

MONOGRAFIAS DE FÍSICA

XVI

ELETROMAGNETISMO III

Equações de Maxwell

por

Jayme Tiomno

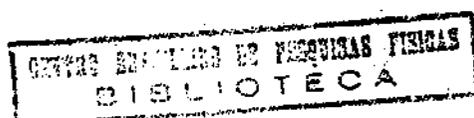
Notas redigidas por Sarah Castro Barbosa de Andrade

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1964



Í N D I C E

	Pag.
Capítulo 16 - <u>Circuitos Elétricos (Sem Indução)</u>	1
1. Circuitos de corrente contínua. 2. Circuitos de corrente variável. 3. Lei de Ampere generalizada. 4. Campo magnético de uma carga puntiforme em movimento e do dipolo oscilante (sem indução). 5. Corrente de deslocamento. 6. Leis de Kirchhoff para correntes variáveis quase-estacionárias. 7. Circuitos com condensadores de resistência interna finita. 8. Circuitos com condensadores de resistência interna infinita. Problemas.	
Capítulo 17 - <u>Indução Eletromagnética</u>	32
1. Efeito Hall. 2. Circuito em movimento em campo magnético. 3. Indução eletromagnética. Lei de Faraday. 4. Transformadores. 5. Coeficientes de indução. Problemas.	
Capítulo 18 - <u>Circuitos Elétricos (Com Indução). Energia Magnética</u>	49
1. Descarga de condensadores em circuitos com indutância. 2. Correntes alternadas em circuitos com indutância. 3. Energia magnética de um sistema de correntes. 4. Distribuição da energia magnética no espaço. Problemas.	
Capítulo 19 - <u>Equações de Maxwell</u>	66
1. Formulação diferencial da lei de Faraday. 2. Campos elétrico e magnético de um dipolo oscilante. 3. Equações de Maxwell. 4. Dipolo oscilante, segundo as equações de Maxwell. Problemas.	
Capítulo 20 - <u>Emissão de Ondas Eletromagnéticas</u>	81
1. Equação de onda. 2. Potenciais eletromagnéticos. 3. Energia e fluxo de energia eletromagnética. 4. Valores médios e campos complexos. 5. Ondas de campo eletromagnético emitidas pelo dipolo oscilantes no vácuo. 6. Potência irradiada pelo dipolo oscilante. Problemas.	

Capítulo 21 - Propagação de Ondas Eletromagnéticas ... 107

1. Ondas planas monocromáticas. 2. Condições ao contorno. 3. Leis geométricas da reflexão e da refração em meios não condutores. 4. Reflexão total. 5. Ondas planas polarizadas. Formulas de Fresnel. Problemas.

Capítulo 22 - Absorção de Energia Eletromagnética 133

1. Espalhamento. 2. Absorção e dispersão nos gases. Problemas.

* * *

CAPÍTULO 16

CIRCUITOS ELÉTRICOS (SEM INDUÇÃO)

16 - 1. Circuitos de corrente contínua. São sistemas de geradores de corrente contínua, ligados por condutores, em geral metálicos, de secções e comprimentos variáveis, fechando-se de algum modo em conjuntos mais ou menos complicados de malhas. Para determinar as intensidades e os sentidos das correntes que percorrem os diversos trechos de um circuito, são utilizadas as leis de Kirchhoff. Neste parágrafo deduziremos estas leis, a partir de leis e princípios mais gerais.

A superfície de um condutor por onde passa uma corrente estacionária é um tubo de linhas de campo elétrico (Fig. 9-4). No instante em que se aplica uma diferença de potencial entre os extremos do condutor, as linhas de força do campo elétrico não estão ainda contidas no condutor, mas imediatamente depois, devido à componente normal de E e consequentemente de \vec{J} , aparecem cargas elétricas em sua superfície, de tal maneira que o campo se torna tangente e a corrente estacionária. Se o condutor é cilíndrico, as superfícies equipotenciais são secções normais ao eixo; se o fio fôr curvado de alguma maneira, as novas superfícies equipotenciais poderão ainda ser identificadas aproximada-

mente com aquelas secções, agora deformadas pelo encurvamento.

Como consequência da equação de continuidade (expressão matemática do princípio da conservação da carga), aplicada ao caso estacionário (9-10), vimos no parágrafo 9-1 que a intensidade da corrente elétrica é constante ao longo de um fio condutor. Esta poderia ser considerada a "lei zero" de Kirchhoff, e na verdade é um caso particular da 1ª lei de Kirchhoff.

A 1ª lei de Kirchhoff é também uma consequência imediata da equação de continuidade. Ela se refere aos "nós" de um circuito, que são os pontos onde se encontram diversos de seus ramos. Se estabelecermos uma convenção de sinal para as correntes que se aproximam (por exemplo, positivo) ou se afastam (por exemplo, negativo) do nó, diz a 1ª lei que a soma algébrica dessas correntes é nula:

$$\sum_r i_r = 0 \quad (16-1)$$

Demonstra-se (16-1) aplicando a equação de continuidade (em forma finita) a uma superfície fechada que contenha o nó (Fig. 16-1):

$$\int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = - \frac{d Q_{int}}{dt}$$

Como o sistema é estacionário:

$$\frac{d Q_{int}}{dt} = 0,$$

isto é:

$$\int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sum_r i_r = 0,$$

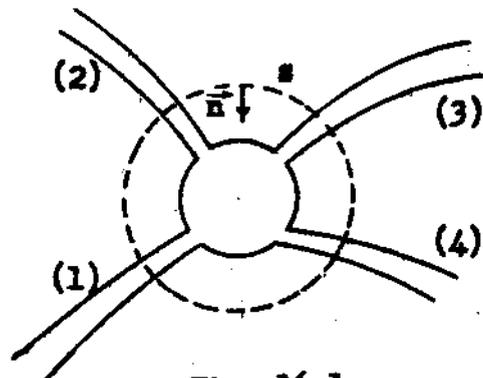


Fig. 16-1

onde i_r é a corrente que chega ao nó (negativa quando sai do nó), pelo ramo r.

A 2ª lei de Kirchhoff é, fundamentalmente, uma extensão da lei de Ohm. Esta, em sua forma integral (9-8), é dada por:

$$\Delta V = Ri ,$$

em que ΔV é a diferença de potencial entre os extremos do condutor, R sua resistência e i a intensidade da corrente que o percorre. Vimos, no parágrafo 9-1, que para condutores cilíndricos essa lei pode ser obtida a partir da equação (9-7):

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} ,$$

que foi tomada como equação de definição de condutor ôhmico, sendo γ a condutividade do material. Na verdade, a lei de Ohm é sempre válida, qualquer que seja a forma do condutor (ôhmico) considerado. Para demonstrá-lo, consideremos um trecho de circuito formado por um condutor ôhmico de secção transversal variável, cuja superfície lateral é um tubo de linhas de força (Fig. 16-2). A diferença de potencial entre suas bases (superfícies equipotenciais) A e B vale:

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{s_A}^{s_B} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\int_{s_A} \vec{E} \cdot d\vec{s}} ,$$

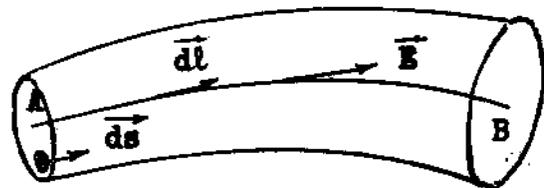


Fig. 16-2

onde s_A é a área da base A; mas:

$$\int_{s_A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\gamma} \int_{s_A} \vec{J} \cdot d\vec{s} = i \frac{1}{\gamma} ,$$

e, se admitirmos válida a lei de Ohm (9-8), teremos para a resis-

tência R do condutor considerado:

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_{S_A} \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad (16-2)$$

Se agora é aplicada outra diferença de potencial $V' = kV$ entre A e B , é fácil ver que $\vec{E}' = k\vec{E}$, e assim:

$$R' = \frac{1}{\gamma} \frac{\int_A^B \vec{E}' \cdot d\vec{l}}{\int_{S_A} \vec{E}' \cdot d\vec{s}} = R,$$

isto é, R é independente de δV .

Como exemplo, calculemos a resistência de uma longa camada cilíndrica (tubo) não isolante, porém menos condutora do que as capas metálicas que a envolvem interna e externamente (Fig. 16-3). Estabelecendo-se uma diferença de potencial V entre as capas metálicas, surge um campo elétrico que vai neste caso de dentro para fora, com linhas de fluxo radiais (longe dos extremos).

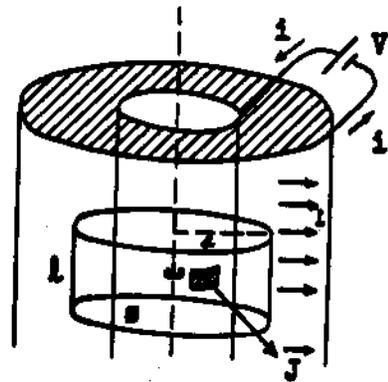


Fig. 16-3

Se tomarmos s como a superfície de raio a e altura l indicada na Fig. 16-3, teremos:

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(a) \cdot 2\pi a l = C \therefore E(a) = \frac{C}{2\pi a},$$

em que C é constante, e então:

$$\int_{R_0}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{C}{2\pi l} \int_{R_0}^{R_1} \frac{da}{a} = \frac{C}{2\pi l} \log \frac{R_1}{R_0},$$

sendo R_0 e R_1 respectivamente os raios interno e externo da camada (a espessura das capas é suposta desprezível). A resistência vale portanto, por (16-2):

$$R = \frac{\log \frac{R_1}{R_0}}{2\pi l \gamma}.$$

Vamos agora obter a 2ª lei de Kirchhoff, seguindo um método análogo ao da demonstração da lei de Ohm.

Consideremos um circuito, como o da Fig. 16-4, que, por simplicidade, admitiremos formado apenas por trechos de condutores ôhmicos cilíndricos, de resistências R_1, R_2, \dots , e por geradores de "fôrças eletromotrizes" (f.e.m.) $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$. Dizemos que o trecho AB de um circuito tem uma f.e.m., quando existem aí fôrças \vec{F}' de origem não eletrostática (por exemplo, gravífica, química ou magnética) que tendem a fazer as cargas moverem-se em algum sentido (Fig. 16-5). Nesse caso, a fôrça que atua sôbre a carga q do transportador (elétron ou íon) será:

$$\vec{F}_t = q\vec{E} + \vec{F}' = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{F}'}{q} \right),$$

e assim, em lugar de (9-7), teremos:

$$\vec{J} = \gamma \left(\vec{E} + \frac{\vec{F}'}{q} \right)$$

(Na Fig. 16-5 está representado o ca-

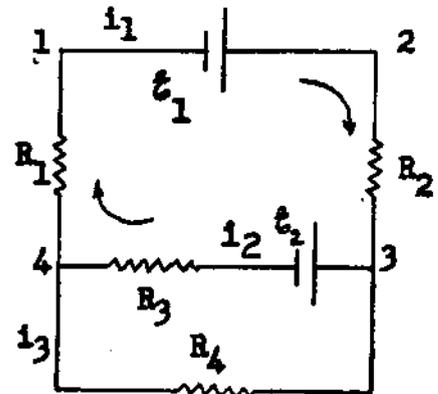


Fig. 16-4



Fig. 16-5

so de $q > 0$). Esta equação é válida para geradores ($\vec{F}' \neq 0$) e para condutores ôhmicos ($\vec{F}' = 0$). A corrente nesse trecho de circuito será:

$$i = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = J_s,$$

onde s é a área transversal do condutor ou gerador (cilíndrico ou prismático). Portanto, sendo \vec{n} a normal à secção transversal:

$$E_n + \frac{F'_n}{q} = \frac{i}{\gamma s}.$$

Integrando ambos os membros ao longo de um contorno fechado (malha) do circuito (por exemplo, 1, 2, 3, 4, 1), vem:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} + \sum_k \frac{1}{q} \int_k \vec{F}' \cdot d\vec{l} = \sum_k \frac{i_k l_k}{\gamma_k s_k} + \sum_j \frac{i_j l_j}{\gamma_j s_j},$$

onde os índices k e j indicam as contribuições dos trechos de circuito correspondentes respectivamente aos diversos geradores e aos diversos condutores ôhmicos. Como

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

chamando \mathcal{E}_k a f.e.m. do k -ésimo gerador,

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{q} \int_{A_k}^{B_k} \vec{F}' \cdot d\vec{l}, \quad (16-3)$$

e R_j e r_k as resistências do j -ésimo condutor e do k -ésimo gerador,

$$R_j = \frac{l_j}{\gamma_j s_j}, \quad r_k = \frac{l_k}{\gamma_k s_k},$$

vem:

$$\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_j R_j i_j + \sum_k r_k i_k . \quad (16-4)$$

Esta é a expressão da 2^a lei de Kirchhoff.

Resulta da própria demonstração que o 1^o membro de (16-4) é a soma algébrica das f.e.m., atribuindo-se sinal + às correspondentes a geradores que são atravessados do polo negativo para o polo positivo pelo sentido de percurso escolhido para a malha, e sinal - aos que se apresentam em situação inversa. Lembremos que os sentidos de referência das correntes i_j são escolhidos arbitrariamente, e que também cada i_j ou i_k do 2^o membro de (16-4) terá sinal + ou -, conforme o sentido da corrente seja o mesmo ou o contrário do sentido de percurso da malha.

Para circuitos de correntes contínuas, as leis de Kirchhoff (16-1) e (16-4), aplicadas respectivamente aos diferentes nós e às diferentes malhas, são suficientes para a determinação das intensidades e dos sentidos das correntes que percorrem os diferentes ramos do circuito.

16 - 2. Circuitos de corrente variável. Pode-se obter corrente variável num circuito de diversas maneiras; por exemplo, fazendo variar continuamente uma das resistências presentes. Neste caso, valem ainda aproximadamente as leis de Kirchhoff, se todos os condutores forem ôhmicos, como mostraremos no parágrafo 16-6. Nos condutores que transportam corrente contínua, as cargas superficiais são estacionárias; se as correntes são va-

riáveis, a densidade superficial de carga em um ponto varia com o tempo.

Veremos agora que, mesmo no caso de correntes variáveis, não podem existir distribuições espaciais de carga no interior dos condutores puramente ôhmicos. Ou melhor, mostraremos que, se introduzirmos por meios não elétricos uma distribuição com $\rho \neq 0$, essa distribuição espacial não poderá permanecer no interior do condutor, decaindo com o tempo. De fato, sabemos que, para condutores ôhmicos, vale (9-7), e a equação de continuidade (9-6) dará:

$$\operatorname{div} \vec{J} = \operatorname{div} \gamma \vec{E} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Se γ e ϵ forem constantes ($\epsilon \approx \epsilon_0$ em geral nos condutores), virá então:

$$\operatorname{div} \vec{J} = \gamma \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\gamma}{\epsilon} \operatorname{div} \vec{D} = \frac{\gamma}{\epsilon} \rho .$$

Integrando agora a equação:

$$\frac{\gamma}{\epsilon} \rho = - \frac{\partial \rho}{\partial t} ,$$

obtem-se para solução geral:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-\frac{\gamma}{\epsilon} t} = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} ,$$

em que ρ_0 é a densidade de carga existente no condutor no instante inicial. Isto significa que, se $\rho_0 = 0$ para $t = 0$, então ρ será nulo em qualquer tempo. E mesmo que ρ_0 seja diferente de zero, ao fim de algum tempo, ρ , caindo exponencialmente, ficará praticamente nulo. Esse tempo é da ordem de $\tau = \frac{\epsilon}{\gamma}$, assumindo para os metais ($\epsilon \sim 10^{-11}$, $\gamma \sim 10^7$ unidades MKS) valores

da ordem de 10^{-18} s. Portanto, não é possível introduzir uma variação de ρ com o tempo, no interior de um condutor ôhmico, por ações puramente elétricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div } \vec{J} = 0.$$

Observe-se, no entanto, que para correntes variáveis as densidades superficiais de carga não são constantes:

$$\frac{d\sigma}{dt} \neq 0; \quad \vec{J} \cdot d\vec{s} \neq 0 \quad (\text{na superfície}).$$

Consideremos agora o caso de correntes variáveis quando há um condensador no circuito (Fig. 16-6).

É claro, neste caso, que não pode haver corrente contínua, por se acumularem cargas nas armaduras do condensador: sua variação com o tempo faz variar a diferença de potencial e, portanto, a corrente. No circuito

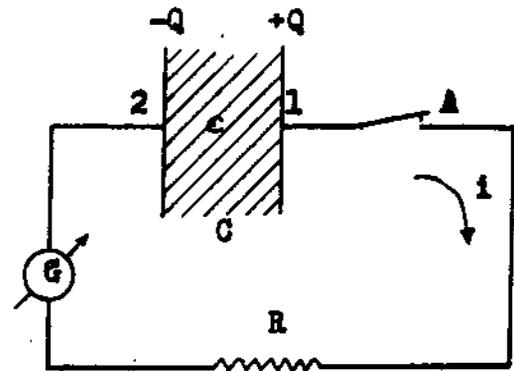


Fig. 16-6

representado na Fig. 16-6, comparece

um condensador de capacidade C , inicialmente carregado, (estando aberto o interruptor A) com um dielétrico de permitividade ϵ e condutividade $\gamma_d = 0$ (o dielétrico ideal não conduz corrente).

Se fecharmos o interruptor A , aparecerá uma corrente de intensidade i no circuito. Aplicando a lei de Ohm entre os pontos 1 e 2 (polos do condensador) e englobando em R a resistência do galvanômetro G , tem-se:

$$V_1 - V_2 = V_{12} = Ri. \quad (16-5)$$

Por outro lado, a carga Q das placas do condensador está decres

cendo, isto é:

$$i = - \frac{dQ}{dt} . \quad (16-6)$$

Usando a relação $V_{12} = \frac{Q}{C}$ e eliminando i entre as equações (16-5) e (16-6), obtém-se a equação diferencial:

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{1}{RC} Q ,$$

que integrada dá:

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} , \quad (16-7)$$

onde Q_0 é a carga existente no condensador no instante em que se fechou o circuito. Isto é, a carga do condensador cai exponencialmente com o tempo. Ao intervalo de tempo:

$$\tau = RC$$

chama-se "tempo de descarga" ou "tempo próprio" do condensador.

Para $t = \tau$ tem-se:

$$Q = \frac{Q_0}{e} \sim \frac{Q_0}{3} .$$

Em geral, τ é da ordem de 10^{-6} a 10^{-3} s.

Para o cálculo da intensidade da corrente, a partir de (16-7), aplica-se (16-6), e obtém-se:

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{RC}} ,$$

onde:

$$i_0 = \frac{Q_0}{RC} ,$$

expressão que pode ser facilmente lembrada, observando que a corrente inicial é igual à carga inicial das placas dividida pelo tempo próprio do condensador.

16 - 3. Lei de Ampère generalizada. O campo produzido por correntes estacionárias é dado pela lei de Ampère (9-18):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

a qual é equivalente às equações diferenciais da Magnetostática:

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J},$$

sendo válida a última equação, (12-1), porque nesses casos $\text{div } \vec{J}(\vec{r}) = 0$. Ora, se no circuito estão presentes condutores não ôhmicos ($\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$) ou condensadores, ou se a carga acumulada na superfície dos condutores varia com o tempo ($J_n = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \neq 0$), a equação (12-1) não pode mais ser correta, pois a divergência do primeiro membro é nula e a do segundo não.

Embora a expressão (9-18) da lei de Ampère tenha sido obtida a partir de experiências com correntes estacionárias, é razoável esperar que ela seja válida, pelo menos em primeira aproximação, também para correntes variáveis (lei de Ampère generalizada). Podemos então escrever, neste caso:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \wedge \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv',$$

em que v é o volume dos condutores, e calcular:

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \left[\vec{\nabla} \wedge \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right] =$$

$$= \left[-\Delta \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + \text{grad div} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right] =$$

$$= \mu_0 \vec{J} + \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' .$$

Por outro lado:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = - \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = - \int_{\mathcal{V}} \text{div}' \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' +$$

$$+ \int_{\mathcal{V}} \frac{\text{div}' J}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' ,$$

e então:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} - \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \int_{\mathcal{V}} \text{div}' \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \int_{\mathcal{V}} \frac{\text{div}' J}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' .$$

Aplicando o teorema de Gauss para divergência ao 2^o termo do 2^o membro desta equação, virá:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} - \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \left[\int_{\mathcal{S}} \frac{\vec{J} \cdot d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int_{\mathcal{V}} \frac{\text{div}' J}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right] ,$$

(16-8)

em que \mathcal{S} é a superfície dos condutores. No caso de correntes estacionárias, $\text{div}' \vec{J} = 0$, o que anula a 2^a integral de (16-8), e além disso $\vec{J} \cdot d\vec{s}' = 0$ [pois não vão (nem saem) cargas para as (das) superfícies dos condutores], o que anula também a 1^a integral de (16-8). Vale portanto neste caso a equação diferencial (12-1).

Mas, se houver condensadores no circuito (ou se as correntes forem variáveis), então haverá variação de carga nas placas dos condensadores (ou nas superfícies dos condutores) e fluxo de carga de (ou para) suas superfícies, e podemos por:

$$\vec{J} \cdot d\vec{s}' = \frac{\partial \sigma}{\partial t} ds' \neq 0 \quad \text{e} \quad \text{div}' \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

em que σ e ρ são as densidades superficial e espacial de carga existente nos condutores (para condutores não ôhmicos, podemos ter $\rho \neq 0$). A equação (16-8) se escreve então:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J} - \epsilon_0 \text{grad } \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma ds'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right],$$

e portanto:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} - \epsilon_0 \text{grad } \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\vec{J} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

ou ainda:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), \quad (16-9)$$

sendo V , \vec{E} e \vec{D} o potencial, o campo e o vetor deslocamento elétricos devidos a σ e a ρ .

A equação diferencial (16-9) é a generalização da equação diferencial (12-1), para o caso não estacionário ou de circuitos abertos, com condensadores; a equação $\text{div } \vec{B} = 0$, no entanto, continua a ser verdadeira para campos não estacionários.

A equação (16-9) poderá ser obtida de outro modo: tentando encontrar a equação diferencial para \vec{B} que seja consistente com a equação de continuidade (9-6). Seguindo êsse método, verificamos desde logo que será necessário acrescentar um termo ao 2º membro da equação (12-1):

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{K}).$$

Calculando agora a divergência dos dois membros desta equação, virá:

$$0 = \mu_0 (\text{div } \vec{J} + \text{div } \vec{K}),$$

donde:

$$\text{div } \vec{K} = - \text{div } \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Uma solução trivial para esta equação será:

$$\vec{K} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

que é exatamente o que obtivemos anteriormente. Esta não é, no entanto, a solução geral da equação em \vec{K} , porque qualquer campo vetorial da forma:

$$\vec{K} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{K}_1$$

seria também solução dela, desde que $\text{div } \vec{K}_1 = 0$.

16 - 4. Campo magnético de uma carga puntiforme em movimento e do dipolo oscilante (sem indução). A lei de Ampère generalizada nos permite obter imediatamente o valor de $\vec{B}(\vec{r}, t)$ e de $\vec{A}(\vec{r}, t)$, quando se conhecem a posição $\vec{r}'(t)$ e a velocidade $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}'}{dt}$ da carga q em cada instante t :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \text{rot } \vec{A},$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Determinemos agora os campos elétrico e magnético de um dipolo-

1º oscilante de momento

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega t , .$$

colocado na origem. Este dipolo pode ser visualizado como uma carga $-q$ na origem e outra $+q$ colocada sobre a direção de \vec{p}_0 e oscilando segundo a lei:

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 \cos \omega t$$

tendo-se então:

$$\vec{p}_0 = q\vec{r}_0, \quad \vec{p} = q\vec{r}'$$

Da Eletrostática sabemos que o potencial e o campo elétricos de um dipolo são dados por:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V;$$

pela lei de Ampère generalizada, vem:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{p}}{dt}; \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

Veremos no capítulo 18 que essas expressões são aproximadas, corretas apenas para pequenos valores de ω .

16 - 5. Corrente de deslocamento. Em meios dielétricos e magnéticos, em lugar da 2ª das equações (15-21), teremos para \vec{H} a equação mais geral:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (16-10)$$

ou ainda, usando (13-7):

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (16-11)$$

O 1º termo do 2º membro desta equação é igual à densidade de corrente de condução ou convecção; o 2º descreve o fato de que a

corrente não é estacionária, mas não fornece, como vimos, sentido físico novo; ao passo que o 3º termo dá uma contribuição completamente nova: expressa a existência de correntes de polarização no interior do dielétrico. De fato, se imaginarmos, por simplicidade, os átomos do dielétrico como dipolos induzidos idênticos, então teremos para o vetor polarização:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = Nq\vec{l},$$

em que \vec{l} é o raio vetor (variável no tempo) que vai da carga negativa (suposta fixa, por simplicidade) para a positiva, e o somatório se estende a um volume unitário. Portanto:

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = Nq \frac{d\vec{l}}{dt} = Nq\vec{v}_+ = \vec{J}_{pol},$$

sendo \vec{v}_+ a velocidade da carga positiva (supondo-se a negativa em repouso). \vec{J}_{pol} é, pois, a densidade de correntes de polarização, que deve produzir e produz - campo, tal como a corrente de condução ou convecção \vec{J} .

Examinemos, finalmente, o 2º termo de (16-11); aparentemente, também ele deveria produzir campo, mas sabemos, pelo próprio método de dedução seguido, que isto não é verdade: o 2º termo não produz campo magnético. De fato, a contribuição desse termo (que Maxwell denominou "corrente de deslocamento") ao campo \vec{B} seria:

$$\vec{B}' = \text{rot} \left[\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right] = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \int_V \frac{\vec{E}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' ;$$

mas:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{E}(\vec{r}, t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' &= - \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \wedge \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \wedge \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \\ &= \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}' \frac{\vec{E}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\nabla}' \wedge \vec{E}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = - \int_{S_{\infty}} \frac{\vec{E} \cdot d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

onde foram usados a identidade (5-46), o fato de que \vec{E} (campo elétrico coulombiano, que passaremos a designar, daqui em diante, por \vec{E}_C) é irrotacional e o teorema de Stokes, e onde S_{∞} é a superfície que envolve o espaço todo (sobre o qual se estendia a integral de volume). Ora, não havendo cargas no infinito, o valor do integrando cai a zero quando $r \rightarrow \infty$, por ser $E_C \sim \frac{1}{r^2}$, $ds' \sim r_{\infty}^2$; portanto, a integral obtida é nula, e consequentemente: $\vec{B}' = 0$.

16 - 6. Leis de Kirchhoff para correntes variáveis quase-estacionárias. Na dedução das leis de Kirchhoff foi fundamental utilizar a corrente \vec{J} satisfazendo à condição:

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 .$$

No caso de correntes variáveis, porém, esta condição não é satisfeita; mas como

$$\vec{J}' = \vec{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$

satisfaz à condição:

$$\operatorname{div} \vec{J}' = 0 ,$$

é natural definir-se a intensidade de corrente como:

$$i = \int_s \vec{J}' \cdot d\vec{s} ,$$

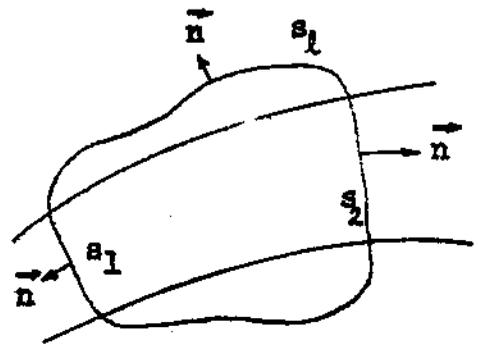
em que s é a seção transversal do trecho do circuito (condutor, gerador ou dielétrico) percorrido por ela.

