

MONOGRAFIAS DE FÍSICA

XV

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS I

Propagação em Meios Homogêneos e Isotrópicos  
Reflexão e Refração

por

H. M. Nussenzveig

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1963



INTRODUÇÃO .....	1
CÁPÍTULO 1 - PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM MEIOS HOMOGENEOS E ISOTRÓPICOS .....	11
1.1. Equações Básicas da Teoria Eletromagnética .....	11
1.1(a). As Equações de Maxwell .....	11
1.1(b). As Equações Constitutivas .....	15
1.1(c). As Condições de Contorno .....	17
1.1(d). O Balanço de Energia .....	23
1.1(e). O Vetor de Poynting Complexo .....	27
1.2. Propagação de Ondas em Meios Transparentes .....	30
1.2(a). A Equação de Ondas e o Índice de Refração .....	30
1.2(b). Ondas Eletromagnéticas Planas .....	35
1.2(c). Ondas Planas Monocromáticas. Polarização .....	41
1.3. Propagação Num Meio Condutor .....	52
1.3(a). A Equação do Telegrafo .....	52
1.3(b). Soluções Monocromáticas. Índice de Refração Complexo .....	56
1.3(c). Efeito Pelicular .....	62
1.3(d). Teoria do Efeito Pelicular .....	66
1.4. Noções sobre Supercondutividade .....	79
1.4(a). O Efeito Meissner-Ochsenfeld .....	79
1.4(b). As Equações de London .....	84
1.4(c). Penetração do Campo Magnético Num Supercondutor .....	90
1.4(d). As Correntes Persistentes .....	93
APÊNDICE 1A - A EQUAÇÃO DE ONDAS UNIDIMENSIONAL .....	98
APÊNDICE 1B - SÉRIE E INTEGRAL DE FOURIER .....	105
CÁPÍTULO II - REFLEXÃO E REFRAÇÃO .....	121
2.1. Dois Meios Transparentes .....	121
2.1(a). As Leis da Reflexão e da Refração .....	121
2.1(b). As Fórmulas de Fresnel .....	126
2.1(c). Reflexividade e Transmissividade .....	135
2.1(d). Polarização por Reflexão .....	144
2.1(e). Reflexão Total .....	152
2.1(f). Penetração da Luz no Meio Menos Denso .....	155
2.1(g). Produção de Luz Elipticamente ou Circularmente Polarizada .....	161
2.2. Reflexão Metálica .....	164
2.2(a). Incidência Perpendicular .....	164
2.2(b). Incidência Obliqua .....	169

## INTRODUÇÃO

A teoria eletromagnética da luz, que estudaremos neste curso, foi proposta por Maxwell, há cêrca de um século. A maioria dos fenômenos óticos de que trataremos, no entanto, já era conhecida muito antes dessa época.

A lei da reflexão e o fenômeno da refração eram conhecidos dos antigos gregos (Euclides, Arquimedes). As teorias da visão e da natureza da luz atribuíam aos objetos visíveis uma espécie de radioatividade, admitindo que a imagem dêsses objetos era por êles projetada como uma membrana, reproduzindo exatamente a forma do objeto e conservando-a até atingir a vista. Segundo outras teorias, os raios luminosos seriam emitidos pelo ôlho e refletidos pelos objetos.

A lei da refração foi descoberta experimentalmente por Snell em 1621 e os primeiros fenômenos de interferência, as côres de lâminas delgadas, por Boyle e Hooke. A existência da difração foi primeiro verificada por Grimaldi, que observou desvios da propagação retilínea e a penetração da luz na região da sombra geométrica de um objeto com cantos agudos, formando franjas coloridas (1665). Em 1666, Newton descobriu a decomposição espectral da luz branca pelo prisma. A "estranha e maravilhosa" (como era chamada naquela época) dupla refração do espato da Islândia (cristal de  $\text{CaCO}_3$ ) foi observada por Bartholinus (1669). Em 1675, Römer descobriu que a luz se propaga com velocidade finita e mediu essa velocidade, a partir de observações de eclipses dos satélites de Júpiter.

Os principais fenômenos óticos já eram, portanto, pelo menos qualitativamente conhecidos quando foram elaboradas as duas teorias rivais sô

bre a natureza da luz: a teoria ondulatória, apresentada por Huygens em seu "Tratado sobre a Luz" (1690) e a teoria corpuscular, desenvolvida na "Ótica" de Newton (1704).

Cada uma dessas teorias permitia explicar um certo número de fenômenos, mas encontrava dificuldades na explicação de outros. Assim, por exemplo, a propagação retilínea da luz se explicava facilmente pela teoria corpuscular. Entretanto, parecia difícil explicá-la pela teoria ondulatória (esta era uma das objeções que Newton lhe fazia). Com efeito, as ondas sonoras, cujas propriedades eram mais familiares naquela época, contornam os obstáculos. A solução desta dificuldade somente foi encontrada no princípio do século XIX: as ondas luminosas, ao contrário das ondas sonoras, têm comprimentos de onda muito menores do que as dimensões dos obstáculos que encontram em sua propagação. Daí decorre, conforme veremos no capítulo 7, que os desvios da propagação retilínea são muito pequenos no caso da luz.

A independência dos raios luminosos pode ser explicada tanto pela teoria ondulatória (duas ondas se cruzam sem que sua propagação ulterior seja afetada) como pela teoria corpuscular, desde que se admita que os corpúsculos luminosos são suficientemente pequenos para que se possam desprezar as colisões entre eles. É curioso que Huygens via aqui uma objeção à teoria corpuscular: duas pessoas não poderiam ver-se mutuamente os olhos, pois os corpúsculos que vão e os que vêm colidiriam entre si.

A teoria corpuscular explicava a reflexão e a refração pela existência de forças atuando sobre os corpúsculos na superfície de separação de dois meios. Tais forças só alterariam a componente normal da velocidade, invertendo-a no caso da reflexão e aumentando o seu valor na passagem

de um meio óticamente menos denso a outro mais denso. Isto permite explicar as leis da reflexão e da refração. Com efeito, sejam  $v_t$ ,  $v_n$  e  $v'_t$ ,  $v'_n$  as componentes tangencial e normal da velocidade da luz, antes e depois de chegar à superfície de separação, respectivamente. Teremos então, para a reflexão (fig. I.1(a)),

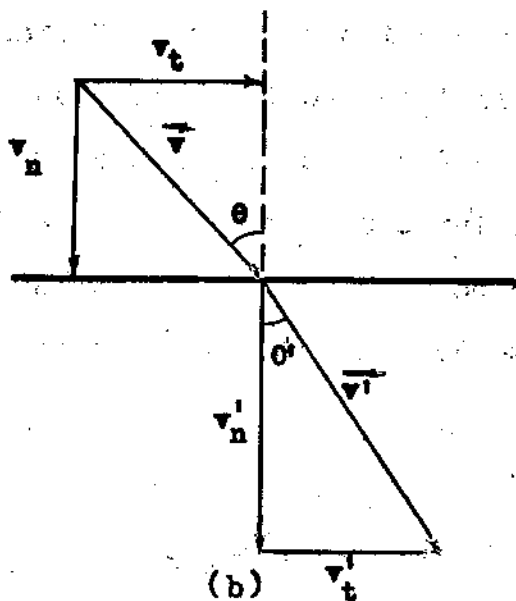
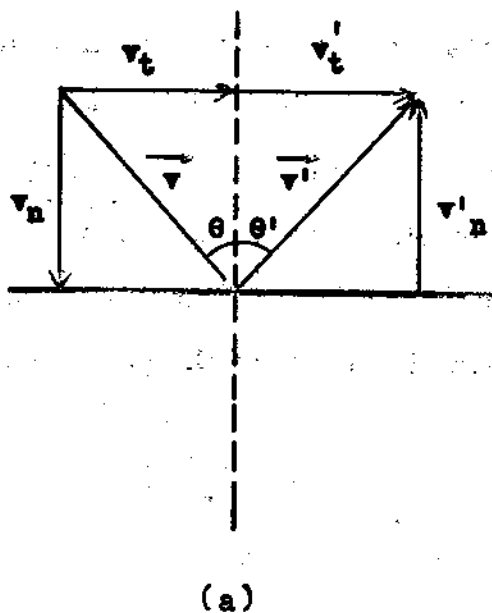


Fig. I.1: As leis da reflexão (a) e da refração (b) segundo a teoria corpuscular.

$$v'_t = v_t, \text{ ou seja } v' \sin \theta' = v \sin \theta,$$

$$v'_n = -v_n, \text{ ou seja } v' \cos \theta' = v \cos \theta,$$

o que dá

$$\theta' = \theta.$$

Para a refração, fica (fig. I.1(b))

$$v'_t = v_t, \text{ ou seja } v' \sin \theta' = v \sin \theta,$$

$$v'_n > v_n, \text{ ou seja } v' \cos \theta' > v \cos \theta,$$

de modo que  $\theta' < \theta$  quando  $v' > v$ , e

$$\frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \frac{v}{v'}. \quad (1)$$

Como vemos, obtém-se a lei da refração, desde que se admita que a velocidade da luz é maior num meio óticamente mais denso.

A teoria ondulatória, tal como foi formulada por Huygens, descrevia a luz como uma sucessão de pulsos transmitindo-se através do éter. Este era concebido como sendo formado de partículas muito pequenas, através das quais a luz se transmitiria, tal como um impulso através de uma cadeia de esferas muito duras em contacto. Para descrever a propagação, Huygens introduziu o seu célebre Princípio, segundo o qual cada ponto atingido por uma frente de onda AB (ver fig. I.2) pode ser considerado como fonte de uma onda esférica secundária. A frente de onda CD num instan-

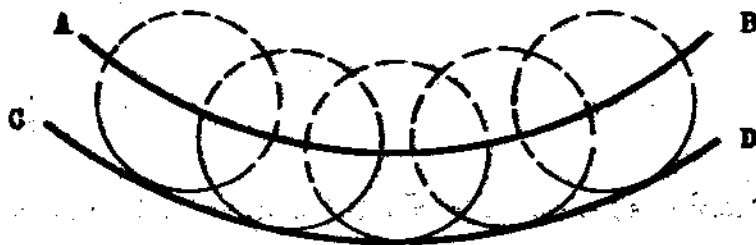


Fig. I.2: Ilustração do Princípio de Huygens.

te ulterior obtém-se tomando a envoltória de tôdas as ondas secundárias originadas dos pontos de AB. Como o auxílio dêsse Princípio, podemos explicar as leis da reflexão e da refração, conforme mostra a fig. I.3. Em (a), uma frente de onda AB incide sobre a superfície de separação segundo

um ângulo  $\theta$ . É fácil ver que a frente de onda refletida CD, construída a

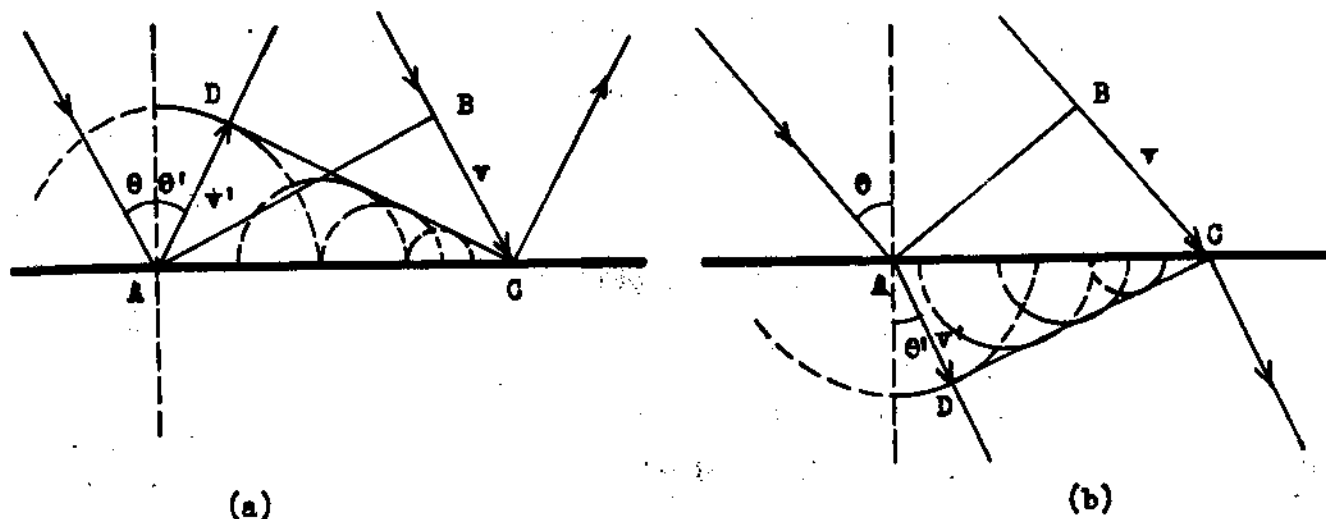


Fig. I.3: As leis da reflexão (a) e da refração (b) segundo a teoria ondulatória.

partir do Princípio de Huygens, obedece à lei da reflexão:

$$\theta' = \theta.$$

Em (b), obtemos

$$AC = v/\text{sen } \theta = v'/\text{sen } \theta',$$

o que dá

$$\text{sen } \theta' / \text{sen } \theta = v' / v. \quad (2)$$

Obtém-se portanto a relação de Snell, mas o segundo membro da (2) é o inverso do da (1). É preciso admitir, portanto, que a velocidade da luz é menor num meio óticamente mais denso, contrariamente ao resultado obtido pela teoria corpuscular.

É bem sabido que a luz que atinge a superfície de separação entre dois meios não sofre geralmente reflexão ou transmissão totais: é parcialmente refletida e parcialmente transmitida. Pela teoria ondulatória,

isto é facilmente compreensível, pois a onda deve continuar a propagar-se em ambos os meios. Newton explicou êste fenômeno pela teoria corpuscular com o auxílio dos conceitos de "acessos de fácil reflexão" e "acessos de fácil transmissão" \* dos corpúsculos. Êstes conceitos lhe foram sugeridos pela experiência dos anéis de Newton: os anéis claros e escuros corresponderiam a alternâncias de transmissão e reflexão da luz. A periodicidade dos anéis levou-o a formular a hipótese de que os corpúsculos luminosos excitassem vibrações no meio onde se propagam (assim como uma pedra lançada à água produz ondas na superfície). Estas vibrações se transmitiam ao longo dos raios luminosos e atuariam sobre os corpúsculos, produzindo neles, alternadamente, "acessos de fácil reflexão" e "acessos de fácil transmissão". Um acesso de fácil reflexão seria um estado tal que o corpúsculo, ao chegar à superfície, seria refletido; num acesso de fácil transmissão, êle seria transmitido. O intervalo entre dois acessos de mesma natureza daria o período da vibração.

\* As diferentes cores estariam associadas a corpúsculos de tamanhos diferentes, o que explicaria a diferença de índices de refração. As vibrações correspondentes também teriam períodos diferentes, o que foi utilizado por Newton para explicar as franjas coloridas em lâminas delgadas. Medindo o espaçamento entre as franjas êle chegou mesmo a determinar, com bastante precisão, o comprimento de onda das vibrações. A difração se explicaria, na teoria corpuscular, por uma ação à distância do objeto difratante sobre os corpúsculos luminosos.

Os efeitos de polarização (que já haviam sido observados com a luz transmitida pelo espatto da Islândia) mostravam a possibilidade de uma

---

\* Em inglês, "fits of easy reflection" e "fits of easy transmission".



falta de simetria axial em tórno da direção de um raio luminoso, como se os raios pudessem ter "lados". Esta era uma das principais objeções de Newton à teoria ondulatória, pois achava que ela não poderia explicar este fenômeno: naquela época, somente eram familiares as ondas longitudinais, como as de som. Para explicar os efeitos de polarização, Newton admitiu que houvesse uma assimetria nas propriedades dos corpúsculos luminosos e das partículas constituintes dos cristais.

Por outro lado, as leis da dupla refração haviam sido explicadas por Huygens pela introdução de frentes de ondas secundárias esferoidais, como uma extensão do seu Princípio ao caso de meios anisotrópicos.

Devido à grande autoridade de Newton, a teoria ondulatória foi abandonada durante todo o século XVIII e só ressurgiu no princípio do século XIX, quando foi formulado por Young o Princípio da Interferência. Este princípio, segundo o qual duas ondas que se superpõem podem anular seus efeitos em certos pontos e reforçá-los noutros, permitia explicar as cores das lâminas delgadas e os anéis de Newton. Young também procurou explicar as franjas de difração na sombra de uma beirada retilínea como um efeito de interferência entre a luz incidente e a luz refletida pela beirada. Entretanto, os seus trabalhos não tiveram grande repercussão naquela época.

Em 1818, a Academia de Ciências de Paris propôs um prêmio ao autor de uma teoria satisfatória da difração. Esperava-se que isso levaria ao triunfo final da teoria corpuscular. Entretanto, o prêmio foi ganho por Fresnel, cuja teoria se baseava numa combinação do Princípio da Interferência com o Princípio de Huygens. Fresnel conseguiu explicar não só os efeitos de difração, mas também a validade da propagação retilínea e das leis da ótica geométrica como excelentes aproximações. Poisson, mem-

bro da comissão julgadora e partidário da teoria corpuscular, levantou logo uma objeção à teoria de Fresnel: se ela valesse, deveria existir uma mancha brilhante no centro da sombra de um pequeno disco circular, o que lhe parecia manifestamente absurdo. Entretanto, a experiência foi feita por Arago e confirmou a existência dessa mancha.

O triunfo final da teoria ondulatória foi conseguido por Foucault e Fizeau (1850) com a realização de uma experiência crucial, a medida da velocidade da luz no ar e na água. A verificação de que esta última era menor confirmava, como vimos acima, a teoria ondulatória.

A explicação do fenômeno da polarização, a existência de "lados" nos raios luminosos, foi dada por Young: as ondas luminosas são transversais, e não longitudinais como as do som. Isso veio modificar as idéias sobre a natureza do éter, o meio que se havia imaginado para servir de suporte às ondas luminosas. Ao invés de um fluido compressível, como o ar, em que só se produzem ondas longitudinais (ondas sonoras), o éter deveria ser, segundo Fresnel, análogo a um sólido elástico, que permite a propagação de ondas transversais. Usando este modelo, ele conseguiu explicar as leis da propagação da luz nos cristais. Além disto, completou as leis da reflexão, deduzindo as expressões que dão a intensidade e a polarização da luz refletida e transmitida. A polarização da luz por reflexão já havia sido descoberta por Malus (1808), quando observava, através de um cristal de calcita, a luz solar refletida numa janela, e verificou que as intensidades relativas das duas imagens variavam com a rotação do cristal.

O modelo do éter como um sólido elástico deu origem a inúmeras dificuldades. Era difícil explicar porque o éter não oferecia resistência apreciável ao movimento dos planetas. Além disto, quando uma onda plana

puramente transversal incide sobre a superfície de separação de dois meios elásticos, a onda transmitida contém geralmente uma componente longitudinal e era difícil explicar a ausência de uma tal componente no caso da luz.

Era essa a situação quando surgiu a teoria de Maxwell. Inspirando-se nos conceitos físicos introduzidos por Faraday, Maxwell sintetizou todos os resultados que se haviam obtido no domínio dos fenômenos eletromagnéticos em suas famosas equações (1864).

Uma das primeiras consequências que Maxwell tirou de suas equações foi a existência de ondas eletromagnéticas, puramente transversais, cuja velocidade de propagação era dada por uma grandeza puramente eletromagnética, a razão das unidades eletrostática e eletromagnética de carga. Esta razão fôra medida por Kohlrausch e Weber em 1856 e seu valor coincidia com a velocidade da luz no vácuo, dentro do erro experimental. Foi neste resultado que Maxwell baseou sua hipótese da natureza eletromagnética da luz.

A hipótese de Maxwell foi confirmada experimentalmente por Hertz (1888), que produziu ondas eletromagnéticas e verificou que se propagavam com a velocidade da luz, refletiam-se e se refratavam como a luz.

A teoria eletromagnética da luz permite explicar as principais características de todos os fenômenos relacionados com a propagação da luz. Entretanto, os fenômenos de emissão e absorção de luz são apenas parcialmente elucidados por ela, conforme veremos no capítulo 8. Uma análise mais profunda tem que levar em conta a estrutura atômica da matéria e os efeitos quânticos. A forma mais elaborada da teoria é a eletrodinâmica quântica, em que a luz readquire propriedades corpusculares (fótons), embora também conserve propriedades ondulatórias.

A teoria de Maxwell permite exprimir as constantes óticas dos meios materiais (índice de refração, coeficiente de absorção, etc.) em função de suas constantes eletromagnéticas (constante dielétrica, permeabilidade magnética, condutividade). Entretanto, não explica a variação dessas constantes com a frequência (dispersão). Para explicar êste fenómeno, é preciso levar em conta a estrutura da matéria. Isso foi feito por Lorentz em sua Teoria dos Elétrons (1895), que combinou as equações de Maxwell com um modelo clássico da estrutura da matéria. Lorentz introduziu um ponto de vista novo em relação às equações de Maxwell, estabelecendo uma distinção fundamental entre o seu significado no vácuo e num meio material. As equações básicas seriam as equações de Maxwell no vácuo. Um meio material deveria ser considerado como um conjunto de cargas e correntes no vácuo e as equações de Maxwell correspondentes representariam valores médios obtidos a partir dos campos microscópicos. Esta teoria levantou uma série de questões relativas à Eletrodinâmica dos Meios em Movimento e ao velho problema da existência do éter. Foi daí que se originou a Teoria da Relatividade Restrita, proposta por Einstein em 1905, que marca o apógeu da evolução da Eletrodinâmica Clássica, e que será estudada na parte final dêste curso.

\* \* \*

#### LEITURA RECOMENDADA

A. EINSTEIN e L. INFELD, A Evolução da Física (Cia. Editora Nacional, S. Paulo, 1943). Excelente análise da evolução das ideias básicas na Física.

Para a história da teoria eletromagnética:

E. T. WHITTAKER, A History of the Theories of Aether and Electricity (T. Nelson and Sons, London, 1952).

Tratados clássicos:

I. NEWTON, Opticks (Dover Publications, N. York).

C. HUYGENS e A. FRESNEL, La Teoría Ondulatoria de la Luz (Editorial Losada, B. Aires, 1945).

PROPAGACÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM MEIOS HOMOGÊNEOS E ISOTRÓPICOS1.1. EQUAÇÕES BÁSICAS DA TEORIA ELETROMAGNÉTICA.1.1 (a). As Equações de Maxwell.

Adotaremos o sistema gaussiano de unidades. Neste sistema, as grandezas mecânicas se medem em unidades C.G.S., as grandezas elétricas (inclusive a corrente) em unidades C.G.S. eletrostáticas e as grandezas magnéticas em unidades C.G.S. eletromagnéticas. As relações entre as principais unidades do sistema gaussiano e as unidades M.K.S. correspondentes estão contidas na tabela I, no fim deste parágrafo.

A teoria eletromagnética da luz baseia-se nas equações de Maxwell. Estas equações e os fenômenos físicos de que se originaram já foram estudados no curso anterior. No sistema gaussiano, as equações de Maxwell se escrevem

$$(I) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_v + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$(II) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$(III) \quad \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho_v,$$

$$(IV) \quad \text{div } \vec{B} = 0,$$

(1)

onde  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são os campos elétrico e magnético, respectivamente,  $\vec{D}$  é o deslocamento elétrico,  $\vec{B}$  a indução magnética,  $\vec{j}_v$  e  $\rho_v$  são as densidades de corrente e de carga verdadeiras, respectivamente e  $c$  é a velocidade da luz

no vácuo:  $c \approx 3 \times 10^{10}$  cm/s. A (I) e a (III) são chamadas equações inhomogêneas; (II) e (IV) são as equações homogêneas\*.

As (1) são as equações de Maxwell em forma diferencial. Para obtê-las em forma integral, integramos membro a membro as (III) e (IV) sobre um volume  $V$  limitado por uma superfície  $S$  (cuja normal externa é caracterizada pelo versor  $\hat{n}$ ) e tomamos o fluxo de ambos os membros das (I) e (II) através de uma superfície  $\Sigma$  que se apoia sobre um contorno orientado  $\Gamma$ , indicando por  $\hat{n}$  o versor da normal orientada a  $\Sigma$  (fig. 1.1). A-

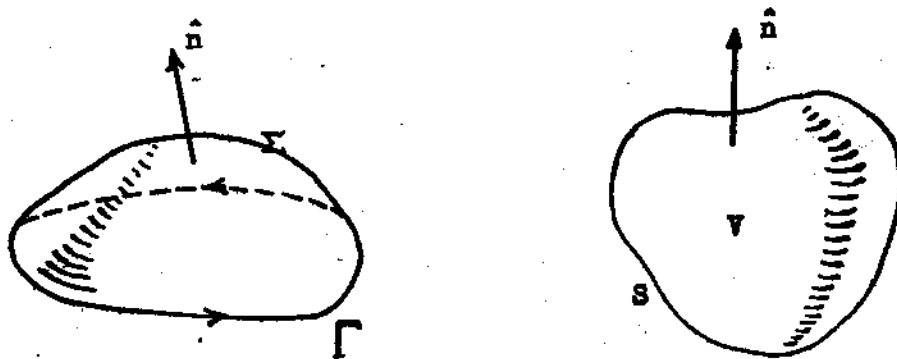


Fig. 1.1: Superfície e volume de integração, com normal externa.

plcando os teoremas da divergência e do rotacional, obtemos

$$(I) \quad \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} i_v + \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS,$$

$$(II) \quad \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

(2)

\* A origem dessas denominações torna-se evidente se transferirmos as derivadas parciais dos campos em relação ao tempo do segundo para o primeiro membro nas equações (I) e (II).

$$(III) \oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} \, dS = 4\pi q_V,$$

(2)

$$(IV) \oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = 0.$$

Nas (2),  $i_V$  é a intensidade de corrente verdadeira através de  $\Sigma$ ,

$$i_V = \int_{\Sigma} \vec{j}_V \cdot \hat{n} \, dS, \quad (3)$$

$\phi$  é o fluxo de indução magnética através de  $\Sigma$ ,

$$\phi = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS, \quad (4)$$

e  $q_V$  é a carga verdadeira contida dentro de  $V$ ,

$$q_V = \int_V \rho_V \, d\tau. \quad (5)$$

Quando o deslocamento não varia com o tempo, a (I) corresponde à lei circuital de Ampère: "A força magnetomotriz associada a um circuito é proporcional à intensidade de corrente verdadeira que o atravessa". O último termo da (I) corresponde à "corrente de deslocamento" introduzida por Maxwell.

A (II) é a lei da indução eletromagnética de Faraday: "A força eletromotriz associada a um circuito é proporcional à taxa de variação com o tempo do fluxo de indução magnética que o atravessa - e tende a se opor a essa variação".

A (III) é o teorema de Gauss: "O fluxo de deslocamento elétrico

através de uma superfície fechada é proporcional à carga verdadeira contida em seu interior". Na sua forma diferencial (1), a (III) corresponde à equação de Poisson.

A (IV), finalmente, exprime a inexistência de fontes para  $\vec{B}$ , ou seja, de polos magnéticos livres. Isso implica que as linhas de indução magnéticas são sempre fechadas: o fluxo de indução que entra através de  $\underline{u}$  na superfície fechada é igual ao fluxo que sai.

Estas quatro leis foram aplicadas no curso anterior a campos eletromagnéticos estáticos, estacionários e quase-estacionários. Vamos admitir agora que são válidas também para campos rapidamente variáveis com o tempo.

É fácil ver que as equações de Maxwell são compatíveis com o princípio de conservação da carga elétrica. Para isto, tomamos a divergência de ambos os membros da (I), o que dá

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j}_v + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) = 0,$$

ou, pela (III),

$$\operatorname{div} \vec{j}_v + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

que é a equação da continuidade. Integrando ambos os membros sobre o volume  $V$ , obtemos

$$\oint_S \vec{j}_v \cdot \hat{n} \, dS = - \frac{\partial q_v}{\partial t}. \quad (7)$$

Vemos pela (7) que a carga não pode ser criada nem destruída: a carga contida no interior de  $V$  só pode aumentar (diminuir) se houver um fluxo de corrente para dentro (para fora) através da superfície.



TABELA I: Conversão de unidades MKS em gaussianas.

Multiplique o número de unidades MKS indicadas abaixo	por	para obter o número de unidades gaussianas de
ampère	$3 \times 10^9$	corrente em ues
coulomb	$3 \times 10^9$	carga em ues
farad	$9 \times 10^{11}$	capacitância em cm
henry	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	indutância em ues
joule	$10^7$	energia em ergs
newton	$10^5$	fôrça em dinas
ohm	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	resistência em ues
volt	$\frac{1}{300}$	potencial em ues
volt/metro	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$	campo elétrico em ues
coulomb/metro <sup>2</sup>	$12\pi \times 10^5$	deslocamento elétrico em ues
ampère-espiras/metro	$4\pi \times 10^{-3}$	campo magnético em oersteds
weber/metro <sup>2</sup>	$10^4$	indução magnética em gauss

### 1.1 (b). As Equações Constitutivas.

Vamos admitir que as equações de Maxwell são válidas de modo geral, qualquer que seja a natureza do meio. Entretanto, essas equações ainda não são suficientes para determinar tôdas as incógnitas. É preciso completá-las por outras relações entre  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{j}_v$ . Essas relações adicionais não têm a mesma generalidade das equações de Maxwell: elas descrevem o comportamento do meio sob a ação do campo e dependem, portanto,

da particular constituição do meio: são as "equações constitutivas".

Salvo menção explícita em contrário, limitar-nos-emos, por enquanto, ao caso de meios que satisfazem às seguintes restrições:

(a) Estão em repouso relativamente uns aos outros.

(b) São homogêneos (isto exclui, por exemplo, gradientes de concentração ou de temperatura).

(c) São isotrópicos (isto exclui cristais que não pertençam ao sistema cúbico, conforme veremos no capítulo 5).

(d) Não são ferromagnéticos.

Além disso, nos problemas que vamos considerar, a carga verdadeira será geralmente nula e a corrente, se existir, será a corrente de condução. Consideraremos também quase sempre soluções monocromáticas, isto é, que oscilam harmônicamente no tempo, com frequência angular  $\omega$ . Nestas condições, as equações constitutivas são da forma

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}, \\ \vec{J}_v &= \sigma \vec{E},\end{aligned}\tag{8}$$

onde  $\epsilon$  é a constante dielétrica,  $\mu$  a permeabilidade magnética e  $\sigma$  a condutividade elétrica. No sistema gaussiano,  $\epsilon$  e  $\mu$  são adimensionais e  $\sigma$  tem dimensão de uma frequência. Devido à hipótese (d),  $\mu$  será geralmente muito próximo da unidade.

É importante notar que  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  só podem ser tomadas como constantes para campos estáticos ou lentamente variáveis. Para campos rapidamente variáveis, aparece o fenômeno da dispersão, ou seja, da variação dessas grandezas com a frequência, que será estudado na Teoria dos Elétrons

(capítulo 9). O limite de validade para a constância de  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  varia bastante com a substância. Em geral, valores estáticos podem ser usados até a região do infra-vermelho, mas há exceções. Para frequências elevadas, as (8) só podem ser empregadas em soluções monocromáticas, com valores de  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  correspondentes à frequência em questão.

### 1.1 (c). As Condições de Contorno.

Em muitos problemas, temos de considerar dois meios diferentes em contato, o que corresponde a uma variação brusca das constantes materiais ao atravessar a superfície de separação. Esta variação se produz através de várias camadas atômicas sucessivas, mas a espessura total  $h$  da camada de transição ainda é, geralmente, muito menor que as distâncias típicas para as quais os campos nos dois meios sofrem variação apreciável (no caso monocromático, isto significa que  $h$  é muito menor que o comprimento de onda). A camada de transição pode, portanto, ser idealizada como uma superfície de descontinuidade. Como, porém, os operadores diferenciais que aparecem nas equações (1) só foram definidos em pontos no entorno dos quais as propriedades do meio variam continuamente, é preciso verificar como eles se comportam na superfície de descontinuidade.

Vamos fazê-lo de um modo geral, para um vetor  $\vec{v}$  qualquer. Para obter a forma limite de  $\text{div } \vec{v}$ , envolvamos o ponto  $P$  da camada de transição por um volume  $\Delta V$  cilíndrico (fig. 1.2 (a)) de base  $\Delta S$  infinitésima e de altura  $h$ , tomado de tal modo que  $\Delta S$  seja um infinitésimo de ordem inferior à superfície lateral (esta tende a zero com  $h$ ). O fluxo de  $\vec{v}$  através da superfície lateral pode então ser desprezado em confronto com o fluxo através das bases e vamos ter:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{v} d\tau = \frac{1}{\Delta S h} \oint \vec{v} \cdot \hat{n} dS,$$

ou seja, indicando por  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  os valores de  $\vec{v}$  nos meios 1 e 2, respectivamente,

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\Delta S h} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \hat{n}_{12} \Delta S,$$

o que dá

$$h \operatorname{div} \vec{v} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \hat{n}_{12}.$$

O limite

$$\operatorname{Div} \vec{v} = \lim_{h \rightarrow 0} (h \operatorname{div} \vec{v}) \quad (9)$$

chama-se divergência superficial de  $\vec{v}$ . A relação acima obtida mostra que

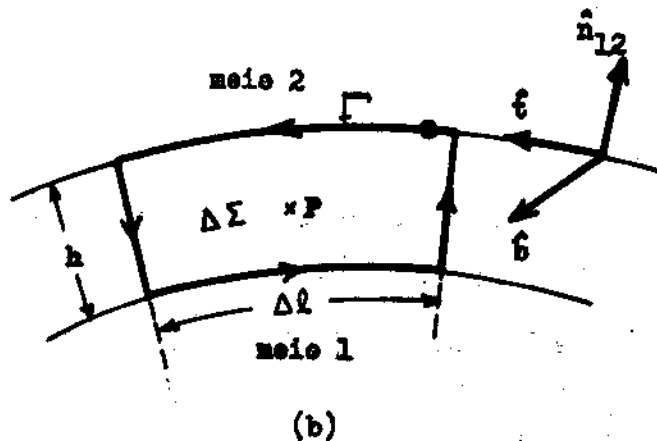
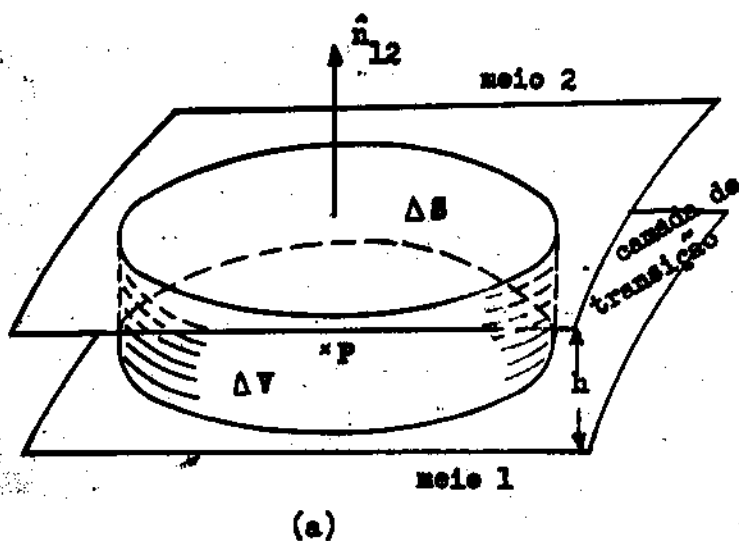


Fig. 1.2: Divergência superficial e rotacional superficial de um vetor.

a divergência superficial de um vetor é igual à descontinuidade sofrida por sua componente normal ao atravessar a superfície de separação:

$$\operatorname{Div} \vec{v} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \hat{n}_{12}. \quad (10)$$

Para obter a forma limite do operador rotacional, envolvamos P por um circuito retangular  $\Gamma$  (fig. 1.2 (b)) de base  $\Delta l$  e altura  $h$ , situado num plano perpendicular às superfícies limítrofes da camada. Vamos tomar  $\Delta l$  infinitésimo de ordem inferior à de  $h$ , de modo que podemos desprezar a contribuição dos lados de altura  $h$ . Chamando de  $\hat{t}$  o versor da tangente à curva  $\Gamma$  e de  $\hat{b} = \hat{n}_{12} \times \hat{t}$  a binormal (normal ao elemento de superfície  $\Delta \Sigma$ , fig. 1.2 (b)), vamos ter

$$\begin{aligned} \hat{b} \cdot \text{rot } \vec{v} &= \frac{1}{\Delta \Sigma} \int_{\Delta \Sigma} \text{rot } \vec{v} \cdot \hat{b} \, dS = \frac{1}{\Delta l \, h} \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{1}{\Delta l \, h} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \hat{t} \, \Delta l, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \hat{b} \cdot (h \text{ rot } \vec{v}) &= (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \hat{t} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \hat{b} \times \hat{n}_{12} \\ &= \hat{b} \cdot \hat{n}_{12} \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \end{aligned}$$

O vetor

$$\text{Rot } \vec{v} = \lim_{h \rightarrow 0} (h \text{ rot } \vec{v}) \quad (11)$$

chama-se rotacional superficial de  $\vec{v}$ . A expressão acima dá então:

$$\hat{b} \cdot \text{Rot } \vec{v} = \hat{b} \cdot \hat{n}_{12} \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Como o plano de  $\Delta \Sigma$  é qualquer plano perpendicular às superfícies limítrofes da camada, a binormal  $\hat{b}$  tem orientação arbitrária no plano perpendicular a  $\hat{n}_{12}$ , de modo que podemos concluir

desta relação que \*

$$\text{Rot } \vec{v} = \hat{n}_{12} \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \quad (12)$$

Para aplicar estes resultados às equações de Maxwell, vamos multiplicar ambos os membros das (1) por  $h$  e passar ao limite para  $h \rightarrow 0$ . Notando que  $\partial \vec{E}/\partial t$  e  $\partial \vec{D}/\partial t$  permanecem finitos na camada de transição, obtemos as equações

$$(I) \quad \text{Rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \lim_{h \rightarrow 0} (h \vec{j}_v),$$

$$(II) \quad \text{Rot } \vec{E} = 0,$$

$$(III) \quad \text{Div } \vec{D} = 4\pi \lim_{h \rightarrow 0} (h \rho_v),$$

$$(IV) \quad \text{Div } \vec{B} = 0.$$

(13)

Vejamos a que correspondem os segundos membros destas equações.

