

MONOGRAFIAS DE FÍSICA

XIV

TEORIA DOS ÉRROS EXPERIMENTAIS

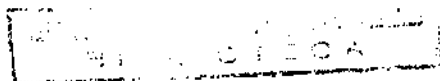
por  
H. Macedo

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1963



No trabalho seguinte procuramos apresentar um tratamento de dados experimentais capaz de ser adotado na análise de experiências correntes de um curso de formação de física. Ele nasceu e se modificou no decorrer dos cursos práticos que vêm sendo realizados nos Laboratórios Didáticos do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

O trabalho está dividido em duas partes distintas: na primeira (que envolve os capítulos I e II) são apresentadas, sem justificação, as indicações práticas básicas para a análise de dados experimentais e estimativa de erros; na segunda (capítulos III, IV e V) é feita a justificativa teórica dos resultados da primeira parte. Referências cruzadas permitem relacionar as duas seções.

A divisão adotada justifica-se pela necessidade de introduzir o tratamento de resultados experimentais desde o início do curso de física quando, em geral, o estudante não tem conhecimentos suficientes de análise para abordá-lo teoricamente. Com a divisão feita, o estudante pode familiarizar-se, razoavelmente, com os princípios gerais de teoria de erros e, logo que possível, estudá-la por processos analíticos de estatística.

Na parte teórica foi adotado o tratamento probabilístico usual em estatística. Tendo em vista o objetivo limitado a que se propõe o trabalho, o material escolhido foi fortemente restringido, constituindo, no seu todo, apenas uma introdução à estatística. As referências bibliográficas permitirão, facilmente, ampliá-la e aprofundá-la.

Acreditamos e tem sido esta a experiência observada que o trabalho possa se constituir em um elemento de referência útil para experiências de laboratório em cursos de formação.

Horacio Macedo

## CAPÍTULO I

ESTIMATIVAS DE MEDIDAS DIRETAS1.1 - Valor Representativo; Nível de Confiança

A análise dos resultados quantitativos de uma experiência envolve duas operações: a primeira é a de determinar o valor representativo da grandeza observada; a segunda é a de associar a este valor um intervalo de variação ou flutuação ao qual se pode atribuir um nível probabilístico de confiança.

O valor representativo da grandeza medida é um valor deduzido unívocamente do conjunto de resultados experimentais adotado, segundo um critério pré-estabelecido, como o melhor resultado da medida (ver 3.5).

O intervalo de variação que se associa ao valor representativo é, também, deduzido unívocamente das medidas experimentais e constitui, com determinada razoabilidade, o domínio dos valores representativos. A esperança de que este intervalo seja realmente tal domínio é expressa, geralmente, em probabilidade de que os valores da grandeza medida estejam dentro do conjunto assim fixado. Esta probabilidade é o nível de confiança associado à medida e ao domínio de variação (ver 4.5).

Exemplo 1.1 - A carga do elétron é igual a  $(1,602 \pm 0,0005) \times 10^{-19}$  coulomb com um nível de confiança da or-

dem de 70%. O resultado  $1,602 \times 10^{-19}$  coulomb constitui o valor representativo da medida. O seu domínio de flutuação é o intervalo  $(1,6015 \times 10^{-19}, 1,6025 \times 10^{-19})$  e o nível de confiança indica que uma medida da carga do elétron - realizada em condições experimentais análogas ou melhores que às que levaram ao resultado especificado - tem uma probabilidade de 70% de estar compreendida neste intervalo.

Para analisar os resultados de uma experiência é necessário, portanto: fixar um critério para escolher o valor representativo; fixar um critério para determinar o seu domínio de flutuação; estabelecer o nível de confiança atribuível a tal domínio.

Quando a grandeza física é determinada com  $n$  algarismos significativos e com grande nível de confiança o valor exato da grandeza é dado pelo conjunto dos  $(n-1)$  primeiros algarismos significativos. No exemplo anterior o valor exato da carga do elétron é dado por  $1,602 \times 10^{-19}$  coulomb uma vez que a flutuação associada à medida só alcança o quinto algarismo e o nível de confiança é, relativamente, elevado.

Ao resultado de uma experiência só pode ser atribuído o caráter de valor exato quando as condições experimentais de sua determinação forem extremamente boas. É necessário que as variáveis do sistema utilizado tenham sido minuciosamente controladas permitindo a obtenção de limites de flutuação muito pequenos na medida. É preciso, também, que a possibilidade de defeitos intrínsecos nos instrumentos e métodos adotados tenha sido muito reduzida

(ver 1.3).

## 1.2 - Média Aritmética

O problema mais geral para estimar o valor representativo de uma grandeza medida experimentalmente (comumente denominado valor da grandeza ou resultado da experiência) é o seguinte:

Uma grandeza é medida, nas mesmas condições físicas, um número  $n$  de vezes. Os valores constituem o conjunto  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Qual o valor representativo da grandeza ?

Uma estimativa muito utilizada e cujo emprêgo é baseado em razões teóricas bastante aceitáveis (ver 4.4) é a média aritmética  $\bar{x}$  do conjunto  $x_i$ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.2.1)$$

Se existirem medidas repetidas a expressão a utilizar será:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{\sum_{i=1}^n n_i} \quad (1.2.2)$$

onde  $n_i$  é o número de repetições da medida  $x_i$ .

A média é uma estimativa simples de calcular e constitui o valor mais provável da grandeza para grande classe de experiências que se aproximam sensivelmente da distribuição normal. Graças a isto é possível calcular, com relativa facilidade, o nível

de confiança associável à média (ver 4.4).

Exemplo 2.1 - A medida dos tempos de queda de uma esfera em um meio viscoso apresentou o seguinte resultado, em segundos:

3,5 3,5 3,7 3,6 3,3 3,5 3,4 3,5 3,6 3,2  
3,6 3,4 3,5 3,4 3,4 3,6 3,7 3,4 3,6 3,3

Com estes resultados é possível organizar a seguinte tabela:

Tempo (seg) $x_1$	Frequência $n_1$	$n_1 x_1$
3,2	1	3,2
3,3	2	6,6
3,4	5	17,0
3,5	5	17,5
3,6	5	18,0
3,7	2	7,4
	$\Sigma = 20$	$\Sigma = 69,7$

$$\bar{x} = \frac{69,7}{20} = 3,48 \text{ seg}$$

A média é calculada com um algarismo significativo a mais que as medidas originais. Esta norma, com alguma cautela, pode ser adotada sempre que se calcular uma média. O número de alga-

rismos significativos que serão definitivamente conservados na média será determinado, posteriormente, pelo intervalo de flutuação associado ao valor representativo. Adiante (ver 1.5), exemplificaremos o problema.

### 1.3 - Erros Ocasionais: Erros Sistemáticos

Calculada a média de um conjunto de medidas experimentais é necessário, como já apontamos, estimar os limites de seu intervalo de flutuação. Expresso teoricamente, o problema pode ser formulado da seguinte maneira: dado um conjunto  $x_1$  como estimar, a partir de seus elementos, um parâmetro que meça a dispersão dos  $x_1$  em torno da média? Calculado este parâmetro, como avaliar o nível de confiança atribuível ao intervalo que ele fixa?

Habitualmente as estimativas das medidas de dispersão de um conjunto de dados experimentais são denominadas estimativas dos erros ocasionais da experiência e medem a flutuação dos resultados da experiência em torno do valor escolhido como representativo. Este é o valor em torno do qual tendem a se agrupar os dados experimentais e funciona, pois, como uma medida de tendência central ou de localização das medidas (ver 3.5 e 3.6).

Além dos erros ocasionais é possível a existência de outros erros que viciam o resultado experimental - são os denominados erros sistemáticos. Decorrem de falhas do método experimental, dos aparelhos de medida etc. A análise destes erros só pode ser feita, concretamente, diante de cada dispositivo experimental específico.

Utilizaremos a denominação de êrro para indicar uma medida de dispersão dos resultados experimentais.

Uma medida experimental é qualificada de precisa se os êrros ocasionais a ela associados são pequenos. A medida será acurada se os êrros sistemáticos forem pequenos. Uma boa medida deve ser, simultâneamente, precisa e acurada. Com estas características o valor obtido na experiência poderá ser um valor exato da grandeza medida.

Exemplo 3.1 - A medida da carga do elétron realizada por Millikan levou ao valor  $e = (4,744 \pm 0,005) \times 10^{-10}$  u.e.c. com elevado nível de confiança. O resultado mostra que a medida foi precisa pois o êrro ocasional a ela associado é muito pequeno (da ordem de 0,1% da grandeza medida). A experiência, porém, não foi acurada pois não tomou em consideração um êrro sistemático proveniente de valor errôneo da viscosidade do ar. Nestas condições o valor encontrado por Millikan para a carga elementar não era exato. A eliminação do êrro sistemático permite encontrar, com os mesmos dados experimentais de Millikan, uma estimativa igual a  $(4,770 \pm 0,005) \times 10^{-10}$  u.e.c. constituindo, agora, medida exata da grandeza  $e$ .

O exemplo ilustra que o resultado experimental só deve ser analisado tendo em vista a situação real da experiência. São estas que determinam, fundamentalmente, a significância do resultado obtido. Por isso é falso julgar o mérito de uma experiência abstraído-se das condições materiais em que foi realizada e avaliando-o, apenas, pela concordância de seu resultado com valores pre-



vistos teoricamente ou já determinados em outras experiências.

Exemplo 3.2 - Uma medida da massa molecular do clorofórmio, pelo método de Dumas, levou ao resultado 120. O valor exato da massa molecular é 119,4. Qual a significância do resultado experimental ?

Sendo pequena a diferença entre o valor encontrado e o tabelado (da ordem de 0,6) pode-se afirmar que, aparentemente, a experiência foi acurada. Não é possível, porém, afirmar com grande certeza a acurácia do método. E, o que é mais importante, não existem elementos para julgar a precisão da medida. Seria falso identificar o erro da medida com a diferença 120-119,4 pois esta diferença pode, muito provavelmente, ser apenas fruto de uma contingência ocasional. Só a repetição, ou a análise, da experiência poderá fornecer informações suficientes sobre a precisão do método e garantir, com boa margem de segurança, a sua acurácia.

#### 1.4 - Medidas de Dispersão: Semi-amplitude

Uma estimativa muito simples de erro é a de identificá-lo à semi-amplitude dos resultados experimentais, ou seja à semi-diferença entre o maior e o menor valor encontrado experimentalmente. Sendo cômoda de calcular a semi-amplitude é, porém, instável, pois é muito sensível a valores extremos das medidas que, embora aparecendo raramente, podem surgir mesmo em um conjunto de experiências bem executadas. Além disto é difícil estimar o nível de confiança associado a intervalos calculados com base na semi-amplitude.

Exemplo 4.1 - As medidas dos diâmetros de um conjunto de esferas de rolamento foram as seguintes, em milímetros:

3,172	3,172	3,173	3,171	3,172	3,172
3,173	3,172	3,172	3,172	3,172	3,172

A média do conjunto é 3,1721 mm e a semi-amplitude

$$\frac{3,173 - 3,171}{2} = 0,001 \text{ mm}$$

O resultado da experiência será expresso como (3,172 ± 0,001) mm. Neste resultado final um algarismo da média calculada foi abandonado pois o erro é de ordem superior aos décimos milésimos. A estimativa de erro adotada, provavelmente, é muito grande e se está associando à média um intervalo muito amplo para sua variação. Pode-se admitir, com bastante razoabilidade, que o nível de confiança deve ser elevado pois o intervalo é de amplitude muito grande.

No exemplo anterior é visível a instabilidade da semi-amplitude. O resultado 3,171, que apareceu apenas uma vez e o resultado 3,173, que apareceu duas vezes, são os responsáveis pela avaliação. Portanto, apenas um quarto dos dados fixou a estimativa feita que não levou em conta a concentração dos resultados em torno da média 3,172. Se o valor 3,171 não tivesse surgido a semi-amplitude cairia de 0,001 para 0,0005 com uma redução de 50% do intervalo de flutuação.

Os inconvenientes mencionados (dificuldade de estimativa do nível de confiança e instabilidade) tornam a semi-amplitu-

de uma medida de dispersão não muito vantajosa para uma análise mais detida e minuciosa dos dados experimentais. Adiante (ver 1.13) indicaremos um procedimento para utilizá-la com melhores resultados.

### 1.5 - Medidas de Dispersão: Afastamento Absoluto Médio

Uma segunda estimativa de erro, melhor que a semi-amplitude, é a de igualá-lo à média aritmética dos valores absolutos dos afastamentos das medidas em relação à média:

$$a = \frac{\sum_1^n |x_i - \bar{x}|}{n} \quad (1.5.1)$$

É uma estimativa simples e cômoda. Tem o inconveniente de não permitir avaliações simples da confiança associada à média quando o conjunto de medidas é pequeno.

Exemplo 5.1 - No exemplo 4.1 o afastamento absoluto médio é:

$$a = \frac{1 \times 0,0011 + 9 \times 0,0001 + 2 \times 0,0009}{12} = 0,0003 \text{ mm}$$

e o resultado experimental será expresso como  $(3,1721 \pm 0,0003)$  mm. Com esta estimativa é justificável conservar o algarismo 1 da ordem dos décimos milésimos pois o erro influi somente nesta ordem decimal.

Este exemplo e o anterior ilustram o princípio que se deve guardar, ao exprimir um resultado experimental todos, e somente, os algarismos até a ordem decimal do erro estimado.

É claro que o nível de confiança associado ao intervalo calculado no exemplo 5.1 é menor que o associado ao intervalo do exemplo 4.1. Esta informação, porém, não basta para decidir a escolha entre um e outro. Se a confiança do intervalo do exemplo 4.1 não for muito maior que a do exemplo 5.1 não se justifica abandonar este em favor daquele pois o que se ganha em confiança fica perdido em precisão.

De fato: a precisão de uma experiência pode ser medida pelo chamado erro relativo que é a razão (comumente expressa em percentagem) entre o erro estimado da experiência e o valor da grandeza. Quanto menor esta razão maior a precisão da medida. No exemplo 5.1 o erro relativo é da ordem de  $0,0003/3,171 = 0,01\%$  enquanto no exemplo 4.1 o erro relativo é da ordem de  $0,001/3,171 = 0,03\%$  ou seja, três vezes maior. Se exprimirmos, portanto, o resultado da experiência sob a forma  $(3,172 \pm 0,001)$  mm estaremos utilizando um alto nível de confiança mas a precisão do resultado é pequena. Exprimindo-o sob a forma  $(3,1721 \pm 0,0003)$  mm estaremos utilizando um nível de confiança menor que o anterior mas o resultado é mais preciso. Na ausência de outras informações não é possível decidir entre as duas avaliações.

#### 1.6 - Medidas de Dispersão: Desvio Padrão

A estimativa seguinte é a mais correntemente utilizada, uma vez que permite avaliações de níveis de confiança com relativa facilidade. Consiste em identificar o erro à média quadrática dos afastamentos das medidas em relação à média e é denominada

desvio padrão (ver 3.6 e 4.4):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_1 - \bar{x})^2}{n}} \quad (1.6.1)$$

Para valores pequenos de n a estimativa a utilizar para o desvio padrão é (ver 4.3, 4.4):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_1 - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (1.6.2)$$

O desvio padrão assim calculado é uma medida de dispersão do conjunto de valores das medidas efetuadas experimentalmente. A cada medida, pois, fica associado um intervalo de flutuação fixado pelo desvio padrão. Se uma delas  $x_1$  for escolhida, arbitrariamente, para exprimir o resultado da experiência o intervalo de flutuação será  $x_1 \pm \sigma_x$ . Se se repetem as medidas, porém, como é o caso usual, o conjunto de valores obtidos é substituído pela média aritmética. A flutuação associada à média das medidas será menor que a associada a cada medida. A estimativa do desvio padrão da média é dada pela expressão (ver 4.3):

$$\frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_1 - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (1.6.3)$$

Se o número n de experiências for grande o desvio pa

drão da média poderá ser calculado pela expressão:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (1.6.4)$$

Exemplo 6.1 - O desvio padrão dos resultados expressos no exemplo 4.1 é:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1x(11x10^{-4})^2 + 9x(1x10^{-4})^2 + 2x(9x10^{-4})^2}{11}} =$$

$$\sigma_x = 0,0003 \text{ mm}$$

O desvio padrão da média será:

$$\sigma_x = \frac{0,0003}{\sqrt{12}} = 0,0001 \text{ mm}$$

Adotando a média como o valor representativo o resultado da experiência será  $(3,1721 \pm 0,0001)$  mm. Adotando, arbitrariamente, uma das medidas como o valor representativo (3,172, por exemplo) o resultado da experiência será  $(3,1720 \pm 0,0003)$  mm.