Examinemos primeiro um trecho de condutor (Fig. 16-7). Consideremos a superfície fechada s como formada pelas porções s_1 , s_2 e s_l ; tem-se então:

$$\int_s \vec{J}' \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{J}' \cdot d\vec{s} + \int_{s_2} \vec{J}' \cdot d\vec{s} + \int_{s_l} \vec{J}' \cdot d\vec{s} = 0 ,$$

e portanto (observe as normais):

$$i_2 - i_1 + \int_{s_l} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = 0 .$$



6-7

Experimentalmente, duas grandezas a e b são iguais se:

$$|a - b| \ll |a| \quad \text{ou} \quad |a - b| \ll |b| .$$

Examinemos agora as grandezas envolvidas, quando consideramos um intervalo de tempo τ suficientemente pequeno, para que \vec{E} varie linearmente com o tempo:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) .$$

Por exemplo, se \vec{E} varia senoidalmente,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \text{ sen } \omega t ,$$

devemos considerar um intervalo de tempo muito menor do que $\tau = \frac{1}{\omega}$.

Obtemos:

$$i = \int \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} \left[\gamma \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) + \frac{\epsilon_0}{\tau} \right], \quad \text{se } t \ll \tau,$$

isto é:

$$i \simeq \gamma \int \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} \left(1 + \frac{\epsilon_0}{\gamma\tau} \right).$$

Como, para um bom condutor, $\frac{\gamma}{\epsilon_0}$ é da ordem de 10^{-18} s , virá:

$$i \simeq \gamma \int E_0 ds \simeq \gamma E_0^t s_t,$$

desde que $\tau \gg 10^{-18} \text{ s}$, isto é, desde que o tempo em que \vec{E} varia significativamente seja muito maior do que 10^{-18} s .

Nessas mesmas condições:

$$\int_{s_l} \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{s} \simeq \frac{\epsilon_0}{\tau} \int_{s_l} \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} = \frac{\epsilon_0}{\tau} E_0^l s_l,$$

e portanto:

$$|i_2 - i_1| = \left| \int \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{s} \right| \simeq \frac{\epsilon_0}{\tau} s_l E_0^l,$$

sendo i_1 e i_2 os valores da intensidade da corrente através das secções s_1 e s_2 do condutor, respectivamente. A condição para valer praticamente

$$i_2 - i_1 \simeq 0$$

é pois:

$$\frac{\epsilon_0}{\tau} s_l E_0^l \ll \gamma s_t E_0^t. \quad (16-12)$$

E_0^l e E_0^t são os valores médios de $\vec{E} \cdot \vec{n}$ sobre a superfície lateral (que, por simplicidade, pode ser a superfície do condutor) e sobre a de uma das bases, tendo ambos a mesma ordem de grandeza; na verdade, para um trecho de condutor cilíndrico de raio R e comprimento l , afastado de outros condutores (sem efeitos de

capacidade), tem-se:

$$E_t \approx \frac{V}{l} ; \quad E_l = - \left(\frac{\partial V_{ex}}{\partial n} \right) \approx \frac{V}{R} .$$

Portanto, a condição (16-12) será satisfeita se:

$$\frac{l}{R} \frac{s_l}{s_t} \ll \frac{\gamma \gamma}{\epsilon_0} \ll 10^{18} \gamma ; \quad \frac{2l^2}{R^2} \ll 10^{18} \gamma ; \quad \frac{l}{R} \ll 10^9 \sqrt{\gamma} .$$

Ela é certamente satisfeita mesmo para um fio de 1 mm de raio e 1 km de comprimento ($l = 10^6 R$), e para $\gamma \sim 10^{-4} \text{ s}$. Na verdade, veremos no capítulo 17 que, muito antes de termos γ desta ordem, já aparecem fenômenos importantes de indução, que invalidam essas conclusões.

Vale, portanto, a lei zero de Kirchhoff: i é constante ao longo de um condutor metálico.

Pela mesma razão, obtém-se para um nó do circuito a 1ª lei de Kirchhoff:

$$\sum_{\mathbf{r}} i_{\mathbf{r}}(t) = 0 . \quad (16-13)$$

Se existe agora no circuito um meio não metálico, por exemplo um dielétrico (mesmo com condutividade γ_d , em geral muito pequena), só poderemos chegar a uma conclusão definida, se o dielétrico estiver contido entre placas condutoras, tais que o campo elétrico se concentre quase todo entre as placas (condensador). Neste caso, teremos, por exemplo (condensador plano) (Fig. 16-8):

$$i = \int_{\mathbf{s}} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \left(\gamma_d E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) s ,$$

$$\frac{i}{\gamma_d s} = E + \frac{\epsilon}{\gamma_d} \frac{\partial E}{\partial t} .$$

Integrando ao longo de AB, vem:

$$ri = V + rC \frac{dV}{dt} \quad (V = V_A - V_B),$$

e no caso de um trecho de condutor:

$$Ri = V.$$

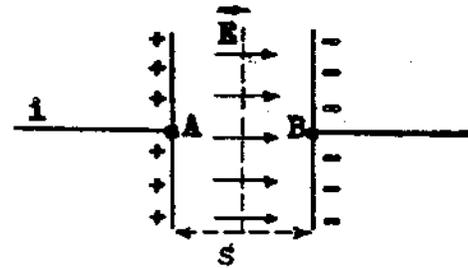


Fig. 16-8

Portanto, pelo mesmo raciocínio que no caso estacionário, obtemos a 2ª lei de Kirchhoff para circuitos variáveis:

$$\sum_s \mathcal{E}_s(t) = \sum_k R_k i_k + \sum_j r_j i_j - \sum_j r_j C_j \frac{dV_j}{dt}, \quad (16-14)$$

onde:

$$R_k = \frac{l_k}{\gamma_k s_k}$$

é a resistência do k-ésimo condutor,

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{q} \int_{\mathcal{E}} \vec{F}_s \cdot d\vec{\ell}$$

a f.e.m. do s-ésimo gerador,

$$r_j = \frac{l_j}{\gamma_j s_j}$$

a resistência interna do j-ésimo gerador ou condensador,

$$C_j = \frac{\epsilon_j s_j}{l_j}$$

a capacidade do j-ésimo condensador e V_j a diferença de potencial entre as armaduras do j-ésimo condensador ($\mathcal{E} = 0$).

A lei de Ohm generalizada para trecho de circuito com resistências e forças eletro-motrizes apenas, será dada por:

$$\sum_s \mathcal{E}_s(t) = \sum_k R_k i_k + \sum_s r_s i_s - \delta V \quad (16-15)$$

(em que r_s é a resistência interna do s -ésimo gerador e δV a diferença de potencial entre o ponto inicial e o final do trecho de circuito orientado), e a 2ª lei de Kirchhoff para uma determinada malha (sem capacidades) desse circuito será:

$$\sum_s \mathcal{E}_s(t) = \sum_k R_k i_k + \sum_s r_s i_s . \quad (16-16)$$

Se a malha contém condensadores com resistências internas infinitas, pode-se aplicar (16-15) sucessivamente cada trecho que vai de condensador a condensador (sem incluí-los) e somar membro as equações obtidas. É fácil verificar que a equação da malha será então:

$$\sum_s \mathcal{E}_s(t) = \sum_k R_k i_k + \sum_s r_s i_s - \sum_j V_j , \quad (16-17)$$

sendo V_j a diferença de potencial entre as placas do j -ésimo condensador quando êle é atravessado, internamente, no sentido contrário ao escolhido para a malha (no caso da Fig. 16-9, $V_j = V_A - V_B$). Esta mesma convenção vale para (16-14).

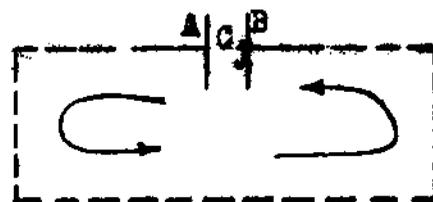


Fig. 16-9

16 - 7. Circuitos com condensadores de resistência interna finita ($\gamma_d \neq 0$). Observemos que em (16-14) a expressão:

$$C_j \frac{dV_j}{dt} = i_j^d$$

representa a corrente de deslocamento através do j -ésimo condensador. De fato, sendo a densidade de corrente de deslocamento no condensador dada por:

$$\vec{j}^d = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

segue-se que num condensador plano, por exemplo, em que s é a área de suas placas e l a distância entre elas, tem-se:

$$i^d = s \epsilon \frac{dE}{dt} = s \epsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{V}{l} \right) = \frac{s \epsilon}{l} \frac{dV}{dt} = C \frac{dV}{dt}.$$

Chamando então:

$$i_j^c = \frac{V_j}{r_j}$$

à corrente de condução através do condensador (nula, se o dielétrico tiver resistência infinita), a equação (16-14) se escreve :

$$\sum_s i_s(t) = \sum_k R_k i_k + \sum_s r_s i_s + \sum_j r_j i_j^c, \quad (16-18)$$

pois:

$$i_j = i_j^c + i_j^d = i_j^c + C_j \frac{dV_j}{dt} = i_j^c + r_j C_j \frac{di_j^c}{dt}.$$

A equação (16-18), quando comparada com a equação (16-16), mostra que um circuito com condensadores (com dielétricos de resistência finita) pode ser tratado como um circuito contendo apenas forças eletro-motri- zes e resistências, desde que se le- vem em conta as correntes de desloca- mento e de condução através do conden

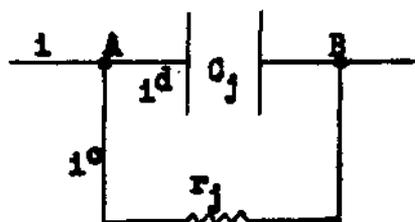


Fig. 16-10

sador. Isto equivale a montar em paralelo a capacidade com a resistência interna (Fig. 16-10), e atribuir ao condensador uma f.e.m. fictícia:

$$\mathcal{E}_j^c = -V_j = V_B - V_A = -r_j i_j^c .$$

Um circuito contendo geradores e condensadores com resistências internas finitas pode então ser resolvido pelas equações (16-13) e (16-18). Vejamos, como exemplo, o circuito representado na Fig. 16-11, em que suporemos desprezível a resistência interna do gerador. Substituindo este circuito pelo representado na Fig. 16-12 e orientando de algum modo as malhas, obtemos o seguinte sistema de equações:

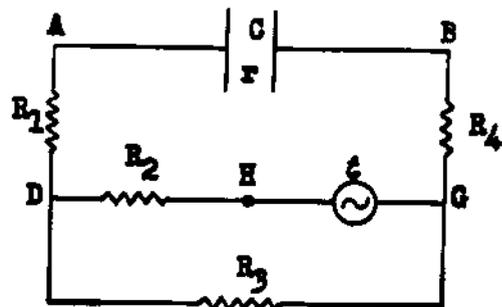


Fig. 16-11

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 = i_2 - i_3 \text{ (nó D ou G) ,} \\ i_1 = i^c + i^d = i^c + rC \frac{di^c}{dt} \text{ (nó A ou B) ,} \\ \mathcal{E} = (R_1 + R_4)i_1 + R_2 i_2 + r i^c \text{ (malha DAEBGHD) ,} \\ \mathcal{E} = R_2 i_2 + R_3 i_3 \text{ (malha GHDEG) ,} \\ -\mathcal{E}^c = V = V_A - V_B = r i^c . \end{array} \right.$$

As 4 primeiras são equações independentes nas variáveis i_1 , i_2 , i_3 e i^c , mas, ao contrário do caso de correntes contínuas, constituem um sistema de equações diferenciais, pois numa delas comparece $\frac{di^c}{dt}$. Se nelas e

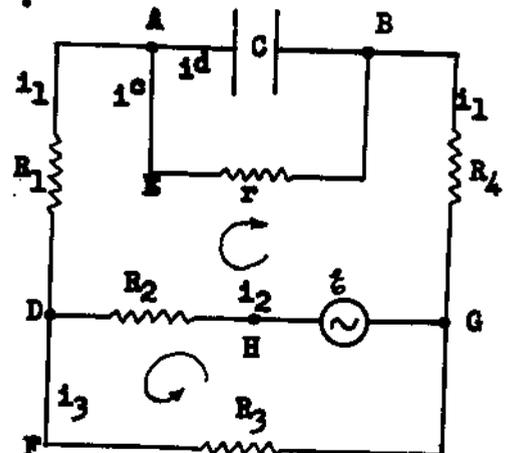


Fig. 16-12

eliminarmos i_1 , i_2 e i_3 , obteremos uma equação diferencial (no caso) em i^c , a qual integrada fornecerá uma expressão para i^c . Nesta irá figurar um parâmetro arbitrário, que poderá ser determinado pela 5ª equação, se conhecermos o valor de V no instante $t=0$. Poderemos então obter, finalmente, as soluções para as demais variáveis.

A dificuldade deste problema é puramente algébrica. Resolveremos aqui o problema mais simples da descarga de um condensador de resistência interna r (Fig. 16-13). Orientando a malha análogamente ao caso anterior, as equações do circuito serão:

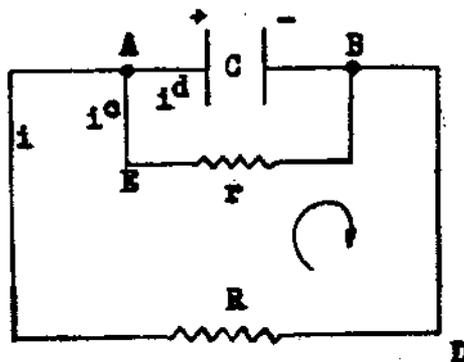


Fig. 16-13

$$\begin{cases} i = i^c + i^d = i^c + rC \frac{di^c}{dt} \text{ (nó A ou B)} \\ 0 = Ri + ri^c \text{ (malha DAEBD)} \\ V = ri^c . \end{cases}$$

Eliminando i^c entre as duas primeiras, vem:

$$i = -\frac{R}{r} \left(i + rC \frac{di}{dt} \right)$$

e portanto:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{RC} \left(1 + \frac{R}{r} \right) i = -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) i$$

ou ainda:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR_t} i , \quad (16-19)$$

sendo que R_t , dado por:

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R}, \quad (16-20)$$

representa a resistência total da associação em paralelo de R com r . A solução geral da equação (16-19) é da forma:

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{CR_t}};$$

a determinação de i_0 se faz pela última equação do sistema:

$$V = ri^c = -Ri_0 e^{-\frac{t}{CR_t}}$$

pois $i^c = -\frac{R}{r} i$. Se $V(0) = V_0$ (positivo, se a armadura ligada a A fôr a positiva), vem, de acôrdo com a lei de Ohm:

$$Ri_0 = (V_B - V_A)_0 = -V_0 \longrightarrow i_0 = -\frac{V_0}{R}$$

e portanto:

$$i = -\frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{CR_t}},$$

isto é, o sentido de i é contrário ao da orientação da malha, indicado na figura. Êste resultado já devia ser esperado, por que em A existe uma fonte de correntes.

A diferença de potencial entre as placas do condensador está decaindo com o tempo na forma:

$$V = V_0 e^{-\frac{t}{CR_t}}. \quad (16-21)$$

Êste mesmo problema poderia ter sido resolvido partindo diretamente de (16-14), sem levar em conta as correntes de

deslocamento e de condução no condensador, isto é, considerando o circuito simplesmente como vem representado na Fig. 16-14. Teríamos então:

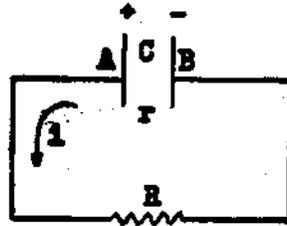


Fig. 16-14

$$0 = (R+r)i - rC \frac{d}{dt} (V_B - V_A)$$

isto é:

$$(R+r)i = - rC \frac{dV}{dt},$$

sendo $V = V_A - V_B$, ou ainda:

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{1}{CR_t} V, \quad (16-22)$$

pois em R vale a lei de Ohm ($V = Ri$). A solução de (16-22) é ainda (16-21).

16 - 18. Circuitos com condensadores de resistência interna infinita ($r = \infty$).

Trata-se, na realidade, de uma aproximação do caso verificado mais comumente na prática, que é aquele em que a resistência interna de cada condensador é muito maior do que qualquer das resistências externas presentes no circuito ($r \gg R$). Circuitos deste tipo podem ser resolvidos por dois métodos diferentes:

1º método - Considera-se inicialmente que cada condensador tem resistência r , finita e aplicam-se as leis de Kirchhoff (16-13) e (16-14) aos nós e às malhas, respectivamente. Resolve-se o sistema encontrado e no final calculam-se os limites das expressões obtidas quando $r \rightarrow \infty$.

O problema da descarga de um condensador, por exemplo, tratado no parágrafo anterior (ver Fig. 16-14), deu como solução (supondo r finita) a expressão (16-21). Levando ao limite para $r \rightarrow \infty$, vemos de (16-20) que R_t se torna igual a R , e assim a expressão (16-21) reduz-se, se pusermos $V = \frac{Q}{C}$, à expressão (16-7) obtida no parágrafo 16-2, quando foi tratado o problema da descarga de um condensador com resistência infinita.

2º método - Despreza-se desde o início a corrente de condução através de cada condensador e aplica-se a cada malha a equação (16-17), dando a V_j a mesma definição introduzida no parágrafo (16-6). Chamando:

$$Q_j = CV_j$$

à carga do j -ésimo condensador, tem-se para cada malha:

$$\sum_s \mathcal{E}_s = \sum_k R_k i_k + \sum_s r_s i_s - \sum_j \frac{Q_j}{C_j}.$$

Derivando em relação ao tempo esta equação, e lembrando que em cada condensador Q_j diminui quando i_j cresce, isto é, que $i_j = \frac{dQ_j}{dt}$, virá:

$$\sum_s \frac{d\mathcal{E}_s}{dt} = \sum_k R_k \frac{di_k}{dt} + \sum_s r_s \frac{di_s}{dt} + \sum_j \frac{i_j}{C_j}. \quad (16-23)$$

Esta equação aplicada ao problema da descarga de um condensador (Fig. 16-14) dá:

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C},$$

isto é,

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{RC} i ,$$

que coincide com a equação (16-19) para $r \rightarrow \infty$.

Vejamos outro exemplo, como o do circuito representado na Fig. 16-15, em que existe um gerador de f.e.m. $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ e resistência interna desprezível. De (16-23) virá:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} . \quad (16-24)$$

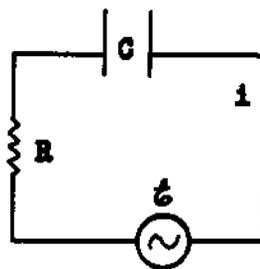


Fig. 16-15

Conhecendo-se a dependência com o tempo de \mathcal{E} , a integração de (16-24) fornece i em função do tempo. A constante a integração é determinada pelo valor da carga existente no condensador no instante inicial.

Não resolveremos aqui este problema, deixando-o como exercício, porque problemas deste tipo, incluindo também indutâncias, serão resolvidos no capítulo 18.

* * *

Problemas Propostos:

- 16-1. Resolva o circuito apresentado na Fig. 16-4, isto é, determine as intensidades e os sentidos das correntes que percorrem os seus diversos ramos.
- 16-2. Resolva o circuito apresentado na Fig. 16-16.

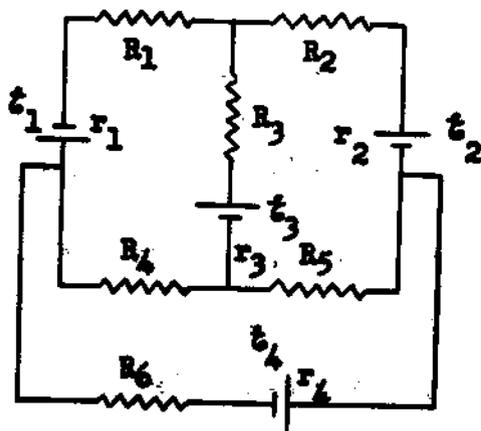


Fig. 16-16

16-3. Duas placas metálicas, infinitas, planas, paralelas, são separadas pela distância d . O espaço entre as placas contém 2 meios condutores, cuja interface é um plano paralelo a elas. O 1º meio (γ_1, ϵ_1) tem espessura a e o 2º (γ_2, ϵ_2) espessura $d-a$. As placas metálicas são mantidas a potenciais V_1 e V_2 , respectivamente. No regime estacionário, qual é o potencial da interface, e qual a densidade superficial de carga sobre ela? (R.M.).

16-4. Um longo fio de cobre de raio a é preso paralelamente e a uma distância h de uma placa infinita de cobre. A região acima da placa e circundando o fio é ocupada por um meio de condutividade γ . Mostre que a resistência elétrica entre os dois eletrodos de cobre, por unidade de comprimento do fio, é dada por:

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma} \cosh^{-1} \frac{h}{2} \quad (\text{R.M.}) .$$

- 16-5. Dois geradores de forças eletromotrizes \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 e resistências internas r_1 e r_2 respectivamente são ligados entre si em paralelo e a uma resistência externa R . (a) Calcule a intensidade da corrente através de R . (b) Se R varia, mantendo-se fixas as outras quantidades, qual é o valor de R que torna máxima a potência dissipada? (R.M.).
- 16-6. Um grupo de n geradores idênticos de f.e.m. igual a \mathcal{E} e resistência interna r são usados para alimentar uma corrente através de uma resistência R . Mostre que, se os n geradores são associados em série entre si e com R , então $i = n\mathcal{E}/(R + nr)$, e se os geradores são associados em paralelo entre si e a combinação ligada em série com R , então $i = \mathcal{E}/(R + r/n)$ (R.M.).
- 16-7. Um condensador de capacidade C , uma resistência R e uma bateria de f.e.m. \mathcal{E}_0 (constante) são ligados em série com um interruptor. O circuito é fechado no instante $t = 0$. Estabeleça a equação diferencial satisfeita pela carga Q no condensador. Determine Q em função do tempo (R.M.).
- 16-8. Resolva o circuito representado na Fig. 16-11 quando a f.e.m. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ (constante) é ligada no instante $t = 0$, estando o condensador descarregado $[V(0) = 0]$.
- 16-9. Determine a intensidade da corrente que percorre o circuito representado na Fig. 16-15, sabendo que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, onde \mathcal{E}_0 e ω são constantes, e que a carga do condensador no instante $t = 0$ vale Q_0 .

CAPÍTULO 17

INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

17 - 1. Efeito Hall. Seja um condutor prismático atravessado pela corrente i , perpendicularmente a sua face s (Fig. 17-1); dentro do condutor haverá uma densidade J de corrente igual a i/s . Suponhamos que o condutor seja colocado num campo magnético \vec{B} , perpendicular ao plano do papel e orientado para cima. Vejamos o que ocorre.

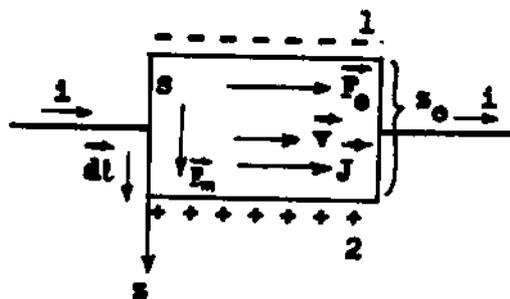


Fig. 17-1

Para simplificar, suponhamos que no interior do condutor

há N transportadores de carga por unidade de volume, todos com mesma carga q e movendo-se com velocidade \vec{v} ; neste caso, tem-se:

$$\vec{J} = N q \vec{v},$$

ficando entendido, evidentemente, que a corrente terá o mesmo sentido de \vec{v} se a carga q é positiva (é o caso da Fig. 17-1), e sentido oposto se q é negativa. Cada partícula estará, então, sujeita à ação de duas forças, uma (\vec{F}_e) devida ao campo elétrico \vec{E} proveniente da diferença de potencial entre os extremos do condutor, e outra (\vec{F}_m) devida ao campo magnético aplicado. Isto é, a força total que atua sobre a partícula será:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

\vec{F}_e mantém as cargas em movimento, no sentido da corrente; \vec{F}_m solicita as cargas positivas (ou negativas) para baixo, fazendo que se acumulem na face 2, do que resultará um excesso de cargas negativas (ou positivas) na face 1. Surge então uma diferença de potencial entre estas faces, e portanto uma f.e.m. que vamos calcular, usando (16-3):

$$\mathcal{E} = \int \frac{\vec{F}_m}{q} \cdot d\vec{l} = \int \frac{F_m}{q} dz = \int (\vec{v} \wedge \vec{B})_z dz. \quad (17-1)$$

Aplicada na direção transversal (vertical, na figura), a lei de Ohm se escreve:

$$\mathcal{E}_t - V_t = R_t i_t, \quad (17-2)$$

sendo a f.e.m. transversal, \mathcal{E}_t , dada por (17-1). Como \vec{F}_m é pequeno, a velocidade \vec{v} da partícula é praticamente determinada por \vec{F}_e . Como a massa m do transportador também é pequena, vem:

$$m \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = -k\vec{v} + q\vec{E} \approx 0. \quad (17-3)$$

k é o coeficiente de viscosidade que caracteriza a resistência do meio. Levando em (17-1) o valor de \vec{v} tirado de (17-3), virá:

$$\mathcal{E}_t = \frac{q}{k} \int_0^{z_0} (\vec{E} \wedge \vec{B})_z dz = \frac{qEB}{k} z_0, \quad (17-4)$$

sendo z_0 a distância entre as faces 1 e 2. Como as superfícies laterais não estão em curto, $i_t = 0$ (após o equilíbrio) e a equação (17-2) permite o conhecimento de \mathcal{E}_t pela medida de V_t , pois:

$$\mathcal{E}_t = V_t = V_2 - V_1 = q \frac{EBz_0}{k} . \quad (17-5)$$

Levando o valor de \mathcal{E}_t em (17-4), determinamos $\frac{q}{k}$, e se conhecermos $|q|$ poderemos calcular o valor de k ; finalmente, dada a condutividade γ do material, a aplicação da fórmula:

$$\gamma = \frac{J}{E} = \frac{Nqv}{E} = \frac{Nq^2}{k}$$

permitirá o cálculo de N . O sinal da carga, por outro lado, poderá ser determinado pelo sinal de V_t ; de fato, se $V_t > 0$, os íons são positivos, como se vê na Fig. 17-1; mas se $V_t < 0$, isto é, se $V_1 > V_2$, isto significa que houve depósito de carga negativa na face 2, o que se dará se os íons forem negativos, caminhando, então, em sentido contrário ao indicado naquela figura. Mais simplesmente, por (17-5):

$$V_t = Aq, \quad A > 0 .$$

O efeito Hall constitui, portanto, um exemplo de f.e.m. de origem puramente magnética.

17 - 2. Circuito em movimento em campo magnético. Seja um circuito condutor \mathcal{C} colocado em um campo magnético uniforme \vec{B} (Fig. 17-2), e suponhamos que êle esteja em movimento em relação ao campo. Êste movimento não é necessariamente rígido, podendo o circuito sofrer deformações, além de translações e rotações. Veremos que também neste caso aparecerá no circuito uma f.e.m. e conseqüentemente uma corrente elétrica. No condutor existem cargas (elétrons) que, mesmo quando $\vec{J} = 0$, estão em movimento caótico. Consideremos, pois, uma carga q movendo-se no seu interior

com velocidade \vec{v} , dada por:

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_l + \vec{v}_a,$$

sendo \vec{v}_t e \vec{v}_l , respectivamente, as componentes transversal e longitudinal da velocidade da carga em relação ao circuito, e \vec{v}_a sua velocidade de arrastamento. Como, em média, as velocidades transversais se compensam, isto é, como $\langle \vec{v}_t \rangle = 0$, teremos, ainda em média:

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_l \rangle + \vec{v}_a.$$

O valor médio da força magnética atuando sobre a carga q será então:

$$\vec{F}_m = q \langle \vec{v} \rangle \wedge \vec{B} = q \left[\langle \vec{v}_l \rangle \wedge \vec{B} + \vec{v}_a \wedge \vec{B} \right],$$

e a f.e.m., por (16-3), valerá:

$$\mathcal{E} = \int_C \vec{v}_a \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \wedge \vec{v}_a, \quad (17-6)$$

pois, sendo $\langle \vec{v}_l \rangle$ paralelo e de mesmo sentido que $d\vec{l}$, tem-se:

$$\langle \vec{v}_l \rangle \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B} \cdot d\vec{l} \wedge \langle \vec{v}_l \rangle = 0.$$

Observe-se que \mathcal{E} é independente de q .

