência permitem achar ψ e A.

<u>Outra forma da solução das equações de recurrência</u>.

<u>Teorema</u>: Sejam $A(x)$, $B(x)$ e $H(x)$ três operadores e construamos os seguintes operadores:

$$A^{(o)}(x) = A(x), \quad B^{(o)}(x) = B(x),$$

$$A^{(n)}(x) = i^n \int_{-\infty}^{t} dx' \int_{-\infty}^{t'} dx'' \dots \int_{-\infty}^{t^{(n-1)}} dx^{(n)} \left[H(x_n), \left[H(x_{n-1}), \dots \left[H(x'), A(x)\right].\right]\right],$$

$$B^{(n)}(x) = i^n \int_{-\infty}^{t} dx' \int_{-\infty}^{t} dx'' \dots \int_{-\infty}^{t^{(n-1)}} dx^{(n)} \left[H(x_n), \left[H(x_{n-1}), \dots \left[H(x'), B(x)\right]..\right]\right] \qquad (2.61)$$

Então:

$$(AB)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} A^{(k)}(x)\, B^{(n-k)}(x) \,. \qquad (2.62)$$

Façamos $n = 1$. Temos:

$$(AB)^{(1)} = i \int_{-\infty}^{t} dx' \left[H(x'), A(x)\, B(x)\right],$$

mas:

$$\left[H(x'), A(x)\ B(x)\right] = A(x)\left[H(x'), B(x)\right] + \left[H(x'), A(x)\right]B(x),$$

logo:

$$AB^{(1)} = i\int_{-a}^{t} dx'\ A(x)\left[H(x'), B(x)\right] + i\int_{-\infty}^{t} dx'\left[H(x'), A(x)\ B(x)\right] =$$

$$= A^{(o)}(x)\ B^{(1)}(x) + A^{(1)}(x)\ B^{(o)}(x).$$

Para $n = 2$, vem:

$$(AB)^{(2)} = i^2\int_{-\infty}^{t} dx'\int_{-\infty}^{t'} dx''\left[H(x''), \left[H(x'), A(x)B(x)\right]\right] =$$

$$= i^2\int_{-\infty}^{t} dx'\int_{-\infty}^{t'} dx''\left[H(x''), A(x)\left[H(x'), B(x)\right]\right] +$$

$$+ i^2\int_{-\infty}^{t} dx'\int_{-\infty}^{t'} dx''\left[H(x''), \left[H(x'), A(x)\right]B(x)\right] =$$

$$= i^2\int_{-\infty}^{t} dx'\int_{-\infty}^{t'} dx''\left\{A(x)\left[H(x''), \left[H(x'), B(x)\right]\right] + \left[H(x'), A(x)\right]\left[H(x'), B(x)\right]\right.$$

$$\left. + \left[H(x'), A(x)\right]\left[H(x''), B(x)\right] + \left[H(x''), \left[H(x'), A(x)\right]\right]B(x)\right\}.$$

O 1º e o último têrmo são, respectivamente, $A^{(o)}(x)\ B^{(2)}(x)$ e $A^{(2)}(x)\ B^{(o)}(x)$. Os dois intermediários dão:

$$i^2\int_{-\infty}^{t} dx' \int_{-\infty}^{t'} dx'' \left\{ \left[H(x''),A(x)\right]\left[H(x'),\ B(x)\right] + \left[H(x'),A(x)\right]\left[H(x''),B(x)\right] \right\}$$

$$= i^2 \int_{-\infty}^{t} dx' \int_{-\infty}^{t'} dx'' \left[H(x''),A(x)\right]\left[H(x'),B(x)\right] + i^2 \int_{-\infty}^{t} dx'' \int_{-\infty}^{t''} dx' \left[H(x''),A(x)\right]\left[H(x'),B(x)\right]$$

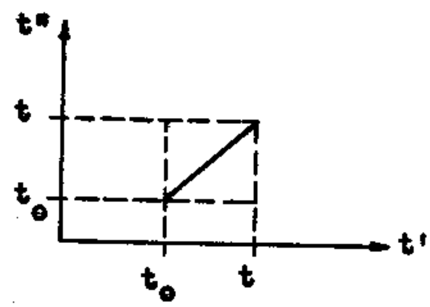
Os integrandos são os mesmos, diferem os limites das integrais. Mas, como já vimos, considerando o quadrado em que se faz $t_o \longrightarrow -\infty$ se tem:

$$\int_{-\infty}^{t} dx' \int_{-\infty}^{t} dx'' \left[H(x''),\ A(x)\right]\left[H(x'),\ B(x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} dx \int_{-\infty}^{t} dx'' + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} dx'' \int_{-\infty}^{t} dx' = \int_{-\infty}^{t} dx' \int_{-\infty}^{t} dx''$$

Logo, os dois têrmos intermediários dão apenas:

$$i^2\int_{-\infty}^{t} dx' \int_{-\infty}^{t} dx'' \left[H(x''),\ A(x)\right]\left[H(x'),\ B(x)\right] =$$



$= A^{(1)}(x)\ B^{(1)}(x).$

Portanto:

$$(AB)^{(2)} = A^{(o)}B^{(2)} + A^{(1)}B^{(1)} + A^{(2)}\ B^{(o)}\ .$$

Em geral, a aplicação sucessiva da fórmula de $\left[H(x'),A(x)B(x)\right] = A\left[H(x'),\ B\right]+\left[H(x'),\ A\right]B$ dá lugar a 2^n têrmos cada um dos quais é o produto de dois comutadores múltiplos:

$$\Big[H(x^{m_1}),\Big[H(x^{m_2}),\dots\Big[H(x^{m_k}),A(x)\Big]\dots\Big]\Big[H(x^{r_1}),\Big[H(x^{r_2})\dots,\Big[H(x^{r-n-k}),$$

$$B(x)\Big]..\Big]$$

com k vezes H no 1º e n - k vezes H no 2º; seja R_k a soma de tais têrmos. Então:

$$(AB)^n = i^n\int_{-\infty}^{t} dx'\int_{-\infty}^{t'} dx''\dots\int_{-\infty}^{t^{n-1}} dx'' \sum_{k=0}^{n} R_k = i^n\sum \int_{-\infty}^{t} dx'\int_{-\infty}^{t'} dx''\dots\int_{-\infty}^{t^{n-1}} \Big[H(x^{m_1}),$$

$$\Big[H(x^{m_2}),\dots\Big[H(x^{m_k}),A(x)\Big]..\Big]\Big[H(x^{r_1}),\Big[H(x^{r_2}),\dots\Big[H(x^{r_{n-k}}),B(x)\Big]\dots\Big].$$

que, após mudança de variáveis e soma das regiões de integração, a nálogas ao caso n = 1 e n = 2, conduz a:

$$(AB)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} A^{(k)}\ B^{(n-k)}$$

A solução das equações de recurrência é a seguinte:

$$\psi^{(n)}(x) = i^n\int_{-\infty}^{t} dx' \int_{-\infty}^{t'} dx''\dots\int_{-\infty}^{t^{(n-1)}} dx^n\Big[V^{(o)}(x^n),\Big[V^{(o)}(x^{n-1}),\dots$$

$$\dots\Big[V^{(o)}(x'),\ \psi^{(o)}(x)\Big]\dots\Big], \quad (2.62)$$

$$A_\mu^{(n)}(x) = i^n\int_{-\infty}^{t} dx'\int_{-\infty}^{t'} dx''\dots\int_{-\infty}^{t_{n-1}} dx_n\Big[V^{(o)}(x^n),\Big[V^{(o)}(x^{n-1}),\dots$$

$$\dots\Big[V^{(o)}(x'),\ A_\mu^{(o)}(x)\Big]; \quad V^{(o)}(x) = j_\mu^{(o)}\ A_\mu^{(o)}. \quad (2.63)$$

Para prová-lo basta provar que estas expressões satisfazem às equações.

Agora calculemos a integral

$$\int_{-\infty}^{t} dx' \; f(x') \left[v^{(o)}(x'), \psi_\rho^{(o)}(x) \right]. \qquad (2.64)$$

Temos:

$$\left[v^{(o)}(x'), \psi_\rho^{(o)}(x) \right] = \frac{1}{2} \left[\left[\overline{\psi}^{(o)}(x'), \gamma_\mu \psi^{(o)}(x') \right] A_\mu^{(o)}(x'), \psi_\rho^{(o)}(x) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} A_\mu^{(o)}(x') \left[\left[\overline{\psi}^{(o)}(x'), \gamma_\mu \psi^{(o)}(x') \right], \psi_\rho^{(o)}(x) \right],$$

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \left[\overline{\psi}_\alpha^{(o)}(x') \psi_\beta^{(o)}(x') - \psi_\beta^{(o)}(x') \overline{\psi}_\chi^{(o)}(x'), \psi_\rho^{(o)}(x) \right] = \qquad (2.65)$$

$$= (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \Big(\overline{\psi}_\alpha^{(o)}(x') \left[\psi_\beta^{(o)}(x'), \psi_\rho^{(o)}(x) \right] + \left[\overline{\psi}_\alpha^{(o)}(x'), \psi_\rho^{(o)}(x) \right] \psi_\beta^{(o)}(x') -$$

$$- \psi_\beta^{(o)}(x') \left[\overline{\psi}_\alpha^{(o)}(x'), \psi_\rho^{(o)}(x) \right] - \left[\psi_\beta^{(o)}(x'), \psi_\beta^{(o)}(x) \right] \overline{\psi}_\alpha^{(o)}(x') \Big).$$

Como os campos com índice zero tem regras de comutação conhecidas que são as do campo livre, temos:

$$\left[v^{(o)}(x'), \psi_\rho^{(o)}(x) \right] = \frac{1}{2} A_\mu^{(o)}(x') (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \Big\{ -2 \overline{\psi}_\alpha(x') \psi_\rho(x) \psi_\beta(x') + \overline{\psi}_\alpha(x') \psi_\rho(x) \psi_\beta(x') -$$

$$- \psi_\rho(x) \overline{\psi}_\alpha(x') \psi_\beta(x') + i \psi_\beta(x') S_{\rho\alpha}(x - x') + 2 \psi_\beta(x') \psi_\rho(x) \overline{\psi}_\alpha(x') -$$

$$- \psi_\beta(x')\,\psi_\rho(x)\,\overline{\psi}_\alpha(x') + \psi_\rho(x)\,\psi_\beta(x')\,\overline{\psi}_\alpha(x')\Big\}$$

$$= \frac{1}{2} A_\mu^{(o)}(x')(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\Big(-\left\{\psi_\rho(x),\, \overline{\psi}_\alpha(x')\right\}_+ \psi_\beta(x') + i\,\psi_\beta(x') S_{\rho\alpha}(x-x') +$$

$$+ \left\{\psi_\rho(x),\, \psi_\beta(x')\right\}_+ \overline{\psi}_\alpha(x')\Big) = iA_\mu^{(o)}(x')\,(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\; S_{\rho\alpha}(x-x')\,\psi_\beta(x') \,.$$

Portanto:

$$\int_{-\infty}^{t} f(x')\left[v^{(o)}(x'),\psi_\rho^{(o)}(x)\right]dx' = i\int_{-\infty}^{t} dx'\; f(x')\; S(x-x')\gamma_\mu \psi^{(o)}(x')\, A_\mu^{(o)}(x') =$$

$$= - i\int_{-\infty} dx'\; f(x')\, S^R(x-x')\gamma_\mu\; A_\mu^{(o)}(x')\psi^{(o)}(x') \,. \quad (2.65)$$

Vemos, assim, que $\left(\text{pois}\left(i\gamma_\mu \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) S^R(x-x') = \delta(x-x')\right)$:

$$\left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)\psi^{(n+1)}(x) = i^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty} (-i)\;\delta(x-x')dx'\int_{-\infty}^{t'} dt'' \ldots \int_{-\infty}^{t^{(n)}} dx^{(n+1)}$$

$$\left[v^{(o)}(x^{(n+1)}) \,,\right.$$

$$\left[v^{(o)}(x^{(n)}),\ldots\left[v^{(o)}(x''),\; A_\mu^{(o)}(x')\gamma_\mu\psi^{(o)}(x')\right]\ldots\right] =$$

$$= \left(A_\mu(x)\gamma_\mu\psi^{(o)}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} A^{(k)}(x)\,\gamma_\mu\;\psi^{(n-k)}(x) \,, \qquad (2.66)$$

o que prova o que desejavamos.

Quanto à solução das equações em A_μ, temos:

$$\int_{-\infty}^{t} dx' \; f(x') \left[V^{(0)}(x'),\; A_{\mu}^{(0)}(x) \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t} dx' \; f(x') \left[\overline{\psi}^{(0)}(x') , \right. \qquad (2.67)$$

$$\left. \gamma_{\nu} \psi^{(0)}(x') \right] \left[A_{\nu}^{(0)}(x'),\; A_{\mu}^{(0)}(x) \right] = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{t} dx' \; f(x')\, D(x'-x) \left[\overline{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_{\mu} \psi^{(0)}(x') \right] =$$

$$= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{t} dx' f(x')\, D(x-x') \left[\overline{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_{\mu} \psi^{(0)}(x') \right] = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\, D^{R}(x-x')$$

$$\left[\overline{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_{\mu}\, \psi^{(0)}(x') \right].$$

Logo:

$$\square \int_{-\infty}^{t} f(x') \left[V^{(0)}(x'),\; A_{\mu}^{(0)}(x) \right] dx' = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\; \delta(x-x') \left[\overline{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_{\mu} \psi^{(0)}(x') \right]$$

$$= -\frac{i}{2}\, f(x) \left[\overline{\psi}^{(0)}(x), \gamma_{\mu}\; \psi^{(0)}(x) \right]$$

e daí:

$$\square A_{\mu}^{(n+1)}(x) = i^{n+1} \left(-\frac{i}{2} \right) \int_{-\infty}^{t} dx'' \ldots \int_{-\infty}^{t^{(n)}} \left[V^{(0)}\left(x^{(n+1)} \right) , \right.$$

$$\left[\ldots , \left[V^{(0)}(x''), \left[\overline{\psi}^{(0)}(x), \gamma_{\mu}\; \psi^{(0)}(x) \right] \ldots \right] \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\overline{\psi}^{(0)}(x), \gamma_{\mu}\; \psi^{(0)}(x) \right] \right)^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left[\overline{\psi}^{(k)}(x), \gamma_{\mu}\, \psi^{(n-k)}(x) \right]. \qquad (2.68)$$

Expressão da corrente

Sabemos que:

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}\left[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu\,\psi(x)\right], \qquad \text{(II.8.4)}$$

deixando de lado a parte conjugada na carga. Substituindo aí, ou em:

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}\,(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left(\bar{\psi}_\alpha(x)\;\psi_\beta(x) - \psi_\beta(x)\;\bar{\psi}_\alpha(x)\right)$$

ψ e $\bar{\psi}$ pelo desenvolvimento em série de potências de e, achamos:

$$j_\mu\,(x) = e\;j_\mu^{(o)}(x) + e^2\;j_\mu^{(1)}(x) + \ldots$$

onde

$$j_\mu^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\bar{\psi}^{(k)}(x), \gamma_\mu\;\psi^{(n-k)}(x)\right].$$

Mas então podemos escrever:

$$j_\mu^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\left[\bar{\psi}^{(o)}(x), \gamma_\mu\;\psi^{(o)}(x)\right]\right)^{(n)} = (\,j_\mu^{(o)}(x))^{(n)} =$$

$$= i^n\int_{-\infty}^{t} dx'\int_{-\infty}^{t'} dx'' \ldots \int_{-\infty}^{t^{(n-1)}} dx^{(n)}\left[V^{(o)}(x^n), \ldots\left[V^{(o)}(x'), j_\mu^{(o)}(x)\right]\ldots\right] \qquad (2.69)$$

3. Polarização do vácuo na representação de Heisenberg.

Consideremos os operadores na representação de Heisenberg. As equações de campo:

$$\left(i\gamma^\mu\,\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\psi = e\,\gamma_\mu\,A^\mu\,\psi, \qquad (3.1a)$$

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} + m\right) = -\,e\,\bar{\psi}\gamma_\mu\,A^\mu\;, \qquad (3.1b)$$

$$\Box A_\mu = \frac{e}{2}\left[\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi\right] \tag{3.2}$$

se escrevem, na teoria das perturbações, na aproximação n + 1:

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right)\psi^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} A_\mu^{(k)}\gamma^\mu \psi^{(n-k)} \ , \tag{3.3a}$$

$$\bar{\psi}^{(n+1)}\left(i\gamma^\mu \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} + m\right) = -\sum_{k=0} \bar{\psi}^{(k)}\gamma^\mu A_\mu^{(n-k)} \ , \tag{3.3b}$$

$$\Box A^{(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\bar{\psi}^{(k)} \ \gamma_\mu \ \psi^{(n-k)}\right]. \tag{3.4}$$

A corrente é:

$$j_\mu(x) = \sum_n j_\mu^{(n)}(x)\ e^{n+1}, \tag{3.5a}$$

onde:

$$j_\mu^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\bar{\psi}^{(k)}(x), \gamma_\mu \ \psi^{(n-k)}(x)\right]. \tag{3.5b}$$

Até $2^{\underline{a}}$ ordem inclusive, temos:

$$j_\mu(x) = e\ j_\mu^{(o)}(x) + e^2\ j_\mu^{(1)}(x) =$$

$$= \frac{e}{2}\left[\bar{\psi}^{(o)}(x), \gamma_\mu\ \psi^{(o)}(x)\right] + \frac{e^2}{2}\int dx' \left(\left[\bar{\psi}^{(o)}(x), \gamma_\mu\ S^R(x-x')\gamma^\nu \psi^{(o)}(x')\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\bar{\psi}^{(o)}(x), \gamma^\nu\ S^A(x'-x), \gamma_\mu\ \psi^{(o)}(x)\right]\right)\left(A_\nu^{(o)}(x') + A_\nu^{ext}(x')\right) , \tag{3.6}$$

onde o campo eletromagnético contém uma parte externa.

O valor esperado no vácuo do $1^{\underline{o}}$ têrmo é zero, como é zero o do têrmo em $A_\nu^{(o)}(x')$. Mas o têrmo do campo externo A_ν^{ext} tem valor esperado no vácuo diferente de zero:

$$\langle 0| j_\mu(x)|0\rangle = \frac{e^2}{2}\int dx' \langle 0|\left(\left[\bar\psi^{(0)}(x),\gamma_\mu\ S^R(x-x')\gamma^\nu\psi^{(0)}(x')\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\bar\psi^{(0)}(x')\gamma^\nu S^A(x'-x),\gamma_\mu\ \psi^{(0)}(x)\right]\right)|0\rangle\ A^{ext}_\nu(x')\ . \quad (3.7)$$

Agora:

$$\langle 0|\left[\bar\psi^{(0)}(x),\gamma_\mu\ S^R(x-x')\gamma^\nu\psi^{(0)}(x')\right]|0\rangle =$$

$$= \langle 0|\left[\bar\psi^{(0)}_\alpha(x),\ (\gamma_\mu)_{\alpha\lambda}\ S^R_{\lambda\eta}(x-x')\,(\gamma^\nu)_{\eta\epsilon}\ \psi^{(0)}_\epsilon(x')\right]|0\rangle =$$

$$= (\gamma_\mu)_{\alpha\lambda}\ S^R_{\lambda\eta}(x-x')\,(\gamma^\nu)_{\eta\epsilon}\ \langle 0|\left[\bar\psi^{(0)}_\alpha(x),\psi^{(0)}_\epsilon(x')\right]|0\rangle =$$

$$= (\gamma_\mu)_{\alpha\lambda}\ S^R_{\lambda\eta}\ (x-x')\,(\gamma^\nu)_{\eta\epsilon}\ S^{(1)}_{\epsilon\alpha}\ (x'-x) = \mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu S^R(x-x')\gamma^\nu S^{(1)}(x'-x)\right),$$

$$\langle 0|\left[\bar\psi^{(0)}(x')\gamma^\nu S^A(x'-x),\gamma^\mu\psi^{(0)}(x)\right]|0\rangle =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu\ S^{(1)}(x-x')\gamma^\nu S^A(x'-x)\right).$$

Assim:

$$\langle 0| j_\mu(x)|0\rangle = \int dx'\ K_{\mu\nu}\ (x-x')\,A^{ext}(x') \qquad (3.8a)$$

onde:

$$K_{\mu\nu}(x-x') = \frac{e^2}{2}\left\{\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\ S^R(x-x')\gamma_\nu\ S^{(1)}(x'-x)\right]+\ \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\ S^{(1)}(x-x')\gamma_\mu\ S^A(x-x')\right]\right\}.$$

$$(3.9a)$$

Precisamos estudar êste têrmo. Introduzo a transformada de Fourier:

$$K_{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ e^{-ip(x-x')}\ K_{\mu\nu}\ (p)\ , \qquad (3.9b)$$

$$K_{\mu\nu}(p) = \int d^4z\ e^{ipz}\ K_{\mu\nu}\ (z) =$$

$$= \frac{e^2}{2}\int d^4z\ e^{ipz}\left(\mathrm{Te}\left[\gamma_\mu\ S^R(z)\gamma_\nu S^{(1)}(-z)+\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\ S^{(1)}(z)\gamma_\nu S^A(-z)\right]\right)\right.$$

$$(3.10)$$

Mas:

$$S^R(z) = -(i\not{\partial}+m)\Delta^R(z) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p'(\not{p}'+m)e^{-ip'z}\left\{\frac{P}{p'^2-m^2} - i\pi\epsilon(p')\,\delta(p'^2-m^2)\right\}, \tag{3.11}$$

$$S^A(-z) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p'(p'+m)e^{ip'z}\left\{P\,\frac{1}{p^{\,2}-m^2} + i\epsilon(p')\pi\;\delta(p'^2-m^2)\right\}, \tag{3.12}$$

$$S^{(1)}(z) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p''(p''+m)\;e^{-ip''z}\;\delta(p''^2-m^2)\;. \tag{3.13}$$

Assim:

$$\int d^4z\;e^{ipz}\;\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\,S^R(z)\gamma_\nu\;S^{(1)}(-z)\right] = -\frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4z\iint d^4p'\;d^4p''\;\times$$

$$\times\, e^{i(p''-p'+p)z}\;\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\,(\not{p}'+m)\gamma_\nu(\not{p}''+m)\right]\delta(p''^2-m^2)\left\{P\,\frac{1}{p'^2-m^2} - i\pi\epsilon(p')\;\delta(p'^2-m^2)\right\}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p'\int d^4p''\,\delta(p''-p'+p)\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\,(\not{p}'+m)\,\gamma_\nu(\not{p}''+m)\right]\delta(p''^2-m^2)\;\times$$

$$\times\left\{P\,\frac{1}{p'^2-m^2} - i\pi\epsilon(p')\;\delta(p'^2-m^2)\right\}.$$

Logo:

$$K_{\mu\nu}(p) = -\frac{e^2}{16\pi^3}\iint d^4p'\,d^4p''\,\delta(p-p'+p'')\,\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu\,(\not{p}'+m)\,\gamma_\nu(\not{p}''+m)\right]\;\times$$

$$\times\left\{\delta(p''^2-m^2)\left[P\,\frac{1}{p'^2-m^2} - i\pi\epsilon(p')\;\delta(p'^2-m^2)\right] + \right. \tag{3.14}$$

$$\left. +\;\delta(p'^2-m^2)\left[P\,\frac{1}{p''^2-m^2} + i\pi\epsilon\,(p'')\;\delta\,(p''^2-m^2)\right]\right\}.$$

Antes de examinar a integral de $K_{\mu\nu}(p)$, que é divergente, vamos obter algumas informações.