Se  $\Delta q_v$  é a quantidade de carga verdadeira contida no elemento de volume  $\Delta V$ , temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h \rho_v) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta V}{\Delta S} \rho_v \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (\Delta q_v / \Delta S) = \delta_v, \quad (14)$$

\* Como  $\hat{b}$  permanece sempre normal a  $\hat{n}_{12}$ , o produto escalar de  $\hat{b}$  por um vetor na direção de  $\hat{n}_{12}$  seria nulo e portanto não podemos excluir, a priori, a possibilidade de acrescentar um tal vetor à (12). Para mostrar que isso não é possível, vamos tomar um sistema de coordenadas cartesianas com o eixo  $Oz$  paralelo a  $\hat{n}_{12}$ . A componente de  $h \text{ rot } \vec{v}$  nesta direção é, então,  $h (\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y)$ , que tende a zero com  $h$ , já que as derivadas de  $\vec{v}$  em direções tangenciais à superfície de separação permanecem finitas no limite.

onde  $\delta_v$  é a densidade superficial de carga verdadeira.

Por outro lado, se  $\Delta i_v$  é a intensidade de corrente verdadeira que atravessa o elemento de superfície  $\Delta \Sigma$ , temos

$$\delta \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (h \vec{j}_v) = \lim_{h \rightarrow 0} (\vec{j}_v \cdot \delta \Delta \Sigma / \Delta l) = \lim_{h \rightarrow 0} (\Delta i_v / \Delta l). \quad (15)$$

O último membro da 15 representa, em cada ponto de uma curva situada sobre a superfície de separação, a intensidade de corrente por unidade de comprimento que a atravessa. Um valor não-nulo desse limite corresponde à existência de uma corrente distribuída sobre a superfície de separação (fig. 1.3 (a)). O vetor densidade de corrente superficial  $\vec{j}_v$  é definido por

$$\vec{j}_v = \lim_{h \rightarrow 0} (h \vec{j}_v). \quad (16)$$

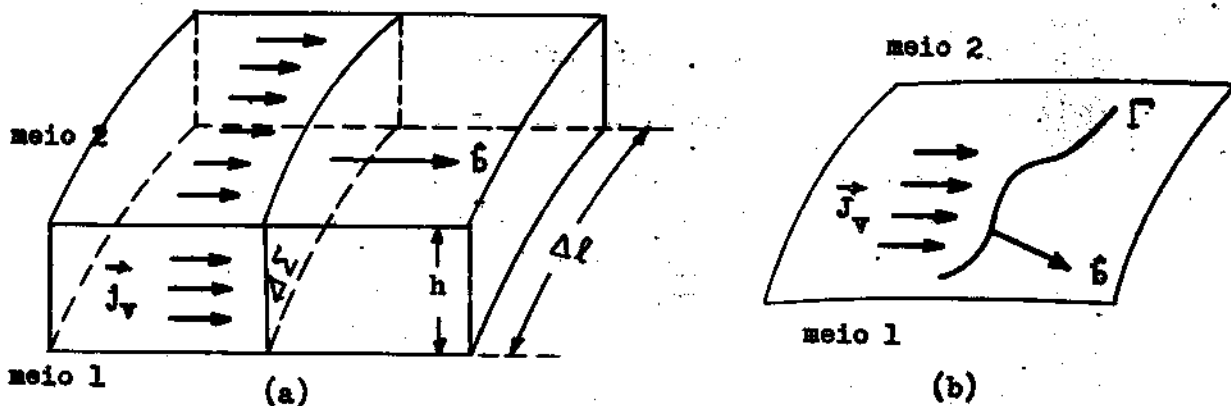


Fig. 1.3: Densidade de corrente superficial.

A intensidade de corrente superficial que atravessa uma curva  $\Gamma$  da superfície de separação (fig. 1.3 (b)) é dada então por

$$i_v = \int_{\Gamma} \vec{j}_v \cdot \delta \, dl \quad (17)$$

Substituindo (14) e (16) na (13), obtemos finalmente a forma limite das equações de Maxwell na superfície de separação entre dois meios diferentes

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad \hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}_\nabla, \\
 \text{(II)} \quad \hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0, \\
 \text{(III)} \quad \hat{n}_{12} \times (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= 4\pi \delta_\nabla, \\
 \text{(IV)} \quad \hat{n}_{12} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Vemos, portanto, que a descontinuidade da componente tangencial de  $\vec{H}$  dá a densidade de corrente superficial e a descontinuidade da componente normal de  $\vec{D}$  dá a densidade de carga superficial. A componente tangencial de  $\vec{E}$  e a componente normal de  $\vec{B}$  são sempre contínuas. Convém notar, além disso, que, para um condutor,

$$\vec{J}_\nabla = \lim_{h \rightarrow 0} (h \sigma \vec{E})$$

só pode ser diferente de zero se  $\sigma$  for infinito, ou seja, no caso limite ideal de um condutor perfeito. Num condutor muito bom, conforme veremos no § 1.3 (c), a corrente pode estar concentrada numa película muito delgada junto à superfície e pode ser muito boa aproximação assimilá-la então a uma corrente superficial.

As (1) e (18), juntamente com as equações constitutivas, são as equações básicas da teoria de Maxwell.



Exercício 1.1.1: Calcular o campo magnético produzido por um solenóide infinito de  $n$  espiras por unidade de comprimento, percorrido por uma corrente de intensidade  $i$ , assimilando-o a uma distribuição de corrente superficial.

Sugestão: aplicar a condição de contorno (18I).

#### 1.1 (d). O Balanço de Energia.

As equações de Maxwell devem ser compatíveis com o princípio de conservação da energia. O caso particular de campos estacionários ou quase-estacionários já foi tratado no curso anterior, onde se mostrou que é possível associar ao campo eletromagnético uma densidade de energia

$$w = \frac{1}{8\pi} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}), \quad (19)$$

cuja taxa de variação com o tempo é dada por

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left( \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \frac{1}{4\pi} \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (20)$$

Afim de investigar a relação entre as equações de Maxwell e a conservação da energia, vamos calcular o último membro da (20) diretamente a partir das (1). Para isto, basta multiplicar escalarmente a (I) por  $\vec{E}$ , a (II) por  $\vec{H}$ , e subtrair membro a membro os resultados:

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_V \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (21)$$

Com o auxílio da identidade vetorial

$$\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H}, \quad (22)$$

a (21) se escreve:

$$-\frac{1}{4\pi} \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \vec{j}_V \cdot \vec{E} + \frac{c}{4\pi} \text{div} (\vec{E} \times \vec{H}). \quad (23)$$

Integrando ambos os membros desta equação sôbre um volume  $V$  limitado por uma superfície  $S$ , obtemos:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_V \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\tau = \int_V \vec{j}_V \cdot \vec{E} d\tau + \frac{c}{4\pi} \oint_S \vec{E} \times \vec{H} \cdot \hat{n} dS \quad (24)$$

onde  $\hat{n}$  é o versor da normal externa (cf. fig. 1.1).

Até aqui não fizemos nenhuma hipótese sôbre a natureza do meio em que atua o campo eletromagnético. Vamo-nos limitar, agora, ao caso de meios materiais que satisfazem às condições especificadas no § (b). Temos então

$$-\frac{1}{4\pi} \int_V \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[ \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \right] d\tau \quad (25)$$

e também

$$\int_V \vec{j}_V \cdot \vec{E} d\tau = \int_V j_V^2 / \sigma d\tau, \quad (26)$$

e modo que a (24) fica

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[ \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right] d\tau = \int_V \frac{j_V^2}{\sigma} d\tau + \oint_S \left( \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \right) \cdot \hat{n} dS. \quad (27)$$

A expressão entre colchetes no primeiro membro coincide com a que dada pela (19). Somos levados a admitir, portanto, que a (19) é a expressão geral da densidade de energia eletromagnética em meios do tipo considerado, que é válida também para campos rapidamente variáveis. O primeiro membro da (27) representa, então, o decréscimo, por unidade de tempo, da energia eletromagnética contida no volume  $V$ .

O primeiro termo do segundo membro representa a potência dissipada sob a forma de calor pelo efeito Joule nesse volume. Logo, a (27) diz que o decréscimo, por unidade de tempo, da energia eletromagnética contida no volume  $V$  é igual à energia dissipada, por unidade de tempo, pelo efeito Joule, mais um fluxo através da superfície  $S$  que limita esse volume.

Para que se tenha conservação de energia, portanto, temos que interpretar o último termo da (27) como o fluxo de energia eletromagnética, por unidade de tempo, que sai do volume  $V$  através da superfície  $S$ . Por analogia com a definição da densidade de corrente  $\vec{j}_V$  ( $\oint \vec{j}_V \cdot \hat{n} dS$  é o fluxo de carga por unidade de tempo através de  $S$ ), somos então levados a interpretar o vetor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \quad (28)$$

como a densidade de corrente de energia eletromagnética, ou seja, a energia eletromagnética que atravessa um elemento de superfície colocado perpendicularmente à direção de  $\vec{S}$ , por unidade de tempo e de área.

Convém notar que o balanço de energia dá um sentido físico ape-

nas ao fluxo de  $\vec{S}$  através de uma superfície fechada. A interpretação local de  $\vec{S}$  nem sempre se justifica. Se acrescentarmos a  $\vec{S}$  qualquer vetor solenoidal (isto é, de divergência nula), a (27) não sofre nenhuma alteração. Consideremos, por exemplo, um campo eletrostático e um campo magnetostático superpostos, no vácuo. Temos então  $\text{div } \vec{S} = 0$  ( $\partial/\partial t = 0$  na (23)), mas  $\vec{S} \neq 0$  em qualquer ponto onde  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  não são paralelos. Neste caso, não teria sentido falar numa corrente de energia, pois a energia contida em qualquer elemento de volume permanece constante e em nada se distingue da energia contida em qualquer outro elemento. Entretanto, na maior parte dos casos que estudaremos, a corrente de energia tem um sentido bem definido e a interpretação local de  $\vec{S}$  pode ser empregada.

No caso de campos eletromagnéticos estacionários, conforme foi visto no curso anterior,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  tendem a zero como  $R^{-2}$  (pelo menos) quando a distância  $R$  do ponto de observação à origem tende a infinito, de modo que  $\vec{S}$  tende a zero como  $R^{-4}$  e o fluxo de energia através de uma esfera de raio  $R$  tende a zero como  $R^{-2}$ . No entanto, em outros casos que estudaremos mais tarde (cap. 8),  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  tendem a zero como  $R^{-1}$ , de modo que o fluxo de energia através de uma esfera de raio  $R$  tende a um valor finito para  $R$  tendendo a infinito. Isso corresponde à emissão de radiação.

Exercício 1.1.2: Um fio condutor cilíndrico é percorrido por uma corrente estacionária axial. Mostrar que o vetor de Poynting na superfície está dirigido radialmente para dentro do fio. Mostrar que a energia dissipada em calor pelo efeito Joule num segmento qualquer do fio, por unidade de tempo, é igual ao fluxo do vetor de Poynting através da superfície.

### 1.1 (e). O Vetor de Poynting Complexo.

Na maioria dos problemas que vamos estudar,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  oscilam harmônicamente com o tempo. É conveniente, então, adotar a notação complexa:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) e^{-i\omega t},\end{aligned}\tag{29}$$

onde  $\omega$  é a frequência angular e  $\vec{\mathcal{E}}$  e  $\vec{\mathcal{H}}$  são vetores complexos. A (29) é uma forma abreviada de escrever

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re} [\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) e^{-i\omega t}], \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \text{Re} [\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) e^{-i\omega t}],\end{aligned}\tag{29a}$$

ou seja, subentende-se que se deve sempre tomar a parte real dos resultados.

Um vetor complexo é um vetor de componentes complexas:

$$\vec{w}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r}, t) + i \vec{v}(\vec{r}, t),\tag{30}$$

onde  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores reais:  $\vec{u} = \text{Re } \vec{w}$ ,  $\vec{v} = \text{Im } \vec{w}$ . Se submetemos vetores complexos a uma série de operações lineares, tais como adição vetorial, produto por um número real, derivação em relação ao tempo ou às coordenadas ou integração, a parte real do resultado é idêntica ao que se obteria submetendo as partes reais dos vetores à mesma série de operações. Assim, por exemplo, a (30) dá

$$\text{Re}(\text{div } \vec{w}) = \text{Re}(\text{div } \vec{u} + i \text{div } \vec{v}) = \text{div } \vec{u} = \text{div}(\text{Re } \vec{w}).\tag{31}$$

Per conseguinte, se os vetores complexos (29) satisfazem às equações de Maxwell, o mesmo vale para as suas partes reais.

A vantagem da notação complexa é a simplificação que introduz nos cálculos. Assim, por exemplo, de acordo com as (29), a derivação em relação ao tempo equivale à multiplicação por  $(-i\omega)$ , ou seja  $\partial/\partial t = -i\omega$ .

Entretanto, a regra sobre a parte real não se aplica a operações não-lineares. Não é válida, por exemplo, para o produto de vetores, pois a parte real dum produto de números complexos não coincide com o produto das partes reais desses números. Assim, o vetor de Poynting correspondente ao campo (29) não é dado por  $\text{Re} \left( \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \right)$ , e análogamente para a densidade de energia.

Geralmente, porém, não estamos interessados nos valores instantâneos destas grandezas, que oscilam harmônicamente com o tempo, e sim nos seus valores médios, tomados sobre um grande número de períodos. Estes valores médios se exprimem de forma simples em termos da notação complexa (29).

Com efeito, consideremos dois números complexos  $A(t)$  e  $B(t)$  que oscilam harmônicamente com o tempo,

$$\begin{aligned} A(t) &= a e^{-i\omega t}, \\ B(t) &= b e^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{32}$$

e sejam

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \text{Re } A(t), \\ \beta(t) &= \text{Re } B(t). \end{aligned} \tag{33}$$

Temos então, indicando por um asterisco o complexo conjugado,

$$\begin{aligned} \alpha \beta &= \frac{1}{2} (a e^{-i\omega t} + a^* e^{i\omega t}) \cdot \frac{1}{2} (b e^{-i\omega t} + b^* e^{i\omega t}) = \\ &= \frac{1}{4} (a b^* + a^* b) + \frac{1}{4} (a b e^{-2i\omega t} + a^* b^* e^{2i\omega t}). \end{aligned}$$

Indicando por uma barra o valor médio sôbre um número inteiro de períodos \*, temos

$$\overline{e^{\pm 2i\omega t}} = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} \exp\left(\pm 2i \cdot \frac{2\pi}{T} t\right) dt = 0,$$

de modo que

$$\overline{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\alpha\beta^*),$$

ou, pela (33),

$$\overline{\operatorname{Re} A \operatorname{Re} B} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (AB^*). \quad (34)$$

Como as (29) são da forma (32), podemos aplicar este resultado às (19) e (28). Obtemos assim o valor médio da densidade de energia,

$$\overline{W} = \overline{W}_e + \overline{W}_m, \quad (35)$$

onde

$$\overline{W}_e = \frac{1}{16\pi} \operatorname{Re}(\overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{D}}^*) \quad (36)$$

é a densidade média de energia elétrica e

$$\overline{W}_m = \frac{1}{16\pi} \operatorname{Re}(\overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{B}}^*) \quad (37)$$

é a densidade média de energia magnética. Análogamente, o valor médio do vetor de Poynting é

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(\overline{\mathbf{E}} \times \overline{\mathbf{H}}^*) = \operatorname{Re} \overline{\mathbf{S}}^+, \quad (38)$$

onde

$$\overline{\mathbf{S}}^+ = \frac{c}{8\pi} \overline{\mathbf{E}} \times \overline{\mathbf{H}}^* \quad (39)$$

\* Se  $n$  não é inteiro,  $\overline{\exp(\pm 2i\omega t)}$  não é nulo, mas é da ordem de  $1/n$ , o que é desprezível para  $n$  suficientemente grande.

é chamado o vetor de Poynting complexo. O valor médio do vetor de Poynting é a parte real do vetor de Poynting complexo.

A divergência do vetor de Poynting complexo também tem uma interpretação física simples. Pode-se mostrar que

$$-\operatorname{div} \vec{S}^+ = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{j}_v^* + 2i\omega(\bar{W}_e - \bar{W}_m), \quad (40)$$

de modo que a parte real representa a perda média de potência pelo efeito Joule, ao passo que a parte imaginária é proporcional à diferença entre as densidades médias de energia elétrica e magnética.

Exercício 1.1.3: Demonstrar a (40).

## 1.2. PROPAGACÃO DE ONDAS EM MEIOS TRANSPARENTES.

### 1.2.(a). A Equação de Ondas e o Índice de Refração.

Um meio transparente é um meio que não absorve luz. Na prática, sempre existe alguma absorção, mas, desde que ela seja suficientemente pequena, o meio pode ser considerado como transparente. Para isso, é necessário que a sua condutividade seja desprezível ( $\sigma \approx 0$ ). Entretanto, esta condição não é suficiente, pois não é somente o efeito Joule que contribui para a absorção da luz. Conforme veremos ao estudar a teoria da dispersão (capítulo 9), mesmo um meio isolante torna-se absorvente quando a frequência da onda incidente está contida em certos domínios, que se chamam "faixas de absorção" da substância. Por conseguinte, pa-



ra que o meio possa ser considerado como transparente, é preciso supor ainda que a frequência incidente não pertence a nenhuma faixa de absorção.

Nestas condições e dentro das hipóteses formuladas no parágrafo 1.1.(b), podemos substituir nas (1) as equações constitutivas (8) (com  $\sigma = 0$ ), o que dá

$$(I) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$(II) \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$(III) \quad \text{div } \vec{E} = 0,$$

$$(IV) \quad \text{div } \vec{H} = 0.$$

(41)

Exercício 1.2.1: Verificar a seguinte propriedade de simetria das equações (41): se  $(\vec{E}, \vec{H})$  é uma solução,  $(\vec{E}', \vec{H}')$  também será, para

$$\vec{E}' = -\sqrt{\mu/\epsilon} \vec{H}, \quad \vec{H}' = \sqrt{\epsilon/\mu} \vec{E}. \quad (42)$$

Mostrar que o vetor de Poynting não se altera por esta transformação.

As (41) são um sistema de equações de derivadas parciais de primeira ordem e primeiro grau nas componentes de  $\vec{E}$  e de  $\vec{H}$ . Eliminando um dos campos, podemos obter uma equação de segunda ordem em que só intervém o outro. Com efeito, tomando o rotacional da (II),

obtemos

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H},$$

ou seja, pela (I),

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (43)$$

Se as componentes de  $\vec{E}$  forem tomadas em coordenadas cartesianas, vale a identidade

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}. \quad (44)$$

Exercício 1.2.2: Verificar a (44), calculando as componentes em coordenadas cartesianas dos dois membros.

A (44) só é válida em coordenadas cartesianas. Verificar que ela deixa de valer, por exemplo, em coordenadas cilíndricas (o cálculo dos operadores vetoriais em coordenadas curvilíneas encontra-se, por exemplo, em: M. Abraham e R. Becker, "Classical Electricity and Magnetism", 2nd. ed. (Blackie and Son, London, 1950), p. 40).

Levando em conta a (III), isso dá

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\Delta \vec{E}.$$

A (43) fica então

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (45)$$

onde fizemos

$$v = c/\sqrt{\epsilon\mu}. \quad (46)$$

Analogamente, tomando o rotacional da (I) e empregando a (II) e a (IV), obtemos, em coordenadas cartesianas, a equação para  $\vec{H}$ :

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{47}$$

As (45) e (47) mostram que cada componente cartesiana de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  obedece à equação

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \tag{48}$$

que é a equação de propagação de ondas de velocidade  $v$ . O índice de refração absoluto de um meio em que a luz se propaga com velocidade  $v$  é

$$n = c/v, \tag{49}$$

de modo que obtemos, pela (46),

$$n = \sqrt{\epsilon \mu}. \tag{50}$$

Esta igualdade, conhecida como relação de Maxwell, exprime uma constante ótica do meio, o índice de refração, em função de constantes eletromagnéticas. Para a grande maioria das substâncias que estamos considerando,  $\mu$  é muito próximo de 1, e podemos tomar, sem erro apreciável,

$$n = \sqrt{\epsilon}. \tag{51}$$

Ao comparar esta relação com a experiência, é preciso levar em conta que a constante dielétrica é medida geralmente para campos estáticos, de modo que seu valor só pode ser empregado para testar a relação de Maxwell a frequências suficientemente baixas para que os efeitos de dispersão não se façam sentir - ou então para

substâncias fracamente dispersivas. Assim, por exemplo, obtemos bom acôrdo no infra-vermelho distante ( $300 \mu$ ) para as substâncias abaixo:

TABELA II

Substância	$n^2$ ( $300 \mu$ )	$\epsilon$
K Cl	4,8	4,75
K Br	5,1	4,66
N H <sub>4</sub> Cl	6,8	6,85

Para gases fracamente dispersivos, o acôrdo ainda é bom na região visível do espectro, conforme mostram os seguintes resultados, devidos a Boltzmann:

TABELA III

Substância	$n^2$ (luz amarela)	$\epsilon$
Ar	1,000 294	1,000 295
C O <sub>2</sub>	1,000 449	1,000 473
H <sub>2</sub>	1,000 138	1,000 132
C O	1,000 346	1,000 345

Entretanto, os seguintes exemplos mostram como podem ser grandes os desvios devidos à dispersão:

TABELA IV

Substância	n (luz amarela)	$\sqrt{\epsilon}$
Álcool metílico	1,34	5,7
Álcool etílico	1,36	5,0
Água	1,33	9,0

Por outro lado, para comprimentos de onda superiores a 1 m, o índice de refração da água é igual a 9. Para a maioria das substâncias, o valor estático de  $\epsilon$  pode ser usado para comprimentos de onda acima de 1 cm.

### 1.2.(b) Ondas Eletromagnéticas Planas.

A equação de ondas admite uma variedade muito grande de soluções. As soluções mais simples são as ondas planas.

Numa onda plana, em cada instante, os campos devem ter o mesmo valor em qualquer ponto de um plano perpendicular à direção de propagação da onda. Seja  $\hat{u}$  o versor desta direção e  $\vec{r}$  o raio vetor da origem a um ponto P qualquer (fig. 1.4). A equação de um plano perpendicular a  $\hat{u}$  é:

$$\vec{r} \cdot \hat{u} = \text{constante} .$$

Logo, numa onda plana,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  só podem depender de  $\vec{r}$  através de

$$\zeta = \vec{r} \cdot \hat{u} . \quad (52)$$

Se tomarmos a direção de  $\hat{u}$  como o eixo dos  $\zeta$  de um sistema de

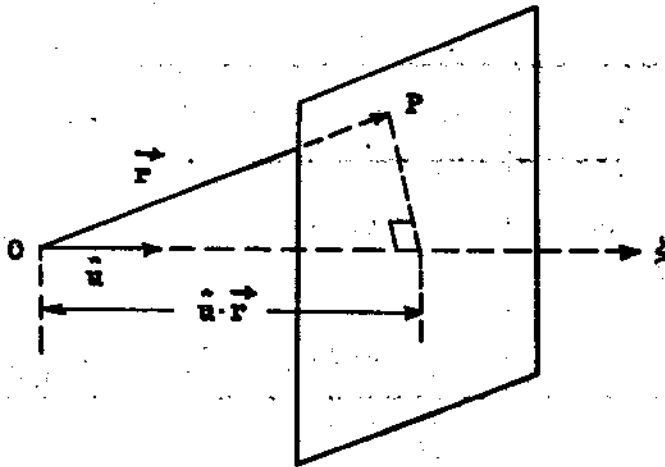


Fig. 1.4: Ondas planas.

coordenadas cartesianas, a equação de ondas para cada componente de  $\vec{E}$  ou  $\vec{H}$  assume a forma

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0. \quad (53)$$

A solução geral desta equação, conforme se mostrará no apêndice 1A, é:

$$f(\zeta, t) = f_1(\zeta - vt) + f_2(\zeta + vt). \quad (54)$$

Como o argumento de  $f_1$  não se altera quando substituirmos  $t$  por  $t + \tau$  e  $\zeta$  por  $\zeta + v\tau$ , vemos que  $f_1$  representa uma onda progressiva na direção  $\zeta$  de velocidade  $v$ . Análogamente,  $f_2$  representa uma onda regressiva, que também pode ser considerada como uma onda progressiva na direção oposta. É suficiente, portanto, considerar o caso de uma onda progressiva:

$$\vec{E} = \vec{E}(\zeta - vt), \quad \vec{H} = \vec{H}(\zeta - vt). \quad (55)$$

A equação de ondas decorre das equações de Maxwell, mas a recíproca não é verdadeira. Portanto, impondo que as soluções  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  obtidas acima satisfaçam às (41), obtemos restrições adicionais sobre as soluções. Afim de substituir as (55) nas (41), é preciso calcular as derivadas espaciais e temporais de um vetor da forma

$$\vec{w} = \vec{w}'(\xi - vt),$$

o que faremos num sistema de coordenadas cartesianas de orientação qualquer. Indicando por  $\vec{w}'$  a derivada de  $\vec{w}$  em relação ao argumento, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} &= -v \vec{w}', \\ \operatorname{div} \vec{w} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} w'_x + \frac{\partial \xi}{\partial y} w'_y + \frac{\partial \xi}{\partial z} w'_z \\ &= u_x w'_x + u_y w'_y + u_z w'_z \\ &= \hat{u} \cdot \vec{w}', \\ (\operatorname{rot} \vec{w})_x &= \frac{\partial \xi}{\partial y} w'_z - \frac{\partial \xi}{\partial z} w'_y \\ &= u_y w'_z - u_z w'_y = (\hat{u} \times \vec{w}')_x, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \hat{u} \times \vec{w}'.$$

Levando as (55) nas (41) e utilizando estas relações, obtemos, com o auxílio da (46),

$$(I) \quad \hat{u} \times \vec{H}' = -\sqrt{\epsilon/\mu} \vec{E}',$$

$$(II) \quad \hat{u} \times \vec{E}' = \sqrt{\mu/\epsilon} \vec{H}' \quad (56)$$

$$(III) \quad \hat{u} \cdot \vec{E}' = 0,$$

$$(IV) \quad \hat{u} \cdot \vec{H}' = 0.$$

Note-se que as (III) e (IV) são consequência das (I) e (II).

As (56) podem ser integradas imediatamente em relação a  $\xi - vt$ . As constantes de integração não podem depender de  $\vec{r}$  nem de  $t$ , de modo que só poderiam corresponder a um campo uniforme estático, com  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  constantes. Um tal campo, que sempre pode ser superposto à solução, não intervém na propagação de ondas; podemos, portanto, supor que seja nulo. As (56) dão então

$$\begin{aligned} (I) \quad \vec{E} &= -\sqrt{\mu/\epsilon} \hat{u} \times \vec{H}, \\ (II) \quad \vec{H} &= \sqrt{\epsilon/\mu} \hat{u} \times \vec{E}, \\ (III) \quad \hat{u} \cdot \vec{E} &= 0, \\ (IV) \quad \hat{u} \cdot \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

As (57) são as restrições suplementares impostas às (55) pelas equações de Maxwell. As (III) e (IV) mostram que as ondas eletromagnéticas são ondas transversais (os campos são perpendiculares à direção de propagação). As (I) e (II) dão a relação entre  $|\vec{E}|$  e  $|\vec{H}|$ :

$$\sqrt{\epsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu} |\vec{H}|. \quad (58)$$

No caso particular da propagação no vácuo ( $\epsilon = \mu = 1$ ), as amplitudes dos dois vetores são iguais. As (I) e (II) mostram ainda que  $(\vec{E}, \vec{H}, \hat{u})$ , nesta ordem, formam um triedro triortogonal direto (fig. 1.5).



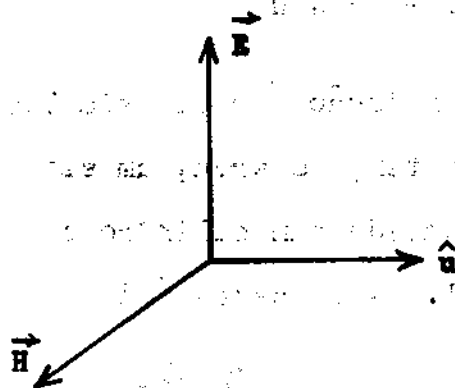


Fig. 1.5: Os vetores  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  e  $\hat{u}$  numa onda plana.

O vetor de Poynting é dado por

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \hat{u}, \quad (59)$$

e a densidade de energia eletromagnética se escreve:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} \epsilon E^2 = \frac{1}{4\pi} \mu H^2, \end{aligned} \quad (60)$$

pois, pela (58) as densidades de energia elétrica e magnética são iguais.

A (59) também pode ser escrita

$$\vec{S} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{4\pi} \epsilon E^2 \hat{u},$$

ou, pelas (46) e (60),

$$\vec{S} = v W \hat{u} . \quad (61)$$

A interpretação física desta relação é muito simples. A energia que atravessa, por unidade de tempo e área, um elemento de superfície perpendicular a  $\hat{u}$  está contida num cilindro com base nesse elemento e de geratriz  $v$  (fig. 1.6), ou seja, é igual a  $v W$ . Portanto,

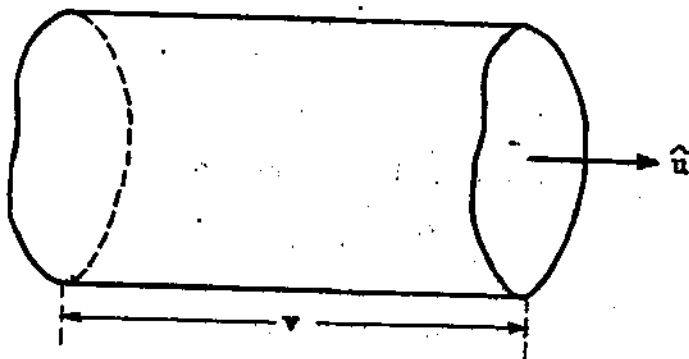


Fig. 1.6: Transporte de energia numa onda plana.

uma onda eletromagnética plana transporta energia na direção de propagação. A interpretação local de  $\vec{S}$  é inteiramente justificada neste caso.

Exercício 1.2.3: Podemos generalizar a (61), definindo a velocidade  $\vec{v}$  de propagação da energia eletromagnética por

$$\vec{S} = W \vec{v} .$$

Mostrar que, com esta definição, a (23) pode ser escrita, para um meio isolante ( $\vec{j}_v = 0$ ),

$$\text{div} (W \vec{v}) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 .$$

Esta relação é idêntica à equação de continuidade para um fluido

de densidade  $W$  que se move com velocidade  $\vec{v}$ .

Exercício 1.2.4: Demonstrar que, com a definição de  $\vec{v}$  dada no exercício 1.2.3, vale a relação:

$$16 \pi^2 W^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{4} (E^2 - H^2)^2 + (\vec{E} \cdot \vec{H})^2.$$

Dai decorre que a velocidade de propagação da energia eletromagnética no vácuo é sempre menor ou igual a  $c$ , e só pode ser igual a  $c$  quando  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são perpendiculares entre si e têm o mesmo módulo, como acontece no caso de uma onda plana.

### 1.2.(c) Ondas Planas Monocromáticas. Polarização.

Se tomarmos a direção de propagação como eixo dos  $z$ , a onda plana mais geral possível, de acordo com as (57), será da forma

$$\begin{aligned} E_x &= f(z - vt), & H_x &= -\sqrt{\epsilon/\mu} g(z - vt), \\ E_y &= g(z - vt), & H_y &= \sqrt{\epsilon/\mu} f(z - vt), \end{aligned} \quad (62)$$

onde  $f$  e  $g$  são duas funções arbitrárias (note-se que as componentes de  $\vec{H}$  ficam inteiramente determinadas pelas (57) quando se dão as componentes de  $\vec{E}$ ).

O caso mais importante é aquele em que as componentes dos campos oscilam harmonicamente com o tempo. Usando a notação complexa (29), com o fator temporal  $e^{-i\omega t}$ , isto implica que as funções

$f$  e  $g$  devem ser proporcionais a  $\exp \left[ i \frac{\omega}{v} (z - vt) \right]$ , ou seja,

$$\begin{aligned} E_x &= A e^{i(kz - \omega t)}, & H_x &= -\sqrt{\epsilon/\mu} E_y, \\ E_y &= B e^{i(kz - \omega t)}, & H_y &= \sqrt{\epsilon/\mu} E_x, \end{aligned} \quad (63)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes complexas quaisquer e

$$k = \omega/v = n\omega/c$$

é o número de onda;  $\omega$  é a frequência angular.

As (63) são funções periódicas do tempo e da coordenada  $z$ . O período temporal é  $T$ , onde

$$\omega = 2\pi/T.$$

e o período espacial é o comprimento de onda  $\lambda$  dado por

$$k = 2\pi/\lambda.$$

A frequência é dada por

$$\nu = 1/T$$

e está relacionada com o comprimento de onda por

$$\lambda = vT = v/\nu.$$

O vetor

$$\vec{k} = k \hat{u}$$

chama-se vetor de onda. Em termos deste vetor, o fator de propagação se escreve  $\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ . Também é útil introduzir o comprimento de onda reduzido  $\lambda_0$ , que é o comprimento de onda asso

ciado à frequência angular  $\omega$  no vácuo:

$$\lambda_0 = c T = n \lambda .$$

O número de onda reduzido é

$$k_0 = 2\pi/\lambda_0 .$$

As (63) definem uma onda plana monocromática. Sejam  $a = |A|$  e  $b = |B|$ ; podemos escrever então

$$A = a e^{i\delta_x}, \quad B = b e^{i\delta_y},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} E_x &= a e^{i(kz - \omega t + \delta_x)}, \\ E_y &= b e^{i(kz - \omega t + \delta_y)}. \end{aligned} \quad (64)$$

Por uma escolha conveniente da origem das coordenadas ou dos tempos, podemos fazer  $\delta_x = 0$ . A (64) se escreve então, passando para a notação real,

$$\begin{aligned} E_x &= a \cos \phi, \\ E_y &= b \cos (\phi + \delta), \end{aligned} \quad (65)$$

onde fizemos

$$\phi = kz - \omega t. \quad (66)$$

O argumento do cosseno se chama fase da componente correspondente;  $\delta$  é a diferença de fase ou defasagem entre as componentes.

Uma frente de onda é uma superfície de fase constante,  $\phi = \phi_0$ . As frentes de onda das (65) são planos perpendiculares à

direção de propagação, que se deslocam com velocidade  $v$ . Se fixarmos nossa atenção sobre um dado plano  $z = z_0$ , as (65) representam as equações paramétricas de uma curva, que é descrita pela extremidade do vetor  $\vec{E}$  nesse plano à medida que  $t$  varia. Vamos estudar a natureza dessa curva.

É evidente que ela está inscrita no retângulo de lados  $2a$  e  $2b$ . Para obter sua equação, eliminemos  $\phi$  entre as (65). Vem:

$$E_x/a = \cos \phi ;$$

$$E_y/b = \cos (\phi + \delta) =$$

$$= \cos \phi \cos \delta \mp \sqrt{1 - \cos^2 \phi} \operatorname{sen} \delta =$$

$$\frac{E_y}{b} = \frac{E_x}{a} \cos \delta \mp \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{a}\right)^2} \operatorname{sen} \delta ;$$

$$\left(\frac{E_y}{b} - \frac{E_x}{a} \cos \delta\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{a}\right)^2\right] \operatorname{sen}^2 \delta,$$

ou, finalmente,

$$\left(\frac{E_x}{a}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{a} \frac{E_y}{b} \cos \delta + \left(\frac{E_y}{b}\right)^2 = \operatorname{sen}^2 \delta. \quad (67)$$

Esta é uma curva de segundo grau que, por estar inscrita no retângulo acima mencionado, só pode ser uma elipse (podendo degenerar num círculo ou segmento de reta, conforme veremos logo). É óbvio, pelas (63), que uma curva análoga está associada a  $\vec{H}$ . Portanto, a curva descrita pela extremidade do vetor  $\vec{E}$  (ou  $\vec{H}$ ) num plano fixo perpendicular à direção de propagação é uma elipse, ou seja, a on-

da plana monocromática mais geral possível é uma onda elípticamente polarizada. Por outro lado, se fixarmos nossa atenção sôbre um plano de fase constante e acompanharmos o seu deslocamento no espaço, a extremidade de  $\vec{E}$  descreverá uma hélice, cuja projeção sôbre um plano  $z = \text{constante}$  é a elipse (67). (Fig. 1.7).

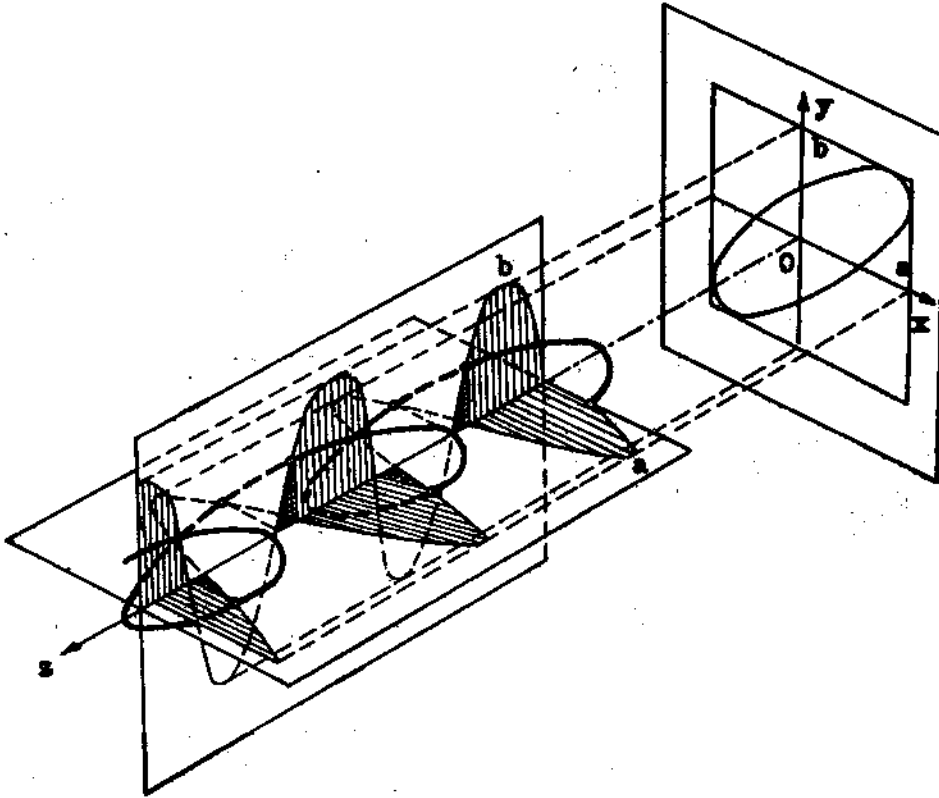


Fig. 1.7: A extremidade do vetor  $\vec{E}$  descreve no espaço uma hélice (curva em linha cheia) cuja projeção sôbre um plano  $Z = \text{constante}$  é uma elipse (Figura reproduzida de Handbuch der Physik, vol. XXIV, p. 177 (Springer Verlag, Berlin, 1956)).