Se no intervalo de tempo dt o circuito sofre um deslocamento $d\vec{r}'$, então:

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}'}{dt},$$

e assim (Fig. 17-3):

$$d\vec{l} \wedge \vec{v}_a = d\vec{l} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{n} \frac{ds}{dt},$$

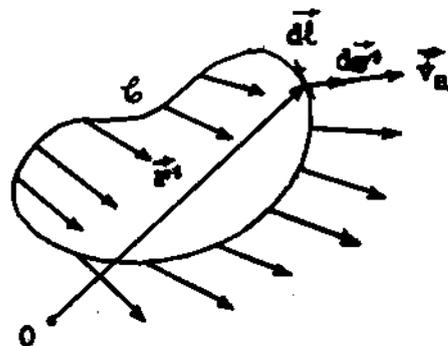


Fig. 17-2

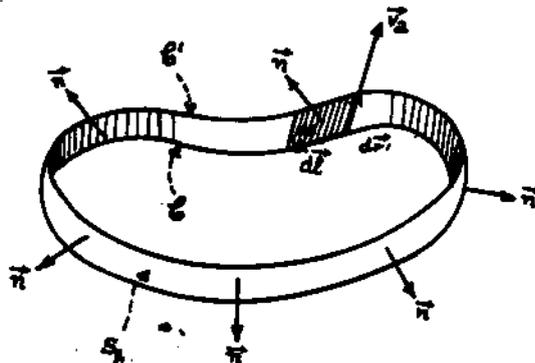


Fig. 17-3

sendo \vec{n} a normal a cada elemento ds da superfície s_l , orientada para fora de s_l . A expressão (17-6) se escreve então:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{dt} \int_{s_l} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{d\phi_l}{dt},$$

sendo ϕ_l o fluxo de \vec{B} que sai da superfície (infinitésima) s_l . Se s é a superfície apoiada no contôrno \mathcal{C} (posição do circuito no instante t) e s' a superfície apoiada no contôrno \mathcal{C}' (posição do circuito no instante $t + dt$), então o fluxo total (ϕ) de \vec{B} que sai do volume v limitado por s , s' e s_l será:

$$\phi = d\phi_l + \phi_{s'}(t+dt) - \phi_s(t);$$

mas, como $\text{div } \vec{B} = 0$, tem-se:

$$\phi = \int_{s+s'+s_l} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_v \text{div } \vec{B} dv = 0,$$

isto é,

$$d\phi_l = -\phi_{s'}(t+dt) + \phi_s(t) = -\frac{d\phi_s}{dt},$$

e portanto:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_s}{dt}. \quad (17-7)$$

Isto é: a f.e.m. gerada no circuito \mathcal{C} pelo movimento de \mathcal{C} num campo magnético \vec{B} fixo é igual à variação por unidade de tempo, com sinal negativo, do fluxo de \vec{B} através da superfície s que se apóia no circuito \mathcal{C} .

17 - 3. Indução eletromagnética. Lei de Faraday. A lei expressa em (17-7), que apareceu aqui como consequência de leis já conhecidas, foi na realidade descoberta experimentalmente por Fa-

raday, e considerada na época como fato inteiramente novo. As experiências realizadas por Faraday tiveram origem no seguinte raciocínio: se uma corrente elétrica produz um campo magnético, então, inversamente, um campo magnético deve produzir corrente elétrica. Tomou, pois, um circuito \mathcal{C} com um galvanômetro e colocou-o nas proximidades de um eletro-ímã (Fig.17-4).

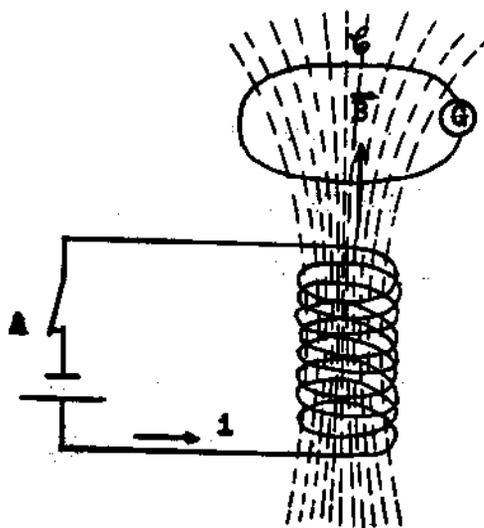


Fig. 17-4

Faraday não esperava obter corrente de grande intensidade, nem de efeito prolongado, porque contava com amortecimento devido a perdas ôhmicas no circuito: por isso usou um galvanômetro de grande sensibilidade; mas não logrou detetar corrente alguma, por mais intenso que fosse o campo do eletro-ímã, concluindo assim que sua hipótese estava errada. No entanto, provido de grande espírito de observação, Faraday notou que, no momento de ligar a corrente do eletro-ímã, o galvanômetro indicava um pulso de corrente num sentido, e que, ao desligar a bobina, o pulso era de sentido oposto. Concluiu, então, depois de repetidas experiências, que um campo magnético estacionário não gera corrente no circuito, mas que esta aparece mediante variação do campo magnético. A corrente assim gerada denominou "corrente induzida", e enunciou deste modo a "lei da indução eletromagnética": a força eletro-motriz induzida no

circuito é igual à variação por unidade de tempo do número de linhas de \vec{B} que o atravessam. Ou, analiticamente:

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|.$$

Esta lei foi complementada por Lenz, afirmando que qualquer modificação do campo magnético produz um efeito tal que tende a produzir nele uma modificação oposta. No caso presente, esta lei indica que, se \vec{B} está aumentando ($\frac{d\Phi}{dt} > 0$, se a normal à superfície tem o sentido de \vec{B}), a f.e.m. induzida produz um campo magnético contrário a \vec{B} , e deve ser portanto negativa no circuito orientado (Fig. 17-5). Assim devemos ter:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (17-8)$$

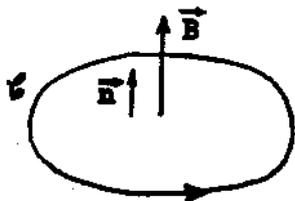


Fig. 17-5

o que é verificado experimentalmente. Esta é a lei de Faraday, que, ao contrário de (17-7), descreve um fato novo, o da indução de correntes elétricas por variação do campo magnético.

Se Faraday conhecesse o teorema expresso pela equação (17-7), poderia ter sido levado a imaginar a validade da lei (17-8), pelo princípio de relatividade: se, movendo um circuito em presença de um ímã fixo, produz-se f.e.m. no circuito, também se deve produzir f.e.m. mantendo fixo o circuito e movimentando o ímã (e portanto variando seu campo). Na realidade, seu raciocínio se fez em sentido inverso; de fato, após as primei-

ras experiências com circuito fixo e \vec{B} variável, Faraday realizou outras, em que movimentava o circuito, à maneira descrita no parágrafo anterior, verificando (17-7). Da produção de corrente por movimentação do circuito, imaginou o dínamo, que é um gerador de corrente induzida.

O dínamo consiste essencialmente de uma espira que gira entre os polos de um eletro-ímã, com velocidade angular ω (Fig. 17-6). Se s é a área da espira, então o fluxo que a atravessa num dado instante t

vale:

$$\phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bs \cos \omega t ,$$

e a f.e.m. induzida:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = Bs \omega \sin \omega t ,$$

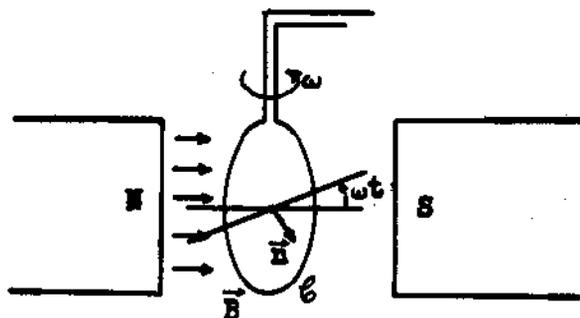


Fig. 17-6

que produz uma corrente alternada senoidal. Na prática, usam-se enrolamentos, movimentados por mecanismos acionados por quedas d'água, por exemplo, e providos de coletores dispostos de maneira a recolher simultaneamente forças eletro-motrizes de mesmo sentido nas diversas espiras.

Vejamos agora outra aplicação importante da lei de Faraday.

17 - 4. Transformadores. São dispositivos destinados a alterar voltagens. Consistem essencialmente de duas bobinas: a uma

delas (a primária) aplica-se uma f.e.m. alternada (voltage V) que produz corrente, cujo campo magnético \vec{B} induz nela mesma uma outra f.e.m. \mathcal{E}_p ; à segunda bobina (a secundária) aplica-se uma f.e.m. \mathcal{E}_s . Seja l o comprimento das duas bobinas e N_p e N_s o número total de espiras da primária e da secundária, respectivamente (Fig. 17-7).

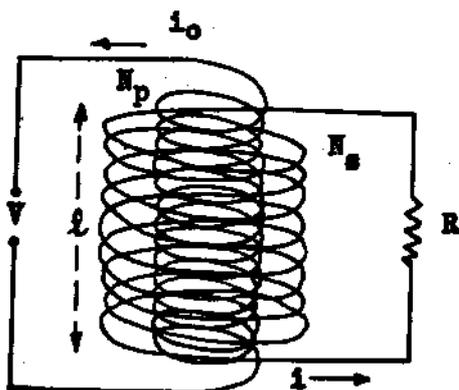


Fig. 17-7

Considerando desprezíveis as resistências das bobinas (e, conseqüentemente, as perdas por efeito Joule), a lei de Kirchhoff (16-13) nos dá:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p + V = r i_0 \simeq 0 \quad \therefore \mathcal{E}_p \simeq -V, \\ \mathcal{E}_s \simeq R i, \end{aligned}$$

em que r e R são as resistências, i_0 e i as correntes das bobinas primária e secundária, respectivamente. Usando agora a lei da indução, teremos:

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = \frac{-\frac{d\phi_s}{dt}}{-\frac{d\phi_p}{dt}},$$

em que ϕ_p e ϕ_s são os fluxos de \vec{B} através das bobinas primária e secundária, respectivamente. Ora,

$$\phi_p = A N_p B \quad \text{e} \quad \phi_s = A N_s B,$$

sendo A a área de cada espira da bobina primária; portanto:

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = \frac{-A N_s B}{A N_p B} = -\frac{N_s}{N_p} \quad (17-9)$$

Observemos que foi desprezado o fato de que a corrente i induzida na bobina secundária gera por seu lado um campo magnético que induz corrente na primária, e assim por diante.

De (17-9) vemos que, escolhendo convenientemente N_s , podemos obter a f.e.m. desejada na bobina secundária. O sinal negativo indica que, se os enrolamentos primário e secundário são hélices de mesmo sentido, a f.e.m. induzida $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ está em oposição de fase (aproximadamente, por terem sido desprezados efeitos pequenos) em relação à f.e.m. primária $V = V_0 \cos \omega t$, pois:

$$\mathcal{E}_0 = -V_0 \frac{N_s}{N_p} = Ri \quad .$$

17 - 5. Coefficientes de indução. Se tivermos n circuitos em presença, então a f.e.m. induzida num deles, no circuito \mathcal{E}_l , por exemplo, vale:

$$\mathcal{E}_l = - \sum_{k=1}^n \frac{d\phi_{kl}}{dt} \quad , \quad (17-10)$$

em que ϕ_{kl} é o fluxo através de \mathcal{E}_l produzido pela corrente em \mathcal{E}_k . Seja i_k esta corrente; chamando ϕ_{kl}^0 o fluxo produzido em \mathcal{E}_l por uma corrente unitária em \mathcal{E}_k , tem-se evidentemente:

$$\phi_{kl} = i_k \phi_{kl}^0 \quad (17-11)$$

O fluxo ϕ_{kl}^0 assim definido denomina-se "coeficiente de indução"

do circuito \mathcal{C}_k sobre o circuito \mathcal{C}_l ; mais adiante veremos que o coeficiente de indução de \mathcal{C}_k sobre \mathcal{C}_l é igual ao de \mathcal{C}_l sobre \mathcal{C}_k , e por isso ϕ_{kl}^0 ($k \neq l$) também se denomina "coeficiente de indução mútua" entre os dois circuitos, e se representa usualmente por M_{kl} . Com esta notação, (17-11) também se escreve:

$$\phi_{kl}^0 = M_{kl} i_k, \quad (17-12)$$

e sendo M_{kl} constante teremos em lugar de (17-10):

$$\mathcal{E}_l = - \sum_{k=1}^n M_{kl} \frac{di_k}{dt}. \quad (17-13)$$

O coeficiente de indução do circuito \mathcal{C}_l sobre si mesmo, M_{ll} , chama-se "coeficiente de auto-indução" de \mathcal{C}_l e se representa por L_l .

Os coeficientes de indução ou "indutâncias" medem-se, no sistema MKS racionalizado, em "henry". Diz-se que um circuito tem indutância de 1 henry se o fluxo de indução magnética que sai de uma superfície apoiada nele vale 1 weber quando o percorre uma corrente de 1A. Portanto:

$$1h = 1 \frac{\text{Web}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}.$$

Particularizemos agora (17-13) para o caso de dois circuitos \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . A f.e.m. induzida no circuito \mathcal{C}_1 será:

$$\mathcal{E}_1 = - L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt},$$

e no circuito \mathcal{C}_2 :

$$\mathcal{E}_2 = - L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt},$$

sendo os coeficientes de indução calculáveis pelas fórmulas:

$$L_k = \int_{s_k} \vec{B}_k^0 \cdot d\vec{s}, \quad (17-14)$$

$$M_{jk} = \int_{s_k} \vec{B}_j^0 \cdot d\vec{s}, \quad (17-15)$$

em que s_k é qualquer superfície apoiada no circuito \mathcal{C}_k , e \vec{B}_k^0 e \vec{B}_j^0 os campos de indução magnética produzidos por correntes unitárias em \mathcal{C}_k e \mathcal{C}_j , respectivamente. Usando agora (9-16), a fórmula (17-14) se escreve:

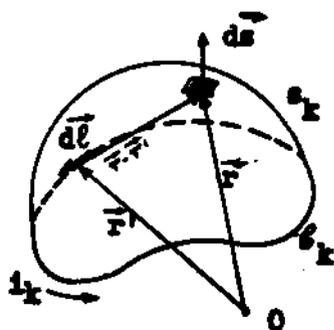


Fig. 17-8

$$L_k = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_k} d\vec{s} \cdot \oint_{\mathcal{C}_k} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \wedge d\vec{l}', *$$

em que \vec{r} é o raio vetor do elemento $d\vec{s}$ de s_k , e \vec{r}' o raio vetor do elemento $d\vec{l}'$ de \mathcal{C}_k (Fig. 17-8). Ainda usando (9-16), a fórmula (17-15) se escreve:

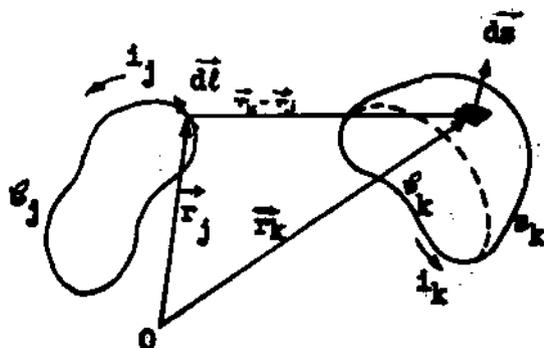


Fig. 17-9

$$M_{jk} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s_k} d\vec{s} \cdot \oint_{\mathcal{C}_j} \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^3} \wedge d\vec{l},$$

em que \vec{r}_k é o raio vetor do elemento $d\vec{s}$ de s_k , e \vec{r}_j o raio vetor do elemento $d\vec{l}$ de \mathcal{C}_j (Fig. 17-9). Outra for-

* Nesta integral e nas fórmulas (17-18) e (17-19) devem ser excluídos os trechos infinitesimos para os quais $\vec{r} = \vec{r}'$.

ma para os coeficientes de indução pode ser obtida usando a expressão do potencial vetor (11-4). Assim, a fórmula (17-15) pode ser escrita (Fig. 17-10):

$$M_{jk} = \int_{\mathcal{C}_k} (\text{rot } \vec{A}_j^0) \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{C}_k} \vec{A}_j^0 \cdot d\vec{l}_k =$$

$$= \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_k} d\vec{l}_k \oint_{\mathcal{C}_j} \frac{d\vec{l}_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|},$$

isto é:

$$M_{jk} = \oint_{\mathcal{C}_k} \vec{A}_j^0 \cdot d\vec{l}_k, \quad (17-16)$$

ou:

$$M_{jk} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_k} \oint_{\mathcal{C}_j} \frac{d\vec{l}_k \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|}. \quad (17-17)$$

Do mesmo modo se tem:

$$L_k = \oint_{\mathcal{C}_k} \vec{A}_j^0 \cdot d\vec{l}, \quad (17-18)$$

ou:

$$L_k = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_k} \oint_{\mathcal{C}_k} \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (17-19)$$

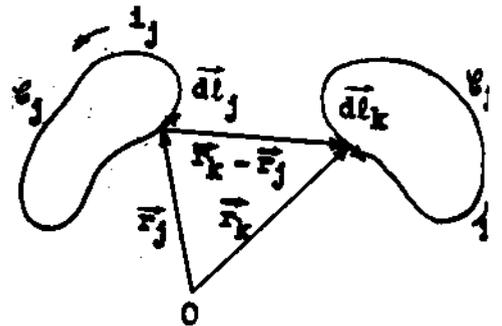


Fig. 17-10

onde $d\vec{l}$ e $d\vec{l}'$ são dois elementos do circuito \mathcal{C}_k , com raios vetores \vec{r} e \vec{r}' respectivamente. Finalmente, de (17-18) vê-se imediatamente que $M_{jk} = M_{kj}$. No caso particular de 2 circuitos, $M_{12} = M_{21} = M$.

Como ilustração das fórmulas obtidas, calculemos agora os coeficientes de indução de alguns circuitos.

a) Solenóide cilíndrico. Usando (17-14), virá:

$$L = B^{\circ} N s ,$$

em que N é o número total de espiras e s a área de cada espira. Como $B^{\circ} = \mu \frac{N}{l}$, em que l é o comprimento do solenóide, teremos finalmente para o coeficiente de auto-indução do solenóide:

$$L = \frac{\mu N^2 s}{l} . \quad (17-20)$$

b) Bobina toroidal de seccão retangular e fio retilíneo. Suponha-

mos que o fio coincida com o eixo da bobina (Fig. 17-11). O coeficiente de indução mútua poderá ser calculado usando (17-15):

$$M = \int \frac{\mu}{2\pi a} N ds = \frac{\mu N}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{l da}{a} =$$

$$= \frac{\mu N l}{2\pi} \log \frac{a_2}{a_1} ,$$

ou usando (17-16):

$$M = \int - \frac{\mu}{2\pi} \log a \vec{k} \cdot N \vec{dl} = - \frac{\mu}{2\pi} \log a_1 N l + \frac{\mu}{2\pi} \log a_2 N l ,$$

em que N é o número total de espiras da bobina, e l e $a_2 - a_1$ as dimensões de cada espira.

Os circuitos apresentados nesses exemplos são todos filiformes; para êles, as fórmulas (17-14) a (17-19) podem ser usadas com facilidade para o cálculo dos coeficientes de indução. Mas quando os circuitos têm espessura, será necessário decompô-los em circui-

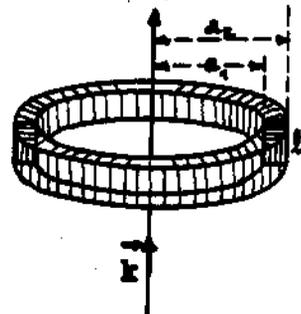


Fig. 17-11

tos elementares filiformes para o emprêgo das ditas fórmulas, e associá-los em série ou em paralelo: o que é perigoso, porque podem ser desprezadas, nesse tratamento, as induções mútuas dos diferentes circuitos. O método mais seguro a ser usado aí é o da energia, que será apresentado no próximo capítulo, no parágrafo 18-5. Para circuitos com correntes superficiais, entretanto, os efeitos de indução mútua são desprezíveis, e os métodos apresentados neste capítulo podem ser empregados.

* * *

Problemas Propostos:

- 17-1. Um fio metálico retilíneo de comprimento l move-se num campo magnético \vec{B} com velocidade \vec{v} . Analisando a ação da força de Lorentz sobre os elétrons do fio, mostre que entre suas extremidades há uma diferença de potencial $\vec{B} \cdot \vec{l} \wedge \vec{v}$ (R.M.).
- 17-2. Seja um campo magnético com simetria cilíndrica, isto é, com componente z da forma $B_z = B(a)$, onde a é a distância ao eixo de simetria. Um íon de carga q e massa m move-se numa órbita circular a uma distância R do eixo de simetria, com velocidade angular $\omega = \frac{qB(R)}{m}$. Se o campo magnético cresce lentamente, mostre que a f.e.m. induzida ao longo da órbita do íon é tal que acelera o íon. Mostre que, para que o íon permaneça na mesma órbita, o in-

cremento médio de $B(a)$ sobre a superfície limitada pela órbita deve ser duas vezes maior do que o incremento de $B(R)$ (R.M.).

- 17-3. Calcule o coeficiente de auto-indução do circuito descrito no problema 10-2, supondo superficial a corrente que percorre o cilindro interno (camada cilíndrica condutora).
- 17-4. Calcule o coeficiente de auto-indução do circuito descrito no problema 10-3.
- 17-5. Calcule o coeficiente de auto-indução do circuito descrito no problema 10-4.
- 17-6. Um circuito é constituído de um condutor cilíndrico de raio R , por onde passa corrente superficial, colocado paralelamente a uma placa condutora infinita, que forma o retôrno da corrente. Calcule o coeficiente de auto-indução desse circuito (R.M.).
- 17-7. Duas pequenas espiras metálicas, de raios R_1 e R_2 , estão num mesmo plano, separadas pela distância r . Qual é o coeficiente de indução mútua entre as espiras, supondo que a distância r é suficientemente grande para que possa ser usada a aproximação de dipolo? (R.M.).
- 17-8. Três solenóides coaxiais muito longos estão ligados em série, de modo que as correntes no mais interno e no mais externo vão do extremo A para o extremo B, e no médio de B para A. Calcule o coeficiente de auto-indução do sis-

tema, por unidade de comprimento, sabendo que o número de espiras por unidade de comprimento no solenoide médio é $2n$ e nos dois outros é n .

* * *

CAPÍTULO 18

CIRCUITOS ELÉTRICOS (COM INDUÇÃO)ENERGIA MAGNÉTICA18 - 1. Descarga de condensadores em circuitos com indutância.

Consideremos o circuito representado na Fig. 18-1, em que existe um gerador de f.e.m. \mathcal{E}_0 constante (a partir do instante $t=0$ em que se liga o circuito), uma bobina de coeficiente de auto-indução igual a L e um condensador de capacidade igual a C . A

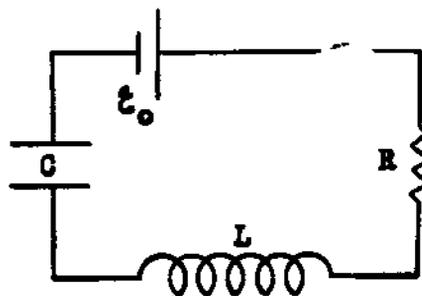


Fig. 18-1

resistência do circuito (incluindo a da bobina e a resistência interna do gerador) vale R . No instante $t=0$ a carga do condensador é nula; depois de feita a ligação, o condensador começa a carregar-se até que, no fim de certo tempo (a rigor, para $t = \infty$) não haverá mais corrente, e o condensador conterà, como veremos, carga $Q = C \mathcal{E}_0$ (quando $i=0$, não haverá mais f.e.m. induzida, nem queda de potencial através de R , e a diferença de potencial entre as armaduras do condensador será igual à f.e.m. do gerador).

A lei de Ohm generalizada (16-15) dá:

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + (V_- - V_+) = Ri ,$$

em que $\mathcal{E}_1 = -L \frac{di}{dt}$ é a f.e.m. induzida na bobina, e $\delta V = V_+ - V_- = -\frac{Q(t)}{C}$ a diferença de potencial entre as placas do condensador; ou ainda:

$$\mathcal{E}_0 = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{Q(t)}{C} . \quad (18-1)$$

Isto é: a f.e.m. do gerador é, em cada instante, igual à queda de potencial através da resistência, da indutância e do condensador. Derivando (18-1) em relação ao tempo, virá:

$$\frac{d\mathcal{E}_0}{dt} = 0 = \frac{1}{C} + R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} , \quad (18-2)$$

pois $\frac{dQ}{dt} = i$. A equação (18-2) é do mesmo tipo da do pêndulo amortecido. Aqui, L está desempenhando o papel de um coeficiente de reação, da mesma maneira que na equação do pêndulo a massa é um coeficiente de inércia. O 2º termo de (18-2) é um termo de reação viscosa, e o 1º termo, proporcional a i , é do mesmo tipo que o da força elástica, no caso do pêndulo, que é proporcional a x (afastamento da posição de equilíbrio).

A solução da equação diferencial (18-2) se obtém resolvendo a equação característica:

$$L p^2 + R p + \frac{1}{C} = 0 ,$$

que dá:

$$p = -\frac{R}{2L} \pm \alpha ,$$

onde chamamos:

$$\alpha = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} .$$

Há dois casos a considerar:

I) A resistência do circuito é suficientemente grande, de modo a tornar $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$.

Neste caso, a solução de (18-2) será da forma:

$$i = \frac{dQ}{dt} = e^{-\frac{R}{2L}t} (A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}). \quad (18-3)$$

Portanto a corrente cairá a zero, pois a exponencial fora dos colchetes cai a zero mais depressa do que cresce, com o tempo, a exponencial positiva dentro dos colchetes.

Para a determinação das constantes A e B usaremos as condições iniciais:

$$\begin{aligned} 1) \quad i(0) = 0 &\therefore A = -B, \\ 2) \quad t_0 = L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = 2\alpha AL &\therefore A = \frac{t_0}{2L\alpha}. \end{aligned}$$

Para determinar Q, integramos (18-3) e obtemos:

$$Q(t) = A \left[\frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} - \alpha\right)t} - 1}{-\frac{R}{2L} + \alpha} - \frac{e^{-\left(\frac{R}{2L} + \alpha\right)t} - 1}{-\frac{R}{2L} - \alpha} \right] + D$$

onde $D = 0$, pois $Q(0) = 0$. A carga do condensador, para $t = \infty$, será então:

$$Q(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = -A \left[\frac{1}{-\frac{R}{2L} + \alpha} + \frac{1}{\frac{R}{2L} + \alpha} \right] = 2\alpha LC A = C t_0,$$

como tínhamos previsto no início do parágrafo. O gráfico de i

contra t tem o aspecto apresentado na Fig. 18-2, análogo ao de x contra t no caso do pêndulo, em que a resistência viscosa é muito grande.



Fig. 18-2

II) A resistência do circuito é pequena, de modo a tornar $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$.

Neste caso, fazendo $\alpha = ja$, onde $a = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, a solução de (18-2) será da forma ($j = \sqrt{-1}$):

$$i = A e^{-\frac{R}{2L}t} \text{ sen } at,$$

isto é, a corrente oscilará (por efeito da indutância), com amplitude que decresce à medida que o tempo tende a infinito, conforme indica a Fig. 18-3.

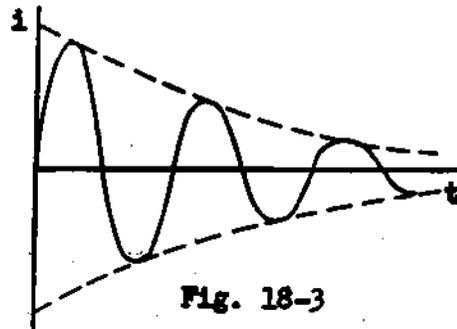


Fig. 18-3

18 - 2. Correntes alternadas em circuitos com indutância. Substituíamos no circuito da Fig. 18-1 a f.e.m. \hat{e}_0 , constante, por \hat{e} que depende do tempo na forma:

$$\hat{e} = \hat{e}_0 \cos \omega t.$$

Neste caso, na equação diferencial (18-2) o 1º termo não é mais nulo:

$$\frac{d\hat{e}}{dt} = \frac{1}{C} + R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2}, \quad (18-4)$$

e para resolver esta equação devemos admitir que a corrente seja da forma:

$$i = i_0 \cos(\omega t + \alpha) ;$$

substituindo esta expressão em (18-4) e integrando, obtemos $Q(t)$; as condições iniciais fornecem os valores das constantes i_0 e α .