De:

$$\langle 0| j_\mu(x)|0\rangle = \int dx' \; K_{\mu\nu} (x-x') \, A^{\nu \; ext}(x')$$

e de:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} K_{\mu\nu} (x-x') = 0 \; . \qquad (3.15)$$

No espaço dos momentos:

$$p^\mu K_{\mu\nu} (p) = 0 \; . \qquad (3.16)$$

$K_{\mu\nu}$ é um tensor que depende de p_α. É simétrico, logo deve ser da forma:

$$K_{\mu\nu} (p) = G(p) p_\mu \; p_\nu + H(p) \; g_{\mu\nu} \; . \qquad (3.17)$$

Daí vem:

$$p^\mu K_{\mu\nu} (p) = p_\nu \left[G(p) p^2 + H(p)\right] = 0 \; , \qquad (3.18)$$

$$H(p) = - p^2 \, G(p) \; , \qquad (3.19)$$

logo:

$$K_{\mu\nu} (p) = G(p)\left[p_\mu \; p_\nu - g_{\mu\nu} \; p^2\right] . \qquad (3.20)$$

Mas de

$$K_{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \; e^{-ip(x-x')} K_{\mu\nu} (p) \quad (3.21)$$

e de (3.16) vem $\frac{\partial}{\partial x'_\nu} K_{\mu\nu} (x-x') = 0$.

Esta expressa simplesmente a invariância de "gauge" de $\langle 0| j_\mu(x)|0\rangle$.

Verifiquemos $p^\mu K_{\mu\nu} (p) = 0$ com a expressão de $K_{\mu\nu}(p)$. Temos (pois $p = p' - p''$):

$$p^\mu K_{\mu\nu}(p) = -\frac{e^2}{16\pi^3}\int d^4p' \int d^4p'' \,\delta(p-p'+p'')\Big[\mathrm{Tr}\,(\not p'-m)(\not p'+m)\gamma_\nu$$

$$(\not p''+m) - \mathrm{Tr}\,(\not p''+m)(\not p''-m)(\not p'+m)\gamma_\nu\Big]\Big\{\dots\dots\Big\} =$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi^3}\iint d^4p'\, d^4p''\delta(p-p'+p'')\Big[p''_\nu(p'^2-m^2)-p'_\nu(p''^2-m^2)\Big]\Big\{\dots\Big\}.$$

Aplicando $x\,\delta(x)=0$, obtemos dois têrmos que contêm integrais da forma:

$$\int d^4p'\; p'_\nu\,\delta(p'^2-m^2)$$

que se devem anular por simetria. Na verdade esta integral diverge e se fizermos uma mudança de origem obtemos um valor diferente de zero. O valor nulo desta integral, intuitivo como possa parecer, deve ser considerado como uma definição a fim de que valha, por motivos físicos, a igualdade

$$p_\mu\, K^{\mu\nu} = 0 \tag{3.22}$$

Voltemos agora a (3.20).

Temos

$$K_{\mu\nu}\, g^{\mu\sigma} = K^\sigma_\nu(p) = G(p)\Big[p_\nu p^\sigma - p^2\delta^\sigma_\nu\Big] \tag{3.23}$$

onde:

$$g^{\mu\sigma}\, g_{\mu\nu} = \delta^\sigma_\nu = \begin{cases} 1 & \nu=\sigma \\ 0 & \nu\neq\sigma\,. \end{cases} \tag{3.24}$$

Logo:

$$K^\nu_\nu(p) = G(p)\Big[p^2 - 4p^2\Big] = -3\,p^2\, G(p)\;, \tag{3.25a}$$

$$G(p) = -\frac{1}{3p^2}K^\nu_\nu(p)\;,$$

isto é:

$$G(p) = \frac{e^2}{48\pi^3 p^2} \iint d^4p' d^4p'' \delta(p-p'+p'') \mathrm{Tr}\left[\gamma_\nu (\not p'+m) \gamma^\nu (\not p''+m)\right] \times$$

$$\times \left\{ \delta(p''^2-m^2) \left[P \frac{1}{p'^2-m^2} - i\pi\epsilon(p') \delta(p'^2-m^2) \right] + \delta(p'^2-m^2) \right.$$

$$\left. \left[P \frac{1}{p''^2-m^2} + i\pi\epsilon(p'') \delta(p''^2-m^2) \right] \right\} , \qquad (3.25b)$$

que deve ser levado em

$$\langle 0 | j_\mu{}^{(x)} | 0 \rangle .$$

$$\langle 0 | j_\mu(x) | 0 \rangle = \int dx' K_{\mu\nu}(x-x') A^{\nu ext}(x') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \iint d^4p\, d^4x'\, e^{-ip(x-x')} K_{\mu\nu}(p) A^{\nu ext}(x') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \iint d^4p\, d^4x'\, e^{-ip(x-x')} G(p) \left[p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2 \right] A^{\nu ext}(x') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \iint d^4p\, d^4x'\, e^{-ip(x-x')} G(p) \Box A_\mu^{ext}(x') ,$$

pois

$$\frac{\partial A^{ext}}{\partial x'^\nu} = 0 . \qquad \text{Mas } \Box A_\mu^{ext} = j_\mu^{ext} .$$

Portanto:

$$\langle 0 | j_\mu(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint d^4p\, d^4x'\, e^{-ip(x-x')} G(p)\, j_\mu^{ext}(x') . \qquad (3.26)$$

A grandeza experimentalmente observável é:

$$j_\mu^{ext}(x) + \langle 0|j_\mu(x)|0\rangle = \tag{3.27}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\iint d^4p\ d^4x'\ e^{-ip(x-x')}\left[1+G(p)\right]j_\mu^{ext}(x')$$

Se G fôsse uma constante, isto significaria que a corrente observável seria $(1+G)j_\mu^{ext}(x)$, e portanto a interação do campo externo com o vácuo daria lugar apenas a uma mudança na unidade de carga da corrente externa e isto seria inobservável.

Mas, então, é claro que se acrescentarmos a $g(p)$ uma constante, o efeito será mudar a unidade de carga, e, portanto, inobservável. Portanto, $g(p)$ não é uma constante mas a êle podemos acrescentar uma tal constante. Para comparação com a experiência precisamos fixar esta constante. Fazemos a convenção de que para campos que variam com $\vec{x}$ e t muito lentamente, a corrente observável coincida com a externa. Ora, em tais condições:

$$j_\mu^{ext}(x') \sim j_\mu = \text{constante} \tag{3.28}$$

e:

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\iint dp\ dx'\ \left[1+g(p)\right]\ e^{-ip(x-x')}\ j^{ext}(x') \sim$$

$$\sim \frac{1}{(2\pi)^4}\ j_\mu \iint dp\ dx'\ \left[1+g(p)\right]e^{-ip(x-x')} = (1+G(o))j_\mu\ .$$

Para que $j_\mu^{obs}(x) = j_\mu$, devemos ter $G(0) = 0$.

Como $G(0) \neq 0$ pela fórmula de $G(p)$, definimos, então, a corente observável pela expressão:

$$J_\mu^{obs}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\iint d^4p\ d^4x'\ e^{-ip(x-x')}\left[1+G(p) - G(0)\right]j_\mu^{ext}(x') \tag{3.29}$$

que satisfaz à condição de que $j_\mu = j_\mu^{ext}$ quando esta última é quase-constante.

Esta inclusão de G(0) na definição acima chama-se <u>renormalização da carga</u>.

Precisamos avaliar G(p). Em sua expressão ocorre o traço:

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_\nu (\not p' + m)\,\gamma^\nu\,(\not p'' + m)\right].$$

Temos:

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_\nu(\not p'+m)\gamma^\nu(\not p''+m)\right] = \mathrm{Tr}\left[\gamma_\nu\,\not p'\,\gamma^\nu\,\not p'\right] + m^2\,\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\,\gamma^\nu)$$

Mas:

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\,\gamma_\lambda) = 4g_{\nu\lambda}\,,$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\,\gamma^\nu) = \mathrm{Tr}(\gamma_\nu\,g^{\nu\lambda}\,\gamma_\lambda) = 4g^{\nu\lambda}\,g_{\nu\lambda} = 4\sum_\lambda \delta_\lambda^\lambda = 16,$$

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_\nu\,\gamma_\sigma\,\gamma_\lambda\,\gamma_\rho\right] = 4g_{\nu\rho}\,g_{\sigma\lambda} - 4g_{\nu\lambda}\,g_{\sigma\rho} + 4g_{\nu\sigma}\,g_{\lambda\rho}\,,$$

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_\nu\,\not p'\,\gamma^\nu\,\not p''\right] = \mathrm{Tr}\left[\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\rho\right]\,g^{\nu\lambda}\,p'^\sigma\,p''^\rho =$$

$$= 4\left\{g_{\nu\rho}\,g_{\sigma\lambda} - g_{\nu\lambda}\,g_{\sigma\rho} + g_{\nu\sigma}\,g_{\lambda\rho}\right\} g^{\nu\lambda}\,p'^\sigma\,p''^\rho =$$

$$= 4\left\{\delta_\rho^\lambda\,g_{\sigma\lambda}\,p'^\sigma\,p''^\rho - 4g_{\sigma\rho}\,p'^\sigma\,p''^\rho + \delta_\sigma^\lambda\,g_{\lambda\rho}\,p'^\sigma\,p''^\rho\right\} = -8\,(p'\,p''),$$

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_\nu\,(\not p'+m)\,\gamma^\nu(\not p''+m)\right] = 8\left[2m^2 - (p'p'')\right].$$

Portanto a parte imaginária de G(p) é:

$$\mathrm{Im}\;G(p) = \frac{e^2}{6m^2p^2}\iint d^4p'\,dx'\;\delta(p-p'+p'')\left[2m^2 - (p'p'')\right]\delta(p'^2-m^2)\,\delta(p''^2-m^2)\times$$

$$\times\;\left[\epsilon(p'') - \epsilon(p')\right] =$$

$$= -\frac{e^2}{6\pi^2 p^2}\int d^4p' \left[2m^2 - p'(p'-p)\right]\delta(p'^2-m^2)\ \delta((p-p')^2-m^2)\ \times$$

$$\times\ \left[\epsilon(p') + \epsilon(p-p')\right] =$$

$$= -\frac{e^2}{6\pi^2 p^2}\int \frac{d^3p'}{2\sqrt{\vec{p}'^2+m^2}}\left\{\left[2m^2 - \sqrt{\vec{p}'^2+m^2}\left(\sqrt{\vec{p}'^2+m^2}-p_o\right) + \vec{p}'\ (\vec{p}'-\vec{p})\right]\delta\left(p^2 + \right.\right.$$

$$\left. + 2\vec{p}\cdot\vec{p}' - 2p_o\sqrt{\vec{p}'^2+m^2} + \vec{p}'^2+m^2-\vec{p}'^2-m^2\right)\left(1 + \frac{p_o - \sqrt{\vec{p}'^2+m^2}}{\left|p_o - \sqrt{\vec{p}'^2+m^2}\right|}\right) +$$

$$+ \left[2m^2 - \sqrt{\vec{p}'^2-m^2}\left(\sqrt{\vec{p}'^2+m^2}+p_o\right) + \vec{p}'(\vec{p}'-\vec{p})\right]\delta\left(p^2+2\vec{p}\cdot\vec{p}' + 2p_o\sqrt{\vec{p}'^2+m^2}\right.$$

$$\left.\left. + \vec{p}'^2 + m^2 - \vec{p}'^2 - m^2\right)\left(-1 + \frac{p_o + \sqrt{\vec{p}'^2+m^2}}{\left|p_o + \sqrt{\vec{p}'^2+m^2}\right|}\right)\right\} .$$

Levando em conta o valor de $\vec{p}\cdot\vec{p}'$ resultante da função delta, obtem-se:

$$\mathrm{Im}\ G(p) = -\frac{e^2}{12\pi^2 p^2}\int \frac{d^3p'}{\sqrt{\vec{p}'^2+m^2}}\left(m^2 + \frac{p^2}{2}\right)\left\{\delta\left(p^2+2\vec{p}\cdot\vec{p} - \right.\right. \tag{3.31}$$

$$\left. - 2p_o\sqrt{\vec{p}'^2+m^2}\right)\left[1 + \frac{p_o - \sqrt{\vec{p}'^2+m^2}}{\left|p_o - \sqrt{\vec{p}'^2+m^2}\right|}\right] + \delta\left(p^2+2\vec{p}\cdot\vec{p}' + 2p_o\sqrt{\vec{p}'^2+m^2}\right)\times$$

$$\left.\times\left[-1 + \frac{p_o + \sqrt{\vec{p}'^2+m^2}}{\left|p_o + \sqrt{\vec{p}'^2+m^2}\right|}\right]\right\} .$$

A expressão de Im G(p) é relativisticamente invariante, como está claro pela ante-penúltima fórmula. Podemos, então, calculála no sistema em que $\vec{p} = 0$.

Temos, então:

$$\mathrm{Im}\ G(p) = -\frac{e^2}{3\pi}\left(1+\frac{2m^2}{p_o^2}\right)\int_0^{\sqrt{p_o^2-m^2}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+m^2}}\,\delta\left(p_o^2-2|p_o|\sqrt{{}^2+m^2}\right)\frac{p_o}{|p_o|}\ , \tag{3.32}$$

pois para $p_o > 0$ só o 1º têrmo é $\neq 0$, para $p_o < 0$ só o 2º.

$$\mathrm{Im}\ \mathcal{G}(0,p_o) = -\frac{e^2}{6\pi}\left(1+\frac{2m^2}{p_o^2}\right)\frac{1}{p_o}\sqrt{\frac{p_o^2}{4}-m^2}\ \Theta\left(\frac{|p_o|}{2}-m\right)$$

$$= -\frac{e^2}{12\pi}\left(1+\frac{2m^2}{p_o{}^2}\right)\frac{p_o}{|p_o|}\sqrt{1-\frac{4m^2}{p_o{}^2}}\ \Theta\left(\frac{p_o^2}{4}-m^2\right) .$$

Em forma invariante:

$$\mathrm{Im}\ \mathcal{G}(p) = -\,\epsilon(p)\,\frac{e^2}{12\pi}\left(1+\frac{2m^2}{p^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}\ \Theta\left(\frac{p^2}{4}-m^2\right) \tag{3.33}$$

Daí:

$$\mathrm{Im}\ G(0) = 0\ . \tag{3.34}$$

Para o cálculo de Re G(p) observamos que, de (3.21) e (3.20):

$$K_{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ e^{-ip(x-x')}\ G(p)\left[p_\mu\ p_\nu - g_{\mu\nu}\ p^2\right] =$$

$$= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - g_{\mu\nu}\Box\right) G(x-x')\ ,$$

onde:

$$G(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ e^{-ip(x-x')}\ G(p)\ . \tag{3.35}$$

Mas, pela expressão de $K_{\mu\nu}(x-x')$ em função de $S^R(x-x')$ e $S^A(x'-x)$ (3.9b), vê-se que (causalidade):

$$K_{\mu\nu}(x-x') = 0 \qquad \text{se} \quad x'_o > x_0 \tag{3.36}$$

portanto:

$$G(x-x') \qquad\qquad \text{se} \quad x'_o > x_o \; . \tag{3.37}$$

Desta propriedade e da integral acima segue-se que:

$$G(\vec{p},p_o+i\eta) = \int dx\, G(x)e^{i(p_o+i\eta)x_o - \vec{p}\cdot(\vec{x})} \tag{3.38}$$

é uma função analítica de $p_o + i\eta$, $\eta > 0$, regular no semiplano superior (Teorema: Condição necessária e suficiente para que uma função $G(p_o)$ seja o limite de uma função analítica $G(p_o+i\eta)$ quando $\eta \longrightarrow 0$ é que a transformada $G(x_o)$ de $G(p_o)$ seja nula para $x_o < 0$ Titchmarsh, Fourier Integrals, pg. 128).

E se tem (Titchmarsh, pg. 120):

$$\mathrm{Re}\; g(\vec{p},p_o) = \frac{1}{\pi}\, P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\; g(\vec{p},x)}{x-p_o}\, dx \; . \tag{3.39}$$

Agora:

$$\mathrm{Im}\; G(p) = -\pi\epsilon(p)\,\pi^{(o)}(p^2) \; , \tag{3.40}$$

onde:

$$\pi^{(o)}(p^2) = \frac{e^2}{12\pi^2}\left(1+\frac{2m}{p^2}\right)\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}\;\Theta\left(\frac{p^2}{4}-m^2\right). \tag{3.41}$$

Logo:

$$\mathrm{Re}\; G(p) = -P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|x|}\, \frac{\pi^{(o)}(x^2-\vec{p}^2)}{x-p_o}\, dx =$$

$$= - P \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{(o)}(x^2 - \vec{p}^{\,2}) \left[\frac{1}{x - p_o} + \frac{1}{x + p_o} \right] dx = - P \int_0^{\infty} \frac{\pi^{(o)}(x^2 - \vec{p}^{\,2})}{x^2 - p_o^2} d(x^2).$$

Faça:

$$x^2 - p^2 = a \qquad (3.43)$$

então:

$$\mathrm{Re}\; G(p) = - P \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\pi^{(o)}(a)}{a^2 - p^2} da \equiv - \bar{\pi}^{(o)}(p^2) \;. \qquad (3.44)$$

Portanto:

$$G(p) - G(0) = - \bar{\pi}^{(o)}(p^2) + \bar{\pi}^{(o)}(0) - i\pi\epsilon(p)\pi^{(o)}(p^2). \qquad (3.45)$$

Da expressão de definição de $\pi^{(o)}(p^2)$ vemos que $\pi^{(o)}(a) \to \frac{e^2}{12\pi^2}$ quando $a \longrightarrow \infty$, logo a integral que define $\bar{\pi}^{(o)}(p^2)$ não converge.

Para a diferença $\bar{\pi}^{(o)}(p^2) - \bar{\pi}^{(o)}(0)$ escrevemos, porém:

$$\bar{\pi}^{(o)}(p^2) - \bar{\pi}^{(o)}(0) = P\int_0^{\infty} \pi^{(o)}(a) da \left[\frac{1}{a - p^2} - \frac{1}{a} \right] =$$

$$= p^2\, P\int_0^{\infty} \frac{\pi^{(o)}(a) da}{a(a - p^2)} \qquad (3.46)$$

que converge:

Esta é a essência do princípio de renormalização da carga: $\bar{\pi}^{(o)}(p^2)$ e $G(p)$ não são funções próprias (divergem); mas $\bar{\pi}^{(o)}(p^2) - \bar{\pi}^{(o)}(0)$ e, portanto, $G(p) - G(0)$ existe e é finita, pelo processo de cálculo adotado.

O resultado é:

$$\bar{\pi}^{(o)}(p^2) - \bar{\pi}^{(o)}(0) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left[\frac{5}{3} + \frac{4m^2}{p^2} \left(1 + \frac{2m^2}{p^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}}{\left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \right|} \right] \qquad (3.47)$$

onde $1 - \frac{4m^2}{p^2} > 0$. Para valores pequenos de $\left|\frac{p^2}{m^2}\right|$ tem-se:

$$\bar{\pi}^{(o)}(p^2) - \bar{\pi}^{(o)}(0) = \frac{p^2}{m^2} \frac{e^2}{60\pi^2} + \dots \quad (3.48)$$

Assim:

$$j_\mu^{obs}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \int dx' \, e^{-ip(x-x')}\left[1 + G(p) - G(0)\right] j_\mu^{ext}(x')$$

ou:

$$j_\mu^{obs.}(x) = \int \epsilon(x-x') \, j_\mu^{ext}(x') \, d^4x' \ , \qquad (3.49)$$

onde:

$$\epsilon(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \, e^{-ip(x-x')} \, \epsilon(p^2)$$

e

$$\epsilon(p^2) = 1 + G(p) - G(0) = 1 - \bar{\pi}^{(o)}(p^2) + \bar{\pi}^{(o)}(0) - i\pi\epsilon(p)\pi^{(o)}(p^2). \qquad (3.50)$$

O vácuo se comporta como um meio polarizável com constante dielétrica $\epsilon(x-x')$.

O acréscimo à energia total devido à polarização do vácuo é obtido notando que de

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \qquad (I.1.15)$$

vem:

$$\frac{\partial H}{\partial x_o} = \int \frac{\partial T^{oo}}{\partial x^o} \, d^3x = \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{o\mu} \, d^3x = - \int d^3x \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^o} = - \int d^3x \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^{ext}} \frac{\partial A^{ext}}{\partial x^o}$$

e de

$$\mathcal{L} = - \langle 0 | j_\mu(x) | 0 \rangle A^{\mu\, ext} \qquad (3.51)$$

obtem-se:

$$\delta E = \int \langle 0 | j_\mu(x) | 0 \rangle \frac{\partial A^{\mu\, ext}}{\partial x^o} \, dx \qquad (3.52)$$

que dá lugar a:

$$\delta E = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \; p_o \; j_\mu(p) \; A^{\mu\,ext}(-p) \tag{3.53}$$

Agora:

$$j_\mu(p) = (G(p) - G(0)) \; j_\mu{}^{ext}(p) \tag{3.54}$$

como resulta de:

$$\langle 0|j_\mu(x)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int j_\mu(p) \; e^{-ipx} \; d^4p =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \iint d^4p \; d^4x' \; e^{-ip(x-x')}(G(p) - \epsilon(0)) j_\mu^{ext}(x')$$

e:

$$j_\mu^{ext}(x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int j_\mu^{ext}(p) \; e^{-ipx'} \; d^4p$$

Por outro lado de:

$$\Box A_\mu^{ext}(x) = j_\mu^{ext}(x)$$

vem:

$$-p^2 \; A_\mu^{ext}(p) = j_\mu^{ext}(p) \; . \tag{3.55}$$

Portanto:

$$\delta E = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \; p_o \; \frac{j_\mu^{ext}(p) \; j_\mu^{ext}(-p)}{-p^2} \Big[-\bar{\pi}^{(o)}(p^2) + \bar{\pi}^{(o)}(0) -$$

$$- i\pi\epsilon(p)\pi^{(o)}(p^2) \Big] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p |p_o| \; \frac{j_\mu^{ext}(p) j^{\mu\,ext}(-p)}{-2p^2} \; \pi^{(o)}(p^2) \; . \tag{3.56}$$

Vimos que Im G(p) é convergente enquanto Re G(p) diverge. E as condições de causalidade e de gauge invariance permitiram obter expressões definidas para essas quantidades.