Fica bem clara neste exemplo a vantagem da adoção da média como o valor mais representativo da medida. Ela não só leva em conta a totalidade dos dados experimentais como seu intervalo de flutuação é muito menor que o de uma medida isolada. No e-

xemplo anterior a adoção da média como o valor representativo aumenta de três vezes a precisão do resultado final.

Este comportamento da média aritmética justifica, muito ponderavelmente, o procedimento de iteração das medidas experimentais para aumentar a precisão dos resultados (ver 4.4).

### 1.7 - Estimativa do Nível de Confiança em Grandes Amostras

Uma grande vantagem do desvio padrão como estimativa de erro está na possibilidade de se calcular, para uma grande classe de experiências cuja flutuação dos resultados se aproxima da distribuição normal, o nível de confiança associado a diversos intervalos. Há que considerar dois casos distintos: o número de medidas é grande ( $n > 20$ ); o número de medidas é pequeno ( $n < 20$ ).

Quando  $n$  é grande a seguinte tabela dá os níveis de confiança associados a alguns intervalos notáveis (ver 4.1, 4.5):

Confiança Associada a Diversos Intervalos da Distribuição Normal Medidos em Torno da Média

Intervalo	Nível de Confiança (%)
$\bar{x} \pm 0,670 \sigma_x$	50,00
$\bar{x} \pm 0,842 \sigma_x$	60,00
$\bar{x} \pm 1,000 \sigma_x$	68,26
$\bar{x} \pm 1,645 \sigma_x$	90,00
$\bar{x} \pm 1,960 \sigma_x$	95,00
$\bar{x} \pm 2,000 \sigma_x$	95,45
$\bar{x} \pm 3,000 \sigma_x$	99,73

Exemplo 7.1 - Um conjunto de 25 medidas da massa específica de um líquido tem como média o valor  $0,875 \text{ g/cm}^3$  e desvio padrão  $0,01 \text{ g/cm}^3$ . O resultado da experiência pode ser expresso como:

$$\left( 0,875 \pm \frac{0,01}{25} \right) \text{ g/cm}^3 = (0,875 \pm 0,002) \text{ g/cm}^3$$

com uma confiança de 68,26%. Isto significa que existe a probabilidade favorável de cerca de 68 casos em 100 de que a repetição das 25 medidas nas mesmas condições experimentais tenha uma média compreendida no intervalo  $(0,873, 0,877)$ . Os resultados obtidos mostram que para cada nova medida existe a probabilidade favorável de 68,26% de que ela esteja no intervalo  $(0,875 - 0,01, 0,875 + 0,01)$ .

Para aumentar a confiança no intervalo poderemos escolhê-lo maior, como por exemplo  $(0,875 \pm 3 \times 0,002) \text{ g/cm}^3 = (0,875 \pm 0,006) \text{ g/cm}^3$ . A este intervalo a tabela mostra estar associada uma probabilidade favorável da ordem de 99,7%.

À medida que aumenta o intervalo associado à média cresce o seu nível de confiança. Ao mesmo tempo diminui a precisão do resultado, uma vez que a relação entre o erro estimado e o valor representativo (o erro relativo) cresce. Na primeira estimativa do exemplo anterior o erro relativo é da ordem de 0,23% enquanto na segunda é da ordem de 0,69%.

Em algumas experiências não é possível estimar os níveis de confiança associados às medidas. É o que acontece quando a experiência, por tal ou qual razão, não pode ser repetida um



grande número de vezes. Procura-se, então, conferir ao resultado um razoável limite de flutuação na base das características concretas dos instrumentos e métodos empregados. Sempre que possível, porém, é conveniente e recomendável repetir as medidas de modo a obter uma estimativa mais ou menos segura do nível de confiança a ela associado.

Quando a estimativa do nível de confiança é possível é necessário escolher entre duas alternativas: ou trabalhar com intervalos pequenos (correspondentes a erros relativos pequenos) mas com pequeno nível de confiança ou trabalhar com erros relativos elevados mas com níveis de confiança elevados. A escolha entre as duas alternativas depende, exclusivamente, do objetivo que se tem em vista com a medida experimental.

É comum denominar o desvio padrão de erro médio quadrático. O intervalo que corresponde ao nível de 50,00% é denominado erro provável e tem igual probabilidade de ser e de não ser excedido em medidas posteriores. Para grande amostras o erro provável igual a  $0,670 \frac{\sigma}{\bar{x}}$ .

#### 1.8 - Estimativa do Nível de Confiança em Pequenas Amostras

Para valores de n inferiores a 20 (este número fixa apenas uma ordem de grandeza) é utilizada a seguinte tabela para estimar os níveis de confiança (ver 4.6):

Valores da Variável t Correspondentes a Diferentes  
Níveis de Probabilidade e Para Pequeno Conjunto  
de Resultados Experimentais

Número de Valores Experimentais (n)	Nível de Confiança		
	60%	90%	95%
2	1,376	6,314	12,706
3	1,061	2,920	4,303
4	0,978	2,353	3,182
5	0,941	2,132	2,776
6	0,920	2,015	2,571
7	0,906	1,943	2,447
8	0,896	1,895	2,365
9	0,889	1,860	2,306
10	0,883	1,833	2,262
15	0,868	1,761	2,145
20	0,861	1,729	2,093

Os valores tabelados dão os fatores t pelos quais deve ser multiplicado o desvio padrão  $\sigma$  para se ter intervalos em torno da média com os níveis de confiança indicados na primeira linha da tabela (ver 4.6).

Exemplo 8.1 - No exemplo 6.1 o desvio padrão foi igual a 0,0001 mm. Se se quiser exprimir o resultado da experiência com um nível de confiança de 90% ele será  $(3,1721 \pm 1,8 \times 0,0001)$  mm. Desejando-se um nível de 95% o resultado será  $(3,1721 \pm 2,2 \times 0,0001)$  mm.

### 1.9 - Níveis de Confiança Associados ao Desvio Padrão

É comum adotar o desvio padrão para medir a dispersão das medidas experimentais em torno da média. A confiança do intervalo assim determinado ( $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ ) variará de acordo com o número de medidas efetuadas. Na tabela seguinte indicamos os diversos níveis para conjuntos de medidas com diferentes números (n) de medidas.

Nível de Confiança Associado ao Intervalo  $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$  Para Conjuntos de Medidas com n Membros, Expresso em Percentagem

n	1	2	5	10	$\infty$
Nível de Confiança (%)	0	50	55	65	68

O nível de confiança quando apenas uma medida foi efetuada é tabelado como zero. Analiticamente isto é razoável pois se se admite que as medidas experimentais podem flutuar, mesmo em uma boa experiência, um único valor obtido pode se afastar muito, em princípio, do valor exato da grandeza. Experimentalmente, porém, se a experiência foi correta o nível de confiança associado a uma só medida deve ser maior que zero. A sua estimativa, no entanto, só poderá ser feita tendo em vista as condições reais do procedimento experimental (ver um exemplo adiante, 1.11).

Exemplo 9.1 - A medida de uma tensão elétrica em volts foi: 1,0043, 1,0045, 1,0044. Estimar um valor representativo da tensão, a dispersão das medidas e a significância associada

ao resultado.

$$\text{Média dos resultados} = \bar{V} = 1,00440 \text{ V}$$

$$\text{Desvio padrão da média} = \sigma_{\bar{V}} = 0,00006 \text{ V}$$

Resultado da experiência =  $(1,00440 \pm 0,00006) \text{ V}$  com uma confiança da ordem de 50%.

### 1.10 - Expressão do Resultado de uma Medida Experimental Direta

É comum, apesar de não satisfatório, exprimir o resultado de uma experiência sem a indicação nítida do nível de confiança associado ao intervalo final. Tal procedimento negligencia um elemento importante e essencial na análise da experiência pois nenhuma informação fornece sobre a confiança que se pode atribuir ao valor escolhido como representativo.

É corrente, também, utilizar o erro provável em lugar do desvio padrão como medida de dispersão visando-se com isso aumentar, aparentemente, a precisão da medida. É evidente que o emprêgo de qualquer múltiplo ou sub-múltiplo do desvio padrão em nada melhora a qualidade da experiência uma vez que aumentando-se a precisão do resultado diminui-se, simultânea e inevitavelmente, a confiança associada ao intervalo fixado em torno do valor representativo.

O ideal será exprimir o resultado experimental sob a forma:

$$\text{Média das medidas} = \bar{x}$$

$$\text{Desvio padrão da média} = \sigma_{\bar{x}}$$

$$\text{Nível de confiança associado ao intervalo } (\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}) = P \%$$

Desta maneira se dispõe de todos os elementos para julgar a qualidade da experiência realizada e a confiança que se deve depositar em seus resultados.

### 1.11 - Estimativa Direta do Erro

Nas estimativas anteriores o julgamento foi realizado utilizando a flutuação das medidas obtidas experimentalmente. Pode ocorrer, porém, que a repetição da experiência não indique flutuação e que o conjunto  $x_i$  seja constituído por elementos iguais. É o que acontece, por exemplo, quando as flutuações da medida são menores que a sensibilidade do instrumento utilizado na experiência. Nesta situação o ideal será melhorar a sensibilidade do dispositivo experimental trocando de instrumento ou aperfeiçoando o método de medida. Em experiências não muito elaboradas, no entanto, isto não é factível nem desejável. Surge o problema, assim, de estimar, nestes casos os limites de erro das medidas.

A mesma situação existe quando não é possível fazer mais de uma medida direta. O conjunto dos  $x_i$ , então, se reduz a um só elemento e não é possível estimar a dispersão das medidas e, portanto, o erro. Neste caso, como já apontamos, só uma análise direta de todo o processo de medida permitirá estabelecer os limites de flutuação da medida e avaliar a confiança a ela associável.

No exemplo seguinte apresentamos a análise de uma situação simples:

Exemplo 11.1 - Uma corrente elétrica da ordem de 5 A é medida em um amperímetro cuja escala está dividida em 0,1 A. Qual

a estimativa de erro que se poderá associar à determinação da corrente ?

Se a menor divisão da escala, lida diretamente, é 0,1 A é possível estimar, na leitura do instrumento, meia divisão (que corresponde a 0,05 A) e, com um pouco de cuidado, até um quarto de divisão (correspondente a 0,025 A). Suponhamos que a leitura tenha sido feita com aproximação correta de meia divisão. É razoável, então, admitir que as flutuações experimentais estão abaixo de 0,05 A e que o desvio padrão das medidas da corrente, quando realizadas em instrumentos de maior sensibilidade de leitura, é inferior a este valor. O resultado da experiência será então  $(5,0 \pm \pm 0,05) A$ .

A fixação do nível de confiança atribuível ao resultado não poderá ser feita sem uma análise do comportamento do instrumento nas condições da experiência. Suponhamos que a repetição sucessiva da medida da corrente tenha dado, um grande número de vezes, o mesmo valor de 5,0 A, lido corretamente dentro de meia divisão do instrumento. É razoável admitir que com 99,7% ou mais de confiança o desvio padrão das medidas será da ordem de  $0,05 \times 3 A$  (tabela de 1.7). Com uma confiança maior que 95,45% o desvio padrão será da ordem de  $0,05 \times 2 A$  e com uma confiança de 68,28% ou mais será da ordem de  $0,05 \times 1 A$ . Estas estimativas são feitas admitindo-se que o instrumento tenha sensibilidade para responder a variações da corrente da ordem de 0,05 A o que não decorre necessariamente da menor divisão lida ou avaliada em sua escala. Se a sensibilidade à corrente do instrumento for menor que 0,05 A (da ordem de 0,1 A, por exemplo) é evidente que as estimativas anteriores

res são inválidas. Neste caso será correto fixar a flutuação da medida pela sensibilidade. Na hipótese de ser êle sensível a 0,1 A o resultado da experiência seria  $(5,0 \pm 0,1) A$  com uma confiança da ordem de 68%.

O exemplo anterior mostra ser necessária a maior cautela na análise de uma experiência que, devido aos instrumentos ou métodos empregados, não apresenta flutuações estatísticas em seus resultados.

### 1.12 - Estimativa da Significância da Diferença de Médias

A realização de uma medida em duas séries de experiências é uma situação frequentemente encontrada e que origina o seguinte problema:

Uma grandeza é medida  $n_1$  vezes levando aos valores  $x_{1i}$  ( $i = 1, \dots, n_1$ ). A mesma grandeza é medida  $n_2$  vezes sendo obtidos os valores  $x_{2i}$  ( $i = 1, \dots, n_2$ ). Quer se saber se a diferença das médias  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  é ou não significativa.

O julgamento é realizado determinando, os seguintes parâmetros (ver 4.7).

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_1^{n_1} x_{1i}}{n_1}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_1^{n_2} x_{2i}}{n_2}$$

$$n_1 s_1^2 = \sum_1^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2$$

$$n_2 s_2^2 = \sum_1^{n_2} (x_{21} - \bar{x}_2)^2$$

$$t = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}} \quad (1.12.1)$$

A probabilidade de se obter por acaso, valores de  $t$  iguais ou superiores ao dado por 1.12.1 está tabelada em função de  $n_1 + n_2 - 2$  e é possível, assim julgar se a diferença  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  é ou não significativa.

Exemplo 12.1 - A medida da distância focal de uma lente delgada, para duas radiações diferentes, levou aos seguintes resultados:

Distância focal  $f_1$  para a radiação  $\lambda_1$ , em cm:

12,3,    12,5,    13,0,    12,7,    12,4

Distância focal  $f_2$  para a radiação  $\lambda_2$ , em cm:

12,1,    12,5    12,6    12,4,    12,2

Deseja-se saber se a experiência foi suficientemente precisa para estabelecer a aberração cromática da lente.

Procedendo de acordo com as expressões indicadas encontra-se:

$$\bar{f}_1 = 12,58$$

$$5 \cdot s_1^2 = 1,80$$



$$\bar{f}_2 = 12,36$$

$$5 s_2 = 1,00$$

$$t = \sqrt{\frac{5 \cdot 5 \cdot 8}{10}} \frac{0,22}{\sqrt{1,80 + 1,00}} = 0,58$$

A probabilidade tabelada de se obter um valor de  $t$  igual ou superior que 0,58 para  $n_1 + n_2 - 2 = 8$  é da ordem de 30% (ver B9, B20). Isto significa que, admitindo a hipótese das duas distâncias focais  $f_1$  e  $f_2$  serem iguais, em 30 casos em cada 100 será possível obter, devido somente a flutuações ocasionais na experiência, valores cuja diferença é da ordem de grandeza da encontrada. A experiência, portanto, não evidencia a aberração cromática da lente dentro do nível de 30%.

### 1.13 - Estimativa Desvio Padrão a Partir da Amplitude da Amostra

As estimativas do desvio padrão até agora realizadas foram feitas pelo cálculo direto da média quadrática dos afastamentos das medidas em relação à média sendo o trabalho tedioso e demorado.