Usaremos aqui, entretanto, o método das variáveis complexas, por ser mais prático no caso de correntes alternadas. Chamemos:

$$t = \text{Re } \eta, \quad i = \text{Re } \mathcal{Y},$$

onde:

$$\eta = t_0 e^{j\omega t}, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 e^{j\omega t}, \quad \mathcal{Y}_0 = i_0 e^{j\alpha}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (18-5)$$

Com esta notação, a equação (18-4) se escreve:

$$\text{Re } \frac{d\eta}{dt} = \text{Re } \left[L \frac{d^2\mathcal{Y}}{dt^2} + R \frac{d\mathcal{Y}}{dt} + \frac{\mathcal{Y}}{C} \right],$$

que será válida se:

$$\frac{d\eta}{dt} = L \frac{d^2\mathcal{Y}}{dt^2} + R \frac{d\mathcal{Y}}{dt} + \frac{\mathcal{Y}}{C}.$$

Levando nesta equação as relações (18-5), virá:

$$j\omega\eta = \mathcal{Y}(jR\omega + \frac{1}{C} - L\omega^2),$$

isto é:

$$\eta = Z\mathcal{Y}, \quad (18-6)$$

onde:

$$Z = R + jX$$

é a "impedância" do circuito, e:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

sua "reatância". De (18-6) tiramos:

$$i = R_c j = R_c \frac{\hat{e}_0 e^{j\omega t}}{R + jX}.$$

A impedância complexa pode ser representada no plano complexo pelo vetor \vec{OP} (Fig. 18-4); e vale:

$$Z = |Z| e^{j\theta},$$

sendo:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \text{tg } \theta = \frac{X}{R}.$$

Tem-se assim para a corrente:

$$i = R_c \frac{\hat{e}_0}{|Z|} e^{j\omega t} e^{-j\theta},$$

isto é:

$$i = \frac{\hat{e}_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta),$$

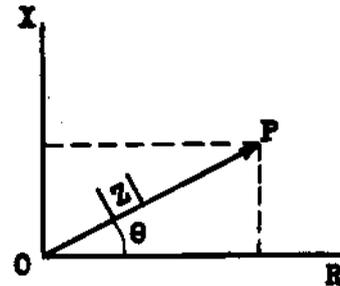


Fig. 18-4

que fica completamente determinada, conhecendo-se R , C , L e \hat{e}_0 . O ângulo de fase θ dá o atraso da corrente em relação à f.e.m. Quando a resistência do circuito é desprezível em relação à reatância, o atraso de fase é de 90° ; se, ao contrário, $X \ll R$, o atraso é nulo: a corrente e a f.e.m. estarão em fase.

18 - 3. Energia magnética de um sistema de correntes. Sejam n circuitos percorridos, num dado instante, pelas correntes i_1 , i_2 , ... i_n . Vejamos como se define a energia magnética deste sistema.

Para calcular a energia de um sistema qualquer, devemos inicialmente desfazê-lo. Ora, como não podemos separar trechos elementares de um mesmo circuito, e como não é bastante afastar os circuitos uns dos outros, porque assim somente a energia de interação entre os circuitos seria calculada, seguiremos aqui método análogo ao utilizado na Eletrostática, no caso de condutores (parágrafo 14-1). Coloquemos em cada circuito uma f.e.m. variável, adicional, que faça a corrente no circuito diminuir com o tempo, de modo que a intensidade no circuito genérico \mathcal{E}_j valha, no instante t :

$$i_j(t) = i_j f(t),$$

onde a função contínua $f(t)$ satisfaz às condições:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t > t' \end{cases}$$

sendo t' o tempo ao fim do qual as correntes se extinguem. Esse efeito será obtido fazendo que as forças eletro-motrizes externas diminuam simultaneamente com o tempo de tal maneira que, em cada instante t , as razões entre as correntes sejam as mesmas que no instante $t = 0$. Dêsse modo calcularemos a energia fornecida para desfazer as correntes.

Se dq_j é a quantidade de carga que percorreu o circuito \mathcal{E}_j durante o tempo dt , então o trabalho realizado pelas baterias, entre os instantes t e $t + dt$, será:

$$dW^b = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_j^b dq_j = dt \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_j^b di_j.$$

Ora, a 2ª lei de Kirchhoff dá:

$$\mathcal{E}_j^b + \mathcal{E}_j^i = R_j i_j ,$$

onde \mathcal{E}_j^i é a f.e.m. induzida no circuito \mathcal{C}_j , em virtude da variação da corrente, e R_j sua resistância. Como, por (17-13):

$$\mathcal{E}_j^i = - \sum_{k=1}^n M_{kj} \frac{di_k}{dt} ,$$

segue-se que a potência fornecida pelas baterias vale:

$$\begin{aligned} \frac{dW^b}{dt} &= \sum_{j=1}^n i_j \left[R_j i_j + \sum_{k=1}^n M_{kj} \frac{di_k}{dt} \right] = \sum_j R_j i_j^2 + \sum_{j,k} M_{kj} i_j \frac{di_k}{dt} = \\ &= \sum_j R_j i_j^2(t) + \sum_{j,k} M_{kj} i_j(0) i_k(0) f(t) \frac{df}{dt} . \end{aligned}$$

Então, a energia total fornecida pelas baterias será:

$$W^b = \sum_j \int_0^{t'} R_j i_j^2(t) dt + \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} i_j(0) i_k(0) \int_0^{t'} \frac{d}{dt} f^2(t) dt .$$

Os termos do 1º somatório, independentes dos sentidos das correntes, dão as perdas (irreversíveis) em calor, por efeito Joule, verificadas em cada circuito. Esta parte da energia, que chamaremos W^Q , não pode portanto representar a energia potencial do sistema. Esta será então $W^b - W^Q$, que dá a parte da energia fornecida pelas baterias que está servindo para fazer variar as correntes. Se é preciso fornecer energia $W^b - W^Q$ para que o sistema passe a ter energia potencial (no caso, energia magnética) nula, isto significa que, inicialmente (no instante $t=0$), o sistema possuía energia magnética:

$$W_m = - (W^b - W^\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} i_j(0) i_k(0) [r^2(0) - r^2(t)],$$

isto é:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} i_j i_k . \quad (18-7)$$

18 - 4. Distribuição da energia magnética no espaço. Da definição (17-16) de M_{jk} , e chamando \mathcal{C}_k ao tubo genérico de corrente em que se pode decompor a distribuição contínua (Fig. 18-5), virá:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \int_{\mathcal{C}_k} \vec{A}_j \cdot d\vec{l}_k i_k = \frac{1}{2} \sum_k \int_{\mathcal{C}_k} \left(\sum_j \vec{A}_j \right) \cdot d\vec{l}_k i_k = \frac{1}{2} \sum_k \int_{\mathcal{C}_k} \vec{A} \cdot \vec{J}_k d\vec{l}_k \delta s_k.$$

Considerando que os tubos têm secção infinitesimal, o somatório se reduz a uma integral, e se tem finalmente para a energia magnética:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{A} \cdot \vec{J} dv , \quad (18-8)$$

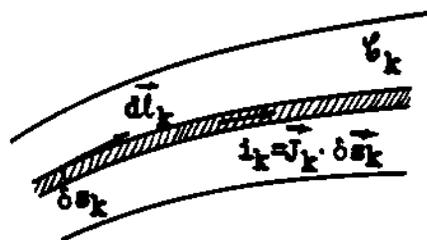


Fig. 18-5

expressão inteiramente análoga a (8-5), que dá a energia de um campo eletrostático:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \nabla \rho dv .$$

Esta analogia fica ainda mais evidenciada quando eliminamos \vec{J} em (18-8) da mesma maneira que se fez para ρ em (8-5) - a fim de obter uma expressão para a energia magnética em termos do campo. No caso estacionário, em que $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$, podemos eliminar \vec{J} em (18-8) usando (16-11):

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v_\infty} \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H} \, dv = \frac{1}{2} \int_{v_\infty} \text{div}(\vec{H} \wedge \vec{A}) \, dv + \frac{1}{2} \int_{v_\infty} \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv ,$$

em que se empregou a identidade:

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \nabla(\vec{H} \wedge \vec{A}) + \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} ,$$

e em que v_∞ designa o espaço todo. A 1^a integral pode ser transformada, pelo teorema de Stokes, numa integral de superfície, estendida sôbre s_∞ , que limita v_∞ . Ora, para uma distribuição de correntes localizada numa região finita do espaço, essa integral é nula, e portanto:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{v_\infty} \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv . \quad (18-9)$$

A densidade de energia magnética vale então:

$$\frac{dW_m}{dv} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} , \quad (18-10)$$

e nos meios anisotrópicos (em que $\vec{B} = \mu \vec{H}$), mesmo que μ varie de ponto para ponto:

$$\frac{dW_m}{dv} = \frac{1}{2} \mu H^2 , \quad (18-11)$$

análoga à expressão (14-4) da densidade de energia eletrostática, num meio material isotrópico de permitividade ϵ :

$$\frac{dW_e}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 .$$

Esta analogia completa entre os campos elétrico e magnético só

se tornou possível pela existência da indução eletromagnética. Aliás, a suposição prévia desta analogia poderia ter aberto caminho para a descoberta da lei de Faraday.

Também por processo análogo ao utilizado no parágrafo 14-3, mostra-se que a força que atua sobre um corpo magnetizado, em presença de correntes elétricas, vale:

$$\vec{F}_m = \left(\vec{\nabla} W_m \right)_i, \quad (18-12)$$

análoga a (14-6), em que o índice i significa que o gradiente da energia é calculado mantendo-se constantes as correntes nos circuitos, isto é, que o corpo foi afastado de sua posição de equilíbrio sem que as correntes se alterassem.

Aplicando (18-12) ao caso de um solenóide com um núcleo, verifica-se que, se o núcleo é afastado de sua posição de equilíbrio, no interior do solenóide, passa a atuar sobre ele uma força que o solicita de volta para dentro (problema 18-1).

O mesmo tratamento pode ser empregado no caso em que o corpo magnetizado sofre uma rotação. Mostra-se que o momento do conjugado que atua sobre o corpo vale:

$$\mathcal{M}_\theta = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right)_i, \quad (18-13)$$

onde a variação da energia com a deflexão é calculada mantendo as correntes constantes. A fórmula (18-13) é utilizada nos galvanômetros, onde \mathcal{M}_θ é equilibrado por um momento elástico $\mathcal{M}'_\theta = \mathcal{M}_\theta$; sendo \mathcal{M}'_θ proporcional a θ e $\left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right)_i$ proporcional a i , pode-se calcular a constante de proporcionalidade entre a de-

flexão e a intensidade da corrente, de modo que o galvanômetro já indique diretamente o valor da corrente que corresponde à deflexão verificada no magneto.

As fórmulas (18-8) e (18-9) permitem o cálculo da energia magnética pelo conhecimento das correntes. Por outro lado, no caso de um circuito apenas, (18-7) particulariza-se para:

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2, \quad (18-14)$$

que permite agora, com certa facilidade na maioria dos casos, a determinação do coeficiente de auto-indutância do circuito, dado assim por:

$$L = \frac{2W_m}{i^2}. \quad (18-15)$$

Aliás, em todos os casos em que o circuito não é filiforme, é aconselhável o uso de (18-15) para o cálculo de L , de preferência a (17-14) ou (17-18), conforme já se tinha observado no parágrafo 17-5.

Consideremos, por exemplo, o circuito apresentado no problema 10-2, que consiste em um cabo coaxial de raios interno e externo respectivamente iguais a R_1 e

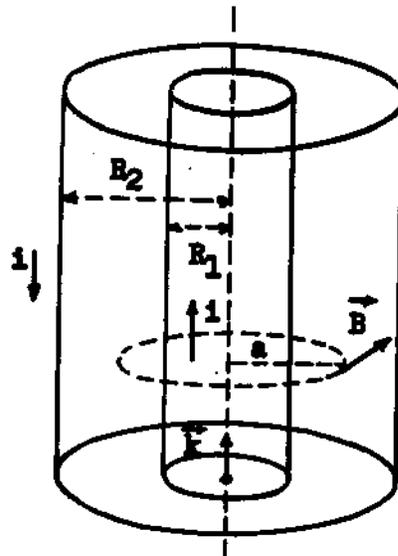


Fig. 18-6

R_2 (Fig. 18-6). A corrente i sobe pelo condutor interno, distribuindo-se aí espacialmente, e desce pela capa externa, de espessura desprezível, sendo aí portanto uma corrente superficial. Aplicando o teorema de Ampère ao circuito, encontra-se que a indução magnética vale, em todo o espaço:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi R_1^2} a \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}}{a}, & a \leq R_1, \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}}{a}, & R_1 \leq a < R_2, \\ 0, & a > R_2. \end{cases}$$

Como o cabo tem comprimento infinito, a energia magnética em todo o espaço é infinita, o que dará para L , usando (18-15), um valor também infinito. Calculemos, portanto, o coeficiente de auto-indução por unidade de comprimento, L' , determinando previamente a energia magnética por unidade de comprimento, W'_m :

$$W'_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \int_V B^2 \, dv,$$

pois $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ no vácuo e no interior dos condutores, para os quais $\mu \approx \mu_0$. Como $\vec{B} = 0$ para $a > R_2$, a energia magnética se compõe a penas de 2 termos:

$$W'_m = \frac{i^2}{2} \frac{\mu_0}{2\pi R_1^4} \int_0^{R_1} a^3 \, da + \frac{i^2}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{da}{a} = \frac{i^2}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \log \frac{R_2}{R_1} \right),$$

onde, tomamos, para volume elementar, o volume $dv = 2\pi a \, da$, de

uma camada cilíndrica infinitésima de espessura da e comprimento unitário. Aplicando finalmente (18-15), teremos:

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \log \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Se a corrente passando pelo cilindro interno fôsse também superficial (problema 17-3), o campo magnético no seu interior seria nulo, e o coeficiente de auto-indução por unidade de comprimento valeria:

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1}. \quad (18-16)$$

Observemos que esta fórmula é análoga a (8-14) que dá a capacidade do condensador cilíndrico por unidade de comprimento, e que entre elas vale a relação

$$L' = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{C'}. \quad (18-17)$$

Pode-se mostrar que a fórmula (18-17) será válida sempre que houver, entre o condensador e o circuito, uma analogia geométrica completa (problema 18-2).

* * *

Problemas Propostos:

- 18-1. Seja um solenóide cilíndrico por onde passa corrente, dentro do qual está inserido um núcleo de ferro. Mostre, usando (18-12), que quando o núcleo é afastado de sua posição de equilíbrio, passa a atuar sobre êle uma força que o solicita de volta para dentro.

- 18-2. Mostre que a relação (18-17) é válida sempre que haja, entre o condensador e o circuito, uma analogia geométrica completa.
- 18-3. Calcule o coeficiente de auto-indutância de um condutor cilíndrico infinito.

- 18-4. Dado circuito (filtro de tensões) representado na Fig. 18-7, em que se conhecem L , C e ζ_1 , e em que a resistência é desprezível, calcule o valor de ζ_2 .

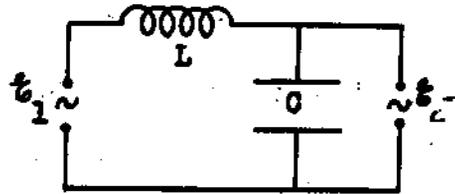


Fig. 18-7

- 18-5. Um indutor de resistência R e coeficiente de auto-indução L está ligado em série com uma resistência não indutiva R_0 a uma diferença de potencial V (Fig. 18-8). (a) Encontre a expressão para V_{bc} num instante t depois que a chave A_1 é fechada. (b) Depois que a corrente atingir seu valor final estacionário, a chave A_2 é fechada. Qual será o valor da corrente $0,01$ s depois do fechamento de A_2 ? (Sears)

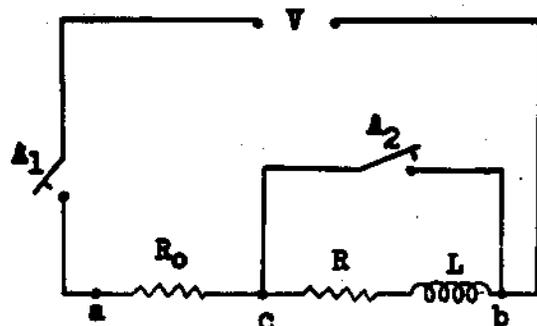


Fig. 18-8

- 18-6. Calcule o calor de Joule produzido no circuito representado na Fig. 18-1 desde o instante $t = 0$ até o instante $t = \infty$.

- 18-7. Dois circuitos de indutâncias L_1 e L_2 e resistências R_1 e R_2 estão em proximidade. Se a indutância mútua entre os circuitos é M , mostre que uma quantidade de carga $Q = \epsilon_0 M / R_1 R_2$ circulará através de um deles, se um gerador de f.e.m. igual a \mathcal{E}_0 fôr súbitamente ligado em série com o outro. (R.M.).
- 18-8. Uma indutância de 2h e uma resistência de 3Ω são ligadas em série com 1 bateria de 5V e uma chave. Determine a corrente e sua razão de variação com o tempo no circuito, nos seguintes instantes depois do fechamento da chave: (a) 3s , (b) 1s , (c) 4s . (R.M.).
- 18-9. A combinação em série de uma resistência R e uma indutância L é montada em paralelo com a combinação em série de uma resistência R e uma capacitância C . Mostre que, se $R^2 = L/C$, a impedância é independente da frequência. (R.M.).
- 18-10. Uma bobina tem uma resistência de 90.000Ω e uma indutância de 8h . Qual é o ângulo de fase da impedância a 1000 c/s ? Um condensador é montado em paralelo com a resistência de modo a reduzir a zero o ângulo de fase a 1000 c/s , sem alterar apreciavelmente a resistência. Acima de que limite de frequências o ângulo de fase se torna menor do que era antes de ser colocado o condensador? (R.M.)
- 18-11. Dado o circuito da Fig. 18-9, com $L = 4\text{mh}$, $C = 2\mu\text{f}$, $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, encontre as frequências para as quais: (a) $\omega = 1/\sqrt{LC}$, (b) a impedância é máxima, (c) a

corrente através de R_1 está em fase com a voltagem do gerador. (R.M.).

18-12. Uma corrente num cabo coaxial segue por um fio condutor não magnético de raio R e volta metade pela superfície metalizada de uma 1^a capa isolante (μ_1) e metade pela superfície metalizada de uma 2^a capa iso-

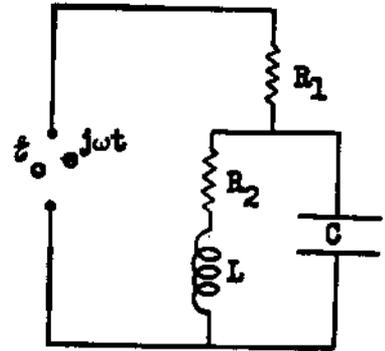


Fig. 18-9

lante (μ_2). (a) Usando as equações diferenciais da Magnetostática e as condições de continuidade, determine \vec{B} e \vec{H} em função de \vec{B}_0 (mesmo problema no vácuo) e calcule suas expressões. (b) Qual a energia magnética em todo o espaço, por unidade de comprimento? (c) Qual o coeficiente de auto-indução do cabo, por unidade de comprimento?

* * *

CAPÍTULO 19

EQUAÇÕES DE MAXWELL

19 - 1. Formulação diferencial da lei de Faraday. Foi atribuído um papel preponderante às equações diferenciais, que descrevem o comportamento local do campo, que Maxwell obteve as suas equações (Faraday, aliás, já atribuíra sentido físico ao próprio campo, independentemente do fato de existir ou não carga no ponto considerado). Daí a importância fundamental da formulação diferencial das leis, que além disso traz vantagens para a resolução de muitos problemas.

Designemos, como dantes, com o índice C o campo elétrico coulombiano (que pode variar com o tempo) para distingui-lo do campo solenoidal, proveniente de induções, que designaremos com o índice S. As equações fundamentais do campo coulombiano são:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D}_C &= \rho , \\ \operatorname{rot} \vec{E}_C &= 0 , \end{aligned} \tag{5-4}$$

$$\vec{D}_C = \epsilon_0 \vec{E}_C + \vec{P} ;$$

e as do campo magnético gerado pelas correntes, interrompidas (com condensadores) ou não, se escrevem:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}_C}{\partial t} , \tag{16-10}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 ,$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} .$$

Vamos agora levar em conta o efeito de indução eletromagnética resultante de variações de fluxo magnético através de um circuito \mathcal{C} , fixo. A existência de uma f.e.m. induzida num circuito implica na existência de uma força $\vec{F}'(\vec{r})$ que atua sobre uma carga q qualquer do condutor \mathcal{C} na posição \vec{r} , e tal que:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\vec{F}'(\vec{r})}{q} \cdot d\vec{l} . \quad (19-1)$$

Foi demonstrado experimentalmente por Faraday que esta f.e.m. existe mesmo quando não preexistem correntes, isto é, quando as cargas transportadoras de corrente no condutor estão em repouso. Conclui-se daí que \vec{F}' é uma força de tipo elétrico, pois não depende da velocidade das cargas. Ela é, porém, não conservativa, pois $\oint \vec{F}' \cdot d\vec{l} \neq 0$. Além disso, como a f.e.m. \mathcal{E} induzida no circuito depende apenas de sua forma, não dependendo da carga q dos transportadores, de seu número por unidade de volume ou de outras propriedades físicas do condutor, é razoável admitir que a mesma força,

$$\vec{F}'(\vec{r}) = q \vec{E}'(\vec{r}) ,$$

por ser \vec{E}' independente de q , atue sobre a carga q colocada em \vec{r} mesmo na ausência do condutor \mathcal{C} . Esse campo elétrico $\vec{E}'(\vec{r})$ induzido é, porém, não conservativo (como foi observado anteriormente) e será chamado de campo elétrico solenoidal:

$$\vec{E}' = \vec{E}_S .$$

A verificação experimental da hipótese feita acima e a

observação direta da existência do campo induzido \vec{E}_S deram origem a aplicações em aceleradores de partículas, em que o campo \vec{E}_S produzido por um campo magnético oscilante é utilizado (Betatron).

Em vista desses fatos, podemos em (19-1) substituir o circuito condutor \mathcal{C} por um contorno geométrico Γ , e a lei de Faraday ficará:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_S \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi_s}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s \left(- \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}, \quad (19-2)$$

sendo s uma superfície orientada e fixa qualquer, apoiada no contorno fixo Γ . Aplicando o teorema de Stokes ao 1º membro das igualdades (19-2), virá:

$$\int_s \text{rot } \vec{E}_S \cdot d\vec{s} = \int_s \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}.$$

Como essa equação é válida qualquer que seja s apoiada em Γ e qualquer que seja Γ , temos necessariamente:

$$\text{rot } \vec{E}_S = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (19-3)$$

que é a expressão infinitesimal da lei de Faraday.

Observemos que:

1) a nova equação é consistente com as outras equações diferenciais do campo; de fato:

$$\text{div rot } \vec{E}_S = 0 = - \text{div } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B} = 0;$$

2) como $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, a equação (19-4) pode ser escrita:

$$\text{rot } \vec{E}_S = - \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ,$$

$$\text{rot } \left[\vec{E}_S + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0 ,$$

e conseqüentemente:

$$\vec{E}_S = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad } \chi , \quad (19-4)$$

onde χ é uma função arbitrária. Como o que tem sentido físico é $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ e não \vec{A} , o vetor \vec{A} é definido a menos do gradiente de uma função arbitrária. Podemos, pois, tomar $\chi = 0$ ou outro qualquer χ em (19-4); o mais conveniente, por simplicidade, é impor a condição suplementar:

$$\text{div } \vec{E}_S = 0 ,$$

e assim χ será solução da equação:

$$\Delta \chi = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} . \quad (19-5)$$

19 - 2. Campos elétrico e magnético de um dipolo oscilante. Pelo que acabamos de ver, a expressão obtida no parágrafo 16-4 para o campo elétrico de um dipolo oscilante na origem descreve a penas a parte coulombiana dêsse campo:

$$\vec{E}_C = - \text{grad } V = - \frac{I}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) , \quad \vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t .$$

O campo magnético é:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} ; \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

O valor de \vec{E}_S obtém-se de (19-4), sendo χ calculável por (19-5), se fôr imposta a condição $\text{div } \vec{E}_S = 0$. Para calcular, portanto,

x , bastará resolver a equação:

$$\Delta x = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 \frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} \cos \omega t ;$$

tomando:

$$x = x_0(\vec{r}) \cos \omega t ,$$

teremos:

$$\Delta x_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 \frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{r}}{r^3} . \quad (19-6)$$

A solução geral desta equação a derivadas parciais pode ser obtida tomando o laplaciano Δ em coordenadas polares, ou pelo seguinte artifício: se escrevermos

$$x_0(\vec{r}) = \vec{p}_0 \cdot \vec{\nabla} \psi(r) ,$$

a equação (19-6) será satisfeita, se $\psi(r)$ satisfizer a equação

$$\Delta \psi(r) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 \frac{1}{r} , \quad (19-7)$$

isto é:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 \frac{1}{r} ;$$

integrando esta equação, teremos:

$$\psi(r) = - \frac{\mu_0}{8\pi} \omega^2 r - \frac{C}{r} + C' ,$$

sendo C e C' constantes de integração. No caso, devemos tomar $C = 0$, porque se não a equação (19-7) teria, na origem, singularidade diferente de $\frac{1}{r}$.

Tem-se, então, finalmente:

$$x_0(\vec{r}) = - \frac{\mu_0}{8\pi} \omega^2 \frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{r}}{r} ,$$

e portanto:

$$\vec{E}_S = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 \left[\frac{\vec{p}}{r} - \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r} \right) \right] = \frac{\mu_0}{8\pi} \omega^2 \left[\frac{\vec{p}}{r} + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^3} \right].$$

Podemos também escrever:

$$\vec{E} = \vec{E}_C + \vec{E}_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{3 + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \epsilon_0 \mu_0}{r^5} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3} \frac{1 - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \epsilon_0 \mu_0}{r^3};$$

comparando os dois termos de \vec{E}_S com os de \vec{E}_C , vemos que aparecem nos primeiros um fator adicional $\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 r^2$, fazendo que $E_S \ll E_C$ para:

$$r \ll \frac{1}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Como $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8$ m/s, vemos que somente para $r \sim \frac{3 \times 10^8}{\omega (s^{-1})}$ m é que se terá $E_S \approx E_C$. Além desse limite, $E_S > E_C$.

Vemos, portanto, que a indução eletromagnética faz que o campo elétrico (parte solenoidal) vá muito mais longe do que o campo coulombiano, que cai como $\frac{1}{r^3}$, do mesmo modo que \vec{B} (que cai como $\frac{1}{r^2}$). As ações elétricas a grandes distâncias são verificadas experimentalmente, para oscilações de alta frequência. No entanto, verifica-se também experimentalmente que \vec{B} , na realidade, cai mais lentamente do que $\frac{1}{r^2}$, evidenciando-se ações magnéticas a distâncias em que as mesmas já deveriam ser desprezíveis, se os cálculos deste parágrafo fossem corretos. Veremos, no parágrafo 19-4, de onde vem essa contribuição adicional.

19 - 3. Equações de Maxwell. Na realidade, a separação do campo elétrico em dois termos, \vec{E}_C e \vec{E}_S , é apenas formal, pois experimentalmente o que medimos é a soma dos dois:

$$\vec{E} = \vec{E}_C + \vec{E}_S, \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}. \quad (19-8)$$

Este campo elétrico total satisfaz às equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

como consequência de (5-4), (16-10), (19-3) e (19-8).