Retomemos a parte real de $K_{\mu\nu}(p)$:

$$\mathrm{Re}\ K_{\mu\nu}(p) = -\frac{e^2}{16\pi^3}\iint d^4p\ d^4p''\ \delta(p-p'+p'')\ \mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(\not p'+m)\gamma_\nu(\not p''+m)\right] \times$$

$$\times\ P\left[\frac{\delta(p''^2-m^2)}{p'^2-m^2}+\frac{\delta(p'^2-m^2)}{p''^2-m^2}\right].$$

Como:

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(\not p'+m)\gamma_\nu(\not p''+m)\right] = 4\left\{p''_\mu\ p'_\nu + p'_\mu\ p''_\nu - g_{\mu\nu}((p'p'')-m^2)\right\}$$

obtemos:

$$\mathrm{Re}\ K_{\mu\nu}(p) = -\frac{e^2}{4\pi^3}\int d^4p'\ \left\{(p'_\mu-p_\mu)p'_\nu + p'_\mu\ (p'_\nu-p_\nu) - \right.$$

$$\left. - g_{\mu\nu}(p'^2-p'p-m^2)\right\} P\left[\frac{\delta(p'^2-m^2)}{(p'-p)^2-m^2}+\frac{\delta(p'-p)^2-m^2}{p'^2-m^2}\right]. \quad (3.57)$$

Lembrando

$$\frac{x_0}{|x_0|} = \frac{1}{i\pi}\ P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau}\ e^{i\tau x_0} \qquad (2.26)$$

obtemos (multiplicando por $e^{i\omega x_0}$ e integrando em x_0):

$$P\,\frac{1}{\omega} = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x_0}\ \frac{x_0}{|x_0|}\ dx_0\ .$$

Logo, como:

$$\delta(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx_0\ e^{iux_0}$$

vem:

$$P\left\{\frac{\delta(u)}{\omega}+\frac{\delta(\omega)}{u}\right\} = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ dx_2\left[\frac{x_1}{|x_1|}+\frac{x_2}{|x_2|}\right]e^{iux_1+i\omega x_2}$$

4. A Matriz de Espalhamento

4a. Relação entre as representações de Heisenberg e da Interação.

Vimos, portanto, que, na representação de Heisenberg, a solução das equações de movimento (dos operadores de campo) é dada por:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(o)}(x) + e\ A_\mu^{(1)}(x) + e^2\ A_\mu^{(2)}(x) + \dots ,$$
$$\psi(x) = \psi^{(o)}(x) + e\ \psi^{(1)}(x) + e^2\ \psi^{(2)}(x) + \dots ,$$

onde $A_\mu^{(n)}(x)$ e $\psi^{(n)}(x)$ são obtidas das equações de recurrência mediante as funções de Green, e se expressam em têrmos de $A_\mu^{(o)}$ e $\psi^{(o)}$; ou são obtidas pelas fórmulas:

$$A_\mu^{(n)}(x) = i^n \int_{-\infty}^{t} dx' \dots \int_{-\infty}^{t^{(n-1)}} dx^{(n)} \left[V^{(o)}(x^{(n)}), \dots \left[V^{(o)}(x'),\ A_\mu^{(o)}(x)\right] \dots\right], \tag{4.1}$$

$$\psi^{(n)}(x) = i^n \int_{-\infty}^{t} dx' \dots \int_{-\infty}^{t^{(n-1)}} dx^{(n)} \left[V^{(o)}(x^{(n)}) \dots \left[V^{(o)}(x'),\ \psi^{(o)}(x) \dots\right]\right]. \tag{4.2}$$

Por outro lado, na representação da interação, a solução do problema é dada pelo conhecimento de $\Phi(t_o)$ e $S(t,t_o)$, de modo que:

$$\Phi(t) = S(t,t_o)\ \Phi(t_o) \tag{1.8}$$

sendo $S(t,t_o)$ dado por (1.15):

$$S(t,t_o) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t,t_o) = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \int_{t_o}^{t} dt' \int_{t_o}^{t'} dt'' \dots \int_{t_o}^{t_{k-1}} dt_k\ V_I(t')\, V_I(t'') \dots V_I(t_k)$$

$$V_I(t) = \int d^3x\ j_\mu^I(x)\ A_I^\mu(x)$$

Se fizermos $t_o = -\infty$, $\Phi(-\infty)$ pode ser tomado como o vetor de estado na representação de Heisenberg de modo que $S(t) = S(t,-\infty)$ faz a transformação desta representação para a da interação. Ora, na representação da interação, os operadores ψ_I e $A_{\mu I}$ satisfazem às equações dos campos livres; logo, podemos identificá-los com $\psi^{(o)}$ e $A_\mu^{(o)}$. Assim:

$$S(t) = S(t,-\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} (-ie)^k \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \ldots \int_{-\infty}^{t_{k-1}} dt_k \; V^{(o)}(t') V^{(o)}(t'') \ldots V^{o}(t_k) \qquad (4.3a)$$

onde:

$$V^{(o)}(t) = \int d^3x \; j_\mu^{(o)}(x) \; A^{(o)\mu}(x) \qquad (4.4a)$$

ou:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-ie)^k \int_{-\infty}^{t} dx' \int_{-\infty}^{t'} dx'' \ldots \int_{-\infty}^{t_{k-1}} dx_k \; V^{(o)}(x') \, V^{(o)}(x'') \ldots V^{(o)}(x_k) \qquad (4.3b)$$

sendo:

$$V^{(o)}(x) = j_\mu^{(o)}(x) \; A^{\mu(o)}(x) \; . \qquad (4.4b)$$

É claro que se:

$$\Phi(t) = S(t,-\infty)\,\Phi(-\infty) = S(t)\;\Phi_H \, , \qquad (4.5)$$

então, de $A_\mu \, \Phi_H$, vem:

$$S A_\mu S^{-1} S \Phi_H = A_\mu^{(o)} \; \Phi(t) \; , \qquad (4.6)$$

isto é:

$$A_\mu(x) = S^{-1}(t) \; A_\mu^{(o)}(x) \; S(t) \; , \qquad (4.7)$$

$$\psi(x) = S^{-1}(t) \, \psi^{(o)}(x) \; S(t) \; . \qquad (4.8)$$

Como:

$$S^{-1}(t) = S^{+}(t) = \sum (ie)^k \int_{-\infty}^{t} dx' \int_{-\infty}^{t'} dx'' \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dx_n \; V^{(o)}(x_n) \ldots V^{(o)}(x') \; ,$$

podemos inserir S e S^{-1} nesta transformação para obter o desenvolvimento dos campos na representação de Heisenberg.

Da expressão da corrente na representação de Heisenberg resulta que podemos também escrever:

$$j_\mu(x) = S^{-1}(t)\ j_\mu^{(o)}(x)\ S(t)\ . \qquad (4.9)$$

Em geral:

$$f(x) = S^{-1}\ f^{(o)}(x)\ S(t)\ . \qquad (4.10)$$

S é, pois, o operador que transforma os campos livres nos campos acoplados.

Na representação da interação, pois:

$$i\ \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = V(t)\ \Phi(t)\ ,$$

$$V(t) = e\int j_\mu^{(o)}(x)\ A_\mu^{(o)}(x)\ d^3x, \qquad (4.11)$$

$$\Phi(t) = S(t,-\infty)\ \Phi(-\infty) = S(t)\ \Phi_H\ .$$

A solução formal:

$$\Phi(t) = e^{-i\int_{-\infty}^{t} V(t)dt}\ \Phi(-\infty) \qquad (4.12)$$

só é verdadeira se V(t) comuta em tempos diferentes. Pois se

$$[A,\ B] \neq 0, \quad e^{A+B} \neq e^{B+A}\ .$$

Podemos achar a expressão correta assim:

De:

$$i\ \frac{\partial S(t,t')}{\partial t} = V(t)\ S(t,t') \qquad (4.13)$$

vem:

$$S(t,t') = 1 - i\int_{t'}^{t} V(\tau)\ S(\tau,t')\ d\tau. \qquad (4.14)$$

Agora supondo $t \sim t'$ vem $S(\tau,\ t') \sim 1$ e

$$S(t,t') = 1 - i \int_{t'}^{t} V(\tau)\, d\tau \qquad (4.15)$$

$$\Phi(t) \cong \left(1 - i \int_{t'}^{t} V(\tau)\, d\tau \right) \Phi(t'), \qquad t' \sim t \qquad (5.16)$$

Recuando t', por pequenos intervalos, a $-\infty$, vem:

$$\Phi(t) = \lim_{t_n \to t_{n+1}} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - i \int_{t_{n+1}}^{t_n} V(\tau)\, d\tau \right) \Phi(-\infty) \qquad (4.17)$$

e $t_{n+1} \longrightarrow -\infty$, quando $n \to \infty$, sendo $\tau_o = t > t_1 > t_2 \;\ldots$ Mas aqui vemos que a ordem de ação dos $V(t)$ sôbre $|(-\infty)$ está definida atuando primeiro os V para tempos mais próximos de $-\infty$.

Assim:

$$\Phi(t) = P \left(e^{-i\int_{-\infty}^{t} V(t)dt} \right) \Phi(-\infty) \qquad (4.18)$$

$$= \sum \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{t} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{t} dt_n \; P \left\{ V(t_1) V(t_2) \ldots V(t_n) \right\} \Phi(-\infty)$$

4b. Definição da matriz S

Dado o número de electrons, pósitrons e fotons nos vários estados individuais, no instante $t = -\infty$, qual é o estado do campo para $t = \infty$?

Temos:

$$\Phi(+\infty) = P \left(e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} V(t)dt} \right) \Phi(-\infty) \qquad (4.19)$$

Assim:

$$S \equiv S(\infty, -\infty) = P \left(e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} V(t)dt} \right) \qquad (4.20)$$

transforma o estado inicial $\Phi(-\infty)$ no final $\Phi(+\infty)$. É a <u>matriz S</u> ou <u>matriz de espalhamento</u>.

$\Phi(\infty)$ pode ser uma superposição de estados χ ortogonais mutuamente. Se quizermos a transição de $\Phi(-\infty)$ a um χ, devemos calcular $(\chi, \Phi(+\infty)) = (\chi, S\Phi(-\infty))$.

É claro, pelo que vimos antes, que:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-ie)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; P\left(V^{(o)}(x_1) V^{(o)}(x_2) \ldots V^{(o)}(x_n)\right), \quad (4.21)$$

onde:

$$V^{(o)}(x) = j_\mu^{(o)}(x)\, A_\mu^{(o)}(x) \; . \quad (4.22)$$

Podemos separar e $V^{(o)}(x)$ na soma

$$eV^{(o)}(x) = V^{(e)} + V^{(i)} \; , \quad (4.23)$$

onde $V^{(e)}$ é a energia de interação do campo electron-pósitron com o campo eletromagnético externo, inclusive fótons, $eV^{(i)}$ é a energia de interação do campo electron-pósitron com as oscilações do ponto-zero do campo eletromagnético.

Teremos, então:

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{m+n}}{m!\; n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{m+n} \; P\left(V^{(e)}(x_1) \ldots V^{(e)}(x_m) \times \right.$$

$$\left. \times \, V^{(i)}(x_{m+1}) \ldots V^{(i)}(x_{m+n})\right) . \quad (4.24)$$

S_o é o têrmo que não contém $V^{(e)}$:

$$S_o = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \; P\left(V^{(i)}(x_1)\, V^{(i)}(x_2) \ldots V^{(i)}(x_n)\right) . \quad (4.25)$$

S_1 contém um $V^{(e)}$ (espalhamento por campo externo em 1ª aproximação de Born, levando em conta a interação dos electrons e positrons com as flutuações do vácuo do campo eletromagnético),

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n(-i)}{n! \quad 1!} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx = P\left(V^{(e)}(x) V^{(i)}(x_1) \ldots V^{(i)}(x_n) \right) \tag{4.26}$$

4c. Elementos de matriz (amplitudes) dos operadores de campo.

Vimos:

$$\psi(x) = u(x) + \overline{V}(x); \quad \overline{\psi}(x) = \overline{u}(x) + V(x),$$

onde:

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1,2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{E_p}} b_r(p) \omega_r(p) e^{-ipx},$$

$$\overline{V}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1,2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{E_p}} d_r^+(p) v_r(p) e^{ipx},$$

$$\overline{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1,2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{E_p}} b_r^+(p) \overline{\omega}_r(p) e^{ipx},$$

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{r=1,2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{E_p}} d_r(p) \overline{v}_r(p) e^{-ipx}.$$

É claro que se no estado inicial $\Phi(-\infty)$, há um fermion de momentum p e spin r:

$$\Phi(-\infty) = b_r^+(p) \Phi_o , \tag{4.27}$$

então o estado final, na transição provocada por $u(x)$, não deve conter êsse fermion:

$$\left(\Phi(+\infty),\ b_r(p)\ \Phi(-\infty)\right) = \left(\Phi(+\infty),\ b_r(p)\ b_r^+(p)\ \Phi_o\right) =$$

$$= \left(\Phi(+\infty),\ 1 - b_r^+(p) b_r(p) \Phi_o\right) = \left(\Phi(+\infty),\ \Phi_o\right)$$

Portanto:

$$\left(\Phi(+\infty),\ u(x)\ \Phi(-\infty)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ \frac{1}{\sqrt{E_p}}\ \omega_r(p)\ e^{-ipx} \tag{4.28}$$

é a amplitude para aniquilamento de um fermion de momentum p e spin r.

Do mesmo modo, vê-se que:

$$\left(\Phi(+\infty),\ \bar{v}(x)\ \Phi(-\infty)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ \frac{1}{\sqrt{E_p}}\ v_r(p)\ e^{ipx} \tag{4.29}$$

é a amplitude para creação de um antifermion de momentum p e spin r. Naturalmente, vê-se que:

$$\left(\Phi_{o+}(+\infty),\ \psi(x)\ \Phi_{1+}(-\infty)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ \frac{1}{\sqrt{E_p}}\ \omega_r(p)\ e^{-ipx} \tag{4.30}$$

também é a expressão da primeira amplitude acima, se $\Phi_{o+}(+\infty)$ representa o estado final, com nenhum fermion de momentum p e spin r e $\Phi_{1+}(-\infty)$ representa o estado inicial, com uma tal partícula. Também a segunda amplitude pode ser escrita:

$$\left(\Phi_1(+\infty),\ \psi(x)\ \Phi_{o-}(-\infty)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ \frac{1}{\sqrt{E_p}}\ v_r(p)\ e^{ipx} \tag{4.31}$$

com notação óbvia.

As amplitudes para creação de um fermion e aniquilação de um antifermion são, respectivamente:

$$(\Phi(+\infty),\ \bar{u}(x)\Phi(-\infty)) = (\Phi_{1+}(+\infty),\ \bar{\psi}(x)\Phi_{o+}(-\infty) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ \frac{1}{\sqrt{E_p}}\ \bar{\omega}_r(p) e^{ipx} \tag{4.32}$$

$$\left(\Phi(+\infty), V(x)\ \Phi(-\infty)\right) = \left(\Phi_{o-}(+\infty), \psi(x)\ \Phi_{1-}(-\infty)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{E_p}} \bar{v}_r(\underline{p})\ e^{-ipx}. \qquad (4.33)$$

Para o campo eletromagnético:

$$\left(\Phi_{ok}(+\infty),\ A_\mu(x)\ \Phi_{1k}(-\infty)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{|k|}} \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-ikx} \qquad (4.34)$$

é a amplitude para absorção de um foton de momentum $\vec{k}$ e polarização λ, e:

$$(\Phi_{1k}(+\infty),\ A_\mu(x)\ \Phi_{ok}(-\infty) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{|k|}} \epsilon_\mu^{(\lambda)}\ e^{ikx} \qquad (4.35)$$

é a amplitude de emissão de um tal foton.

5. Representação da matriz S como soma de produtos normais

Vimos que:

$$S = \sum_n S^{(n)} \ ,$$

$$S^{(n)} = \frac{(-ie)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\ P\left(j_\mu(x)A_\mu(x_1),\ j_\mu(x_2) \ldots j_\mu(x_n)A_\mu(x_n)\right) \ ,$$

onde $j_\mu(x) = N(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \psi(x))$ e $A_\mu(x)$ e $\psi(x)$ obedecem às equações de campos livres. Então escrevemos:

$$S^{(n)} = \frac{(-ie)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n P\left(N\left(\bar{\psi}(x_1)\ A\!\!\!/(x_1)\ \psi(x_1)\right) N(\bar{\psi}(x_2) A\!\!\!/(x_2) \psi(x_2) \ldots \times\right.$$

$$\left. \times\ N(\bar{\psi}(x_n)\ A\!\!\!/(x_n)\ \psi(x_n))\right) \qquad (5.1)$$

Como o produto T difere do produto P por um sinal (no caso de espinores):

$$T(\psi(x_1)\,\psi(x_2)\ldots) = \delta_P\, P(\psi(x_1)\,\psi(x_2)\ldots),$$

$$T(A_\mu(x_1)\,A_\nu(x_2)\ldots) = P(A_\mu(x_1)\,A_\nu(x_2)\ldots)$$

e como, em cada ponto, os ψ ocorrem bilinearmente em $S^{(n)}$ é claro que o produto P em S é igual ao produto T:

$$P(N(\bar\psi(x_1)A(x_1)\psi(x_1))\;N(\bar\psi(x_2)A(\;_2)\,\psi(x_2))\ldots) =$$

$$T(N(\bar\psi(x_1)A(x_1)\psi(x_1))\;N(\bar\psi(x_2)A(x_2)\,\psi(x_2))\ldots)\;. \qquad (5.2)$$

Queremos expressar o produto T como uma soma de têrmos que são produtos normais. Isto porque um produto normal de operadores só tem um elemento de matriz entre dois estados dados, precisamente entre o estado inicial que contém o mesmo número de partículas que o de operadores de aniquilamento do produto normal, e o estado final que contém as partículas especificadas pelos operadores de criação.

Segundo a definição, temos (omitindo os índices de A_μ):

$$N(A(1)A(2)) = N\Big([A^{(+)}(1) + A^{(-)}(1)]\,[A^{(+)}(2) + A^{(-)}(2)]\Big) =$$

$$= A^{(+)}(1)\;A^{(+)}(2) + A^{(-)}(2)A^{(+)}(1) + A^{(-)}(1)A^{(+)}(2) +$$

$$+ A^{(-)}(1)\;A^{(-)}(2)\;;$$

$$N(A(1)A(2)A(3)) = A^+(1)A^+(2)A^+(3) + A^-(3)A^+(1)A^+(2) + A^-(2)A^+(1)A^+(3) +$$

$$+ A^-(2)A^-(3)A^+(1) + A^-(1)A^+(2)A^+(3) + A^-(1)A^-(3)A^+(2) +$$

$$+ A^-(1)A^-(2)A^+(3) + A^-(1)A^-(2)A^-(3) =$$

$$= A^+(1)A^+(2)A^+(3) + (A^-(1)A^+(2)A^+(3) + A^-(2)A^+(1)A^+(3) +$$

$$+ A^-(3)A^+(1)A^+(2)) + (A^-(2)A^-(3)A^+(1) + A^+(1)A^-(3)A^+(2) +$$
$$+ A^-(1)A^-(2)A^+(3)) + A^-(1)A^-(2)A^-(3) \; .$$

Vemos que, em geral:

$$N(A(1)A(2)\ldots A(n)) = A^+(1)A^+(2)\ldots A^+(n) + \sum_{i=1}^{n} A^-(i)A^+(1)\ldots A^+(i-1) +$$
$$+ A^+(i+1)\ldots A^+(n) + \sum_{i<j} A^-(i)A^-(j)A^+(1)\ldots$$
$$\ldots A^+(n) + \ldots A^-(1)A^-(2)\ldots A^-(n) \; . \quad (5.3)$$

Agora, designando por $\varphi(i)$ um spinor $\psi(i)$ ou $\overline{\psi}(i)$:

$$N(\varphi(1)\varphi(2)) = N\Big([\varphi^+(1) + \varphi^-(1)][\varphi^+(2) + \varphi^-(2)]\Big) =$$
$$= \varphi^+(1)\varphi^+(2) - \varphi^-(2)\varphi^+(1) + \varphi^-(1)\varphi^+(2) + \varphi^-(1)\varphi^-(2);$$

$$N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)) = \varphi^+(1)\varphi^+(2)\varphi^+(3) + \varphi^-(3)\varphi^+(1)\varphi^+(2) - \varphi^-(2)\varphi^+(1)\varphi^+(3) +$$
$$+ \varphi^-(2)\varphi^-(3)\varphi^+(1) + \varphi^-(1)\varphi^+(2)\varphi^+(3) - \varphi^-(1)\varphi^-(3)\varphi^+(2) +$$
$$+ \varphi^-(1)\varphi^-(2)\varphi^+(3) + \varphi^-(1)\varphi^-(2)\varphi^-(3) =$$
$$= \varphi^+(1)\varphi^+(2)\varphi^+(3) + (\varphi^-(1)\varphi^+(2)\varphi^+(3) - \varphi^-(2)\varphi^+(1)\varphi^+(3) + \varphi^-(3)\varphi^+(1)\varphi^+(2))$$
$$+ (\varphi^-(1)\varphi^-(2)\varphi^+(3) + \varphi^-(2)\varphi^-(3)\varphi^+(1) - \varphi^-(1)\varphi^-(3)\varphi^+(2)) + \varphi^-(1)\varphi^-(2)\varphi^-(3).$$

Em geral:

$$N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)) = \varphi^+(1)\varphi^+(2)\ldots\varphi^+(n) + \sum_{i=1}^{n} \delta_p \varphi^-(i)\varphi^+(1)\ldots\varphi^+(i-1)\times$$
$$\times\, \varphi^+(i+1)\ldots\varphi^+(n) + \sum_{i<j} \delta_p \varphi^-(i)\,\varphi^-(j)\varphi^+(1)\ldots\varphi^+(n) + \ldots + \varphi^-(1)\varphi^-(2)\ldots$$
$$\ldots\,\varphi^-(n), \quad (5.4)$$

onde δ_p é 1 ou -1 segundo a permutação (i.j 1...n) é par ou impar em relação a (1, 2, ..., n), correspondente a cada têrmo.