A forma da elipse depende da defasagem  $\delta$ . Consideremos primeiro dois casos particulares.

1<sup>o</sup>) Luz linearmente polarizada:

Suponhamos, para fixar idéias, que  $a \geq b$ . Quando  $\delta$  for um

múltiplo inteiro de  $\pi$ ,

$$\delta = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (68)$$

vamos ter  $\cos \delta = (-1)^n$ , de modo que a (67) fica, para  $n$  par,

$$(E_x/a - E_y/b)^2 = 0, \quad \text{ou}$$

$$E_y/E_x = b/a \quad (\delta = 0, \pm 2\pi, \dots) \quad (69)$$

e, para  $n$  ímpar,

$$(E_x/a + E_y/b)^2 = 0, \quad \text{ou}$$

$$E_y/E_x = -b/a \quad (\delta = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots). \quad (70)$$

Os dois casos estão representados na fig. 1.8.

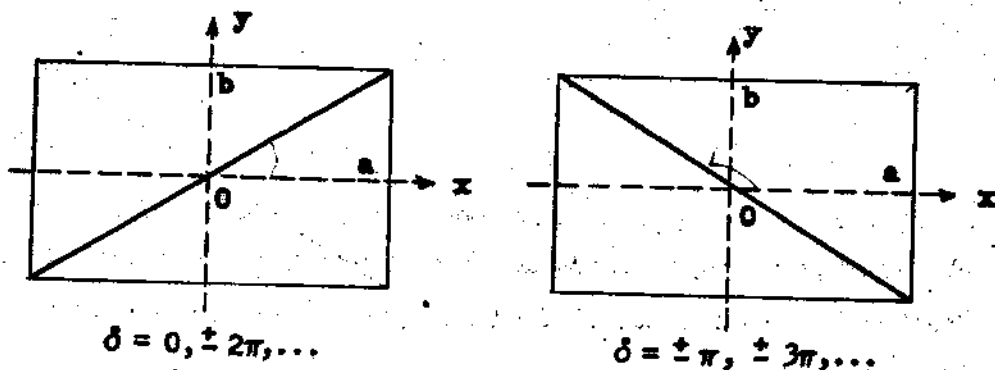


Fig. 1.8: Luz linearmente polarizada.

A extremidade de  $\vec{E}$  (ou de  $\vec{H}$ ) descreve um segmento de reta, de modo que o vetor tem direção constante. Como  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são perpendiculares entre si, isto define dois planos perpendiculares: os planos  $(\vec{E}, \hat{u})$  e  $(\vec{H}, \hat{u})$ . Na antiga teoria elástica da luz (cf. In-



trodução), o plano que continha o "vetor luminoso" e a direção de propagação era denominado plano de polarização. Esse plano correspondia ao que, na teoria eletromagnética, é o plano  $(\vec{H}, \hat{u})$  e o nome foi conservado, chamando-se plano de vibração ao plano  $(\vec{E}, \hat{u})$ . Na realidade, se entendermos por "vetor luminoso" o vetor que produz os efeitos físicos associados à luz, esse nome cabe ao vetor  $\vec{E}$  e não a  $\vec{H}$ . Com efeito, a ação da luz sobre um detetor (ôlho, fotocélula, chapa fotográfica) provém da força com que ela atua sobre as cargas atômicas, que é a fôrça de Lorentz

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}), \quad (71)$$

onde  $e$  é a carga e  $\vec{v}$  a velocidade da partícula. Como  $|\vec{E}|$  e  $|\vec{B}|$  são da mesma ordem numa onda plana e como  $v \ll c$ , vemos que a fôrça magnética é desprezível em confronto com a elétrica e por conseguinte é esta que produz a maior parte dos efeitos físicos da luz. A verificação experimental deste resultado será discutida no §3.1(b).

## 2º) Luz circularmente polarizada:

Para que a (67) se reduza à equação de um círculo, devemos ter

$$a = b \quad e \quad (72)$$

$$\delta = n\pi + \pi/2 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Temos então um círculo de raio  $a$ :

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2$$

e as (65) ficam

$$E_x = a \cos \phi, \quad E_y = (-1)^{n+1} a \sin \phi. \quad (73)$$

Para ver em que sentido é descrito o círculo, notemos que o vetor  $\vec{E}$  pode ser representado no plano complexo pelo ponto  $E_x + i E_y$ . No plano  $z = 0$ , em que  $\phi = -\omega t$ , obtemos então, para  $n$  par,

$$E_x + i E_y = a e^{i\omega t} \quad (\delta = \pi/2 \pm 2m\pi) \quad (74)$$

e, para  $n$  ímpar,

$$E_x + i E_y = a e^{-i\omega t} \quad (\delta = 3\pi/2 \pm 2m\pi). \quad (75)$$

Como  $e^{i\omega t}$  corresponde a uma rotação de  $\omega t$  no sentido positivo, isto implica que um observador, olhando para a direção de onde vem a luz, vê  $\vec{E}$  girar no sentido anti-horário para  $n$  par (luz circularmente polarizada esquerda) e no sentido horário para  $n$  ímpar (luz circularmente polarizada direita) (fig. 1.9).

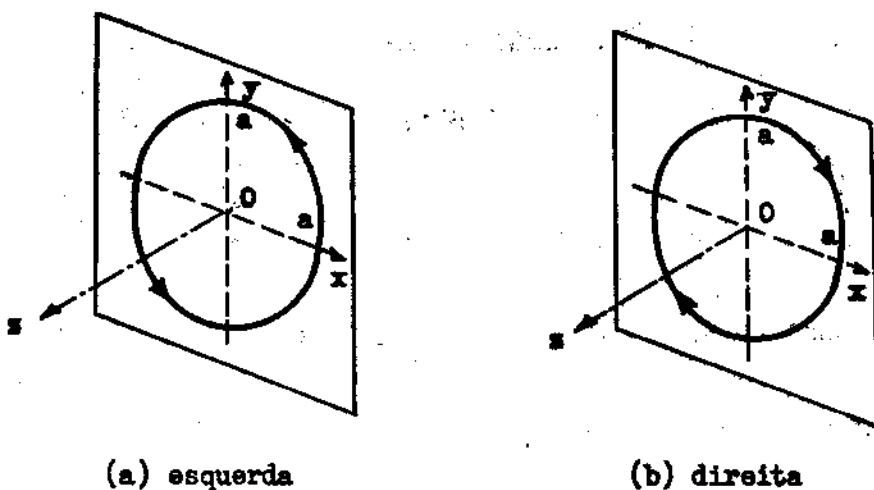


Fig. 1.9: Luz circularmente polarizada esquerda (a) e direita (b).

Exercício 1.2.5: Demonstrar que qualquer onda linearmente polarizada pode ser considerada como resultante de uma onda circularmente polarizada direita e uma onda circularmente polarizada esquerda de mesma amplitude, desde que se escolha convenientemente a defasagem entre elas.

Voltemos agora ao caso geral da luz elípticamente polarizada. A (67) mostra que, para  $\delta = n\pi + \pi/2$ , os eixos da elipse coincidem com os eixos de coordenadas. Entretanto, para outros valores de  $\delta$ , isto não acontece: o eixo maior da elipse faz com Ox um ângulo  $\psi = 0$  (fig. 1.10). Para determiná-lo, basta fa-

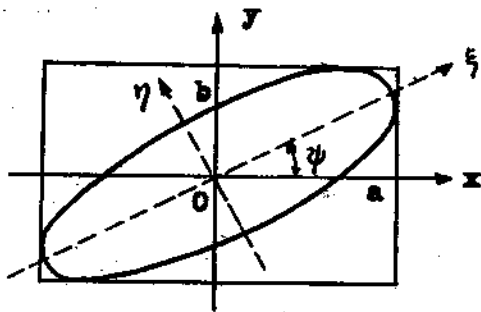


Fig. 1.10: Luz elípticamente polarizada.

zer uma rotação de eixos:

$$E_x = E_\xi \cos \psi - E_\eta \sin \psi ,$$

$$E_y = E_\xi \sin \psi + E_\eta \cos \psi .$$

Substituindo na (67), obtém-se uma equação de segundo grau em  $E_\xi$  e

$E_\gamma$ . Impondo a condição de que o termo em  $E_\xi$   $E_\gamma$  se anule, obtém-se (exercício 1.2.6):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\psi &= \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cos \delta = \\ &= \operatorname{tg} 2\alpha \cos \delta, \end{aligned} \quad (76)$$

onde

$$\operatorname{tg} \alpha = b/a. \quad (77)$$

De (76) resulta que a inclinação da elipse varia com  $\delta$  da forma indicada na fig. 1.11. O sentido de percurso pode ser obtido por

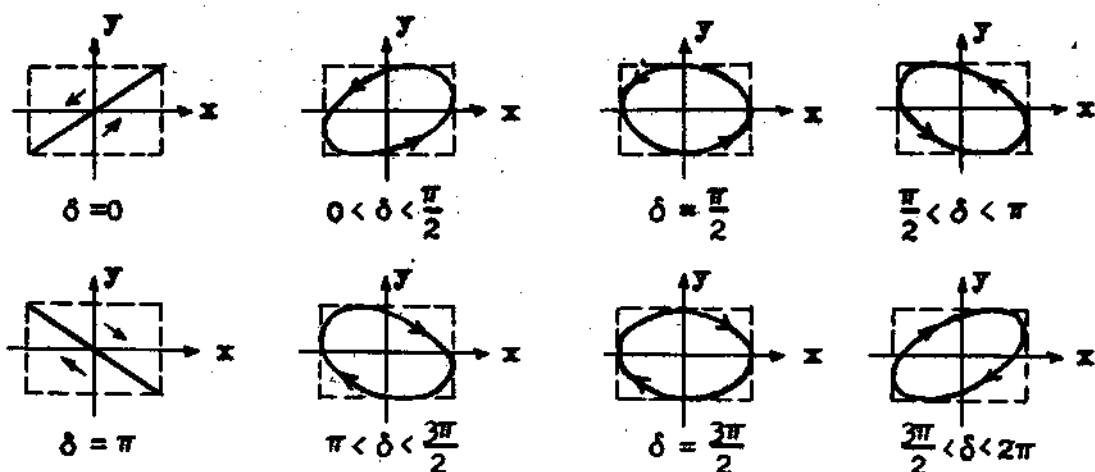


Fig. 1.11: Variação da forma e sentido de percurso da elipse em função da defasagem.

analogia com o caso da luz circularmente polarizada e por continuidade.

-----  
 Exercício 1.2.6: Demonstrar a (76).  
 -----

-----

Exercício 1.2.7: Uma onda circularmente polarizada esquerda de amplitude  $a$  e uma onda circularmente polarizada direita de amplitude  $b$  e de mesma frequência propagam-se na mesma direção. Descrever a polarização da onda resultante.

-----

Exercício 1.2.8: Demonstrar que a superposição de um número qualquer de ondas planas de mesma frequência, que se propagam na mesma direção, é uma onda elípticamente polarizada.

-----

Uma onda plana monocromática representa um caso limite ideal, que não pode ser realizado experimentalmente: é ilimitada tanto no espaço como no tempo. Um feixe paralelo de raios luminosos, que se comporta aproximadamente como uma porção limitada de onda plana, pode ser obtido com o auxílio de um colimador, isto é, iluminando uma fenda situada no plano focal de uma lente convexa. Da mesma forma, com o auxílio de um monocromador, ou seja, de um espectroscópio com uma fenda de saída para a luz analisada, é possível selecionar um pequeno intervalo de frequências, obtendo luz quase-monocromática.

A luz não monocromática pode ser representada, através da integral de Fourier (cf. apêndice 1B), como uma superposição de ondas monocromáticas. Isto corresponde à decomposição espectral da luz.

O exercício 1.2.8 mostra que uma superposição de ondas planas monocromáticas da mesma frequência e direção de propaga-

ção é uma onda elípticamente polarizada. Em geral, porém, isto deixa de valer para uma superposição de ondas de frequências diferentes. Obtém-se em geral luz parcialmente polarizada. A luz natural, emitida por corpos incandescentes, compreende tôdas as frequências e é completamente não-polarizada.

A representação matemática da luz parcialmente polarizada ou não-polarizada é um problema difícil, que não poderemos abordar aqui. Recomendamos ao leitor interessado que consulte o capítulo X do livro de Born e Wolf (cf. Leitura Recomendada, no fim dêste capítulo).

### 1.3 PROPAGAÇÃO NUM MEIO CONDUTOR

#### 1.3.(a) A Equação do Telégrafo.

Consideremos agora o caso de um meio condutor:  $\sigma \neq 0$ . Devido ao efeito Joule, um meio condutor é sempre absorvente e, em particular, um bom condutor deveria ser opaco. Como se explica, então, que uma solução eletrolítica, boa condutora, possa ser transparente? A razão é novamente o fenômeno da dispersão: a condutividade depende da frequência e a solução, embora seja transparente ao espectro visível, será opaca para ondas de rádio, por exemplo.

A condutividade varia enormemente com a natureza da substância, desde valores da ordem de  $10^7$  mhos/m para metais, até valores da ordem de  $10^{-17}$  mhos/m para bons isolantes. Um pedaço de metal ordinário é um agregado de pequenos cristais orientados

ao acaso, de modo que pode ser tratado como um meio isotrópico, apesar da estrutura cristalina.

As equações de Maxwell, se admitirmos a presença de cargas verdadeiras, ficam (usando as equações constitutivas)

$$(I) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$(II) \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

(78)

$$(III) \quad \text{div } \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho_v,$$

$$(IV) \quad \text{div } \vec{H} = 0,$$

enquanto que a equação da continuidade e a (III) dão

$$- \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \text{div } (\sigma \vec{E}) = 4\pi \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v,$$

ou seja,

$$\rho_v(t) = \rho_v(0) e^{-t/\theta},$$

(79)

onde

$$\theta = \epsilon/4\pi\sigma.$$

(80)

A (79) mostra que qualquer distribuição de cargas colocada dentro de um meio condutor decai exponencialmente com o tempo, com

"vida média"  $\theta$ , característica do meio, que se chama tempo de relaxação. Pela (80), vemos que o inverso desse tempo é da ordem da frequência característica associada à condutividade  $\sigma$  (cf. §1.1.(b)). Os valores numéricos do tempo de relaxação de diversas substâncias estão representados na tabela V.

Tabela V: Tempo de relaxação de diferentes substâncias

Substância	$\sigma(20^\circ \text{ C})$ (mhos/m)	$\sigma(20^\circ \text{ C})$ ( $\text{s}^{-1}$ )	$\epsilon$	$\theta$ (s)
Cobre	$5,8 \cdot 10^7$	$5,14 \cdot 10^{17}$	$\sim 1^{(*)}$	$(1,5 \cdot 10^{-19})$
Água destilada	$2 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^6$	81	$3,6 \cdot 10^{-6}$
Porcelana	$3 \cdot 10^{-13}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	5,7	$1,7 \cdot 10^2$
Enxofre	$10^{-15}$	$9 \cdot 10^{-6}$	4	$3,5 \cdot 10^4$ ( $\sim 10 \text{ h}$ )
Quartzo fundido	$< 2 \cdot 10^{-17}$	$< 1,8 \cdot 10^{-7}$	5	$> 2,2 \cdot 10^6$ ( $\sim 25 \text{ d}$ )

(\*) É óbvio que  $\epsilon$  não pode ser medido pelo processo habitual no caso de um metal. Os valores de  $\epsilon$  estimados teoricamente ou medidos por processos óticos (cf. §2.2.(b)) são da ordem da unidade.

O valor obtido para o cobre mostra que a (80) não pode ser aplicada neste caso, e por isto foi colocado entre parênteses na tabela V. Com efeito, o período da luz ultra-violeta de  $3\ 000 \text{ \AA}$  ( $0,3 \mu$ ) é da ordem de  $10^{-15} \text{ s}$ , de modo que a (80) dá, neste caso, valores correspondentes a frequências muitíssimo mais elevadas do que aquelas para as quais



a teoria pode ser aplicada. O mesmo vale para outros metais. Tudo que se pode dizer é que o tempo de relaxação num metal é muito inferior aos períodos das ondas eletromagnéticas no domínio que estamos estudando. Logo, uma distribuição de carga colocada no interior do metal desaparece quase instantaneamente, dirigindo-se para a superfície, onde fica localizada (quando o metal está imerso num meio isolante, como o ar), sob a forma de distribuição superficial. Portanto, podemos tomar  $\rho_v$  como sendo nulo nas (78).

Nestas condições, procedendo com as (78) de forma análoga ao que foi feito no §1.2.(a) para deduzir a equação de ondas, obtemos (prova !)

$$\Delta \vec{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (81)$$

e uma equação da mesma forma para  $\vec{H}$ .

A (81) difere da equação de ondas pelo termo em  $\partial \vec{E} / \partial t$ . Este termo é análogo ao que aparece na equação da condução do calor (\*),

$$\Delta u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (82)$$

onde  $u$  é a temperatura e  $k$  a condutividade térmica. Como a condução do calor, a condução elétrica é um fenômeno irreversível, em que a energia eletromagnética é dissipada pelo efeito Joule: um meio condutor é sempre absorvente. A (81), que é denominada equação do telégrafo (pois

(\*)

Vide, por exemplo, A. Sommerfeld, "Partial Differential Equations in Physics" (Academic Press, New York, 1949), pg. 34.

desempenha um papel importante na propagação de ondas eletromagnéticas em fios condutores), representa, conforme veremos em seguida, a propagação de ondas amortecidas.

→ 1.3.(b) Soluções Monocromáticas. Índice de Refração Complexo.

Vamos procurar uma solução monocromática da (81), de frequência angular  $\omega$ . Usando a notação complexa, as componentes dos campos dependerão do tempo através de um fator  $e^{-i\omega t}$ . Como

*soluções monocromáticas*

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{-i\omega t}) = -i\omega e^{-i\omega t},$$

podemos substituir  $\partial/\partial t$  por  $-i\omega$ . A (I) fica, então,

$$\text{rot } \vec{H} = -\frac{i\omega}{c} \left( \epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} \quad (83)$$

e a (81) se escreve

$$\Delta \vec{E} = -\frac{\mu\omega^2}{c^2} \left( \epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E}. \quad (84)$$

Formalmente, estas equações só diferem das que foram obtidas no caso de um meio transparente pela substituição

$$\epsilon \longrightarrow \epsilon' = \epsilon + 4\pi i \frac{\sigma}{\omega}, \quad (85)$$

onde  $\epsilon'$  é chamado de constante dielétrica complexa. Qualquer solução monocromática das (41) cuja dependência temporal seja dada pelo fator  $\exp(-i\omega t)$  torna-se uma solução formal das (78) (com  $\rho_v = 0$ ) por esta substituição. Entretanto, a solução obtida nem sem-

pre é fisicamente admissível, conforme veremos logo. Aplicando a substituição (85) às soluções em ondas planas monocromáticas obtidas no §1.2.(c), resulta:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp [i k' (\hat{u} \cdot \vec{r} - v' t)], \\ \vec{H} &= \sqrt{\epsilon' / \mu} \hat{u} \times \vec{E},\end{aligned}\quad (86)$$

onde  $\vec{E}_0$  é um vetor complexo constante e

$$\begin{aligned}v' &= c/n' = c/\sqrt{\epsilon' \mu}, \\ k' v' &= \omega = k' c/n',\end{aligned}\quad (87)$$

$$\vec{k}' = n' \omega / c \hat{u} = n' k_0 \hat{u}.$$

Tôdas as grandezas assinaladas com "linha" (') são complexas. Em particular, temos um índice de refração complexo, que representaremos por

$$n' = \sqrt{\epsilon' \mu} = n + iK, \quad \text{coef. de atenuação} \quad (88)$$

onde  $n$  e  $K$  são reais;  $n$  chama-se índice de refração real e  $K$  chama-se coeficiente de atenuação, por razões que veremos mais adiante.

As (85) e (88) dão

$$\begin{aligned}n'^2 &= \epsilon \mu + 4\pi i \sigma \mu / \omega = \\ &= n^2 - K^2 + 2 i n K,\end{aligned}$$

ou seja,

$$n^2 - K^2 = \epsilon \mu,$$

$$n K = 2\pi \sigma \mu / \omega.$$

Eliminando  $K$  entre as (89), obtemos uma equação de segundo grau em  $n^2$ ,

$$n^4 - \epsilon \mu n^2 - 4\pi^2 (\sigma \mu / \omega)^2 = 0,$$

da qual tiramos apenas uma solução:

$$n^2 = \frac{\mu}{2} \left( \sqrt{\epsilon^2 + 16\pi^2 \frac{\sigma^2}{\omega^2}} + \epsilon \right), \quad (90)$$

visto que a outra raiz não daria  $n$  real. Substituindo a (90) na primeira das (89), obtemos

$$K^2 = \frac{\mu}{2} \left( \sqrt{\epsilon^2 + 16\pi^2 \frac{\sigma^2}{\omega^2}} - \epsilon \right). \quad (91)$$

As (90) e (91) dão as partes real e imaginária do índice de refração complexo (88). Substituindo nas (86) as grandezas complexas definidas pelas (87) e (88), obtemos

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-K k_0 \hat{u} \cdot \vec{r}) \exp[i(n k_0 \hat{u} \cdot \vec{r} - \omega t)], \quad (92)$$

$$\vec{H} = \frac{n'}{\mu} \hat{u} \times \vec{E} = \frac{1}{\mu} \sqrt{n^2 + K^2} e^{i\delta} \hat{u} \times \vec{E}, \quad (93)$$

onde

$$\delta = \text{tg}^{-1} (K/n). \quad (94)$$

As (92) e (93) definem uma solução monocromática complexa das equações de Maxwell para o meio condutor; conforme vimos no §1.1.(e), a parte real das (92) e (93) também é então uma solução

dessas equações. Qual é o significado físico desta solução ?

As (92) e (93) são ondas planas transversais que se propagam na direção  $\hat{u}$ : o fator de propagação da fase é dado pela segunda exponencial na (92). Vemos que  $n$  se comporta de fato como um índice de refração real: a velocidade de propagação da fase é  $c/n$ .

Entretanto, a amplitude da onda não é constante: atenua-se exponencialmente ao longo da direção de propagação. O fator de atenuação é dado pela primeira exponencial na (92). Esta atenuação corresponde à absorção da onda à medida que penetra no meio, devido ao efeito Joule. Como a onda deve atenuar-se no sentido da propagação, vemos que  $K$  é sempre positivo. A segunda (89) mostra então que  $n$  também é positivo, de modo que devemos sempre tomar as raízes positivas das (90) e (91).

A (94) mostra também que, ao contrário do que sucedia para um meio transparente, há uma defasagem  $\delta \neq 0$  entre  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$ .

A atenuação sofrida pela amplitude da onda ao avançar uma distância  $d$  ao longo da direção de propagação é dada por  $\exp(-K k_0 d) = \exp(-2\pi K d / \lambda_0)$ . A distância correspondente a uma atenuação de  $e^{-1}$  é dada por

$$d = \lambda_0 / 2\pi K = 1/k_0 K. \quad (95)$$

Isto justifica o nome de coeficiente de atenuação dado a  $K$ .

Ao contrário das soluções obtidas para um meio transparente, as (92) e (93) não podem ser aplicadas a um meio condutor ilimitado em todos os sentidos. Com efeito, uma vez que as amplitudes decrecem exponencialmente no sentido da propagação, elas crecem

exponencialmente no sentido oposto e tendem a infinito com a distância. A solução pode ser aplicada, porém, se o condutor ocupa um semi-espaço: isto acontece, por exemplo, se uma onda plana, propagando-se no vácuo, incide perpendicularmente sobre a superfície do condutor. Neste caso, as amplitudes dos campos na superfície do metal obtêm-se a partir das amplitudes correspondentes da onda plana incidente pelas condições de contorno (êste problema será resolvido no Capítulo 2). As (92) e (93) representam, então, a penetração do campo no condutor (a direção de propagação é normal à superfície). O parâmetro  $d$  definido pela (95) chama-se profundidade de penetração, pois mede a espessura da camada na qual a intensidade da onda é apreciável.

As densidades de energia elétrica e magnética dadas pelas (92) e (93) não são iguais, como no caso de um meio transparente.

Temos

$$\begin{aligned}\bar{W}_m &= \frac{\mu}{16\pi} \operatorname{Re} (\vec{H} \cdot \vec{H}^*) = \\ &= \frac{\mu}{16\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{n^2 + k^2}{\mu^2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right) = \\ &= \frac{n^2 + k^2}{\mu \epsilon} \bar{W}_e,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\bar{W}_m}{\bar{W}_e} = \frac{n^2 + k^2}{\mu \epsilon} = \quad (96)$$

$$= \sqrt{1 + (4\pi\sigma/\omega\epsilon)^2},$$

onde usamos as relações (90) e (91).

Vejamos agora qual é a ordem de grandeza dos parâmetros que intervêm nestes fenômenos no caso de bons condutores, como os metais. Neste caso,  $\epsilon$  não pode ser medido diretamente, mas seu valor pode ser obtido a partir de experiências óticas (conforme veremos no §2.2.(b)) e resulta ser da mesma ordem que no caso de um dielétrico. Para cálculo de ordens de grandeza podemos, portanto, tomar  $\epsilon = 1$ . Para o cobre, de acordo com a tabela V,  $\sigma = 5,14 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$ , de modo que

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\sigma}{\omega} &= \frac{1,028 \cdot 10^{18}}{3 \cdot 10^{10}} \lambda_0 \text{ (cm)} \\ &= 3,4 \cdot 10^7 \lambda_0 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Assim, para  $\lambda_0 > 1 \mu (10^{-4} \text{ cm})$ , é

$$4\pi\sigma/\omega > 3,4 \cdot 10^3,$$

ou seja

$$4\pi\sigma/\omega \gg \epsilon. \quad (97)$$

Isto vale de um modo geral para bons condutores e  $\lambda_0 > 1 \mu$ . Como se vê pela (83), a (97) significa que, para bons condutores, a frequências abaixo do infra-vermelho, a corrente de deslocamento é desprezível em confronto com a corrente ôhmica.

Nestas condições, as fórmulas precedentes simplificam-se muito. As (90) e (91) ficam:

$$n^2 \approx K^2 \approx 2\pi\sigma\mu/\omega.$$

Como  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e  $\mu \approx 1$ , isso dá:

$$n \approx K \approx \sqrt{\sigma T}. \quad (98)$$

O campo magnético fica

$$\vec{H} \approx \sqrt{2} e^{i\pi/4} n \hat{u} \times \vec{E}, \quad (99)$$

e a razão das energias médias é dada por

$$\frac{\bar{W}_m}{\bar{W}_e} \approx \frac{4\pi\sigma/\omega}{\epsilon} \gg 1. \quad (100)$$

Como vemos, a energia do campo no condutor é quase puramente magnética (mesmo para  $\lambda_0$  da ordem de  $1\mu$ , no cobre,  $\bar{W}_m > 3 \cdot 10^3 \bar{W}_e$ ). É essencialmente a energia magnética que é dissipada no efeito Joule.

### 1.3.(c) Efeito Pelicular.

Para um bom condutor, no domínio de validade da (98), a (95) dá

$$d \approx \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \quad (101)$$

Logo, a profundidade de penetração é inversamente proporcional à raiz quadrada da frequência: quanto mais rápida a oscilação, menos ela penetra. Para o cobre, com o auxílio da tabela V, acha-se:

$$\begin{aligned} d &\approx 16,7/\sqrt{\omega} \text{ cm} \approx \\ &\approx 3,9 \cdot 10^{-5} \sqrt{\lambda_0} \text{ (cm)} \text{ cm.} \end{aligned}$$

A profundidade de penetração no cobre, para diversos valores da frequência, está representada na tabela VI.



**Tabela VI:** Profundidade de penetração no cobre a diferentes frequências.

$\omega$	377 (60~)	$10^4$ (rádio)	$10^6$ (T.S.F.)	$10^8$ (T V)	$10^{10}$ (micro-ondas)	$\lambda_0 = 1 \text{ cm.}$
d	8,6 mm	1,7 mm	0,17 mm	0,017 mm	$1,7 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$	$3,9 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$

Esta tabela dá, também, uma idéia da espessura de uma chapa de cobre que é necessária para "blindar" um corpo da ação do campo a diferentes frequências.

Além das restrições sobre as frequências impostas no §1.1.(b), há restrições adicionais para a validade dos resultados precedentes. Essas restrições decorrem do fato de que as equações de Maxwell, devido ao seu caráter macroscópico, somente são aplicáveis quando os parâmetros que intervêm na teoria são muito maiores que as grandezas microscópicas. No caso de um metal, isto implica nas seguintes restrições: A) o período das vibrações eletromagnéticas deve ser muito maior que o intervalo de tempo médio entre duas colisões dos elétrons livres no condutor; B) a distância típica para a qual o campo varia apreciavelmente (ou seja, a profundidade de penetração) deve ser muito maior que o caminho livre médio dos elétrons livres.

À temperatura ambiente, o intervalo de tempo médio entre duas colisões num bom condutor é da ordem de  $10^{-12} \text{ s}$  e o caminho livre médio é cerca de  $10^{-5} \text{ cm}$ . A Tabela VI mostra então que

o limite de validade dos resultados precedentes está no domínio das ondas centimétricas, ou seja, antes da região em que os efeitos da dispersão começam a se fazer sentir.

O efeito de penetração inversamente proporcional à raiz quadrada da frequência é análogo ao que sucede com a penetração das "ondas de calor" no interior da Terra. Isto se compreende facilmente, pois, quando vale a (97), o primeiro termo do segundo membro da (81) é desprezível em confronto com o segundo e cada componente de  $\vec{E}$  satisfaz a uma equação idêntica à equação da condução do calor (82). As variações médias anuais de temperatura penetram no interior da Terra cerca de  $\sqrt{365}$ , ou seja, cerca de 19 vezes mais profundamente que as variações diurnas. Quando é verão na superfície ainda é inverno a uns quatro metros de profundidade, mas se é dia na superfície ainda é noite a apenas vinte centímetros.

-----

Exercício 1.3.1: Demonstrar estes resultados, procurando soluções monocromáticas da (82). Tomar para condutividade térmica do solo  $k = 2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ .

-----

Um efeito inteiramente análogo é o efeito pelicular ("skin effect") nos fios condutores. Se considerarmos o balanço de energia de um trecho de condutor percorrido por uma corrente (exercício 1.1.2), vemos que há um fluxo de energia eletromagnética para dentro dele, através da superfície lateral; essa energia vai sendo dissipada em calor pelo efeito Joule. Para um condutor cilíndrico com uma distribuição de corrente axial (fig. 1.12.(a)),  $\vec{E}$

e  $\vec{H}$  na superfície são tangentes à mesma e perpendiculares entre si.

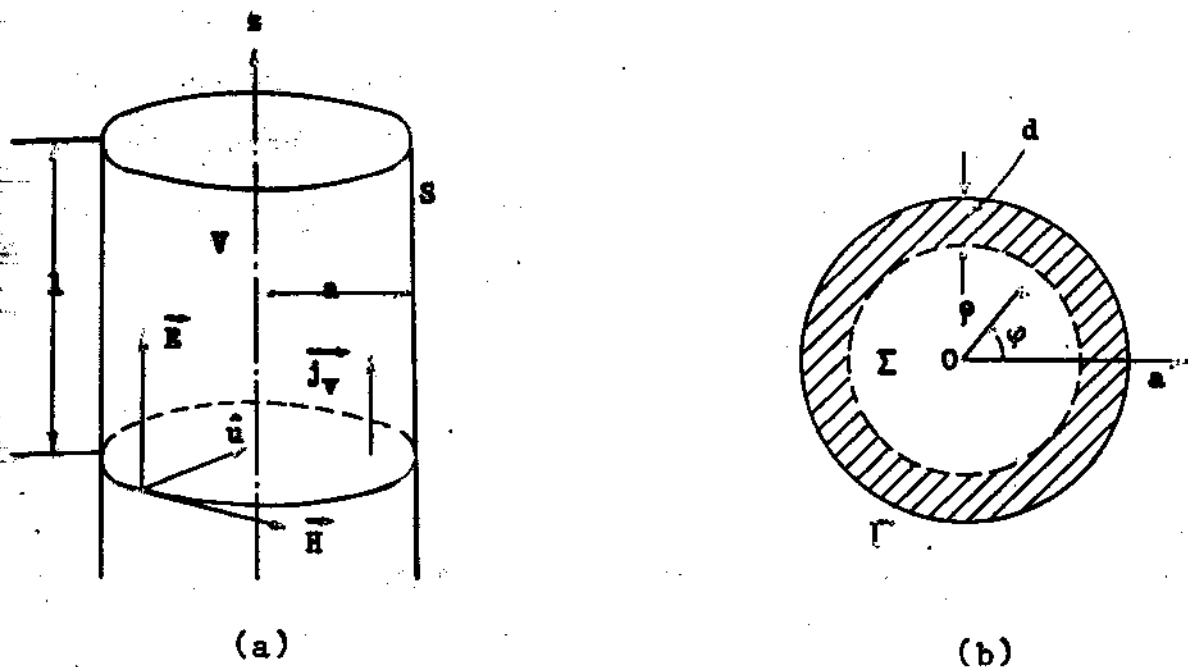


Fig. 1.12: Efeito pelicular num condutor cilíndrico.

Os vetores  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\hat{u}$  têm, portanto, uma disposição análoga à da onda plana (92) - (93) e é de se esperar que a penetração do campo no condutor também seja análoga. Assim, se  $d$  é muito maior que o raio  $a$  do fio, a corrente deve estar distribuída quase uniformemente sobre a seção (efeito pelicular fraco), ao passo que, para frequências elevadas, em que  $d$  é muito menor que  $a$ , a corrente deve estar concentrada numa película de espessura  $d$ , junto à superfície (efeito pelicular forte).

Como a resistência é inversamente proporcional à seção, isso implica que a resistência de um fio condutor deve aumentar para frequências elevadas. Se admitirmos que a densidade de corrente se distribui da forma acima indicada, podemos estimar o aumento de resistência aproximando a distribuição de corrente por uma dis-

tribuição uniforme numa coroa circular de largura  $d$  junto à superfície e nula no interior (fig. 1.12.(b)). A resistência  $R$  à frequência  $\omega$  está para a resistência  $R_0$  à frequência zero (corrente contínua) na razão inversa das áreas ocupadas pela corrente nesses dois casos, de modo que, para o efeito pelicular forte ( $d \ll a$ ), obtemos

$$\begin{aligned} R/R_0 &= \pi a^2 / 2\pi a d = \\ &= a/2d = \\ &= a \sqrt{2\pi \sigma \omega} / 2c . \end{aligned} \quad (102)$$

Esta é a fórmula de Rayleigh. Vamos mostrar agora que uma teoria mais exata do efeito pelicular num condutor cilíndrico conduz precisamente ao mesmo resultado.

### \* 1.3(d). Teoria do efeito pelicular.\*

Para isto, voltemos a considerar o condutor cilíndrico percorrido por uma corrente axial. Vamos introduzir coordenadas cilíndricas com eixo  $Oz$  no eixo do cilindro. Por simetria, os campos só dependem da coordenada  $\rho$  e as únicas componentes não nulas são

$$\begin{aligned} E_z &= E_z(\rho) e^{-i\omega t} , \\ H_\varphi &= H_\varphi(\rho) e^{-i\omega t} , \end{aligned} \quad (103)$$

como vemos pela fig. 1.12. Vamos partir da expressão (cf. exercício 1.1.3)

$$-\operatorname{div} \vec{S}^+ = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{j}_v^* + 2 i\omega (\bar{W}_e - \bar{W}_m),$$

onde  $\vec{S}^+$  é o vetor de Poynting complexo. Devido à (100), podemos desprezar  $\vec{W}_e$  em confronto com  $\vec{W}_m$  nessa expressão. Integrando ambos os membros sobre um trecho  $V$  do condutor de altura unitária (fig. 1.12), obtemos então

$$\begin{aligned} -\frac{c}{8\pi} \int_V \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}^*) d\tau &= -\frac{c}{8\pi} \int_S \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \hat{n} dS = \\ &= \frac{c}{8\pi} \int_{\Gamma} E_z(a) H_{\varphi}^*(a) dl = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma E_z E_z^* dS - 2i\omega \frac{\mu}{16\pi} \int_{\Sigma} H_{\varphi} H_{\varphi}^* dS, \end{aligned}$$

onde  $S$  é a superfície lateral,  $\Sigma$  a secção transversal e  $\Gamma$  o contorno de  $\Sigma$  (fig. 1.12).

Aplicando a lei circuital de Ampère, vem:

$$\frac{c}{8\pi} \int_{\Gamma} E_z(a) H_{\varphi}^*(a) dl = \frac{c}{8\pi} E_z(a) \int_{\Gamma} H_{\varphi}^*(a) dl = \frac{1}{2} E_z(a) I^*,$$

onde

$$I = \int_{\Sigma} j_v dS$$

é a intensidade da corrente. Obtemos então:

$$\frac{1}{2} E_z(a) I^* = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma E_z E_z^* dS - 2i\omega \frac{\mu}{16\pi} \int_{\Sigma} H_{\varphi} H_{\varphi}^* dS. \quad (104)$$

O primeiro termo do segundo membro é a potência média dissipada em efeito Joule por unidade de comprimento do fio e o fator que está multiplicado por  $-2i\omega$  é a energia magnética média por unidade de comprimento armazenada no interior do fio

Foi visto no curso anterior que, para corrente alternada de intensidade  $I$  (valor instantâneo), a potência dissipada num condutor de resistência  $R$  é dada por  $R I^2$  e a energia armazenada no campo magnético é  $L I^2/2$ , onde  $L$  é a auto-indutância do condutor. Se usarmos a notação complexa, com o fator temporal  $\exp(-i\omega t)$ , resulta da (34) que os valores médios dessas expressões são dados, respectivamente, por  $\frac{1}{2} R I I^*$  e  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} L I I^*$ . Estas expressões podem ser usadas para definir  $R$  e  $L$  a frequências elevadas (\*). Para aplicá-las à (104), temos de substituir  $R$  por  $\tilde{R}$ , a resistência por unidade de comprimento, e  $L$  por  $\tilde{L}_1$ , a auto-indutância interna por unidade de comprimento ( $L = L_1 + L_e$ , onde  $L_1$ , a auto-indutância interna, está associada à energia do campo magnético interno ao condutor e  $L_e$ , a auto-indutância externa, está associada ao campo magnético externo). A (104) fica então:

$$E_z(a) I^*/2 = \tilde{R} I I^*/2 - i\omega \tilde{L}_1 I I^*/2,$$

ou seja,

$$E_z(a) = (\tilde{R} - i\omega \tilde{L}_1) I. \quad (105)$$

(\*)

Não podemos aplicar a lei de Ohm em sua forma usual, válida a baixas frequências, para obter esta definição. Com efeito, a altas frequências,  $E_z$  não é constante sobre a secção, de modo que a "voltagem" entre dois pontos de secções diferentes depende dos pontos escolhidos em cada secção.