Entretanto, em (16-10) figura apenas o campo coulombiano. Se agora impusermos, com Maxwell, que o que tem sentido físico é o campo total \vec{E} , devemos escrever, nessa equação, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ em lugar de $\frac{\partial \vec{D}_C}{\partial t}$. Assim obtemos:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}_C}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}_S}{\partial t}. \quad (19-9)$$

Já vimos, aliás, que poderíamos acrescentar ao 2º membro de (16-10), sem quebra de consistência, qualquer termo vetorial de divergência nula. O termo $\frac{\partial \vec{D}_S}{\partial t}$ que satisfaz a essa condição na equação (19-9), representa a lei de Maxwell: a variação com o tempo do campo elétrico induzido produz campo magnético, sendo a corrente de deslocamento desse campo equivalente a uma corrente elétrica.

O campo eletromagnético satisfaz, então, a um sistema de 4 equações diferenciais, as chamadas "equações de Maxwell", que, no sistema MKS racionalizado, se escrevem:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \\ \text{(II)} \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \text{(III)} \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{(IV)} \quad \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (19-10)$$

O campo elétrico e o vetor deslocamento elétrico são dados pelas equações (19-8); assim, a (I) das equações (19-10) coincide com a equação (13-8) da Eletrostática, expressão diferencial do teorema de Gauss. A (II) coincide com a equação (12-2) da Magnetostática, que não sofreu portanto alteração, e significa que o campo magnético é solenoidal. A (III) é a expressão diferencial da lei da indução eletromagnética de Faraday; como o campo coulombiano tem rotacional nulo - fato expresso na equação (5-4) da Eletrostática - ela significa que um campo elétrico solenoidal é gerado pela variação com o tempo do campo magnético. Finalmente, a (IV) significa que, não só correntes de condução, convecção e polarização, mas também variações com o tempo do campo elétrico solenoidal geram campos magnéticos (Como ficou demonstrado anteriormente, o campo elétrico coulombiano, mesmo que varie com o tempo, não produz campo magnético).

As equações de Maxwell e mais -

as equações constitutivas (13-12) e (15-11) em meios isotrópicos:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H};$$

a lei de Ohm local:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E};$$

a equação de continuidade:

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

são as equações fundamentais do Eletromagnetismo. A elas devem ser acrescentadas ainda as equações de definição dos potenciais eletromagnéticos. De (19-10) (II) concluímos que \vec{B} é igual ao rotacional de uma função vetorial, que chamaremos ainda "poten-

cial vetor" e denotaremos por \vec{A} :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (19-11)$$

que coincide formalmente com (11-2). Por outro lado, levando êste resultado em (19-10) (III), obtemos:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A},$$

isto é:

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

e portanto a função vetorial $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ é o gradiente de uma função escalar, que chamaremos ainda "potencial escalar" e que representaremos por V . Assim:

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (19-12)$$

que se reduz à equação (4-18) no caso estacionário.

Estudaremos, nos próximos capítulos, consequências importantes das equações de Maxwell. Agora examinaremos, como exemplo, a produção de campo magnético por variação do campo elétrico solenoidal, no caso do dipolo oscilante.

19 - 4. Dipolo oscilante, segundo as equações de Maxwell. Por analogia com o tratamento feito no parágrafo 19-2, podemos esperar que o potencial vetor produzido pelo dipolo de momento

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t,$$

colocado na origem, seja dado por:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{f(r)}{r} = \vec{A}_0(\vec{r}) \text{ sen } \omega t, \quad (19-13)$$

onde $f(r)$ é uma função a determinar; isso faremos pelas equações de Maxwell (19-10), aplicadas inicialmente ao campo de indução magnética:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}_0(\vec{r}) \text{ sen } \omega t, \quad \vec{B}_0 = \text{rot } \vec{A}_0.$$

Desde logo, vemos que a (II) é automaticamente satisfeita (e também $\text{div } \vec{B}_0 = 0$). Aplicando a (IV), onde devemos tomar $\vec{J} = 0$ para $r \neq 0$, virá:

$$\mu_0 \frac{\partial D}{\partial t} = \text{rot } \vec{B}_0 \text{ sen } \omega t,$$

e portanto:

$$\mu_0 \vec{D} = -\frac{1}{\omega} \text{rot } \vec{B}_0 \cos \omega t, \quad (19-14)$$

que satisfaz automaticamente a (I), para $r \neq 0$:

$$\text{div } \vec{D} = 0.$$

Levando o valor de \vec{D} dado por (19-14) na (III), que é a única equação que falta satisfazer, virá:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} = -\frac{\cos \omega t}{\epsilon_0 \mu_0 \omega} \text{rot rot } \vec{B}_0$$

e portanto:

$$\text{rot rot } \vec{B}_0 = \epsilon_0 \mu_0 \omega \vec{B}_0,$$

ou ainda, como $\text{div } \vec{B}_0 = 0$:

$$(\Delta + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2) \vec{B}_0 = 0.$$

Esta equação será satisfeita, se valer:

$$(\Delta + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2) \vec{A} = 0;$$

levando nesta última equação o valor de \vec{A}_0 presente em (19-13), vem:

$$(\Delta + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2) \frac{f(r)}{r} = 0 ,$$

ou:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right) \right] + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \frac{f}{r} = 0 .$$

Desenvolvendo e simplificando, chega-se à equação:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + k^2 f = 0 , \quad k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c_0} \quad (19-15)$$

cuja solução geral é da forma:

$$f(r) = a \cos kr + b \sin kr ,$$

sendo a e b constantes. Obtemos então para \vec{B} :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}} \wedge \vec{r}}{r^3} f(r) - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}} \wedge \vec{r}}{r^2} \frac{df}{dr} , \quad \text{com } \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

Como nas proximidades da origem este campo deve coincidir com o do dipolo oscilante sem indução, devemos ter (compare com o parágrafo 19-2):

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=0} = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow a = 1, \quad b = 0 \longrightarrow f(r) = \cos kr ,$$

e assim o valor de \vec{B} será finalmente:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \omega \frac{\vec{p}_0 \wedge \vec{r}}{r^3} (\cos kr + kr \sin kr) \sin \omega t \quad (19-16)$$

Da (III) obtemos imediatamente a expressão de \vec{D} e consequentemente de \vec{E} :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{rot} \left[(\vec{p}_0 \wedge \vec{r}) \frac{\cos kr + kr \sin kr}{r^3} \right] \cos \omega t = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[2\vec{p} \frac{\cos kr + kr \sin kr}{r^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-3\cos kr - 3kr \sin kr + k^2 r^2 \cos kr}{r^5} \vec{r} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{r}) \right], \end{aligned}$$

isto é:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\vec{p} \frac{\cos kr + kr \sin kr - k^2 r^2 \cos kr}{r^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \frac{3 \cos kr + 3 kr \sin kr - k^2 r^2 \cos kr}{r^5} \right] \end{aligned} \quad (19-17)$$

As expressões (19-16) e (19-17) para \vec{B} e \vec{E} , soluções das equações de Maxwell, são na aparência completamente distintas das obtidas no parágrafo 19-2. Para compará-las, consideremos ainda o caso em que $kr = \omega r \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \ll 1$, mas conservemos, no desenvolvimento de Taylor de \vec{B} e \vec{E} nas proximidades de $r=0$, os termos em $k^2 r^2$. Obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{B} &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{p} \wedge \vec{r}}{r^3} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 r^2 \right), \\ \vec{E} &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\vec{p} \frac{1 - \frac{1}{2} k^2 r^2}{r^3} + \frac{\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \frac{3 + \frac{1}{2} k^2 r^2}{r^5} \right]. \end{aligned}$$

Comparando agora estes resultados com os obtidos naquele parágrafo (válidos em todo o espaço), vemos que os campos elétricos são idênticos na aproximação considerada, enquanto que no caso das equações de Maxwell existe um termo adicional no campo magnético:

$$\vec{B}' = \frac{\mu_0}{8\pi} k^2 \frac{\dot{\vec{p}} \wedge \vec{r}}{r},$$

que é exatamente igual ao termo induzido pela variação de \vec{E}_S com o tempo:

$$\text{rot } \vec{B}' = -c_0 \frac{\partial \vec{E}_S}{\partial t}.$$

Voltando às expressões (19-16) e (19-17), vemos que tanto \vec{B}' quanto \vec{E} têm termos que caem como $\frac{1}{r}$, e que portanto se fazem sentir a grandes distâncias (para grandes frequências), conforme se evidencia experimentalmente. No entanto, se bem que essas expressões dos campos sejam mais corretas do que as obtidas no parágrafo 19-2, verifica-se que elas só são válidas em condições especiais.

Na verdade, como veremos no próximo capítulo, as equações de Maxwell têm soluções que se propagam como ondas. No caso do dipolo oscilante, em espaço aberto, os campos elétrico e magnético propagam-se como ondas que se irradiam a partir do dipolo. Já para um dipolo oscilante colocado no centro de uma esfera condutora ôca de raio muito grande, obtém-se a superposição das ondas que saem e das que voltam ao dipolo, formando-se assim uma onda estacionária. Os campos são então praticamente os dados pelas expressões (19-16) e (19-17).

Problemas Propostos:

- 19-1. Um campo magnético tem a direção do eixo dos z , e seu módulo é proporcional ao tempo e independente da posição. Encontre o potencial vetor. Admitindo que o potencial escalar seja nulo, encontre o campo elétrico induzido. Prove por integração direta, usando uma trajetória circular, que vale a lei da indução (S.F.).
- 19-2. Um condensador plano, de capacidade C , em forma de discos circulares, tem a região entre suas armaduras cheia com um dielétrico de permitividade ϵ . O dielétrico é imperfeito e tem condutividade γ . O condensador é carregado até a diferença de potencial V_0 e isolado. Determine: (a) a carga do condensador em função do tempo; (b) a corrente de deslocamento no dielétrico; (c) o campo magnético no dielétrico (R.M.).
- 19-3. Partindo da lei da indução, mostre que a integral de linha de $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ao longo de um contorno fechado é nula. Partindo daí, mostre que o rotacional daquele vetor se anula, e que portanto $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (S.F.).
- 19-4. Um longo solenóide de n espiras por unidade de comprimento conduz uma corrente alternada de frequência ω e pico i_0 . Se um núcleo não magnético de condutividade σ é colocado dentro do solenóide, enchendo-o completamente, determine a distribuição de corrente, o campo magnético

e a perda em calor por unidade de comprimento dentro do núcleo (a perda em calor por unidade de volume por segundo é igual a $\vec{J} \cdot \vec{E}$). Discuta o comportamento de sua solução nos casos limites de grande e pequena condutividades. Como se alterariam seus resultados se o núcleo fôsse coaxial com o solenóide, mas de raio menor? (S.F.).

* * *

CAPÍTULO 20

EMIÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

20 - 1. Equação de onda. No cálculo do campo magnético do dipolo oscilante (parágrafo 19-4), obtivemos uma solução bem definida, impondo as condições: $f(0) = 1$, $\left(\frac{df}{dr}\right)_{r=0} = 0$. Essas condições implicam em: $a = 1$, $b = 0$, sendo a e b constantes de integração da equação diferencial (19-15). Se não impusermos a 2ª condição, mas apenas a 1ª ($a = 1$), \vec{B} será ainda, nas proximidades da origem, o campo de um dipolo oscilante sem indução. Obtêm-se, assim, novas soluções. Terão elas sentido físico próprio ou isso ocorrerá apenas para valores particulares de \vec{B} ? Esse problema será examinado no parágrafo 20-5.

Veremos agora que as equações de Maxwell têm soluções em que os campos elétrico e magnético se propagam por ondas, as "ondas eletromagnéticas", e calcularemos sua velocidade de propagação.

Vamos partir, por exemplo, da equação (19-10) (III) e tomar o rotacional de ambos os membros:

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\Delta \vec{E} + \nabla \text{div } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}.$$

Aplicando agora a (I) e a (IV) e as equações constitutivas (13-12)

e (15-11), virá:

$$-\Delta \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \rho = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu c \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\square \vec{E} = \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \rho, \quad (20-1)$$

onde c é uma constante que depende do meio (isotrópico e homogêneo) considerado, e que é dada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (20-2)$$

O operador "D'Alembertiano":

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

é o mesmo que comparece em tôdas as equações de onda. Usando esta nova notação, em qualquer ponto do espaço em que não haja cargas nem correntes, a equação (20-1) se escreve:

$$\square \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (20-3)$$

que é a equação de D'Alembert (na realidade 3 equações, uma para cada componente de \vec{E}), e que mostra que, fora das cargas ou correntes, o campo elétrico se propaga como onda, cujas fontes estão nas cargas e nas correntes, como se vê de (20-1).

Da mesma maneira, podemos partir da equação (19-10) (IV), tomar o rotacional de ambos os membros e, por cálculo análogo, verificar que \vec{H} satisfaz à equação:

$$\square \vec{H}(\vec{r}, t) = -\text{rot } \vec{J}, \quad (20-4)$$

semelhante a (20-1). Nos pontos em que $\vec{J} = 0$, \vec{H} satisfaz, também, a equação de D'Alembert:

$$\square \vec{H}(\vec{r}, t) = 0, \quad (20-5)$$

e portanto também \vec{H} se propaga como onda, cujas fontes são as correntes, como se conclui de (20-4).

Vejamos agora quais as soluções da equação de onda (20-3), por exemplo, satisfeita por \vec{E} [as soluções de (20-5) serão absolutamente análogas] no caso unidimensional, isto é, no caso em que \vec{E} é função apenas de uma das coordenadas espaciais, por exemplo, x . Neste caso, (20-3) se escreve:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (20-6)$$

e sua solução é da forma:

$$E = E(x, t) = f(x \mp ct) = f(u),$$

em que $u = x \mp ct$. De fato, levando esta expressão em (20-6), obtemos:

$$\frac{d^2 f}{du^2} - \frac{1}{c^2} \left(c^2 \frac{d^2 f}{du^2} \right) \equiv 0,$$

pois:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \pm c \frac{df}{du}.$$

A função $E_1 = f(x - ct)$ representa uma onda (plana, como veremos no parágrafo 21-1) que se propaga no sentido positivo do eixo dos x com velocidade c . É o que mostra a Fig. 20-1, em que a linha cheia representa a função num dado instante t , e a linha in-

terrompida num instante $t + \delta t$ posterior [a função $E_2 = f(x + ct)$ representa uma onda propagando-se em sentido contrário]. Portanto, a cons-

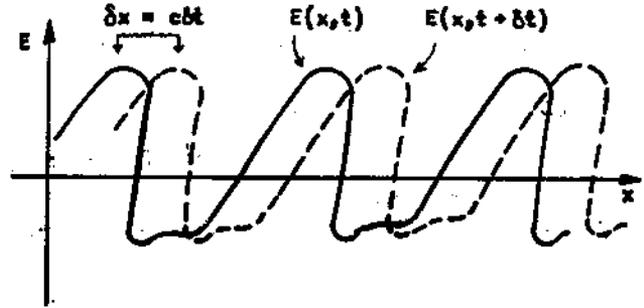


FIG. 20-1

tante c presente em (20-6) dá a velocidade de propagação (velocidade de fase) da onda eletromagnética, e de acordo com (20-2) vale, no vácuo:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \epsilon_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}} = \frac{\sqrt{9 \times 10^9}}{\sqrt{10^{-7}}} = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

que é igual à velocidade de propagação da luz no vácuo; num meio material, temos:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{k_e k_m}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{k_e k_m}}.$$

O valor encontrado para a velocidade de propagação da onda eletromagnética coincide então, com precisão espantosa, com a velocidade da luz. Esta coincidência levou Maxwell a formular a hipótese de que as soluções ondulatórias de suas equações têm sentido físico, e de que a luz é um fenômeno de natureza eletromagnética. A existência das ondas eletromagnéticas previstas por Maxwell foi demonstrada experimentalmente por Hertz, que mediu também sua velocidade de propagação utilizando dipolos oscilantes, cujas ações chegaram a distâncias inatingíveis por campos estáticos.

Aliás, a hipótese de Maxwell é confirmada não apenas pela coincidência das velocidades de propagação, mas também por fenô-

menos de reflexão, refração, polarização, etc. verificados com ondas eletromagnéticas, idênticos aos estudados na Ótica.

20 - 2. Potenciais eletromagnéticos. Já vimos no capítulo anterior que os potenciais eletromagnéticos \vec{A} e V são funções de ponto definidas de tal maneira que, a partir dêles, por diferenciação, podem ser obtidos os campos elétrico e magnético, fato expresso nas equações (19-11) e (19-12). Vamos agora obter as equações diferenciais satisfeitas por êsses potenciais.

Num meio homogêneo e isotrópico, usando a definição (19-11), a equação (19-10) (IV) se escreve:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{A} &= \mu \vec{J} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ -\Delta \vec{A} + \text{grad div } \vec{A} &= \mu \vec{J} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \epsilon \mu \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t}, \end{aligned}$$

isto é:

$$\square \vec{A} = -\mu \vec{J} + \vec{\nabla} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right).$$

Como \vec{A} é definido em (19-11) a menos de um gradiente (pois o rotacional do gradiente é idênticamente nulo), pode-se sempre impor a condição de Lorentz:

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (20-7)$$

De fato, se para uma determinada escolha de \vec{A} e V a condição não é preenchida, podemos escolher outros potenciais:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi, \quad V' = V + \chi.$$

A indução magnética não se alterará:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}$$

Para que o campo elétrico também não se altere ($\vec{E}' = \vec{E}$), bastará tomar para potencial escalar a função:

$$V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

De fato, teremos nesse caso:

$$\text{div } \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial t} = \text{div } \vec{A} + \Delta \psi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

A função ψ a ser usada é então a solução da equação:

$$\square \psi = - \text{div } \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Valendo a condição de Lorentz, o potencial vetor satisfaz à equação:

$$\square \vec{A} = - \mu \vec{J}, \quad (20-8)$$

que se reduz a (12-7) no caso estacionário ($\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$).

Levando agora (19-12) em (19-10) (I), virá:

$$\text{div} \left(- \vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon},$$

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = - \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Impondo novamente a condição de Lorentz (20-7), virá:

$$\square V = - \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (20-9)$$

que se reduz a (13-22) no caso estático ($\frac{\partial V}{\partial t} = 0$).

Nos pontos em que não há cargas nem correntes, as equações (20-8) e (20-9) se escrevem:

$$\square \vec{A} = 0, \quad (20-10)$$

$$\square V = 0, \quad (20-11)$$

isto é, também os potenciais eletromagnéticos satisfazem à equação de D'Alembert e se propagam como ondas, quando é imposta a condição de Lorentz (20-7).

20 - 3. Energia e fluxo de energia eletromagnética. Se numa região do espaço, de volume v , existem cargas em movimento, as forças elétricas produzem trabalho sobre essas cargas. O trabalho realizado por unidade de tempo vale:

$$\frac{dW}{dt} = \int_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv', \quad (20-12)$$

onde \vec{J} é a densidade de corrente no ponto em que se situa o volume elementar dv' , e \vec{E} o valor do campo elétrico neste ponto. De fato, se q é a carga elementar, \vec{v} sua velocidade e N o número de transportadores de carga por unidade de volume, tem-se:

$$\vec{J} = Nq\vec{v},$$

e portanto:

$$\int_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv' = \sum_{\delta v'} N q \vec{v} \cdot \vec{E} \delta v',$$

em que o somatório se estende a todos os volumes elementares $\delta v'$.

Mas:

$$q \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt},$$

que dá o trabalho por unidade de tempo realizado sôbre a carga q . Somando sôbre tôdas as cargas, tem-se o trabalho total por unidade de tempo, isto é, $\frac{dW}{dt}$, e portanto vale (20-12).

Esse trabalho é utilizado ou para acelerar as cargas (quando \vec{J} varia) ou para produzir calor ôhmico (nos condutores).

Na produção dêste trabalho, energia é consumida; considere mos duas possibilidades:

A. Caso estacionário. Neste caso, essa energia não pode provir do interior da própria região, porque aí

$$\frac{d(W_e + W_m)}{dt} = 0, \quad (20-13)$$

isto é, as energias elétrica e magnética totais do campo eletromagnético contido no volume v são constantes no tempo. Ela só pode portanto vir de fora, fornecida, por exemplo, por uma bateria. Mas, como chega essa energia à região em que é dissipada? Podemos descrever o mecanismo dêsse fenômeno de 2 modos inteiramente equivalentes:

(a) A energia é transportada pelas cargas. Nesse caso, a energia elétrica e a magnética são consideradas como transportadas pelas cargas, que saem do volume com menor energia do que entraram, apesar de ser constante no tempo a energia contida no volume v .

(b) A energia é transportada pelo campo. Nesse caso, deve existir um vetor densidade de fluxo de energia (\vec{S}), tal que a quantidade de energia que atravessa a superfície elementar ds , da face negativa para a positiva, por unidade de tempo, seja da-

da por:

$$\vec{S} \cdot d\vec{s}.$$

Seja S a superfície que envolve o volume v , e \vec{n} a normal orientada para fora do volume (Fig. 20-2);

então

$$\int_S \vec{S} \cdot d\vec{s},$$

onde $d\vec{s} = \vec{n} ds$, é a quantidade de energia que saiu do volume v , por

unidade de tempo. E, portanto, a quantidade de energia que penetrou no volume v , por unidade de tempo, vale:



FIG. 20-2

$$\frac{dW}{dt} = - \int_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = - \int_V \text{div } \vec{S} dv' = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dv'. \quad (20-14)$$

Como essas igualdades são válidas qualquer que seja a região de volume v considerada, virá:

$$\text{div } \vec{S} = - \vec{J} \cdot \vec{E} = - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} + \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = \text{div } (\vec{E} \wedge \vec{H}),$$

pois, no caso estacionário, $\vec{J} = \text{rot } \vec{H}$ e $\text{rot } \vec{E} = 0$. Portanto, se tomarmos:

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}, \quad (20-15)$$

valerá o fato de que o fluxo de energia que penetra no volume v é exatamente igual à energia aí consumida, por unidade de tempo, na realização de trabalho sobre as cargas. Ao vetor \vec{S} se chama "vetor de Poynting".

Consideremos, como exemplo, o caso de um fio condutor cilíndrico por onde passa corrente, de densidade \vec{J} , alimentada por um gerador (Fig. 20-3), e seja a_0 o raio do fio. A maioria das

linhas de força do campo elétrico estão concentradas no interior do fio, e o campo externo é fraco, mas não nulo. De acordo com (9-23), o campo magnético na superfície do condutor é contínuo e vale:

$$\vec{H} = \frac{JA}{2\pi a_0} \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}_0}{a_0},$$

onde \vec{k} é um vetor unitário que tem o sentido da corrente, e A

a área da secção reta do condutor. Por outro lado, o campo elétrico é constante no fio condutor, e vale:

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} = \frac{J}{\gamma} \vec{k}.$$

O vetor de Poynting será então neste caso, na superfície do fio:

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{J^2 A}{2\pi\gamma a_0} \vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \frac{\vec{a}_0}{a_0} \right) = - \frac{J^2 A}{2\pi\gamma a_0} \vec{n},$$

isto é, está orientado para dentro do fio condutor, pois \vec{n} é a normal para fora. Assim, o fluxo de energia que penetrou no fio num trecho de comprimento l , e que deve ser igual à energia consumida nesse trecho por unidade de tempo, vale:

$$\frac{dW}{dt} = - \int_s \vec{S} \cdot d\vec{s} = - \int_s \left(- \frac{J^2 A}{2\pi\gamma a_0} \right) \vec{n} \cdot d\vec{s} = \int_l \frac{J^2 A}{2\pi\gamma a_0} 2\pi a_0 dl = J^2 A^2 \frac{l}{A\gamma} = Ri^2,$$

onde $R = \frac{l}{A\gamma}$ é a resistência do trecho de fio considerado e $i = JA$ a intensidade da corrente que o percorre. Mas Ri^2 é potência con

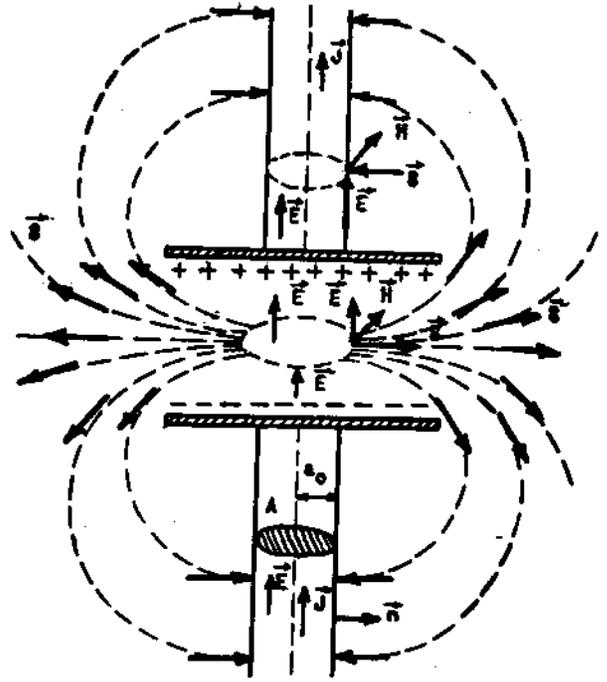


FIG. 20-3

sumida por efeito Joule no interior do fio, o que era de se esperar, pois toda a energia dispendida no condutor é transformada em calor. Assim, duas interpretações do mesmo fenômeno se encontram num mesmo resultado: se pensamos na energia como localizada nos transportadores de carga, dizemos que o gerador, ao levar a carga positiva de um potencial mais baixo para um mais alto, deu-lhe energia elétrica que será consumida por efeito Joule, transformando-se em calor, à medida que a carga percorre o fio desde a placa positiva até atingir novamente a placa negativa do gerador; se pensamos na energia como localizada no espaço, dizemos que o gerador transforma energia química, por exemplo, em energia eletromagnética, a qual é irradiada para fora, indo penetrar no condutor por sua superfície, transformando-se então em calor.

B. Caso não estacionário. Neste caso, (20-13) não é mais válida, podendo variar a energia eletromagnética existente no interior do próprio volume v . É de se esperar então que valha, em lugar da (20-14), uma relação do tipo:

$$\int_v \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv' = - \int_s \vec{S} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_v \left(\frac{dW_e}{dv} + \frac{dW_m}{dv} \right) dv' , \quad (20-16)$$

isto é, que o trabalho realizado sobre as cargas, por unidade de tempo, seja igual ao fluxo de energia eletromagnética que penetra na região, deduzida a porção desta energia que não se transforma em calor e que mantém seu caráter de energia eletromagnética. Em outras palavras, da energia que penetra na região, uma parte se transforma em trabalho, outra contribui para que aumente a quantidade de energia eletromagnética já existente na região.

Transformando o 1º termo do 2º membro de (20-16) pelo teorema de Gauss para divergência, e lembrando que a relação obtida é válida para qualquer região considerada, tem-se:

$$- \operatorname{div} \vec{S} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW_{em}}{dv} \right), \quad (20-17)$$

onde $W_{em} = W_e + W_m$ é a energia eletromagnética existente na região; isto é, o fluxo de energia que entra na região, por unidade de volume, é igual ao trabalho realizado sobre as cargas, por unidade de tempo e volume, mais o acréscimo da densidade de energia, por unidade de tempo, ocorrido na região.

Mostremos agora que (20-17) é verdadeira, isto é, que usando os resultados obtidos das equações de Maxwell, ela se transforma numa identidade, desde que mantenhamos as definições (14-3), (18-11) e (20-15) de $\frac{dW_e}{dv}$, $\frac{dW_m}{dv}$ e \vec{S} . De fato:

$$\operatorname{div} \vec{S} = \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{J}.$$

Nos meios isotrópicos e homogêneos e também nos anisotrópicos (desde que se imponham as condições $\epsilon_{ji} = \epsilon_{ij}$ e $\mu_{ji} = \mu_{ij}$) é fácil verificar que se tem:

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}),$$

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}),$$

e assim:

$$\operatorname{div} \vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J}$$

o que demonstra (20-17). Importa observar que esta equação, que

dá o balanço de energia, não era válida em nenhum estágio anterior à introdução das equações de Maxwell. Observemos ainda que apenas o campo elétrico realiza trabalho, porque, como sabemos, a força magnética é sempre perpendicular à velocidade das cargas.