É claro, pois, que:

$$N(\varphi(1)\varphi(2)) = - N(\varphi(2)\varphi(1)) \;, \tag{5.5}$$

$$N(\varphi(1)\ldots\varphi(n)) = \delta_p \, N(\varphi(i)\varphi(j)\ldots) . \tag{5.6}$$

Vê-se fàcilmente que:

$$\begin{aligned}
&A(1)A(2) = N(A(1)A(2)) + \langle 0|A(1)A(2)|0\rangle \;, \\
&\psi(1)\psi(2) = N(\psi(1)\psi(2)) + \langle 0|\psi(1)\psi(2)|0\rangle \equiv N(\psi(1)\psi(2)), \\
&\overline{\psi}(1)\overline{\psi}(2) = N(\overline{\psi}(1)\overline{\psi}(2)) + \langle 0|\overline{\psi}(1)\overline{\psi}(2)|0\rangle \equiv N(\overline{\psi}(1)\overline{\psi}(2)), \\
&\overline{\psi}(1)\psi(2) = N(\overline{\psi}(1)\psi(2)) + \langle 0|\overline{\psi}(1)\psi(2)|0\rangle, \\
&\psi(1)\overline{\psi}(2) = N(\psi(1)\overline{\psi}(2)) + \langle 0|\psi(1)\overline{\psi}(2)|0\rangle.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Da expressão de $N(\varphi(2)\ldots\varphi(n))$ obtem-se:

$$\begin{aligned}
&\varphi(1)N(\varphi(2)\ldots\varphi(n)) = \varphi^+(1)\varphi^+(2)\ldots\varphi^+(n) + \varphi^-(1)\varphi^+(2)\ldots+\varphi^+(n) + \\
&+ \varphi^+(1)\sum_{i=2}^{n} \delta_{p_2}\varphi^-(i)\,\varphi^+(2)\ldots\,\varphi^+(n) + \varphi^-(1)\sum_{i<j}\delta p_2\,\varphi^-(i)\varphi^-(j) \\
&\varphi^+(2)\ldots\,\varphi^+(n) + \ldots + \varphi^+(1)\varphi^-(2)\varphi^-(3)\ldots\varphi^-(n) + \varphi^-(1)\varphi^-(2)\ldots\varphi^-(n).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Definindo a contração $\underbrace{\varphi(1)\varphi(2)} = \langle 0|\varphi(1)\varphi(2)|0\rangle$ e:

$$\begin{aligned}
&N(\underbrace{\varphi(1)\varphi(2)}\varphi(3)\ldots\varphi(n)) = \langle 0|\varphi(1)\varphi(2)|0\rangle\, N(\varphi(3)\ldots\,\varphi(n)), \\
&N(\varphi(1)\ldots\underbrace{\varphi(i)\ldots\,\varphi(j)}\ldots\varphi(n)) = \delta p\, N(\underbrace{\varphi(i)\varphi(j)}\varphi(1)\ldots\,\varphi(n)),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

obtém-se:

$$\varphi(1)N(\varphi(2)\ldots\varphi(n)) = N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)) + \sum_{i=2}^{n} N(\underbrace{\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(i)}\ldots\varphi(n)). \tag{5.10}$$

Desta se tira:

$$\begin{aligned}
\varphi(1)\varphi(2)N(\varphi(3)\ldots\varphi(n)) &= \varphi(1)N(\varphi(2)\ldots\varphi(n)) + \sum_{i=3}^{n} N(\underbrace{\varphi(2)\varphi(3)\ldots\varphi(i)}\ldots\varphi(n)) \\
&= N(\varphi(1)\ldots\varphi(n)) + \sum_{i=2}^{n} N(\varphi(1)\ldots\varphi(i)\ldots\varphi(n)) + \sum_{i=3}^{n} N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(i)\ldots\varphi(n)) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{i>1\\ j>2}} N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots \varphi(i)\ldots \varphi(j)\ldots \varphi(n))$$

e portanto:

$$\varphi(1)\varphi(2)\ldots \varphi(n) = N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots \varphi(n)) +$$

$$+ \sum_{i<j} N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots \varphi(i)\ldots \varphi(j)\ldots \varphi(n))$$

$$+ \sum_{\substack{i_1<j_1\\ i_2<j_2}} N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots \varphi(i_1)\ldots \varphi(i_2)\ldots \varphi(j_1)\ldots \varphi(j_2)\ldots \varphi(n) +$$

$$+ \sum_{\substack{i_1<j_1\\ i_2<j_2\\ i_3<j_3}} N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots \varphi(i_1)\ldots \varphi(i_2)\ldots \varphi(i_3)\ldots \varphi(j_1)\ldots \varphi(j_2)\ldots \varphi(j_3)\ldots$$
$$\ldots \varphi(j_3)\ldots \varphi(j_n)) + \ldots \qquad (5.11)$$

Assim, um produto T pode-se decompor em uma única soma de produtos normais. (5.11) é o <u>teorema de Wick</u>.

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4) &= N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)) + N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)) + \\
&+ N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)) + N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)) + \\
&+ N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)) + N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)) + \\
&+ N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)) + N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)) + \\
&+ N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)) + N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)) .
\end{aligned}$$

É claro que a definição de $N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4))$ resulta da que foi dada, pois:

$$N(\underbracket{\varphi(1)\varphi(\overbracket{2)\varphi(3})\varphi(4})) = -\langle 0|\varphi(1)\varphi(3)|0\rangle\, N(\overbracket{\varphi(2)\varphi(4)})$$

$$= -\langle 0|\varphi(1)\varphi(3)|0\rangle\langle 0|\varphi(2)\varphi(4)|0\rangle$$

e em geral:

$$N(\underbracket{\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)}\ldots\underbracket{\varphi(k)\ldots\varphi(n-1)\varphi(n)}) =$$

$$= (-1)^{\varepsilon}\underbracket{\varphi(1)\varphi(3)}\ldots\underbracket{\varphi(k)\varphi(n)}N(\varphi(2)\varphi(4)\ldots\varphi(k-1)\varphi(k+1)\ldots\varphi(n-1)),$$

onde E indica se a permutação

$$\begin{pmatrix} 1,\ 2,\ 3\ldots k-1,\ k,\ k+1,\ldots n-1,\ n \\ 1,\ 3,\ldots k,\ 2,\ 4,\ldots k-1,\ k+1,\ldots n-1 \end{pmatrix}$$

é par ou impar.

O teorema de Wick se aplica ainda quando alguns dos fatores (ou todos) são produtos normais, com a diferença de que não é preciso considerar os têrmos em que haveria contração entre os elementos dos produtos normais. Assim:

$$\varphi(1)\varphi(2)\,N(\varphi(3)\varphi(4))\varphi(5) = N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)\varphi(5)) +$$

$$+ N(\underbracket{\varphi(1)\varphi(2)}\varphi(3)\varphi(4)\varphi(5)) + N(\underbracket{\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)}\varphi(4)\varphi(5)) +$$

$$+ N(\underbracket{\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)}\varphi(5)) + N(\underbracket{\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)\varphi(5)}) +$$

$$+ N(\varphi(1)\underbracket{\varphi(2)\varphi(3)}\varphi(4)\varphi(5)) + N(\varphi(1)\underbracket{\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)}\varphi(5)) +$$

$$N(\varphi(1)\underbracket{\varphi(2)\varphi(3)\varphi(4)\varphi(5)}) + N(\varphi(1)\varphi(2)\underbracket{\varphi(3)\varphi(4)\varphi(5)}) +$$

$$+ N(\varphi(1)\varphi(2)\varphi(3)\underbracket{\varphi(4)\varphi(5)}) + \ldots\ldots\ldots$$

isto é, não figuram os têrmos em $\underbracket{\varphi(3)\ (4)}$.

Isto é trivial e resulta da fórmula anterior em que vimos

$$\varphi(1)\varphi(2)N(\varphi(3)\ldots\varphi(n))$$

Observe que na fórmula do teorema de Wick, os fatores dos produtos contraidos conservam a mesma ordem que êles têm no 1º membro.

Logo, definindo:

$$\dot{\varphi}(i)\dot{\varphi}(j) = \langle 0|T(\varphi(i)\varphi(j))|0\rangle \tag{5.13}$$

e

$$N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots\dot{\varphi}(i)\ldots\dot{\varphi}(j)\ldots\varphi(n)) = \delta_p N(\dot{\varphi}(i)\dot{\varphi}(j)\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n))$$
$$= \delta_p \langle 0|T(\dot{\varphi}(i)\dot{\varphi}(j))|0\rangle\, N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)) \tag{5.14}$$
$$N(\varphi(1)\ldots\dot{\varphi}(i_1)\ldots\ddot{\varphi}(i_2)\ldots\dot{\varphi}(j_1)\ldots\ddot{\varphi}(j_2)\ldots\varphi(n)) =$$
$$= \delta_p(\dot{\varphi}(i_1)\dot{\varphi}(j_1))(\ddot{\varphi}(i_2)\ddot{\varphi}(j_2))\, N(\varphi(1)\ldots\varphi(n)), \tag{5.15}$$

obtemos:

$$T(\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)) = N(\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)) + \sum_{i<j} N(\varphi(1)\ldots\dot{\varphi}(i)\ldots$$
$$\ldots\dot{\varphi}(j)\ldots\varphi(n)) + \sum_{\substack{i_1<j_1\\ i_2<j_2}} N(\varphi(1)\ldots\dot{\varphi}(i_1)\ldots\ddot{\varphi}(i_2)\ldots\dot{\varphi}(j_1)\ldots\ddot{\varphi}(j_2)\ldots$$
$$\ldots\varphi(n)) + \ldots \tag{5.16}$$

Se em T alguns fatores (ou todos) forem produtos normais, no desenvolvimento da direita não ocorrerão as contrações dos elementos dêsses produtos.

Por exemplo:

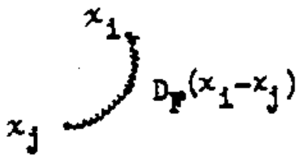
$$T(N(\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1))N(\bar{\psi}(x_2)\psi(x_2))) = N(\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_2)) +$$
$$+ N(\dot{\bar{\psi}}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\dot{\psi}(x_2)) + N(\bar{\psi}(x_1)\dot{\psi}(x_1)\dot{\bar{\psi}}(x_2)\psi(x_2)) +$$
$$+ N(\dot{\bar{\psi}}(x_1)\ddot{\psi}(x_1)\dddot{\bar{\psi}}(x_2)\dot{\psi}(x_2)). \tag{5.17}$$

Sabemos, assim, expandir S em somas de produtos normais.

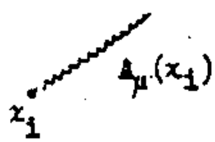
6. Diagramas de Feynman

6a. O cálculo da amplitude da matriz S para uma dada transição entre dois estados é, entretanto, complicado, mesmo nos casos mais simples. Êle é facilitado por um conjunto de regras, introduzidas por Feynman, e que permite escrever-se a amplitude com facilidade:

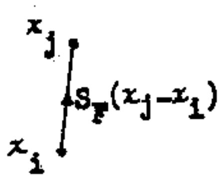
Em cada têrmo (produto normal) do desenvolvimento de $S^{(n)}$, pelo teorema de Wick, cada ponto x_i ocorre três vezes (em $\bar{\psi}(x_i) \not{A}(x_i)\, \psi(x_i)$). Numa figura, colocamos n pontos x_i. O operador $A_\mu(x_i)$ ocorre como um fator ou contraído com outro, $A_\nu(x_j)$: $A_\mu(x_i)\, A_\nu(x_j)$, que dá lugar à função $D_F(x_i - x_j)$. Nêste último caso, ligamos os pontos x_i e x_j por uma linha sinuosa:



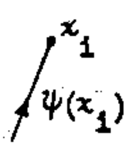
Quando $A_\mu(x_i)$ ocorre como fator isolado, ligamos o ponto x_i para fora da folha de papel, com uma linha sinuosa:



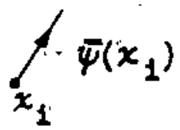
Uma contração de dois ψ, $\dot{\bar{\psi}}(x_i)\, \dot{\psi}(x_j)$, que dá lugar à função $S_F(x_j - x_i)$, é representada por uma linha orientada de x_i para x_j:



Um operador $\psi(x_i)$, não contraído, é representado por uma linha que vem da extremidade da folha para o ponto x_i



enquanto que $\bar{\psi}(x_1)$ é representado por uma linha que sai do ponto x_1:



Assim, em cada ponto (vértice) do gráfico, ocorrem duas linhas de fermions e uma de fotons.

Naturalmente, as linhas externas são determinadas pelos estados inicial e final e pelos elementos de matriz correspondentes dos operadores não contraídos ψ, $\bar{\psi}$ e A_μ.

Consideremos, como exemplo, o elemento de matriz entre um estado inicial contendo um electron de momentum p e nenhum foton, e um estado final contendo um electron de momentum p' e nenhum foton, de $S^{(2)}$:

$$\langle p',0|S^{(2)}|p,0\rangle = \frac{(-ie)^2}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, dx_2 \,\langle p'|T(N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\, \psi(x_1)).$$

$$.\; N(\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\, \psi(x_2))\;|p\rangle\langle 0|T(A_\mu(x_1)\; A_\nu(x_2)|0\rangle \,. \qquad (6.1)$$

É claro que no desenvolvimento de:

$T\Big(N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu\, \psi(x_1)\; N(\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu\, \psi(x_2))\Big)$ sômente os têrmos

$N(\bar{\psi}(x_1)\, \dot{\psi}(x_1)\, \dot{\bar{\psi}}(x_2)\, \psi(x_2))$ e $N(\dot{\bar{\psi}}(x_1)\, \psi(x_1)\, \bar{\psi}(x_2)\, \dot{\psi}(x_2))$

têm amplitude não nulas para a transição considerada; temos:

$$\langle 0|T(A_\mu(x_1)\; A_\nu(x_2))|0\rangle = -\,\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\; D_F(x_1 - x_2), \qquad (6.2)$$

$$N(\dot{\bar{\psi}}_\alpha(x_1)\; \psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\xi(x_2)\; \dot{\psi}_\eta(x_2)) = \langle 0|T(\;\bar{\psi}_\alpha(x_1)\;\; \psi_\eta(x_2))|0\rangle\; N(\psi_\beta(x_1)\; \bar{\psi}_\xi(x_2))$$

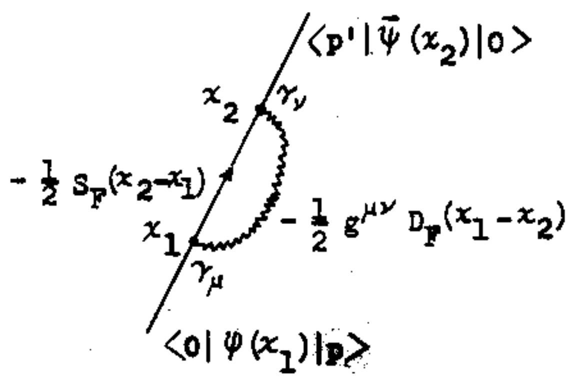
$$= \frac{1}{2}\, S^F_{\eta\alpha}\,(x_2 - x_1)\; N(\psi_\beta\,(x_1)\; \bar{\psi}_\xi(x_2)), \qquad (6.3)$$

$$N(\overline{\psi}_\alpha(x_1)\dot{\psi}_\beta(x_1)\dot{\psi}_\xi(x_2)\psi_\eta(x_2)) = -\frac{1}{2}S^F_{\beta\xi}(x_1-x_2)N(\overline{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\eta(x_2)). \tag{6.4}$$

Logo (observe troca de sinal do 1º têrmo ao colocarmos $\overline{\psi}(x_2)$ antes de $\psi(x_1)$):

$$\langle|p'0|S^{(2)}|p0\rangle = -\frac{e^2}{8}\iint dx_1\, dx_2 \Big\{\langle p'|N(\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu S^F(x_2-x_1)\gamma^\nu\psi(x_1))|p\rangle$$
$$+\langle p'|N(\overline{\psi}(x_1)\gamma_\nu S^F(x_1-x_2)\gamma^\nu\psi(x_2))|p\rangle\Big\} D_F(x_1-x_2) =$$
$$= -\frac{e^2}{4}\iint dx_1\, dx_2 \langle p'|N(\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu S^F(x_2-x_1)\gamma^\nu\psi(x_1)|p\rangle D_F(x_1-x_2) \tag{6.5}$$
$$= -\frac{e^2}{4}\iint dx_1\, dx_2 \langle p'|\overline{\psi}(x_2)|0\rangle \gamma_\nu S^F(x_2-x_1)\gamma^\nu \langle 0|\psi(x_1)|p\rangle D_F(x_1-x_2).$$

O gráfico é:



Dependendo da especificação dos estados inicial e final, o elemento $S^{(2)}$ dá lugar a outros processos, definidos pelos demais elementos do desenvolvimento de $T(N(\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1))\,N(\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)))$.

Assim, teremos os seguintes:

$$S^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!}\iint dx_1\, dx_2\, T(N(\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1))N(\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2)))T(A^\mu(x_1)A^\nu(x_2))$$

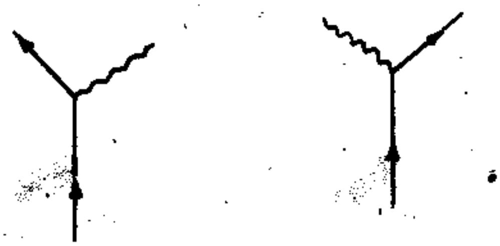
$$= \frac{(-ie)^2}{2!}\iint dx_1\, dx_2 \Big\{N\Big((\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1))(\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2))\Big)\Big[N\Big(A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\Big)+$$

$$+ \dot{A}^{\mu}(x_1)\dot{A}^{\nu}(x_2)\Big] + \Big[N(\dot{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma_\nu \dot{\psi}(x_2)) + N(\bar{\psi}(x_1)\gamma_\mu \dot{\psi}(x_1)\dot{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu \psi(x_2))\Big]$$

$$\Big[N\Big(A^{\mu}(x_1)A^{\nu}(x_2) + \dot{A}^{\mu}(x_1)\dot{A}^{\nu}(x_2)\Big)\Big] + N\Big(\dot{\bar{\psi}}(x_1)\gamma_\mu \ddot{\psi}(x_1)\,\ddot{\bar{\psi}}(x_2)\gamma_\nu \dot{\psi}(x_2)\Big)$$

$$\Big[N\Big(A^{\mu}(x_1)A^{\nu}(x_2) + \dot{A}^{\mu}(x_1)\dot{A}^{\nu}(x_2)\Big)\Big]\Big\}.$$

Os dois primeiros têrmos correspondem aos gráficos:

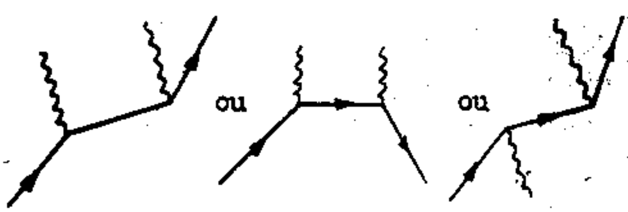


1º têrmo: dois efeitos de 1ª ordem simultâneos.

2º têrmo: espalhamento de e por e ou por e^+.

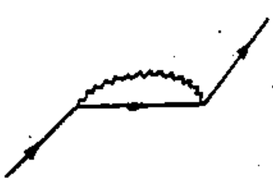
respectivamente.

O 3º e o 4º são:



3º + 4º têrmos: emissão de 2 fotons por e ou por e e e^+.

O 5º e o 6º:



5º + 6º têrmos.

O 7º

7° têrmo

O 8º

8º têrmo

Em geral, os diagramas correspondentes a $S^{(n)}$, podem ser separados em grupos, cada grupo contendo n diagramas, obtidos por numeração diferente dos pontos x_i. Êstes têrmos são simplificados se considerarmos apenas um diagrama de cada grupo e, ao mesmo tempo, desprezarmos o fator n! no denominador de $S^{(n)}$.

6b. Eliminação dos diagramas desconexos

Um diagrama é desconexo quando é constituido de duas partes, sem linhas que as liguem e uma delas sendo um polígono fechado de linhas de electrons.

Exemplos de polígonos fechados são:

etc.