A (105) tem a mesma forma que a "lei de Ohm generalizada"  $V = Z I$  que se emprega na teoria de circuitos de corrente alternada.  $E_z(a)$  representa a voltagem por unidade de comprimento na superfície do fio, e o fator<sup>(\*)</sup>

$$\tilde{Z}_1 = \tilde{R} - i\omega\tilde{L}_1 \quad (106)$$

chama-se impedância interna do condutor (por unidade de comprimento). É claro que, para calcular a impedância total de um circuito, é preciso levar em conta também a impedância externa, que contém a contribuição da auto-indutância externa. Esta depende fortemente da forma do circuito, ao passo que a impedância interna é praticamente independente da forma (desde que a curvatura do fio não seja muito forte).

Vamos mostrar agora que é possível exprimir  $\tilde{Z}_1$  em função exclusivamente do campo elétrico e de sua derivada normal, calculados na superfície do fio. Para isto, vamos partir da equação do telégrafo (84), desprezando a corrente de deslocamento e tomando  $\mu = 1$ :

$$\begin{aligned} \Delta E_z(\rho) &= - \frac{4\pi i\sigma\omega}{c^2} E_z(\rho) = \\ &= - \frac{2i}{d^2} E_z(\rho), \end{aligned}$$

(\*)

Obtivemos  $-i\omega L$  para a reatância porque tomamos  $\exp(-i\omega t)$  ao invés do fator temporal  $\exp(i\omega t)$  que se emprega usualmente na teoria de circuitos de corrente alternada.

onde  $d$  é a profundidade de penetração (101). Para uma função que só depende de  $\rho$ , o laplaciano em coordenadas cilíndricas é (cf. exercício 1.2.2):

$$\Delta = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right).$$

Obtemos portanto

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dE_z}{d\rho} \right) = - \frac{21}{d^2} E_z(\rho). \quad (107)$$

A intensidade da corrente é dada por

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Sigma} \sigma E_z dS = \\ &= 2\pi\sigma \int_0^a E_z(\rho) \rho d\rho, \end{aligned}$$

ou, tirando o valor de  $\rho E_z$  da (107),

$$I = \frac{1}{2} d^2 \cdot 2\pi\sigma \int_0^a \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dE_z}{d\rho} \right) d\rho =$$

$$= i\pi\sigma d^2 a (dE_z/d\rho)_{\rho=a},$$

o que podemos exprimir em função da resistência  $\tilde{R}_0$  por unidade de comprimento para corrente contínua,

$$\tilde{R}_0 = 1/\pi\sigma a^2, \quad (108)$$

por



$$I = \frac{1}{a} \frac{d^2}{\tilde{R}_0} \left( \frac{dE_z}{d\rho} \right)_{\rho=a} \quad (109)$$

Substituindo na (105), obtemos

$$E_z(a) = \frac{1}{d^2} \left( \frac{\tilde{R} - i\omega \tilde{L}_1}{\tilde{R}_0} \right) \left( \frac{dE_z}{d\rho} \right)_{\rho=a},$$

ou seja

$$\frac{\tilde{R} - i\omega \tilde{L}_1}{\tilde{R}_0} = \frac{a}{1/d^2} \left( \frac{E_z}{dE_z/d\rho} \right)_{\rho=a}, \quad (110)$$

que é a expressão desejada.

Para calcular  $\tilde{Z}_1$ , basta, portanto, integrar a equação diferencial (107), o que dá a distribuição de  $E_z$  (e por conseguinte da corrente) sobre a secção. Pode-se mostrar que a solução dessa equação que permanece regular para  $\rho = 0$  é

$$E_z(\rho) = A J_0(\sqrt{2} \Gamma \rho/d), \quad (111)$$

onde  $J_0$  é a função de Bessel de ordem zero<sup>(\*)</sup> e  $A$  uma constante arbitrária. As partes real e imaginária de  $J_0(\sqrt{i} x)$  encontram-se tabeladas, por exemplo, no livro de Jahnke-Emde<sup>(\*\*)</sup>. Com o auxílio dessas tabelas, é possível calcular a distribuição de corrente e (pela (110)) a impedância interna para qualquer frequência.

Nos casos extremos do efeito pelicular forte ( $d \ll a$ ) ou fraco ( $d \gg a$ ), porém, é possível obter diretamente soluções simples,

(\*) Vide apêndice 4A e as referências ali citadas

(\*\*) E. Jahnke e F. Emde, "Tables of Functions" (Dover, New York, 1945), pg.246.

que representam muito boas aproximações.

(A) Efeito pelicular forte ( $d \ll a$ ).

Neste caso, o campo deve variar muito rapidamente em função de  $\rho$  na vizinhança da superfície, de modo que o fator lentamente variável  $\rho$  no primeiro membro da (107) pode ser tomado como constante na derivação (a contribuição principal à derivada provém do outro fator, conforme veremos logo):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dE_z}{d\rho} \right) &\approx \frac{d^2 E_z}{d\rho^2} = \\ &= - \frac{2}{d^2} E_z . \end{aligned}$$

Portanto, para  $\rho$  próximo de  $a$ , devemos ter

$$\frac{d^2 E_z}{d\rho^2} + \left( \frac{1+i}{d} \right)^2 E_z = 0 , \quad (112)$$

ou seja,

$$E_z(\rho) = E_z(a) \exp \left[ 1 \left( \frac{1+i}{d} \right) (a-\rho) \right] \quad (\rho < a). \quad (113)$$

Daqui decorre:

$$\left| \frac{d^2 E_z}{d\rho^2} \right| \sim \frac{1}{d} \left| \frac{dE_z}{d\rho} \right| \gg \left| \frac{1}{\rho} \frac{dE_z}{d\rho} \right| ,$$

o que justifica a aproximação feita. O sinal do expoente na (113) é determinado pela condição de que  $E_z$  deve decrecer à medida que penetra no interior do fio. É fácil ver, combinando as (92), (95) e (98), que a (113) corresponde precisamente a uma onda do tipo estudado no §1.3(b), com

$$\hat{u} \cdot \vec{r} = a - \rho,$$

penetrando no interior do fio. A (113) dá

$$\left( \frac{dE_z}{d\rho} \right)_{\rho=a} = \left( \frac{1-i}{d} \right) (E_z)_{\rho=a}.$$

Substituindo na (110), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{R} - i\omega L_1}{\tilde{R}_0} &= \frac{a}{i d^2} \frac{d}{1-i} = \\ &= (1-i) a/2d. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{R}/\tilde{R}_0 &= \omega \tilde{L}_1/\tilde{R}_0 = \\ &= a/2d, \end{aligned} \tag{114}$$

o que demonstra a fórmula de Rayleigh (102) e mostra ainda que a resistência interna e a resistência tendem a tornar-se iguais para frequências elevadas.

(B) Efeito pelicular fraco ( $d \gg a$ ).

Neste caso,  $E_z$  deve variar muito pouco sobre a secção, o que sugere procurar uma solução da (107) em forma de série de potências de  $y = \rho/d$  ( $y \leq a/d \ll 1$ ). Multiplicando ambos os membros da aquela equação por  $d^2$ , ela pode ser escrita:

$$4 \frac{d}{d(y^2)} \left[ y^2 \frac{dE_z}{d(y^2)} \right] = -21E_z. \quad (115)$$

Seja

$$E_z(y^2) = C_0 + C_1 y^2 + C_2 (y^2)^2 + \dots + C_n (y^2)^n + \dots \quad (116)$$

Ficará ao encargo do leitor (exercício 1.3.2) demonstrar que, substituindo a (116) na (115) e identificando os coeficientes, obtém-se:

$$C_n = \frac{(-21)^n}{2^2 4^2 \dots (2n)^2} C_0. \quad (117)$$

Das (116) e (117) resulta a expansão procurada (\*):

$$E_z = C_0 \left( 1 - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{16} y^4 + \frac{1}{288} y^6 + \dots \right). \quad (118)$$

Exercício 1.3.2: Demonstrar a (117).

(\*)

Esta expansão também pode ser obtida diretamente a partir da (111) e da expansão em série de potências de  $J_0(z)$  (cf. apêndice 4A).

A (118) dá:

$$\begin{aligned} \frac{dE_z}{d\rho} &= \frac{1}{d} \frac{dE_z}{dy} = \\ &= -\frac{10c_0}{d} y \left( 1 - \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{48} y^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \frac{E_z}{dE_z/d\rho} &= \frac{1d}{y} \left( 1 - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{16} y^4 + \dots \right) \left( 1 + \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{16} y^4 + \frac{1}{48} y^4 + \dots \right) = \\ &= \frac{1d}{y} \left( 1 - \frac{1}{4} y^2 + \frac{1}{48} y^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

Tomando  $\rho = a$  e fazendo (cf. (102))

$$a/2d = a \sqrt{2\pi\sigma\omega} / 2c = \eta, \quad (119)$$

resulta:

$$\left( \frac{E_z}{dE_z/d\rho} \right)_{\rho=a} = \frac{1d^2}{a} \left( 1 - \eta^2 + \frac{1}{3} \eta^4 + \dots \right) \quad (\eta \ll 1). \quad (120)$$

Levando na (110) e identificando as partes real e imaginária, obtemos

$$\tilde{R}/\tilde{R}_0 = 1 + \frac{1}{3} \eta^4 + \dots, \quad (121)$$

$$\omega \tilde{L}_1 / \tilde{R}_0 = \eta^2 + \dots$$

Pelas (108) e (119), a segunda (121) também pode ser escrita:

$$\omega \tilde{L}_1 \cdot \pi a^2 \sigma = \frac{2\pi a^2 \sigma \omega}{4c^2} + \dots,$$

ou seja

$$\tilde{L}_1 = \frac{1}{2c^2} + \dots \quad (122)$$

Vemos portanto que  $\tilde{L}_1$  tende a um valor finito quando  $\omega$  tende a zero (corrente contínua), valor este que também pode ser calculado diretamente (exercício 1.3.3).

**Exercício 1.3.3:** Demonstrar diretamente, calculando a energia magnética armazenada no interior do fio, que

$$\tilde{L}_1 = \frac{1}{2c^2}$$

à frequência zero (corrente contínua).

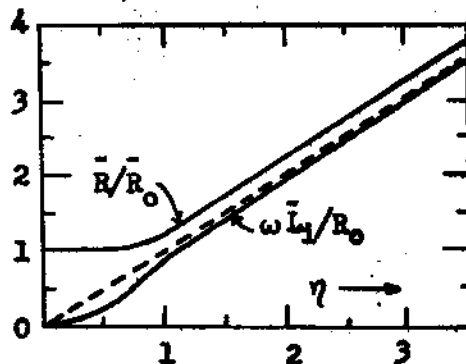


Fig. 1.13: Resistência e reatância interna de um condutor cilíndrico em função do parâmetro  $\eta$ .

A fig. 1.13 representa o andamento de  $\tilde{R}/\tilde{R}_0$  e de  $\omega\tilde{L}_1/\tilde{R}_0$  em função de  $\eta$  (que é proporcional a  $\sqrt{\omega}$ ). Para  $\eta \ll 1$ , pela (121),  $\tilde{R}/\tilde{R}_0$  cresce a partir de 1 como uma parábola de quarto grau, ao passo que  $\omega\tilde{L}_1/\tilde{R}_0$  se comporta como uma parábola de segundo grau. Para  $\eta \gg 1$ , pela (114), tanto  $\tilde{R}/\tilde{R}_0$  como  $\omega\tilde{L}_1/\tilde{R}_0$  se aproximam da primeira bissetriz<sup>(\*)</sup>. A solução exata (111) permite cobrir o domínio intermediário.

A tabela VII dá os valores de  $\eta$  para fios de cobre de diferentes raios a diferentes frequências. Para  $\eta \gg 1$ ,  $\eta$  representa diretamente o fator de aumento de resistência. Por exemplo: para um fio de 1 cm de raio a uma frequência de 0,5 megaciclos, a resistência aumenta por um fator de 53.

Tabela VII: O parâmetro  $\eta$  para um fio de cobre de raio  $a$  à frequência  $\nu$ .

$\nu$ (s <sup>-1</sup> ) \ a	1 cm	1 mm	0,1 mm
50	0,53	0,053	0,0053
$5 \cdot 10^3$	5,3	0,53	0,053
$5 \cdot 10^5$	53	5,3	0,53
$5 \cdot 10^9$	5 300	530	53

(\*)

A solução exata (111) mostra que, para  $\eta \gg 1$ ,  $\tilde{R}/\tilde{R}_0 \approx \eta + \frac{1}{4}$ , de modo que a curva de  $\tilde{R}/\tilde{R}_0$  tende a tornar-se paralela à primeira bissetriz, mantendo-se acima dela, conforme mostra a fig. 1.13, onde a bissetriz foi representada em linha interrompida. Já  $\omega\tilde{L}_1/\tilde{R}_0$  tende assintoticamente à bissetriz.

A fig. 1.14 mostra como se distribui a corrente sôbre a seção de um fio de cobre de 1 mm de raio a diferentes frequências (o cal-

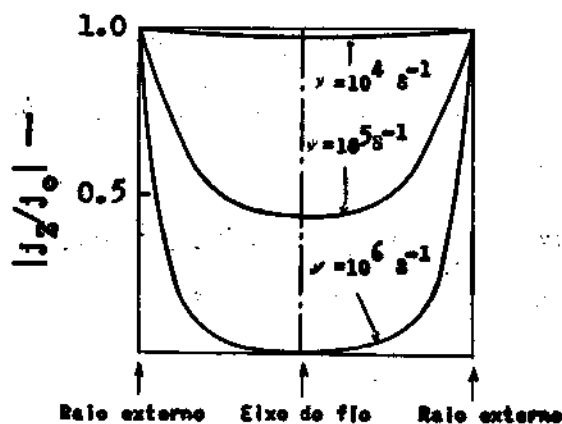


Fig. 1.14: Distribuição de corrente num condutor cilíndrico de cobre de 1 mm de raio para diferentes valores da frequência  $\nu$ .

culo se baseia na solução exata (111)). Vemos que, para altas frequências, é desnecessário utilizar um fio condutor sólido. Podemos substituí-lo por um condutor tubular (ôco).

No caso limite ideal de um condutor perfeito ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), a (101) mostra que a profundidade de penetração é zero: um campo eletromagnético não pode penetrar no interior de um condutor perfeito. A "película" de corrente transforma-se, então, numa corrente superficial (cf. §1.1.(c)).



## 1.4 NOÇÕES SOBRE SUPERCONDUTIVIDADE

### 1.4.(a) O Efeito Meissner-Ochsenfeld

Em 1911, Kammerlingh Onnes, quando estudava o decréscimo de resistência elétrica dos metais com a temperatura, a temperaturas abaixo de  $10^{\circ}\text{K}$ , observou que, no caso do mercúrio, a resistência desaparece bruscamente quando a temperatura cai abaixo de  $4,2^{\circ}\text{K}$ . (Ver fig. 1.15). Diz-se, então, que o mercúrio se torna supercondutor e

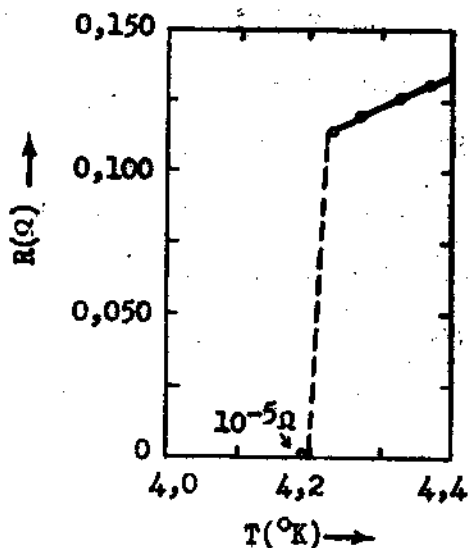


Fig. 1.15: Resistência R do mercúrio em função da temperatura absoluta T.

o fenômeno se chama supercondutividade. A temperatura  $T_c$  em que se produz a transição chama-se temperatura crítica. Atualmente se conhecem dezenove outros metais puros supercondutores (entre eles estão o alumínio, o estanho e o chumbo). As temperaturas críticas estão geralmente abaixo de  $10^{\circ}\text{K}$ . Ligas metálicas também podem tornar-se supercondutoras, mas consideraremos somente o comportamento dos metais puros, que é mais simples.

A transição é extremamente abrupta: sabe-se, atualmente, que ela se efetua em menos de  $0,001^\circ\text{K}$ , de modo que  $T_c$  é muito bem definida. A resistividade abaixo de  $T_c$  é menor que  $10^{-20}$  ohm-cm, ao passo que os melhores condutores normais têm uma resistividade da ordem de  $10^{-9}$  ohm-cm a temperaturas muito baixas.

Para demonstrar o desaparecimento da resistência, pode-se proceder da seguinte forma. Coloca-se um anel da substância num campo magnético, a uma temperatura  $T > T_c$ , baixa-se a temperatura até que a substância se torne supercondutora e depois se retira o anel do campo magnético. A força eletromotriz induzida produz no anel uma corrente que ficará circulando indefinidamente, sem dissipar energia, enquanto o anel permanecer no estado supercondutor (Kammerlingh Onnes mostrou que uma corrente de várias centenas de ampères induzida num anel de chumbo decrescia menos que uma parte em quarenta mil por hora). Estas "correntes persistentes" só podem ser produzidas em supercondutores duplamente conexos, como um anel, ou múltiplamente conexos. Não podem existir num corpo simplesmente conexo, tal como uma esfera.

A corrente supercondutora, ou supercorrente, penetra muito pouco no interior do material. Experiências com películas delgadas supercondutoras mostram que a profundidade de penetração da supercorrente é da ordem de  $10^{-5}$  cm.

A supercondutividade pode ser destruída por um campo magnético suficientemente forte. O valor deste campo magnético crítico  $H_c$  é função da temperatura e pode ser representado aproximadamente por uma fórmula do tipo (fig. 1.16):

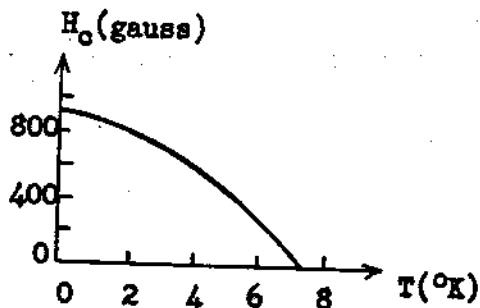


Fig. 1.16: Campo magnético crítico  $H_c$  em função da temperatura absoluta  $T$  para o chumbo.

$$H_c \approx H_0 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (123)$$

Por muito tempo se acreditou que um supercondutor pudesse ser descrito como um condutor perfeito, de acordo com a teoria de Maxwell, isto é, uma substância de condutividade infinita. Isto implicaria que o campo elétrico é sempre nulo num supercondutor. Pela lei de indução, teríamos, portanto,  $\partial \vec{B} / \partial t = -c \text{rot } \vec{E} = 0$ , ou seja,  $\vec{B}$  se manteria sempre constante com o tempo no interior de um supercondutor. Assim, colocando um supercondutor num campo magnético, as linhas de indução teriam de contorná-lo, sem nele penetrar. Isto realmente acontece se a substância for primeiro resfriada até  $T < T_c$  e em seguida colocada num campo magnético (fig. 1.17(a)).

Entretanto, se a substância for colocada no campo magnético ainda para  $T > T_c$ , as linhas de indução penetram nela sem dificuldade, pois a permeabilidade magnética dos metais considerados, no estado normal, é praticamente igual à unidade. Concluir-se-ia então, pelo modelo do condutor perfeito, que as linhas de indução deveriam permanecer "congeladas" no interior do corpo quando a temperatura fosse

abaixada para  $T < T_c$  (fig. 1.17(b)). Portanto, o comportamento do supercondutor num campo magnético dependeria de sua história anterior (como se vê comparando os casos (a) e (b)).

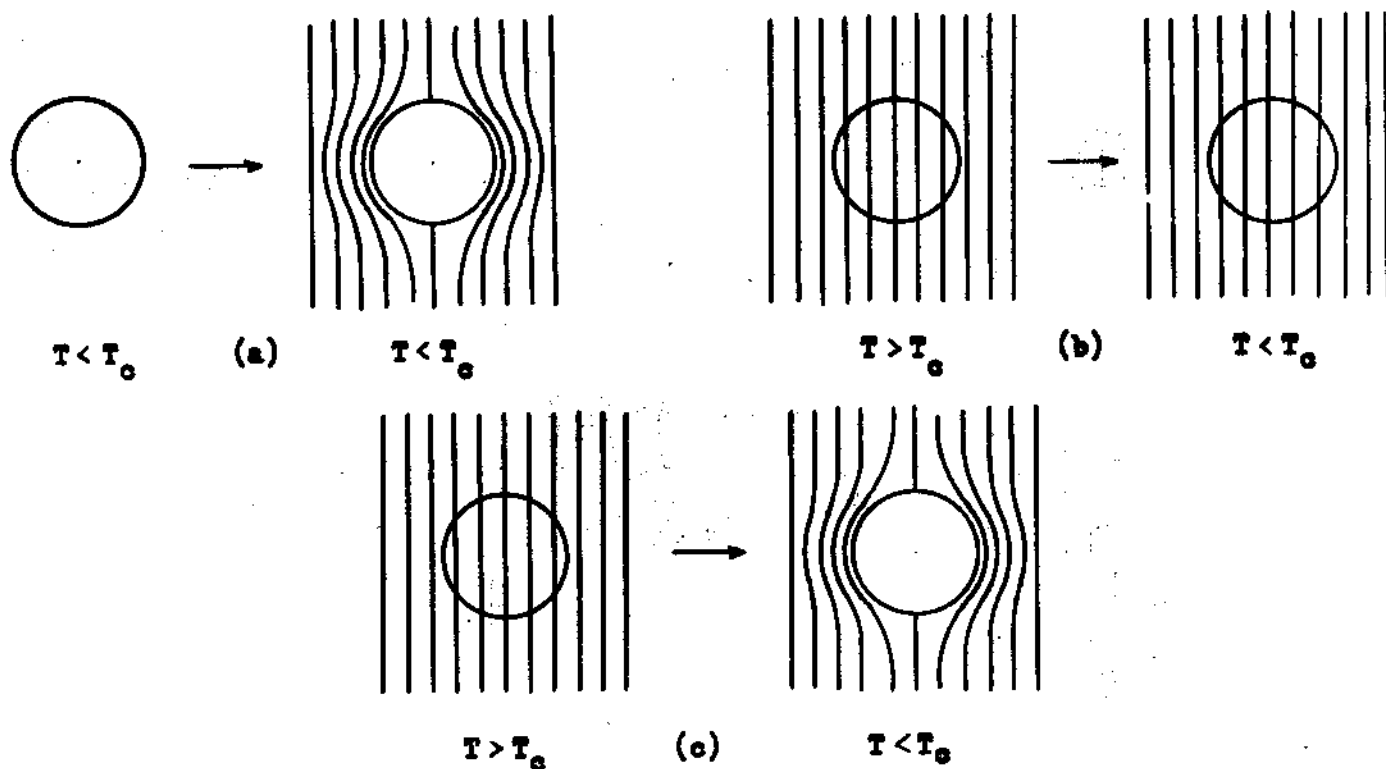


Fig. 1.17: (a) Substância que sofre uma transição para o estado de condutor perfeito ou supercondutor e depois é colocada num campo magnético: as linhas de indução não penetram; (b) Transição para o estado de condutor perfeito dentro dum campo magnético: as linhas de indução permanecem congeladas; (c) Transição para o estado supercondutor dentro dum campo magnético: as linhas de indução são expulsas (efeito Meissner-Ochsenfeld).

Entretanto, as experiências de Meissner e Ochsenfeld (1933) mostraram que, no segundo caso, as linhas de indução são "expulsas" do interior do corpo quando êle se torna supercondutor (fig.1.17(c)). Portanto,  $\vec{B} = 0$  no interior de um supercondutor; êste efeito chama-

se efeito Meissner-Ochsenfeld.

Na realidade, o campo magnético penetra um pouco no interior de um supercondutor. A profundidade de penetração, como no caso da supercorrente, é da ordem de  $10^{-5}$  cm.

O efeito Meissner mostra que se pode falar de um "estado supercondutor" (independente da história anterior) e de um "estado normal", como duas fases da mesma substância (assim como grafite e diamante são duas fases do carbono). Isto permite aplicar as leis da Termodinâmica à transição de fase; os resultados assim obtidos estão expostos nas referências citadas no fim deste capítulo. Kunzler e colaboradores (\*) descobriram recentemente que um composto intermetálico, o  $Nb_3 Sn$ , mantém-se no estado supercondutor, a  $4,2^\circ K$ , mesmo em campos magnéticos extremamente intensos (88 kgauss), transportando densidades de corrente médias da ordem de  $150.000 \text{ amp/cm}^2$ . O campo magnético crítico, extrapolado à temperatura de  $0^\circ K$ , é superior a 200 kgauss. A temperatura crítica para o  $Nb_3 Sn$  é a mais elevada conhecida:  $T_c = 18,05^\circ K$ . Estes resultados deverão permitir a construção de elétro-ímãs supercondutores capazes de atingir campos magnéticos da ordem de centenas de kgauss de forma muito mais econômica que os elétro-ímãs convencionais, pois é eliminada a dissipação de potência em calor pelo efeito Joule.

(\*)

J. Kunzler, *Revs. Mod. Phys.* **33**, 501 (1961).

#### 1.4.(b) As Equações de London

Progressos importantes na teoria microscópica da supercondutividade têm sido feitos nos últimos anos, especialmente a partir de trabalhos de Bardeen, Cooper e Schrieffer em 1957. Não discutiremos aqui estes trabalhos, que se relacionam com o problema da origem da supercondutividade. Limitar-nos-emos à descrição de uma teoria fenomenológica, proposta por F. e H. London em 1935, que representa uma extensão da teoria de Maxwell aos supercondutores.

As primeiras idéias sobre a natureza de um supercondutor, que o identificavam com um condutor perfeito, levaram Becker, Heller e Sauter a propor, em 1933, um modelo microscópico clássico da supercondutividade. Segundo este modelo, ter-se-ia no interior de um supercondutor um "fluido" de elétrons livres supercondutores movendo-se inteiramente sem atrito (resistividade igual a zero) sob a ação do campo elétrico. Se  $e$ ,  $m$ ,  $\vec{v}$ , representam a carga, massa e velocidade de um elétron, respectivamente, teríamos então a equação de movimento:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{E}.$$

A velocidade do elétron, isto é, de uma partícula do "fluido", depende do tempo não só explicitamente, mas também através de suas coordenadas, de modo que temos, como na equação fundamental da Hidrodinâmica,

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{d}{dt} [v_x(t, x, y, z)] = \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } v_x .$$

Entretanto, podemos admitir que  $\vec{v}$  e suas derivadas parciais em relação às coordenadas sejam suficientemente pequenas para que o último termo seja desprezível em confronto com o anterior, de forma que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} .$$

Temos então

$$\frac{m}{e} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{E} . \quad (124)$$

Se  $n_s$  é o número de elétrons supercondutores por unidade de volume, a densidade de supercorrente é

$$\vec{J}_s = n_s e \vec{v} \quad (125)$$

e a (124) dá:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \vec{J}_s) = \vec{E} , \quad (126)$$

onde

$$\Lambda = m/n_s e^2 . \quad (127)$$

Sendo  $m \approx 9.10^{-28}$  g,  $e \approx 4,8.10^{-10}$  u.e.s. e admitindo que  $n_s$  é da ordem do número de átomos por unidade de volume, ou seja, da ordem de  $6.10^{22}$  átomos/cm<sup>3</sup>, acha-se que

$$\Lambda \sim 10^{-31} \text{ s}^2 .$$

Aplicando a lei da indução, com  $\mu = 1$ , teríamos então, pela

(126),

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \text{rot} (\Lambda \vec{j}_s) \right],$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{H} + c \text{rot} (\Lambda \vec{j}_s) \right] = 0. \quad (128)$$

Estes resultados foram obtidos a partir do modelo do condutor perfeito. Assim, no interior do supercondutor, onde  $\vec{j}_s$  é nulo, a (128) daria somente  $\partial \vec{H} / \partial t = 0$  e seria compatível com um valor constante mas não nulo de  $\vec{H}$  (o que contradiria o efeito Meissner).

F. e H. London partiram da observação de que o modelo do condutor perfeito parecia conduzir a resultados corretos no caso em que o estado supercondutor era atingido partindo de um estado inicial em que não só a corrente mas também o campo magnético fossem nulos, conforme se vê no exemplo da fig. 1.17(a). Aplicando a (128) a uma situação em que tanto  $\vec{H}$  como  $\vec{j}_s$  se anulam para  $t = 0$ , viria, integrando em relação ao tempo,

$$c \text{rot} (\Lambda \vec{j}_s) = -\vec{H}, \quad (129)$$

o que agora seria compatível com o efeito Meissner, pois  $\vec{j}_s$  e  $\vec{H}$  sempre se anulariam ao mesmo tempo. F. e H. London sugeriram então que a (129), e não a (128), seria a relação correta entre  $\vec{j}_s$  e  $\vec{H}$ , em qualquer situação (e não apenas quando o valor inicial de  $\vec{H}$  é nulo).

As (126) e (129) são chamadas equações de London e  $\Lambda$  chama-se constante de London. F. e H. London propuseram que se consideras



sem as (126) e (129) como novas equações fenomenológicas (equações constitutivas), que desempenhariam, para a supercorrente, o mesmo papel da lei de Ohm para a corrente ôhmica. A teoria de Becker, Heller e Sauter só serviu para sugerir a forma dessas equações, e não deve ser levada a sério como modelo. A constante de London  $\Lambda$  é, então, uma constante fenomenológica, como  $\sigma$ ; verifica-se também que seu valor depende da temperatura. Para um supercondutor homogêneo (temperatura uniforme), as (126) e (129) podem ser escritas:

$$\begin{aligned} \Lambda \partial \vec{j}_s / \partial t &= \vec{E}, \\ \Lambda c \operatorname{rot} \vec{j}_s &= -\vec{H}. \end{aligned} \quad (130)$$

A estas "equações constitutivas" devemos acrescentar as equações de Maxwell usuais, onde podemos tomar  $\epsilon = \mu = 1$  (como no caso de um metal normal):

$$(I) \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$(II) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$(III) \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho,$$

$$(IV) \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0.$$

Nestas equações, as densidades  $\vec{j}$  e  $\rho$  não são idênticas a  $\vec{j}_s$  e  $\rho_s$  (densidades de supercorrente e supercarga). A não ser para correntes estacionárias, continuam existindo, no supercondutor, u

ma corrente ôhmica  $\vec{j}_0$  e uma densidade de carga associada  $\rho_0$ :

$$\vec{j} = \vec{j}_s + \vec{j}_0, \quad (132)$$

$$\rho = \rho_s + \rho_0.$$

Cada par  $(\vec{j}_s, \rho_s)$ ,  $(\vec{j}_0, \rho_0)$  satisfaz separadamente a equação de continuidade. A corrente ôhmica é dada pela lei de Ohm

$$\vec{j}_0 = \sigma \vec{E}. \quad (133)$$

Para um campo de frequência angular  $\omega$  ( $\partial/\partial t = -i\omega$ ), a primeira das (130) dá, então,

$$\vec{E} = -i\omega \Lambda \vec{j}_s.$$

Portanto, pela (133),

$$\vec{j}_0 = -i\omega \Lambda \sigma \vec{j}_s; \quad |\vec{j}_0| = \omega \Lambda \sigma |\vec{j}_s|. \quad (134)$$

A (134) confirma o que dissemos acima: para correntes estacionárias ( $\omega = 0$ ), tem-se  $\vec{j}_0 = 0$ ; a importância de  $\vec{j}_0$  relativamente a  $\vec{j}_s$  cresce com a frequência. Para o mercúrio, por exemplo, utilizando o valor de  $\sigma$  logo acima da temperatura crítica,  $\sigma \sim 10^{19} \text{ s}^{-1}$ , e  $\Lambda \sim 10^{-31} \text{ s}^2$ , vemos que  $|\vec{j}_0|$  já se torna da mesma ordem que  $|\vec{j}_s|$  para  $\omega \sim 10^{12} \text{ s}^{-1}$ . Em particular, no domínio ótico  $\omega \geq 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , a corrente ôhmica predomina e a substância se comporta como um condutor normal. Se não existisse a corrente ôhmica, o supercondutor seria transparente, porque a supercorrente não dissipa energia (cf. exercício 1.4.1). O fato de que não há nenhuma diferença visível entre o estado normal e o estado supercondutor é uma prova decisiva da existência da corrente ôhmica.

Para frequências suficientemente baixas, podemos tomar  $\vec{j} = \vec{j}_s$  e vamos tomar  $\rho_s = 0$  (o que sempre vale no caso estacionário, pois então  $\vec{E} = 0$  pela primeira (130) e, por conseguinte,  $\text{div } \vec{E} = 0$ ). Vejamos qual é, nestas condições, o análogo da "equação do telegrafo" para o supercondutor. Tomando o rotacional da (131) (I), vem:

$$-\Delta \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}_s + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{E}),$$

ou seja, com o auxílio da segunda (130) e da (131) (II),

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \beta^2 \vec{H} = 0, \quad (135)$$

onde

$$\beta^2 = 4\pi / \Lambda c^2. \quad (136)$$

(Note-se que o parâmetro  $\beta$  tem dimensão do inverso de um comprimento). A mesma equação vale para  $\vec{E}$  e para  $\vec{j}_s$ . A equação que se obtém para cada componente cartesiana desses vetores, que é a forma escalar da (135), chama-se a equação de Klein-Gordon. A mesma equação intervém na teoria dos campos mesônicos. Esta equação descreve fenômenos de propagação com um alcance bem definido, da ordem de  $1/\beta$  (no caso dos mésons, é o alcance das forças nucleares). Vamos ver que isto permite explicar o efeito Meissner e obter a profundidade de penetração do campo magnético num supercondutor.

### 1.4.(c) Penetração do Campo Magnético num Supercondutor.

Consideremos um meio supercondutor semi-infinito, limitado por uma superfície plana. Com o sistema de coordenadas da fig.1.18, o supercondutor ocupa o semi-espaço  $z > 0$ . No semi-espaço  $z < 0$ , existe um campo magnético uniforme  $\vec{H}_0$ . Como o campo é estacionário,

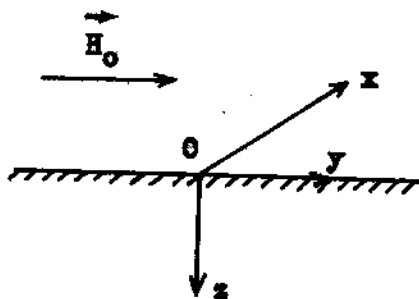


Fig. 1.18: Sistema de coordenadas para o problema da penetração do campo magnético num meio supercondutor semi-infinito.

rio, a (130) dá:  $\vec{E} = 0$ . Pela simetria do problema,  $\vec{H}$  só pode depender de  $z$ , de modo que a (135) fica:

$$\frac{d^2 \vec{H}}{dz^2} - \beta^2 \vec{H} = 0,$$

ou seja,

$$\vec{H}(z) = \vec{H}(0) e^{-\beta z}$$

(visto que só a exponencial decrescente é aceitável). Daí segue que

$$\text{div } \vec{H} = \partial H_z / \partial z = -\beta H_z = 0.$$

Logo,  $\vec{H}$  é paralelo à superfície e podemos escolher os eixos de tal forma que tenha a direção  $\hat{y}$ :

$$\vec{H} = H \hat{y} .$$

As condições de contorno da teoria de Maxwell, que continuam válidas, implicam a continuidade das componentes tangencial e normal ( $\mu = 1$ ) de  $\vec{H}$  na superfície, o que dá:  $\vec{H}(0) = \vec{H}_0$ . A solução final é, portanto,

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_0 = H_0 \hat{y} & (z < 0), \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{-\beta z} & (z > 0), \\ \vec{E} &= 0 . \end{aligned} \quad (137)$$

A densidade de supercorrente é dada pela (131)(I). A única componente diferente de zero é

$$(\text{rot } \vec{H})_x = -\partial H_y / \partial z = \beta H_0 e^{-\beta z} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_s)_x ,$$

donde

$$\vec{j}_s = \frac{c\beta}{4\pi} H_0 e^{-\beta z} \hat{x} . \quad (138)$$

Logo, tanto  $\vec{H}$  como  $\vec{j}_s$  decrescem exponencialmente a partir da superfície do supercondutor. A profundidade de penetração é (cf. (136))

$$1/\beta = c (\Lambda / 4\pi)^{\frac{1}{2}}$$

Para  $\Lambda \sim 10^{-31} \text{ s}^2$ , acha-se que a profundidade de penetração é da ordem de  $10^{-5} \text{ cm}$ , o que concorda com os resultados experimentais. O interior de um supercondutor de espessura muito maior que esta profundidade fica praticamente livre de corrente e de campo magnético, explicando assim o efeito Meissner.

A profundidade de penetração é, como  $\Lambda$ , função da temperatura (fig. 1.19). Em particular, para  $T$  tendendo a  $T_c$ , verifica-se que  $\Lambda$  tende a infinito e o campo magnético penetra livremente. Logo abaixo de  $T_c$ , começa a "expulsão" do campo.

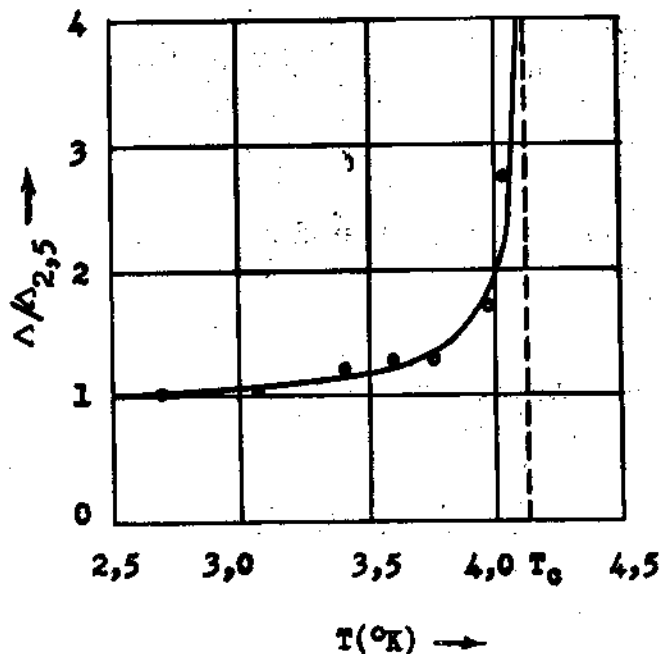


Fig. 1.19: Profundidade de penetração em função da temperatura para o Hg.