Outras estimativas de  $\sigma_x$  podem ser feitas que, embora menos eficiente que a anterior, têm a vantagem da rapidez e comodidade de procedimento. Uma delas é baseada na amplitude da amostra.

Mencionamos acima que a amplitude de uma amostra era uma medida pouco eficiente da dispersão das medidas por ser muito instável e tender para infinito quando o número de membros da amostra

normal crescia. Para amostras finitas a amplitude, porém, pode ser utilizada para estimar o desvio padrão da população sem haver necessidade de calcular a soma dos quadrados dos afastamentos. Na tabela abaixo relacionamos os fatores pelos quais deve ser multiplicada a amplitude para se obter uma estimativa razoável do desvio padrão (remetemos o leitor à bibliografia B9, B23 para a demonstração da validade da tabela):

Fator f pelo qual se deve multiplicar a amplitude de uma amostra de população normal para se obter o desvio padrão da população

Número de membros da amostra n	Fator f
2	0,886
3	0,591
4	0,486
5	0,430
10	0,325
20	0,268
100	0,199

Exemplo 13.1 - No exemplo 6.1 o desvio padrão da média foi 0,0001 mm. Adotando a estimativa anterior teríamos, para a mesma variável, a seguinte estimativa:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0,325 \times 0,002}{\sqrt{12}} = 0,0002 \text{ mm}$$

## CAPÍTULO 2

ESTIMATIVAS DE MEDIDAS INDIRETAS E AJUSTE DE DADOS2.1 - Estimativas de Medidas Indiretas Lineares

Nas estimativas do capítulo anterior a análise dos resultados foi realizada utilizando a flutuação das medidas obtidas diretamente em uma experiência. Quando se quer medir indiretamente uma grandeza, isto é, quando se deseja determiná-la através da medida de outra ou de outras o procedimento a adotar é diferente.

O caso mais elementar é o de determinar o valor representativo da variável  $z$  ligada às variáveis  $x, y, \dots$  pela relação:

$$z = a_x x + a_y y + \dots$$

onde  $a_x, a_y, \dots$  são parâmetros constantes e  $x, y, \dots$  são variáveis medidas diretamente.

Se  $\bar{x}, \bar{y}, \dots$  são as médias das medidas de cada uma das variáveis e  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$  os respectivos desvios padrões, são válidos, para grande conjunto de experiências cuja flutuação se aproxima bastante da distribuição normal, as relações:

$$\bar{z} = a_x \bar{x} + a_y \bar{y} + \dots \quad (2.1.1)$$

$$\sigma_z^2 = a_x^2 \sigma_x^2 + a_y^2 \sigma_y^2 + \dots \quad (2.1.2)$$

que permitem calcular a média e o desvio padrão de  $z$ . Estima-se, assim, o valor representativo de  $z$ , o erro associado a este valor e o nível de confiança atribuível ao intervalo determinado em torno da média (ver 4.3).

A estimativa do nível de confiança é mais ou menos complicada principalmente se as médias de  $x$ ,  $y$ , ... não provêm de amostras de igual tamanho. Isto faz com que o nível de confiança associado a cada desvio padrão não seja idêntico para todas as medidas diretas. Adiante (ver 2.4), trataremos do problema abordando neste ítem apenas o caso de igual confiança associada aos desvios padrões.

Neste caso o nível de confiança associado ao desvio padrão calculado por (2.1.2) é o nível de confiança comum aos desvios padrões que constituem suas parcelas.

Exemplo 1.1 - A massa ( $M_1$ ) de um líquido é determinada em uma balança analítica pelas pesadas sucessivas de um frasco cheio de líquido e do mesmo frasco vazio. Os resultados experimentais foram:

Massa do frasco com o líquido ( $M_{f+1}$ ), em gramas:

20,4432	20,4435	20,4431
20,4433	20,4434	

$$\bar{M}_{f+1} = 20,44330 \text{ g}$$

$$\sigma_{\bar{M}_{f+1}} = 0,00007 \text{ g}$$

Massa do frasco vazio ( $M_f$ ), em gramas:

15,3945	15,3942	15,3943
15,3941	15,3942	

$$\bar{M}_f = 15,39426 \text{ g}$$

$$\sigma_{\bar{M}_f} = 0,00007 \text{ g}$$

De acordo com (2.1.1) e (2.1.2) as estimativas de  $\bar{M}_1$  e  $\sigma_{\bar{M}_1}$  são

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_{f+1} - \bar{M}_f = 5,04904 \text{ g}$$

$$\sigma_{\bar{M}_1} = \sqrt{\sigma_{\bar{M}_{f+1}}^2 + \sigma_{\bar{M}_f}^2} = 0,0001 \text{ g}$$

Resultado da experiência:  $M_1 = (5,0490 \pm 0,0001) \text{ g}$ .

Uma vez que foi utilizado o intervalo de um desvio padrão nas duas estimativas da flutuação de  $\bar{M}_{f+1}$  e de  $\bar{M}_f$  e como cada uma destas médias é resultante de cinco medidas experimentais, a tabela de 1.9 indica que o nível de confiança é da ordem de 55%.

## 2.2 - Estimativa de Medidas Indiretas Não-Lineares

Quando  $z$  é ligado às variáveis  $x, y, \dots$  por uma relação da forma

$$z = f(x, y, \dots)$$

as estimativas da média  $\bar{z}$  e do desvio padrão  $\sigma_z$  são razoavelmente feitas pelas expressões (ver 4.8):

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y}, \dots) \quad (2.2.1)$$

$$\sigma_z^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y} \\ \dots}}^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y} \\ \dots}}^2 \sigma_y^2 + \dots \quad (2.2.2)$$

válidas para funções  $f(x, y, \dots)$  que não tenham comportamento estranho nas vizinhanças do ponto  $(\bar{x}, \bar{y}, \dots)$ .

Exemplo 2.1 - Uma resistência elétrica é determinada pela medida da corrente que a atravessa e da queda de tensão entre suas duas extremidades. Os resultados obtidos foram:

Corrente, em A:

0,12            0,12            0,11            0,10            0,13            0,14

Média  $\bar{I} = 0,124$  A

Desvio padrão  $\sigma_{\bar{I}} = 0,007$  A

Tensão, em V:

1,02            1,03            1,04            1,03            1,04

Média  $\bar{V} = 1,032$  V

Desvio padrão  $\sigma_{\bar{V}} = 0,004$  V

A resistência  $R$  é dada pela relação  $R = V/I$  e, de acordo com (2.2.2) e (2.2.1), teremos:

$$\bar{R} = \frac{1,032}{0,124} = 8,32$$

$$\sigma_{\bar{R}} = \sqrt{\left(\frac{1}{0,124}\right)^2 (0,004)^2 + \left(\frac{-1,032}{0,124}\right)^2 (0,007)^2} = 0,8$$

Resultado da Experiência:  $R = (8,3 \pm 0,8)$  com um nível de confiança da ordem de 55%.

Exemplo 2.2 - O comprimento de onda  $\lambda$  de uma radiação visível foi determinado pela medida, muitas vezes iterada, do ângulo  $\theta$  de difração correspondente ao espectro de primeira ordem em uma rede difração cujo espaçamento  $d$  das ranhuras é igual a  $15.472 \text{ \AA}$ . A média dos ângulos medidos foi  $20^\circ 29'$  e o desvio padrão igual a  $15'$ . O desvio padrão do elemento da rede é  $0,5 \text{ \AA}$ . Calcular  $\lambda$  e estimar o respectivo erro.

A relação que liga  $\lambda$  a  $d$  e  $\theta$  é  $\lambda = d \sin \theta$  e assim ter-se-á:

$$\bar{\lambda} = 15472 \times \sin 20^\circ 29' = 15472 \times 0,350 = 5415 \text{ \AA}$$

$$\sigma_{\lambda} = \sqrt{(0,350)^2 (0,5)^2 + (15472 \times 0,37)^2 (0,004)^2} = 23 \text{ \AA}$$

O resultado final será  $\lambda = (5420 \pm 25) \text{ \AA}$  com uma confiança da ordem de 68% pois o número de medidas efetuadas foi grande.

No exemplo anterior a contribuição de desvio padrão de  $d$  para o erro estimado de  $\lambda$  é praticamente desprezível diante da contribuição do erro do ângulo. Isto pode ocorrer quando o erro relativo de uma das medidas diretas for muito menor que o de outra e ambas são utilizadas para calcular uma terceira. No caso exemplificado o erro relativo do elemento  $d$  é da ordem de  $0,003\%$ . en-

quanto o do ângulo é da ordem de 1,3%.

Uma análise preliminar da ordem de grandeza dos erros relativos permitirá, em muitos casos, abandonar na estimativa do erro médio quadrático aqueles cuja influência fôr pequena.

Exemplo 2.3 - Deseja-se calcular a potência  $P$  dissipada em uma resistência  $R$  atravessada por uma corrente  $I$ . As medidas diretas de  $R$  e  $I$  levaram aos seguintes resultados:

$$\bar{R} = 2,0 \quad \sigma_{\bar{R}} = 0,01$$

$$\bar{I} = 4,1 \text{ A} \quad \sigma_{\bar{I}} = 0,2 \text{ A}$$

A potência  $P$  será dada por  $P = R \cdot I^2$  e, portanto:

$$\bar{P} = 2,0 \times (4,1)^2 = 33,6 \text{ W}$$

O erro relativo de  $\bar{R}$  é da ordem de 0,5% e o de  $\bar{I}$  da ordem de 5% e, no caso, será a parcela que contém  $\sigma_{\bar{I}}$  a única que contribuirá ponderavelmente para a estimativa de  $\sigma_{\bar{P}}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{P}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)^2 \sigma_{\bar{I}}^2} = \left| \left(\frac{\partial P}{\partial I}\right) \sigma_{\bar{I}} \right| = \\ &= (2 \times 2,0 \times 4,1) \times 0,2 = 3,2 \text{ W} \end{aligned}$$

O resultado final será  $\bar{P} = (34 \pm 3) \text{ W}$ . Não há nenhuma vantagem, neste exemplo, em fazer uma estimativa mais fina de  $\sigma_{\bar{P}}$  utilizando, também, o desvio padrão de  $\bar{R}$ .



### 2.3 - Estimativa Simplificada do Erro Propagado

Quando se quer fazer uma estimativa rápida do erro  $\Delta z$  de uma medida indireta  $z$  ligada às medidas diretas  $x, y, \dots$  por uma função conhecida pode-se utilizar a expressão (ver 4.8):

$$\Delta z = \left| \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \Delta x \right| + \left| \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \Delta y \right| + \dots \quad (2.3.1)$$

onde  $x, y, \dots$  são as estimativas dos erros de  $x, y, \dots$ . Adotando o desvio padrão como estimativa de erro ter-se-á:

$$\sigma_z = \left| \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right| \sigma_x + \left| \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right| \sigma_y + \dots \quad (2.3.2)$$

As duas expressões anteriores são aproximadas e a correta é a expressão (2.2.2) (ver 4.8). Como porém são muito cômodas seu emprego pode ser justificado quando não se deseja uma estimativa muito cerrada dos erros da medida indireta.

Exemplo 3.1 - A aceleração  $g$  da gravidade é determinada pela medida do comprimento  $l$  e período de oscilação  $T$  de um pêndulo simples. À partir dos seguintes resultados estimar  $g$  e o erro associado à medida:

$$\begin{aligned} \bar{l} &= 100 \text{ cm} & \sigma_{\bar{l}} &= 1, \text{ cm} \\ \bar{T} &= 2,03 \text{ seg} & \sigma_{\bar{T}} &= 0,03 \text{ seg} \\ \bar{g} &= \frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^2} = 987 \text{ cm/seg}^2 \end{aligned}$$

A estimativa do erro utilizando a expressão aproximada é:

$$\Delta \bar{g} = 4\pi^2 \left| \frac{1}{(2,03)^2} + 1 + \frac{2+100}{(2,03)^2} + 0,03 \right| = 39 \text{ cm/seg}^2$$

Com a expressão (2.2.2) obter-se-ia:

$$\Delta_{\frac{g}{g}} = 4\pi^2 \sqrt{\left(\frac{1}{(2,03)^2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{2+100}{(2,03)^3}\right)^2 + 0,03^2} = 30 \text{ cm/seg}^2$$

O emprêgo da expressão aproximada, neste exemplo, leva a uma estimativa de erro 30% superior à feita com a relação (2.2.2), o que é uma desvantagem. Por outro lado a sua conveniência operacional é bastante grande o que a recomenda como método a adotar para estimativas pouco elaboradas.

A simplicidade operacional do procedimento é ainda mais acentuada quando a função que liga  $z$  a  $x$ ,  $y$ , ... é tal que  $\lg z$  é igual a uma soma de funções simples. Neste caso é prático estimar o erro de  $z$  pela expressão:

$$\frac{\Delta z}{z} = \left| \left( \frac{\partial \lg z}{\partial x} \right) \Delta x \right| + \left| \left( \frac{\partial \lg z}{\partial y} \right) \Delta y \right| + \dots \quad (2.3.3)$$

O segundo membro desta igualdade é obtido diferenciando a função  $\lg z$  e substituindo  $dx$ ,  $dy$ , ... por  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , ...

Exemplo 3.2 - No exemplo anterior o emprêgo da fórmula (2.3.3) permite escrever, diretamente:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta g}{g} &= \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta T}{T} \\ &= \frac{1}{100} + \frac{2 \times 0,03}{2,03} = 0,039 \end{aligned}$$

$$\Delta g = 0,039 \times g = 39,0 \text{ cm/seg}^2$$

## 2.4 - Estimativa de Medidas Indiretas Utilizando Medidas Diretas de Diferentes Precisões

Nos ítems anteriores as medidas diretas adotadas para determinar a medida indireta tinham, por hipótese, o mesmo nível de confiança e, portanto, o mesmo pêsso na avaliação da grandeza desconhecida. Quando isto não ocorrer é necessário ponderar cada medida direta de modo a que as de maior confiança tenham maior influência na determinação. Esta ponderação pode ser realizada de diferentes maneiras. Indicamos as expressões a adotar para o caso de uma variável  $z$  ligada linearmente a duas variáveis  $x$  e  $y$  medidas diretamente:

$$z = a_x x + a_y y$$

Se a média  $\bar{x}$  foi obtida de um conjunto  $n_x$  de medidas e  $\bar{y}$  de um conjunto  $n_y$  a estimativa de  $\bar{z}$  e  $\sigma_{\bar{z}}$  é dada por (ver 4.9):

$$\bar{z} = \frac{n_x \cdot a_x \cdot \bar{x} + n_y \cdot a_y \cdot \bar{y}}{n_x + n_y} \quad (2.4.1)$$

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{n_x^2 \cdot a_x^2 \cdot \sigma_x^2 + n_y^2 \cdot a_y^2 \cdot \sigma_y^2}{(n_x + n_y)^2} \quad (2.4.2)$$

O nível de confiança associado à estimativa de  $z$  é, certamente, menor que o menor nível de confiança associado às médias  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ .

Se à média  $\bar{x}$  está associado um nível de confiança  $c_x$  e à média  $\bar{y}$  um nível  $c_y$  as estimativas a fazer serão:

$$\bar{z} = \frac{C_x \cdot a_x \cdot \bar{x} + C_y \cdot a_y \cdot y}{C_x + C_y} \quad (2.4.3)$$

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{C_x^2 \cdot a_x^2 \cdot \sigma_x^2 + C_y^2 \cdot a_y^2 \cdot \sigma_y^2}{(C_x + C_y)^2} \quad (2.4.4)$$

## 2.5 - Ajuste de Dados: Método dos Mínimos Quadrados

Um problema frequentemente encontrado no tratamento de resultados experimentais é o de ajuste de dados. Pode ser formulado da seguinte maneira: duas grandezas  $x$  e  $y$  são relacionadas pela expressão analítica  $y = f(x, a, b, \dots)$  onde  $f$  é uma função conhecida e  $a, b, \dots$  são parâmetros desconhecidos. Experimentalmente são determinados os pares de valores  $(x_i, y_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  e se quer calcular os parâmetros de tal maneira que a curva  $y = f(x, a, b, \dots)$  melhor se aproxime dos valores experimentais.