Assim, o elemento de matriz correspondente ao primeiro diagrama é:

$$\frac{(-ie)^2}{2} \iint dx_1\, dx_2\, N\left(\dot{\bar{\psi}}\,(x_1)\gamma_\mu^{\alpha\beta}\, \ddot{\psi}_\beta(x_1)\, \dddot{\bar{\psi}}_\xi(x_2)\,\gamma_\nu^{\xi\eta}\, \dot{\psi}_\eta(x_2)\right) \dot{A}^\mu(x_1)\dot{A}^\nu(x_2)$$

$$= \frac{(-ie)^2}{2} \iint dx_1\, dx_2 \left(-\frac{1}{2}\, S^F_{\beta\xi}(x_1-x_2)\right)\left(\frac{1}{2}\, S^F_{\eta\alpha}(x_2-x_1)\right)\gamma_\mu^{\alpha\beta}\,\gamma_\nu^{\xi\eta}\left(-\frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} D^F(x_1-x_2)\right)$$

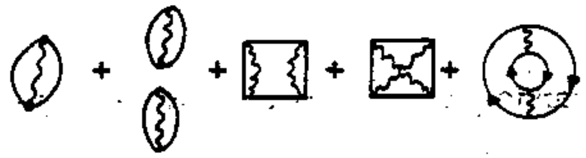
$$= \frac{(-ie)^2}{2!}\,\frac{1}{8} \iint dx_1\, dx_2\, T_r \left[\gamma_\mu\, S^F(x_1-x_2)\gamma^\mu\, S^F(x_2-x_1)\right] D^F(x_1-x_2) \;. \quad (6.7)$$

Levando em conta o diagrama obtido trocando x_1 com x_2 obtemos:

$$(-ie)^2\, \frac{1}{8} \iint dx_1\, dx_2\, \mathrm{Tr} \left[\gamma_\mu\; S^F(x_1-x_2)\gamma^\mu\, S^F(x_2-x_1)\right] D^F(x_1-x_2). \quad (6.8)$$

Agora, se tomarmos o valor esperado no vácuo de S, obtemos uma soma de todos os polígonos fechados:

$$\langle 0|S|0\rangle = \langle 0|\sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}|0\rangle = 1 + \ldots$$



$$(6.9)$$

Por outro lado, S não pode fazer transição do vácuo para nenhum outro estado $\langle n|S|0\rangle = 0$, $n \neq 0$, logo o vácuo é auto-estado de S:

$$S|0\rangle = C|0\rangle \quad (6.10)$$

Daí resulta:

$$\langle 0|S^+ = C^*\langle 0| \;, \quad (6.11)$$

logo:

$$\langle 0|S^+S|0\rangle = C^*C = |C|^2 \quad (6.12)$$

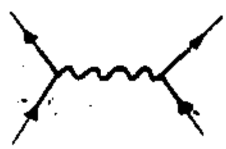
e como S é unitária: $S^+S = SS^+ = 1$, vem:

$$|C|^2 = 1, \qquad C = e^{i\alpha} . \tag{6.13}$$

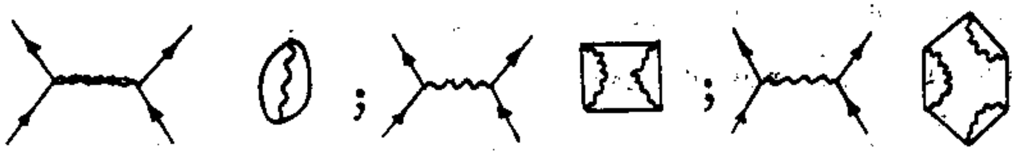
Portanto:

$$\langle 0|S|0\rangle = e^{i\alpha} . \tag{6.14}$$

Agora, dado um processo físico qualquer, por exemplo, o diagrama

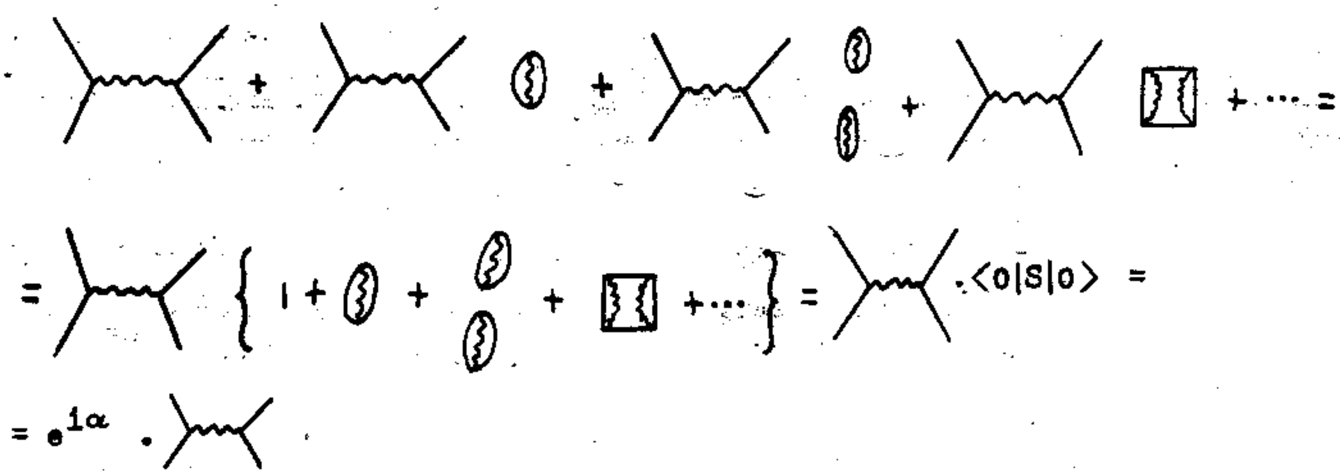


que representa o espalhamento de 2ª ordem de dois electrons, podemos ter, além dêste diagrama, os seguintes:



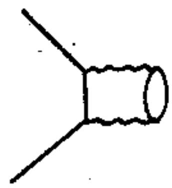
etc.

Somando todos êles, vemos que isto corresponde a multiplicar o primeiro, isto é, o seu elemento de matriz, por $e^{i\alpha}$, fator êste que não tem significação física:



Isto significa que, dado um diagrama desconexo, podemos desprezá-lo, porque o processo de significado físico é o diagrama sem os polígonos fechados desconexos.

Naturalmente, a regra não se aplica a diagramas que contenham polígonos fechados mas que sejam conexos a outras partes do diagrama, como por exemplo:

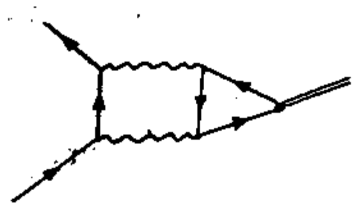


<u>Teorema de Furry</u>: <u>Podemos desprezar todos os diagramas que contenham polígonos fechados com um número ímpar de linhas de electrons</u>.

A razão está em que a um tal diagrama devemos somar a contribuição do que é obtido invertendo o sentido da linha do electron no polígono fechado, e esta tem o sinal oposto à contribuição do primeiro.

Assim, ao diagrama

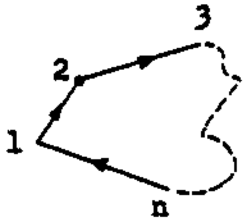
devemos somar o seguinte:



As duas contribuições provenientes do polígono contêm como fator:

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_{\nu_1} S^F(x_1-x_2)\gamma_{\nu_2} S^F(x_2-x_3)\ldots\gamma_{\nu_n} S^F(x_n-x_1)\right]+$$

$$+\ \mathrm{Tr}\left[\gamma_{\nu_1} S^F(x_1-x_n)\gamma_{\nu_n} S^F(x_n-x_{n-1})\ldots\gamma_{\nu_2} S^F(x_2-x_1)\right] \tag{6.16}$$



Agora

$$S^F(x) = -\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m\right)\Delta^F(x) \tag{6.17}$$

Se houver um número ímpar de matrizes γ no traço, o traço só é diferente de zero quando os têrmos contém um número ímpar de S^F's, sobrevivendo apenas o primeiro têrmo de cada S^F. Mas de

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta^F(x-x') = -\frac{\partial}{\partial x'}\Delta_F(x'-x);$$

$$\Delta_F(x-x') = \Delta_F(x'-x)$$

resulta:

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma_{\nu_1} S^F(x_1-x_2)\gamma_{\nu_2} S^F(x_2-x_3)\ldots\gamma_{\nu_n} S^F(x_n-x_1)\right] =$$

$$= (-1)^n\ \mathrm{Tr}\left[\gamma_{\nu_1} S^F(x_1-x_n)\gamma_{\nu_n} S^F(x_n-x_{n-1})\ldots\gamma_{\nu_2} S^F(x_2-x_1)\right] \tag{6.18}$$

e esta relação prova o teorema.

<u>Regras de Feynman</u>. Os resultados anteriores se resumem nas seguintes regras:

1. Os diagramas que correspondem à aproximação de ordem n da ma-

triz S, $S^{(n)}$, são divididos em vários grupos, cada grupo contendo n! diagramas que se distinguem um do outro pela permutação dos nomes dados aos vértices.

Basta, pois, considerar um só diagrama de cada grupo e abandonar o fator n! do denominador de $S^{(n)}$.

2. Abandonam-se os diagramas desconexos.

3. Abandonam-se os diagramas que contenham polígonos fechados com um número ímpar de linhas de fermions.

4. A cada linha interna de fotons corresponde um fator $-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\ D_F(x_i - x_j)$ onde x_i e x_j são os vértices da linha (γ^μ e γ^ν operando nos vértices).

5. A cada linha interna de fermions corresponde um fator $-\frac{1}{2}\ S_F(x_j - x_i)$ se a linha vae de x_i a x_j.

6. A cada vértice x_i corresponde um fator γ_{ν_i}.

7. A cada linha externa de electron que venha de $-\infty$ ao ponto x_i corresponde a amplitude

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\,w_r(p)e^{-ipx_i}$$

se o electron vem com momentum p e spin r.

Se o electron sae de x_i para $+\infty$, a amplitude é:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\,\overline{w}_r(p)\ e^{ipx_2}\ .$$

Para positrons, vêr as amplitudes dadas na pag. 145.

8. A cada linha externa de foton corresponde a amplitude:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\frac{1}{\sqrt{2|\mathrm{k}|}}\,\epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathrm{k})\,e^{\pm ikx}$$

onde o sinal é + se o foton é emitido e - se êle é absorvido (γ^{μ} operando no vértice de onde sae a linha).

9. A expressão obtida é integrada e multiplicada pelo fator $e^{n}(-i)^{n}(-1)^{\ell}$ onde n é o número de pontos e ℓ é o número de polí gonos fechados por linhas de electrons do diagrama.

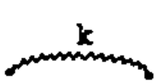
Esta última regra, a do produto por $(-1)^{\ell}$, provem de que em um polígono fechado por linhas de fermions podemos escrever os fatores dos produtos contraídos ao lado um do outro sem alterar o sinal. A expressão obtida:

$$\dot{\bar{\psi}}(x_1)\,\gamma_{\nu_1}\,\ddot{\psi}(x_1)\,\ddot{\bar{\psi}}(x_2)\,\gamma_{\nu_2}\,\dddot{\psi}(x_2)\,\dddot{\bar{\psi}}(x_3)\,\gamma_{\nu_3}\dots\gamma_{\nu_n}\,\dot{\psi}(x_n)$$

dá lugar a um fator $\frac{1}{2}\,S_F(x_n - x_1)$ proveniente de $\dot{\bar{\psi}}(x_1)\,\dot{\psi}(x_n)$ e a fatores $\frac{1}{2}\,S_F(x_i - x_{i+1})$ proveniente de $\dot{\psi}(x_i)\,\dot{\bar{\psi}}(x_i)$. Êstes últimos são em número ímpar pois o polígono tem um número par de lados.

6c. Regras de Feynman no espaço dos momentos

Pela passagem ao espaço dos momentos vê-se que se obtém a tabela abaixo:

Elemento do diagrama	Fator da matriz S
Linha de foton interna de momentum k 	$-\frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2}\,g_{\mu\nu}$

Vértices de tal linha $\qquad \gamma^{\mu} ; \gamma^{\nu}$

Linha interna de electron de momentum p $\qquad \dfrac{1}{(2\pi)^4} \; \dfrac{\not p + m}{p^2 - m^2}$

Em cada vértice com uma linha de foton e duas de electrons $\qquad (2\pi)^4 \; \delta(p - p' - k)\, \gamma^{\mu}$

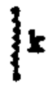
Linha externa de foton de polarização λ e momentum k $\qquad \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \; \dfrac{1}{\sqrt{2|k_o|}} \; \epsilon^{(\lambda)}(\vec{k})$

Linha externa de electron saindo com spin r e momentum p $\qquad \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \; \dfrac{1}{\sqrt{2E_p}} \; \overline{\omega}^{r}\,(\vec{p})$

Electron externo entrando $\qquad \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \; \dfrac{1}{\sqrt{2E_p}} \; \omega^{r}(\vec{p})$

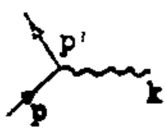
Multiplica-se por $e^n(-i)^n\,(-1)^{\ell}$ e integra-se sôbre todas as linhas internas.

Podemos, também, isolar os fatores i e 2π, associando à linha de foton interna $\qquad g_{\mu\nu}\dfrac{1}{k^2}$,



à linha interna de electron $\qquad \dfrac{\not p + m}{p^2 - m^2}$,

a cada vértice $\qquad \gamma^\mu \delta(p - p' - k)$,



a um foton externo $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{2|k_o|}}\,\epsilon_\mu(k)$,

a um electron emergente $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{2E}}\,\overline{\omega}^r(\vec{p})$,

a um electron incidente $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{2E}}\,\omega^r(\vec{p})$,

e multiplicar o resultado por $(-1)^\ell\ (-ie)^n\ i^\alpha (2\pi)^\beta\ \delta_p$ onde:

$\alpha = E_i - P_i$ = número de linhas internas de electron menos o de fotons;

$$\beta = 4n - 4(E_i + P_i) - \frac{3}{2}(E_e + P_e);$$

δ_p = sinal de permutação dos estados finais dos electrons.

Notando que

$$n = E_i + \frac{1}{2} E_e = 2 P_i + P_e \ ,$$

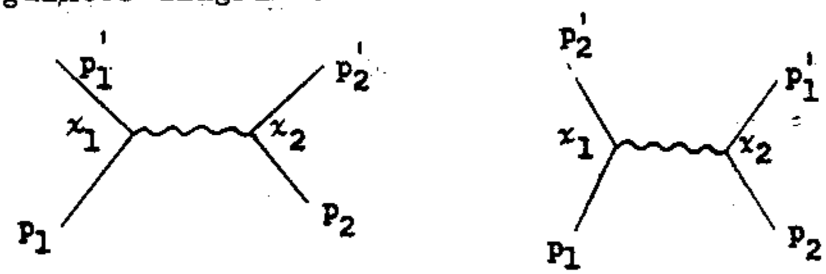
tem-se:

$$\alpha = \frac{1}{2}(n + P_e - E_e),$$

$$\beta = \frac{1}{2}(P_e + E_e) - 2n \ .$$

10. Somam-se os elementos correspondentes aos diagramas não equivalentes.

<u>Exemplo</u>: espalhamento de dois electrons em e^2 no elemento de matriz. Temos os seguintes diagramas



que não são equivalentes. O elemento de matriz é, portanto:

$$\langle p_1' p_2' | S^{(2)} | p_1 p_2 \rangle = (-ie)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 \, dx_2 \langle p_1' p_2' | T(N(\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu \psi(x_1)) .$$

$$. N(\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu \psi(x_2))) | p_1 p_2 \rangle \langle 0 | T(A^\mu(x_1) \ A^\nu(x_2)) | 0 \rangle =$$

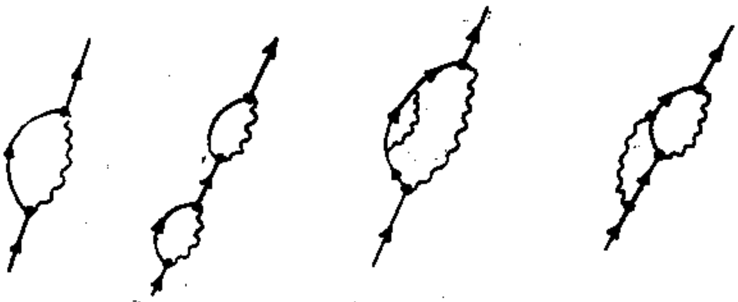
$$= (-ie)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \Big\{ \langle p_1' | N(\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu \ \psi(x_1)) | p_1 \rangle \langle p_2' | N(\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu \psi(x_2)) | p_2 \rangle$$

$$+ \langle p_2'|N(\overline{\psi}(x_1)\gamma_\mu\psi(x_1))|p_1\rangle\langle p_1'|N(\overline{\psi}(x_2)\gamma_\nu\psi(x_2))|p_2\rangle \Big\} \langle 0|T(A^\mu(x_1)A^\nu(x_2))|0\rangle. \tag{6.19}$$

7. A energia própria do electron

Chama-se diagrama da energia própria do electron todo diagrama contendo duas linhas externas de electron e nenhuma linha externa de foton.

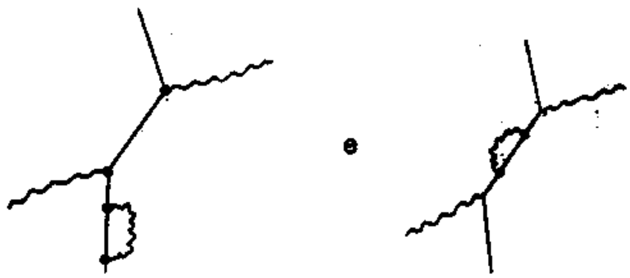
Exemplos são:



etc

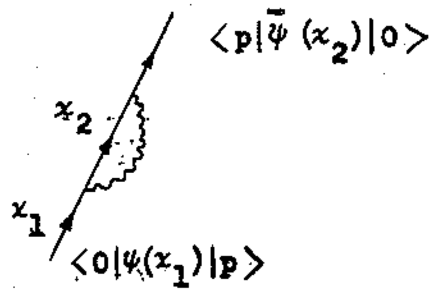
Um tál diagrama pode ser parte de diagramas mais complicados. Neste caso, êle é ligado ao resto do diagrama por uma ou por duas linhas de electron. Na primeira situação, êle é inserto em uma linha externa de electron. No segundo caso, numa linha interna.

Exemplos são



Pode haver diagramas de energia própria mais complexos, de ordem superior. Em geral, um diagrama de energia própria de electron pode ser representado por uma "caixa".

Vamos estudar a energia própria do electron em $2^{\underline{a}}$ ordem:



Apliquemos as regras de Feynman no espaço das coordenadas; encontramos, como já vimos no § 7a:

$$\langle p|S^{(2)}|p\rangle = (-ie)^2 \iint dx_1 dx_2 \langle p|\bar{\psi}(x_2)|0\rangle \gamma^\mu \Big(-\tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} D_F(x_1 - x_2) \quad (7.1)$$

$$-\tfrac{1}{2} S_F(x_1 - x_2) \Big) \gamma^\nu \langle 0|\psi(x_1)|p\rangle = -\frac{e^2}{4} \iint dx_1\, dx_2 \,\cdot$$

$$\cdot \langle p|\bar{\psi}(x_2)|0\rangle \gamma_\nu S_F(x_2 - x_1) \gamma^\nu D_F(x_1 - x_2) \cdot \langle 0|\psi(x_1)|p\rangle .$$

Passando para o espaço dos momentos, encontraremos a expressão que se obtem aplicando diretamente as regras de Feynman nêsse espaço:

$$\langle 0|\psi(x_1)|p\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \omega(p)\, e^{-ipx_1} ,$$

$$\langle p|\bar{\psi}(x_2)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \bar{\omega}(p)\, e^{ipx_2} , \qquad (7.2)$$

$$D_F(x) = \frac{2i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2}\, dk \ ,$$

$$S_F(x) = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int \frac{\not{p}' + m}{p'^2 - m^2}\, e^{-ip'x}\, dp' \ ,$$

$$\langle p|S^{(2)}|p\rangle = -\frac{e^2}{4} \iint dx_1 dx_2 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}} \bar{\omega}(p)\, e^{ipx} \gamma_\nu \frac{(-2i)}{(2\pi)^4} \times$$

$$\times \int dp' \frac{\not{p}' + m}{p'^2 - m^2} e^{-ip'(x_2 - x_1)} \gamma^\nu \frac{(2i)}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x_2 - x_1)}}{k^2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2E}} \omega(p) e^{-ipx_1} = -\frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \int dp' \int dk\ \delta(p-p'-k)\delta(-p+p'+k)\bar{\omega}(p)$$

$$\gamma_\nu \frac{\not{p}' + m}{p'^2 - m^2} \gamma^\nu \omega(p) \frac{1}{k^2} \ . \qquad (7.3)$$

Esta última é a expressão obtida pela aplicação direta das regras de Feynman no espaço dos momentos.

Temos então:

$$\langle p|S^{(2)}|p\rangle = -\frac{e^2}{(2\pi)^3} \delta(0) \frac{1}{2E} \int dk\ \bar{\omega}(p) \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{k} + m)}{(p-k)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{1}{k^2}\ \omega(p) \qquad (7.4)$$

Agora, já sabemos que podemos substituir $\delta(0)$ por $\frac{VT}{(2\pi)^4}$, logo:

$$\langle p|S^{(2)}|p\rangle = -\frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{VT}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E} \int dk\ \bar{\omega}(p) \gamma_\nu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m} \gamma^\nu \frac{1}{k^2}\ \omega(p) \ . \qquad (7.5)$$

O fator $\frac{V}{(2\pi)^3}$ não ocorre se efetuarmos as somas dentro de um volume V pois

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \sum ,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x \longrightarrow \frac{1}{V} \sum .$$

Logo, fazendo:

$$\sum(p) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int dk \, \gamma_\nu \, \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{1}{k^2} \tag{7.6}$$

vem:

$$\langle p|S^{(2)}|p\rangle = \frac{-iT}{2E} \overline{\omega}(p) \sum(p) \, \omega(p) \; . \tag{7.7}$$

Qual é o significado desta expressão ?

Um electron "nu", isto é, sem interação com nenhum campo, é descrito pela equação de Schrodinger:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = Eu \tag{7.8}$$

onde E é sua energia; isto é, sua função de onda é da forma: $u(p) \, e^{-iEt}$.

A interação do electron com seu campo próprio dá lugar a uma energia própria ΔE, de modo que:

$$i \frac{\partial \omega}{\partial t} = (E + \Delta E)\omega \tag{7.9}$$

ou:

função de onda = $\omega(p) \, e^{-i(E+\Delta E)t}$

Assim, esta interação modifica o fator de fase temporal da função de onda do electron tornando-o:

$$e^{-i(E+\Delta E)t} = e^{-iEt}\, e^{-i\Delta Et} \qquad (7.10a)$$

e supondo ΔE pequeno, para intervalos de tempo finitos:

$$e^{-iEt}\, e^{-i\Delta Et} \sim e^{-iEt}\,(1 - i\Delta Et)\ . \qquad (7.10b)$$

Por outro lado, a matriz S transforma o electron livre no passado no electron livre no futuro, de modo que, após o tempo t, a função de onda se torna (até termos de 2ª ordem):

$$(1 + S^{(2)})\,\omega(p)\, e^{-iEt} \qquad (7.11)$$

Portanto:

$$(1 + S^{(2)})\,\omega(p)\, e^{-iEt} = \omega(p)\, e^{-iEt}(1 - \Delta Et)$$

ou:

$$\langle p|S^{(2)}|p\rangle = -\, i\Delta Et\ . \qquad (7.12)$$

Identificando o intervalo de tempo t com T, temos, pois:

$$-\, i\Delta ET = \frac{-iT}{2E}\,\bar{\omega}(p) \sum (p)\, \omega(p)\ , \qquad (7.13)$$

$$2E\Delta E = \bar{\omega}(p) \sum (p)\, \omega(p)\ . \qquad (7.14)$$

Vemos que $\bar{\omega}(p) \sum(p)\, \omega(p)$ dá o acréscimo de E^2 resultante da interação do electron com o campo próprio.

Estudemos:

$$\sum(p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int dk\, \gamma_\nu\, \frac{\not p - \not k + m}{(p-k)^2 - m^2}\, \gamma^\nu\, \frac{1}{k^2}\ . \qquad (7.6)$$

A integral diverge linearmente.

Precisamos, antes, de estudar o método de manipulação de integrais divergentes.