20 - 4. Valores médios e campos complexos. Como já foi visto em diversos pontos dêste curso, é conveniente muitas vêzes, por simplicidade de cálculo, introduzir grandezas complexas, cujas partes reais correspondem a grandezas físicas conhecidas. Assim, por exemplo, podemos definir um vetor campo elétrico complexo $\vec{\mathcal{E}}$ e um vetor campo magnético complexo $\vec{\mathcal{H}}$, sendo então \vec{E} e \vec{H} dados, respectivamente, por suas partes reais:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \text{Re } \vec{\mathcal{E}}, \\ \vec{H} &= \text{Re } \vec{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

[Da mesma forma, podemos definir um vetor indução magnética complexo $\vec{\mathcal{B}}$, um vetor deslocamento complexo $\vec{\mathcal{D}}$, um potencial vetor complexo $\vec{\mathcal{A}}$ e um potencial escalar complexo ψ , sendo, respectivamente:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \text{Re } \vec{\mathcal{B}}, \\ \vec{D} &= \text{Re } \vec{\mathcal{D}}, \\ \vec{A} &= \text{Re } \vec{\mathcal{A}}, \\ V &= \text{Re } \psi.\end{aligned}$$

Demonstra-se facilmente que, se as equações de Maxwell e as equações (19-11), (19-12), (20-3), (20-5), (20-10) e (20-11) são satisfeitas pelos campos complexos, elas serão também satisfeitas pelos campos reais].

O vetor de Poynting \vec{S} corresponderá à parte real do vetor

de Poynting complexo \vec{S} , e valerá:

$$\vec{S} = \text{Re } \vec{S} = \text{Re } \vec{E} \wedge \text{Re } \vec{H} \quad (20-18)$$

É importante notar que:

$$\text{Re } \vec{E} \wedge \text{Re } \vec{H} \neq \text{Re } (\vec{E} \wedge \vec{H}) .$$

Procuramos agora uma relação que permita obter \vec{S} diretamente, a partir dos campos complexos. Frequentemente a variação com o tempo dos campos elétrico e magnético é senoidal; vamos então supor que se tenha:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{i\omega t} ,$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0(\vec{r}) e^{i\omega t} ,$$

onde \vec{E}_0 e \vec{H}_0 são em geral complexos, da forma:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + i\vec{E}_2 ,$$

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_1 + i\vec{H}_2 .$$

A definição (20-18) dará então:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= (\vec{E}_1 \cos \omega t - \vec{E}_2 \text{sen } \omega t) \wedge (\vec{H}_1 \cos \omega t - \vec{H}_2 \text{sen } \omega t) = \\ &= \vec{E}_1 \wedge \vec{H}_1 \cos^2 \omega t + \vec{E}_2 \wedge \vec{H}_2 \text{sen}^2 \omega t - \frac{1}{2} (\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \wedge \vec{H}_1) \text{sen}(2\omega t) . \end{aligned}$$

Os 2 primeiros termos representam um fluxo de energia que vai sempre na mesma direção; já o 3º termo representa a energia que ora vai, ora vem, conforme o sinal de $\text{sen } 2\omega t$ (Fig. 20-4). Na verdade, porém, não podemos medir o balanço de energia correspondente a

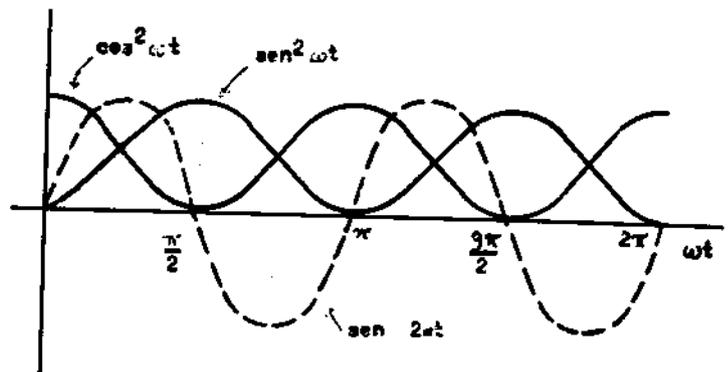


FIG. 20-4

uma só oscilação, que é extremamente rápida, mas apenas num intervalo de tempo correspondente a um grande número de oscilações. Isto é, o que medimos não é \vec{S} , e sim o seu valor médio $\langle \vec{S} \rangle$. Ora,

$$\langle \text{sen}^2 \alpha \rangle = \langle \text{cos}^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2} ,$$

$$\langle \text{sen} 2\alpha \rangle = 0 ,$$

e portanto:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} (\vec{E}_1 \wedge \vec{H}_1 + \vec{E}_2 \wedge \vec{H}_2) ,$$

isto é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}^*) \quad (20-19)$$

(onde $\vec{\mathcal{H}}^*$ é o complexo conjugado de $\vec{\mathcal{H}}$), como se pode facilmente verificar. Da mesma maneira pode-se mostrar que:

$$\left\langle \frac{\partial W_e}{\partial v} \right\rangle = \frac{1}{4} \text{Re} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}^*)$$

(em que $\vec{\mathcal{D}}^*$ é o complexo conjugado de $\vec{\mathcal{D}}$), isto é, nos meios isotrópicos:

$$\left\langle \frac{\partial W_e}{\partial v} \right\rangle = \frac{1}{4} \epsilon |\vec{\mathcal{E}}|^2 , \quad (20-20)$$

e também:

$$\left\langle \frac{dW_m}{dv} \right\rangle = \frac{1}{4} \text{Re} (\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}^*)$$

(em que $\vec{\mathcal{B}}^*$ é o complexo conjugado de $\vec{\mathcal{B}}$), isto é, nos meios isotrópicos:

$$\left\langle \frac{dW_m}{dv} \right\rangle = \frac{1}{4} \mu |\vec{\mathcal{H}}|^2 . \quad (20-21)$$

Também podemos escrever, à semelhança das igualdades (20-14)

$$\left\langle \frac{dW_{em}}{dt} \right\rangle = \int_s \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{s} \quad (20-22)$$

para o fluxo médio da energia eletromagnética que sai da superfície s .

20 - 5. Ondas de campo eletromagnético emitidas pelo dipolo oscilantes no vácuo. No parágrafo 19-4 obtivemos o campo produzido por um dipolo oscilante, como solução das equações de Maxwell. Esta solução, no entanto, não correspondia a ondas emitidas. Para obter um tipo de solução que inclua estas ondas, voltemos à análise efetuada naquele parágrafo, mas com uma alteração: utilizaremos aqui o método das funções complexas, exposto no parágrafo (20-4). Ponhamos:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \text{Re } \vec{\mathcal{P}}, \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{p}_0 e^{i\omega t}, \\ \vec{A} &= \text{Re } \vec{\mathcal{A}}, \quad \vec{\mathcal{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{F}(r)}{r} \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{F}\vec{\mathcal{P}}}{r}, \end{aligned} \quad (20-23)$$

onde \vec{p}_0 é um vetor constante, $\mathcal{F}(r)$ uma função complexa a determinar, $\vec{\mathcal{P}}(t)$ o momento dipolar complexo e $\vec{\mathcal{A}}(r, t)$ o potencial vetor complexo [compare (20-23) com (19-13)]. Procedendo de maneira análoga à do parágrafo 19-4, usando agora a equação (19-10) (IV) para campos complexos, obtemos em lugar de (19-14) a equação:

$$i\omega\mu_0\vec{\mathcal{D}} = \text{rot } \vec{\mathcal{B}} = \text{rot rot } \vec{\mathcal{A}}. \quad (20-24)$$

Mas daqui por diante mudaremos de procedimento, recorrendo agora a (20-10) que dá, para $r \neq 0$:

$$\square \vec{\mathcal{A}} = 0$$

isto é:

$$(\Delta + \epsilon_0\mu_0\omega^2)\vec{\mathcal{A}} = 0. \quad (20-25)$$

Usando a definição (20-23), virá:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{\mathcal{F}}{r} \right) \right] + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \frac{\mathcal{F}}{r} = 0 ,$$

e portanto:

$$\frac{d^2 \mathcal{F}}{dr^2} + k^2 \mathcal{F} = 0 ,$$

onde

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c_0} , \quad (20-26)$$

equação diferencial análoga a (19-15), cuja solução geral é da forma:

$$\mathcal{F} = \alpha e^{-ikr} + \beta e^{ikr} ,$$

sendo α e β constantes. Ainda aqui devemos impor a condição:

$$\mathcal{F}(0) = 1 \rightarrow \alpha + \beta = 1 .$$

Consideremos 3 casos particulares:

1^o) $\beta = 0, \alpha = 1.$

Neste caso tem-se:

$$\vec{A} = \frac{i \omega \mu_0 \vec{p}_0}{4\pi r} e^{-ik(r-c_0 t)} , \quad (20-27)$$

e portanto:

$$\vec{A} = - \frac{\omega \mu_0}{4\pi r} \vec{p}_0 \text{ sen } k(r-c_0 t) . \quad (20-28)$$

Isto é, sendo \vec{A} função de $r - c_0 t$, propaga-se como uma onda que sai do dipolo (ver parágrafo 20-1).

2^o) $\alpha = 0, \beta = 1 .$

Neste caso, tem-se:

$$\vec{A} = - \frac{\omega \mu_0}{4\pi r} \vec{p}_0 \text{ sen } k(r + c_0 t) . \quad (20-29)$$

Isto é, sendo \vec{A} função de $r + c_0 t$, propaga-se como uma onda que converge para o dipolo. Veremos no próximo parágrafo que a solução (20-28) corresponde à emissão de energia irradiada espaço afora, ao passo que a solução (20-29) corresponde ao fato de que energia converge para o dipolo, o que não tem sentido físico.

$$3^{\circ}) \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2} .$$

Neste caso, tem-se:

$$\mathcal{F}(r) = \cos kr = f(r), \quad (20-30)$$

e resultará para \vec{A} a solução já obtida no parágrafo 19-4, que, em termos de onda, corresponde a uma onda que sai do dipolo e outra igual convergindo para êle, o que pode ocorrer fisicamente, se a onda emitida se refletir a grande distância (dipolo oscilante no centro de uma grande superfície esférica perfeitamente condutora). Não haverá, neste caso, transmissão de energia, como veremos no final dêste capítulo.

Voltemos, pois, ao 1^o caso (emissão por dipolo oscilante).

De (20-27) virá:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1\omega}{r^2} \vec{p}_0 \wedge \hat{r} (1 + ikr) e^{-ik(r - c_0 t)}, \quad (20-31)$$

(onde $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$), e portanto:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega}{r^2} \vec{p}_0 \wedge \hat{r} \left[\text{sen } k(r - c_0 t) - kr \text{ cos } k(r - c_0 t) \right]$$

dá o campo magnético do dipolo oscilante.

Analogamente, de (20-24) virá:

$$\vec{c} = -\frac{1}{c_0 \omega} \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[2\vec{p}_0 (1+ikr) + (-3-3ikr+k^2 r^2) \hat{r} \wedge (\vec{p}_0 \wedge \hat{r}) \right] e^{-ik(r-c_0 t)}, \quad (20-32)$$

e portanto:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left\{ 2\vec{p}_0 [\cos k(r-c_0 t) - kr \sin k(r-c_0 t)] + \hat{r} \wedge (\vec{p}_0 \wedge \hat{r}) [(k^2 r^2 - 3) \cos k(r-c_0 t) + 3kr \sin k(r-c_0 t)] \right\}$$

dá o campo elétrico do dipolo oscilante.

Observemos que os 2 termos de \vec{B} variam como $\frac{1}{r^2}$ e $\frac{1}{r}$ respectivamente, ao passo que os termos de \vec{E} variam como $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^2}$ e $\frac{1}{r}$. Para pequenas distâncias ($r \ll \frac{c_0}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$, em que λ é o comprimento de onda da onda emitida pelo dipolo), predominam os termos em $\frac{1}{r^2}$ e $\frac{1}{r^3}$ para \vec{B} e \vec{E} , respectivamente: este é aproximadamente o caso dos campos sem indução, já tratado no parágrafo 16-4.

Para grandes distâncias ($r \gg \frac{c_0}{\omega}$), predominam os termos em $\frac{1}{r}$, e vê-se de (20-31) e (20-32) que se tem para os campos de radiação:

$$\vec{c}_r = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{r} \wedge (\vec{p}_0 \wedge \hat{r}) \frac{e^{-ik(r-c_0 t)}}{r} \quad (20-33)$$

$$\vec{B}_r = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c_0} (\vec{p}_0 \wedge \hat{r}) \frac{e^{-ik(r-c_0 t)}}{r} \quad (20-34)$$

Observemos que nessa região, denominada "zona de radiação", valem os seguintes resultados:

1º) \vec{c}_r e \vec{B}_r são perpendiculares entre si e à direção de \hat{r} (direção de propagação da onda), isto é, valem as relações:

$$\vec{E}_r \cdot \hat{r} = \vec{B}_r \cdot \hat{r} = \vec{E}_r \cdot \vec{B}_r = 0. \quad (20-35)$$

2ª) \vec{E}_r e \vec{B}_r estão relacionados da seguinte maneira:

$$\vec{E}_r = -c \hat{r} \wedge \vec{B}_r, \quad \text{ou} \quad \vec{B}_r = \frac{1}{c} \hat{r} \wedge \vec{E}_r$$

(a 2ª relação é obtida multiplicando vetorialmente por \hat{r} ambos os membros da 1ª), e portanto \vec{E}_r e \vec{H}_r se relacionam deste modo:

$$\vec{E}_r = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{r} \wedge \vec{H}_r, \quad \text{ou} \quad \vec{H}_r = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{r} \wedge \vec{E}_r. \quad (20-36)$$

Relações análogas a (20-35) e (20-36) valem para as partes reais de \vec{E}_r e \vec{H}_r , isto é, para os campos de radiação \vec{E}_r e \vec{H}_r .

A existência dessas ondas que se propagam a grandes distâncias e transmitem energia é a base do processo de transmissão de rádio e televisão.

20 - 6. Potência irradiada pelo dipolo oscilante. Para calcular a quantidade de energia emitida, por segundo, pelo dipolo oscilante, devemos preliminarmente determinar o valor médio do vetor de Poynting, levando em (20-19) os valores de \vec{E} e \vec{H} a grandes distâncias, dados por (20-33) e (20-34), tomando $\vec{B}_r = \mu_0 \vec{H}_r$. Mais simples, porém, será utilizar uma das relações (20-36), a 1ª por exemplo, para calcular:

$$\vec{E}_r \wedge \vec{H}_r^* = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\hat{r} \wedge \vec{H}_r) \wedge \vec{H}_r^* = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{H}_r \cdot \vec{H}_r^* \hat{r} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |\vec{H}_r|^2 \hat{r},$$

isto é:

$$\langle \vec{S}_r \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |\vec{H}_r|^2 \hat{r}. \quad (20-37)$$

É evidente que se tem, analogamente:

$$\langle \vec{S}_r \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\dot{\vec{C}}_r|^2 \hat{r}. \quad (20-37')$$

De (20-37) sai imediatamente:

$$\langle \vec{S}_r \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\omega^4}{c_0^2} \frac{|\vec{p}_0 \wedge \hat{r}|^2}{r^2} \hat{r},$$

isto é:

$$\langle \vec{S}_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \omega^4}{(4\pi)^2 c_0} \frac{p_0^2 \sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}, \quad (20-38)$$

onde θ é o ângulo entre \hat{r} e \vec{p}_0 (Fig. 20-5). Vemos que $\langle \vec{S}_r \rangle$ se anula na direção de \vec{p}_0 e tem valor máximo na direção perpendicular a \vec{p}_0 , isto é, o dipolo não irradia na direção da própria oscilação e irradia um máximo de energia na direção perpendicular à de seu momento. Vemos, além disso, que $\langle \vec{S}_r \rangle$ cresce com a 4ª potência da velocidade angular e com o quadrado da amplitude do dipolo, e que não depende do tempo. Além disso, não há em média acumulação de energia no espaço, o que equivale a dizer (Fig. 20-6) que a energia que entra no volume δv através da superfície δs_1 é a mesma que sai de δv através de δs_2 , sendo δs_1 e δs_2 porções das superfícies esféricas, centradas no dipolo, de raios r_1 e r_2 , correspondentes a um mesmo ângulo sólido com vértice no dipolo.

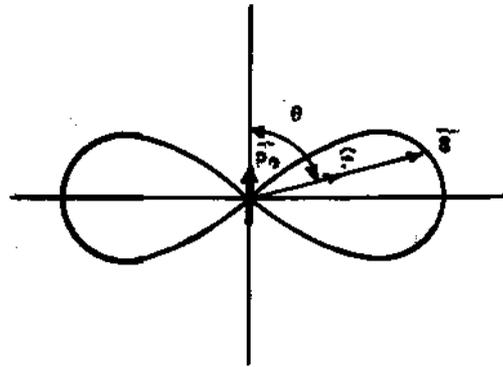


FIG. 20-5

Calculemos agora a quantidade de energia que atravessa, por segundo, uma superfície esférica de raio r , centrada no dipolo (com $r \gg p_0$) ou, em outras palavras, a potência média $\left\langle \frac{dW_{em}}{dt} \right\rangle$ irradiada pelo dipolo. Aplicando a este caso a expressão (20-22) e tomando para $\langle \vec{S}_r \rangle$ o valor dado por (20-38), virá:

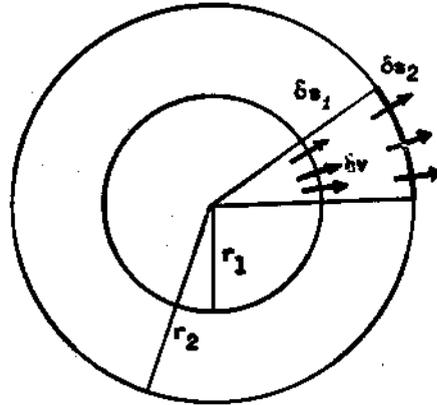


FIG. 20-6

$$\left\langle \frac{dW_{em}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\mu_0}{c_0} \omega^4 p_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

pois o elemento de superfície vale $\vec{ds} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$. Portanto:

$$\left\langle \frac{dW_{em}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^4 p_0^2}{c_0}, \quad (20-39)$$

isto é, a potência irradiada não depende do raio (para $r \gg \lambda$) da superfície esférica considerada, o que era de se prever, pelas considerações feitas anteriormente (Fig. 20-5). Podemos exprimir o valor de $\left\langle \frac{dW_{em}}{dt} \right\rangle$ em função do valor médio de \vec{p} , calculando:

$$\langle p^2 \rangle = \langle p_0^2 \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} p_0^2;$$

teremos:

$$\left\langle \frac{dW_{em}}{dt} \right\rangle = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^4 \langle p^2 \rangle}{c_0}. \quad (20-39')$$

Procuremos agora uma relação que ligue o valor médio do ve-

tor de Poynting ao valor médio da densidade de energia eletromagnética irradiada pelo dipolo, em todo o espaço. De acordo com (20-20) e (20-21), tem-se:

$$\left\langle \frac{dw_{em}}{dv} \right\rangle = \frac{1}{4} \left(\epsilon_0 |\vec{E}_R|^2 + \mu_0 |\vec{H}_R|^2 \right);$$

mas, de qualquer das relações (20-36), podemos tirar:

$$\epsilon_0 |\vec{E}_R|^2 = \mu_0 |\vec{H}_R|^2,$$

e teremos para o valor médio da densidade de energia eletromagnética, neste caso:

$$\left\langle \frac{dw_{em}}{dv} \right\rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}_R|^2 = \frac{1}{2} \mu_0 |\vec{H}_R|^2. \quad (20-40)$$

Usando, por exemplo, a 2ª das relações (20-40), vem:

$$\left\langle \frac{dw_{em}}{dv} \right\rangle = \frac{1}{2} \mu_0 |\vec{H}_R|^2 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |\vec{H}_R|^2 \right) = \frac{1}{c_0} |\langle \vec{S} \rangle|,$$

pois vale a relação (20-37). Tem-se portanto, finalmente:

$$\langle \vec{S} \rangle = \left\langle \frac{dw_{em}}{dv} \right\rangle \vec{c}_0, \quad (20-41)$$

em que $\vec{c}_0 = c_0 \hat{r}$. A interpretação de (20-41) é a seguinte: o fluxo de energia eletromagnética que sai de uma superfície δs , normal à direção \hat{r} de propagação da onda, é igual à energia eletromagnética contida num cilindro de base δs e altura h , sendo c a velocidade de propagação da onda emitida pelo dipolo.

Verifiquemos agora que, no caso de onda estacionária (dipolo oscilante colocado no centro de uma esfera metálica ôca, de raio muito grande), a potência irradiada pelo dipolo é nula. És-

te é o caso já estudado no parágrafo (19-4), tomando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ (parágrafo 20-5). De (20-30) vemos que a função $\mathcal{V}(r)$ reduz-se à função real $\cos kr$, e assim, de (20-23), tiramos para o potencial vetor complexo:

$$\vec{A} = i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 e^{i\omega t} \frac{\cos kr}{r},$$

e portanto para o vetor indução magnética complexo:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega e^{i\omega t} \text{rot } \vec{p}_0 \frac{\cos kr}{r},$$

isto é:

$$\vec{B} = i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} e^{i\omega t} \frac{\cos kr + kr \sin kr}{r^3} \vec{p}_0 \wedge \hat{r}. \quad (20-42)$$

Por outro lado, de (20-24) tiramos:

$$i\omega \epsilon_0 \vec{C} = i\omega \frac{1}{4\pi} e^{i\omega t} \text{rot} \left[\frac{\cos kr + kr \sin kr}{r^3} \vec{p}_0 \wedge \hat{r} \right]$$

e portanto, pelo cálculo do rotacional da função entre colchetes:

$$\vec{C} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} e^{i\omega t} \left[\frac{k^2 r^2 \cos kr - kr \sin kr - \cos kr}{r^3} \vec{p}_0 - \frac{k^2 r^2 \cos kr - 3kr \sin kr - 3 \cos kr}{r^3} (\hat{r} \cdot \vec{p}_0) \hat{r} \right]. \quad (20-43)$$

Vemos assim que as partes reais das expressões (20-42) e (20-43) coincidem com as expressões (19-16) e (19-17) obtidas no parágrafo

fo 19-4.

Para obter os campos de irradiação $\vec{\mathcal{E}}_r$ e $\vec{\mathcal{B}}_r$, devemos abandonar os termos da ordem de $\frac{1}{r^2}$ e $\frac{1}{r^3}$, desprezíveis a grandes distâncias em face dos termos da ordem de $\frac{1}{r}$, e teremos:

$$\vec{\mathcal{E}}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^{i\omega t} \frac{k^2 \cos kr}{r} \hat{r} \wedge (\vec{p}_0 \wedge \hat{r}),$$

$$\vec{\mathcal{B}}_r = i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} e^{i\omega t} \frac{k \sin kr}{r} (\vec{p}_0 \wedge \hat{r}).$$

Para o cálculo do valor médio do vetor de Poynting, ponhamos:

$$\vec{\mathcal{E}}_r = \vec{E}_0(r) e^{i\omega t},$$

$$\vec{\mathcal{H}}_r = i\vec{H}_0(r) e^{i\omega t},$$

sendo:

$$\vec{E}_0(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{r} \wedge (\vec{p}_0 \wedge \hat{r}) \frac{\cos kr}{r},$$

$$\vec{H}_0(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{c_0} \vec{p}_0 \wedge \hat{r} \frac{\sin kr}{r}.$$

Tem-se então, por (20-19):

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{H}}^*) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E}_0 e^{i\omega t} \wedge (-i) \vec{H}_0 e^{-i\omega t} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} (-i \vec{E}_0 \wedge \vec{H}_0) = 0, \end{aligned}$$

isto é, não há irradiação de energia.

Problemas propostos:

20-1. Dada a onda eletromagnética:

$$\vec{E} = \hat{x} E_0 \cos \omega(\sqrt{\epsilon\mu} z - t) + \hat{y} E_0 \sin \omega(\sqrt{\epsilon\mu} z - t),$$

onde E_0 é constante, calcule o campo magnético e o vetor de Poynting correspondentes (R.M.).

20-2. Dado um meio no qual $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, $\mu = \mu_0$, mas onde a polarização \vec{P} é uma dada função da posição e do tempo, $\vec{P} = \vec{P}(x, y, z, t)$, mostre que as equações de Maxwell podem ser obtidas corretamente a partir de uma única função vectorial \vec{Z} (o "vetor de Hertz"), satisfazendo às equações:

$$\nabla^2 \vec{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0},$$

$$\vec{E} = \text{rot rot } \vec{Z} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P},$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \text{rot } \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}.$$

* * *

CAPÍTULO 21

PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

21 - 1. Ondas planas monocromáticas. Seja uma onda propagando-se num meio material indefinido, na ausência de cargas e de correntes. Diz-se que ela é plana, se o campo é função de uma só coordenada espacial, x , por exemplo, isto é, se o campo é da forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 f(x, t), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 f'(x, t),$$

em que \vec{E}_0 e \vec{H}_0 são constantes, em geral complexas. Isto significa que, em cada instante, o campo assume um valor constante sobre cada plano normal a uma certa direção (a direção de propagação), que é no caso a direção do eixo dos x . Em outras palavras, as frentes de onda da onda plana (chama-se frente de onda ao lugar geométrico dos pontos em que a amplitude do campo tem valor constante) são planos perpendiculares à direção de propagação.

Uma onda plana é monocromática quando o campo é da forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 f(x) e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 f'(x) e^{i\omega t},$$

sendo ω e ω' constantes. Verifiquemos inicialmente que $\omega = \omega'$.

De fato, a equação (19-10) (III) dá:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

isto é:

$$e^{i\omega t} \operatorname{rot} \left[\vec{e}_0 f(x) \right] = -i\omega \mu \vec{H}_0 f'(x) e^{i\omega t} .$$

Se no instante $t=0$ a igualdade é verificada, isto é, se:

$$\operatorname{rot} \left[\vec{e}_0 f(x) \right] = -i\omega \mu \vec{H}_0 f'(x) , \quad (21-1)$$

ela será válida em qualquer tempo somente se $\omega = \omega'$.

Determinemos agora as funções $f(x)$ e $f'(x)$. A equação (20-3) aplicada ao campo elétrico complexo dá:

$$\vec{e}_0 \left[e^{i\omega t} \frac{d^2 f}{dx^2} - \epsilon \mu f(x) \frac{d^2}{dt^2} e^{i\omega t} \right] = 0 ,$$

isto é, a equação diferencial satisfeita por $f(x)$ é:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 , \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{c} ,$$

cujas soluções são da forma:

$$f(x) = A e^{\frac{i\omega}{c}x} + B e^{-\frac{i\omega}{c}x} .$$

Fixaremos um sentido de propagação da onda, tomando para o campo a solução particular:

$$\vec{e}(x,t) = \vec{e}_0 e^{i\omega(t-x/c)} ,$$

correspondente ao sentido positivo do eixo dos x . A outra solução particular, em $t+x/c$, corresponderia a uma onda plana que se propagasse no sentido oposto.

Analogamente, aplicando a equação (20-5) ao campo magnético complexo, verificamos que $f'(x)$ coincide com $f(x)$ e escolhendo

ainda o mesmo sentido de propagação, tem-se finalmente:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega(t-x/c)}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i\omega(t-x/c)}.$$

Em notação mais compacta, podemos fazer uso do vetor de propagação \vec{k} , cujas componentes, neste caso particular, são $(\omega/c, 0, 0)$ e cujo sentido é o de propagação. Teremos:

$$\omega(t-x/c) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}.$$

A vantagem desta notação é a sua generalidade, pois com ela poderemos representar uma onda plana propagando-se não necessariamente na direção x , mas em qualquer direção de versor \hat{u} , sendo:

$$\vec{k} = k\hat{u} = \frac{\omega}{c} \hat{u}.$$

Uma onda plana qualquer pode, então, ser expressa pelas equações:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (21-2)$$

Com estes resultados, em lugar da equação diferencial (21-1), podemos pôr:

$$\text{rot} \left(\vec{E}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) = -i\omega\mu\vec{H}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}};$$

desenvolvendo, obtemos:

$$\vec{k} \wedge \vec{E}_0 = \omega\mu\vec{H}_0;$$

ou ainda:

$$\hat{u} \wedge \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}. \quad (21-3)$$

Esta equação mostra que os campos elétrico e magnético estão em fase na onda plana que se propaga num meio indefinido e portanto, se \vec{E}_0 for real, \vec{H}_0 também o será.