É importante notar que esta penetração exponencial da corrente num supercondutor é de natureza inteiramente diferente do efeito pelicular num condutor normal, pois não é acompanhada de dissipação de energia (não há efeito Joule, porque  $\vec{E} = 0$ ).

-----  
 Exercício 1.4.1: Qual é a contribuição da supercorrente ao balanço de energia? A que corresponderia a energia da supercorrente, segundo o modelo de Becker, Heller e Sauter?  
 -----

### 1.4.(d) As Correntes Persistentes.

As equações de London também permitem explicar as correntes persistentes e o fato de que elas só podem ser excitadas em supercondutores não-simplesmente conexos (ou seja, que tenham um ou mais "furos", como um toro).

Com efeito, consideremos um supercondutor não simplesmente conexo e um contórno  $C$  envolvendo um dos furos (fig. 1.20). Seja  $S$  uma superfície que se apóia sobre o contórno  $C$  e  $\hat{n}$  a normal orientada a essa superfície. Como a (131) (II) vale em qualquer ponto do es-

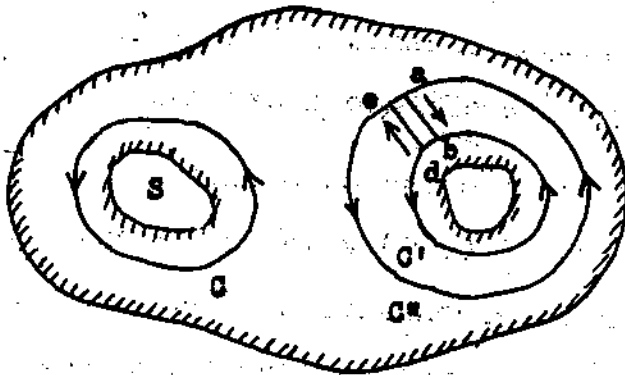


Fig. 1.20: Supercondutor não-simplesmente conexo.

paço, podemos tomar o fluxo de ambos os membros através de  $S$ :

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} \cdot \hat{n} dS .$$

Como, pelas (130),

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Lambda \frac{\partial}{\partial t} \oint_C \vec{J}_s \cdot d\vec{l} ,$$

obtemos

$$\partial \Phi_C / \partial t = 0, \quad (139)$$

onde

$$\Phi_C = \int_S \vec{H} \cdot \hat{n} \, dS + \Lambda c \oint_C \vec{j}_s \cdot \vec{dl}. \quad (140)$$

Vemos, portanto, que a grandeza  $\Phi_C$ , que chamaremos de fluóide associado à curva C, conserva-se constante no tempo. Pode-se mostrar que isto ainda vale durante uma transição de fase, quando o material supercondutor está crescendo a expensas do normal.

Até agora, ainda não usamos o fato de que o supercondutor não é simplesmente conexo. A (139) vale igualmente para uma curva C tomada no interior de um supercondutor simplesmente conexo:  $\Phi_C$  é constante. Neste caso, porém, podemos mostrar que a constante é nula. Com efeito, se a superfície S está inteiramente contida dentro do material supercondutor, podemos usar a segunda (130) em todos os pontos de S:

$$\begin{aligned} \Lambda c \int_S \text{rot } \vec{j}_s \cdot \hat{n} \, dS &= \Lambda c \oint_C \vec{j}_s \cdot \vec{dl} = \\ &= - \int_S \vec{H} \cdot \hat{n} \, dS, \end{aligned}$$

ou seja,



$$\Phi_C = 0, \quad (141)$$

o que vale para qualquer contorno  $C$  tal que a superfície  $S$  esteja inteiramente contida dentro do supercondutor.

Também decorre da (141) que, para um supercondutor não-simplesmente conexo,  $\Phi_C$  depende somente do orifício e não da curva  $C$  que o circunda. Com efeito, se tivermos duas curvas diferentes  $C'$  e  $C''$ , circundando o mesmo orifício (fig. 1.20), podemos juntar  $C'$  e  $C''$  por dois segmentos da reta  $ab$  e  $de$  muito próximos e obtemos

$$\Phi_{C''} - \Phi_{C'} = \Phi_{C''abC'de}$$

onde  $C''abC'de$  é uma curva formada pelo contorno  $C''$ , percorrido no sentido positivo, desde  $e$  até  $a$ , o segmento de reta  $ab$ , o contorno  $C'$ , percorrido no sentido negativo desde  $b$  até  $d$ , e o segmento de reta  $de$  (as contribuições de  $ab$  e  $de$  se cancelam). Como o interior desta curva contém somente material supercondutor, a (141) dá

$$\Phi_{C''abC'de} = 0,$$

ou seja,

$$\Phi_{C''} = \Phi_{C'}. \quad (142)$$

Logo, qualquer curva que envolva o mesmo orifício uma só vez dá o mesmo valor de  $\Phi_C$ , mostrando que ele exprime uma propriedade do orifício, e não depende da forma da curva.

Para qualquer supercondutor que não seja excessivamente delgado (as experiências com correntes persistentes só foram feitas com anéis de espessura muito maior que a profundidade de penetra-

ção), podemos tomar a curva  $C$  a uma distância da superfície suficientemente grande para que seja  $\vec{J}_s \approx 0$  (efeito Meissner), de modo que a (140) fica

$$\Phi_C \approx \int_S \vec{H} \cdot \hat{n} \, dS, \quad (143)$$

ou seja, o fluxóide praticamente coincide com o fluxo do campo magnético.

Portanto, se colocarmos um anel num campo magnético para  $T > T_c$  e depois abaixarmos a temperatura até  $T < T_c$ , o fluxo magnético contido no interior do anel fica "congelado", permanecendo invariável enquanto a supercondutividade não for destruída. Se removermos o campo externo, aparece uma corrente persistente, que mantém o fluxo magnético: o anel se comporta como um ímã permanente. Por outro lado, se a transição ao estado supercondutor se efetuar sem campo magnético externo, e se depois colocarmos o anel supercondutor num campo magnético, ele desviará as linhas de força de tal forma que o seu interior permaneça livre de campo.

Recentemente foi descoberto (\*) que o fluxóide num supercondutor é quantizado, ou seja, só pode assumir valores múltiplos inteiros de

$$hc/2e = 2,07 \times 10^{-7} \text{ gauss cm}^2,$$

onde  $h$  é a constante de Planck. As experiências foram feitas com cilindros ocos de estanho resfriados abaixo da temperatura crítica em presença de um campo magnético, que depois era desligado. Abaixo de um certo valor do campo aplicado, o campo é expulso da cavidade do

(\*) B. S. Deaver Jr. e W. M. Fairbank, Phys. Rev. Letters 7, 43 (1961).  
R. Doll e M. Näbauer, Phys. Rev. Letters 7, 51 (1961).

cilindro. O fluxo só é capturado acima de um certo valor do campo aplicado, quando o fluxo atinge  $hc/2e$ ; daí por diante, à medida que se aumenta o campo aplicado, o fluxo aumenta somente por unidades de  $hc/2e$ . A explicação teórica deste efeito está ligada à teoria microscópica da supercondutividade (\*).

---

(\*)

N. Byers e C. N. Yang, Phys. Rev. Letters 7, 46 (1961).

(\*)

APÊNDICE 1AA EQUAÇÃO DE ONDAS UNIDIMENSIONAL

A equação de ondas unidimensional, encontrada no § 1.2(b), é a equação

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (144)$$

A (144) também é chamada de equação das cordas vibrantes, pois descreve pequenos deslocamentos transversais  $y$  da posição de equilíbrio de um elemento de uma corda tensa, em função de sua abscissa  $x$  e do tempo  $t^{(*)}$ ; a posição de equilíbrio é  $y = 0$ , ou seja, a corda em equilíbrio coincide com o eixo dos  $x$  (supondo, por enquanto, que a corda é ilimitada).

Para obter a solução geral da (144), vamos fazer a mudança de variáveis:

$$\xi = x + vt, \quad \eta = x - vt, \quad (145)$$

o que dá

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Por conseguinte,

(\*) A dedução da equação das cordas vibrantes encontra-se, por exemplo, em: J. C. Slater e N. H. Frank, Mechanics (McGraw-Hill, (1947), pag. 146.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

e a (144) fica

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (146)$$

Esta equação exprime que  $\partial y / \partial \eta$  não depende de  $\xi$ , ou seja,

$$\partial y / \partial \eta = f_1(\eta),$$

onde  $f_1$  é uma função arbitrária. Integrando em relação a  $\eta$ , vem:

$$y = f(\eta) + g(\xi),$$

onde  $f$  é uma primitiva de  $f_1$ , ou seja, é também uma função arbitrária, e  $g(\xi)$ , a "constante de integração", pode ser uma função qualquer de  $\xi$ .

Por conseguinte, a solução geral da (144) é

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt), \quad (147)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias. Conforme vimos no § 1.2(b),  $f(x-vt)$  representa uma onda de velocidade  $v$ , que se propaga no sentido dos  $x$  positivos, ao passo que  $g(x+vt)$  é uma onda de velocidade  $v$ , propagando-se no sentido dos  $x$  negativos. Vemos assim que a solução geral da equação de ondas unidimensional é a superposição de duas ondas de forma arbitrária, que se propagam em sentidos opostos.

As funções  $f$  e  $g$  podem ser determinadas a partir das con-

dições iniciais, ou seja, dando a forma da corda e a distribuição de velocidades no instante inicial  $t = 0$ :

$$y(x,0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x). \quad (148)$$

Substituindo a (147) nas (148), resulta:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= y_0(x), \\ g'(x) - f'(x) &= y_1(x)/v. \end{aligned}$$

Integrando esta última equação, vem

$$g(x) - f(x) = \frac{1}{v} \int_{x_0}^x y_1(\xi) d\xi,$$

onde  $x_0$  é uma constante arbitrária (constante de integração). Combinando este resultado com a equação anterior, obtemos as funções  $f$  e  $g$ :

$$f(x) = \frac{1}{2} y_0(x) - \frac{1}{2v} \int_{x_0}^x y_1(\xi) d\xi, \quad (149)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} y_0(x) + \frac{1}{2v} \int_{x_0}^x y_1(\xi) d\xi. \quad (150)$$

Os resultados ~~contêm~~ a constante arbitrária  $x_0$ , mas a solução (147) só depende de  $f$  e  $g$  através da combinação  $f(x-vt) + g(x+vt)$ , em que essa constante desaparece:

$$y(x,t) = \frac{1}{2} \left[ y_0(x-vt) + y_0(x+vt) \right] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} y_1(\xi) d\xi. \quad (151)$$

Esta é a solução de d'Alembert do problema de condições iniciais para a equação das cordas vibrantes.

Consideremos por exemplo o caso particular em que a corda é deformada e solta sem velocidade inicial, como uma corda de violino beliscada. Neste caso, pela (148),  $y_1(x) = 0$ , de modo que a (151) dá

$$y(x,t) = \frac{1}{2} y_0(x-vt) + \frac{1}{2} y_0(x+vt). \quad (152)$$

Por conseguinte, a deformação inicial se decompõe em duas, cada uma delas com a metade do seu valor, que se deslocam em sentidos opostos com velocidade  $v$ . Este caso está ilustrado na fig. 1.21, que mostra a forma da corda e as componentes  $f$  e  $g$  no instante inicial (a) e em dois instantes posteriores (b e c). Em (c), as componentes  $f$  e  $g$  já se separaram.

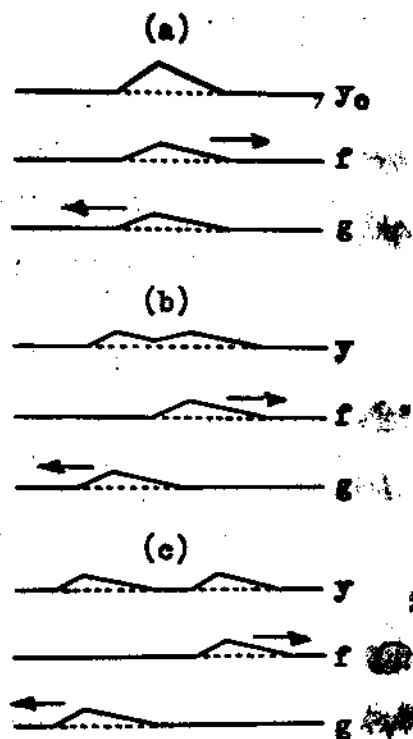


Fig. 1.21: Estágios sucessivos do movimento de uma corda solta a partir do repouso.

-----  
Exercício 1A.1: Demonstrar que a condição para que se propague sô-  
 mente uma onda progressiva, ou sômente uma onda regressiva, é:

$$y_1(x) = \pm v y_0(x).$$

-----

Até aqui consideramos sômente uma corda ilimitada. Consi-  
 deremos agora uma corda semi-infinita, cuja posição de equilíbrio  
 coincide com o semi-eixo positivo dos  $x$ , prêsa na extremidade  $x = 0$ ,  
 o que corresponde à condição de contôrno

$$y(0,t) = 0, \quad (153)$$

exprimindo que a extremidade permanece fixa em qualquer instante.

Substituindo a (147) na (153), obtemos

$$f(-vt) + g(vt) = 0,$$

o que deve valer para qualquer  $t$ , de modo que sômente uma das duas fun-  
 ções  $f$  e  $g$  permanece arbitrária; a outra é determinada pela relação

$$f(\xi) = -g(-\xi). \quad (154)$$

A (147) fica, portanto,

$$y(x,t) = g(vt + x) - g(vt - x), \quad (155)$$

que satisfaz ôbviamente à (153).

O segundo termo da (155) obtém-se do primeiro trocando-lhe  
 o sinal e trocando  $x$  por  $-x$ , o que corresponde a uma reflexão em rela-  
 ção à origem. A onda regressiva  $g(vt + x)$  reflete-se na extremidade  
 fixa com mudança de sinal, passando a propagar-se em sentido inverso:



o segundo termo da (155) representa a onda refletida.

A fig. 1.22 mostra o que acontece quando uma onda regressiva se propaga na corda, atingindo a extremidade no instante  $t = 0$ . Em (a), a onda refletida foi representada em linha interrompida, como um prolongamento fictício da corda. Em (b), a onda refletida já se está propagando na corda, e podemos imaginar que a onda incidente passou ao seu prolongamento. É óbvio que a onda refletida cancela sempre qualquer deslocamento que a onda incidente fôsse imprimir à extremidade da corda.

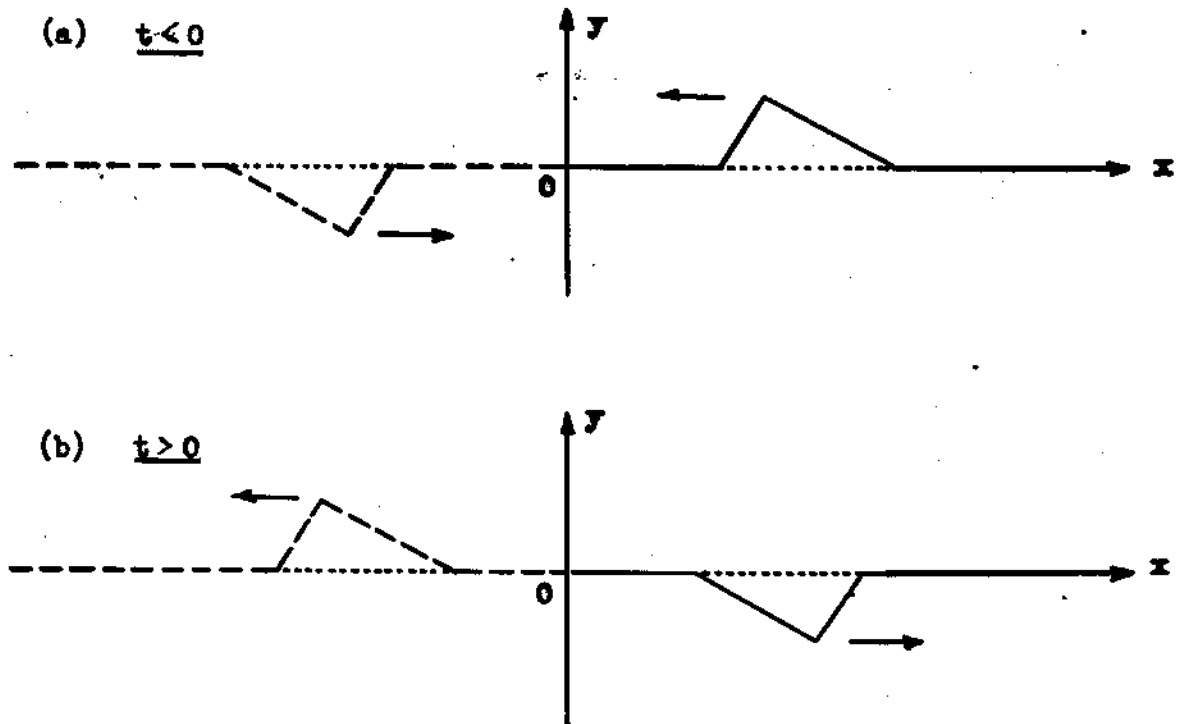


Fig. 1.22: Reflexão na extremidade fixa de uma corda semi-infinita.

Vemos assim que o efeito físico da condição de contorno (153) é produzir a onda refletida. Se considerarmos agora uma corda finita de comprimento  $l$ , presa em ambas as extremidades, cada uma das ondas  $f$  e  $g$  se reflete tanto em  $x = 0$  como em  $x = l$ , com mudança de sinal em cada extremidade, de modo que, após percorrer uma distância  $2l$  (ida e volta na corda), o deslocamento em cada uma dessas ondas retornou ao valor inicial. Por conseguinte, o movimento da corda finita é periódico no tempo, de período  $T = 2l/v$ . A representação mais conveniente do movimento se obtém neste caso através das séries de Fourier, que serão estudadas no Apêndice 1B.

APÊNDICE 1BSÉRIE E INTEGRAL DE FOURIER

Seja  $f(t)$  uma função periódica, de período  $T$ , da variável

$t$ :

$$f(t+T) = f(t). \quad (156)$$

As funções mais simples deste tipo são as funções trigonométricas:  $\cos n\omega t$ ,  $\sin n\omega t$ ,  $e^{in\omega t} = \cos n\omega t + i \sin n\omega t$ , onde  $\omega = 2\pi/T$  e  $n$  é um inteiro qualquer.

Qualquer função periódica de período  $T$  que satisfaça a certas condições muito gerais pode ser desenvolvida em série dessas funções trigonométricas. Uma tal série chama-se série de Fourier. Vamos considerar inicialmente a forma exponencial da série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = c_0 + c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{2i\omega t} + \dots \\ + c_{-1} e^{-i\omega t} + c_{-2} e^{-2i\omega t} + \dots \quad (157)$$

Não vamos discutir aqui as condições usualmente impostas à função  $f(t)$  para que este desenvolvimento seja possível, nem vamos nos preocupar com problemas de convergência; recomendamos ao leitor interessado que consulte uma das referências mencionadas no fim deste capítulo. Nos casos que nos interessam, tais condições são sempre satisfeitas.

Admitindo a validade do desenvolvimento (157), podemos

fácilmente calcular os coeficientes de expansão  $c_n$ . Para isto, vamos multiplicar ambos os membros da (157) por  $e^{-im\omega t}$  e integrar sobre um período, deste  $t_0$  até  $t_0 + T$ , onde  $t_0$  pode ser qualquer:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-im\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{t_0}^{t_0+T} e^{i(n-m)\omega t} dt. \quad (158)$$

Para  $n \neq m$ , temos

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{i(n-m)\omega t} dt = \frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega} \Big|_{t_0}^{t_0+T} =$$

$$= \frac{e^{i(n-m)\omega t_0}}{i(n-m)\omega} \left[ e^{i(n-m)\omega T} - 1 \right] = 0 \quad (n \neq m), \quad (159)$$

pois  $\omega T = 2\pi$ . A (159) chama-se relação de ortogonalidade. Para  $n = m$ , a integral é obviamente igual a  $T$ . Pela (159), este é o único termo que sobra no segundo membro da (158), de forma que obtemos, finalmente,

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-im\omega t} dt. \quad (160)$$

Os coeficientes  $c_m$ , dados pela (160), chamam-se coeficientes de Fourier de  $f(t)$ . Em particular,

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = \overline{f(t)}, \quad (161)$$

onde a barra indica o valor médio; ou seja, o coeficiente de Fourier

$c_0$  representa simplesmente o valor médio da função.

A função  $f(t)$  pode tomar valores complexos. No caso particular em que  $f(t)$  é real, obtemos, tomando o complexo conjugado de ambos os membros da (160),

$$c_n^* = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{in\omega t} dt = c_{-n}. \quad (162)$$

Se fizermos, neste caso,

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad (163)$$

e juntarmos os termos  $n$  e  $-n$  do segundo membro da (157), obtemos, pela (162),

$$c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t} = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t.$$

Levando na (157), obtemos a forma trigonométrica da série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (164)$$

onde, pelas (160) e (163),

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega t dt, \quad (165)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega t dt. \quad (166)$$

Se  $f(t) = f(-t)$ , diz-se que  $f$  é uma função par: o gráfico da função é simétrico em relação ao eixo das ordenadas; se  $f(t) = -f(-t)$ ,  $f$  é uma função ímpar, e o seu gráfico é simétrico em relação à origem. Uma função qualquer pode sempre ser decomposta na soma de uma função par com uma função ímpar; basta escrever a identidade:

$$f(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]. \quad (167)$$

O primeiro colchete é obviamente uma função par, e o segundo uma função ímpar.

Se a função  $f(t)$  na (164) é par, todos os coeficientes de Fourier  $b_n$  são nulos. Para ver isto, basta escolher  $t_0 = -T/2$  na (166): obtemos então a integral sobre um intervalo simétrico  $(-T/2, T/2)$  da função ímpar  $f(t) \operatorname{sen} n\omega t$ , e esta integral é obviamente nula. Logo, a série de Fourier de uma função par é uma série de cossenos. Analogamente, se  $f(t)$  é ímpar, todos os coeficientes  $a_n$  são nulos: a série de Fourier de uma função ímpar é uma série de senos. No caso geral (164), a série de cossenos representa a parte par de  $f(t)$  e a série de senos a parte ímpar.

Não é necessário que a função  $f(t)$  seja contínua para que possamos expandi-la em série de Fourier. Pode-se mostrar que, se a função tem uma descontinuidade finita no ponto  $t_1$ , ou seja, se os limites à esquerda e à direita são diferentes,  $f(t_1 + 0) \neq f(t_1 - 0)$ , a série converge no ponto de descontinuidade para a semi-soma desses limites,  $\frac{1}{2} [f(t_1 + 0) + f(t_1 - 0)]$ .

-----

**Exercício 1B.1:** Expandir em série de Fourier a função periódica de período  $2\pi$  definida por

$$f(t) = -1 \text{ para } -\pi < t < 0,$$

$$= +1 \text{ para } 0 < t < \pi.$$

Traçar o gráfico da função e calcular a soma da série nos pontos de descontinuidade. Traçar o gráfico das primeiras reduzidas da série e verificar que se aproximam da função. Calcular a soma da série para  $t = \pi/2$  e deduzir daí a série de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

-----

**Exercício 1B.2:** Expandir em série de Fourier a função

$$f(t) = 0 \text{ para } -T/2 < t \leq 0$$

$$= t \text{ para } 0 \leq t < T/2.$$

-----

Muitas vezes estamos interessados em representar uma função  $f(t)$ , não periódica, somente num intervalo  $(t_0, t_0 + T)$ . Chama-se então desenvolvimento de Fourier de  $f$  no intervalo  $(t_0, t_0 + T)$  a expansão de Fourier da função  $f_1(t)$ , periódica de período  $T$ , que coincide com  $f$  nesse intervalo. Fora do intervalo em questão, a série de Fourier representa  $f_1$  e não  $f$ .

Analogamente, dada uma função  $f(t)$  no intervalo  $(0, T/2)$ , chama-se desenvolvimento de  $f$  em série de Fourier de cossenos (senos), a expansão de Fourier da função par (ímpar), periódica de período  $T$ , que coincide com  $f$  nesse intervalo.

-----  
Exercício 1B.3: Expandir a função  $f(t) = t$ , no intervalo  $(0, \pi)$ ,

- (a) em série de Fourier de senos;  
 (b) em série de Fourier de cossenos.

Traçar o gráfico na função representada pela série, nos dois casos.  
 -----

Exercício 1B.4: Expandir a função  $f(t) = \text{sen } t$ , no intervalo  $(0, \pi)$ , em série de cossenos. Traçar o gráfico da função representada pela série.  
 -----

Se substituirmos a (160) na (157), tomando  $t_0 = -T/2$ , obtemos

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{in\omega t} \int_{-T/2}^{T/2} dt' f(t') e^{-in\omega t'}, \quad (168)$$

onde indicamos por  $t'$  a variável de integração afim de evitar confusão com  $t$ , o argumento da função  $f$  para o qual efetuamos a expansão. Se  $f(t)$  não é periódica, a (168) representa  $f(t)$  somente no intervalo  $(-T/2, T/2)$ , como vimos.

Se quisermos representar  $f(t)$  num intervalo cada vez maior, basta fazer crescer  $T$ . É natural então procurar uma representação de uma função não-periódica, válida para qualquer valor de  $t$ , pela passagem ao limite  $T \rightarrow \infty$ .

Para obter a forma limite da (168) quando  $T \rightarrow \infty$ , fazemos

$$n\omega = 2\pi n/T = \omega_n.$$



A diferença entre dois valores consecutivos da variável discreta  $\omega_n$  é então

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = 2\pi/T,$$

e a (168) se escreve

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\omega_n \rightarrow -\infty}^{\omega_n \rightarrow \infty} \Delta\omega e^{i\omega_n t} \int_{-T/2}^{T/2} dt' f(t') e^{-i\omega_n t'}. \quad (169)$$

À medida que  $T$  cresce, os valores tomados por  $\omega_n$  vão-se tornando mais e mais densos. Quando  $T \rightarrow \infty$ ,  $\omega_n$  tende a uma variável contínua  $\omega$  e a diferença  $\Delta\omega$  pode ser substituída pela diferencial  $d\omega$ , de modo que

$$\sum \Delta\omega F(\omega_n) \rightarrow \int d\omega F(\omega).$$

A (169) deve dar então, no limite  $T \rightarrow \infty$ ,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{-i\omega t'}. \quad (170)$$

A (170) é o teorema da integral de Fourier. Não vamos examinar aqui as condições de validade desta fórmula, que serão sempre satisfeitas nos casos que nos interessam (ver referências no fim do capítulo).

Escrevendo, no integrando da (170),

$$e^{i\omega(t-t')} = \cos[\omega(t-t')] + i \operatorname{sen}[\omega(t-t')]$$

e notando que a integral relativa ao seno se anula, porque o seno é uma função ímpar de  $\omega$ , e que a integral relativa ao cosseno é o dobro da integral de 0 a  $\infty$ , por se tratar de uma função par de  $\omega$ , resulta:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \cos[\omega(t-t')], \quad (171)$$

que é a forma real do teorema da integral de Fourier.

A (171) também pode ser escrita:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\infty} b(\omega) \sen \omega t d\omega, \quad (172)$$

onde

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cos \omega t' dt', \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \sen \omega t' dt'. \quad (173)$$

Sob esta forma, a analogia com as (164)-(166) aparece mais claramente. Em particular, se  $f(t)$  é uma função par,  $b(\omega) = 0$  e  $a(\omega)$  é o dobro da integral de 0 a  $\infty$ ; temos então uma integral de Fourier de cossenos. Análogamente, se  $f(t)$  é ímpar,  $a(\omega) = 0$  e temos uma integral de Fourier de senos.

O teorema da integral de Fourier pode ser expresso em forma particularmente elegante se fizermos

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (174)$$

Com efeito, a (170) dá então

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (175)$$

fórmula que apresenta uma notável simetria em relação à (174). A função  $F(\omega)$  definida pela (175) chama-se transformada de Fourier de  $f(t)$ . Reciprocamente,  $f(t)$ , dada pela (174), é a transformada de Fourier inversa de  $F(\omega)$ .

Se interpretarmos a variável  $t$  como representando o tempo, a (174) exprime uma função qualquer do tempo como superposição de oscilações harmônicas simples de todas as frequências  $\omega$  possíveis (componentes monocromáticas). Tendo em vista a aplicação à representação da luz não-monocromática (§1.2(c)), a (174) também é chamada de decomposição espectral de  $f(t)$ ; a amplitude da componente de frequência  $\omega$  é  $\left| \frac{F(\omega)}{\sqrt{2\pi}} \right|$ .

Até aqui limitamo-nos a funções de uma só variável, mas funções de mais de uma variável também podem ser representadas por séries ou integrais de Fourier múltiplas. Por exemplo, uma função  $f(x,y)$  pode ser expandida primeiro em integral de Fourier em  $x$ , fixando  $y$ ; os coeficientes de expansão são funções de  $y$ , e podem ser expandidos, por sua vez, em integral de Fourier em  $y$ . O resultado é uma expansão de  $f(x,y)$  em integral dupla de Fourier.

-----

Exercício 1B.5: Demonstrar que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen}(\omega T) \cos(\omega t) \frac{d\omega}{\omega} = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < T, \\ \frac{1}{2} & \text{para } |t| = T, \\ 0 & \text{para } |t| > T. \end{cases}$$

Esta integral é chamada de fator descontínuo de Dirichlet.

---

Exercício 1B.6: Expandir em integral de Fourier a função

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ e^{-at} & \text{para } t > 0 \quad (a > 0). \end{cases}$$


---

Vejam, finalmente, como aplicação das séries de Fourier, a solução do problema de valores iniciais para uma corda vibrante presa em ambas as extremidades (cf. Apêndice 1A). Se  $l$  é o comprimento da corda, isto corresponde às condições de contorno

$$y(0,t) = y(l,t) = 0. \quad (176)$$

As condições iniciais são dadas ainda pelas (148), sendo que agora as funções  $y_0(x)$  e  $y_1(x)$  são definidas somente no intervalo  $0 \leq x \leq l$ .

Vamo-nos limitar ao caso em que a corda é solta a partir do repouso, de modo que  $y_1(x) = 0$ .

Vamos procurar inicialmente soluções estacionárias da equação das cordas vibrantes (144). Uma solução estacionária caracteriza-se

pelo fato de que o deslocamento varia com o tempo da mesma forma em todos os pontos da corda, ou seja, a dependência do tempo e a dependência da posição não se misturam:

$$y(x,t) = X(x) T(t) . \quad (177)$$

Para qualquer valor de  $x$ , a dependência do tempo é dada pela mesma função  $T(t)$ . Diz-se também que na (177) as variáveis  $x$  e  $t$  estão separadas e o método chama-se método de separação das variáveis.

Substituindo a (177) na (144), obtemos

$$X'' T = \frac{1}{v^2} X T'' ,$$

ou, dividindo por  $XT$  ambos os membros,

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} . \quad (178)$$

O primeiro membro da (178) é função somente de  $x$  e o segundo membro é função somente de  $t$ . Por conseguinte, eles só podem ser iguais se forem ambos iguais a uma constante, que chamaremos de  $-k^2$ :

$$\frac{X''}{X} = -k^2, \quad \text{ou} \quad X'' + k^2 X = 0 , \quad (179)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} = -k^2, \quad \text{ou} \quad T'' + \omega^2 T = 0 , \quad (180)$$

onde  $\omega = kv$ .

As soluções gerais das (179) e (180) são

$$X = A \cos kx + B \sin kx ,$$

$$T = C \cos \omega t + D \sin \omega t ,$$

de modo que a solução geral da equação das cordas vibrantes em variáveis separadas é

$$y(x,t) = (A \cos kx + B \sin kx) (C \cos \omega t + D \sin \omega t), \quad (181)$$

onde  $k$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes arbitrárias.

Vamos impor agora as condições de contorno (176). Impondo à (181) a condição  $y(0,t) = 0$ , resulta que tem de ser  $A = 0$ , de modo que sobra apenas o termo em  $\sin kx$ . A condição  $y(l,t) = 0$  implica então:  $\sin(kl) = 0$ , ou seja,  $kl = n\pi$ , onde  $n$  é um inteiro qualquer. Por conseguinte, os valores de  $k$  não são arbitrários: são possíveis somente os valores

$$k_n = n\pi/l \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (182)$$

que se chamam autovalores do problema de contorno considerado (note-se que valores negativos de  $n$  não dão nada de novo, pois equivalem a trocar o sinal da constante  $B$ ). Por conseguinte, as soluções estacionárias para uma corda presa nas extremidades são da forma

$$y_n(x,t) = \sin(k_n x) (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (183)$$

onde  $k_n$  é dado pela (182) e  $\omega_n = k_n v$ . As (183) também são chamadas de autofunções correspondentes aos autovalores  $k_n$ , ou ainda tons normais de vibração da corda.

A frequência do  $n$ -ésimo tom de vibração é  $\nu_n = \omega_n / 2\pi =$

$= nv/2l$ , e o período é  $T_n = 2l/nv$ . O comprimento de onda é  $\lambda_n = 2l/n$ , ou seja,  $l = n\lambda_n/2$ : o comprimento da corda é um múltiplo inteiro do semi-comprimento de onda. A fig. 1.23 representa a forma da corda correspondente aos tons de vibração mais baixos.

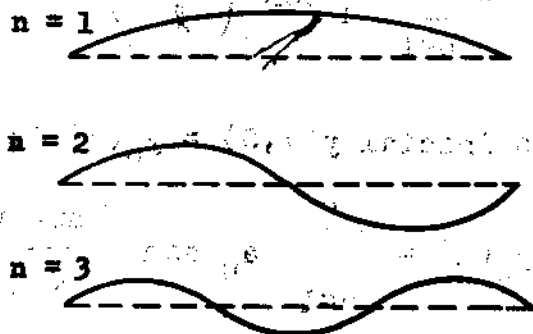


Fig. 1.23: Tons normais de vibração.

O tom  $n = 1$  chama-se tom fundamental e os demais chamam-se harmônicos: suas frequências são múltiplas de  $\nu_1 = v/2l$ , a frequência do tom fundamental. No  $n$ -ésimo harmônico, os pontos  $x_j = j\lambda_n/2 = j\lambda_n/2$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ), que permanecem sempre em repouso, chamam-se nós; a meio caminho entre dois nós consecutivos estão os ventres, onde a amplitude da oscilação é sempre máxima.

Como a equação das cordas vibrantes e as condições ao contorno são lineares e homogêneas em  $y$ , qualquer combinação linear de soluções é também uma solução. A superposição mais geral possível de soluções estacionárias (183) é dada por:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}(k_n x) (a_n \cos \omega_n t + b_n \text{sen } \omega_n t). \quad (184)$$

A (184) representa um movimento periódico de período  $T_1 = 2l/v$ , con-

forme antecipamos no fim do Apêndice 1A. Procuremos agora satisfazer às condições iniciais.

A condição  $\partial y / \partial t (x, 0) = 0$  implica:  $b_n = 0$ , de modo que

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \cos \left( \frac{n\pi vt}{l} \right) \quad (185)$$

A condição inicial  $y(x, 0) = y_0(x)$  implica

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (186)$$

A (186) é a expansão em série de Fourier de senos da função  $y_0(x)$ , dada no intervalo  $(0, l)$ . Os coeficientes de expansão são determinados pelas (166), onde temos de tomar  $t_0 = -l$ ,  $T = 2l$ , lembrando que  $y_0(x)$  tem de ser definido como função ímpar para  $x < 0$ :

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l y_0(\xi) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \xi}{l} \right) d\xi. \quad (187)$$

Substituindo a (187) na (185), obtemos a solução explícita do problema de valores iniciais:

$$y(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{l} \right) \cos \left( \frac{n\pi vt}{l} \right) \int_0^l y_0(\xi) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \xi}{l} \right) d\xi \quad (188)$$

-----  
Exercício 1B.7: Relacionar a (188) com a solução de d'Alembert (151).  
 -----



-----

Exercício 1B.8: Resolver o problema de valores iniciais no caso em que  $y_0(x) = 0$ ,  $y_1(x) \neq 0$  na (148) com o auxílio da série de Fourier e relacionar o resultado com a solução de d'Alembert.

-----

Exercício 1B.9: Uma corda de comprimento  $l$  presa nas extremidades é puxada pelo seu ponto médio, adquirindo a forma de dois lados de um triângulo, e solta a partir do repouso. Determinar as amplitudes dos tons harmônicos.

-----

Exercício 1B.10: Uma corda de piano, de comprimento  $l$ , é percutida, no centro, por um martelo de largura  $d$ . Determinar o movimento, admitindo que a corda parte da posição de equilíbrio e que a velocidade inicial só é diferente de zero na região percutida pelo martelo.

-----

As vibrações da corda são transmitidas ao nosso ouvido pela atmosfera e percebidas como um som cuja altura é determinada pela frequência do tom fundamental  $\nu_1$ . O timbre do som é determinado pela relação entre as amplitudes dos diferentes harmônicos, que por sua vez depende das condições iniciais, conforme se vê pelos exercícios 1B.9 e 1B.10: a mesma nota soa de forma diferente, conforme a corda seja beliscada ou percutida.

LEITURA RECOMENDADA PARA O CAPÍTULO I

Para revisão do curso anterior (introdução às equações de Maxwell):

J. Tiomno, Eletromagnetismo (Coleção Monografias de Física, C.B.P.F., Rio de Janeiro, 1962).

J. R. Reitz e F. J. Milford, Foundations of Electromagnetic Theory (Addison-Wesley, Reading, 1960).

§§1.1. 1.2 e 1.3:

M. Born e E. Wolf, Principles of Optics (Pergamon Press, London, 1959), §§1.1 a 1.4. A teoria da luz parcialmente polarizada e desenvolvida no capítulo X deste tratado (§10.8).

M. Abraham e R. Becker, Classical Electricity and Magnetism, 2nd ed. (Blackie and Son, London, 1950): especialmente a teoria do efeito pelicular.