Consideremos a fórmula:

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{d}{\left[a_1 x + a_2(1-x)\right]^2} \tag{7.15}$$

que pode ser verificada. Podemos aplicá-la ao denominador da integral de $\sum(p)$:

$$\frac{1}{k^2\left[(p-k)^2-m^2\right]} = \int_0^1 \frac{dx}{\left\{\left[(p-k)^2-m^2\right] x + k^2(1-x)\right\}^2} \,. \tag{7.16}$$

Agora

$$\left[(p-k)^2-m^2\right]x + k^2(1-x) = (p^2-2pk-m^2)x + k^2 \equiv (px-k)^2 - a^2 \,, \tag{7.17}$$

onde

$$a^2 = m^2x^2 - (p^2-m^2)\,x(1-x).$$

Assim:

$$\sum(p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \int_0^1 dx\, \gamma_\nu \frac{\not{p}-\not{k}+m}{\left\{(p-k)^2-a^2\right\}^2}\gamma^\nu \,. \tag{7.18}$$

Agora, de:

$$\not{a}\not{b} = -\not{b}\not{a} + 2ab$$

resulta:

$$\not{p}\,\gamma^\nu = -\gamma^\nu\not{p} + 2p^\nu \,.$$

Daí:

$$\gamma_\nu\not{p}\,\gamma^\nu = -\gamma_\nu\gamma^\nu\not{p} + 2\not{p} = -2\not{p} \,, \tag{7.19}$$

pois:

$$\gamma_\nu \gamma^\nu = (\gamma_o)^2 - (\gamma_k)^2 = 4 \; .$$

Logo:

$$\sum(p) = -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int_0^1 dx \; \frac{2m - (\not{p} - \not{k})}{\left\{(p-k)^2 - a^2\right\}^2} \; . \tag{7.20}$$

A integral do têrmo em m é logaritmicamente divergente, bem como a do têrmo em $\not{p}$. A restante diverge linearmente.

Estudemos a integral:

$$I_o = \int \frac{d^4k}{\left[(k-P)^2 - a^2\right]^2} \tag{7.21}$$

A identidade:

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = -\int_0^1 \frac{n(\alpha-\beta)}{\left[(\alpha-\beta)Z+\beta\right]^{n+1}}\, dZ \tag{7.22}$$

dá, para n = 2:

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} = -\int_0^1 \frac{2\,(\alpha-\beta)}{\left[(\alpha-\beta)Z+\beta\right]}\, dZ \; . \tag{7.23}$$

Façamos:

$$\alpha = (k-P)^2 - a^2 = k^2 + P^2 - 2kP - a^2 ; \tag{7.24}$$

$$\beta = k^2 - a^2 ; \; \alpha-\beta = P^2 - 2kP \; ,$$

vem:

$$\frac{1}{\left[(k-P)^2 - a^2\right]^2} = \frac{1}{(k^2-a^2)^2} - 2\int_0^1 \frac{(P^2-2kP)\; dZ}{\left[k^2-a^2+(P^2-2kP)Z\right]^3} \; . \tag{7.25}$$

Logo:

$$I_o = \int \frac{d^4k}{(k^2-a^2)^2} - 2\int d^4k \int_0^1 \frac{P^2 - 2kP}{\left[k^2-a^2+(P^2-2kP)Z\right]^3}\, dZ \; . \tag{7.26}$$

A segunda integral converge.

Agora:

$$k^2 - a^2 + (P^2 - 2kP)Z = (k - PZ)^2 - a^2 + P^2 Z(1-Z). \qquad (7.27)$$

Mudando a origem no espaço dos k:

$$k_\mu \longrightarrow k_\mu + P_\mu \; Z \qquad (7.28)$$

vem (permutando as integrações):

$$- 2 \int d^4k \int_0^1 dZ \; \frac{P^2 - 2kP}{\left[(k-PZ)^2 - a^2 + P^2 Z(1-Z)\right]^3} =$$

$$= -2 \int_0^1 dZ \int d^4Z \; \frac{P^2(1-2Z) - 2\,P\,k}{\left[k^2 - a^2 + P^2 Z(1-Z)\right]^3} \, . \qquad (7.29)$$

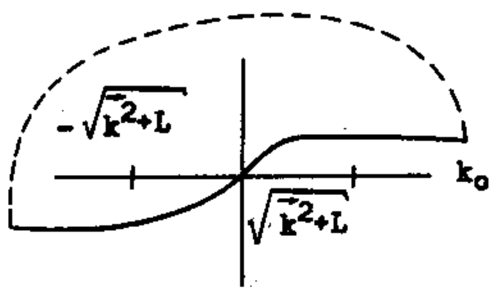
O têrmo em $Pk = P_\mu \, k_\mu$ dá contribuição zero à integral.

Consideremos agora:

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 - L^2)^3} = \int d^3k \int \frac{dk_o}{\left[k_o^2 - (\vec{k}^2 + L)\right]^3} \, . \qquad (7.30)$$

Os dois polos estão indicados na figura, bem como o caminho de integração, análogo ao da função Δ_F. Fechando o contôrno pelo semi-plano superior, teremos:

$$\int \frac{dk_o}{\left[k_o^2 - (\vec{k}^2 + L)\right]} = \frac{2\pi i}{-2\sqrt{\vec{k}^2 + L}} \, . \qquad (7.31)$$



Derivando duas vezes em relação a L, obtemos:

$$\int \frac{dk_o}{\left[k_o^2 - (\vec{k}^2 + L)\right]^3} = - \frac{3}{8} \pi i \, \frac{1}{(\vec{k}^2 + L)^{5/2}} \, . \qquad (7.32)$$

Portanto:

$$\int \frac{d^4k}{(k^2-L)^3} = -\frac{3\pi i}{8}\int \frac{d^3k}{(\vec{k}^2+L)^{5/2}} = \frac{12\pi^2 i}{8}\int_0^\infty \frac{\vec{k}^2\, d\bar{k}}{(\vec{k}^2+L)^{5/2}} = \tag{7.33}$$

$$= -\frac{12\pi^2 i}{8}\left[\frac{k^3}{3L(\vec{k}^2+L)^{3/2}}\right]_0^\infty = -\frac{12\pi^2 i}{8}\,\frac{1}{3L} = -\frac{\pi^2 i}{2L}\,.$$

Assim:

$$-2\int_0^1 dZ\int d^4k\,\frac{P^2(1-2Z)}{\left[k^2-a^2+PZ(1-Z)\right]^3} = -2\int_0^1 P^2(1-2Z)dZ\int\frac{d^4k}{\left[k^2-a^2+P^2Z(1-Z)\right]^3}$$

$$= \pi^2 i\int_0^1 dZ\,\frac{P^2(1-2Z)}{a^2-P^2Z(1-Z)} = -\pi^2 i\,\log\left[a^2-P^2Z(1-Z)\right]_0^1 = 0\,. \tag{7.34}$$

Portanto:

$$I_o = \int\frac{d^2k}{(k^2-a^2)^2} \tag{7.35}$$

Logo, podemos fazer $k \longrightarrow k + P$ numa tal integral. Agora estudemos a integral linearmente divergente:

$$I_\mu = \int\frac{k_\mu\, d^4k}{\left[(k-P)^2-a^2\right]^2}\,. \tag{7.36}$$

Temos a identidade:

$$I_\mu = \int\frac{(k_\mu+P_\mu)\, d^4k}{(k^2-a^2)^2} - P_\mu\int\frac{d^4k}{(k^2-a^2)^2} + \int k_\mu d^4k\left\{\frac{1}{\left[(k-P)^2-a^2\right.} - \frac{1}{(k^2-a^2)^2}\right\}$$

$$= \int \frac{(k_\mu + P_\mu)\, d^4k}{(k^2 - a^2)^2} + S_\mu \,. \qquad (7.37)$$

A segunda integral de S_μ pode ser escrita (por causa da identidade que dá $\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}$, (7.23-24):

$$-2 \int k_\mu \, d^4k \int_0^1 dZ \, \frac{P^2 - 2k\,P}{\left[k^2 - a^2 + (P^2 - 2kP)Z\right]^3} . \qquad (7.38)$$

Mas esta agora diverge logarítmicamente e pelo resultado visto anteriormente para I_o, podemos deslocar a origem no espaço dos k. Façamos:

$$k \longrightarrow k + PZ \qquad (7.39)$$

vem:

$$-2 \int (k_\mu + P_\mu Z) d^4Z \int_0^1 dZ \, \frac{P^2(1-2Z) - 2k\cdot P}{\left[k^2 - a^2 + P^2 Z(1-Z)\right]^3} . \qquad (7.40)$$

O denominador sendo função apenas de k^2, podemos pôr de lado os têrmos lineares em k, logo temos:

$$-2P_\mu \int d^4k \int_0^1 dZ \, \frac{P^2 Z(1-2Z)}{\left[k^2 - a^2 + P^2 Z(1-Z)\right]^3} + 4 \int d^4k \; k_\mu k_\nu \int_0^1 dZ \, \frac{P}{\left[k^2 - a^2 + P^2 Z(1-Z)\right]^3} . \qquad (7.41)$$

Agora, substituimos na segunda integral

$$k_\mu \, k_\nu \text{ por } \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \, k^2 \,, \qquad (7.42)$$

o que significa integrar sôbre os ângulos em k; obtemos:

$$-2 \, P_\mu \int d^4k \int_0^1 dZ \, \frac{P^2 Z(1-2Z)}{\left[k^2 - a^2 + P^2 Z(1-Z)\right]^3} + P_\mu \int k^2 d^4k \int_0^1 dZ \, \frac{1}{\left[k^2 - a^2 + P^2 Z(1-Z)\right]^3} . \qquad (7.43)$$

Assim:

$$S_\mu = -P_\mu \int \frac{d^4k}{(k^2-a^2)^2} - 2P_\mu \int d^4k \int_0 dZ \frac{P^2Z(1-2Z)}{\left[k^2-a^2+P^2Z(1-Z)\right]^3} +$$

$$+P_\mu \int k^2\, d^4k \int_0^1 dZ \frac{1}{\left[k^2-a^2(PZ(1-Z)\right]^3} . \qquad (8.44)$$

Agora:

$$P^2 \int_0^1 dZ \frac{Z(1-2Z)}{\left[k^2-a^2+P^2Z(1-Z)\right]^3} = \left[-\frac{1}{2} Z \frac{1}{\left[k^2-a^2+P^2Z(1-Z)\right]^2}\right]_0^1 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dZ}{\left[k^2-a^2+P^2Z(1-Z)\right]^2} . \qquad (7.45)$$

Logo:

$$-2P_\mu \int d^4k \int_0^1 dZ \frac{P^2Z(1-Z)}{\left[k^2-a^2+P^2Z(1-Z)\right]^3} = P_\mu \int \frac{d^4k}{(k^2-a^2)^2} -$$

$$- P_\mu\, d^4k \int_0^1 \frac{dZ}{\left[k^2-a^2+P^2Z(1-Z)\right]^2} . \qquad (7.46)$$

Portanto:

$$S_\mu = P_\mu \int d^4k \int_0^1 dZ \left\{ \frac{k^2}{\left[k^2-a^2+P^2Z(1-Z)\right]^3} - \frac{1}{\left[k^2-a^2+P_Z^2(1-Z)^2\right]^2} \right\}$$

$$= P_\mu \int d^4k \int_0^1 dZ \; \frac{a^2 - P_Z^2(1-Z)}{\left[k^2-a^2+P_Z^2(1-Z)\right]^2} \; . \qquad (7.47)$$

Como:

$$P_\alpha \frac{\partial}{\partial k} \frac{k_\mu}{(k^2+\lambda^2)^2} = P_\alpha \delta_\mu^\alpha \frac{1}{(k^2+\lambda^2)^2} - P_\alpha \, k_\mu \frac{4k}{(k^2+\lambda^2)^3} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow P_\mu \left(\frac{1}{(k^2+\lambda^2)^2} - \frac{k^2}{(k^2+\lambda^2)^3} \right) = P_\mu \frac{\lambda^2}{(k^2+\lambda^2)^3} \qquad (7.48)$$

vemos que S_μ pode ser escrito:

$$S_\mu = - \int d^4k \int_0^1 dZ \, P_\alpha \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \frac{k_\mu}{\left[k^2-a^2+P_Z^2(1-Z)\right]^2} \qquad (7.49)$$

e por isso se chama têrmo de superfície.

O resultado é agora convergente e vale:

$$S_\mu = - \frac{i\pi^2}{2} P_\mu \; . \qquad (7.50)$$

Portanto:

$$I_\mu = \int \frac{(k + P_\mu) \, d^4k}{\left[k^2 - a^2\right]^2} - \frac{i\pi^2}{2} \; P_\mu \; . \qquad (7.51)$$

Retomemos a nossa expressão:

$$\sum (p) = -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \int_0^1 dx\, \frac{2m-(\not p-\not k)}{\left\{(px-k)^2-a^2\right\}^2}\,. \tag{7.20}$$

A parte divergente logarítmicamente pode ter a origem desloca da $k \longrightarrow k+px$, dando:

$$-\frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \int_0^1 dx\, \frac{2m-\not p}{\left\{k^2-a^2\right\}^2}\,. \tag{7.52}$$

A parte linearmente divergente também pode ter a origem deslo cada, dando, porém, lugar a um têrmo adicional, o de superfície:

$$-\frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \int_0^1 dx\, \frac{\not k+\not p x}{(k^2-a^2)^2} - \frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \left(-\frac{i\pi^2}{2}\right)\not p x\,. \tag{7.53}$$

Logo:

$$\sum(p) = -\frac{e^2}{8\pi^2}\frac{1}{4}\not p - \frac{ie^2}{8\pi^2}\frac{1}{\pi^2}\int d^4k \int_0^1 dx\, \frac{2m-\not p(1-x)+\not k}{(k^2-a^2)^2}\,. \tag{7.54}$$

Façamos:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}\,.$$

O têrmo em $\not k$ dá zero e assim ficamos com uma integral logarítmicamente divergente.

Façamos:

$$\sum(p) = A+(\not p-m)\,B+(\not p-m)^2\sum_f(p)\,, \tag{7.55}$$

A, B sendo independentes de p. Fazendo a substituição de $\not p$ por m em (7.54) obtemos:

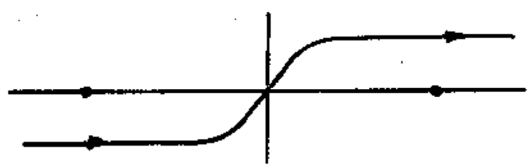
$$A = -\frac{\alpha m}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{\pi^2}\int d^4k \int_0^1 dx \, \frac{1+}{(k^2-m^2x^2)}\right) \tag{7.56}$$

Vemos que a expressão depende de uma integral do tipo:

$$I = \frac{1}{i\pi^2}\int \frac{d^4k}{(k^2-a^2)^2} \tag{7.57}$$

o caminho de integração é o da integral de Feynman, logo podemos guiá-lo e fazê-lo coincidir com o eixo dos $i\,k_o$. Assim

$$k_o = i\,k_o', \quad \vec{k} = \vec{k}',$$



vem:

$$I = \frac{1}{\pi^2}\int \frac{d^4k'}{(k_o'^2 + \vec{k}'^2 + a^2)^2} \,. \tag{7.58}$$

Introduzindo coordenadas polares

$$d^4k' = k^3 dk \, d\varphi \, \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, \operatorname{sen}^2\chi \, d\chi,$$

onde:

$$\int d^4k' = \int k^3 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\chi \, d\chi = 2\pi^2 \int k^3 dk$$

vem:

$$I = \frac{1}{\pi^2}\, 2\pi^2 \int \frac{k^3 dk}{(k^2+a^2)^2} = \int \frac{t\, dt}{(t+a^2)^2} \,. \tag{7.59}$$

Integrando entre $k^2 = 0$ e $k^2 = M^2$ vem:

$$I = \left[\log(t+a^2) + \frac{a^2}{t+a}\right]_0^{M^2} = \log\frac{M^2+a^2}{a^2} + \frac{a^2}{M^2+a^2} - 1 \,. \tag{7.60}$$

Supondo $M \gg a$ obtém-se:

$$I \sim 2 \log \frac{M}{a} - 1 \; . \tag{7.61}$$

Agora, em A temos de calcular a integral. Integração por partes nos dá:

$$\int_0^1 dx \, \frac{1+x}{(k^2-m^2x^2)^2} = \left.\frac{x+x^2/2}{(k^2-m^2x^2)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2(1+\frac{1}{2}x)4m^2}{(k^2-m^2x^2)^3} \, dx \; . \tag{7.62}$$

Substituindo em A, vem:

$$A = \frac{\alpha m}{2\pi} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^4k}{(k^2-m^2)^2} - \frac{1}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int d^4k \, \frac{x^2(1+\frac{1}{2}x)}{(k^2-m^2x^2)^3} \, 4m^2 \; . \right. \tag{7.63}$$

Como:

$$\int \frac{d^4k}{(k^2-m^2x^2)^3} = -\pi^2 i \, \frac{1}{2m^2x^2} \; .$$

Logo:

$$-\frac{4m^2}{i\pi^2} \int_0^1 dx \int d^4k \, \frac{x^2(1+\frac{1}{2}x)}{(k^2-m^2x^2)^3} = \frac{4m^2}{i\pi^2} \, \frac{\pi^2 i}{2m^2} \int_0^1 (1+\tfrac{1}{2}x)dx = 2\int_0^1 (1+\tfrac{1}{2}x)dx = \frac{5}{2} \; .$$

Portanto:

$$A = \frac{\alpha m}{2\pi}\left(\frac{3}{2} I + \frac{9}{4}\right) \simeq \frac{3\alpha}{2\pi} m \left(\log \frac{M}{m} + \frac{1}{4}\right) . \tag{7.64}$$

Para obter B e $\sum_f(p)$, vamos subtrair (7.56) de:

$$\sum (p) = -\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{4}\not p + \frac{i}{\pi^2}\int d^4k \int_0^1 dx \, \frac{2m-\not p(1-x)}{(k^2-a^2)^2}\right) ,$$

obtemos:

$$(\not{p}-m)B+(\not{p}-m)^2\sum_p(p)=-\frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1}{4}(\not{p}-m)+\frac{i}{\pi^2}\int d^4k\int_0^1 dx\left[2m-\not{p}(1-x)\right]\right.$$

$$\left.\left[\frac{1}{(k^2-a^2)^2}-\frac{1}{(k^2-m^2x^2)^2}\right]-(\not{p}-m)\frac{i}{\pi^2}\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{(1-x)}{(k^2-m^2x^2)^2}\right\}. \quad (7.65)$$

Agora:

$$\frac{1}{(k^2-a^2)^2}-\frac{1}{(k^2-m^2x^2)^2}=-\int_0^1\frac{2(m^2x^2-a^2)dZ}{\left[(m^2x^2-a^2)Z+k^2-m^2x^2\right]^3}$$

$$\frac{i}{\pi^2}\int d^4k\left[\frac{1}{(k^2-a^2)}-\frac{1}{(k^2-m^2x^2)^2}\right]=-\frac{i}{\pi^2}\int_0^1 dZ\;2(m^2x^2-a^2)$$

$$\int\frac{d^4k}{\left[k^2-m^2x^2+(m^2x^2-a^2)Z\right]^3}=-\frac{i}{\pi^2}\int_0^1 dZ\;2(m^2x^2-a^2)\;\frac{-\pi^2 i}{2\left[m^2x^2-(m^2x^2-a^2)Z\right]}=$$

$$=-\int_0^1\frac{(p^2-m^2)\,x(1-x)}{m^2x^2-(p^2-m^2)x(1-x)}\,dZ\;.$$

Portanto:

$$\frac{i}{\pi^2}\int d^4k\int_0^1 dx\left[2m-\not{p}(1-x)\right]\left[\frac{1}{(k^2-a^2)}-\frac{1}{(k^2-m^2x^2)^2}\right]=$$

$$=-\int_0^1 dx\int_0^1 dZ\left[2m-\not{p}(1-x)\right]\frac{(p^2-m^2)x(1-x)}{m^2x^2-(p^2-m^2)x(1-x)Z}\;. \quad (7.66)$$

Vou escrever esta integral de modo a obter a contribuição que dá a têrmos da forma $\not{p}-m$ e da forma $(\not{p}-m)^2$. Para isso, decompom-se:

$$\left[2m-\not{p}(1-x)\right] \frac{(p^2-m^2)\,x(1-x)}{m^2x^2-(p^2-m^2)\,x(1-x)Z} = \frac{\alpha\not{p}+\gamma m}{m^2x^2-(p^2-m^2)\,x(1-x)z} \,.$$

$$.\,x(1-x)(\not{p}-m)^2+\beta(\not{p}-m). \quad (7.67)$$

e obtem-se:

$$\alpha = \left[\frac{2Z}{x}(1+x)-1\right](1-x)\,,$$

$$\beta = \frac{2(1-x^2)}{x}\,, \qquad (7.68)$$

$$\gamma = 2\left[x+\frac{1-x^2}{x}Z\right].$$

Portanto:

$$(\not{p}-m)B+(\not{p}-m)^2\sum_f(p) = -\frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1}{4}(\not{p}-m)+\int_0^1 dx\int_0^1 dZ\right.$$

$$\left[\frac{(\not{p}+m)(1-x)\left[1-\frac{2Z}{x}(1+x)\right]-m(1+x)}{m^2x^2-(p^2-m^2)\,x(1-x)Z}\,x(1-x)(\not{p}-m)^2-2\left(\frac{1}{x}-x\right)(\not{p}-m)\right]-$$

$$\left.-(\not{p}-m)\frac{i}{\pi^2}\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{(1-x)}{(k^2-m^2x^2)^2}\right\}$$

e daí:

$$B = -\frac{\alpha}{8\pi}+\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{x}-x \quad +\frac{\alpha i}{2\pi^3}\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{1-x}{(k^2-m^2x^2)^2} \qquad (7.70)$$

$$\sum_f(p) = -\frac{\alpha}{2\pi}\int x(1-x)dx \Big| dZ \frac{(\not p+m)(1-x)\left[\bar{1}-\frac{2Z}{x}(1+x)-\bar{m}(1+x)\right]}{m^2x^2-(p^2-m^2)\,x(1-x)Z} . \quad (7.71)$$

Além da integral logarítmicamente divergente em k, B contém uma divergência da forma $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ no segundo têrmo. Esta, contudo, é do tipo infra-vermelho e não causa dificuldades. Para reduzir B, notemos que:

$$\int_0^1 dx\,\frac{1-x}{(x^2-m^2x^2)^2} = -\int_0^1 dt\,\frac{1+t}{(k^2-m^2t^2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(k^2-m^2)^2} - \int_0^1 \frac{x^2(1-\frac{1}{2}x)\,4m^2}{(k^2-m^2x^2)^3}\,dx,$$

logo:

$$B = -\frac{\alpha}{8\pi}+\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{x}-x\right)dx+\frac{\alpha i}{4\pi^3}\int\frac{d^4k}{(k^2-m^2)^2}-\frac{\alpha i}{2\pi^3}\int_0^1 dx\int d^4k\,\frac{x^2\left(1-\frac{1}{2}x\right)}{(k^2-m^2x^2)^3}\,4m^2 =$$

$$= -\frac{\alpha}{8\pi}-\frac{\alpha}{2\pi}+\frac{\alpha}{\pi}\int_0^1\frac{dx}{x}+\frac{\alpha i}{4\pi^3}\int\frac{d^4k}{(k^2-m^2)^2}-\frac{3\alpha}{4\pi} \quad (7.72)$$

$$B = -\frac{\alpha}{4\pi}\left[I - 4\int_0^1\frac{dx}{x}+\frac{11}{2}\right],$$

onde:

$$I = \frac{1}{i\pi^2}\int\frac{d^4k}{(k^2-m^2)^2} \sim 2\log\frac{M}{m} - 1 . \quad (7.73)$$

Quanto a $\sum_f(p)$, notando que:

$$\int_0^1 \frac{dZ}{A+BZ} = \frac{1}{B}\log\left(1+\frac{B}{A}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{Z\,dZ}{A+BZ} = \frac{1}{B}\left[1-\frac{A}{B}\log\left(1+\frac{B}{A}\right)\right], \tag{7.74}$$

obtém-se:

$$\Sigma_f(p) = \frac{\alpha}{2\pi m}\left\{\frac{I_1}{\rho} - \frac{\not{p}+m}{m}\,\frac{1}{\rho}\left(I_2+2\,\frac{I_1}{\rho}+1+2\int_0^1\frac{dx}{x}\right\}\right., \tag{7.75}$$

onde:

$$\rho = \frac{m^2-p^2}{m^2},$$

$$I_1 = \int_0^1 dx(1+x)\log\left[1+\rho\left(\frac{1}{x}-1\right)\right] = \frac{\rho}{2(1-\rho)}\left(1-\frac{2-3\rho}{1-\rho}\log\rho\right) \tag{7.76}$$

$$I_2 = \int_0^1 dx(1-x)\log\left[1+\rho\left(\frac{1}{x}-1\right)\right] = -\frac{\rho}{2(1-\rho)}\left(1+\frac{2-\rho}{1-\rho}\log\rho\right).$$

Qual é o significado dos três têrmos em que se decompõe $\Sigma(p)$?