Habitualmente a função  $f$  é linear em  $x$  e a relação analítica entre  $y$  e  $x$  é, portanto:

$$y = ax + b$$

A solução do problema geral é dada pelo método dos mínimos quadrados ou pelo método da máxima verossimilhança. Para o caso linear os valores de  $a$  e  $b$  que satisfazem ao problema são a solução do seguinte sistema de equações lineares a duas incógnitas (ver 5.2):

Equação normal de  $a$ :

$$\sum_{1}^{n} y_1 x_1 = a \sum_{1}^{n} x_1^2 + b \sum_{1}^{n} x_1$$

Equação normal de b:

(2.5.1)

$$\sum_{1}^{n} y_1 = a \sum_{1}^{n} x_1 + b \sum_{1}^{n} 1$$

A estimativa do erro associado aos valores calculados da variável  $y$  na expressão anterior é dada por (ver 5.2):

$$\sigma^2 = \frac{(\sum y_{\text{calculado}} - y_{\text{observado}})^2}{n - 2} \quad (2.5.2)$$

Exemplo 5.1 - A variação da resistência de um condutor metálico com a temperatura é dada por uma expressão da forma:

$$R = R_0(1 + \alpha t)$$

onde  $R_0$  e  $\alpha$  são constantes e  $R$  é a resistência do condutor a  $t^\circ\text{C}$ . Experimentalmente foram determinados os seguintes valores de  $R$  e  $t$ :

$t$ (em $^\circ\text{C}$ )	$R$ (em $\Omega$ )
24	197,6
54	196,5
64	196,3
74	196,1

A expressão analítica que liga R a t pode ser escrita sob a forma:

$$R = at + b$$

As equações normais são facilmente determinadas com a seguinte disposição de cálculo:

t	R	t <sup>2</sup>	Rt
24	197,6	576	4742
54	196,5	2916	10611
64	196,3	4096	12563
74	196,1	5476	14511
216	786,5	13064	42427

Equação normal de a:

$$42427 = 13064 a + 216 b$$

Equação normal de b:

$$786,5 = 216a + 4b$$

Solução do sistema:

$$a = - 3,07 \times 10^{-2}$$

$$b = 198,28$$

A reta que ajusta os dados será:

$$R = (- 3,07 \times 10^{-2}t + 198,28)$$

Portanto:

$$R_0 = 198,28$$

$$= 1,55 \times 10^{-4} (^{\circ}\text{C})^{-1}$$

A estimativa do erro associado aos R ajustados pode ser feita com o seguinte dispositivo:

t	R (observado)	R' (calculado)	$\hat{R} - R'$	$(R - R')^2$
24	197,6	197,54	0,06	0,0036
54	196,5	196,62	-0,12	0,0144
64	196,3	196,31	-0,01	0,0001
74	196,1	196,01	0,09	0,0081

$$= 0,0262$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,0262}{2}} = 0,12$$

A estimativa final será, por conseguinte:

$$R = (- 3,07 \times 10^{-2}t + 198,28 \pm 0,12)$$

O trabalho numérico fica simplificado quando a equação a ajustar é escrita sob a forma:

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$$

Nêste caso o parâmetro a é a solução da equação normal:

$$\sum_{1}^{n} (y - \bar{y})(x - \bar{x}) = a \sum_{1}^{n} (x - \bar{x})^2 \quad (2.5.2)$$

e o erro associado ao ajuste dos dados pode ser calculado pela ex-

pressão:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^n (y - \bar{y})^2 - 2a \sum_1^n (y - \bar{y})(x - \bar{x}) + a^2 \sum_1^n (x - \bar{x})^2}{n - 2} \quad (2.5.3)$$

Nesta relação apenas a soma  $\sum_1^n (y - \bar{y})^2$  não foi calculada para a estimativa de  $a$ . O cálculo pode ser, assim, realizado com relativa facilidade e pequeno trabalho.

Exemplo 5.2 - A reta do exemplo 5.1 ajustada pela expressão (2.5.2) pode ser determinada com o seguinte dispositivo de cálculo:

t	R	t - $\bar{t}$	R - $\bar{R}$	(t - $\bar{t}$ )(R - $\bar{R}$ )	(R - $\bar{R}$ ) <sup>2</sup>	(t - $\bar{t}$ ) <sup>2</sup>
24	197,6	-30	0,975	- 29,25	0,9506	900
54	196,5	0	-0,125	0	0,0156	0
64	196,3	10	-0,325	- 3,25	0,1056	100
74	196,1	20	-0,525	- 10,50	0,2756	400
216	786,5			- 43,0	1,3474	1400

$$\bar{t} = 54 \quad \bar{R} = 196,625$$

$$a = \frac{- 43,0}{1400} = - 3,07 \times 10^{-2}$$

$$\sigma^2 = \frac{1,3474 - 2 \times 3,07 \times 10^{-2} \times (-43,0) + (-3,07 \times 10^{-2})^2 \times 1400}{2} =$$

$$\sigma^2 = 0,013$$

$$\sigma = 0,12$$



A reta ajustada será, pois:

$$\begin{aligned} R &= (3,07 \times 10^{-2} (t - 54) + 196,625 \pm 0,12) = \\ &= (-3,07 \times 10^{-2} t + 198,28 \pm 0,12) \end{aligned}$$

## 2.6 - Ajuste Não-Linear: Método dos Mínimos Quadrados

Outro caso de ocorrência frequente no ajuste de dados é o da interpolação não-linear em que a função interpolatriz tem a forma:

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m \quad (2.6.1)$$

onde  $a_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ) são os parâmetros desconhecidos a determinar pelo método dos mínimos quadrados. Foram determinados, experimentalmente,  $n$  pares de valores  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Usualmente  $n > m + 1$ .

O sistema de equações que determina os  $m + 1$  parâmetros é (ver 5.3):

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i^j = a_0 \sum_{i=1}^n x_i^{j+m} + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{j+m-1} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^j$$

$$j = 0, 1 \dots m \quad (2.6.2)$$

Cada uma das equações do sistema é denominada a equação normal de um dos parâmetros fixado pelo valor de  $j$ . Para obter as equações normais de cada parâmetro, e portanto o sistema (2.6.2) procede-se da seguinte maneira: substitui-se, na função (2.6.1),  $x$  e  $y$  pelos valores experimentais  $x_i$  e  $y_i$ ; obtém-se, assim, um sistema de  $n$  equações  $m + 1$  incógnitas  $(a_0, a_1 \dots a_m)$ . Multiplica-se ca

da equação pelo coeficiente de  $a_j$  na mesma equação e soma-se as equações resultantes: a equação final é a equação normal do parâmetro  $a_j$ .

Exemplo 6.1 - Ajustar, por meio de uma parábola do segundo grau, os seguintes dados experimentais:

x = 1	2	3	4	5
y = 5,0	8,0	12,0	22,0	33,0

Um dispositivo de cálculo conveniente é o seguinte:

x	y	$x^2$	$x^3$	$x^4$	xy	$x^2y$
1	5	1	1	1	5	1
2	8	4	8	16	16	32
3	12	9	27	81	36	108
4	22	16	64	256	88	352
5	33	25	125	625	165	825
15	80	55	225	979	310	1318

O sistema de equações normais será:

$$80 = 5a_2 + 15a_1 + 55a_0$$

$$310 = 15a_2 + 55a_1 + 225a_0$$

$$1318 = 55a_2 + 225a_1 + 979a_0$$

cuja solução é:

$$a_2 = 4$$

$$a_1 = -0,714$$

$$a_0 = 1,286$$

A concordância dos valores ajustados com os valores experimen

tais é dada na seguinte tabela:

x	y (experimental)	y' (ajustado)	y - y'	(y - y') <sup>2</sup>
1	5	4,57	0,43	0,185
2	8	7,71	0,29	0,084
3	12	13,43	-1,43	2,045
4	22	21,86	0,14	0,020
5	33	32,57	0,48	0,230

$$= 2,564$$

O erro associado ao ajuste dos dados é obtido por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(y_{\text{observado}} - y_{\text{calculado}})^2}{n - m - 1}} \quad (2.6.3)$$

que no caso é igual a:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2,564}{5 - 3}} = 1,1$$

A parábola de ajuste será, portanto:

$$y = 4 - 0,714x + 1,286x^2 \pm 1,1$$

\* \* \*

## CAPÍTULO III

PROBABILIDADES E DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES3.1 - Introdução

A realização iterada de uma medida experimental indica que os valores obtidos para a grandeza observada não são repetidos idênticamente mas flutuam, agrupando-se mais ou menos fortemente, em torno de um determinado valor. Esta constatação mostra ser necessário o estabelecimento de um método apropriado para do conjunto de valores experimentais selecionar um deles capaz de representar, da melhor maneira possível, a grandeza medida. É evidente que um método deste tipo selecionará um valor ao qual estará, inherentemente, associado um grau de incerteza que dependerá da qualidade da medida experimental: uma experiência realizada com método e instrumentos a curados e justos levará a um valor com pequeno grau de incerteza; se executada com métodos e equipamentos de menor precisão e ljusteza levará a um valor menos digno de confiança.

O método adotado para a seleção do valor experimental mais representativo decorre da possibilidade de vincular o conceito de frequência dos vários valores experimentais de uma grandeza física à noção de probabilidade matemática. Para que tal vinculação seja possível é necessário que a experiência seja realizada em condições tais que não existam vícios fundamentais de medida. É o que ocorre

rá, por exemplo, quando os dados obtidos experimentalmente o forem com aparelhagem imprópria ou com equipamento estruturalmente deficiente. Quando isto acontece a medida está viciada de um erro sistemático ao qual não é possível aplicar tratamento probabilístico. A passagem de um conjunto de dados viciados para um conjunto de dados aos quais se pode, com certo grau de confiança, aplicar um tratamento probabilístico depende, fundamentalmente, do aprimoramento das técnicas e da habilidade experimental do observador. Só a um conjunto de tais dados será possível aplicar o tratamento cujas normas foram enunciadas nos dois capítulos anteriores e cuja justificação teórica será feita a seguir.

O fundamento da associação da probabilidade matemática à frequência de aparecimento dos valores experimentais de uma grandeza física decorre de variações aleatórias e incontrolláveis do sistema do laboratório no qual são realizadas as medidas. Tais variações, para todos os fins práticos, são de impossível determinação unívoca, analítica ou experimental, e obrigam a adoção de um método estatístico as analisar em conjunto.

A teoria dos erros é, portanto, um procedimento de análise estatística aplicado a um conjunto de dados experimentais.

### 3.2 - Distribuição de Frequências de Variáveis Discretas

A iteração de uma medida experimental, realizada em condições fisicamente controladas, mostra que, em geral, os valores encontrados em cada experiência não se repetem idênticamente, mas flutuam,

agrupando-se em diversas classes. Quando o domínio da variável medida é discreto, a cada valor da variável no domínio fica associado um número que indica quantas vezes tal valor aparece no conjunto das medidas: é esta a frequência do valor.

Se  $A$  for uma variável discreta de domínio  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  a frequência de  $A_i$  será dada por uma função  $F(A_i)$ . A forma da função  $F$  depende da natureza da variável medida e do número total de medidas efetuadas.

A frequência relativa de  $A_i$  no conjunto de medidas é definida por

$$f(A_i) = \frac{F(A_i)}{\sum_1^n F(A_i)} \quad (3.2.1)$$

Quando  $\sum_1^n F(A_i)$  é pequeno, ou seja, quando o número de medidas realizadas é pequeno, a frequência relativa de  $A_i$  varia entre grandes limites cada vez que se repete o conjunto de experiências. Quando o número total de experiências cresce a frequência relativa tende a estabilizar-se em torno de um determinado valor: a probabilidade de ocorrência do valor  $A_i$  é o limite de  $f(A_i)$  quando  $\sum_1^n F(A_i) \rightarrow \infty$

$$p(A_i) = \lim_{\sum_1^n F(A_i) \rightarrow \infty} f(A_i) \quad (3.2.2)$$

Ao conjunto infinito de frequências dos valores de  $A_i$  denomina-se população ou universo dos  $A_i$  e ao conjunto finito observa

do desta população denomina-se amostra da população.

Se a amostra é grande as frequências relativas, pela expressão (3.2.2), aproximam-se da probabilidade dos valores  $A_i$ . Se a amostra é pequena as diferenças entre as probabilidades e frequências podem ser grandes.

Denomina-se distribuição de probabilidades a função  $p(A_i)$  do argumento  $A_i$ . A distribuição de frequências relativas é definida pela função  $f(A_i)$ . Quando a amostra é grande, portanto, a distribuição de frequências relativas se aproxima da distribuição de probabilidades.

Um problema fundamental de estatística é o de associar à variável  $A_i$  a respectiva distribuição de probabilidades.

Uma variável aleatória ou estocástica discreta é uma variável discreta à qual se pode associar uma distribuição de probabilidades e distribuições de frequências relativas.

Por (3.2.1) e (3.2.2) a soma das probabilidades associadas a cada valor de  $A_i$  é igual à unidade:

$$\sum_{i=1}^n p(A_i) = 1 \quad (3.2.3)$$

Uma vez que para todo  $i$   $p(A_i) \geq 0$  é evidente que:

$$0 \leq p(A_i) \leq 1 \quad (3.2.4)$$

A introdução do conceito de probabilidade por meio das distribuições de frequências relativas apresenta dificuldades quando

se tem em vista uma teorização formal rigorosa. Remetemos o leitor à bibliografia (B4, B5, B6, B7, B24, B25) para informações mais detalhadas e procedimentos alternativos de construção do conceito.

### 3.3 - Distribuições de Probabilidades de Variáveis Contínuas

É vantajoso para uma análise teórica a introdução do conceito de probabilidade quando a variável é contínua. Para isto é necessário fazer algumas modificações nas definições já estabelecidas.

Suponhamos que se observa experimentalmente uma grandeza cujos valores  $x$  pertencem a um intervalo contínuo  $(a,b)$ . É possível dividir o intervalo  $(a,b)$  em sub-intervalos de amplitude  $\Delta x$  e a cada sub-intervalo associar a frequência com que aparecem na experiência os valores de  $x$  nele compreendidos. Ter-se-á, assim, dividido o domínio primitivo em classes  $(x_1, x_1 + \Delta x)$  e a cada classe fica associada uma frequência  $F(x_1, \Delta x)$  que é função de uma das fronteiras da classe e de sua amplitude.

A frequência relativa da classe  $(x_1, x_1 + \Delta x)$  é definida como:

$$f(x_1, \Delta x) = \frac{f(x_1, \Delta x)}{\sum_1^N F(x_1, \Delta x)} \quad (3.3.1)$$

A frequência relativa depende do argumento  $x_1$ , da amplitude da classe  $\Delta x$  e, como no caso de variáveis discretas, do número total de medidas.



A densidade de frequência relativa é uma função  $\delta(x_1)$  tal que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_1, \Delta x) = \delta(x_1) dx \quad (3.3.2)$$

A densidade de frequência  $\delta(x_1)$  mede a frequência como aparecem, no conjunto de medidas, os valores de  $x$  na vizinhança infinitesimal de  $x_1$ .