Analogamente, se partirmos da equação (19-10) (IV), teremos:

$$\text{rot} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

que dará:

$$\hat{u} \wedge \vec{H} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}. \quad (21-4)$$

Das outras duas equações de Maxwell nada poderemos obter de novo. De fato, da (I) e da (II) tiramos respectivamente:

$$\operatorname{div} \left(\epsilon \vec{E}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) = 0, \quad \operatorname{div} \left(\mu \vec{H}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) = 0;$$

desenvolvendo, virá:

$$\vec{E} \cdot \hat{u} = 0, \quad \vec{H} \cdot \hat{u} = 0.$$

Mas estes resultados e ainda:

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$$

decorrem imediatamente das equações (21-3) e (21-4), obtidas a partir das duas primeiras equações de Maxwell. Eles exprimem o fato de que \vec{E} , \vec{H} e \hat{u} são ortogonais entre si, formando um triedro na disposição indicada na Fig.

21-1. Conclui-se assim que, no caso de onda plana, o sistema das equações de Maxwell é superabundante, sendo independentes apenas duas delas.

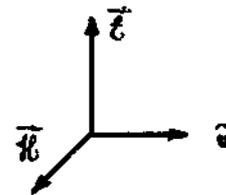


FIG. 21-1

Comparemos agora estes resultados com os obtidos no parágrafo 20-5, para a onda emitida pelo dipolo elétrico. Vemos que as equações (21-3) e (21-4) são inteiramente análogas às equações (20-36), o que significa que também os campos elétrico e magnético do dipolo na zona de radiação são ortogonais entre si, bem como à direção de propagação \hat{r} , fato expresso nas relações (20-35), formando portanto os vetores \vec{E}_r , \vec{H}_r e \hat{r} um triedro 1-

dôntico ao da Fig. 21-1. Lembremos, porém, que as ondas emitidas pelo dipolo são esféricas, com centro no dipolo (pois o campo assume, em cada instante, valor constante para cada valor constante de r), e que nelas a amplitude do campo não é constante, como na onda plana, mas decresce com a distância (é proporcional a $1/r$).

Utilizemos agora a relação (21-3), por exemplo, para, em lugar das relações (21-2), escrever:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{u} \wedge \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

e calcular o valor médio do vetor de Poynting:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vec{E}_0 \wedge \vec{H}_0^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}_0 \wedge (\hat{u} \wedge \vec{E}_0^*),$$

isto é:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}_0|^2 \hat{u}, \quad (21-5)$$

e da densidade média de energia transportada pela onda plana:

$$\left\langle \frac{dW_{em}}{dv} \right\rangle = \frac{1}{4} \epsilon \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* + \frac{1}{4} \mu \vec{H}_0 \cdot \vec{H}_0^*,$$

isto é:

$$\left\langle \frac{dW_{em}}{dv} \right\rangle = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{2} \mu |\vec{H}_0|^2, \quad (21-6)$$

em virtude de (21-4).

Das relações (21-5) e (21-6) concluímos finalmente:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}_0|^2 \hat{u} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |\vec{H}_0|^2 \hat{u} = c \left\langle \frac{dW_{em}}{dv} \right\rangle \hat{u}, \quad (21-7)$$

resultado já obtido no parágrafo 20-6 para a onda de irradiação

do dipolo elétrico [equação (20-41)]. Pode-se demonstrar, aliás, que (21-7) é válida sempre, qualquer que seja a onda considerada.

21 - 2. Condições ao contôrno. Na superfície de separação de dois meios, os campos elétrico e magnético devem sempre satisfazer a certas condições, as chamadas condições ao contôrno, que decorrem diretamente das equações de Maxwell.

A 1^a dessas condições é obtida a partir da 2^a equação de Maxwell:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 ,$$

por processo idêntico ao utilizado no parágrafo 12-3 para o caso estático, e se exprime:

$$\Delta B_n = 0 . \quad (21-8)$$

Isto é, a componente normal de \vec{B} é sempre contínua.

A 2^a condição decorre da 3^a equação de Maxwell:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

Para obtê-la, integremos ambos os membros desta equação ao longo de um contôrno Γ retangular bastante pequeno, normal à superfície de separação dos meios (1) e (2) e limitan-

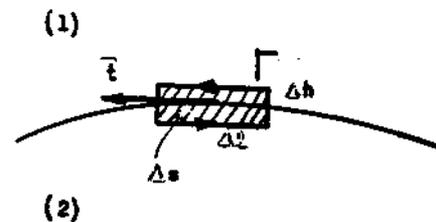


FIG. 21-2

do uma superfície plana Δs (com $\Delta h \ll \Delta l$) (Fig. 21-2). Teremos:

$$\int_{\Delta s} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \int_{\Delta s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} .$$

Fazendo agora Δh tender a zero, a última integral se anula, pois $\Delta s \rightarrow 0$ (a menos que $\vec{\Phi}$ seja infinito no ponto considerado), e a 2ª integral reduz-se à integral de linha do campo \vec{E} ao longo dos segmentos de comprimento Δl . Para Δl suficientemente pequeno, teremos:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{t} \Delta l - \vec{E}_2 \cdot \vec{t} \Delta l = 0,$$

e portanto a componente tangencial do campo elétrico é contínua:

$$\Delta E_t = 0. \quad (21-9)$$

Se sobre a interface dos dois meios não há cargas superficiais nem correntes superficiais, demonstra-se, por procedimentos análogos aos anteriores e a partir das duas outras equações de Maxwell, que a componente normal de \vec{D} e a componente tangencial de \vec{H} também são contínuas, isto é, que:

$$\Delta D_n = 0, \quad (21-10)$$

$$\Delta H_t = 0. \quad (21-11)$$

21 - 3. Leis geométricas da reflexão e da refração em meios não condutores. Quando uma onda plana incide sobre a superfície de separação de dois meios transparentes indefinidos, duas outras ondas planas aparecem, a refletida e a refratada (Fig. 21-3). Nosso problema será descrever o sistema constituído de duas ondas planas no meio (1) e uma onda plana no meio (2).

Chamemos \vec{E} , \vec{E}' e \vec{E}'' aos campos elétricos das ondas incidente, refletida e refratada, respectivamente. O campo elétrico no meio (1), \vec{E}_1 , e no meio (2), \vec{E}_2 , valem então:

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_1 &= \vec{\xi}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \vec{\xi}'_0 e^{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{r})}, \\ \vec{\xi}_2 &= \vec{\xi}''_0 e^{i(\omega'' t - \vec{k}'' \cdot \vec{r})},\end{aligned}\quad (21-12)$$

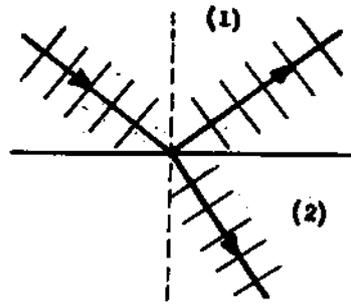


FIG. 21-3

e o campo magnético será dado por expressões análogas. Para que as expressões (21-12) constituam a solução do problema, é preciso ajustar as constantes na superfície de separação dos dois meios, isto é, é necessário que as expressões (21-12) satisfaçam às condições ao contorno.

Aplicando a condição (21-9), teremos:

$$\vec{\xi}_0 \cdot \vec{t} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{s})} + \vec{\xi}'_0 \cdot \vec{t} e^{i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{s})} = \vec{\xi}''_0 \cdot \vec{t} e^{i(\omega'' t - \vec{k}'' \cdot \vec{s})}, \quad (21-13)$$

em que \vec{s} é o raio vetor de um ponto qualquer da superfície (Fig. 21-4). Fixando um desses pontos e tomando nele a origem do sistema de referência (isto é, tomando $\vec{s} = 0$), virá:

$$\vec{\xi}_0 \cdot \vec{t} e^{i\omega t} + \vec{\xi}'_0 \cdot \vec{t} e^{i\omega' t} = \vec{\xi}''_0 \cdot \vec{t} e^{i\omega'' t};$$

se esta relação é válida no instante $t=0$, isto é, se:

$$\vec{\xi}_0 \cdot \vec{t} + \vec{\xi}'_0 \cdot \vec{t} = \vec{\xi}''_0 \cdot \vec{t}, \quad (21-14)$$

então, para ser válida em qualquer tempo, é necessário que:

$$\omega = \omega' = \omega''.$$

Fixando agora o instante inicial, virá de (21-13):

$$\vec{\xi}_0 \cdot \vec{t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{s}} + \vec{\xi}'_0 \cdot \vec{t} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{s}} = \vec{\xi}''_0 \cdot \vec{t} e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{s}};$$

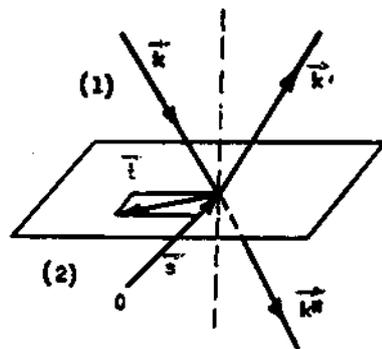


FIG. 21-4

se esta relação é válida em um dado ponto da superfície, que tomaremos como origem do referencial, isto é, se valer outra vez (21-14), então, para ser válida em qualquer ponto da superfície, é necessário que:

$$\vec{k} \cdot \vec{s} = \vec{k}' \cdot \vec{s} = \vec{k}'' \cdot \vec{s} . \quad (21-15)$$

Suponhamos agora que \vec{k} , vetor de propagação da onda incidente, esteja situado no plano xy (Fig. 21-5). Então, para um raio vetor \vec{p} sobre a superfície, paralelo ao eixo dos z, tem-se:

$$\vec{k} \cdot \vec{p} = 0 ,$$

e as relações (21-15) obrigam a que \vec{k}' e \vec{k}'' sejam também perpendiculares a \vec{p} . Isto é, os vetores de propagação das ondas incidente, refletida e refratada são coplanares. Esta é a 1ª lei de Descartes.

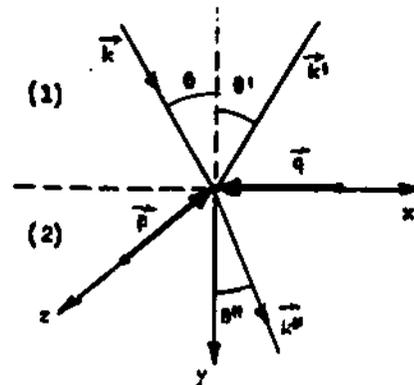


FIG. 21-5

Se agora considerarmos um raio vetor \vec{q} sobre a superfície, paralelo ao eixo dos x, teremos (Fig. 21-5):

$$\vec{k} \cdot \vec{q} = \vec{k}' \cdot \vec{q} = \vec{k}'' \cdot \vec{q} ,$$

isto é:

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \theta'' . \quad (21-16)$$

Mas!

$$k = k' = \frac{\omega}{c_1} ,$$

em que c_1 é a velocidade de propagação da onda no meio (1), e assim, da 1ª das igualdades (21-16), concluímos que:

$$\text{sen } \theta = \text{sen } \theta' \quad \therefore \quad \theta = \theta' ,$$

isto é, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Esta é a 2^a lei de Descartes.

Por outro lado, como se tem:

$$k'' = \frac{\omega}{c_2} ,$$

em que c_2 é a velocidade de propagação da onda no meio (2), das igualdades (21-16) tiramos também:

$$\frac{\text{sen } \theta}{c_1} = \frac{\text{sen } \theta''}{c_2} .$$

Isto significa que a razão entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refração é uma constante que depende dos meios considerados. Esta é a 3^a lei de Descartes. A constante que nela figura se denomina "índice de refração relativo" do meio (2) em relação ao meio (1), e se representa por n_{21} , valendo então:

$$n_{21} = \frac{c_1}{c_2} .$$

Com esta definição, a 3^a lei de Descartes ou de Snell se escreve:

$$\text{sen } \theta = n_{21} \text{ sen } \theta'' . \quad (21-17)$$

Se o 1^o meio fôr o vácuo, a constante se denomina "índice de refração absoluto" ou simplesmente "índice de refração" do meio (2), e se denota por n_2 . Tem-se evidentemente que o índice de refração do vácuo é igual a 1, e que:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_{12}} .$$

Chamando c_0 à velocidade de propagação da onda no vácuo, tem-se ainda que o índice de refração de um meio em que a onda se propaga com velocidade c vale:

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}},$$

isto é:

$$n = \sqrt{k_e k_m}. \quad (21-18)$$

Como se tem sempre $c < c_0$, conclui-se que $n > 1$.

O valor de n calculado por (21-18) coincide com o medido na Ótica para quase tôdas as substâncias, e isto é mais uma comprovação da validade da teoria de Maxwell. Constituem aparentes exceções as substâncias que já contêm dipolos elétricos, antes da atuação do campo. A água, por exemplo: sua permeabilidade relativa vale aproximadamente 1 e a constante dielétrica 81; entretanto, seu índice de refração é igual a 1,3 aproximadamente, e não $\sqrt{81} = 9$, valor previsto pela teoria. Este fato é explicado considerando que 81 é a constante dielétrica estática da água (para campos estáticos ou de baixa frequência), e que seu valor decresce à medida que aumenta a frequência do campo (devido à inércia dos dipolos). Assim, para campos de alta frequência como o da onda luminosa, a constante dielétrica da água cai aproximadamente a 1,7, o que dá bom acôrdo com a experiência.

21 - 4. Reflexão total. No fenômeno da refração, é fácil verificar de (21-17) que, quando $n_{21} > 1$, o ângulo de refração é menor do que o ângulo de incidência, ocorrendo o inverso quando

$n_{21} < 1$ (Fig. 21-6).

No 1º caso haverá sempre onda refratada, qualquer que seja o ângulo de incidência compreendido entre 0° e 90° .

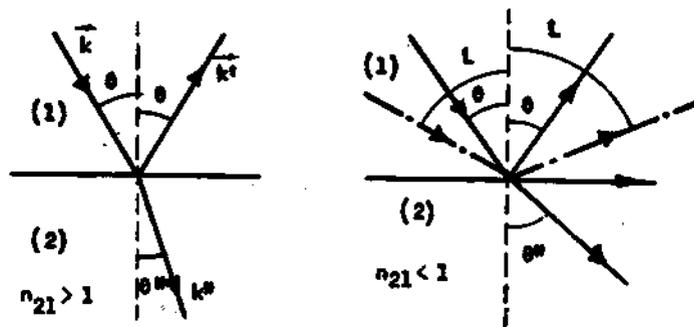


FIG. 21-6

Porém, quando o 2º

meio é menos refringente do que o 1º ($n_{21} < 1$), há um valor limite para o ângulo de incidência, acima do qual não existe onda refratada. Este ângulo limite, que denotaremos por L , é evidentemente aquele para o qual o ângulo de refração vale 90° , isto é, aquele que satisfaz à condição:

$$\frac{1}{n_{21}} \text{sen } L = 1 ,$$

como se conclui de (21-17). Para um ângulo de incidência $\theta > L$, isto é, para θ satisfazendo à condição:

$$\frac{1}{n_{21}} \text{sen } \theta > 1 ,$$

não haverá onda refratada. A este fenômeno, verificável experimentalmente, denomina-se reflexão total; vejamos como é descrito pela teoria eletromagnética.

Mostremos inicialmente que, quando $n_{21} < 1$ e $\theta > L$, k'' dado pela 3ª lei de Descartes deixa de ser um número real. De fato, se $(s_x, 0, s_z)$ são as componentes de \vec{s} (Fig. 21-7), as relações (21-15) nos dão:

$$k_x s_x = (k \sin \theta) s_x = k'' s_x ,$$

isto é:

$$k'' = k \sin \theta , \quad (21-19)$$

sendo portanto real. Ora,

se k''_y (e conseqüentemente k'') fôsse também real, te-

ríamos:

$$k''_x = k'' \sin \theta = nk \sin \theta'' = k \sin \theta ,$$

onde pusemos:

$$n = n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{k''}{k} ;$$

isto é, teríamos:

$$\sin \theta'' = \frac{\sin \theta}{n} > 1 ,$$

o que é absurdo. Logo, k''_y deve ser um número complexo, da forma:

$$k''_y = k''_R - i\kappa .$$

A 2^a das expressões (21-12) se escreverá então:

$$\vec{\xi}_2 = \vec{\xi}_0'' e^{-\kappa y} e^{-i(k_x x - k''_R y)} e^{i\omega t} ,$$

o que mostra que κ é um número positivo: de fato, se κ fôsse negativo, a amplitude da onda cresceria exponencialmente com y , o que não tem sentido físico. Portanto, o campo tende a zero quando y cresce, isto é, penetra pouco no 2^o meio.

Por outro lado, tem-se:

$$k_x''^2 + k_y''^2 = k''^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} ; \quad (21-20)$$

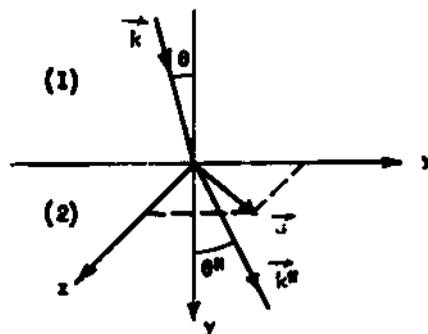


FIG. 21-7

ora, o último membro dessas relações é um número real, assim como o 1º termo do 1º membro: isso obriga a que $k_y''^2$ seja um número real ou imaginário puro; como não pode ser real, pelo que vimos, segue-se que:

$$k_R'' = 0 \rightarrow k_y'' = -i\kappa. \quad (21-21)$$

Virá então finalmente para o campo elétrico:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\kappa y} e^{i(\omega t - k_x x)},$$

isto é, haverá no 2º meio uma onda plana propagando-se na direção x , cuja amplitude decresce exponencialmente com y : não haverá transmissão de energia para o 2º meio. A existência dessa onda tangencial pode ser experimentalmente verificada com o dispositivo apresentado na Fig. 21-8,

em que um prisma de reflexão total ($L < 45^\circ$) tangencia a superfície curva de uma lente plano-convexa. Entre o prisma e a lente existe uma camada de ar cuja espessura cresce com o afastamento do ponto de tangência. Emergirá

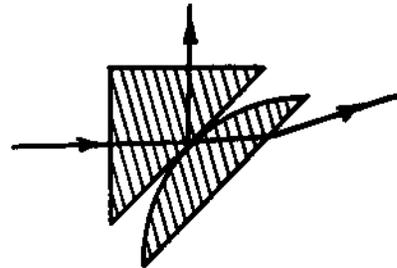


FIG. 21-8

da face plana da lente uma onda cuja intensidade decresce exponencialmente à medida em que cresce a espessura da camada de ar.

Para calcular o valor de κ , tiremos de (21-20) e (21-21):

$$k_x''^2 - \kappa^2 = \frac{c^2}{c_2^2}, \quad (21-22)$$

equação que será satisfeita pelos valores:

$$k_x'' = \frac{\omega}{c_2} \operatorname{ch} \alpha,$$

$$K = \frac{\omega}{c_2} \operatorname{sh} \alpha.$$

Usando (21-19), encontramos então para α :

$$\alpha = \operatorname{ch}^{-1} \frac{c_2}{c_1} \operatorname{sen} \theta,$$

o que determina K em função de c_1 , c_2 e θ .

De (21-19) e (21-22) também tiramos:

$$K = \omega \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}$$

21 - 5. Ondas planas polarizadas. Fórmulas de Fresnel. Diz-se que uma onda é linearmente polarizada, quando o vetor elétrico tem sempre a mesma direção; de qualquer das relações (21-3) e (21-4) concluímos que também o vetor magnético vibra sempre na mesma direção, normal à direção de \vec{E} . Qualquer onda plana pode ser decomposta em duas ondas linearmente polarizadas: uma em que \vec{E} está contido no

plano de incidência, outra em que \vec{E} é normal a esse (Fig. 21-9). Conclui-se das condições ao con-
tôro que a polari-
zação das ondas re-

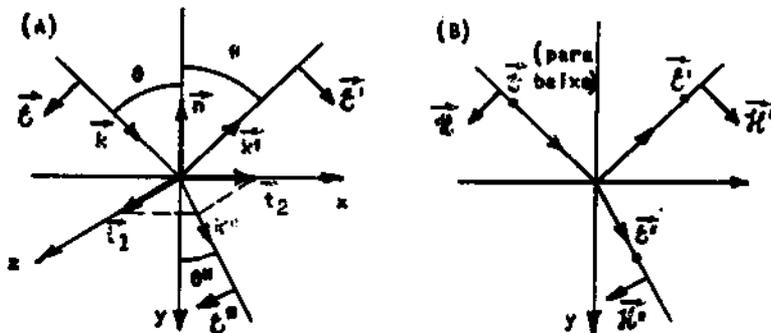


FIG. 21-9

fletida e refratada é a mesma que a da onda incidente. Estudemos agora os dois casos separadamente.

Caso A. A continuidade da componente tangencial de $\vec{\xi}$ desdobra-se em duas condições: uma, obviamente satisfeita,

$$\vec{\xi}_0 \cdot \vec{t}_1 + \vec{\xi}'_0 \cdot \vec{t}_1 = \vec{\xi}''_0 \cdot \vec{t}_1 ;$$

a outra, expressa pela equação:

$$\xi_0(\hat{e} \cdot \vec{t}_2) + \xi'_0(\hat{e}' \cdot \vec{t}_2) = \xi''_0(\hat{e}'' \cdot \vec{t}_2) ,$$

em que \hat{e} , \hat{e}' e \hat{e}'' são os versores dos campos elétricos. A condição (21-10), de continuidade da componente normal de \vec{D} , dará:

$$\epsilon_1 [\xi_0(\hat{e} \cdot \vec{n}) + \xi'_0(\hat{e}' \cdot \vec{n})] = \epsilon_2 \xi''_0(\hat{e}'' \cdot \vec{n}) .$$

Das duas últimas relações tiramos:

$$(\xi_0 - \xi'_0) \cos \theta = \xi''_0 \cos \theta'' ,$$

$$\epsilon_1(\xi_0 + \xi'_0) \sin \theta = \epsilon_2 \xi''_0 \sin \theta'' .$$

Estas duas equações são suficientes para a resolução do problema; de fato, é fácil verificar que as condições ao contorno (21-8) e (21-11) conduzem a equações equivalentes. Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\frac{\xi''_0}{\xi_0} = \frac{2 \epsilon_1 \sin \theta \cos \theta}{\epsilon_1 \sin \theta \cos \theta'' + \epsilon_2 \cos \theta \sin \theta''} ,$$

$$\frac{\xi'_0}{\xi_0} = \frac{\epsilon_2 \cos \theta \sin \theta'' - \epsilon_1 \sin \theta \cos \theta''}{\epsilon_1 \sin \theta \cos \theta'' + \epsilon_2 \cos \theta \sin \theta''} .$$

(21-23)

Lembrando agora que, para a maioria das substâncias não condutoras, tem-se $\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu_0$:

$$\frac{\text{sen } \theta}{\text{sen } \theta''} = n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}},$$

e levando êste resultado nas relações (21-23), virá finalmente:

$$\left. \frac{\xi''}{\xi_0} \right)_A = \frac{2 \cos \theta \text{ sen } \theta''}{\text{sen}(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')}, \quad (21-24)$$

$$\left. \frac{\xi'}{\xi_0} \right)_A = \frac{\cos(\theta + \theta'') \text{ sen}(\theta - \theta'')}{\text{sen}(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')}. \quad (21-25)$$

Observemos que, de (21-3), poderemos tirar:

$$\frac{H'_0}{H_0} = \frac{\xi'}{\xi_0}, \quad \frac{H''_0}{H_0} = \frac{\xi''}{\xi_0}.$$

Calculemos agora os coeficientes de reflexão e de transmissão através da superfície de separação dos dois meios. Da Fig.

21-10, vemos que o fluxo da onda incidente (refletida, refratada), através de uma área unitária dessa superfície, é o mesmo que através de $\Delta s = \cos \theta$ ($\Delta s' = \cos \theta$, $\Delta s'' = \cos \theta''$), valendo portanto, para cada onda, relativamente à mesma área (unitária):

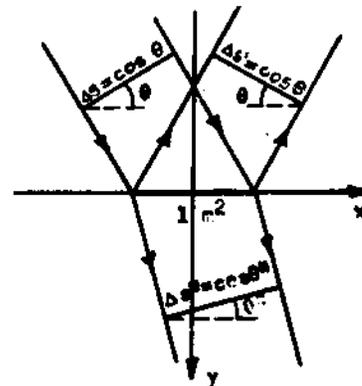


FIG. 21-10

$$\Delta \phi = \langle S \rangle \cos \theta, \quad \Delta \phi' = \langle S' \rangle \cos \theta, \quad \Delta \phi'' = \langle S'' \rangle \cos \theta''.$$

Chamando coeficiente de reflexão ρ à fração de energia incidente que é refletida e γ à fração que é transmitida, tem-se evidentemente:

$$\rho = \frac{\langle S' \rangle \cos \theta}{\langle S \rangle \cos \theta} = \frac{\langle S' \rangle}{\langle S \rangle},$$

$$\tau = \frac{\langle S'' \rangle \cos \theta''}{\langle S \rangle \cos \theta};$$

como:

$$\langle S \rangle = c \left\langle \frac{dW_{em}}{dv} \right\rangle = \frac{1}{2} c \epsilon |\mathcal{E}_0|^2 = \frac{1}{2} c \mu |\mathcal{H}_0|^2,$$

segue-se que:

$$\rho = \left| \frac{\mathcal{E}'_0}{\mathcal{E}_0} \right|^2,$$

$$\tau = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta''} \left| \frac{\mathcal{E}''_0}{\mathcal{E}_0} \right|^2,$$

pois:

$$\frac{c_2 \epsilon_2 \cos \theta''}{c_1 \epsilon_1 \cos \theta} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \frac{c_2 \cos \theta''}{c_1 \cos \theta} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \frac{\cos \theta''}{\cos \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta''} \frac{\cos \theta''}{\cos \theta}.$$

Levando nas expressões de ρ e τ os valores dados por (21-24) e (21-25), virá finalmente:

$$\rho_A = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta - \theta'')}{\operatorname{tg}^2(\theta + \theta'')}, \quad (21-26)$$

$$\tau_A = \frac{\operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}(2\theta'')}{\operatorname{sen}^2(\theta + \theta'') \cos^2(\theta - \theta'')}. \quad (21-27)$$

Verifica-se facilmente que o princípio da conservação da energia é válido, isto é, que:

$$\rho_A + \tau_A = 1.$$

Isso indica que o fluxo de energia refletida somado ao fluxo de e-

nergia incidente.