Relembrando:

$$2E\Delta E = 2m\Delta m \equiv \bar{\omega}(p)\,\Sigma(p)\,\omega(p)$$

e

$$\Sigma(p) = A + (\not{p}-m)\,B + (\not{p}-m)^2\,\Sigma_f(p),$$

obtemos:

$$\Delta m = A, \tag{7.77}$$

pois:

$$(\not{p}-m)\,\omega(p) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\omega}(p)\,\omega(p) = 2m.$$

A renormalização da massa permite a eliminação de A segundo o seguinte critério: a massa experimental do electron é, evidentemen te, a soma da massa m do electron "nu" e da parte Δm de origem eletromagnética:

$$m_{exp} = m + \Delta m \ .$$

Substituimos então na densidade de hamiltoniana o têrmo $m\bar{\psi}\psi$ por $(m_{exp} - \Delta m)\bar{\psi}\psi$. A parte $m_{exp}\bar{\psi}\psi$ é retida na hamiltoniana do electron livre e a outra parte, $-\Delta m\bar{\psi}\psi$, é juntada à interação. Nessas condições, a matriz S (4.21) tem agora novos têrmos provenientes de $-\Delta m\bar{\psi}\psi$. Assim:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_m \ P(V^{(o)}(x_1)\dots V^{(o)}(x_n))$$

onde, agora:

$$V^{(o)} = e \ j_\mu^{(o)}(x) \ A_\mu^{(o)}(x) - \Delta m \bar{\psi}\psi \qquad (7.78)$$

O elemento de matriz S de 2ª ordem em e tem agora o têrmo já calculado antes e o têrmo de 1ª ordem em $S'^{(2)}$ (que é da ordem de e^2) de modo que:

$$S'^{(2)} = S^{(2)} + i\Delta m \int d^4x \ \bar{\psi}(x) \ \psi(k) \qquad (7.79)$$

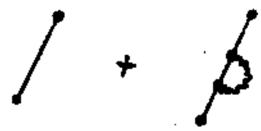
ou:

$$S'^{(2)} = -\frac{iT}{2E}\bar{\omega}(p) \textstyle\sum(p)\, \omega(p) + \frac{i\Delta m}{(2\pi)^3} \displaystyle\int d^4x \ \frac{\bar{\omega}(p)\ \omega(p)}{2E}$$

$$= \frac{-iT}{2E}\bar{\omega}(p)\,\Delta m\, \omega(p) + \frac{i\,V\,T}{(2\pi)^{-}} \ \frac{\bar{\omega}(p)\ \omega(p)}{2E} \ \Delta m = 0 \ . \qquad (7.80)$$

Para vêr o significado físico de B e $\sum_f(p)$, devemos inserir o diagrama da energia própria em uma linha de electron. Suponhamos esta interna. Então o propagador $S_F'(p)$ é substituído por

$S_F(p) \sum(p)\, S_F(p)$, de modo que a soma da linha interna original com a nova:



tem como propagador:

$$S_F'(p) = S_F(p) + S_F(p) \sum(p)\, S_F(p) \, . \qquad (7.81)$$

De fato ao diagrama:

corresponde um novo propagador $S_F(p) = \dfrac{i}{(2\pi)^4}\, \bar{s}(p)$ em substituição ao propagador $S_F(p) = \dfrac{i}{(2\pi)^4} \dfrac{1}{\not p - m}$ correspondente ao diagrama . É claro também que obtemos $\tilde{S}_F(p)$ da expressão

$$\langle p|S^{(2)}|p\rangle = - \frac{e^2}{(2\pi)^3}\, \delta(0)\, \frac{1}{2E} \int dk\, \bar{\omega}(p)\gamma_\nu \frac{\not p - \not k\ m}{(p-k)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{1}{k^2}\, \omega(p)$$

retirando desta

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}}\, \bar{\omega}(p) \quad e \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E}}\, \omega(p)$$

correspondentes às linhas de electrons livres e substituindo por $S_F(p)$ e $S_F(p)$. Como no caso de normalização em volume e intervalo de tempo finito (0) dá 1, obtemos:

$$\frac{i}{(2\pi)^4}\, \bar{s}(p) = \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not p - m} (-e^2) \int dk\, \gamma_\nu \frac{\not p - \not k + m}{(p-k)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{1}{k^2} \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not p - m}. \qquad (7.82)$$

de onde:

$$\bar{s}(p) = \frac{1}{\not p - m} \sum(p) \frac{1}{\not p - m} \, . \qquad (7.83)$$

Daí, no caso da soma:

$$s'(p) = \frac{1}{\not{p}-m} + \bar{s}\,(p)\ . \qquad (7.84)$$

Supondo já feita a renormalização da massa:

$$\bar{\Sigma}(p) = (\not{p}-m)\,B + (\not{p}-m)^2 \textstyle\sum_f(p)$$

vem:

$$s'_F(p) = \frac{1}{\not{p}-m} + \frac{1}{\not{p}-m}\,B + \textstyle\sum_f(p) = (1+B)\,S_F(p) + \sum_f(p)\ . \qquad (7.85a)$$

Escrevemos então:

$$s'_F(p) = (1+B)\,S_F^R(p) \qquad (7.85b)$$

onde:

$$S_F^R(p) = s_F(p) + \textstyle\sum_f(p) \qquad (7.86)$$

esta última é o propagador renormalizado (incluindo a correção finita de $2^{\underline{a}}$ ordem) de modo que $S_F(p)$ é igual a esta multiplicada pela constante infinita 1+B. (Naturalmente, na última relação desprezamos $B\sum_f$ que é de $4^{\underline{a}}$ ordem).

Se o diagrama da energia própria fôr inserido numa linha externa de electron, o espinor que corresponde à linha original mais a nova é:

$$\omega'(p) = \omega(p) + S_F(p)\,\textstyle\sum(p)\,\omega(p)$$

ou:

$$\bar{\omega}'(p) = \bar{\omega}(p) + \bar{\omega}(p)\,\textstyle\sum(p)\,S_F(p). \qquad (7.87)$$

Substituindo $\sum(p)$ por $(\not{p}-m)\cdot B + (\not{p}-m)^2 \sum_f(p)$ obtemos:

$$\omega'(p) = \omega(p) + (\not{p}-m)^{-1} B(\not{p}-m)\,\omega(p), \qquad (7.88a)$$

$$\bar{\omega}'(p) = \bar{\omega}(p) + \bar{\omega}(p)(\not{p}-m)\,B(\not{p}-m)^{-1}\ . \qquad (7.88b)$$

O $2^{\underline{o}}$ têrmo destas duas expressões, no $2^{\underline{o}}$ membro, apresenta u ma indeterminação pois:

$$B(\not p-m)^{-1}(\not p-m)\,\omega(p) = \begin{cases} B(\not p-m)^{-1}\left[(\not p-m)\,\omega(p)\right] = 0 \\ B\left[(\not p-m)^{-1}(\not p-m)\right]\omega(p) = B\,\omega(p) \end{cases} \qquad (7.89)$$

A indeterminação é eliminada considerando que $-\frac{1}{2}S_F(x_i-x_j) = \langle 0|T(\psi(x_i)\,\bar\psi(x_j))|0\rangle$, isto é, S_F provem da contração de ψ e $\bar\psi$. Logo, como a renormalização já vista anteriormente, é da forma:

$$S'_F(p) = (1+B)\,S^R_F(p)$$

devemos ter:

$$\begin{aligned} \omega'(p) &= (1+B)^{\frac{1}{2}}\,\omega_R(p) \sim \left(1+\frac{1}{2}B\right)\omega_R(p)\ , \\ \bar\omega'(p) &= (1+B)^{\frac{1}{2}}\,\bar\omega_R(p) \sim \left(1+\frac{1}{2}B\right)\bar\omega_R(p)\ , \end{aligned} \qquad (7.90)$$

o que mostra que o 2º têrmo de (7.88a) de $\omega'(p)$ é $\frac{1}{2}B\,\omega_R(p)$, se identificarmos $\omega_R(p)$ com $\omega(p)$. Esta identificação é possível porque na relação:

$$\omega'(p) = \omega(p) + S_F(p)\sum(p)\,\omega(p)$$

como vimos, o têrmo finito $\sum_f(p)$ não aparece porque $(\not p-m)\,\omega(p)=0$. Logo, esta relação deve ser da forma $\omega'(p) = \left(1+\frac{1}{2}B\right)\ \omega(p)$.

Assim, a correção radiativa aos espinores $\omega(p)$ e $\bar\omega(p)$, devida à energia própria, se reduz a multiplicá-los por $(1+B)^{\frac{1}{2}}$.

A renormalização da massa permitiu-nos eliminar a constante infinita $A = \Delta m$, supondo-a incorporada no valor experimental da massa do electron. Agora, em ω', $\bar\omega'$, S'_F, aparece a constante infinita B. Será possível eliminá-la por um procedimento análogo ? A resposta é afirmativa: o processo é a renormalização da carga.

Consideremos um diagrama de ordem n, com n_e linhas externas de electrons. Haverá $\frac{n_e}{2}$ electrons entrando e $\frac{n_e}{2}$ electrons saindo. Portanto, o elemento de matriz $S^{(n)}$ conterá $\frac{n_e}{2}$ espinores $\bar{\omega}(p)$ e $\frac{n_e}{2}$ espinores $\omega(p)$ como fatôres. O número de linhas internas será $n - \frac{ne}{2}$, onde n é o número de vértices (cada um dos quais tem uma linha de electron entrando e outra saindo). O elemento de matriz que inclua as correções radiativas de 2ª ordem é obtido substituindo S_F por S_F', ω por ω' e $\bar{\omega}$ por $\bar{\omega}'$, (pois estas são somas das grandezas correspondentes às linhas originais com as correspondentes às linhas com diagramas de energia própria inseridos).

Usando agora as expressões renormalizadas, vemos que a substituição é de S_F por $(1+B)\, S_F^R$, de $\omega(p)$ por $(1+B)^{\frac{1}{2}}\, \omega(p)$ e de $\bar{\omega}(p)$ por $(1+B)^{\frac{1}{2}}\, \bar{\omega}(p)$. Assim, além dos têrmos finitos provenientes de $\sum_f(p)$ em $S_F^R(p)$ o elemento de matriz contem um fator $(1+B)^{n-ne/2}$ $(1+B)^{ne/4}\,(1+B)^{ne/4} = (1+B)^n$. Como êle também contém o fator e^n, é natural escrevermos:

$$e_{exp} = (1+B)e$$

de modo que o fator será agora e^n_{exp}.

Assim, a renormalização da carga consiste em considerar a carga observável como a soma de duas partes inobserváveis separadamente <u>e</u> e Be. Observe que B é negativo.

8. A energia própria do foton

Diagramas de energia própria do foton são os que têm como linhas externas apenas duas linhas de fotons. O mais simples é o de 2ª ordem:

Um diagrama de energia própria do foton pode ser parte de um diagrama maior e é ligado à parte restante dêste por uma ou duas linhas de foton internas. No primeiro caso, êle está inserido numa linha externa de foton, no segundo caso numa linha interna de foton:

O elemento de matriz $S^{(2)}$ para o diagrama de 2ª ordem é:

$$S^{(2)} = - \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \int dp' \int dp \ \delta(k+p'-p)\ \delta(p-p'-k)\ \mathrm{Tr}\ \not{\epsilon}(k) \frac{\not{p}'+m}{p'^2-m^2} \cdot \not{\epsilon}(k) \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}, \tag{8.1}$$

de acôrdo com as regras de Feynman no espaço dos momentos. O sinal negativo proveio do fator $(-1)^{\ell}$ onde ℓ é o número de polígonos fechados, no nosso caso $\ell = 1$.

Temos:

$$S^{(2)} = - \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \delta(0) \int dp\ \mathrm{Tr}\ \epsilon_\mu(k) \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2-m^2} \gamma^\nu \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2} \epsilon_\nu(k)$$

$$= \frac{-iT}{2\omega} \epsilon_\mu(k) \mathcal{K}^{\mu\nu}(k) \epsilon_\nu(k) \tag{8.2}$$

$$\mathcal{K}^{\mu\nu}(k) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr} \int \gamma^\mu \frac{\not p - \not k + m}{(p-k)^2 m^2} \gamma^\nu \frac{\not p + m}{p^2 - m^2} dp \ .$$

Pelo mesmo tipo de raciocínio para o caso do electron, vemos que, designando com $\Delta\omega$ o acréscimo de energia ω do foton devido à interação com o par virtual, devemos ter:

$$2\omega\Delta\omega = \epsilon_\mu(k) \mathcal{K}^{\mu\nu}(k) \epsilon_\nu(k) \ . \tag{8.3}$$

Contudo, se o momentum do foton não muda, $\vec{k}$, então de:

$$\omega = |\vec{k}|$$

devemos ter:

$$\Delta\omega = 0 \tag{8.4}$$

Se fôsse $\Delta\omega \neq 0$, o foton deveria ter uma massa μ tal que:

$$\omega^2 = \vec{k}^2 + \mu^2 \tag{8.5}$$

e

$$2\omega \Delta\omega = 2\mu \Delta\mu \ . \tag{8.6}$$

A invariância de "gauge" exige $\mu = 0$, logo $\Delta\omega = 0$.

Assim, deve ser:

$$\epsilon_\mu(k) \mathcal{K}^{\mu\nu}(k) \epsilon_\nu(k) = 0 \ . \tag{8.7}$$

Procuremos se o tensor $\mathcal{K}^{\mu\nu}(k)$ satisfaz a esta relação. Como tensor, deve ser da forma:

$$\mathcal{K}^{\mu\nu}(k) = g(k^2) k^\mu k^\nu + \mathcal{H}(k^2)\, g^{\mu\nu} \ . \tag{8.8}$$

Se a teoria tem invariância de "gauge", então a substituição:

$$\epsilon_\mu(k) \longrightarrow \epsilon_\mu(k) + k_\mu \eta(k)$$

onde $\eta(k)$ é função escalar arbitrária, deve deixar $S^{(2)}$ invariante.

Portanto, os têrmos adicionais:

$k_\mu \eta(k) \mathcal{K}^{\mu\nu}(k)\epsilon_\nu(k)$, $\epsilon_\mu(k)\mathcal{K}^{\mu\nu}(k)k_\nu\, \eta(k)$ e $k_\mu\, \mathcal{K}^{\mu\nu}(k)\, k_\nu\, \eta^2(k)$

devem ser nulos (e como $\eta(k)$ é arbitrária):

$$k_\mu \mathcal{K}^{\mu\nu} = 0, \mathcal{K}^{\mu\nu}(k)_\nu = 0 \ . \tag{8.9}$$

Daí resulta:

$$k^2 \mathcal{G}(k^2) + \mathcal{H}(k^2) = 0 \ , \tag{8.10}$$

dando a $\mathcal{K}^{\mu\nu}(k)$ a forma:

$$\mathcal{K}^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})\, \mathcal{G}(k^2) \ .$$

Basta, pois, conhecer $\mathcal{G}(k^2)$, que é:

$$\mathcal{G}(k^2) = -\frac{1}{3k^2} \mathcal{K}_\mu^\nu(k) \ . \tag{8.11}$$

Já calculámos $\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu (\not p - \not k + m)\, \gamma_\mu (\not p + m)\right]$ no § 7 (cujo problema está intimamente relacionado com êste)

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu (\not p - \not k + m)\, \gamma_\mu (\not p + m)\right] = 8\left[2m^2 - p^2 + (pk)\right]$$

$$\mathcal{K}_\mu^\nu(k) = -3k^2 \mathcal{G}(k^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{2m^2 - p^2 + pk}{\left[(p-k)^2 - m^2\right]\left[p^2 - m^2\right]}\, dp \ . \tag{8.12}$$

Para um foton livre, devemos ter $k^2 = 0$, logo $\mathcal{K}_\mu^\mu(0) = 0$ (pois $\mathcal{K}_\mu^\mu(k) = \mathcal{K}^{\mu\nu}(k^2)$). Agora:

$$\mathcal{K}_\mu^\mu(0) = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{2m^2 - p^2}{(p^2 - m^2)^2}\, dp \tag{8.13}$$

e diverge quadràticamente. Somos assim conduzidos a adotar a seguinte expressão para $\mathcal{K}_\mu^\mu(k)$:

$$\mathcal{K}_{\mu}^{\mu}(k) = \frac{2\alpha}{\pi}\frac{1}{i\pi^2}\int\left(\frac{2m^2 - p^2 + pk}{\left[(p-k)^2-m^2\right]\left[p^2-m^2\right]} - \frac{2m^2 - p^2}{\left[p^2-m^2\right]^2}\right) dp \qquad (8.14)$$

que satisfaz a

$$\mathcal{K}_{\mu}^{\mu}(0) = 0$$

e a estudar a integral:

$$\mathcal{G}(k^2) = -\frac{1}{3k^2}\frac{2\alpha}{\pi}\frac{1}{i\pi^2}\int\left(\frac{2m^2 - p^2 + pk}{\left[(p-k)^2-m^2\right]\left[p^2-m^2\right]} - \frac{2m - p^2}{(p^2-m^2)^2}\right) dp \;. \qquad (8.15)$$

Agora:

$$\frac{1}{\left[(p-k)^2-m^2\right]\left[p^2-m^2\right]} = \int_0^1 \frac{dx}{\left\{\left[(p-k)^2-m^2\right]x + (p^2-m^2)(1-x)\right\}^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\left\{(p-kx)^2 - m^2 + k^2x(1-x)\right\}^2} \;. \qquad (8.16)$$

Logo:

$$\mathcal{G}(k^2) = -\frac{1}{3k^2}\frac{2\alpha}{\pi}\frac{1}{i\pi}\int(2m-p^2+pk)dp\int_0^1 dx\left(\frac{1}{\left\{(p-kx)^2-m^2+k^2x(1-x)\right\}^2} - \frac{1}{(p^2-m^2)^2}\right) \qquad (9.17)$$

(observando que o têrmo adicional em pk não contribue ao 2º têrmo). Aplicando: $\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} = -\int_0^1 \frac{2(\alpha-\beta)dZ}{[(\alpha-\beta)Z+\beta]^3}$ vem:

$$\mathcal{G}(k^2) = \frac{1}{3k^2}\frac{2\alpha}{\pi}\frac{1}{i\pi^2}\int(2m^2-p^2+pk)dp\int_0^1 dx\int_0^1 2dZ\,\frac{k^2x - 2pkx}{\left[p^2-m^2+(k^2x-2pkx)Z\right]^3} =$$

$$= \frac{1}{k^2}\frac{4\alpha}{3\pi}\frac{1}{i\pi^2}\int(2m^2-p^2+pk)dp\int_0^1 dx\int_0^1 x\,dZ\,\frac{k^2-2p\cdot k}{\left\{(p-kxZ)^2-m^2+k^2xZ(1-xZ)\right\}^3}\,.$$

Fazendo $xz = y$, $xdz = dy$ e invertendo a ordem das integrações:

$$\int_0^1 dx\int_0 dy\ f(y) = \int_0^1 dy\int_y^1 dx\ f(y) = \int_0^1(1-y)\ f(y)dy$$

vem:

$$\mathcal{G}(k^2) = \frac{1}{k^2}\frac{4\alpha}{3\pi}\frac{1}{i\pi^2}\int(2m^2-p^2+pk)d^4p\int_0^1(1-y)dy\,\frac{1}{\left\{(p-ky)^2-m^2+k^2y(1-y)\right\}^3}\qquad(8.19)$$

integral linearmente divergente. A mudança de origem em tal integral, $p \longrightarrow p + ky$, produz, como já vimos no caso da energia própria do electron, um têrmo de superfície; o têrmo que dá a integral linearmente divergente é $2p^2(pk)$ logo o têrmo de superfície é $-\frac{i\pi^2}{2}2k^2y = -i\pi^2\ k^2y$.