A integral da densidade de frequência relativa estendida a um intervalo  $(a_1, b_1)$  interior ao domínio  $(a, b)$  dá a frequência relativa da classe de valores  $x$  definida pelas fronteiras deste intervalo. A probabilidade de ocorrência de valores de  $x$  neste intervalo é definida pelo limite dessa integral quando o número medidas dos valores de  $x$  tende para infinito:

$$p(a_1 \leq x \leq b_1) = \lim_{\sum_1^n F(x_1, \Delta x) \rightarrow \infty} \int_{a_1}^{b_1} \delta(x_1) dx \quad (3.3.3)$$

Defini-se densidade de probabilidade  $p(x)$  como:

$$\lim_{\sum_1^n F(x_1, \Delta x) \rightarrow \infty} (\delta(x)) = p(x) \quad (3.3.4)$$

Admitindo a comutatividade entre os sinais de passagem ao limite e integral, (3.3.3) passa a:

$$p(a_1 \leq x \leq b_1) = \int_{a_1}^{b_1} p(x) dx \quad (3.3.5)$$

O produto  $p(x)dx$  dá, pois, a probabilidade de ocorrência de valores de  $x$  compreendidos no intervalo infinitesimal  $(x, x + dx)$ .

A função  $p(x)$  do argumento  $x$  é denominada distribuição de densidade de probabilidade de  $x$ .

Pelas definições acima é claro que a integral de  $p(x)dx$  estendida a todo o domínio de  $x$  é igual à unidade:

$$p(a < x < b) = \int_a^b p(x)dx = 1 \quad (3.3.6)$$

A relação (3.2.4) é também válida para as probabilidades assim definidas.

Uma variável aleatória ou estocástica contínua é uma variável contínua à qual se pode associar uma distribuição de probabilidades.

### 3.4 - Tabelas de Freqüências, Histogramas e Curvas de Probabilidade

Os resultados da medida de uma variável aleatória discreta podem ser agrupados em uma tabela onde se estabelece a correspondência bi-unívoca entre  $A_i$  e  $F(A_i)$ . Se a amostra for grande será possível construir uma tabela de probabilidades.

Exemplo 4.1 - A variável aleatória discreta observada tem como domínio os pontos obtidos pelo lançamento de um dado. O resultado de 2.400 lançamentos é representado na seguinte tabela:

$A_i$	$F(A_i)$	$f(A_i) \sim p(A_i)$
1	382	0,160
2	409	0,170
3	392	0,163
4	412	0,172
5	403	0,168
6	402	0,167

$$\Sigma = 2400$$

$$\Sigma = 1,000$$

Como a amostra é grande pode-se admitir que as frequências relativas da terceira coluna se aproximam muito das respectivas probabilidades.

Quando a grandeza observada é contínua é necessário organizar os resultados experimentais em uma tabela de frequência na qual o domínio da variável está dividido em classes.

Exemplo 4.2 - A medida dos tempos de queda livre de uma gota de óleo, na experiência de Millikan, apresentou os seguintes resultados:

Tempo de Queda (seg)	$F(x_i, \Delta x)$	$f(x_i, \Delta x)$
16,0 - 18,0 *	3	0,03
18,0 - 20,0	13	0,13
20,0 - 22,0	17	0,17
22,0 - 24,0	32	0,32
24,0 - 26,0	15	0,15
26,0 - 28,0	16	0,16
28,0 - 30,0	3	0,03
30,0 - 32,0	1	0,01

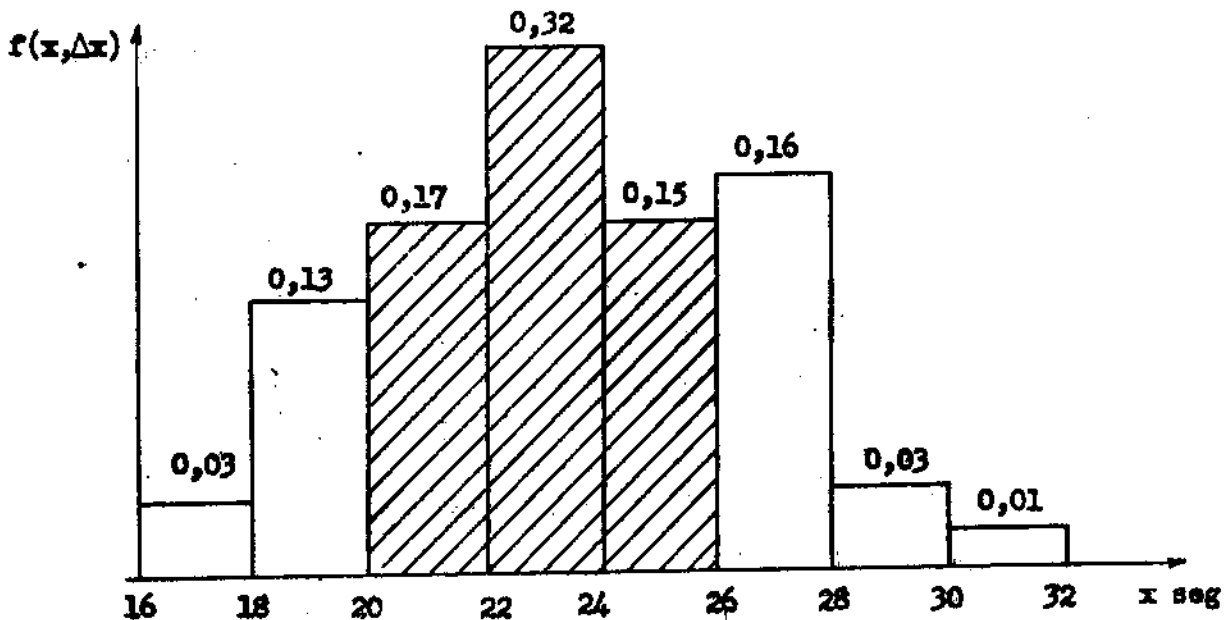
\* As classes são abertas na fronteira superior.

A escolha da amplitude das classes é um problema delicado. Se  $\Delta x$  for muito grande a tabela de frequência obscurece os detalhes da distribuição da variável aleatória. Se  $\Delta x$  for muito pequena a tabela fica com muitas entradas e a tendência geral da distribuição da variável aleatória pode não ficar nítida, principalmente se a amostra não for grande.

Existem critérios estatísticos para fazer a escolha do intervalo mais apropriado (B 32). Para a análise de resultados experimentais a questão não tem muita importância uma vez que, em geral, a própria experiência sugere qual o intervalo a escolher para as classes de frequências.

A representação em um gráfico cartesiano ortogonal de uma tabela de frequências de uma variável contínua é denominada um histograma.

Para a tabela de frequências anterior o histograma correspondente será:



Se o número total de membros da amostra for elevado a área compreendida entre o histograma de frequências relativas, duas ordenadas e o eixo horizontal dá, com boa aproximação, a probabilidade de ocorrência de valores da variável aleatória no intervalo fixado pelas duas ordenadas. No histograma anterior a área assinalada dá, aproximadamente, a probabilidade de ocorrência de tempos compreendidos entre 20,0 e 26,0 seg.

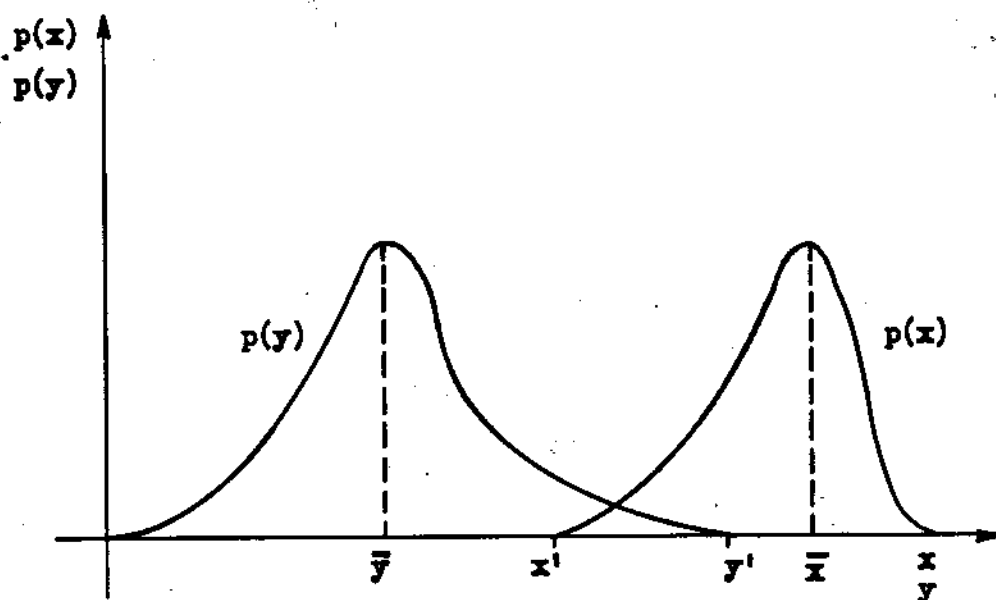
Quando a amostra é muito grande e o intervalo das classes bastante pequeno a curva que une, no histograma, os pontos  $(x_1 + \Delta x/2, f(x_1))$  se aproxima da curva que representa, no mesmo plano, a função densidade de probabilidade. Esta é a curva de densidade de probabilidade da variável aleatória.

A área do plano compreendida entre a curva de probabilidade, duas ordenadas e o eixo horizontal dá a probabilidade de ocorrência de valores de  $x$  entre as abcissas das duas ordenadas (expressão 3.3.5). A área limitada pela curva e o eixo horizontal é, pela expressão 3.3.6, igual à unidade.

### 3.5 - Medidas de Tendência Central ou de Localização

Um problema fundamental de estatística e, conseqüentemente, da análise de resultados experimentais, é o da seleção de um valor da variável aleatória que localize a distribuição sobre o domínio da variável.

Exemplo 5.1 - No gráfico abaixo estão representadas duas curvas de probabilidades das variáveis aleatórias  $x$  e  $y$ :



A inspeção do gráfico mostra que existem probabilidades não nulas de que as variáveis  $x$  e  $y$  assumam valores idênticos no intervalo  $(x', y')$ . As curvas indicam, porém que é muito mais provável que os valores de  $x$  ocorram nas vizinhanças de  $\bar{x}$  e os de  $y$  na vizinhança de  $\bar{y}$ . As duas curvas ficam, por isso mesmo, aproximadamente, localizadas pelos valores  $x = \bar{x}$  e  $y = \bar{y}$ . Se êste se aproxima daquele as duas curvas podem se confundir; se um se afasta do outro a área comum decresce e, eventualmente, pode se tornar nula.

Um valor da variável aleatória que fixa a distribuição de probabilidades sobre o domínio da variável é denominada uma medida de tendência central ou de localização da distribuição.

É evidente que para uma dada distribuição é possível escolher diferentes medidas de tendência central de acôrdo com o critério utilizado para calculá-lo. Razões de natureza pragmática acon

selham que a medida de tendência central seja obtida com facilidade a partir da distribuição de probabilidade ou da distribuição de frequências ou a partir da expressão analítica da densidade de probabilidade, quando esta fôr conhecida.

As medidas de tendência central mais comumente utilizadas são a moda, a mediana e a média.

A moda de uma distribuição é o valor da variável aleatória que corresponde à probabilidade máxima da distribuição.

Exemplo 5.2 - Uma distribuição de probabilidade é definida pela seguinte densidade de probabilidade:

$$p(x) = \frac{(ax)^{n-1}}{(n-1)} \cdot a \cdot e^{-ax}$$

onde  $n$  é inteiro, positivo e constante e  $a$  é constante.

A moda da distribuição será dada pela raiz da equação:

$$\frac{dp(x)}{dx} = 0$$

que é igual a  $(n-1)/a$ .

A moda é uma medida relativamente fácil de calcular pois é determinada por operação de derivação. Quando se conhece apenas a tabela de frequências a moda é calculada por simples inspeção da tabela.

A mediana,  $M$ , de uma distribuição é o valor da variável aleatória tal que a integral da função densidade de probabilidade estendida da fronteira inferior do domínio da variável ao ponto  $M$

é igual a  $1/2$ . Para uma distribuição de variável discreta a mediana é definida analogamente, substituindo-se a integral pelo somatório correspondente. A mediana é, pois, o valor da variável aleatória que tem igual probabilidade de ser e de não ser excedido. A ordenada correspondente à mediana divide a área subentendida pela curva de probabilidade ao meio.

Exemplo 5.3 - Uma função densidade de probabilidade é definida pela expressão

$$p(x) = a e^{-ax}$$

onde  $0 = x < \infty$  e  $a$  é constante e positiva.

A mediana  $M$  da distribuição será dada por:

$$\int_0^M a \cdot e^{-ax} dx = 1/2$$

cuja solução é:

$$M = (1/a) \lg (2/a)$$

Quando a distribuição de probabilidades é conhecida através de uma tabela de probabilidade ou, aproximadamente, de uma tabela de frequências relativas, a mediana é calculada por meio das probabilidades acumuladas ou das frequências relativas acumuladas.

A frequência acumulada de uma classe  $x_j$  em uma distribuição de frequências é definida por:

$$F_a(x_j) = \sum_{i=0}^j F(x_i) \quad (3.5.1)$$

As definições de frequência relativa acumulada e probabili-



dade acumulada são análogas, substituindo-se, respectivamente,  $F(x_i)$  por  $f(x_i)$  ou por  $p(x_i \leq x \leq x_i + \Delta x)$ .

A mediana será aquele valor de  $x$  que corresponde a uma frequência relativa acumulada ou a uma probabilidade acumulada igual a um meio.

Exemplo 5.4 - Para a distribuição do exemplo 4.1 a tabela de frequências relativas acumuladas será:

$A_I$	$f(A_i)$	$f_a(A_i)$
1	0,160	0,160
2	0,170	0,330
3	0,163	0,493
4	0,172	0,665
5	0,168	0,833
6	0,167	1,000

A mediana está situada entre 3 e 4. Uma interpolação linear na coluna das frequências acumuladas indica que a mediana será igual a 3,04.

Existem diversos critérios para fixar a mediana quando a tabela de frequências mostra que ela não coincide, como no caso acima, com nenhuma das fronteiras das classes. Remetemos o leitor à bibliografia (B32) pois o problema é de pequeno interesse para o tratamento de resultados experimentais.

A média aritmética ou simplesmente, a média de uma distribuição de variável discreta é definida como:

$$\bar{A} = \sum_1^n A_i p(A_i) \quad (3.5.2)$$

Quando a variável é contínua, de domínio (a, b), a média é definida como:

$$\bar{x} = \int_a^b xp(x)dx \quad (3.5.3)$$

Quando a distribuição for dada por meio de uma tabela de frequências relativas a média é dada por:

$$\bar{x} = \sum_1^n x_i f(x_i) \quad (3.5.4)$$

É evidente que desta expressão decorre, por (3.3.4), a expressão (3.5.2).

Exemplo 5.5 - Uma distribuição de probabilidade de variável discreta, inteira e positiva, n, é dada por:

$$p(n) = \frac{m^n}{n!} e^{-m} \quad (\text{Distribuição de Poisson})$$

onde m é constante e positivo.

A média da distribuição será:

$$\bar{n} = \sum_1^{\infty} n \cdot \frac{m^n}{n!} \cdot e^{-m} = m.$$

Exemplo 5.6 - Na distribuição do exemplo 5.2 a média será dada por:

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{(ax)^{n-1}}{(n-1)} \cdot a \cdot e^{-ax} \cdot dx$$

$$\bar{x} = n/a$$

### 3.6 - Medidas de Dispersão

Localizada uma distribuição por meio de uma medida de tendência central é necessário indicar como se agrupam os elementos da população em torno desta tendência. Um parâmetro deste tipo é denominado uma medida de dispersão da população.

As medidas de dispersão mais correntemente utilizadas tomam como referência a média da população e são a média dos afastamentos absolutos em relação à média e a variância.