J. C. Slater e N. Frank, Electromagnetism (McGraw-Hill, New York, 1947).

§1.4:

M. Von Laue, Theory of Superconductivity (Academic Press, New York, 1952).

F. London, Superfluids, vol. I (J.Wiley, New York, 1950).

Apêndice 1A:

J. C. Slater e N. H. Frank, Mechanics (McGraw-Hill, New York, 1947), capítulos VIII e IX.

M. Planck, The Mechanics of Deformable Bodies (Macmillan, New York, 1949), capítulo III.

Apêndice 1B:

R. Courant, Cálculo Diferencial e Integral (Editôra Globo, Porto Alegre, 1955), vol. I, cap. IX e vol. II, pg. 318.

R. V. Churchill, Fourier Series and Boundary Value Problems (McGraw-Hill, New York, 1941).

H. S. Carslaw, Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals 3rd ed. (Dover Publications, New York).

## CAPÍTULO II

### REFLEXÃO E REFRAÇÃO

#### 2.1. DOIS MEIOS TRANSPARENTES.

##### 2.1.(a). As Leis da Reflexão e da Refração.

Consideremos dois meios transparentes, de índices de refração absolutos  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$  e  $n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ , separados por uma superfície plana. Uma onda plana monocromática,

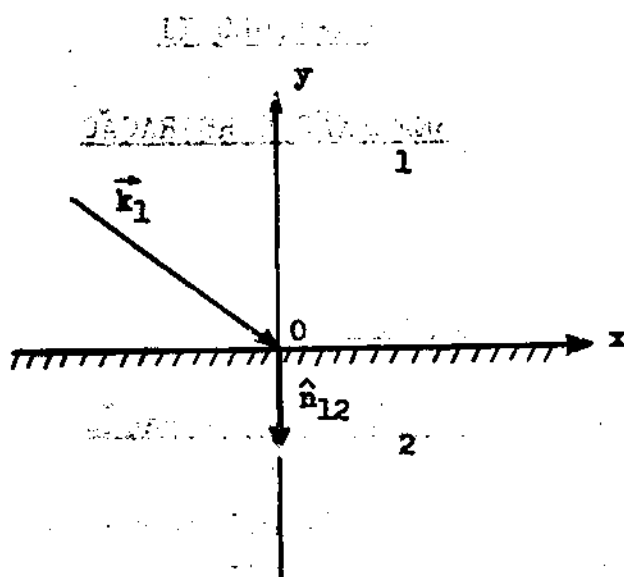
$$\vec{E}_{1,inc} = \vec{A}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1)$$

onde  $\vec{A}_1$  é um vetor complexo\* e

$$\vec{k}_1 = k_1 \hat{u}_1; \quad k_1 = n_1 \omega / c, \quad (2)$$

incide sobre a superfície de separação (fig. 2.1). Indicaremos por  $\hat{n}_{12}$  o versor da normal a essa superfície, orientado de 1 para 2. Queremos encontrar uma solução das equações de Maxwell nos dois meios que satisfaça às condições de contorno sobre a superfície de separação. É natural supor que a onda transmitida no meio 2 é também uma onda plana (deve reduzir-se à onda incidente para  $n_2 = n_1$ ). Conforme veremos no § 2.1(b), porém, não seria possível satisfazer às condições de contorno somente com a onda transmitida. É preciso admitir a existência de mais uma onda no meio 1 (onda re-

\* As componentes de  $\vec{A}_1$  no plano perpendicular à direção de propagação correspondem às amplitudes complexas A e B da (63) do § 1.2(c).



**Fig. 2.1:** Onda plana incidente sobre a superfície de separação de dois meios.

fletida) e vamos supor que seja também uma onda plana.

Num ponto qualquer da superfície de separação, é preciso, para que as condições de contorno sejam verificadas em qualquer instante, que as três ondas dependam do tempo da mesma forma. Portanto, pela (1), as ondas refletida e transmitida serão também monocromáticas de frequência angular  $\omega$ . O fator temporal comum  $\exp(-i\omega t)$  será omitido daqui por diante, para maior brevidade. As soluções nos dois meios devem ser, então:

$$\vec{E}_1 = \vec{A}_1 e^{i \vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + \vec{A}_1' e^{i \vec{k}_1' \cdot \vec{r}}, \quad (3)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{A}_2 e^{i \vec{k}_2 \cdot \vec{r}},$$

onde

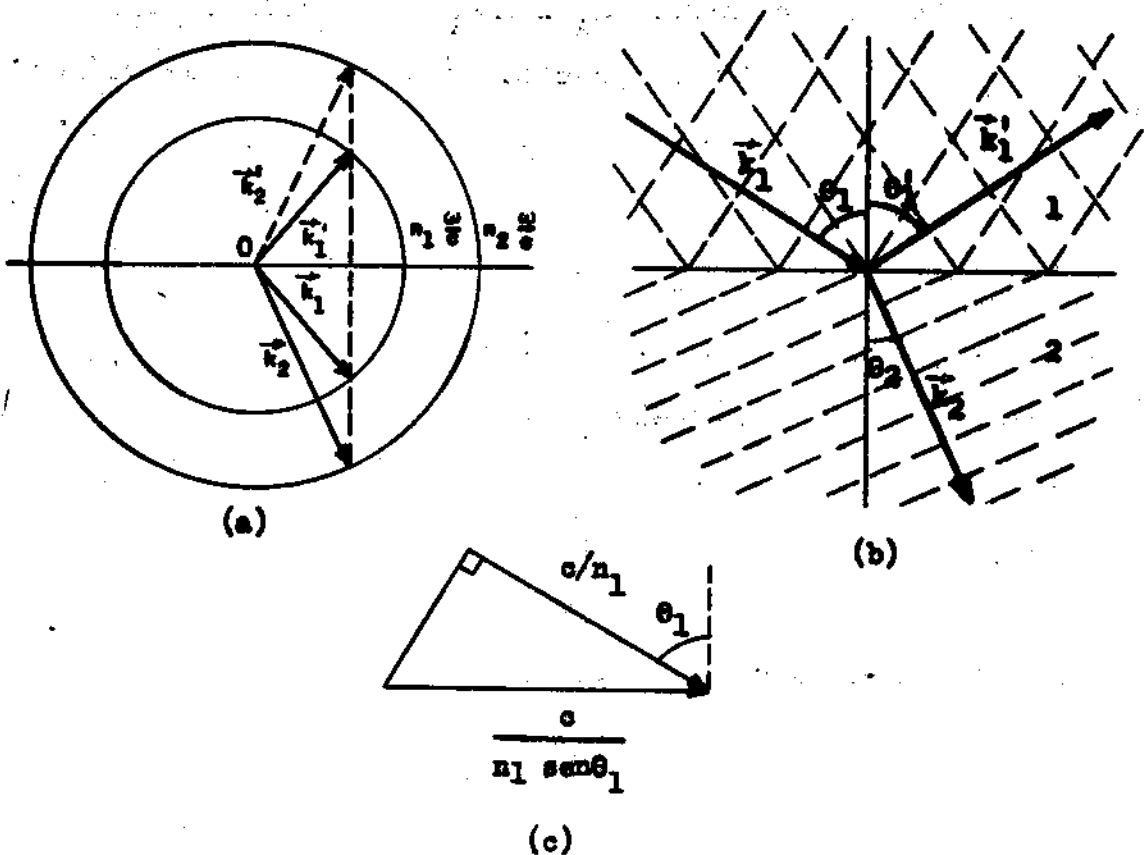
$$\vec{k}_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \hat{u}_1, \quad \vec{k}_1' = n_1 \frac{\omega}{c} \hat{u}_1', \quad \vec{k}_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \hat{u}_2. \quad (4)$$

Vejamos qual deve ser a relação entre as direções  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_1'$  e

$\hat{u}_2$ . As (4) mostram que

$$|\vec{k}_1'| = |\vec{k}_1| = n_1 \omega / c,$$

de modo que as extremidades de ambos êstes vetores devem pertencer a uma esfera de raio  $n_1 \omega / c$ ; analogamente, a extremidade de  $\vec{k}_2$  deve estar sôbre uma esfera de raio  $n_2 \omega / c$  (fig. 2.2(a)).



**Fig. 2.2:** (a) Construção de Snell dos raios refratado e refletido.

(b) Planos de fase constante (em linha interrompida) das ondas incidente, refletida e transmitida, mostrando a junção contínua na superfície de separação.

(c) Velocidade de propagação das ondas superficiais.

Na fig. 2.2(b) foram representados, em linha interrompida, os planos de fase constante para as três ondas. No caso de  $\vec{k}_1$ , por exemplo, êsses planos se propagam ao longo da direção  $\hat{u}_1$  com velocidade  $c/n_1$ . As intersecções dêsses planos com a superfície de separação podem ser consideradas como um trem de ondas superficiais que se propagam sobre a superfície de separação (da esquerda para a direita, na fig. 2.2(b)) com velocidade  $c/n_1 \sin \theta_1$ , onde  $\theta_1$  é o ângulo de incidência (fig. 2.2 (c)). Isto corresponde a um "vetor de onda superficial" de módulo  $k_1 \sin \theta_1$ : o vetor de onda da onda superficial é a componente tangencial do vetor de onda no meio. Isto vale para as ondas superficiais associadas a cada uma das três ondas que estamos considerando.

Para que seja possível a junção contínua das três ondas na superfície de separação, é preciso que as ondas superficiais associadas a cada uma delas se propaguem da mesma forma (caso contrário, as condições sobre a superfície mudariam com o tempo e não seria possível a junção contínua). Logo, os vetores de onda superficiais correspondentes devem coincidir em módulo e direção: a componente tangencial do vetor de onda deve ser a mesma para as três ondas:

$$\vec{k}_{1,tang} = \vec{k}'_{1,tang} = \vec{k}_{2,tang} \quad (5)$$

Este resultado é inteiramente equivalente às leis da reflexão e da refração. Com efeito, decorre imediatamente da (5) a

1ª lei: As direções  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_1'$ ,  $\hat{u}_2$  e  $\hat{u}_{12}$  pertencem ao mesmo plano, que se chama plano de incidência.

Os ângulos  $\theta_1$ ,  $\theta_1'$  e  $\theta_2$  formados pelas direções  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_1'$  e  $\hat{u}_2$  com

com a normal chamam-se ângulos de incidência, reflexão e refração, respectivamente. As (4) e (5) dão então:

$$n_1 \frac{\omega}{c} \operatorname{sen} \theta_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \operatorname{sen} \theta_1' = n_2 \frac{\omega}{c} \operatorname{sen} \theta_2.$$

Dai decorre a

2ª lei: Os ângulos  $\theta_1$ ,  $\theta_1'$  e  $\theta_2$  satisfazem às relações:

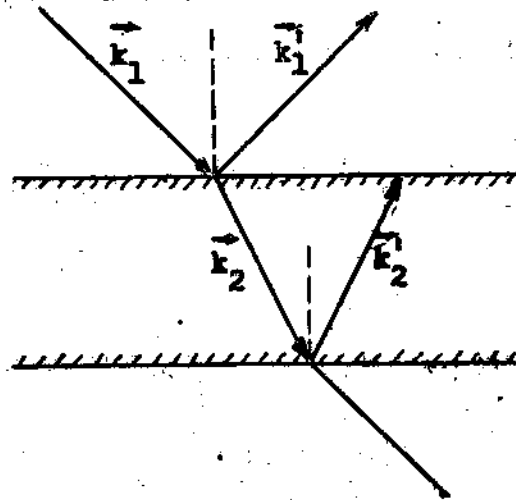
$$\theta_1' = \theta_1$$

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = n = \frac{v_1}{v_2}, \quad (6)$$

onde  $n$  é o índice de refração relativo (de 1 para 2) e  $v_1$  e  $v_2$  são as velocidades da luz nos dois meios. Como na construção de Huyghens (cf. Introdução), o meio óticamente mais denso corresponde à menor velocidade da luz.

A fig. 2.2(a) mostra a construção de Snell dos raios refratado e refletido. Como a componente tangencial de  $\vec{k}$  deve conservar-se, basta traçar, pela extremidade de  $\vec{k}_1$ , a perpendicular à superfície de separação: as intersecções desta perpendicular com as esferas de raios  $n_1 \omega/c$  e  $n_2 \omega/c$  dão as extremidades de  $\vec{k}_1'$  e  $\vec{k}_2$ . Há mais uma intersecção, que corresponde ao vetor de onda  $\vec{k}_2'$  (em linha interrompida, na fig. 2.2(a)). Este vetor de onda, que também permitiria uma junção contínua aos restantes, não aparece no caso de dois meios infinitos, mas pode existir numa lâmina de faces paralelas, conforme mostra a fig. 2.3.

A dedução precedente das leis da reflexão e da refração vale



**Fig. 2.3:** Lâmina de faces paralelas, mostrando o aparecimento do vetor  $\vec{k}_2^i$ .

para qualquer teoria ondulatória (mesmo para ondas escalares). Resultados mais característicos da teoria eletromagnética da luz serão obtidos calculando as relações entre as amplitudes das ondas, o que faremos em seguida.

**Exercício 2.1.1:** Que acontece na construção de Snell para  $n_1 \sin \theta_1 > n_2$  ?

### 2.1.(b). As Fórmulas de Fresnel.

Para calcular as amplitudes, temos que empregar as condições de contorno obtidas no capítulo 1, equações (18), nelas substituindo as equações constitutivas:



$$\begin{aligned}
 \text{(I')} \quad \hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= 0, \\
 \text{(II')} \quad \hat{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0, \\
 \text{(III')} \quad \hat{n}_{12} \cdot (\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1) &= 4\pi \delta_V, \\
 \text{(IV')} \quad \hat{n}_{12} \cdot (\mu_2 \vec{H}_2 - \mu_1 \vec{H}_1) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

No caso de uma solução monocromática, as condições de contorno não são tôdas independentes. Com efeito,  $\partial/\partial t = -i\omega$  implica:

$$\text{rot } \vec{E} = i \frac{\epsilon}{c} \vec{B}$$

e por conseguinte

$$\text{div rot } \vec{E} = 0 = i \frac{\epsilon}{c} \text{div } \vec{B},$$

o que leva à (IV'). Além disso,

$$\text{rot } \vec{H} = -i \frac{\epsilon}{c} \vec{D};$$

logo,

$$\text{div rot } \vec{H} = 0 = -i \frac{\epsilon}{c} \text{div } \vec{D},$$

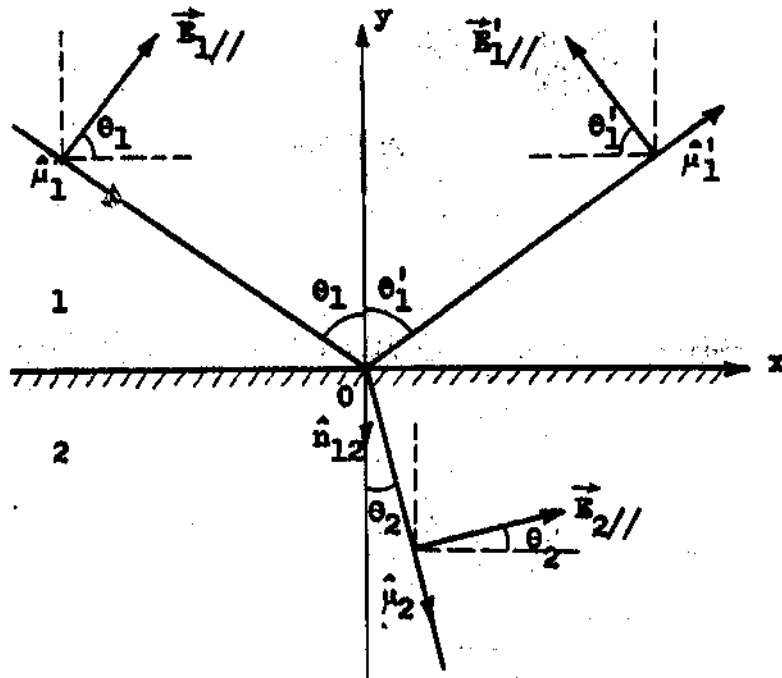
o que dá a (III'). Logo, as equações de Maxwell (III) e (IV) decorrem das (I) e (II), de forma que somente as condições de contorno (I') e (II') são independentes. Além disso, vemos que  $\rho_V = 0$  neste caso e, por conseguinte, também tem de ser  $\delta_V = 0$  na (III'): não há cargas superficiais.

Cada uma das (I') e (II') equivale a duas equações escalares (uma para cada componente tangencial). Portanto, as (I') e (II') fornecem um sistema de quatro equações. Temos também quatro incógnitas, que são as componentes das amplitudes das ondas refletida e refratada (a amplitude de uma onda plana tem duas componentes in-

dependentes). A amplitude da onda incidente é um dado do problema e as direções de propagação já foram determinadas. Vemos ainda, conforme já foi mencionado no §2.1(a), que não seria possível satisfazer às condições de contorno somente com a onda transmitida: precisamos também da onda refletida.

Antes de aplicar as condições de contorno, temos que escolher as duas direções perpendiculares segundo as quais vamos decompor cada uma das amplitudes  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{A}_1'$  e  $\vec{A}_2$  na (3). A escolha mais conveniente consiste em decompor cada amplitude em uma componente perpendicular ao plano de incidência e outra paralela a esse plano. A razão disto é que essas componentes se comportam independentemente uma da outra, conforme vamos ver.

A fig. 2.4 mostra as orientações simultâneas que teriam as



**FIG. 2.4:** Componentes do campo elétrico paralelas ao plano de incidência nas ondas incidente, refletida e transmitida.

componentes paralelas (//) dos campos elétricos das três ondas num ponto da superfície de separação \*, num instante em que a componente perpendicular do campo magnético em cada uma delas aponta em direção ao leitor. Como  $(\vec{E}, \vec{H}, \hat{u})$  formam um triedro direto,  $\vec{E}$  se obtém então de  $\hat{u}$  por uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário.

Temos (fig. 2.4):

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= \hat{x} \operatorname{sen} \theta_1 - \hat{y} \operatorname{cos} \theta_1, \\ \hat{u}'_1 &= \hat{x} \operatorname{sen} \theta'_1 + \hat{y} \operatorname{cos} \theta'_1, \\ \hat{u}_2 &= \hat{x} \operatorname{sen} \theta_2 - \hat{y} \operatorname{cos} \theta_2,\end{aligned}\tag{8}$$

sendo  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  os versores dos eixos cartesianos.

Vamos empregar sempre a notação "A" para as amplitudes das componentes perpendiculares e "B" para as amplitudes das componentes paralelas. Temos então (fig. 2.4)

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= B_1 e^{i\varphi_1} (\hat{x} \operatorname{cos} \theta_1 + \hat{y} \operatorname{sen} \theta_1) + B'_1 e^{i\varphi'_1} (-\hat{x} \operatorname{cos} \theta'_1 + \hat{y} \operatorname{sen} \theta'_1) + \\ &+ A_1 e^{i\varphi_1} \hat{z} + A'_1 e^{i\varphi'_1} \hat{z},\end{aligned}\tag{9}$$

$$\vec{E}_2 = B_2 e^{i\varphi_2} (\hat{x} \operatorname{cos} \theta_2 + \hat{y} \operatorname{sen} \theta_2) + A_2 e^{i\varphi_2} \hat{z},$$

onde

$$\varphi_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{r}, \quad \varphi_2 = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}, \quad \varphi'_1 = \vec{k}'_1 \cdot \vec{r}.$$

Os campos magnéticos correspondentes podem ser obtidos com o auxílio da (57) do §1.2(b):

\* Para simplificar a figura, os vetores foram desenhados a certa distância da superfície de separação.

$$\vec{H} = \sqrt{\epsilon/\mu} \hat{u} \times \vec{E} \quad (10)$$

Por construção, o produto vetorial pelo  $\hat{u}$  correspondente de cada um dos vetores unitários entre parêntesis na (9) é o versor  $\hat{z}$  e é fácil ver que o produto de cada  $\hat{u}$  por  $\hat{z}$  é o oposto do vetor unitário entre parêntesis correspondente, de modo que se obtém

$$\vec{H}_1 = \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} \left[ B_1 e^{i\varphi_1} \hat{z} + B_1' e^{i\varphi_1'} \hat{z} + A_1 e^{i\varphi_1} (-\hat{x} \cos \theta_1 - \hat{y} \sin \theta_1) + A_1' e^{i\varphi_1'} (\hat{x} \cos \theta_1' - \hat{y} \sin \theta_1') \right] \quad (11)$$

$$\vec{H}_2 = \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \left[ B_2 e^{i\varphi_2} \hat{z} + A_2 e^{i\varphi_2} (-\hat{x} \cos \theta_2 - \hat{y} \sin \theta_2) \right].$$

As condições de contorno (I') e (II') dão

$$\begin{aligned} \hat{y} \times \vec{H}_1 &= \hat{y} \times \vec{H}_2 \\ \hat{y} \times \vec{E}_1 &= \hat{y} \times \vec{E}_2 \end{aligned} \quad \text{para } y = 0. \quad (12)$$

Para  $y = 0$ , temos:

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = \vec{k}_{1,tang} \cdot \vec{r}, \quad \vec{k}_2 \cdot \vec{r} = \vec{k}_{2,tang} \cdot \vec{r}, \quad \vec{k}_1' \cdot \vec{r} = \vec{k}_1' r = \vec{k}_{1,tang}' \cdot \vec{r},$$

de modo que

$$\varphi_1 = \varphi_1' = \varphi_2$$

pelas leis de reflexão e da refração (cf. (5)) e as exponenciais tôdas coincidem (foi justamente esta condição que levou às (5)). Podemos portanto omiti-las como fator comum e as (9), (11) e (12) dão

$$B_1 (-\hat{z} \cos \theta_1) + B_1' \hat{z} \cos \theta_1' + A_1 \hat{x} + A_1' \hat{x} = B_2 (-\hat{z} \cos \theta_2) + A_2 \hat{x},$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \left[ B_1 \hat{x} + B_1' \hat{x} + A_1 \hat{z} \cos \theta_1 + A_1' (-\hat{z} \cos \theta_1') \right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (B_2 \hat{x} + A_2 \hat{z} \cos \theta_2),$$

ou seja, usando  $\theta_1 = \theta_1'$  e identificando as componentes,

$$A_1 + A_1' = A_2$$

$$A_1 - A_1' = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} A_2 \quad (13)$$

e

$$B_1 - B_1' = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} B_2,$$

$$B_1 + B_1' = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} B_2. \quad (14)$$

Vemos portanto, que as equações se separam em dois grupos, um dos quais só contém as componentes de  $\vec{E}$  perpendiculares ao plano de incidência, ao passo que o outro só contém as componentes paralelas. Portanto, estes dois grupos de componentes comportam-se de forma independente um do outro e podemos considerar cada um deles separadamente.

Podemos tomar, geralmente, com muito boa aproximação,

$$\mu_1 = \mu_2 = 1,$$

donde

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n. \quad (15)$$

As (13) dão, nestas condições, utilizando a lei da refração (6),

$$A_1 + A_1' = A_2,$$

$$A_1 - A_1' = n \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} A_2 = \frac{\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1} A_2.$$

Resolvendo estas equações, obtemos

$$A_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1} \right) A_2,$$

$$A_1' = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1} \right) A_2,$$

ou seja,

$$\frac{A_1'}{A_1} = - \frac{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)},$$

(16)

o que também pode ser escrito

$$A_1 : A_2 : A_1' = \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_1) : \operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_1) + \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) : \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1).$$

(17)

Analogamente, as (14) dão:

$$\frac{B_1'}{B_1} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{2 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)},$$

(18)

o que também pode ser escrito

$$B_1 : B_2 : B_1' = \operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2) : \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}{\cos(\theta_1 - \theta_2)} - \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} : \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2). \quad (19)$$

Exercício 2.1.2: Demonstrar as (18) e (19).

Exercício 2.1.3: Verificar diretamente que as condições de contôr no (III') e (IV') são satisfeitas pela solução.

As (16) e (18) (ou (17) e (19)) são as fórmulas de Fresnel (que as obteve de forma um pouco menos geral partindo da teoria elástica da luz).

No caso da incidência perpendicular ( $\theta_1 = 0$ ), estas fórmulas se simplificam consideravelmente. Com efeito, pelas leis de reflexão e da refração, será também  $\theta_1' = \theta_2 = 0$  e as (13) e (14) ficam

$$A_1 + A_1' = A_2$$

$$A_1 - A_1' = n A_2,$$

o que dá

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2}{n+1},$$

$$\frac{A_1'}{A_1} = -\frac{n-1}{n+1}. \quad (20)$$

Também

$$B_1 - B_1' = B_2,$$

$$B_1 + B_1' = n \cdot B_2,$$

e isto dá

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{2}{n+1},$$

$$\frac{B_1'}{B_1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

(21)

Neste caso, o plano de incidência não é mais determinado e a distinção entre componentes paralela e perpendicular perde o sentido. A razão pela qual se obtém  $A_1'/A_1 = -B_1'/B_1$  (cf. (20) e (21)) é que a orientação positiva de  $B_1'$  foi definida de tal forma que tem sentido oposto à de  $A_1'$  na incidência perpendicular (vide fig. 2.4 e (9)).

Para  $n < 1$  (transição de um meio óticamente mais denso para um menos denso), sabemos que  $\text{sen } \theta_2 = \frac{1}{n} \text{sen } \theta_1$  só define um ângulo real  $\theta_2$  para  $\text{sen } \theta_1 \leq \text{sen } \theta_l = n$  ( $\theta_l = \text{ângulo limite}$ ); para  $\theta_1 > \theta_l$ , é bem sabido que ocorre a reflexão total. Conforme veremos no § 2.1(e),  $\theta_2$  torna-se complexo nessas condições. Por enquanto, porém, vamos-nos restringir ao domínio  $\theta_1 \leq \theta_l$ . Neste domínio, os segundos membros das (16) e (18) são sempre reais, embora possam ser positivos ou negativos (note-se que  $A_1, B_1$ , etc. são amplitudes complexas). Como  $\exp(i\pi) = -1$ , isto quer dizer que a defasagem da onda refletida ou transmitida, em relação à onda incidente, é igual a 0 ou  $\pi$ .

Como  $0 \leq \theta_1 + \theta_2 < \pi$ , temos sempre  $\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) \geq 0$ , de modo



que a fase da onda transmitida é igual à da onda incidente (cf. (16) e (18)). Para  $n > 1$ , é  $\theta_1 > \theta_2$ , de modo que, para a componente perpendicular, há uma defasagem de  $\pi$  entre a onda refletida e a onda incidente (cf. (16)). Para a componente paralela, temos  $\text{tg}(\theta_1 - \theta_2) \gg 0$  na (18), mas  $\text{tg}(\theta_1 + \theta_2)$  torna-se negativa para  $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$ ; logo, a defasagem é 0 abaixo desse valor e  $\pi$  acima. Para  $n < 1$ , a discussão se faz de forma semelhante. A defasagem de  $\pi$  tem de ser levada em conta em diversos fenômenos de interferência (corresponde a uma diferença de caminho de meio comprimento de onda).

-----

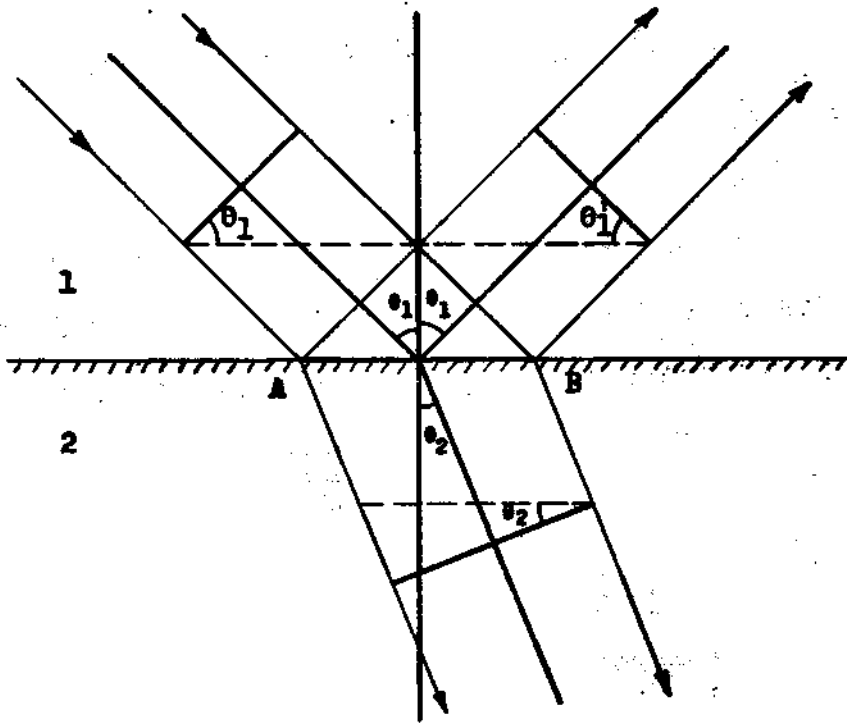
Exercício 2.1.4: Demonstrar a partir das fórmulas exatas (sem fazer a aproximação (15)) que é possível suprimir a reflexão na incidência perpendicular se encontrarmos substâncias para as quais

$$\mu_1/\mu_2 = \epsilon_1/\epsilon_2.$$

-----

### 2.1(c) Reflexividade e Transmissividade

As grandezas de maior interesse físico no presente problema são a reflexividade  $r$ , definida como a fração da energia incidente que se reflete, e a transmissividade  $t$ , definida como a fração da energia incidente que é transmitida. Para obter  $r$  e  $t$ , temos de calcular o valor médio temporal do fluxo do vetor de Poynting incidente, refletido e transmitido através de uma mesma área da superfície de separação (indicada por AB na fig. 2.5), que suporemos unitária. Conforme mostra a fig. 2.5, êsses fluxos são, respectiva



**Fig. 2.5:** Fluxo de energia incidente, refletida e transmitida através da área AB da superfície de separação.

mente:  $\bar{S}_1 \cos\theta_1$ ,  $\bar{S}'_1 \cos\theta_1$  e  $\bar{S}_2 \cos\theta_2$ , onde  $\bar{S}$  indica o valor médio do vetor de Poynting. Logo,

$$r = \frac{\bar{S}'_1}{\bar{S}_1}, \quad t = \frac{\cos\theta_2 \bar{S}_2}{\cos\theta_1 \bar{S}_1}. \quad (22)$$

Pelo que vimos no § 1.2(b), é

$$\bar{S}_1 = \frac{c}{n_1} \bar{W}_1 = \frac{c}{n_1} \frac{\epsilon_1}{8\pi} |\vec{E}_{inc}|^2;$$

$$\bar{S}_1' = \frac{c}{n_1} \frac{\epsilon_1}{8\pi} |\vec{E}_{\text{ref}}|^2 ;$$

$$\bar{S}_2 = \frac{c}{n_2} \frac{\epsilon_2}{8\pi} |\vec{E}_2|^2 .$$

Como estamos tomando  $n_1^2 = \epsilon_1$ ,  $n_2^2 = \epsilon_2$ , isso dá

$$r = |\vec{E}_{\text{ref}}|^2 / |\vec{E}_{\text{inc}}|^2 \quad (23)$$

$$e \quad t = \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \frac{n_2}{n_1} \frac{|\vec{E}_2|^2}{|\vec{E}_{\text{inc}}|^2} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} \frac{|\vec{E}_2|^2}{|\vec{E}_{\text{inc}}|^2} . \quad (24)$$

Vamos supor agora que a onda incidente é linearmente polarizada ( $\vec{E}_{\text{inc}}$  tem direção fixa). Seja  $\alpha_1$  o ângulo entre o vetor  $\vec{E}_{\text{inc}}$  e o plano de incidência ou, o que é a mesma coisa, o ângulo entre o plano de vibração da onda incidente e o plano de incidência (fig. 2.6).

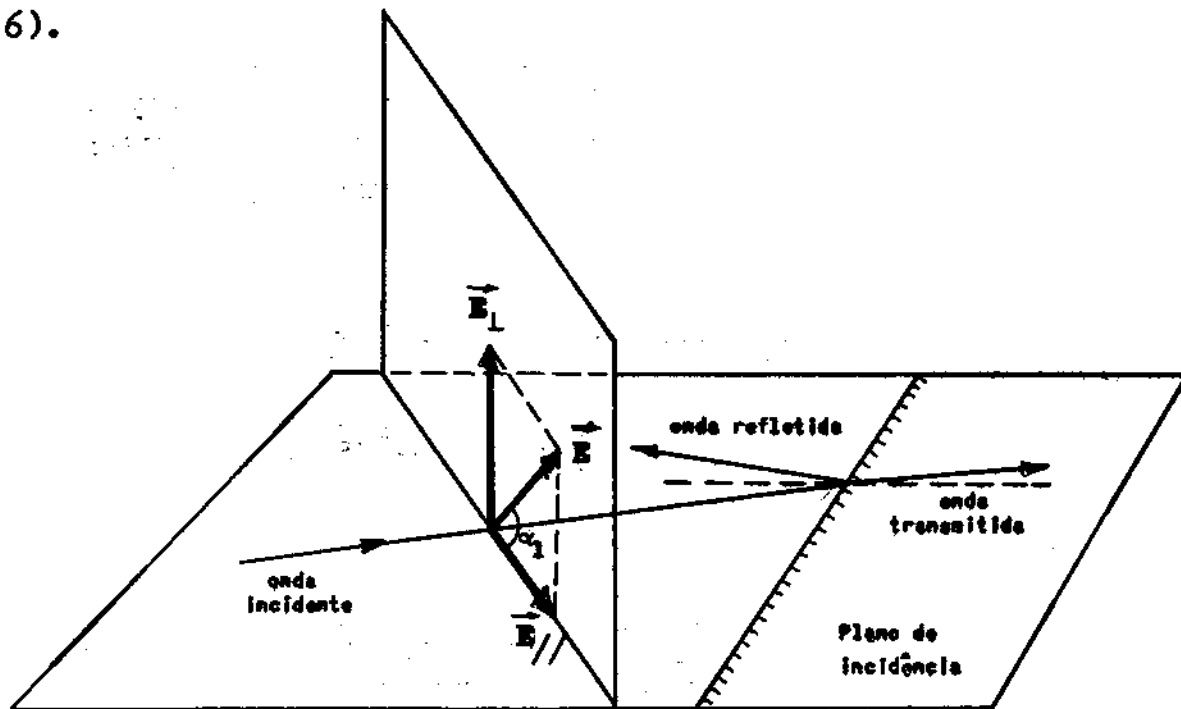


Fig. 2.6: Azimute da onda incidente.

Este ângulo chama-se azimute da onda incidente. Temos então, usando a notação da (9),

$$\begin{aligned} E_{//,inc} &= B_1 = E_{inc} \cos \alpha_1, \\ E_{\perp,inc} &= A_1 = E_{inc} \sin \alpha_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Como

$$\begin{aligned} |\vec{E}_{ref}|^2 &= |A_1'|^2 + |B_1'|^2, \\ |\vec{E}_2|^2 &= |A_2|^2 + |B_2|^2, \end{aligned}$$

as (23) e (24) podem ser escritas

$$r = \left| \frac{A_1'}{A_1} \right|^2 \cdot \left| \frac{A_1}{E_{inc}} \right|^2 + \left| \frac{B_1'}{B_1} \right|^2 \cdot \left| \frac{B_1}{E_{inc}} \right|^2,$$

$$t = \left( \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2 \cdot \left| \frac{A_1}{E_{inc}} \right|^2 + \left| \frac{B_2}{B_1} \right|^2 \cdot \left| \frac{B_1}{E_{inc}} \right|^2 \right) \frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2},$$

ou, pelas (25),

$$\begin{aligned} r &= r_{//} \cos^2 \alpha_1 + r_{\perp} \sin^2 \alpha_1, \\ t &= t_{//} \cos^2 \alpha_1 + t_{\perp} \sin^2 \alpha_1, \end{aligned} \quad (26)$$

onde, pelas (16) e (18),

$$r_{//} = \left| \frac{B_1'}{B_1} \right|^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 (\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}^2 (\theta_1 + \theta_2)} \quad (27)$$

$$e \quad r_{\perp} = \left| \frac{A_1'}{A_1} \right|^2 = \frac{\text{sen}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\text{sen}^2(\theta_1 + \theta_2)} . \quad (28)$$

Também

$$t_{//} = \frac{\text{tg}\theta_1}{\text{tg}\theta_2} \left| \frac{B_2}{B_1} \right|^2 = \frac{\text{tg}\theta_1}{\text{tg}\theta_2} \frac{4 \text{sen}^2\theta_2 \cos^2\theta_1}{\text{sen}^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} =$$

$$= \frac{4 \text{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \text{sen}\theta_2 \cos\theta_2}{\text{sen}^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} ,$$

$$\text{ou} \quad t_{//} = \frac{\text{tg}\theta_1}{\text{tg}\theta_2} \left| \frac{B_2}{B_1} \right|^2 = \frac{\text{sen}(2\theta_1) \text{sen}(2\theta_2)}{\text{sen}^2(\theta_1 + \theta_2) \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (29)$$

$$e \quad t_{\perp} = \frac{\text{tg}\theta_1}{\text{tg}\theta_2} \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2 = \frac{\text{sen}(2\theta_1) \text{sen}(2\theta_2)}{\text{sen}^2(\theta_1 + \theta_2)} . \quad (30)$$

Em particular, o azimute  $\alpha_1$  pode ser nulo (luz linearmente polarizada com  $\vec{E}$  paralelo ao plano de incidência) ou igual a  $\pi/2$  (luz linearmente polarizada com  $\vec{E}$  perpendicular ao plano de incidência). A reflexividade e a transmissividade são dadas por  $r_{//}$  e  $t_{//}$  no primeiro caso e por  $r_{\perp}$  e  $t_{\perp}$  no segundo. A conservação de energia exige que se tenha

$$r_{//} + t_{//} = 1 ,$$

$$r_{\perp} + t_{\perp} = 1 , \quad (31)$$

$$r + t = 1$$

A terceira relação também decorre das duas primeiras e da (26). A verificação de que as expressões (27) e (30) satisfazem a estas relações será deixada como exercício.