Logo:

$$\mathcal{G}(k^2) = \frac{1}{k^2}\frac{4\alpha}{3\pi}\left\{-k^2\int_0^1 y(1-y)dy + \frac{1}{i\pi^2}\int d^4p\int_0^1(1-y)dy\,\frac{k^2N}{\left[p^2-m^2+k^2y(1-y)\right]^3}\right.\qquad(9.20)$$

onde:

$$k^2N = \left[2m^2-(p+ky)^2+(p+ky)k\right]\left[k^2-2(p+ky)k\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow k^2(1-2y)\left[2m^2-\frac{3}{2}p^2+k^2y(1-y)\right] = \qquad(9.21)$$

$$= k^2(1-2y)\left[\frac{3}{2}\left(m^2-p^2-k^2y(1-y)\right)+\frac{1}{2}\left(m^2-k^2y(1-y)\right)+3k^2y(1-y)\right],$$

onde a seta indica que desprezamos os têrmos que não contribuem à integral. Mudando $1-y \longrightarrow y$ vem:

$$\mathcal{G}(k^2) = -\frac{2\alpha}{9\pi}\frac{4}{3\pi}\frac{1}{i\pi^2}\int d^4p \int_0^1 y\, dy \frac{N}{\left[p^2-m^2+k^2x(1-x)\right]^3} . \qquad (9.22)$$

O 1º têrmo de N dá uma integral logarítmicamente divergente:

$$\frac{3}{2}\frac{4\alpha}{3\pi}\frac{1}{i\pi^2}\int d^4p \int_0^1 \frac{x(1-2x)\,dx}{\left[p^2-m^2+k^2x(1-x)\right]^2} = \frac{3}{2}\frac{4\alpha}{3\pi}\frac{1}{i\pi^2}\int d^4p \left\{-\frac{1}{6(p^2-m^2)^2} + \right.$$

$$\left. + k^2 \int_0^1 \frac{x^2-\frac{4}{3}x^3\ (1-2x)dx}{\left[p^2-m^2+k^2x(1-x)\right]^3}\right\}$$, por integração parcial ; daí:

$$= -\frac{\alpha}{3\pi} I + \frac{2\alpha}{\pi}\frac{1}{i\pi^2}\ 2\int_0^1 x^2\left(1-\frac{4}{3}x\right)(1-2x)dx \int \frac{d^4p}{\left[p^2-m^2+k^2x(1-x)\right]^3} .$$

Agora, já vimos no § 7:

$$\int \frac{d^4p}{(p^2-L)^3} = -\frac{\pi^2 i}{2L}$$

portanto:

$$\frac{3}{2}\frac{4\alpha}{3\pi}\frac{1}{i\pi^2}\int d^4p \int_0^1 \frac{x(1-2x)dx}{\left[p^2-m^3+k^2x(1-x)\right]^2} = -\frac{\alpha}{3\pi} I - \frac{\alpha}{\pi} k^2 \int \frac{x^2\left(1-\frac{4}{3}x\right)(1-2x)dx}{m^2-k^2x(1-x)},$$

onde:

$$I = \frac{1}{i\pi^2}\int \frac{d^4p}{(p^2-m^2)^2} .$$

O têrmo restante de N dá:

$$\frac{4\alpha}{3\pi}\frac{1}{i\pi^2}\int d^4p\int_0^1\frac{x(1-2x)\left[\frac{1}{2}\,(k^2x(1-x)-m^2)-3k^2x(1-x)\right]dx}{\left[p^2-m^2+k^2x(1-x)\right]^3} =$$

$$= -\frac{2\alpha}{3\pi}\int_0^1 \frac{x(1-2x)\left[\frac{1}{2}(k^2x(1-x)-m^2)-3k^2x(1-x)\right]}{m^2-k^2x(1-x)}\,dx = -\frac{\alpha}{18\pi}+$$

$$+\frac{2\alpha}{\pi}k^2\int_0^1\frac{x^2(1-2x)(1-x)}{m^2-k^2x(1-x)}\,dx\,.$$

Assim:

$$\mathcal{G}(k^2) = -\frac{2\alpha}{9\pi}-\frac{\alpha}{18\pi}-\frac{\alpha}{3\pi}\,I-\frac{2\alpha}{\pi}\,k^2\int_0^1\frac{\frac{1}{2}x^2(1-2x)\left(1-\frac{4}{3}x\right)-x^2(1-2x)(1-x)}{m^2-k^2x(1-x)}\,dx$$

$$= -\frac{\alpha}{3\pi}\quad I+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\quad-\frac{2\alpha}{\pi}k^2\int_0^1\frac{(1-2x)\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)}{m^2-k^2\,x(1-x)}\,dx =$$

$$= -\frac{\alpha}{3\pi}\quad I+\frac{J}{6}\quad+\frac{2\alpha}{\pi}\left\{\left[\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\,\log\left(1-\frac{k^2}{m^2}\,x(1-x)\right)\right]_0^1 -\right.$$

$$\left.-\int_0^1(-x+x^2)\,\log\left(1-\frac{k^2}{m^2}\,x(1-x)\right)\,dx\right\} =$$

$$= -\frac{\alpha}{3\pi}\left(I+\frac{5}{6}\right)+\int_0^1 x(1-x)\,\log\left(1-\frac{k^2}{m^2}\,x(1-x)\right)dx\,.\,\frac{2\alpha}{\pi}\,. \qquad (8.24)$$

Portanto:

$$\mathcal{K}_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu})\,(\mathcal{G} + k^2 \mathcal{K}_f(k^2)), \tag{8.25}$$

onde:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(0) = -\frac{\alpha}{3\pi}\left(I + \frac{5}{6}\right)$$

$$k^2 \mathcal{K}_f(k^2) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\log\left(1 - \frac{k^2}{m^2}x(1-x)\right)dx =$$

$$= \frac{\alpha}{3\pi}\left[\frac{5}{3} - \frac{1}{\rho} - \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right)\sqrt{1+\frac{1}{\rho}}\,\log\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\rho}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{\rho}}+1}\right]^{3}, \quad \rho = \frac{k^2}{4m^2}.$$

Agora bem, numa teoria invariante de "gauge", como é a teoria eletromagnética, o têrmo em $k_\mu k_\nu$ não dá contribuição a $\mathcal{K}_{\mu\nu}(k)$. De fato, se a energia própria do foton fôr inserida numa linha externa de foton, o têrmo $k_\mu k_\nu$ $(\mathcal{G} + k^2 \mathcal{K}_f(k^2))$ multiplica a função de onda do foton externo $A^\mu(k)$:

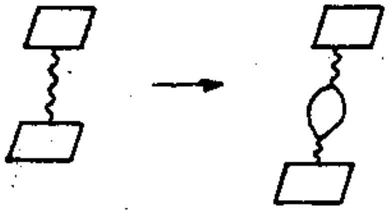
$$k_\mu k_\nu (\mathcal{G} + k^2 \mathcal{K}_f(k^2)) A^\mu(k) \tag{8.27}$$

e como os vetores de estado ψ devem satisfazer a:

$$k_\mu A^\mu(k)\psi = 0 \tag{8.28}$$

o têrmo considerado não contribue ao elemento de matriz (ou ainda, como o foton externo é transversal, $k_\mu \epsilon^{\mu(1)}(k) = k_\mu \epsilon^{\mu(2)}(k) = 0$, vêr § 7).

Devemos, pois, provar que o têrmo em $k_\mu k_\nu$ não dá contribuição quando a energia própria do foton é inserida numa linha fotônica interna.



O têrmo correspondente a êste último diagrama é da forma:

$$A\gamma^{\mu} B \frac{1}{2} \mathcal{K}_{\mu\nu}(k) \frac{1}{k^2} C \gamma^{\nu} D . \qquad (8.28)$$

Imaginemos, agora, associado a êste diagrama um outro em que $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ é substituído por duas linhas externas de fotons

Então o têrmo correspondente passa a ser $A\gamma^{\mu} B \epsilon_{\mu}(k) \epsilon_{\nu}(k')$ $C\gamma^{\nu}D$. Numa transformação de gauge, $\epsilon_{\mu} \longrightarrow \epsilon_{\mu} + k_{\mu}\chi$ o têrmo adicional é $A\not{k}B\chi\not{\epsilon}(k')D$ e se anula, para χ arbitrário, se:

$$A\not{k}B = 0 .$$

Agora, o diagrama original  dá como vimos o têrmo

$$A\gamma^{\mu} B \frac{1}{2} \mathcal{K}_{\mu\nu}(k) \frac{1}{k^2} C\gamma^{\nu} D$$

ou

$$A\not{k}B \frac{1}{k^2}\left(\mathcal{C}+k^2 \mathcal{K}_f(k^2)\right) \frac{1}{k^2} C\not{k}D - A\gamma^{\mu} B \frac{1}{k^2} k^2 (\mathcal{C} + k^2 \mathcal{K}_f) \frac{1}{k^2} C \gamma_{\mu} D. \qquad (8.30)$$

e o primeiro têrmo se anula por que $A \not{k} B = 0$.

Assim:

$$\mathcal{K}_{\mu\nu}(k) = - k^2 g_{\mu\nu} (\mathcal{G} + k^2 \mathcal{K}_f(k^2)) = g_{\mu\nu} \mathcal{K}(k^2) \tag{8.31}$$

$$\mathcal{K}(k^2) = - k^2 (\mathcal{G} + k^2 \mathcal{K}_f(k^2)) .$$

Quando inserimos uma energia própria de foton numa linha interna fotônica, o propagador desta: $-i\, g_{\mu\nu} \; D_F(k) = - i \; g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2}$, se transforma em

$$- i \; g_{\mu\nu} \; \bar{D}_F(k)$$

onde

$$g_{\mu\nu} \; \bar{D}_F(k) = g_{\mu\lambda} \frac{1}{k^2} \mathcal{K}^{\lambda\epsilon}(k) \; g_{\epsilon\nu} \frac{1}{k^2} = g_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} \mathcal{K}(k^2) \frac{1}{k^2} . \tag{8.32}$$

Logo, a soma do propagador original e do modificado é $- i\, g_{\mu\nu} D'_F(k)$ onde:

$$\begin{aligned} D'_F(k) &= D_F(k) + \bar{D}_F(k) = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} \mathcal{K}(k^2) \frac{1}{k^2} = \\ &= D_F(k)(1-\mathcal{G}) - \mathcal{K}_f(k^2) . \end{aligned} \tag{8.33}$$

Definindo:

$$D_F^R(k) = D_F(k) - \mathcal{K}_f(k^2) \tag{8.34}$$

vem:

$$D'_F(k) = (1-\mathcal{G}) \; D_F^R(k) . \tag{8.35}$$

A função de onda de um foton livre é renormalizada segundo:

$$\epsilon'_\mu(k) = (1-\mathcal{G})^{\frac{1}{2}} \; \epsilon_\mu^R(k) \tag{8.36}$$

e $\epsilon_\mu^R(k) = \epsilon_\mu(k)$ desde que $k^2 = 0$.

O fator (infinito) 1-G pode ser eliminado por renormalização da carga. Um gráfico de ordem que contenha P_e linhas externas de fotons tem $P_i = \frac{n-P_e}{2}$ linhas internas de fotons.

O elemento de matriz que incluir correções radiativas de 2ª ordem é obtido daquele sem correções substituindo D_F por D_F' e ϵ_μ por ϵ_μ'. Isto dá lugar a $\frac{1}{2}\left(n - P_e\right)$ fatores 1-G e P_e fatores $(1-\mathcal{G})^{\frac{1}{2}}$. O elemento de matriz fica pois com funções renormalizadas (finitas) e multiplicado por $(1-\mathcal{G})^{n/2}$. Fazendo pois:

$$e_{exp} = (1-\mathcal{G})^{\frac{1}{2}}\, e$$

o fator passa a ser e^n_{exp}.

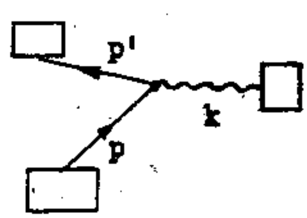
Assim, a renormalização da carga devida aos diagramas de energia própria do electron e do foton é:

$$e_{exp} = (1+ B)(1-\mathcal{G})^{\frac{1}{2}}\, e. \qquad (8.37)$$

9. O diagrama de vértice

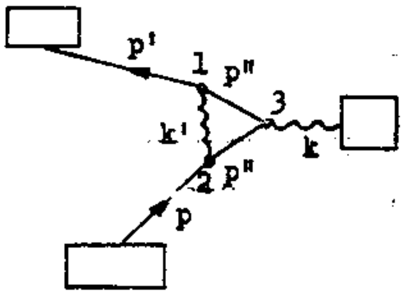
Partes de um diagrama que são ligadas ao resto dêste por duas linhas de electrons e uma linha de foton chamam-se diagramas do vértice.

O mais simples é naturalmente:



e a êle corresponde o fator: $\gamma_\mu\, \delta(p - p' - k)(2\pi)^4$ do elemento de matriz.

Depois dêste, devemos considerar o seguinte:



e a êle deve corresponder o fator:

$$\Lambda_\mu(p', p)\, \delta(p - p' - k)(2\pi)^4 \ .$$

Pelas regras de Feynman, temos:

$$(2\pi)^4 \Lambda_\mu(p',p)\, \delta(p-p'-k) = (-ie^2)\int dp''' \int dp'' \int dk' \ .$$

$$\cdot \gamma_\nu\, \delta(p'''+k'-p')(2\pi)^4 \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\not{p}'' + m}{p''^2 - m^2} \gamma_\mu \delta(p''-p'''-k)(2\pi)^4 \ .$$

$$\cdot \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\not{p}'' + m}{p''^2 - m^2} \cdot \gamma^\nu \delta(p-p''-k')(2\pi)^4 \frac{(-i)}{(2\pi)^4} \frac{1}{k'^2} \qquad (9.1)$$

de onde:

$$\Lambda_\mu(p_1 p) = - \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4\, \gamma_\nu \frac{\not{p}' - \not{k} + m}{(p'-k)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{1}{k^2}, \qquad (9.2)$$

onde retiramos o acento da variável de integração.

O efeito sôbre um diagrama desta parte do vértice de 2ª ordem, considerada como uma correção de 2ª ordem ao vértice mais simples, consiste portanto em substituir γ_μ por:

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p',p) \ . \qquad (9.3)$$

A integral de (9.2) diverge logarìtmicamente. Aplicamos ao denominador a fórmula: [4]

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = 2\int_0^1 dx \int_0^x dy \; \frac{1}{\left[a_1 y + a_2(x-y) + a_3(1-x)\right]^3} \; . \qquad (9.4)$$

Então:

$$\Lambda_\mu(p',p) = -\frac{2i\alpha}{4\pi^3}\int_0^1 dx \int_0^x dy \; \frac{\gamma_\nu(\not p' - \not k + m)\gamma_\mu(\not p - \not k + m)\gamma^\nu}{\left\{\left[k - px + (p-p')y\right]^2 - a^2\right\}^3}\, d^4k \qquad (9.5)$$

onde:

$$a^2 = m^2x^2 - (p'-p)y(x-y) + (p^2-m^2)(1-x)(x-y) + (p'^2-m^2)(1-x)y \; .$$

Somemos agora sôbre ν e mudemos a orígem $k + px - (p-p')y \longrightarrow k$. Além disso, ponhamos de lado os têrmos lineares em K por integração simétrica * e substituamos $k_\mu \, k_\nu$ por $\frac{1}{4}\, g_{\mu\nu}\, k^2$, então (9.5), separando os têrmos que são nulos quando p, p' (p-p') tomam os valores para partícula livre, converte-se em:

$$\Lambda_\mu(p',p) = -\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int_0^1 dx \int_0 dy \left\{\int \frac{\gamma_\mu\left[k^2 + 4m^2\left(1 - x - \frac{x^2}{2}\right)\right]}{\left[k^2 - a^2\right]^3}\, d^4k \; - \right.$$

$$\left. - \int \frac{k_\mu(p,p',x,y)}{\left[k^2-a^2\right]^3}\, d^4k \right\} . \qquad (9.6)$$

onde:

$$k_\mu(p_1 p', x, y) = (1-x)(\not p' - m)\gamma_\mu(\not p - m) + \gamma_\mu k^2 \Big\{ (1-x+y)(1-y) -$$

$$- (1-x)\left[(p^2-m^2)(1-x+y) + (p'^2-m^2)(1-y)\right]\Big\} + (\not p' - m)\left[\gamma_\mu \; m(1-x^2) + \right.$$

$$\left. + (p-p')\gamma_\mu(1-x)(1-y) + (p-p')\gamma_\mu (1-x+2y)(1-y)\right] + (\not p' - m)\left[m\gamma_\mu(1-x^2) + \right.$$

$$+ (p+p')(1-x)(1-x+y) + (\not p - \not p')\gamma_\mu(1+x-2y)(1-x+y)\Big]$$

$$+ (p-p')\, m(1-x)(x+2y) + mx(1-x)\, \sigma_{\mu\nu}\, k^\nu \; .$$

Como a primeira integral é divergente e proporcional a γ_μ, podemos expressar Λ_μ na seguinte forma:

$$\Lambda_\mu(p',p) = L\,\gamma_\mu + \Lambda_{\mu f}(p',p) \qquad (9.8)$$

onde a quantidade divergente L é univocamente definida pela condição

$$\Lambda_{\mu f}(p',p) = 0 \quad \text{para} \quad i\not p' = i\not p = m \; . \qquad (9.9)$$

Logo:

$$L = -\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int d^4 \int_0^1 x\,dx\, \frac{k^2 + 4m^2\left(1 - x - \frac{x^2}{2}\right)}{(k^2 - m^2x^2)^3} \; . \qquad (9.10)$$

A parte divergente desta integral é:

$$\int d^4k \int_0^1 x dx \frac{k^2}{(k^2-m^2x^2)^3} = \int d^4k\, k^2 \left\{ \frac{\frac{1}{2}x^2}{(k^2-m^2x^2)^3}\Big|_0^1 - 3m^2 \int_0^1 \frac{x^3\, dx}{(k^2-m^2x^2)^4} \right\}$$

(9.11)

(o segundo têrmo é absolutamente convergente), e a parte restante:

$$4m^2 \int_0^1 x\,dx \int \frac{1-x-\frac{1}{2}x^2}{(k^2-m^2x^2)^3}\, d^4k = 2i\pi^2 \int_0^1 dx \left(1 - x - \frac{x^2}{k^2}\right) \frac{1}{x} \quad \ldots \qquad (9.12)$$

Levando agora estas relações (10-11-12), em (10.10), obtemos:

$$L = -\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{1}{i\pi^2}\int \frac{d^4k}{(k^2-m^2)^2} - 4\int_0^1 \frac{dx}{x} + \frac{11}{2}\right) . \qquad (9.13)$$

Assim: 5

$$\Lambda_{\mu f} = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \frac{\mu}{a^2} + \gamma_\mu \int_0^1 dZ \frac{a^2+m^2 x^2}{(a^2+m^2x^2)Z-m^2x^2} + \right.$$

$$\left. + 2m^2 \gamma_\mu \left(1-x-\frac{1}{2}x^2\right) \frac{m^2x^2-a^2}{(amx)^2} \right\} . \qquad (9.14)$$

Nota-se que, com a separação da constante infinita L da parte restante da expressão para Λ_μ tem-se introduzido uma divergência infra-vermelha como no caso de $\sum$, visto no § 7.

Comparando agora (9.13) com (7.72), obtemos:

$$L = B . \qquad (9.15)$$

Se a parte do vértice é tomada junto com γ_μ para o vértice 3 (vêr figura), obtemos para a contribuição total (9.3) dêste vértice:

$$\Gamma_\mu (p',p) = \gamma_\mu(1+L) + \Lambda_{\mu f}(p',p) = (1+L)\Gamma_{\mu o} \qquad (9.16)$$

para a 2ª ordem em e, onde:

$$\Gamma_{\mu o} = \gamma_\mu + \Lambda_{\mu f} .$$

O fator infinito 1+ L, como no § 7, pode ser absorvido por uma renormalização da carga, logo a carga renormalizada, combinada com (8.37); é agora:

$$e_o = (1-B)\sqrt{1-g}\,(1+L)\, e$$

$$= (1-B+L)\left(1-\frac{1}{2}g\right) e \qquad (9.17)$$

para a 2ª ordem em e.

REFERÊNCIAS:

1. A lagrangeana dada no texto 4, difere de outra mais simples por uma divergência. A mais simples é:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}\left[i\,\gamma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right]\psi$$

que dá lugar às equações:

$$\left(i\,\gamma^{\mu}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right)\psi = 0$$

variando L' em relação a $\bar{\psi}$; e a:

$$\bar{\psi}\left(i\,\gamma^{\mu}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}} + m\right) = 0\ , \qquad \bar{\psi}\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial\,\bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}$$

variando L' em relação a ψ.

Subtraindo de L' o têrmo

$$-\,\frac{i}{2}\,\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\psi$$

obtemos o L do texto:

O tensor $T^{\mu\nu}$ derivado de L' é:

$$T'^{\mu\nu} = i\,\bar{\psi}\,\gamma^{\nu}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}}\ ,$$

que satisfaz a

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0\ .$$

2. Pode-se ver, intuitivamente, a razão de (2.3). Suponhamos que o espaço esteja dividido em pequenas células de tamanho $\Delta x_s = \Delta^3$, a cada célula associamos uma "coordenada generalizada" $\phi(\vec{x}_s,t) = q_s$ onde $\vec{x}_s$ é um ponto no interior de Δ^3, sua derivada temporal $\dot{\phi}(\vec{x}_s,t) = \dot{q}_s$ e o gradiente de ϕ será substituido por $q_{s+1} - q_s/\Delta$. A lagrangeana do sistema será então

$$L = \sum_s \mathcal{L}_s \Delta x_s \tag{2.04}$$

O momento canônicamente conjugado a q_s será:

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial \mathcal{L}_s}{\partial \dot{q}_s} \Delta x_s = \pi(x_s)\,\Delta x_s \ . \tag{2.05}$$

Transformamos então o nosso campo ϕ num "sistema mecânico" de uma infinidade de gráus de liberdade, descrito por coordenadas q_s e momenta p_s. Aplicando as regras (2.1) temos:

$$\left[\phi(\vec{x}_s),\ \phi(\vec{x}_r)\right] = \left[\pi(\vec{x}_s),\ \pi(\vec{x}_r)\right] = 0,$$

$$\left[\phi(\vec{x}_s),\ \pi(\vec{x}_r)\right] = i\,\frac{\delta_{rs}}{\Delta x_s} \ . \tag{2.06}$$

Se agora passarmos ao contínuo fazendo $\Delta x_s \longrightarrow 0$, obteremos as regras (2.3).

3. Vêr, Jauch e Rohrlich, Photons and Electrons, pag. 460.

4. Vêr Jauch e Rohrlich, Theory of Photons and Electrons, apêndice 5.

5. Vêr R. Karplus e N. Kroll, Phys. Rev. 77, 536 (1950).

* * *