O afastamento de um valor  $x$  em relação à média  $\bar{x}$  é a diferença  $x - \bar{x}$ . É fácil verificar que a média da variável aleatória  $x - \bar{x}$  é igual a zero.

Se se fizer, porém, a média dos valores absolutos dos afastamentos esta média não é nula e é uma medida de afastamento médio dos membros da população em relação à média. Esta medida é comumente denominada afastamento médio e, mais precisamente, afastamento absoluto médio:

$$\text{Afastamento Médio} = \int_a^b |x - \bar{x}| p(x) dx \quad (3.6.1)$$

As definições do afastamento médio para distribuições de variável discreta e para distribuições de frequências são análogas.

A variança de uma população é definida como a média do quadrado dos afastamentos em relação à média:

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \bar{x})^2 p(x) dx \quad (3.6.2)$$

As definições para a variança de distribuições de variável discreta e distribuições de frequências são:

$$\sigma^2 = \int_{i=1}^n (A_i - \bar{A})^2 p(A_i) \quad (3.6.3)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i - \bar{A})^2 F(A_i)}{\sum_{i=1}^n F(A_i)} \quad (3.6.4)$$

A raiz quadrada da variança é o desvio padrão.

Exemplo 6.1 - A variança da distribuição do exemplo 5.5 será dada por

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - m)^2 \frac{m^n}{n} e^{-m}$$

que é igual a  $m$ . O desvio padrão da população será, pois igual a  $\sqrt{m}$ .

Exemplo 6.2 - A variança da distribuição do exemplo 5.6 será:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} \left( x - \frac{n}{a} \right)^2 \frac{(ax)^{n-1}}{(n-1)} a \cdot e^{-ax} dx$$

$$\sigma^2 = n/a^2$$

Ainda uma terceira medida de dispersão é utilizada - a amplitude - definida como a diferença entre o maior e o menor valor da variável aleatória. Para distribuições de variável com domínio infinito a amplitude não tem significação como medida de dispersão. Sua utilidade se revela na fixação da dispersão de amostras pois mesmo que provenham de populações de domínio infinito a sua amplitude será finita.

\* \* \*

## CAPÍTULO IV

DISTRIBUIÇÃO NORMAL. ESTIMATIVAS ESTATÍSTICAS4.1 - Distribuição Normal ou de Gauss; Propriedades

Um problema fundamental para a análise de resultados experimentais é o da determinação da função densidade de probabilidade associada à flutuação da grandeza medida. Conhecida a forma desta função será possível calcular as respectivas medidas de tendência central e de dispersão e obter informações sobre a flutuação de amostras desta população.

A função densidade de probabilidade básica na análise estatística de resultados experimentais é a distribuição normal ou distribuição de Gauss definida por:

$$G(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.1.2)$$

onde  $x$  é variável contínua de domínio  $(-\infty, +\infty)$  e  $\sigma$  e  $m$  duas constantes.

Admitiremos como elemento fundamental da análise de resultados experimentais que as flutuações das medidas de uma grandeza obedecem à distribuição normal.

É possível demonstrar que as flutuações das medidas seguem a

distribuição de Gauss supondo sejam resultantes da ação simultânea de uma infinidade de fatores independentes, cada um contribuindo com uma alteração infinitesimal do valor da grandeza medida. O leitor interessado poderá encontrar tais demonstrações na bibliografia, assim como críticas sôbre a adoção da distribuição normal como elemento fundamental da análise de medidas experimentais (B28, B29).

Os teoremas seguintes estabelecem as principais propriedades da distribuição normal:

T.4.1.1) A moda da distribuição normal é igual a  $m$ .

T.4.1.2) A média da distribuição normal é igual a  $m$ .

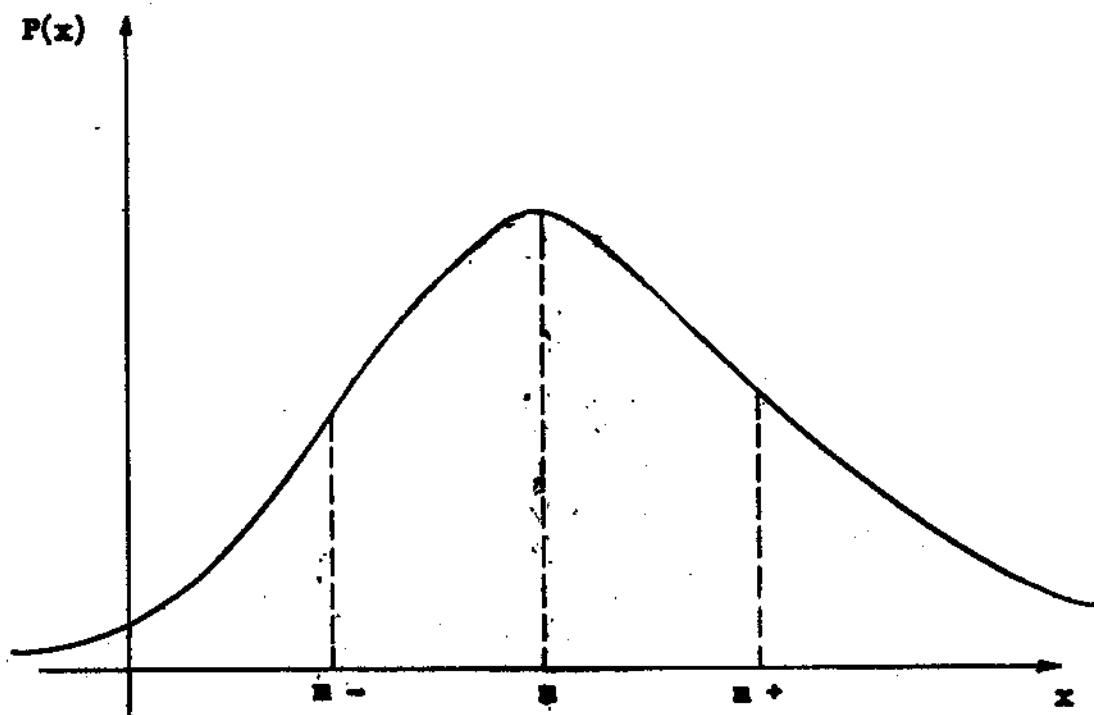
T.4.1.3) A distribuição normal é simétrica em relação à média e, por isso, sua mediana é igual a  $m$ .

T.4.1.4) O desvio padrão da distribuição normal é igual ao parâmetro  $\sigma$ .

T.4.1.5) O desvio médio da distribuição normal é igual a  $\sqrt{2/\pi} \sigma$ .

T.4.1.6) A curva de probabilidade da distribuição normal tem um ponto de inflexão para  $x = m - \sigma$  e outro para  $x = m + \sigma$ .

A demonstração destes teoremas é imediata. A forma da curva da distribuição normal é esquematizada a seguir:



A curva é tanto mais aberta em tôrno da média quanto maior fôr o desvio padrão.

Se na expressão (4.1.2) se fizer a transformação de coordena das

$$x - \mu = y$$

obtem-se a distribuição normal da média zero e desvio padrão  $\sigma$ :

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad (4.1.2)$$

O seguinte teorema é fundamental para estimativas estatísticas:

T.4.1.7) Se  $x$  se distribui normalmente a probabilidade de  $x$



ser interior aos intervalos  $(m - \sigma, m + \sigma)$ ,  $(m - 2\sigma, m + 2\sigma)$  e  $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$  é dada, respectivamente, pelas seguintes integrais:

$$\int_{m-\sigma}^{m+\sigma} G(x)dx = 0,68269 \quad (4.1.3)$$

$$\int_{m-2\sigma}^{m+2\sigma} G(x)dx = 0,95450 \quad (4.1.4)$$

$$\int_{m-3\sigma}^{m+3\sigma} G(x)dx = 0,99730 \quad (4.1.5)$$

A demonstração é imediata: a integral

$$\int_a^b G(x)dx$$

dá a probabilidade de  $x$  estar compreendido no intervalo  $(a, b)$ . Para o intervalo  $(m - \sigma, m + \sigma)$ , ter-se-á:

$$\int_{m-\sigma}^{m+\sigma} G(x)dx = P(m - \sigma \leq x \leq m + \sigma)$$

Substituindo-se  $x$  pela variável  $y$  definida por

$$y = \frac{x - m}{\sigma}$$

encontra-se:

$$P(m - \sigma \leq x \leq m + \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

A expressão que aparece no segundo membro é um valor particular da função normal de probabilidade definida como:

$$g(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

e cujo valor pode ser encontrado por quadratura numérica, estando extensamente tabelado (B 11). Desta quadratura decorre o valor numérico do segundo membro de (4.1.3) e, análogamente, dos segundos membros das expressões (4.1.4) e (4.1.5).

As expressões (4.1.3), (4.1.4) e (4.1.5) mostram que a probabilidade de ocorrência de valores de  $x$  em intervalos simétricos em torno da média depende apenas da amplitude do intervalo medida em unidade de comprimento igual ao desvio padrão. A transformação de variável  $y = (x - m)/\sigma$  leva qualquer distribuição de Gauss à função normal de probabilidade.

#### 4.2 - Função Característica: Propriedades

O problema fundamental da análise dos resultados de uma experiência pode ser formulado da seguinte maneira: admitida a distribuição normal para as medidas obtidas como será possível estimar, a partir dos elementos da amostra, os parâmetros da população normal hipotética de onde provém?

É evidente que se os parâmetros  $m$  e  $\sigma$  da distribuição normal associada à medida forem conhecidos, a melhor estimativa para o valor da grandeza medida será o de igualá-lo à média da população

enquanto o desvio padrão será um parâmetro excelente para indicar a flutuação das medidas. Estes dois parâmetros fixam, unívocamente, a população normal da qual foi extraída a amostra e, estatisticamente, descrevem o comportamento da grandeza medida.

Experimentalmente, porém, o que se conhece é a média  $\bar{x}$  de uma amostra da população e o desvio padrão  $\sigma_x$  da mesma amostra. Em geral estes dois parâmetros da amostra serão diferentes dos parâmetros correspondentes da população, pois poderão flutuar uma vez que são, também, variáveis aleatórias.

Nos teoremas seguintes estabeleceremos as bases teóricas que permitem resolver o problema de estimar  $m$  e  $\sigma$  a partir de  $\bar{x}$  e  $\sigma_x$ . Faremos as demonstrações para distribuição de probabilidades de variável contínua, de domínio  $(-\infty, +\infty)$ . As conclusões serão válidas, com as modificações óbvias, para outras distribuições.

Definição: a função característica  $\varphi_x(t)$  de uma distribuição de probabilidades  $p(x)$  é definida como:

$$\varphi_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{ixt} dx \quad (4.2.1)$$

T.4.2.1.) A integral que define a função característica é convergente e, portanto, a função característica existe sempre que a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p(x)| dx$$

fôr convergente.

$$|\varphi_x(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{ixt} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |p(x) e^{ixt}| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |p(x)| dx .$$

Como  $p(x) \geq 0$  para uma função densidade de probabilidade e, por (3.3.6) a integral de  $p(x)$  estendida ao intervalo  $(-\infty, +\infty)$  é sempre igual à unidade, é válido o teorema seguinte:

T.4.2.2) Toda função densidade de probabilidade tem uma função característica.

T.4.2.3) Se  $\varphi_x(t)$  é a função característica de  $x$ , a função característica da variável aleatória  $ax$  é igual a  $\varphi_x(at)$ .

Por definição:

$$\varphi_{ax}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{i(ax)t} dx$$

que é igual a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{ix(at)} dx = \varphi_x(at) \quad (4.2.2)$$

T.4.2.4) Se  $x$  e  $y$  forem duas variáveis aleatórias independentes cujas funções características são  $\varphi_x(t)$  e  $\varphi_y(t)$  então a função característica da variável aleatória  $z = x + y$  é igual ao produto  $\varphi_x(t) \cdot \varphi_y(t)$ .

Sendo  $z$  uma função de duas variáveis aleatórias a sua função densidade de probabilidade será função da densidade de probabilidade das duas variáveis  $x$  e  $y$ . Como estas são independentes a probabilidade de ocorrência simultânea de  $x$  e  $y$  é dada pelo pro

duto das probabilidades de ocorrência de  $x$  e  $y$ , isto é, por  $p_x(x)$ .  $p_y(y)$ .

A função característica de  $z$  será, portanto:

$$\varphi_z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x) \cdot p_y(y) e^{i(x+y)t} dx dy$$

que transformada leva, sucessivamente, a:

$$\begin{aligned} \varphi_z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x) e^{ixt} dx \int_{-\infty}^{+\infty} p_y(y) e^{iyt} dy = \\ &= \varphi_x(t) \cdot \varphi_y(t) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

T.4.2.5) A função característica da variável aleatória  $z = ax + by + \dots$

onde  $x, y, \dots$  são variáveis aleatórias independentes e  $a, b, \dots$  são constantes, é igual a:

$$\varphi_z(t) = \varphi_x(at) \varphi_y(bt) \dots \quad (4.2.4)$$

Pelos dois teoremas anteriores a demonstração é evidente.

#### 4.3 - Função Característica de uma Distribuição Normal

Com os teoremas anteriores é possível determinar a função densidade de probabilidade de uma combinação linear de variáveis aleatórias independentes que se distribuem normalmente. É o que estabelecemos nos teoremas seguintes:

T.4.3.1) A função característica de uma variável  $x$  que se distribui normalmente com média  $m$  e desvio padrão  $\sigma$  é igual a:

$$\varphi_x(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

A demonstração é direta. Por definição:

$$\varphi_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{ixt} dx$$

Introduzindo a variável  $y$  definida por:

$$y = \frac{x-m}{\sigma}$$

encontra-se, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \varphi_x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot e^{i(m+\sigma y)t} \cdot dy = \\ &= \frac{e^{imt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-i\sigma t)^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} dy = \\ &= \frac{e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-i\sigma t)^2}{2}} dy = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \end{aligned}$$

T.4.3.2) Se a função característica de uma variável aleatória é

$$\varphi_x(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

então  $x$  se distribui normalmente com média  $m$  e variância  $\sigma^2$ .

É a recíproca do teorema anterior cuja demonstração é imediata.

T.4.3.3) Se  $x$  e  $y$  são independentes e se distribuem normalmente, a soma  $x+y$  se distribui normalmente com média igual à soma das médias de  $x$  e  $y$  e variância igual à soma das variâncias de  $x$  e  $y$ .

Pelo teorema 4.2.4:

$$\varphi_{x+y}(t) = \varphi_x(t) \cdot \varphi_y(t)$$

e utilizando o teorema 4.3.1 encontra-se:

$$\begin{aligned} \varphi_{x+y}(t) &= \left[ e^{im_x t - \frac{\sigma_x^2 t^2}{2}} \right] \left[ e^{im_y t - \frac{\sigma_y^2 t^2}{2}} \right] = \\ &= e^{i(m_x + m_y)t - \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) t^2}{2}} \end{aligned}$$

que é a função característica de uma distribuição normal de média  $m_x + m_y$  e variância  $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$ .

Utilizando o teorema 4.2.5 chega-se, sem dificuldade, a T.4.3.4). Se  $x, y, \dots$  são independentes e se distribuem normalmente a variável aleatória  $x = ax + by + \dots$ , onde  $a, b, \dots$  são constantes, se distribui normalmente com média igual a

$$am_x + bm_y + \dots \quad (4.3.1)$$

e variância igual a

$$a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + \dots \quad (4.3.2)$$

T.4.3.5) Se  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) são determinações independentes da variável normal  $x$  de média  $m$  e variância  $\sigma^2$  a média  $\bar{x}$  da amostra  $x_i$  se distribui normalmente com média  $m$  e variância igual a  $\sigma^2/n$ .