-----  
Exercício 2.1.5: Verificar as relações (31) a partir das (27) a (30).  
 -----

Para incidência perpendicular, desaparece a distinção entre os casos paralelo e perpendicular. As (20) ou (21) e as (23) e (24) dão então (notar que  $\text{tg}\theta_1/\text{tg}\theta_2$  tende a  $\theta_1/\theta_2 = n$  para  $\theta_1 \rightarrow 0$ )

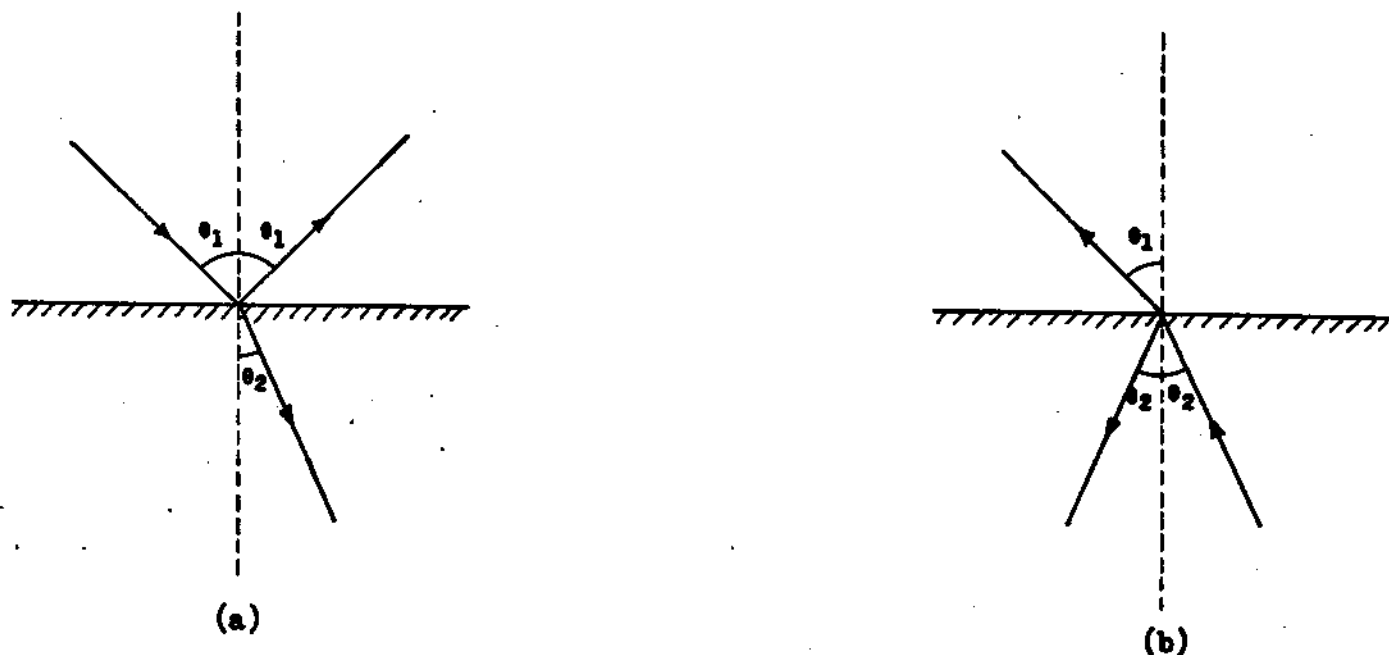
$$r = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2$$

$$t = \frac{4n}{(n+1)^2}, \quad (32)$$

valores estes que obviamente satisfazem a  $r+t=1$ .

As (27) a (30) são simétricas em  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , ou seja, não se alteram se substituirmos  $\theta_1$  por  $\theta_2$  e  $\theta_2$  por  $\theta_1$ , o que equivale a tomar a onda incidente no meio 2 em lugar de 1 (fig. 2.7(b)). Para a incidência perpendicular, a substituição correspondente na (32) é  $n \rightarrow 1/n$ , que também não altera nada. Estes resultados significam que, para um dado  $\theta_1$  (ou  $\theta_2$ ), a superfície reflete igualmente de ambos os lados (reciprocidade).

Vejamos agora como varia a reflexividade em função do ângulo de incidência. Vamos supor primeiro que  $n > 1$ , ou seja, o meio 2 é óticamente mais denso.



**Fig. 2.7:** Lei de reciprocidade: a reflexividade e a transmissividade são as mesmas em (a) e (b).

Para incidência perpendicular,  $r$  é dado pela (32); naturalmente,  $r = 0$  para  $n = 1$  (um só meio), e  $r$  é tanto maior quanto maior for  $n$  quanto maior a descontinuidade entre os índices de refração, mais forte a reflexão. Exemplos:

$$\text{ar/água: } n \approx 4/3, \quad r \approx (1/7)^2 \approx 2\%;$$

$$\text{ar/vidro: } n \approx 3/2, \quad r \approx (1/5)^2 \approx 4\%.$$

Vemos que a água não é um bom espelho para incidência perpendicular. Olhando verticalmente a superfície de um lago, vemos o fundo melhor que nossa imagem.

Por outro lado, para incidência razante,

$$(\theta_1 = \pi/2), \text{ as (27) e (28) dão: } r_{//} = r_{\perp} = 1,$$

ou seja, temos reflexão total. É por isto que a superfície de um lago se comporta como um espelho para os objetos situados na margem oposta.

Para valores de  $\theta_1$  entre 0 e  $\pi/2$ , a dependência de  $\theta_2$  é dada pelas (27) e (28), onde, para cada  $\theta_1$ , o valor de  $\theta_2$  correspondente se obtém pela lei da refração. Pode-se mostrar (exercício 2.1.6) que  $dr_{\perp}/d\theta_1 \geq 0$ , de modo que  $r_{\perp}$  cresce monotonicamente com  $\theta_1$  entre os valores extremos correspondentes à incidência perpendicular e a incidência razante (fig. 2.8). Vemos que é preciso aproximar-se bastante da incidência razante para obter reflexão forte.

-----  
Exercício 2.1.6: Demonstrar que  $dr_{\perp}/d\theta_1 \geq 0$ .  
 -----

O andamento de  $r_{//}$  é diferente. Com efeito, a (27) mostra que existe um ângulo  $\theta_1 = \theta_p$  para o qual  $r_{//} = 0$ . É quando  $\text{tg}^2(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2 \rightarrow r_{//} = 0. \quad (33)$$

Isto dá

$$\text{sen} \theta_2 = \frac{1}{n} \text{sen} \theta_1 = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) = \text{cos} \theta_1$$

e daí decorre:

$$\text{tg} \theta_1 = n, \text{ ou seja, } \theta_p \text{ é dado por}$$

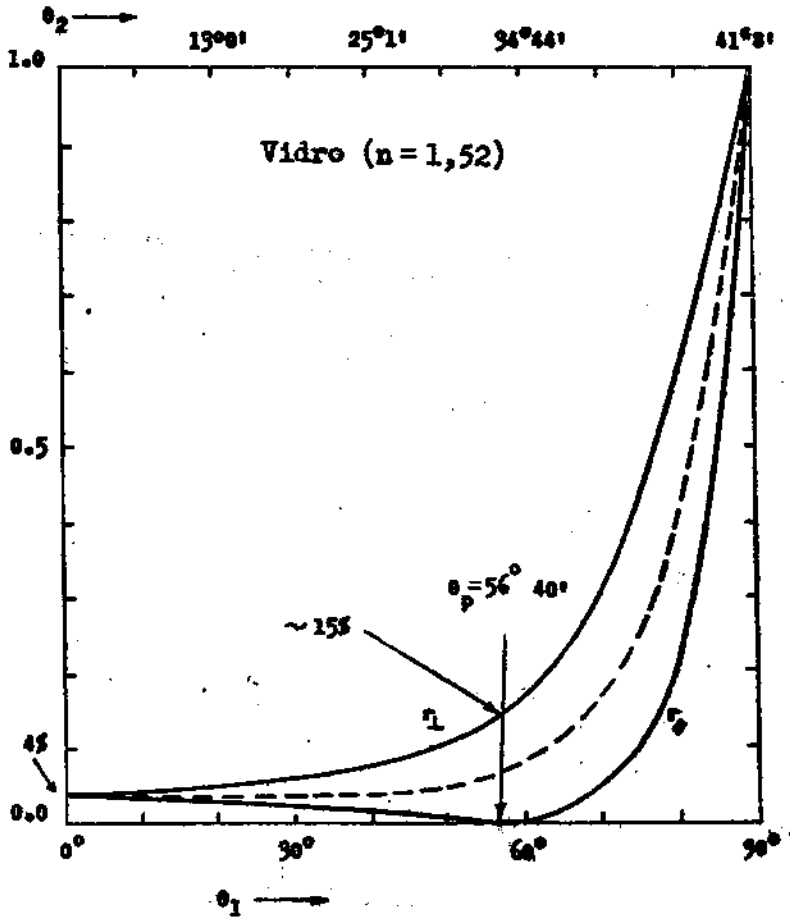
$$\text{tg} \theta_p = n. \quad (34)$$

Exemplos:

$$\text{vidro: } n = 3/2, \quad \theta_p \approx 57^\circ,$$

$$\text{água: } n = 4/3, \quad \theta_p \approx 53^\circ.$$





**Fig. 2.8:** Reflexividade do vidro em função do ângulo de incidência nos casos paralelo e perpendicular. A curva em linha interrompida é reflexividade para luz natural.

O ângulo  $\theta_p$  chama-se ângulo de polarização, por razões que serão discutidas no § 2.1(d). Pode-se mostrar (exercício 2.1.7) que  $dr_{\parallel}/d\theta_1 < 0$  para  $\theta_1 < \theta_p$  e  $dr_{\parallel}/d\theta_1 > 0$  para  $\theta_1 > \theta_p$ , de modo que o andamento de  $r_{\parallel}$  é o que está indicado na fig. 2.8.

-----  
Exercício 2.1.7: Demonstrar estes resultados.  
 -----

Exercício 2.1.8: Traçar os gráficos de  $r_{\perp}$  e  $r_{//}$  em função de  $\theta_1$  para o caso da água ( $n = 4/3$ ).  
 -----

Vimos na seção precedente que as defasagens sofridas pelas ondas refletida e transmitida são de 0 ou  $\pi$ . Isto implica que uma onda incidente linearmente polarizada produz ondas refletida e transmitida linearmente polarizadas. Entretanto, se definirmos os ângulos  $\alpha_1'$  e  $\alpha_2'$  das ondas refletida e transmitida como os ângulos entre os planos de vibração correspondentes e o plano de incidência, será geralmente  $\alpha_1 \neq \alpha_1' \neq \alpha_2$ , de modo que o plano de vibração sofre uma rotação nas ondas refletida e transmitida (em relação ao da onda incidente). Pode-se mostrar que essa rotação o afasta do plano de incidência para a onda refletida e o aproxima para a onda transmitida.

-----  
 \*Exercício 2.1.9: Demonstrar este resultado.  
 -----

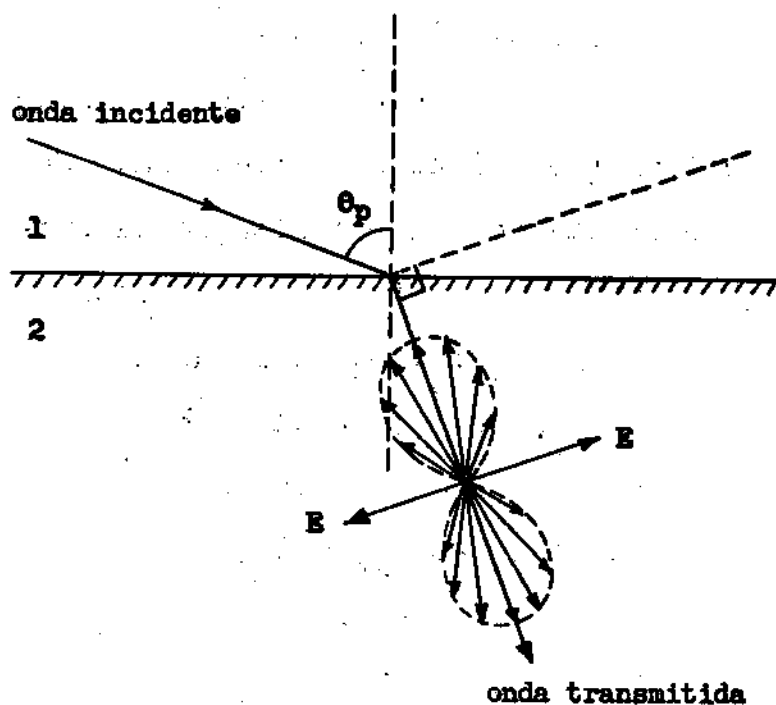
### 2.1 (d) Polarização por reflexão

Para  $\theta_1 = \theta_p$ , como vimos, tem-se  $r_{//} = 0$ . Logo, se a onda incidente for linearmente polarizada com  $\vec{E}$  paralelo ao plano de incidência, não há onda refletida para  $\theta_1 = \theta_p$ : toda a luz é transmitida (é o único caso em que isso pode acontecer). Se a onda é li-

nearmente polarizada com azimute  $\alpha_1$  qualquer, somente a componente  $\vec{E}_\perp$  sofre reflexão, de modo que a luz refletida é linearmente polarizada com  $\vec{E}$  perpendicular ao plano de incidência. Mais geralmente, isto sucede qualquer que seja a polarização da onda incidente, e mesmo para a luz natural (luz emitida por um corpo incandescente - luz solar por exemplo). Com efeito, se a luz não é monocromática, podemos representá-la por uma integral de Fourier (decomposição espectral: vide apêndice 1B), e o vetor  $\vec{E}$  de cada componente monocromática pode ser decomposto em  $\vec{E}_{//}$  e  $\vec{E}_\perp$ , aos quais se aplicam os resultados acima. Portanto, se a luz solar incide por exemplo sobre uma placa de vidro segundo o ângulo  $\theta_p$  (que para o vidro é de cerca de  $57^\circ$ ), a luz refletida é linearmente polarizada. Foi assim que Malus descobriu a polarização por reflexão (cf. § 1.1(a)). Como  $\vec{E}$  é perpendicular ao plano de incidência na onda refletida,  $\vec{H}$  é paralelo, de modo que o plano de polarização da onda refletida coincide com o plano de incidência.

A (33) mostra que  $\theta_p$  também pode ser definido como o ângulo para o qual, segundo as leis da reflexão e da refração, a direção da onda refletida, se existisse, seria perpendicular à direção da onda refratada. Esta lei, descoberta por Brewster em 1815, chama-se lei de Brewster.

A lei de Brewster pode ser explicada de modo muito simples com o auxílio da Teoria dos Elétrons. Consideremos uma onda incidente linearmente polarizada com  $\vec{E}$  paralelo ao plano de incidência. Ao penetrar no meio 2, o campo elétrico produz oscilações forçadas dos elétrons atômicos. A direção de oscilação é a direção de  $\vec{E}$ ,



**Fig. 2.9:** Interpretação da lei de Brewster segundo a Teoria dos Elétons. Os elétrons do meio 2 oscilam na direção  $EE$ . A curva em forma de oito dá a distribuição angular da radiação emitida. Não há emissão na direção  $EE$ , que, para  $\theta_i = \theta_p$ , seria a direção de propagação da onda refletida.

conforme mostra a fig. 2.9. Ocorre portanto um efeito análogo ao da polarização de um dielétrico estudado na eletrostática, mas os dipolos produzidos neste caso não são estáticos: são dipolos oscilantes. Conforme veremos no capítulo 8, um dipolo oscilante emite radiação. Temos assim um conjunto de ondas secundárias emitidas pelos dipolos que foram excitados pela onda incidente. Estas ondas secundárias interferem entre si, e pode-se mostrar (cf. capítulo 9) que só se produz interferência construtiva nas dire-

ções que obedecem à leis da reflexão e da refração. É desse complicado mecanismo de interferência que resultam finalmente a onda transmitida e a onda refletida (radiação emitida para o meio 1).

Um dipolo oscilante não emite uniformemente em todas as direções. A radiação que ele emite tem uma distribuição angular bem definida, simétrica em torno do eixo do dipolo, e com a forma de um oito cujo eixo é perpendicular ao eixo do dipolo (fig. 2.9), conforme veremos no capítulo 8. Em particular, o dipolo não emite energia na direção de oscilação. Por conseguinte, quando a direção de oscilação do dipolo (que é perpendicular à direção de propagação da onda transmitida) coincide com a direção de reflexão, não há onda refletida (fig. 2.9). Isto explica a lei de Brewster. Vemos também que este fenômeno não poderia ocorrer para  $\vec{E}$  perpendicular ao plano de incidência (por que?).

Consideremos agora o que acontece quando a luz incidente é luz natural. Se considerarmos o vetor  $\vec{E}$  da onda incidente num dado instante, podemos ainda decompô-lo em  $\vec{E}_{//} + \vec{E}_{\perp}$ , com  $E_{//,inc} = E_{inc} \cos \alpha_1$ ,  $E_{\perp,inc} = E_{inc} \sin \alpha_1$ . Entretanto,  $\alpha_1$  variará com o tempo, e isto de forma completamente irregular. Por conseguinte, todos os valores de  $\alpha_1$  são igualmente prováveis, e, quando tomamos a média temporal para calcular a intensidade, obtemos, nas (25),  $\overline{|A_1|^2} = \overline{|B_1|^2} = \frac{1}{2} \overline{|E_{inc}|^2}$ , ou seja,

$$\overline{\cos^2 \alpha_1} = \overline{\sin^2 \alpha_1} = \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Em lugar das (26), obtemos, portanto, para luz natural,

$$r = \frac{1}{2} (r_{//} + r_{\perp}), \quad t = \frac{1}{2} (t_{//} + t_{\perp}). \quad (36)$$

A curva da reflexividade para luz natural está traçada em linha interrompida na fig. 2.8.

A luz refletida, porém, não será geralmente luz natural. Com efeito, temos:  $\overline{|A_1'|^2} = r_{\perp} \overline{|A_1|^2}$ ,  $\overline{|B_1'|^2} = r_{//} \overline{|B_1|^2}$ , de modo que pelas (27) e (28),

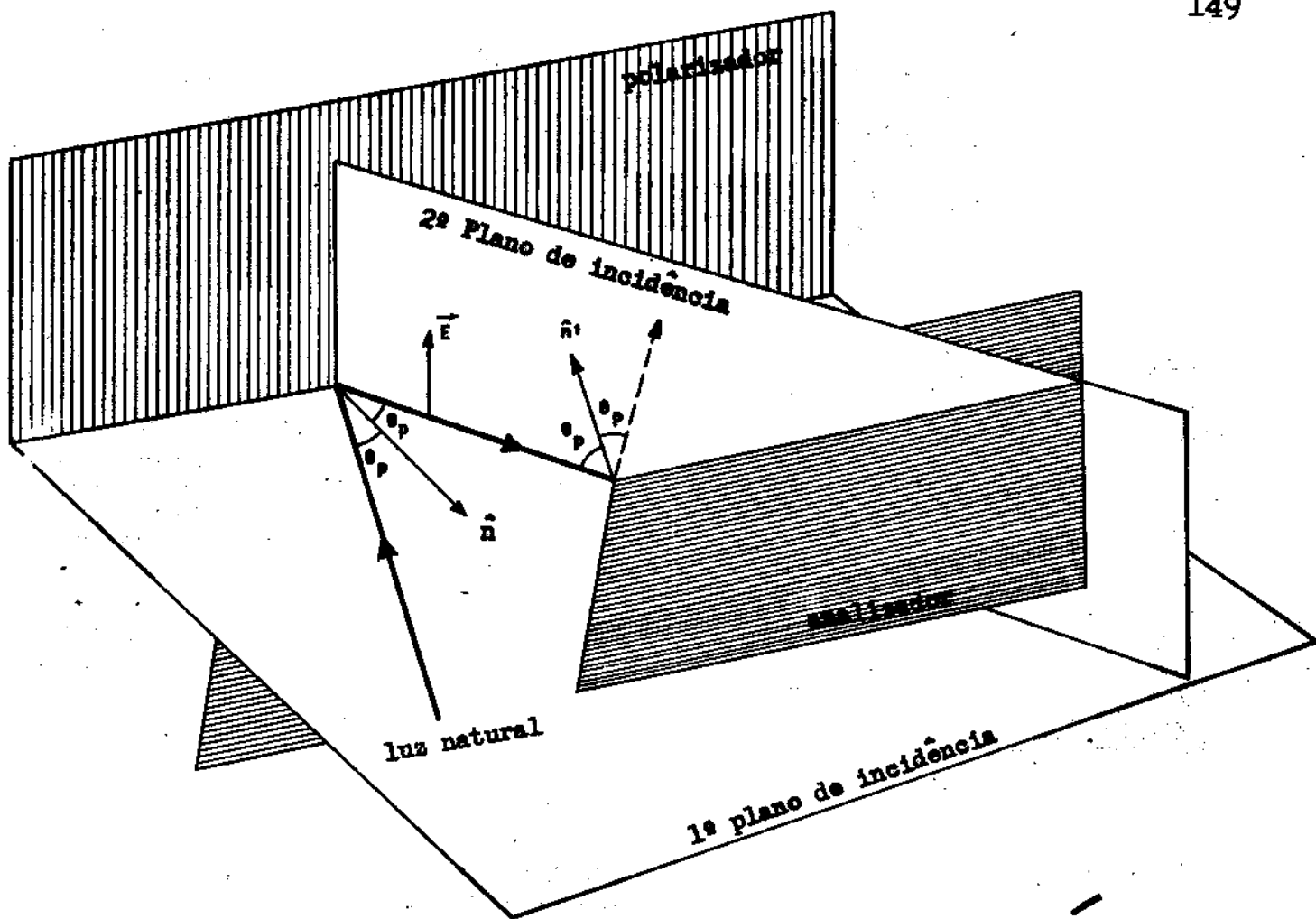
$$\frac{\overline{|B_1'|^2}}{\overline{|A_1'|^2}} = \frac{r_{//}}{r_{\perp}} = \frac{\cos^2(\theta_1 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (37)$$

Sómente para incidência perpendicular ( $\theta_1 = 0$ ) ou rasante ( $\theta_1 = \pi/2$ ) esta razão se torna igual à unidade. Entre êsses dois casos extremos, ela é sempre  $< 1$  (vide fig. 2.8), ou seja, a luz refletida é parcialmente polarizada, predominando a componente  $\vec{E}_{\perp}$ . O grau de polarização é definido por

$$P = \frac{r_{\perp} - r_{//}}{r_{\perp} + r_{//}} \quad (38)$$

Para  $\theta_1 = 0$  ou  $\pi/2$ ,  $P = 0$ , ou seja, a luz refletida é luz natural. Para  $\theta_1 = \theta_p$ ,  $r_{//} = 0$ , ou seja,  $P = 1$ : a luz refletida é totalmente polarizada (com  $\vec{E}$  perpendicular ao plano de incidência).

Isto pode ser verificado experimentalmente, fazendo a luz refletida por uma placa do material (por exemplo: vidro) segundo o ângulo  $\theta_p$  incidir sobre uma segunda placa do mesmo material, colocada de tal forma que a componente  $\vec{E}_{\perp}$  relativamente à primeira placa passe a ser a componente  $\vec{E}_{//}$  relativamente à segunda. Para isto basta que os dois planos de incidência sejam perpendiculares entre si. Se, além disto, a orientação da segunda placa for tal que o ângulo de incidência sobre ela é também  $\theta_p$ , não há luz refletida na segunda placa (fig. 2.10).



**Fig. 2.10:** Polarização por reflexão: a luz refletida pelo polarizador segundo o ângulo  $\theta_p$  é linearmente polarizada com  $\vec{E}$  contido no 2º plano de incidência, e não sofre reflexão quando incide sobre o analisador segundo o ângulo  $\theta_p$ .

Suponhamos agora que, mantendo sempre fixo o ângulo de incidência  $\theta_p$  sobre a segunda placa, façamos girar essa placa, de tal forma que o segundo plano de incidência forme um ângulo  $\beta$  com o primeiro (na fig. 2.10,  $\beta = \pi/2$ ). Este será também o ângulo entre as normais aos dois planos, ou seja, entre a normal ao segundo plano de incidência e o vetor  $\vec{E}$  da onda incidente sobre ele (que é per

pendicular ao primeiro plano de incidência). Como  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , onde  $\alpha$  é o azimute correspondente, podemos aplicar a (26), com  $r_{//} = 0$ , o que dá

$$r = r_{\perp} \operatorname{sen}^2 \alpha = r_{\perp} \operatorname{sen}^2(\pi/2 - \beta), \text{ ou seja, } r = r_{\perp} \operatorname{cos}^2 \beta. \quad (39)$$

Logo, a intensidade da luz refletida pela segunda placa varia proporcionalmente ao quadrado do cosseno do ângulo  $\beta$ , que é o ângulo entre a direção de vibração da onda incidente sobre a segunda placa (direção de  $\vec{E}$ ) e a direção para a qual a intensidade refletida é máxima ( $\beta = 0$ ).

O aparelho constituído pelo par de placas chama-se polariscópio de Nörrenberg: a primeira placa funciona como polarizador, produzindo luz linearmente polarizada a partir da luz natural, e a segunda placa é o analisador, que permite detetar a luz linearmente polarizada. A (39) é um caso particular da lei de Malus: a intensidade da luz analisada varia com o quadrado do cosseno do ângulo entre a direção de vibração da luz incidente sobre o analisador e a direção de intensidade máxima da luz analisada.

Uma placa de vidro não é um polarizador muito eficiente. Com efeito, pela fig. 2.8,  $r_{\perp} \approx 0,15$  para  $\theta_1 = \theta_p$ , de modo que, pela primeira das (36), somente 7,5% da intensidade da luz incidente são aproveitados.

Podemos então utilizar a luz transmitida que, para  $\theta_1 = \theta_p$ , será parcialmente polarizada, com predomínio da componente  $\vec{E}_{//}$ . Entretanto o grau de polarização será (cf. (38))

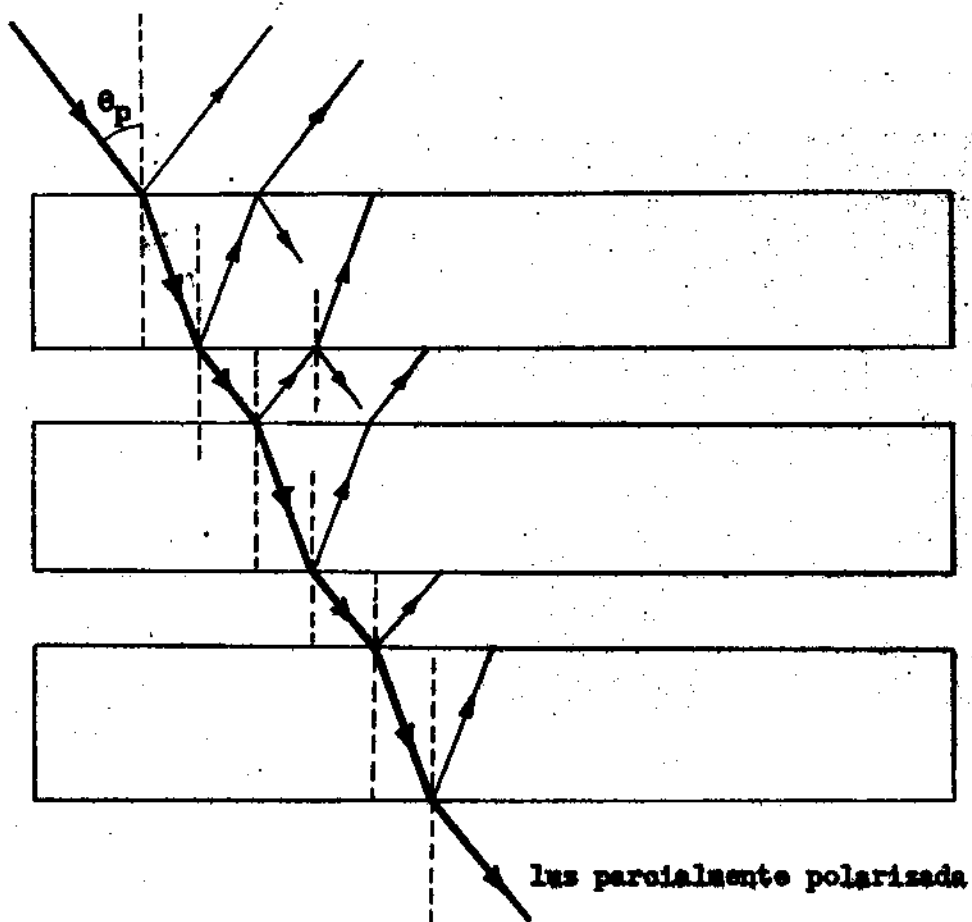


$$\frac{t_{//} - t_{\perp}}{t_{//} + t_{\perp}} \approx \frac{1 - 0,85}{1 + 0,85} \approx 0,081 \quad (8,1\%),$$

pois, para  $\theta_1 = \theta_p$ , temos  $t_{//} = 1$ ,  $t_{\perp} \approx 0,85$ .

Para aumentar o grau de polarização, emprega-se uma pilha de placas paralelas, conforme mostra a fig. 2.11. Luz natural incide

luz natural



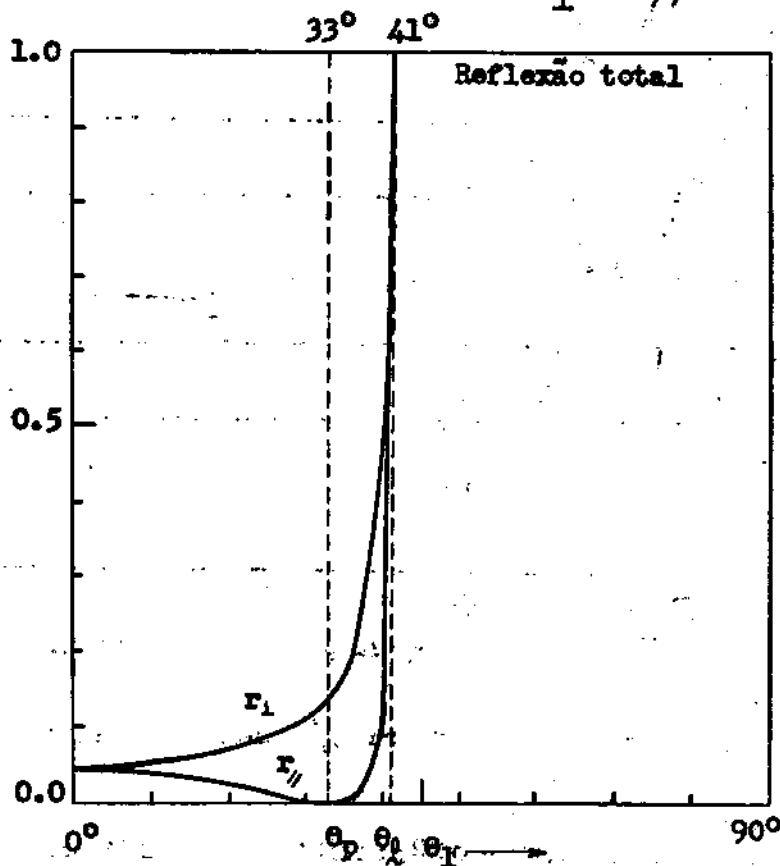
**Fig. 2.11:** Pilha de placas paralelas para produção de luz polarizada.

sobre a primeira segundo o ângulo  $\theta_p$ : a luz transmitida incide sobre a face inferior da primeira segundo um ângulo  $\theta_p'$  que é também o ângulo de polarização correspondente à passagem do vidro para o

ar (por que ?), e assim sucessivamente, de modo que a componente  $\vec{E}_\perp$  vai sendo gradativamente eliminada, sem que haja muita perda de intensidade da componente  $\vec{E}_\parallel$  (há sempre alguma perda devido a absorção). Com oito placas obtém-se um grau de polarização da ordem de 60%.

### → 2.1 (e) Reflexão total

Consideremos agora o caso em que a luz passa de um meio óticamente mais denso a um menos denso ( $n < 1$ ), por exemplo, do vidro para o ar ( $n \approx 2/3 \approx 0,66$ ). Pela lei de reciprocidade mencionada no § 2.1(c), podemos obter o andamento de  $r_\perp$  e  $r_\parallel$  em função do ângu-



**Fig. 2.12:** Reflexividade em função do ângulo de incidência na passagem do vidro para o ar. A partir de  $\theta_1 = \theta_c$ , ocorre a reflexão total.

lo de incidência simplesmente tomando os valores de  $r_{\perp}$  e  $r_{//}$  para a transição inversa (ar-vidro) e notando que o ângulo de incidência corresponde ao ângulo de refração da transição inversa (basta usar a escala superior na fig. 2.8). As curvas da fig. 2.8 dão então o andamento de  $r_{\perp}$  e  $r_{//}$  para ângulos de incidência menores que  $\theta_l$ , onde  $\theta_l$  é o ângulo limite, definido por

$$\text{sen } \theta_l = n. \quad (40)$$

Para o caso vidro/ar,  $\theta_l$  é da ordem de  $41^\circ$ . As curvas da fig. 2.8 são "comprimidas" entre 0 e  $\theta_l$  (fig. 2.12). O ângulo de polarização é:  $\theta_p \approx 33^\circ$ . Para  $\theta_1 = \theta_l$  temos  $r_{//} = r_{\perp} = 1$ . Pode-se mostrar (exercício 2.1.10) que ambas as curvas têm tangente vertical nesse ponto, de modo que a passagem de reflexão fraca para reflexão total é extremamente rápida. O ângulo  $\theta_l$ , e conseqüentemente o índice de refração (pela (40)), pode assim ser medido de forma muito precisa; o aparelho que utiliza este princípio chama-se refratômetro de Abbe e Kohlrausch.

-----  
Exercício 2.1.10: Demonstrar que as curvas de  $r_{//}$  e  $r_{\perp}$  em função de  $\theta_1$  têm tangente vertical para  $\theta_1 = \theta_l$ .  
 -----

Que acontece para  $\theta_1 > \theta_l$ ? É bem sabido que ocorre a reflexão total. Entretanto, isto não significa que o campo eletromagnético no meio 2 seja idênticamente nulo, pois isto não permitiria satisfazer às condições de contorno, como é fácil verificar.

A condição

$$\operatorname{sen} \theta_2 = \frac{1}{n} \operatorname{sen} \theta_1 > 1 \quad (\text{para } \theta_1 > \theta_l)$$

não pode ser satisfeita por um valor real de  $\theta_2$ , mas é possível satisfazê-la tomando  $\theta_2$  complexo. Com efeito, temos

$$\operatorname{sen} (u + iv) = \operatorname{sen} u \operatorname{ch} v + i \cos u \operatorname{sh} v .$$

Para  $\theta_1 = \theta_l$ , temos  $\theta_2 = \pi/2$ ; se tomarmos então, para  $\theta_1 > \theta_l$ ,

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + i\varphi \quad (\theta_1 > \theta_l) , \quad (41)$$

vem

$$\operatorname{sen} \theta_2 = \operatorname{ch} \varphi > 1 . \quad (42)$$

Embora até aqui tenhamos interpretado  $\theta_2$  geometricamente, como um ângulo, a verificação das equações de Maxwell e das condições de contorno só depende das propriedades analíticas das funções trigonométricas, de modo que as expressões obtidas para  $\theta_2$  complexo continuam sendo soluções do problema. Como o expoente das exponenciais nos fatores de propagação das (9) e (11) terá agora também uma parte real, é preciso, porém, impôr a condição de que as amplitudes dos campos sejam limitadas no infinito. Assim, embora a (42) possa ser satisfeita tanto por  $\varphi$  positivo como por  $\varphi$  negativo, veremos no próximo § que somente uma escolha do sinal de  $\varphi$  é fisicamente admissível. Como no caso de um meio condutor, um vetor de onda complexo implica a existência de atenuação e defasagem; veremos, porém, que a atenuação é de natureza muito diferente da que encontramos para o meio condutor. A forma da solução obtida permanecerá inalterada, sendo apenas necessário reinterpretá-la, de modo que ainda podemos empregar as fórmulas de Fresnel (16) e (18), substituindo nelas a (41):

$$\frac{A_1'}{A_1} = - \frac{\sin(\theta_1 - \frac{\pi}{2} - i\varphi)}{\sin(\theta_1 + \frac{\pi}{2} + i\varphi)} = \frac{\cos(\theta_1 - i\varphi)}{\cos(\theta_1 + i\varphi)},$$

$$\frac{B_1'}{B_1} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \frac{\pi}{2} - i\varphi)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \frac{\pi}{2} + i\varphi)} = \frac{\cot(\theta_1 - i\varphi)}{\cot(\theta_1 + i\varphi)}.$$

Como o quociente de dois números complexos conjugados é um fator de fase (tem módulo um), podemos escrever:

$$\frac{A_1'}{A_1} = \frac{\cos(\theta_1 - i\varphi)}{\cos(\theta_1 + i\varphi)} = e^{i\delta_{\perp}}, \quad \frac{B_1'}{B_1} = \frac{\cot(\theta_1 - i\varphi)}{\cot(\theta_1 + i\varphi)} = e^{i\delta_{//}}, \quad (43)$$

onde  $\delta_{\perp}$  e  $\delta_{//}$  são reais. Em lugar das (27) e (28), obtemos então

$$r_{\perp} = r_{//} = 1 \quad (\text{para } \theta_1 > \theta_t), \quad (44)$$

mostrando assim que temos efetivamente reflexão total.

### 2.1 (f) Penetração da luz no meio menos denso

Vejam agora a interpretação física da solução com  $\theta_2$  complexo. As (9) e (11) dão a solução no meio 2 para os dois casos de polarização

$$\vec{E}_{\perp} \begin{cases} \vec{E}_2 = A_2 \exp(i\varphi_2) \hat{z}, \\ \vec{H}_2 = -\sqrt{\epsilon_2 \mu_2} A_2 \exp(i\varphi_2) (\hat{x} \cos \theta_2 + \hat{y} \sin \theta_2), \end{cases}$$

$$\vec{E}_{//} \begin{cases} \vec{E}_2 = B_2 \exp(i\varphi_2) (\hat{x} \cos \theta_2 + \hat{y} \sin \theta_2), \\ \vec{H}_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} B_2 \exp(i\varphi_2) \hat{z}, \end{cases} \quad (45)$$

onde, pela (8),

$$\varphi_2 = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t = k_2(x \operatorname{sen} \theta_2 - y \operatorname{cos} \theta_2) - \omega t \quad (46)$$

(reintroduzimos o fator temporal  $e^{-i\omega t}$ ).

Note-se que a solução para o caso  $\vec{E}_{//}$  pode ser obtida da solução para  $\vec{E}_{\perp}$  pela substituição (42) do § 1.2(a):  $\vec{E}' = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H}$ ;  $\vec{H}' = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E}$  (além de  $A_2 \rightarrow B_2$ ) que, como sabemos, não altera o vetor de Poynting.