Caso B. Das equações (21-3) e (21-4) concluímos que o caso B reduz-se ao caso A, se substituirmos \vec{e}_0 por \vec{h}_0 , \vec{h}_0 por $-\vec{e}_0$ e ϵ por μ . Teremos, em vez de (21-23):

$$\frac{H'_0}{H_0} = \frac{\mu_2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta'' - \mu_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta''}{\mu_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta'' + \mu_2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta''},$$

$$\frac{H''_0}{H_0} = \frac{2 \mu_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\mu_1 \operatorname{sen} \theta \cos \theta'' + \mu_2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta''};$$

como $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$, virá:

$$\left. \frac{H'_0}{H_0} \right)_B = - \frac{\operatorname{sen}(\theta - \theta'')}{\operatorname{sen}(\theta + \theta'')}, \quad (21-28)$$

$$\left. \frac{H''_0}{H_0} \right)_B = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\operatorname{sen}(\theta + \theta'')}. \quad (21-29)$$

Ora, já vimos que:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} c \mu |H_0|^2,$$

e assim:

$$\rho = \left| \frac{H'_0}{H_0} \right|^2,$$

$$\tau = \frac{\cos \theta''}{\cos \theta} \frac{\langle S'' \rangle}{\langle S \rangle} = \frac{\cos \theta''}{\cos \theta} \frac{c_2 \mu_2}{c_1 \mu_1} \left| \frac{H''_0}{H_0} \right|^2 = \frac{\operatorname{sen}(2\theta'')}{\operatorname{sen}(2\theta)} \left| \frac{H''_0}{H_0} \right|^2.$$

Levando nas expressões de ρ e τ os valores dados por (21-28) e (21-29), virá finalmente:

$$\rho_B = \frac{\text{sen}^2(\theta - \theta'')}{\text{sen}^2(\theta + \theta'')} , \quad (21-30)$$

$$\tau_B = \frac{\text{sen}(2\theta) \text{sen}(2\theta'')}{\text{sen}^2(\theta + \theta'')} . \quad (21-31)$$

Verifica-se, ainda aqui, que:

$$\rho_B + \tau_B = 1 .$$

Mostremos agora que, na reflexão total:

$$\rho_A = \rho_B = 1 \longrightarrow \tau_A = \tau_B = 0 .$$

Já vimos que a relação:

$$\text{sen } \theta'' = \frac{\text{sen } \theta}{n}$$

só poderá ser satisfeita, quando $n < 1$ e $\theta > L$, se θ'' fôr complexo.

Ponhamos

$$\theta'' = a + ib ,$$

e teremos:

$$\text{sen } \theta'' = \text{sen } a \cos(ib) + \cos a \text{sen}(ib) .$$

Ora,

$$\cos(ib) = \frac{e^b + e^{-b}}{2} = \text{ch } b ,$$

$$\text{sen}(ib) = i \frac{e^b - e^{-b}}{2} = i \text{sh } b ;$$

portanto:

$$\text{sen } \theta'' = \text{sen } a \text{ch } b + i \cos a \text{sh } b .$$

Mas $\text{sen } \theta''$ é um número real (por ser igual a $\frac{\text{sen } \theta}{n}$), o que obriga:

$$\cos a = 0 \longrightarrow a = \frac{\pi}{2} ,$$

isto é, θ'' é da forma:

$$\theta'' = \frac{\pi}{2} + i\varphi, \quad (21-32)$$

sendo:

$$\text{sen } \theta'' = \text{ch } \varphi.$$

Vejam os agora quais os valores assumidos por ρ_A e ρ_B na reflexão total. De (21-25) e (21-32) tiramos:

$$\frac{\xi'_0}{\xi_0} = \frac{\text{tg}\left(\theta - \frac{\pi}{2} - i\varphi\right)}{\text{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{2} + i\varphi\right)} = \frac{\text{ctg}(\theta - i\varphi)}{\text{ctg}(\theta + i\varphi)} = e^{i\delta_A},$$

por ser a relação entre dois números complexos conjugados. Portanto:

$$\rho_A = \left| \frac{\xi'_0}{\xi_0} \right|^2 = 1.$$

De (21-28) e (21-32) tiramos também:

$$\frac{\eta'_0}{\eta_0} = - \frac{\text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2} - i\varphi\right)}{\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2} + i\varphi\right)} = \frac{\cos(\theta - i\varphi)}{\cos(\theta + i\varphi)} = e^{i\delta_B},$$

isto é:

$$\rho_B = \left| \frac{\eta'_0}{\eta_0} \right|^2 = 1.$$

O estudo da polarização da luz, na Ótica Física, prevê a existência de um vetor vibrante normal à direção de propagação da onda (vetor de Fresnel). Mas como definir seu plano de vibração? A experiência demonstra que, quando luz não polarizada incide sobre a interface de dois meios num ângulo particular (ângulo de incidência de Brewster, para o qual $\theta + \theta'' = 90^\circ$), a luz refletida sairá linearmente polarizada. Neste caso, convencionou-se

dizer que o plano de polarização da luz é o plano de incidência. Veremos como a teoria eletromagnética explica esses fenômenos e mostra que o vetor vibrante de Fresnel coincide com o vetor campo elétrico.

Se, na incidência de Brewster, a uma onda incidente não polarizada corresponde uma onda refletida linearmente polarizada, isso significa que uma das componentes da onda incidente reflete-se totalmente. Qual delas? Examinemos separadamente os casos A e B.

Caso B - Para que não haja onda refletida, é necessário que ρ_B , dado por (21-30), seja nulo, o que obrigará $\theta = \theta'' = 0$ (incidência normal), tornando-se indeterminada a relação $\frac{\text{sen}(\theta - \theta'')}{\text{sen}(\theta + \theta'')}$. Para levantar a indeterminação, consideremos que, para ângulos muito próximos de zero, podemos pôr $\text{sen } \alpha = \alpha$, o que dará:

$$\rho_B = \left(\frac{\theta - \theta''}{\theta + \theta''} \right)^2 = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2,$$

pois $n = \theta/\theta''$. Então, para qualquer $n \neq 1$ nunca se poderá ter $\rho_B = 0$, e portanto nem mesmo a incidência normal corresponde à incidência de Brewster, no caso de onda polarizada perpendicularmente ao plano de incidência.

Caso A. Neste caso, deveremos ter $\rho_A = 0$, e, como se conclui de (21-26), esta condição só poderá ser satisfeita se $\theta = \theta''$ (recaindo-se no caso anterior), ou se:

$$\text{tg}(\theta + \theta'') = \infty \longrightarrow \theta + \theta'' = 90^\circ.$$

Mas esta é exatamente a condição de incidência de Brewster, em

que o raio refratado é perpendicular à direção do raio refletido (haverá raio refletido se a luz incidente não for polarizada). Verifica-se, portanto, a incidência de Brewster no caso A, em que o vetor campo elétrico está no plano de incidência (Fig.

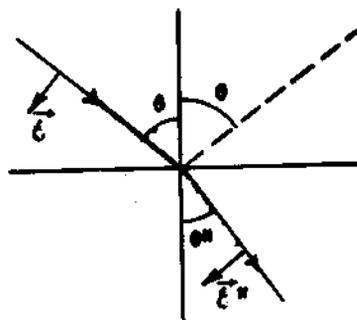


FIG. 21-11

21-11). Isso nos permite a identificação do vetor de Fresnel com o vetor campo elétrico.

As fórmulas (21-26), (21-27), (21-30) e (21-31), obtidas aqui a partir das equações de Maxwell, já eram conhecidas na Ótica Física como "fórmulas de Fresnel", nos meios dielétricos. A teoria eletromagnética também permite a obtenção das fórmulas de Fresnel para os meios condutores.

Estudemos agora a questão da diferença de fase entre as ondas refletida ou refratada, e a onda incidente. Chamemos A' , A'' , B' e B'' aos 2^{os} membros das relações (21-24), (21-25), (21-28) e (21-29); ponhamos ainda:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= E_0 e^{i\varphi_A} & \mathcal{H}_0 &= H_0 e^{i\varphi_B} \\ \mathcal{E}'_0 &= E'_0 e^{i\varphi_A} & \mathcal{H}'_0 &= H'_0 e^{i\varphi_B} \\ \mathcal{E}''_0 &= E''_0 e^{i\varphi_A} & \mathcal{H}''_0 &= H''_0 e^{i\varphi_B}, \end{aligned}$$

em que as constantes reais $E_0, \dots, H_0, \dots, \varphi_A, \dots, \varphi_B, \dots$ são todas positivas. Teremos então:

$$\begin{aligned}
 \frac{\xi'_o}{o} = A' &= \frac{E'_o}{E_o} e^{i(\varphi'_A - \varphi_A)} \\
 \frac{\xi''_o}{o} = A'' &= \frac{E''_o}{E_o} e^{i(\varphi''_A - \varphi_A)} \\
 \frac{\eta'_o}{o} = B' &= \frac{H'_o}{H_o} e^{i(\varphi'_B - \varphi_B)} \\
 \frac{\eta''_o}{o} = B'' &= \frac{H''_o}{H_o} e^{i(\varphi''_B - \varphi_B)},
 \end{aligned}
 \tag{21-33}$$

em que os argumentos das exponenciais representam as diferenças de fase entre as ondas refletida ou refratada, e a onda incidente, nos casos A e B. Como A' , A'' , B' , B'' são números reais (a não ser no caso de reflexão total, excluído desta discussão), as exponenciais são também reais, só podendo portanto assumir os valores $+1$ (quando o argumento é múltiplo de 2π), ou -1 (quando o argumento é múltiplo ímpar de π): no 1º caso, as ondas refletida ou refratada e a onda incidente estarão em fase; no 2º caso, haverá entre elas uma diferença de fase igual a π . A análise das relações (21-33), levando-se em conta as expressões de A' , A'' , B' , B'' , conduz então às seguintes conclusões:

- I) a onda refratada está sempre em fase com a onda incidente.
De fato, A'' e B'' são sempre positivos, qualquer que seja n .
- II) (a) se $n > 1 \rightarrow \theta > \theta''$, haverá uma diferença de fase igual a π entre a onda refletida e a incidente no caso B, e no caso A se $\theta + \theta'' > \frac{\pi}{2}$; elas estarão em fase no caso A se $\theta + \theta'' < \frac{\pi}{2}$.
(b) se $n < 1 \rightarrow \theta < \theta''$, haverá uma diferença de fase entre a onda refletida e a incidente no caso A se $\theta + \theta'' < \frac{\pi}{2}$; e elas

estarão em fase no caso B, e no caso A se $\theta + \theta'' > \frac{\pi}{2}$.

* * *

Problemas propostos:

- 21-1. A Terra recebe do Sol cêrca de 1300 W/m^2 de energia radiante. Admitindo que essa energia se transmite em forma de onda monocromática polarizada, e admitindo incidência normal, calcule as amplitudes dos campos elétrico e magnético da luz solar (R.M.).
- 21-2. Dada uma onda plana caracterizada por E_x e H_y , propagando-se na direção positiva do eixo dos z , mostre que se pode tomar o potencial escalar $\varphi = 0$, e encontre um valor possível para o potencial vetor \vec{A} . Certifique-se de que a condição de Lorentz é satisfeita (R.M.).
- 21-3. (a) Admitindo que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, e usando a lei de Snell Descartes (21-17), reescreva as equações (21-23) em termos dos índices de refração e de θ ; em outras palavras, elimine θ'' das equações. (b) Use os resultados encontrados para discutir a reflexão e a transmissão na interface de dois dielétricos, no caso em que $n_2 < n_1$ e $\sin \theta = n_2/n_1$ (R.M.).
- 21-4. Um feixe de luz monocromática (frequência ω) incide no vácuo perpendicularmente a uma camada de índice de refração $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$. A espessura da camada é igual a d . Calcule o coeficiente de reflexão como função de d e de n

(Sugestão: admita duas ondas propagando-se em sentidos opostos dentro da camada) (R.M.).

* * *

CAPÍTULO 22

ABSORÇÃO DE ENERGIA ELETROMAGNÉTICA

22 - 1. Espalhamento. Seja uma onda plana propagando-se na direção \hat{u} , linearmente polarizada na direção z , e suponhamos que ela atinge um átomo cujo núcleo tenha carga e . O átomo se constituirá num dipolo, que descreveremos como uma carga positiva fixa na origem, e uma carga negativa que pode mover-se numa direção \vec{r} qualquer (Fig. 22-1).

Sabemos que, se m é a massa do elétron, então a força que atua sobre ele vale:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E} - K\vec{r} - \lambda \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (22-1)$$

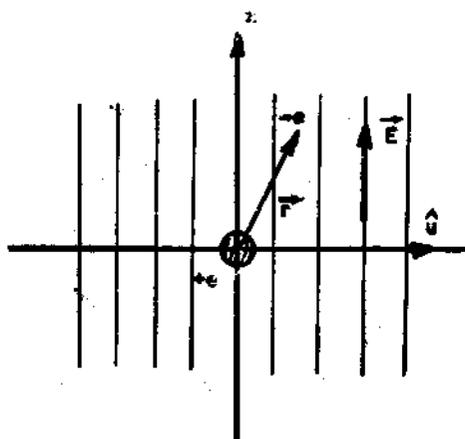


FIG. 22-1

onde o 1º termo do último membro representa a força elétrica de restauração, e o 3º termo a força de reação viscosa; a força magnética é desprezível neste caso porque a velocidade do elétron é pequena. Poremos por conveniência:

$$\lambda = mg,$$

$$K = m\omega_0^2$$

em que ω_0 é a frequência angular própria do elétron.

A força de resistência viscosa compõe-se de 2 termos:

- I) força devida a colisões entre átomos: $g = g_0$, independente da velocidade.
- II) força de reação da radiação sobre o elétron, que designaremos por \vec{R} (v. "Introdução à teoria atômica da matéria", de J. Leite Lopes, cap. V, par. V, 5), e que é da forma:

$$\vec{R} = a \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3} .$$

Esta força acarreta um descréscimo na amplitude de oscilação do elétron, e interpreta o fato de que, ao emitir energia, o elétron perde energia. Como o movimento é quase-periódico (isto é, a perda de energia por período é muito pequena em comparação com a energia inicial do elétron), podemos admitir que a equação (22-1), na ausência do campo elétrico:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + K\vec{r} = g_0 d\vec{r}$$

é, em primeira aproximação, substituível pela equação do oscilador puro:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + K\vec{r} \approx 0 ,$$

que dá:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \approx - \frac{K}{m} \vec{r} = - \omega_0^2 \vec{r} .$$

Isto é, em segunda aproximação, tem-se:

$$\vec{R} = - a \omega_0^2 \frac{d\vec{r}}{dt},$$

e portanto:

$$g = g_0 + a \omega_0^2.$$

Chamando \hat{e} ao versor do campo elétrico, tem-se:

$$\vec{E} = E(0, t) \hat{e},$$

(porque \vec{E} é, por hipótese, uniforme, não dependendo de \vec{r}), e para as oscilações forçadas (em presença do campo \vec{E}):

$$\vec{r} = z \hat{e}.$$

Assim sendo, a equação (22-1) se escreve:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + g \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = - \frac{e}{m} E. \quad (22-2)$$

Em notação complexa, ponhamos:

$$\vec{\xi} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} = \xi \hat{e}, \quad Z = z_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = Z_0 e^{i\omega t},$$

em que ω é a frequência angular do campo, e φ a diferença de fase entre a oscilação do campo e a do elétron. A equação (22-2) assumirá então a forma:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + g \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z = - \frac{e}{m} \xi.$$

Desenvolvendo, vem:

$$z_0 e^{-i\varphi} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega g \right] = - \frac{e}{m} E_0,$$

isto é:

$$z_0 = z_0 e^{-i\varphi} = \frac{-\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega g},$$

sendo:

$$z = \text{Re } Z = z_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

onde, portanto:

$$\text{tg } \varphi = \frac{g\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{(g_0 + a\omega_0^2)}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (22-3)$$

$$z_0 = \frac{-\frac{e}{m} E_0}{\sqrt{g^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}. \quad (22-4)$$

Isto é, o elétron oscila na direção do eixo dos z , com a frequência ω da onda incidente, e com um atraso de fase φ , dado por (22-3), em relação ao campo elétrico, sendo a amplitude de sua oscilação proporcional à amplitude do campo elétrico. Vemos ainda de (22-4) que a amplitude do movimento do elétron será máxima quando a frequência da onda incidente coincidir com a frequência própria do elétron (ressonância).

O dipolo oscilante, formado em consequência da onda plana incidente, irá, por sua vez, irradiar em todas as direções, e essa onda "espalhada" irá sobrepor-se, em todo o espaço, à onda plana previamente existente. Para o cálculo da energia irradiada pelo dipolo e da seção de choque de espalhamento, determinemos inicialmente o momento dipolar:

$$p = -ez = -ez_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

ou, em forma complexa:

$$\varphi = -eZ = \frac{\frac{e^2}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + ig\omega} .$$

Aplicando (20-39'), que dá a potência média emitida pelo dipolo elétrico, estudado no capítulo anterior, teremos:

$$\left\langle \frac{dW_{\text{esp}}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^4}{c} e^2 z_0^2 ,$$

pois:

$$\langle z \rangle^2 = \frac{1}{2} z_0^2 .$$

Sendo z_0 dado por (22-4), virá:

$$\left\langle \frac{dW_{\text{esp}}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{6\pi} \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \omega^4 \frac{e^4}{c^2 m^2} \frac{\langle S_{\text{inc}} \rangle}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2 \omega^2} ,$$

onde:

$$\langle S_{\text{inc}} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

é a intensidade média da luz incidente. A seção de choque de espalhamento (razão entre a intensidade da onda espalhada e a da onda incidente) valerá então:

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} \frac{e^4}{\epsilon_0^2 m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2 \omega^2} ,$$

pois $\frac{\mu_0}{\epsilon_0} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\epsilon_0^2} = \frac{1}{c^2 \epsilon_0^2}$. Se admitirmos que a carga do elétron é superficial, e que sua energia de repouso é de origem puramente eletromagnética, teremos:

$$mc^2 = \frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 r_0} ,$$

o que dará para r_0 (raio do elétron):

$$r_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2} ;$$

levando êste resultado na expressão de σ , teremos finalmente:

$$\sigma = \frac{32}{3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2} (\pi r_0^2) , \quad (22-6)$$

sendo πr_0^2 a área da seção equatorial do elétron.

Consideremos agora 3 casos importantes:

1^o) Espalhamento de Rayleigh - Ocorre quando a frequência da onda incidente é muito menor do que a frequência própria do átomo difusor, isto é, quando se tem:

$$\omega \ll \omega_0 .$$

Neste caso, a expressão (22-6) reduz-se a:

$$\sigma \approx \frac{32}{3} \frac{\pi r_0^2}{\omega_0^4} \omega^4 ,$$

isto é, a seção de choque é proporcional à 4^a potência da frequência angular da onda incidente. Lord Rayleigh encontrou esta fórmula ao tentar descobrir uma explicação para a cor do céu. Ela se aplica, de fato, a êste caso, porque a frequência da luz visível é muito inferior às frequências próprias dos átomos da atmosfera (as quais são diversas, na realidade, mas tôdas na faixa do ultra-violeta). Assim é que as luzes azul e violeta, sendo as de maior frequência do espectro, são as mais espalhadas, deter-

minando a côr do céu durante o dia. Já no nascente e no poente, por ser mais espessa a camada atmosférica atravessada pela luz solar (Fig. 22-2), o azul é espalhado quase completamente, e só as luzes da gama do vermelho atingem o observador.

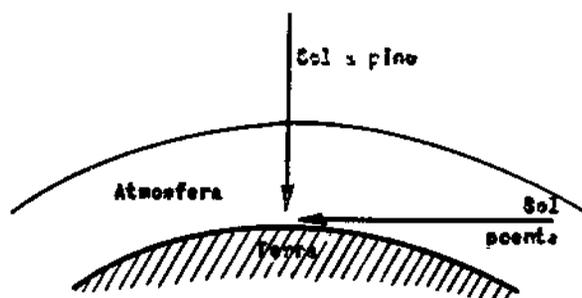


Fig. 22-2

2º) Espalhamento de Thompson. Ocorre quando se tem:

$$\omega \gg \omega_0 .$$

Neste caso, a expressão (22-6) reduz-se a:

$$\sigma \approx \frac{32}{3} \pi r_0^2 ,$$

(fórmula de Thompson), isto é, a seção de choque é independente da frequência. O fenômeno é observado na incidência de raios X sobre a maior parte das substâncias, ou de raios ultra-violetas sobre algumas substâncias, cujos átomos têm suas frequências características próximas do vermelho.

3º) Espalhamento de ressonância (fluorescência) - Ocorre quando se tem:

$$\omega \approx \omega_0 .$$

Pode ser observado colocando-se vapor de sódio nas proximidades de uma fonte de luz de sódio; o vapor iluminado por esta fonte ficará excepcionalmente brilhante (fluorescente).

De (22-6) vemos que neste caso σ admite um máximo agudo para $\omega = \omega_0$, da ordem de $(\omega_0^2/g^2) r_0^2 \gg 1$, caindo rapidamente para valores menores e maiores do que ω_0 (Fig. 22-3).

O fenômeno da ressonância, observável experimentalmente, é mais uma confirmação da natureza eletromagnética da luz. Também o é o fato de que, conforme se verifica ainda experimentalmente, o dipolo não emite radiação

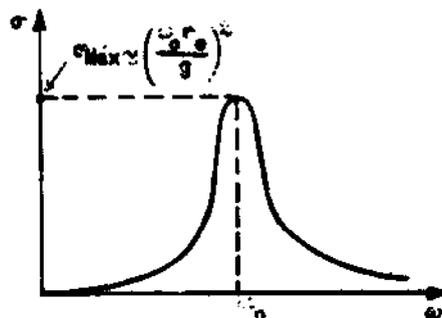


FIG. 22-3

ção na direção de seu momento (que é a direção do vetor vibrante de Fresnel), emitindo um máximo de energia na direção que lhe é ortogonal. A teoria eletromagnética conduz exatamente ao mesmo resultado, como vimos no parágrafo 20-6, ficando mais uma vez identificados o vetor de Fresnel e o vetor campo elétrico.

22 - 2. Absorção e dispersão nos gases. No parágrafo anterior, estudamos o efeito produzido por uma onda eletromagnética incidindo sobre um átomo isolado. Sabemos, entretanto, que na matéria não há átomos isolados, e que portanto foi desprezado implicitamente o efeito produzido, sobre o átomo estudado, pelo campo resultante da polarização dos átomos mais próximos. Esta aproximação não é válida para sólidos ou líquidos, em que os átomos interagem fortemente. Mas pode ser corretamente empregada no caso dos gases, em que as interações atômicas são desprezíveis, e isso justifica a limitação dos exemplos apresentados no parágrafo anterior, referentes exclusivamente a gases. Veremos então

como se comporta um gas na sua totalidade, em presença de radiações eletromagnéticas.

Se uma onda polarizada atravessa um gas, cada átomo se constituirá num dipolo, de momento:

$$\vec{p} = p \hat{e} ,$$

em que \hat{e} é o versor do campo elétrico. O gas poderá ser constituído de átomos de diferentes tipos, ou de átomos de um mesmo tipo, mas com diversas frequências características. Chame-mos N_r ao número de átomos, por unidade de volume, que oscilam com a mesma frequência característica ω_r ($r=1, 2 \dots$, abrangendo todo o espectro de emissão do gas). A teoria quântica determina precisamente o valor da fração:

$$f_r = \frac{N_r}{N} ,$$

em que N é o número total de átomos do gas. O momento dipolar total do gas, em forma complexa, será então, em virtude de (22-5) e (13-9),

$$\vec{P} = \sum_r N_r \frac{e^2/m^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + ig_r \omega} \vec{E} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} , \quad (22-7)$$

sendo $\vec{P} = \Re \vec{P}$. A constante (complexa, de proporcionalidade entre \vec{P} e \vec{E} , que fizemos igual a $\epsilon_0 \chi_e$, estará ligada ao índice de refração complexo \mathcal{N} [por analogia com (13-10)] pela fórmula:

$$\mathcal{N}^2 = 1 + \chi_e$$

(pois $n^2 = k_e k_m \simeq k_e$). Sendo $|\chi_e| \ll 1$, podemos pôr:

$$\mathcal{N} \approx 1 + \frac{1}{2} \chi_e = n - iK. \quad (22-8)$$

Suponhamos agora que a onda se propaga na direção do eixo dos x , no sentido positivo; então o campo elétrico no interior do gas é da forma:

$$\vec{E} = \text{Re } \vec{t}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega x}{c_0}\right)},$$

isto é:

$$\vec{E} = \text{Re } \vec{t}_0 e^{-K\frac{\omega x}{c_0}} e^{i\left(\omega t - \frac{\omega x}{c_0}\right)},$$

e portanto a amplitude da onda irá diminuindo progressivamente à medida que ela fôr penetrando no interior do gas (pois $K > 0$, como veremos). A êste fenômeno se denomina absorção. Se admitirmos que o gas está contido num volume limitado por duas superfícies planas or-

togonais ao eixo dos x , passando pelos pontos $x = x_1$ e $x = x_2$ (Fig. 22-4), então a amplitude de $|\vec{t}_0|$ da onda valerá nas 3 regiões:

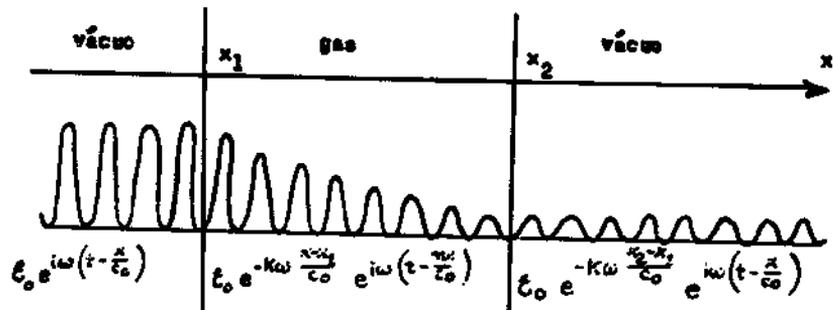


FIG. 22-4

$$|\vec{t}_0| = \begin{cases} E_0 & , x_1 > x \text{ (vácuo)} \\ E_0 e^{-K\omega \frac{x-x_1}{c_0}} & , x_1 < x < x_2 \text{ (gas)} \\ E_0 e^{-K\omega \frac{x_2-x_1}{c_0}} & , x > x_2 \text{ (vácuo)} \end{cases}$$

Isto é, a onda sairá da camada gasosa com um decréscimo exponencial de amplitude, tanto maior quanto mais espessa fôr a camada.

De (22-7) e (22-8) tiramos:

$$n = 1 + \frac{1}{2} \sum_r N_r \frac{e^2/m\epsilon_0}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + g_r^2 \omega^2} (\omega_r^2 - \omega^2), \quad (22-9)$$

$$K = \omega \sum_r g_r N_r \frac{e^2/m\epsilon_0}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + g_r^2 \omega^2} > 0. \quad (22-10)$$

A fórmula (22-9) define o índice de refração anômalo, assim chamado porque depende da frequência da onda incidente; se esta fôr policromática, cada componente terá no meio sua velocidade e sua direção de propagação particulares: a êste fenômeno se denomina dispersão. À constante $2K\omega/c_0$, com K dado por (22-10) e que também depende da frequência, se denomina coeficiente de absorção.

A Fig. 22-5 mostra o comportamento de n e K em função da frequência ω da onda incidente. O trecho assinalado no gráfico de n corresponde a uma zona de dispersão normal, em que n cresce quando ω cresce, e na qual se verifica pequena absorção. Na

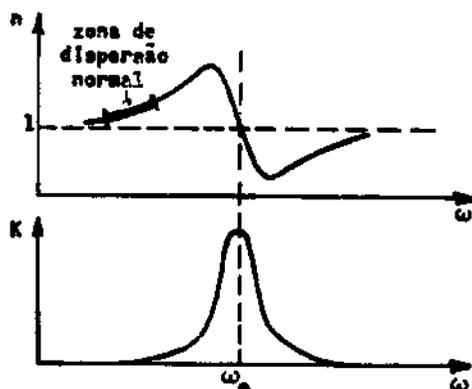


FIG. 22-5

região do visível, o desvio angular cresce do vermelho para o violeta, e o espectro da luz branca assume o aspecto habitual.

Os picos do gráfico de K indicam as regiões de dispersão anômala (ressonância), estando a largura desses picos ligada ao valor de g_r . As substâncias em que a ressonância se verifica na região do visível exibem o espectro invertido (do violeta para o vermelho), donde a denominação atribuída ao fenômeno.

Os fatos que acabam de ser examinados vieram confirmar, com fundamentos indiscutíveis, a hipótese de Maxwell sobre a natureza eletromagnética da luz.

* * *

Problema proposto:

22-1. Prove que, no caso de dispersão anômala em gases, os valores máximo e mínimo de n ocorrem nas posições em que o coeficiente de absorção alcança a metade de seu valor máximo. Obtenha a relação entre g_r e a meia largura da banda de absorção. Admita $g_r/\omega_r \ll 1$ (S.F.).

* * *