Basta aplicar o teorema anterior fazendo  $x = x_1, y = x_2, \dots$  e  $a = b = \dots = 1/n$ .

#### 4.4 - Estimativas dos Parâmetros da População Normal a Partir dos Parâmetros da Amostra

O teorema anterior mostra que a média de uma amostra de  $n$  membros provenientes de uma população normal se agrupa em torno da média da população muito mais estreitamente que cada determinação da variável aleatória, pois a respectiva variância é dividida por  $n$ . Isto justifica a escolha da média da amostra como um valor representativo da grandeza medida, uma vez que ela é a melhor estimativa da média da população.

O desvio padrão da população poderia, pelo teorema 4.3.4 ser estimado através do desvio padrão da amostra. Acontece, porém, que ao fazer tal estimativa ter-se-ia que utilizar os afastamentos das medidas em relação à média da amostra e não em relação à média da população pois esta não é conhecida mas simplesmente estimada. A estimativa estaria, assim eivada de um erro sistemático: seria uma estimativa viciada. Para evitar este vício procede-



se de acôrdo com o teorema seguinte:

T.4.4.1) Uma estimativa não viciada da variança da distribuição normal da média de uma amostra de variáveis normais é dada pela expressão:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} \quad (4.4.1)$$

A demonstração da validade desta expressão pode ser feita por um processo de cálculo que constitui o método da máxima verossimilhança:

Se de uma população normal de média  $m$  e desvio padrão desconhecido obteve-se uma amostra não viciada constituída pelos elementos  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  a probabilidade de ocorrência de um valor  $x_i$  será dada por

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}} dx_i$$

e a probabilidade da ocorrência simultânea dos  $n$  valores  $x_i$  será:

$$p(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}} dx_i$$

O método da máxima verossimilhança consiste em estimar os parâmetros  $m$  e  $\sigma$  de maneira que esta probabilidade seja um máximo. Para que isto aconteça é necessário que:

$$\frac{\partial p}{\partial m} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = 0$$

o que nos dá duas equações a duas incógnitas  $m$  e  $\sigma$ . Resolvendo-as, encontra-se, imediatamente:

$$m = \frac{\sum_1^n x_1}{n} = \bar{x} \quad (4.4.2)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^n (x_1 - m)^2}{n} \quad (4.4.3)$$

A melhor estimativa da média da população é, pois, pelo método da máxima verossimilhança, a média da amostra. A melhor estimativa de  $\sigma^2$  é, por outro lado, dada pela média quadrática dos afastamentos das medidas em relação à média da população. Como esta não é conhecida mas somente estimada, uma substituição direta de  $m$  por  $\bar{x}$  viciaria, como já apontamos, a estimativa de  $\sigma$ . Para contornar tal vício podemos escrever, idênticamente:

$$\sum_1^n (x_1 - m)^2 = \sum_1^n (x_1 - \bar{x})^2 + n \cdot (\bar{x} - m)^2$$

O segundo fator da última parcela é, pelo método da máxima verossimilhança (expressão 4.4.3, com  $n = 1$ ,  $x_1 = \bar{x}$ ), a melhor estimativa da variância da média das amostras e igual, segundo o teorema 4.3.5, a  $\sigma^2/n$ . Portanto:

$$n\sigma^2 = \sum_1^n (x_1 - \bar{x})^2 + \sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^n (x_1 - \bar{x})^2}{(n-1)} \quad (4.4.4)$$

A estimativa mais provável e não viciada da variância  $\sigma$  da população não é, pois, a variância da amostra mas sim a soma do quadrado dos afastamentos dos membros da amostra em relação à média da amostra dividida por  $n-1$ . Uma vez que a variância da média é igual à variância da população dividida por  $n$  chega-se assim, à expressão 4.4.1.

Incidentalmente as expressões 4.4.2 e 4.4.3 justificam a escolha da média da amostra como o valor mais representativo da grandeza medida e da variância da amostra como estimativa da variância da população. Eliminando-se o vício desta estimativa (expressão 4.4.4) chega-se à melhor e não viciada estimativa da variância da população.

Os resultados obtidos justificam o procedimento adotado nos parágrafos 1.2 e 1.6 para estimar o valor representativo de uma grandeza e a respectiva flutuação.

#### 4.5 - Níveis de Confiança

Feitas as estimativas da média e do desvio padrão da população normal de onde proveio a amostra obtida experimentalmente fica ainda em aberto um problema: que confiança se pode atribuir às estimativas assim feitas ?

Se o resultado experimental fôr expresso sob a forma  $\bar{x} \pm a$  o que se deseja é estabelecer a probabilidade de que a repetição do conjunto de medidas experimentais tenha uma média situada neste intervalo. É claro que se se aumenta o intervalo a confiança a ele

associada também cresce, mas o resultado experimental torna-se menos preciso pois aumenta a razão  $\frac{s}{\bar{x}}$ .

Denomina-se nível de confiança associado a um intervalo em torno da média a probabilidade de que a média de amostras obtidas nas mesmas condições que permitiram as avaliações de  $\bar{x}$  e de  $s$  esteja compreendida neste intervalo.

As relações 4.1.3, 4.1.4 e 4.1.5 permitem estabelecer imediatamente o seguinte teorema:

T.4.5.1) Os níveis de confiança associados aos intervalos  $\bar{x} \pm \sigma$ ,  $\bar{x} \pm 2\sigma$  e  $\bar{x} \pm 3\sigma$  calculados a partir de uma amostra grande de uma população normal são, respectivamente, 68,26%, 95,45% e 99,73%.

Este teorema justifica os resultados indicados no parágrafo 1.7. Os diferentes níveis de confiança tabelados neste parágrafo são obtidos de maneira idêntica aos calculados no teorema anterior, isto é, pela quadratura da função normal de probabilidades.

#### 4.6 - Estimativa a Partir de Pequenas Amostras

Na formulação do teorema anterior é explicitamente formulada a exigência de que a amostra considerada tenha grande número de membros. A restrição é óbvia uma vez que as relações probabilísticas utilizadas são válidas para a população normal de que só se aproximam amostras grandes. Experimentalmente, porém, as amostras de que se dispõe são, em geral, pequenas. É lícito esperar que às

estimativas da média e de desvio padrão feitas a partir de tais amostras esteja associado um nível de confiança menor que o pertinente às amostras grandes uma vez que a flutuação da média e do desvio padrão de pequenas amostras deve ser elevada.

No teorema seguinte damos a base teórica para a estimativa dos parâmetros de uma população normal a partir dos elementos de uma pequena amostra.

Seja  $x$  uma variável aleatória normal com média  $m$  e variância  $\sigma$ . Sejam  $\bar{x}$  e  $\sigma_x$  a média e a variância de uma amostra de  $n$  valores independentes de  $x$  e calculados de acordo com as expressões já conhecidas:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Definamos a variável aleatória  $t$  pela relação:

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\sigma_x} \sqrt{n-1} \quad (4.6.1)$$

T.4.6.1) Nas condições especificadas acima a densidade de probabilidade da variável  $t$ ,  $S(t)$ , é dada por:

$$S(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{n-1}} \quad (4.6.2)$$

Esta distribuição é denominada distribuição de Student.

Remetemos o leitor à bibliografia (B7, B16, B23) para a demonstração de (4.6.2).

A distribuição de Student aproxima-se da função normal de probabilidades quando  $n$  tende para infinito. É simétrica em relação ao eixo das probabilidades e sua média, mediana e moda são iguais a zero.

Pela definição de  $t$  o produto  $S(t)dt$  dá a probabilidade de que o afastamento da média de uma amostra de  $n$  membros em relação à média da população, medido em unidades iguais ao desvio padrão da média da amostra, esteja no intervalo  $(t, t+dt)$ . Se transformarmos (4.6.1) escrevendo-a sob a forma:

$$|\bar{x} - m| = t \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}$$

ou, utilizando (4.4.1):

$$|\bar{x} - m| = t \sigma_{\bar{x}}$$

fica evidente que o produto  $S(t)dt$  dá a probabilidade da média  $\bar{x}$  estar compreendida no intervalo  $(m - t \sigma_{\bar{x}}, m + t \sigma_{\bar{x}})$  ou, também, a probabilidade de que a média  $m$  da população seja interior ao inter

valo  $(\bar{x} - t \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}})$ . Esta probabilidade é, portanto, o nível de confiança associado ao intervalo  $\bar{x} \pm t \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ .

A distribuição de Student está tabelada (B9, B20) e alguns valores particulares desta tabela foram apresentados no parágrafo 1.8.

#### 4.7 - Estimativa da Diferença entre Médias pelo Teste t

O teste t pode ser utilizado em um grande número de problemas que envolvem estimativas a partir de pequenas amostras. Um dos mais frequentes é o seguinte: uma grandeza é medida  $n_1$  vezes e a experiência leva à média  $\bar{x}_1$  e desvio padrão  $\sigma_{x_1}$ ; uma segunda série de experiências leva à média  $\bar{x}_2$  e desvio padrão  $\sigma_{x_2}$ . Quer se saber se a diferença  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  é ou não significativa.

Admitindo a hipótese de que a flutuação das duas séries de medidas seja normal, com mesmo desvio padrão  $\sigma$ , e se  $n_1$  e  $n_2$  forem grandes o teorema 4.5.1 permite estabelecer as seguintes estimativas:

T.4.7.1) Se o valor absoluto da diferença  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  for, respectivamente maior que  $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ ,  $2\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$  e  $3\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ , onde

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\frac{n_1}{1} (x_{11} - \bar{x}_1)^2 + \frac{n_2}{1} (x_{21} - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \quad (4.7.1)$$

a probabilidade de que a diferença  $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$  seja devida apenas a flutuações ocasionais é, respectivamente, igual a 31,4%, 5,55% e 0,27% quando a amostra for grande.

O teorema é simplesmente uma reformulação de 4.5.1 onde  $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$  é estimativa do desvio padrão da diferença da média das duas amostras. Resta mostrar que esta é a melhor estimativa.

Seja  $m$  a média da população amostrada pelos  $x_{1i}$  e  $x_{2i}$  e  $\sigma$  o seu desvio padrão a probabilidade de se obter estes valores em uma amostragem não-viciada será:

$$\prod_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_{1i} - m)^2}{2\sigma^2}} dx_{1i} \prod_{i=1}^{n_2} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_{2i} - m)^2}{2\sigma^2}} dx_{2i}$$

Utilizando o método da máxima verossimilhança para estimar  $m$  e  $\sigma$  encontra-se, de maneira análoga à do parágrafo 4.4:

$$m = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2} \quad (4.7.2)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - m)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - m)^2}{n_1 + n_2} \quad (4.7.3)$$

Uma vez que não se conhece  $m$  mas somente sua estimativa dada por 4.7.2 a estimativa de  $\sigma$  dada por 4.7.3 é viciada. Para eliminar tal vício podemos escrever, idênticamente:



$$\sum_1^{n_1} (x_{1i} - m)^2 + \sum_1^{n_2} (x_{2i} - m)^2 = \sum_1^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + n_1 (\bar{x}_1 - m)^2 +$$

$$+ \sum_1^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 + n_2 (\bar{x}_2 - m)^2$$

Como em 4.4 as melhores estimativas de  $(\bar{x}_1 - m)^2$  e de  $(\bar{x}_2 - m)^2$  serão, respectivamente,  $\frac{\sigma^2}{n_1}$  e  $\frac{\sigma^2}{n_2}$  e obtém-se:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^{n_1} (x_{1i} - m)^2 + \sum_1^{n_2} (x_{2i} - m)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

e portanto:

$$\frac{\sigma^2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\sum_1^{n_1} (x_{1i} - m)^2 + \sum_1^{n_2} (x_{2i} - m)^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$$

conforme a expressão 4.7.1.

Na análise anterior as duas amostras foram supostas grandes. Se não o forem é necessário utilizar o teste t. Ter-se-á o seguinte:

T.4.7.2) Se a probabilidade de se obter um valor igual ou superior a t dado pela expressão:

$$t = \sqrt{\frac{(n_1 + n_2 - 2) n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\sum_1^{n_1} (\bar{x}_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_1^{n_2} (\bar{x}_{2i} - \bar{x}_2)^2}} \quad (4.7.2)$$

fôr P% a diferença  $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$  não é significativa dentro do nível de confiança de P%.

A variável t definida por (4.7.2) segue, como em (4.6.1), a distribuição de Student e, portanto, a probabilidade P% está tabelada. O denominador de (4.7.2) é a melhor estimativa não viciada do desvio padrão da diferença das médias.

O teorema anterior justifica o procedimento adotado em 1.12 para analisar a diferença entre duas médias.

#### 4.8 - Propagação de Erros

O teorema 4.3.4 permite estimar a média e a variância de uma variável ligada linearmente a diversas variáveis aleatórias normais. É frequente na análise de medidas indiretas o caso em que a relação analítica entre z e as variáveis x, y, ... não é linear mas da forma:

$$z = f(x, y, \dots) \quad (4.8.1)$$

e se quer estimar z e sua variância a partir das médias  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , ... e das variâncias  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ...

Se a função  $f(x, y, \dots)$  fôr desenvolvível em série de Taylor nas vizinhanças do ponto  $(x, y, \dots)$  ter-se-á, abandonando as parcelas que contenham potências de segundo grau:

$$z = f(\bar{x}, \bar{y}, \dots) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) (x - \bar{x}) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) (y - \bar{y}) + \dots \quad (4.8.2)$$

A expressão anterior indica, pois, que nas vizinhanças do

ponto médio ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , ...) a relação entre  $z$  e  $x$ ,  $y$ , ... é linear. O teorema 4.3.4 pode, pois ser aplicado e as estimativas de  $\bar{z}$  e  $\sigma_z$  serão:

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y}, \dots) \quad (4.8.3)$$

$$\sigma_z^2 = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y} \\ \dots}}^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\substack{x=\bar{x} \\ y=\bar{y} \\ \dots}}^2 \sigma_y^2 + \dots \quad (4.8.4)$$

É evidente que as estimativas anteriores só serão válidas se os desvios padrões de  $x$ ,  $y$ , ... forem de ordem de grandeza suficientemente pequena para justificar o abandono de potências de  $x$ ,  $y$ , ... superiores à primeira no desenvolvimento 4.8.2.

Dêste mesmo desenvolvimento, com as mesmas restrições, são deduzidas de maneira imediata as expressões 2.3.1 e 2.3.2.

#### 4.9 - Estimativas de Pêso de Medidas Diretas

Quando uma variável  $z$  é ligado a duas variáveis aleatórias  $x$  e  $y$  por uma relação da forma:

$$z = a_x x + a_y y$$

uma estimativa de  $z$  no caso em que as medidas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  têm diferentes precisões não pode ser feita por 4.3.4 pois neste teorema não se leva em conta o fato de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  terem diferentes pesos, isto é, merecerem diferentes confianças. Uma estimativa mais razoável de  $z$  será aquela em que a variável à qual estiver associada maior con

confiança tem maior influência. Coloca-se, pois, o problema de estimar qual o peso a atribuir a cada uma das variáveis  $x$  e  $y$ .

Uma vez que, para um mesmo nível de confiança, a representatividade das médias  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  varia inversamente com as variâncias  $\sigma_x^2$  e  $\sigma_y^2$  e estas variâncias variam inversamente com o número de determinações que levaram a  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  é razoável admitir como peso de  $\bar{x}$  e de  $\bar{y}$ , respectivamente, o número,  $n_x$ , de medidas que levaram à determinação de  $\bar{x}$  e o número de medidas,  $n_y$ , que levaram à determinação de  $\bar{y}$ . Daí decorrem, imediatamente, as expressões (2.4.1) e (2.4.2).

Outra ponderação, e evidente, é atribuir a cada média  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  um peso proporcional aos respectivos níveis de confiança. De onde se conclui as expressões 2.4.3 e 2.4.4.