Pela (43),  $\operatorname{sen} \theta_2 = \operatorname{ch} \varphi$

$$\operatorname{cos} \theta_2 = \operatorname{cos} \left( \frac{\pi}{2} + i\varphi \right) = -i \operatorname{sh} \varphi,$$

de modo que

$$\exp(i\varphi_2) = \exp \left[ i(k_2 x \operatorname{ch} \varphi - \omega t) \right] \exp(-k_2 y \operatorname{sh} \varphi). \quad (47)$$

Como os campos devem permanecer limitados para  $y \rightarrow -\infty$ , vemos que é preciso escolher  $\varphi < 0$ . A (47) mostra que os campos penetram exponencialmente no meio 2, e que a profundidade de penetração (valor de  $|y|$  para o qual as amplitudes se reduzem por um fator de  $e^{-1}$ ) é

$$\begin{aligned} |y| &= \frac{1}{k_2 |\operatorname{sh} \varphi|} = \frac{1}{k_2 \sqrt{\operatorname{ch}^2 \varphi - 1}} = \frac{1}{k_2 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta_2 - 1}} = \\ &= \frac{1}{k_2 \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{n} - 1\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\frac{k_2}{n} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta_1 - n^2}} = \frac{1}{k_1 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta_1 - \operatorname{sen}^2 \theta_2}}, \end{aligned}$$

ou seja, com  $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ ,

$$|y| = \frac{\lambda_1}{2\pi \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta_1 - \operatorname{sen}^2 \theta_2}}. \quad (48)$$

Para  $\theta_1 = \theta_1$ , a profundidade de penetração é infinita, mas a (48) mostra que ela cai rapidamente a uma fração do comprimento de onda no meio 1 quando  $\theta_1$  cresce. Por exemplo, no caso vidro/ar, para  $\theta_1 = 60^\circ$ , a profundidade de penetração é menor que  $\lambda_1/3$ .

À primeira vista, a penetração da onda no meio 2 parece contradizer a conservação de energia, uma vez que há reflexão total. Para ver o que acontece com a energia, vamos calcular o vetor de Poynting (real!) associado a uma das (45), por exemplo, ao caso  $\vec{E}_1$  (os vetores de Poynting são proporcionais nos dois casos). Para isto, temos de tomar a parte real dessas expressões; se  $A_2 = a_2 \exp(i\delta_2)$ , obtemos

$$\vec{E}_2 = a_2 \cos(k_2 x \operatorname{ch} \varphi - \omega t + \delta_2) \exp(-k_2 y \operatorname{sh} \varphi) \hat{z}$$

$$\vec{H}_2 = -\sqrt{\epsilon_2/\mu_2} a_2 \exp(-k_2 y \operatorname{sh} \varphi) \left[ \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sen}(k_2 x \operatorname{ch} \varphi - \omega t + \delta_2) \hat{x} + \operatorname{ch} \varphi \cos(k_2 x \operatorname{ch} \varphi - \omega t + \delta_2) \hat{y} \right], \quad (49)$$

onde usamos:  $\operatorname{sen} \theta_2 = \operatorname{ch} \varphi$ ,  $\cos \theta_2 = -i \operatorname{sh} \varphi$ . Temos então

$$\vec{S}_2 = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_2 \times \vec{H}_2 = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} a_2^2 \exp(-2k_2 y \operatorname{sh} \varphi).$$

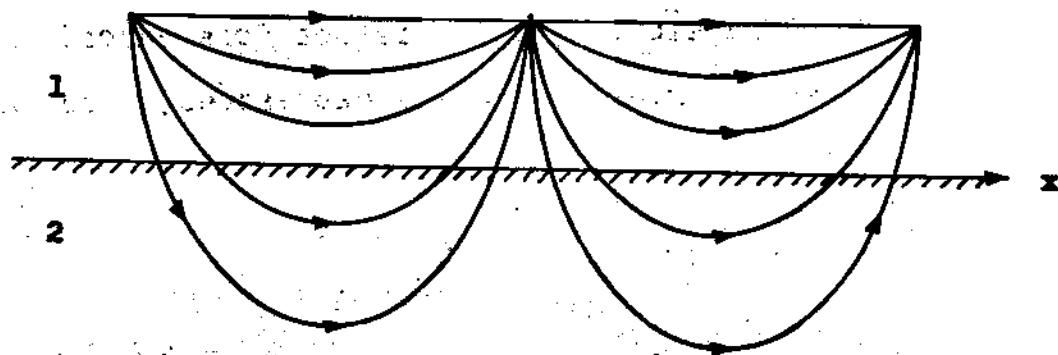
$$\left[ \cos^2(k_2 x \operatorname{ch} \varphi - \omega t + \delta_2) \operatorname{ch} \varphi \hat{x} - \cos(k_2 x \operatorname{ch} \varphi - \omega t + \delta_2) \operatorname{sen}(k_2 x \operatorname{ch} \varphi - \omega t + \delta_2) \operatorname{sh} \varphi \hat{y} \right]. \quad (50)$$

A (50) mostra que, em cada instante, a componente x de  $\vec{S}_2$  é sempre positiva, ao passo que a componente y oscila entre valores positivos e negativos ao longo da superfície de separação. As "linhas de força" de  $\vec{S}_2$  (linhas de corrente da energia) num dado

instante têm o aspecto indicado na fig. 2.13 (o conjunto delas propaga-se para a direita). Se tomarmos os valores médios, seja temporais, seja espaciais (sobre uma distância  $x$  suficientemente grande), obtemos

$$\bar{S}_x = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} a_2^2 \operatorname{ch}\psi \exp(-2k_2 y \operatorname{sh}\psi), \quad \bar{S}_y = 0. \quad (51)$$

É fácil verificar que o vetor de Poynting complexo leva ao mesmo resultado.



**Fig. 2.13:** Linhas de corrente da energia na reflexão total. A energia penetra no meio 2 e sai d'êlo, propagando-se paralelamente à superfície de separação.

A (51) mostra que no meio 2 há um transporte de energia paralelamente à superfície de separação. As (49) são ondas caminhantes na direção  $x$ , mas exponencialmente atenuadas na direção  $y$ . No caso de um meio condutor, tínhamos ondas atenuadas ao longo da direção de propagação, devido à absorção (efeito Joule), e os planos de fase constante eram também planos de amplitude constante (onda plana homogênea). No caso da reflexão total, a onda no meio 2 se atenua perpendicularmente à direção de propagação, e por isso não há absor



ção de energia. Os planos de fase constante ( $x = \text{constante}$ ) são perpendiculares aos planos de amplitude constante ( $y = \text{constante}$ ), de forma que a amplitude não é constante sôbre um plano de fase constante (onda plana inhomogênea). Uma onda dêste tipo chama-se onda evanescente. É o único tipo de onda atenuada que se pode propagar num meio transparente pois a conservação de energia implica que a direção de atenuação só pode ser perpendicular à direção de propagação.

-----  
Exercício 2.1.11: Demonstrar êste resultado.  
 -----

A (49) mostra que  $H_{2x} \neq 0$ , de modo que a onda evanescente não é puramente transversal:  $\vec{H}$  tem uma componente longitudinal. Entretanto,  $\vec{E}_2$  ainda é transversal, de modo que esta onda é chamada TE (transversal elétrica); análogamente, a onda  $\vec{E}_{//}$  na (45) é uma onda TM (transversal magnética), pois  $\vec{H}_2$  é transversal à direção de propagação, embora  $\vec{E}_2$  não seja.

A discussão precedente não explica de que forma a energia pôde penetrar no meio 2. Isto não pode ser visto numa solução estacionária como a que estamos considerando, em que a dependência do tempo é da forma  $e^{-i\omega t}$  qualquer que seja  $t$ . Seria preciso considerar uma solução não estacionária, em que se tenha inicialmente no meio 1 um feixe luminoso que ainda não incidiu sôbre a superfície de separação. Nêste caso, uma pequena fração da energia incidente teria de penetrar no meio 2 logo após a incidência. Também consideramos sômente o caso limite ideal de uma onda plana, que tem extensão infinita. Se considerarmos um feixe de luz real, lateralmente limi

tado, a energia poderá penetrar no meio 2 ou dêle sair nas fronteiras do feixe \*. Em ambos os casos, o feixe incidente seria representado por uma integral de Fourier (apêndice 1B), correspondente a uma superposição de ondas planas propagando-se em tôdas as direções, que conteria necessariamente componentes com ângulos de incidência inferiores a  $\theta_1$ . Tais componentes transportam energia para o meio 2.

Não é fácil demonstrar experimentalmente o fenômeno de penetração na região do visível, pois a profundidade de penetração é da ordem de comprimento de onda. Entretanto, êle foi verificado com o auxílio de ondas hertzianas ( $\lambda \approx 20$  cm.) por J. Bose, que colocou dois prismas de asfalto (1 e 2, fig. 2.14), separados por uma distância de vários centímetros, e fez incidir as ondas sobre o prisma 1 de forma a haver "reflexão total" em sua face posterior. Era possível detetar sinais atrás do prisma 2, e a intensidade dos sinais aumentava quando se diminuía a distância entre os dois prismas.

A penetração exponencial na região proibida é um fenômeno tipicamente ondulatório, que também ocorre com as "ondas de probabilidade" na Mecânica Quântica, e é responsável por muitos efeitos importantes. Assim, uma partícula contida dentro de um poço de potencial pode penetrar através de uma barreira de potencial (efeito de túnel), o que é a base da teoria da desintegração alfa (cf. livro de D. Bohm na Leitura Recomendada).

\* A reflexão total de um feixe de luz de seção finita foi tratada por J. Picht, Ann. der Physik (5), 3 (1929), 433; ver também K. Artmann, Ann. der Physik 1 (1948), 333 e 2 (1948), 87.

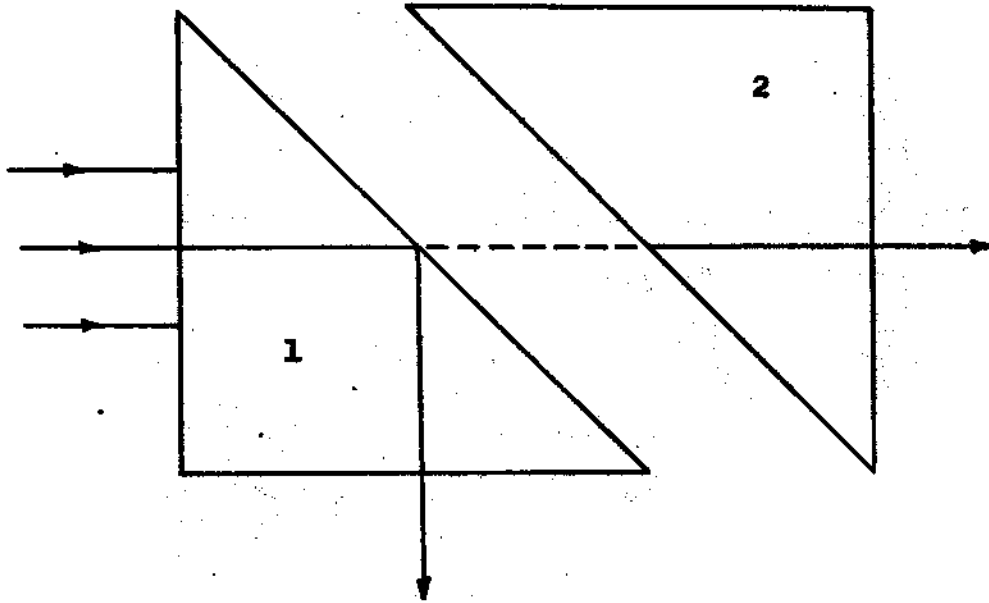


Fig. 2.14: Experiência de J. Bose para demonstrar a penetração no meio menos denso.

### 2.1 (g) Produção de luz elípticamente ou circularmente polarizada

Voltemos agora às (43). Elas mostram que em geral  $\delta_{\perp} \neq \delta_{//}$ . Logo, se a onda incidente é uma onda linearmente polarizada que contém ambas as componentes, as componentes perpendicular e paralela sofrerão defasagens diferentes, e a luz refletida será elípticamente polarizada. O que interessa, como sabemos, é a diferença de fase  $\delta$  entre as duas componentes. As (43) dão

$$\exp(i\delta) = \exp\left[i(\delta_{\perp} - \delta_{//})\right] = \frac{\text{sen}(\theta_1 - i\varphi)}{\text{sen}(\theta_1 + i\varphi)}. \quad (52)$$

Temos

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_1 - i\varphi) &= \text{sen}\theta_1 \text{ch}\varphi - i \cos\theta_1 \text{sh}\varphi \\ &= \text{sen}\theta_1 \frac{\text{sen}\theta_1}{n} + i \cos\theta_1 \sqrt{\left(\frac{\text{sen}\theta_1}{n}\right)^2 - 1}, \end{aligned}$$

onde o sinal da raiz quadrada decorre da condição:  $\psi < 0$ .

Para um número complexo qualquer,

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \exp(i\omega),$$

temos

$$\frac{a + ib}{a - ib} = \exp(2i\omega), \quad \text{onde} \quad \omega = \operatorname{tg}^{-1}(b/a).$$

Aplicando êste resultado à (52) obtemos:

$$\delta = 2\omega = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta_1 - n^2}}{\operatorname{sen}^2 \theta_1} \right),$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}(\delta/2) = \frac{\cos \theta_1 \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta_1 - n^2}}{\operatorname{sen}^2 \theta_1}. \quad (53)$$

A (53) mostra que  $\delta$  só se anula para  $\theta_1 = \theta_1$  ou para  $\theta_1 = \pi/2$ . Entre êsses dois valores,  $\delta$  é sempre positivo (luz elípticamente polarizada), de modo que tem de passar por um máximo para um determinado valor de  $\theta_1$ . Pode-se mostrar que êsse valor é dado por

$$\operatorname{sen}^2 \theta_{1(\max)} = \frac{2n^2}{1+n^2} \quad (54)$$

e a defasagem correspondente é dada por

$$\operatorname{tg}(\delta_{\max}/2) = \frac{1-n^2}{2n} \quad (55)$$

Se quizermos produzir luz circularmente polarizada, é preciso satisfazer a duas condições: a) as duas componentes perpendicu-

lares devem ter a mesma amplitude; b) a defasagem deve ser  $\pi/2$ . Para satisfazer à primeira condição, basta que o azimute da onda incidente seja de  $45^\circ$ . Com efeito, neste caso, as amplitudes paralela e perpendicular são iguais na onda incidente, e por conseguinte também na onda refletida (porque há reflexão total). Para satisfazer à segunda condição, utilizando a defasagem máxima, vemos pela (55) que seria preciso ter

$$1 - n^2 = 2n \longrightarrow \frac{1}{n} = \sqrt{2} + 1 \approx 2,41 ,$$

o que só se consegue atingir com algumas substâncias \*, como o diamante.

Entretanto, como foi sugerido por Fresnel, pode-se atingir  $\delta = \pi/2$  com duas reflexões totais sucessivas num paralelepípedo de vidro (paralelepípedo de Fresnel), conforme mostra a fig. 2.15. Neste caso,  $1/n \approx 1,51$  e  $\delta_{\max} = 45^\circ 56'$ , de modo que se pode alcançar  $\delta = 45^\circ$  para dois valores diferentes de  $\theta_1$ :  $\theta_1' = 48^\circ 37'$ , e  $\theta_1'' = 54^\circ 37'$ .

A demonstração dos resultados precedentes será deixada ao leitor como exercício.

-----

Exercício 2.1.12: Demonstrar os resultados de (54) em diante.

-----

\* Um método que permite ampliar o domínio de valores da defasagem na reflexão total e obter polarização circular com uma só reflexão total foi descrito por W. Culshaw e D. S. Jones, Proc. Phys. Soc., B, 66 (1953) 859. O método foi aplicado por esses autores a micro-ondas ( $\lambda = 1,25$  cm.) e permite demonstrar também a penetração no segundo meio.

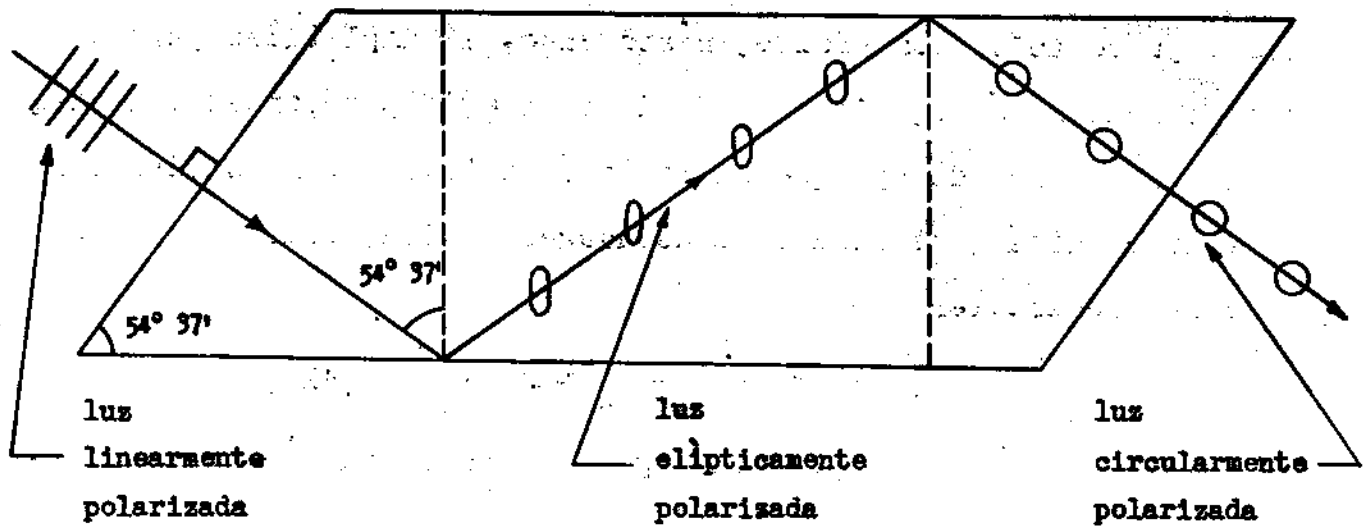


Fig. 2.15: Paralelepípedo de Fresnel.

## 2.2. REFLEXÃO METÁLICA.

### 2.2 (a) Incidência Perpendicular.

Suponhamos agora que o meio 2 é condutor: interessa-nos especialmente o caso de um bom condutor, como um metal. Para maior simplicidade, vamo-nos limitar ao caso de maior importância prática, em que o meio 1 é o ar, de modo que podemos tomar  $n_1 = 1$ . Neste caso, pelo que foi visto no § 1.3, sabemos que as fórmulas deduzidas no § 2.1 permanecem válidas, desde que se substitua o índice de refração relativo pelo índice de refração complexo

$$n = n_2 \rightarrow n' = n + iK. \quad (56)$$

Com esta substituição, a lei da refração (6) continua valendo, mas  $\theta_2$  passa a ser complexo, de modo que a lei perde seu significado geométrico simples. A estrutura da onda no meio 2 é bem mais complicada que nos casos considerados até aqui. Com efeito, sabemos que o campo deve atenuar-se exponencialmente à medida que penetra no meio 2, devido à absorção. Entretanto, pela continuidade de  $\vec{k}_{\text{tang}}$ , vemos que  $\vec{k}_{2,\text{tang}}$  deve ser real. Logo, a direção de atenuação deve ser perpendicular à superfície de separação, ou seja, os planos de amplitude constante são paralelos à superfície. Por outro lado, para incidência oblíqua, os planos de fase constante serão em geral oblíquos à superfície. Logo, a onda no meio 2 é uma onda plana inhomogênea (os planos de amplitude constante e os de fase constante não coincidem) de tipo mais complicado que as ondas evanescentes da reflexão total, pois a atenuação agora decorre da absorção, e terá uma componente longitudinal.

Para incidência perpendicular, porém, deve haver uma simplificação considerável. Neste caso, com efeito,  $\theta_2 = 0$ , de modo que não aparecem as complicações devidas ao ângulo de refração complexo. Por isto, vamos considerar este caso em primeiro lugar.

Como vimos no § 2.1 (c), a distinção entre componentes paralela e perpendicular perde o sentido para  $\theta_1$  nulo. Usando por exemplo a (20), obtemos, com a substituição (56),

$$- \frac{A_1'}{A_1} = \frac{n' - 1}{n' + 1} = \frac{n - 1 + iK}{n + 1 + iK} \quad (57)$$

A reflexividade para incidência perpendicular é portanto

$$r = \frac{(n-1)^2 + K^2}{(n+1)^2 + K^2} = 1 - \frac{4n}{(n+1)^2 + K^2} \quad (58)$$

Em particular, para bons condutores e frequências abaixo do infra-vermelho, já vimos (§ 1.3 (b), (98)) que a corrente de deslocamento é desprezível em confronto com a corrente ôhmica e vale a relação

$$n \approx K \approx \sqrt{\sigma T} \gg 1, \quad (59)$$

onde  $\sigma$  é a condutividade e  $T$  o período. Nestas condições a (58) fica

$$r \approx 1 - \frac{2}{n} \approx 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma T}}. \quad (60)$$

As (59) e (60) mostram que  $r$  é muito próximo da unidade nesta região, de modo que o metal é um refletor muito bom. A reflexividade é tanto maior quanto maior fôr  $\sigma$ : um condutor perfeito ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) seria também um refletor perfeito ( $r=1$ ), o que é natural, pois o campo não pode penetrar no seu interior, devendo então ser totalmente refletido.

A (60) também mostra que  $r$  varia com a frequência (crescendo à medida que a frequência decresce) mesmo no domínio em que a dependência de  $\sigma$  da frequência (dispersão) ainda não se faz sentir.

A (60) foi verificada experimentalmente por Hagen e Rubens (1903) na região do infra-vermelho. Nessas experiências foram empregados os chamados "raios restantes", separados de um domínio espectral mais amplo através de reflexões múltiplas em certos cristais ( $\text{Ca F}_2$ ,  $\text{Ca Cl}_2$ ). Estes cristais têm fortes reflexões seletivas no domínio espectral de  $10\mu$  a  $25,5\mu$ , ou seja, há certos compr



mentos de onda nêsse domínio que são refletidos bem mais fortemente que os outros. Pode-se então, por uma série de reflexões, isolar radiações infra-vermelhas bastante monocromáticas. Alguns dos valores obtidos por Hagen e Rubens estão reproduzidos na tabela VIII, que dá os valores de  $1-r$  em % para  $\lambda = 12\mu$  e  $\lambda = 25,5\mu$ :

Tabela VIII:  $1-r$  em % para diferentes metais

Metal		Ag	Cu	Au	Pt	Ni
$\lambda = 12\mu$	Observado	1,15	1,6	2,1	3,5	4,1
	Calculado	1,3	1,4	1,6	3,5	3,6
$\lambda = 25,5\mu$	Observado	1,13	1,17	1,56	2,82	3,20
	Calculado	1,15	1,27	1,39	2,96	3,16

Os valores calculados o foram pela (60), utilizando o valor estático de  $\sigma$ . Vemos que a concordância é, de um modo geral, bastante boa, de modo que o valor estático de  $\sigma$  ainda pode ser utilizado a essas frequências.

O campo no interior do metal obtém-se substituindo a (56) na (9) para  $\theta_1 = 0$ :

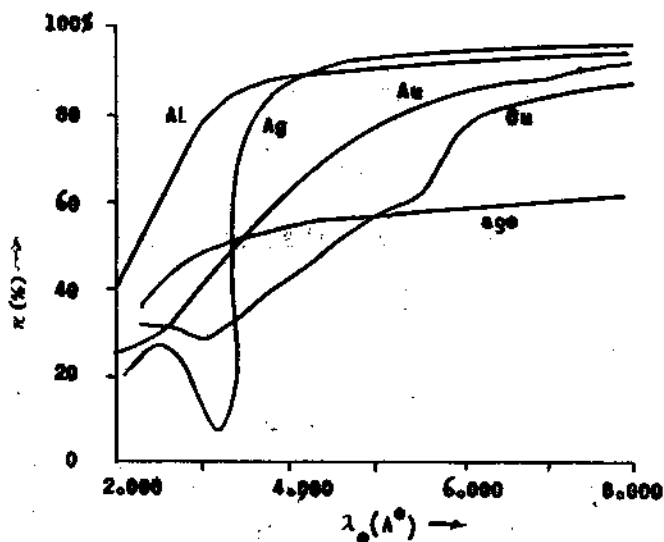
$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= A_2 \exp(-ik_2 y) \hat{z} = A_2 \exp\left(-i n' \frac{\omega}{c} y\right) \hat{z} = \\ &= A_2 \exp\left(-i n \frac{\omega}{c} y\right) \exp\left(K \frac{\omega}{c} y\right) \hat{z}\end{aligned}$$

que é precisamente uma onda do tipo já estudado no § 1.3 (b).

Para frequências mais elevadas é preciso levar em conta a va-

riação de  $\sigma$  com a frequência (dispersão). A fig. 2.16 mostra os valores experimentais de  $r$  (em %) em função de  $\lambda_0$  (comprimento de onda reduzido) na região do visível, para diversos metais. Vemos que  $r$  decresce bastante na região do violeta e ultra-violeta, mas acima desta região é ainda bastante elevado. O alumínio e a prata mantêm o poder refletor mais elevado na região do visível; daí sua importância na fabricação de espelhos para instrumentos óticos. Vemos que o poder refletor da prata decresce fortemente perto de  $3.200 \text{ \AA}$ . Medidas da transmissão de películas delgadas mostram que, nesta região, a absorção é também muito pequena, e a prata torna-se quase transparente.

A (58) mostra ainda que  $r$  cresce com  $K$ : logo, as radiações que são fortemente absorvidas também são fortemente refletidas. Se a luz incidente é branca, a luz refletida será colorida, contendo predominantemente as cores que sofrem reflexão mais forte), e sua cor será complementar à da luz transmitida por uma película delgada do metal. O ouro, por exemplo, é amarelo por reflexão, mas verde-azulado por transmissão através de uma fôlha delgada. Outras substâncias, além



**Fig. 2.16:** Reflexividade de diversos metais em função do comprimento de onda, na incidência perpendicular.

dos metais, também podem possuir cores superficiais, mas para isto é preciso que as constantes óticas  $n$  e  $K$  sejam suficientemente grandes e dependam fortemente do comprimento de onda. Um exemplo é a tinta vermelha (solução de fucsina) que é vermelha por transmissão (vemos a cor pela luz refletida no papel branco, que passa duas vezes através da tinta), mas é verde-amarelada por reflexão. A cor da maioria das substâncias não é cor superficial; deve-se em geral à existência de absorções seletivas.

### 2.2 (b) Incidência oblíqua.

Com a substituição (56), as leis da reflexão e da refração ficam

$$\theta_1' = \theta_1, \quad (61)$$

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{\text{sen } \theta_1}{n + iK} = \left( \frac{n - iK}{n^2 + K^2} \right) \text{sen } \theta_1.$$

A primeira é a lei da reflexão usual. A segunda, porém, mostra que, para  $\theta_1 \neq 0$ ,  $\theta_2$  é sempre complexo.

O fator de propagação da onda no meio 2 é (cf. (45) e (46)):

$$\exp(i\varphi_2) = \exp\left[ ik_2(x \text{sen}\theta_2 - y \text{cos}\theta_2) \right]. \quad (62)$$

Embora  $k_2$  e  $\theta_2$  sejam complexos, o fator  $k_2 \text{sen}\theta_2$  é sempre real, pois, pela lei da refração,

$$k_2 \text{sen } \theta_2 = k_0 \text{sen } \theta_1, \quad (63)$$

de modo que a onda não se atenua na direção  $x$  (cf. § 2.2 (a)).

A constante de propagação  $k_2 \cos \theta_2$  na direção  $y$ , porém, é complexa. Para separar-lhe as partes real e imaginária, façamos

$$\cos \theta_2 = q \exp(i\gamma) . \quad (64)$$

As constantes  $q$  e  $\gamma$  se exprimem imediatamente em função de  $n$ ,  $K$  e  $\theta_1$ . Com efeito, pela (61),

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta_2 &= 1 - \frac{n^2 - K^2 - 2inK}{(n^2 + K^2)^2} \sin^2 \theta_1 = \\ &= q^2 (\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma) , \end{aligned}$$

ou seja,

$$q^2 \cos 2\gamma = 1 - \frac{n^2 - K^2}{(n^2 + K^2)^2} \sin^2 \theta_1 ,$$

$$q^2 \sin 2\gamma = \frac{2nK}{(n^2 + K^2)^2} \sin^2 \theta_1 . \quad (65)$$

A constante de propagação na direção  $y$  fica então

$$\begin{aligned} k_2 \cos \theta_2 &= (n + iK) k_0 q (\cos \gamma + i \sin \gamma) = \\ &= k_0 q \left[ (n \cos \gamma - K \sin \gamma) + i(K \cos \gamma + n \sin \gamma) \right] \end{aligned}$$

o que dá, substituindo na (62) e levando em conta a (63),

$$\begin{aligned} \exp(i\varphi_2) &= \exp \left[ k_0 q y (K \cos \gamma + n \sin \gamma) \right] \cdot \exp \left\{ ik_0 \left[ x \sin \theta_1 - \right. \right. \\ &\left. \left. - q y (n \cos \gamma - K \sin \gamma) \right] \right\} . \quad (66) \end{aligned}$$

As superfícies de amplitude constante são, conforme já havíamos previsto no início do § 2.2(a), planos paralelos à superfície

de separação:  $y = \text{constante}$ . As superfícies de fase constante são dadas por

$$x \sin \theta_1 - q y (n \cos \gamma - K \sin \gamma) = \text{constante} , \quad (67)$$

ou seja, são planos oblíquos à superfície de separação (fig. 2.17), conforme também já havia sido previsto.

Colocando em evidência um fator

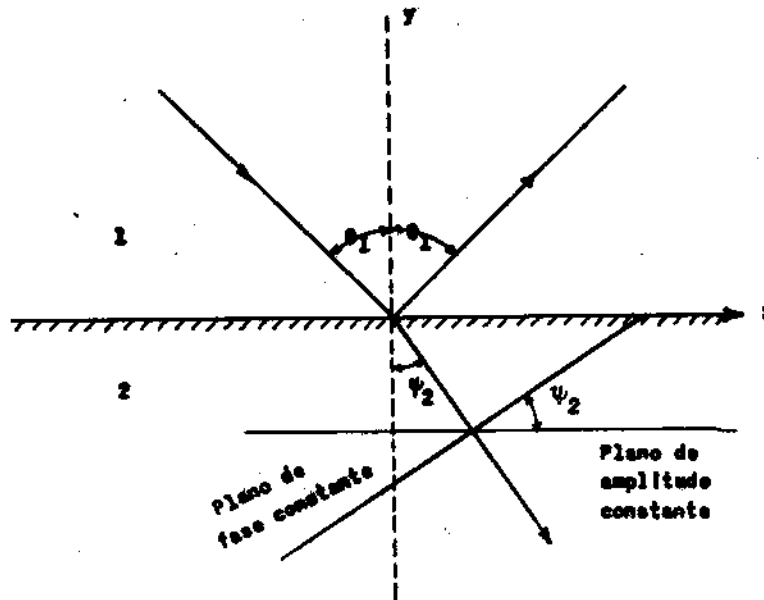
$$\sqrt{\sin^2 \theta_1 + q^2 (n \cos \gamma - K \sin \gamma)^2} = N , \quad (68)$$

vemos que a (62) pode ser reescrita sob a forma

$$x \sin \psi_2 - y \cos \psi_2 = \text{constante} , \quad (69)$$

onde

$$\cos \psi_2 = \frac{n \cos \gamma - K \sin \gamma}{N} \quad \text{e} \quad \sin \psi_2 = \frac{\sin \theta_1}{N} . \quad (70)$$



**Fig. 2.17:** Planos de fase constante e planos de amplitude constante no interior do metal.

Comparando a (69) com a (46), que define os planos de fase constante para um meio transparente, vemos que  $\psi_2$  desempenha o papel de  $\theta_2$ , ou seja, do ("ângulo de refração real" (fig. 2.17).

A segunda (70) tem a forma da lei da refração:  $\text{sen}\theta_1/\text{sen}\psi_2 = N$ . Entretanto, como vemos pelas (65) e (68),  $N$  depende não só das constantes óticas do meio, como também do ângulo de incidência  $\theta_1$ : logo, o que temos de fato é uma relação funcional mais complicada entre  $\psi_2$  e  $\theta_1$ .

No caso particular de bons condutores, no domínio de frequências em que vale a (59), as (65) se reduzem a

$$\left. \begin{array}{l} q^2 \cos 2\gamma \approx 1 \\ q^2 \text{sen } 2\gamma \approx \frac{\text{sen}^2 \theta_1}{2n^2} \ll 1 \\ \text{tg } 2\gamma \approx \frac{\text{sen}^2 \theta_1}{2n^2} \approx 2\gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \gamma \approx \frac{\text{sen}^2 \theta_1}{4n^2} \ll 1 \\ q^2 \approx 1 \end{array} \quad (71)$$

A (68) fica portanto

$$N \approx \sqrt{\text{sen}^2 \theta_1 + n^2(1-\gamma)^2} \approx n$$

e a segunda (70) fica

$$\text{sen } \psi_2 \approx \frac{\text{sen } \theta_1}{n} \approx \frac{\text{sen } \theta_1}{\sqrt{\sigma T}} \ll 1, \quad (72)$$

de modo que a onda de fase penetra no metal quase perpendicularmente, e difere pouco da que se obtém no caso da incidência perpendicular.

As fórmulas de Fresnel permanecem válidas, mas devido aos valores complexos de  $\theta_2$ , tornam-se bastante complicadas:

$$\frac{A_1'}{A_1} = - \frac{\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_{\perp} \exp(i\phi_{\perp}),$$

$$\frac{B_1'}{B_1} = \frac{\text{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\text{tg}(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_{//} \exp(i\phi_{//}).$$
(73)

Em geral  $\phi_{//}$  é diferente de  $\phi_{\perp}$ , de modo que, se a onda incidente é linearmente polarizada, a onda refletida será elípticamente polarizada. A defasagem é  $\Delta = \phi_{//} - \phi_{\perp}$ .

Seja  $\alpha_1$  o azimute da onda incidente (suposta linearmente polarizada, que é dado por

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{A_1}{B_1}.$$
(74)

Temos então, pelas (73),

$$\frac{A_1'}{B_1'} = \text{tg } \alpha_1 \frac{\rho_{\perp}}{\rho_{//}} \exp(-i\Delta).$$
(75)

Para um determinado valor do ângulo de incidência,  $\theta_1 = \bar{\theta}_1$ , que se chama o ângulo de incidência principal, é  $\Delta = \pi/2$ . Se além disto fôr  $\text{tg } \alpha_1 \frac{\rho_{\perp}}{\rho_{//}} = 1$ , a (75) mostra que  $|A_1'|/|B_1'| = 1$ , de modo que a luz refletida é circularmente polarizada. As constantes óticas do meio condutor,  $n$  e  $K$ , podem ser expressas (veja Born e Wolf, Principles of Optics, pp. 614 - 617) em função de  $\bar{\theta}_1$  e de  $\rho_{\perp}/\rho_{//}$ . A medida dêsses parâmetros permite determiná-las experimentalmente. Alguns dos valores assim obtidos, para luz incidente de comprimento de onda  $\lambda = 5.893 \text{ \AA}$  (raia D do sódio), encontram-

se reproduzidos na tabela IX:

Tabela IX: Constantes óticas de diferentes metais para  $\lambda = 5.893 \text{ \AA}$

Substância	Na sólido	Ag maciço	Hg maciço	K fundido	Cd maciço	Al maciço	Sn maciço	Au eletrolítico	Hg líquido	Zn maciço	Cu maciço
n	0,044	0,20	0,37	0,088	1,19	1,44	1,48	0,47	1,60	1,99	0,62
k	2,42	3,44	4,42	1,81	5,01	5,23	5,25	2,83	4,80	4,66	2,57
r	0,97	0,94	0,99	0,92	0,84	0,83	0,83	0,82	0,77	0,75	0,73

onde  $r$  é a reflexividade para incidência perpendicular.

O comportamento de  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$  em função de  $\theta_1$  para Ag e Au, determinado experimentalmente, está representado na fig. 2.18. O ângulo de incidência para o qual  $r_{\parallel}$  passa por um mínimo está geralmente muito próximo do ângulo de incidência principal  $\bar{\theta}_1$  e pode ser identificado com ele.

A tabela IX mostra que  $n$  é menor que a unidade para muitos metais, de modo que a velocidade de fase  $c/n$  é maior que  $c$  nesses metais. Isto aparentemente estaria em contradição com um dos postulados básicos da teoria da relatividade, segundo o qual nenhum sinal pode se propagar com velocidade maior que  $c$ . Entretanto, uma onda plana monocromática,

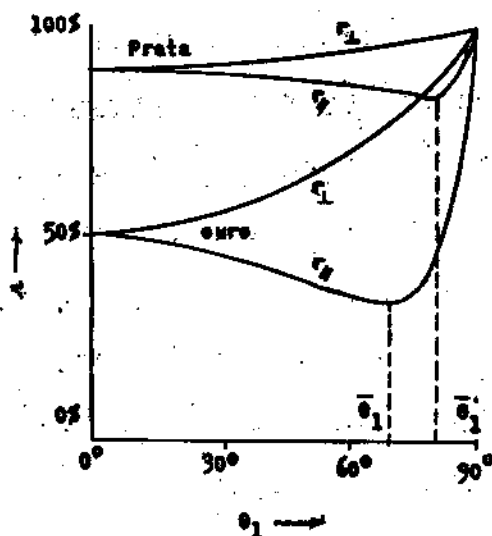


Fig. 2.18: Reflexividade do ouro e da prata em função do ângulo de incidência.



sem início nem fim, não constitui um sinal. Numa série de trabalhos, por volta de 1910, Sommerfeld e Brillouin mostraram que a velocidade de propagação de um grupo de ondas, que pode constituir um sinal, é sempre menor ou igual a  $c^*$ . Voltaremos a discutir este problema no capítulo 9.

Vemos também pela tabela IX que, em todos os casos,  $n < K$ , de modo que, pela (89) do § 1.3 (b),  $\epsilon \mu = n^2 - K^2 < 0$ . Como  $\mu \approx 1$ , segue-se que  $\epsilon < 0$ . Isto significa apenas que  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  estão em oposição de fase. A origem física deste resultado também pode ser compreendida pela teoria da dispersão, que estudaremos no capítulo 9.

\* ~\*~\*

#### LEITURA RECOMENDADA PARA O CAPÍTULO 2

- A. Sommerfeld, Optics (Academic Press, N. York, 1954), capítulo I.  
 M. Born e E. Wolf, Principles of Optics (Pergamon Press, London, 1959), §§ 1.5 e 13.2.  
 F. A. Jenkins e H. E. White, Fundamentals of Optics (McGraw-Hill, N. York, 1950), capítulo 28.

O efeito de túnel na Mecânica Quântica, mencionado no § 2.1 (f), é discutido em D. Bohm, Quantum Theory (Prentice-Hall, N. York, 1951), capítulo 11.

\* \* \*

---

\* L. Brillouin, Wave propagation and group velocity, (Academic Press, New York, 1960).