\* \* \*

## CAPÍTULO V

AJUSTE DE DADOS E MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS5.1 - Introdução

A necessidade de representação analítica da dependência funcional entre duas ou mais grandezas físicas é um problema de medição indireta que, pela frequência com que aparece, tem importância relevante na análise dos resultados de uma experiência.

Formulado teoricamente a questão pode ser estabelecida da seguinte maneira: diversos valores  $z_i$  são medidos, experimental e simultaneamente, com os valores  $x_i, y_i, \dots$  das variáveis  $x, y, \dots$ . A relação fundamental que liga  $z$  a  $x, y, \dots$  é conhecida ou postulada e da forma  $z = f(x, y, \dots, a, b, \dots)$  onde  $a, b, \dots$  são parâmetros desconhecidos. Deseja-se estimar estes parâmetros de maneira que os valores de  $z$  dados pela expressão analítica mais se aproximem dos valores experimentais dentro de um nível de confiança determinado.

É evidente que sem elementos auxiliares o problema é insolúvel pois não fixa um conceito para julgar se uma determinada aproximação é melhor ou pior que outra. Portanto, é necessário admitir como hipótese básica de trabalho um critério de julgamento capaz de, por sua generalidade e flexibilidade de aplicação, ser utilizável na maioria dos casos de interesse prático.

Como no caso da análise estatística de uma medida direta a distribuição normal constituirá o elemento fundamental do ajustamento de dados. A escolha desta distribuição é justificada, fundamentalmente, pela facilidade analítica e operacional que dela decorre. O êxito de sua aplicação ao ajuste de dados de um grande número de experiências de natureza diversa constitui, por sua vez, uma justificativa "a posteriori" da sua adoção.

Não será demais acentuar que os resultados do ajuste com base na distribuição normal são resultados de natureza estritamente probabilística aos quais estará associado maior ou menor grau de confiança. Adotá-los como resultados que refletem uma plena certeza ou que tenham confiança maior que a resultante da análise estatística do problema é assumir posição injustificada e inaceitável pela própria essência do procedimento de ajuste de dados.

## 5.2 - Ajuste ou Interpolação Linear

O problema mais frequentemente encontrado no ajuste de dados é o da interpolação linear.

A variável  $y$  é ligada a uma variável  $x$  pela relação

$$y = ax + b \quad (5.2.1)$$

onde  $a$  e  $b$  são dois parâmetros desconhecidos. Experimentalmente são determinados  $n$  pares de valores  $y_i, x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Deseja-se determinar os valores de  $a$  e  $b$  na base das seguintes hipóteses:

Se  $y_1'$  é o valor da grandeza  $z$  dado pela relação (5.1.1) quando  $x = x_1$  e  $a$  e  $b$  são conhecidos as diferenças  $y_1 - y_1'$  se distribuem normalmente. A média desta distribuição é zero.

A primeira hipótese fixa a função densidade de probabilidade associada aos afastamentos entre os valores experimentais e os valores ajustados. A segunda hipótese é adotada para evitar que a reta de ajuste esteja sistematicamente mais próxima ou mais afastada dos pontos experimentais que lhe ficarem acima.

Aceita as duas hipóteses os valores de  $a$  e  $b$  podem ser determinados de maneira que a reta ajustada seja a melhor possível no sentido de que a ela estará associado o maior nível de confiança. Estes valores de  $a$  e  $b$  podem ser, facilmente, calculáveis pelo método da máxima verossimilhança.

Se a distribuição dos afastamentos  $y_1 - y_1'$  é normal, com média nula e desvio padrão  $\sigma$  a probabilidade de obtenção deste afastamento será dada por:

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_1 - y_1')^2}{2\sigma^2}} dy_1$$

A probabilidade simultânea dos  $n$  afastamentos  $y_1 - y_1'$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  será dada por:

$$P(y_1, y_2, \dots) dy_1 dy_2 \dots = \prod_1^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_1 - y_1')^2}{2\sigma^2}} dy_1$$

A melhor estimativa de  $a$  e  $b$  será aquela que torna máxima es

ta probabilidade. Uma vez que na expressão (5.2.2) existem três parâmetros desconhecidos ( $a$ ,  $b$ , e  $\sigma$ ) uma condição necessária de máximo será:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial b} = 0 \quad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = 0$$

A condição também é suficiente se o sistema (5.2.3) só tiver uma solução pois (5.2.2) é constantemente positiva, contínua e se aproxima assintoticamente de zero quando  $a$  ou  $b$  tendem para infinito e  $\sigma$  tende para zero.

O método mais fácil de resolver o sistema (5.2.3) é tomar o logaritmo de (5.2.2) e igualar a zero as derivadas parciais da expressão resultante em relação a  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$ .

Encontra-se, sem dificuldade:

$$\sum_{1}^{n} x_i z_i = a \sum_{1}^{n} x_i^2 + b \sum_{1}^{n} x_i$$

$$\sum_{1}^{n} y_i = a \sum_{1}^{n} x_i + b \sum_{1}^{n} 1 \quad (5.2.4)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{1}^{n} (y_i - y_i')^2}{n}$$



As duas primeiras equações, denominadas, respectivamente, equação normal de a e equação normal de b, determinam os valores de a e b que tornam máxima a probabilidade (5.2.2). A terceira equação permite estimar o valor do desvio padrão da população normal e dá, pois, uma estimativa do erro cometido na determinação da reta de ajuste.

Esta estimativa de  $\sigma$  é uma estimativa viciada pois é realizada utilizando os valores estimados de y (os  $y_1$ ) que são calculados a partir das estimativas de a e b. Para contornar tal vício procede-se de maneira análoga à adotada no parágrafo 4.7 e conclui-se que a melhor estimativa de  $\sigma^2$  é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_1^n (y_1 - y_1')^2}{n-2} \quad (5.2.5)$$

Substituindo o valor de  $\sigma$  dado pela expressão anterior na expressão da densidade de probabilidade (5.2.2) encontra-se:

$$P = \left( \prod_1^n \sqrt{\frac{n-2}{2\pi \sum (y_1 - y_1')^2}} \right) e^{-\frac{n-2}{2}}$$

O valor desta probabilidade será máximo quando  $\sum (y_1 - y_1')^2$  for um mínimo. Os valores de a e b determinados pelas equações normais de (5.2.4) são tais, portanto, que a soma do quadrado dos afastamentos entre os valores experimentais de y e os valores ajustados é um mínimo: poder-se-ia tomar como hipótese de trabalho esta conclusão e esta é a base do método de ajustagem denominado

dos mínimos quadrados. No caso presente o método da máxima verossimilhança e o dos mínimos quadrados levam ao mesmo resultado.

### 5.3 - Interpolação Não-Linear

O ajustamento efetuado no parágrafo anterior pode ser generalizado, sem maiores dificuldades, para funções que sejam lineares nos parâmetros desconhecidos mas não lineares na variável  $x$ , isto é, para funções da forma:

$$y = af_a(x) + bf_b(x) + \dots$$

O caso mais frequentemente encontrado é o do ajuste por meio de uma parábola de grau  $m$  em  $x$ :

$$y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots \quad (5.3.1)$$

Raciocínio análogo ao do parágrafo anterior leva às seguintes equações normais para estimar os parâmetros  $a_0, a_1, a_2, \dots$ :

$$\sum_{i=1}^n x_i^j y_i = a_0 \sum_{i=1}^n x_i^{m+j} + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m-1+j} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{m-2+j} + \dots$$

$$j = 0, 1 \dots m$$

Uma estimativa não viciada da variância da população será:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i')^2}{n - m - 1} \quad (5.3.3)$$

Deixamos ao leitor o cuidado de demonstrar (5.3.2) e (5.3.3).

#### 5.4 - Ajuste de Distribuições de Frequências. Teste $\chi^2$

Nos parágrafos anteriores analisamos a questão de um ajuste de dados por meio de uma função analítica arbitrária. Problema de natureza diversa é o que se coloca quando se deseja ajustar uma distribuição de frequências e que pode ser formulado teoricamente sob a forma:

A uma variável aleatória  $y$  está associada, hipoteticamente, uma função densidade de frequências  $f'(y)$ . Experimentalmente são observadas as frequências  $f(y_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Deseja-se testar estatisticamente se os afastamentos entre as frequências observadas  $f(y_i)$  e as frequências teóricas esperadas  $f'(y_i)$  decorrem apenas de flutuações ocasionais da amostra ou da falsidade da hipótese inicial que fixa a densidade de probabilidade dos  $y$ .

O teste mais geral para analisar a situação é o teste  $\chi^2$  proposto pela primeira vez por Pearson. Indicamos a seguir os teoremas fundamentais que levam à sua estruturação.

T.5.4.1 - Se as variáveis aleatórias independentes  $x_1$  se distribuem normalmente com média zero e variância igual a um variável aleatória

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

se distribui com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$k(x) = P(x < \chi^2 < x + dx) = 2^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (5.4.1)$$

Remetemos o leitor à bibliografia (B2, B7, B16) para a demonstração do teorema.

O parâmetro  $n$  da distribuição é denominado o grau de liberdade da distribuição de  $\chi^2$ .

Usualmente não é tabelada a função (5.4.1) mas as probabilidades dadas por uma das duas expressões:

$$P(\chi^2 \leq x) = \int_0^x k(t) dt \quad (5.4.2)$$

$$P(\chi^2 \geq x) = \int_x^{\infty} k(t) dt \quad (5.4.3)$$

A expressão (5.4.2) dá a probabilidade de  $\chi^2$  ter um valor igual ou inferior a  $x$ ; a segunda expressão é o complemento da primeira e dá a probabilidade de  $\chi^2$  ter um valor igual ou superior a  $x$ .

T.5.4.2 - Se a variável  $y$  se distribui normalmente a variável  $z$  definida por:

$$z_1 = \frac{f(y_1) - f'(y_1)}{\sqrt{f'(y_1)}} \quad (5.4.4)$$

onde  $y_1$  são determinações independentes e não - viciadas de  $y$  se distribui normalmente com média zero e variância um.

Remetemos, também, o leitor à bibliografia (B2, B7, B16) para a demonstração deste teorema.

T.5.4.3 - Se a variável  $y$  se distribui normalmente a variável  $\chi^2$  definida por:

$$\chi^2 = \sum_1^n z_1^2 = \sum_1^n \frac{(f(y_1) - f'(y_1))^2}{f'(y_1)} \quad (5.4.5)$$

onde os  $y_1$  são determinações independentes e não viciadas de  $y$  se distribui segundo (5.4.1) com  $n$  graus de liberdade.

Para demonstrar o teorema anterior basta associar T.5.4.1 e T.5.4.2.

O teorema 5.4.3 é aproximadamente válido quando a distribuição de probabilidades de  $y$  se aproxima da distribuição normal.

O cálculo do valor de  $\chi^2$  por meio de (5.4.5) para a amostra de uma população cuja distribuição de probabilidades é conhecida (ou postulada) e a utilização das probabilidades tabeladas segundo (5.4.2) ou (5.4.3) permite estabelecer se o valor encontrado para  $\chi^2$  é devido somente ao acaso ou decorre da admissão inválida da distribuição de probabilidades de  $y$ . Dispõe-se, assim, de um critério estatístico para julgar a aceitação ou rejeição da distribuição que se deseja testar.

No teorema 5.4.3 o número de graus de liberdade da distribuição de  $\chi^2$  foi dado pelo número de determinações independentes e não viciadas da variável aleatória  $y$ . A distribuição de frequências esperadas  $f'(y_1)$  era postulada independentemente dos valores observados de  $y$ . É comum, porém, o caso em que a distribuição de probabilidades esperadas é determinada através da fixação de seus parâmetros por meio dos valores observados da variável

aleatória. É o que acontece quando se estima a média e o desvio padrão de uma distribuição normal por meio das expressões 4.4.2 e 4.4.4. Nêstes casos o teorema 5.4.3 ainda é válido mas o número de graus de liberdade da distribuição de  $\chi^2$  é igual ao número de classes independentes observadas da variável  $y$  menos o número de parâmetros da distribuição esperada e que são calculados a partir da amostra dos  $y$ .

Exemplo 4.1 - Uma amostra de 1000 membros de uma variável aleatória contínua é obtida experimentalmente. A distribuição de frequências ( $f(y)$ ) é dada nas duas primeiras colunas do quadro abaixo. Deseja-se testar a hipótese de que a variável  $y$  se distribui normalmente em tórno da média zero, com desvio padrão igual a um.

No quadro abaixo está organizado um dispositivo para a estimativa de  $\chi^2$ . A coluna  $f'(y)$  foi obtida de uma tabela de função normal de probabilidade:

$y$	$f(y)$	$f'(y)$	$f(y) - f'(y)$	$(f(y) - f'(y))^2$	$\frac{(f(y) - f'(y))^2}{f'(y)}$
-4	0	0	-	-	-
-4,-3	10	13	-3	9	0,69
-3,-2	227	214	13	169	0,79
-2,-1	1261	1360	-99	9800	7,20
-1,0	3502	3413	89	8100	2,36
0,1	3450	3413	37	1360	0,39
1,2	1320	1360	-40	1600	1,17
2,3	225	214	11	121	0,56
3,4	5	13	-8	64	4,92
4	0	0	-	-	-

$$\chi^2 = 18,08$$

As duas últimas colunas foram calculadas por meio de régua de cálculo e os respectivos número têm, no máximo, três-algarismos significativos.

O valor encontrado para  $\chi^2$  é igual a 18 e o número de graus de liberdade é igual a 8, pois tantas são as classes em que a variável  $y$  foi tabelada e nenhum parâmetro da distribuição hipotética foi calculado a partir da distribuição observada. A probabilidade tabelada de se obter por acaso um valor de  $\chi^2$  igual ou superior a 18, para 8 graus de liberdade é da ordem de 2,5%. Dentro deste nível, portanto, a hipótese de que  $y$  se distribui normalmente com média zero e variância um é aceitável. Se se quiser trabalhar com nível de confiança mais elevado a hipótese não será aceitável.

Exemplo 4.2 - A distribuição de Poisson (ver exemplo 5.5 parágrafo 3.5) pode ser razoavelmente aproximada por uma distribuição normal quando sua média  $m$  não é muito pequena. O teste  $\chi^2$  poderá, então ser aplicado para julgar um ajuste de frequências de uma distribuição de Poisson. No quadro abaixo são dadas as frequências observadas experimentalmente do "back-ground" de um tubo contador Geiger-Muller. Deseja-se verificar se estas frequências têm uma distribuição de Poisson com média igual à média das frequências observadas. Neste caso, portanto, um parâmetro da distribuição esperada é calculado a partir da amostra o que diminui de uma unidade o número de graus de liberdade na distribuição de  $\chi^2$ . O dispositivo de cálculo é idêntico ao do exemplo anterior sendo a coluna de frequências esperadas ( $f'(y)$ ) calculada por meio da expressão analítica da distribuição de Poisson.

"Back-Ground" Impulsos/20 seg n	f(n)	f'(n)	$(f(n) - f'(n))^2$	$\frac{(f(n) - f'(n))^2}{f'(n)}$
5				
6				
7	4	2,97	1,05	0,354
8				
9	4	3,38	0,37	0,111
10	7	5,87	1,28	0,218
11	8	9,28	1,64	0,177
12	13	13,45	0,20	0,015
13	28	18,00	100,06	5,560
14	22	22,50	0,25	0,011
15	28	25,85	4,64	0,180
16	24	28,50	20,30	0,712
17	29	29,00	0,00	0,000
18	28	28,05	0,03	0,000
19	28	25,70	5,30	0,206
20	9	22,30	177,00	7,950
21	23	18,70	6,25	0,333
22	14	14,65	0,42	0,029
23	10	11,05	1,10	0,100
24	10	8,02	3,92	0,490
25	5	5,58	0,34	0,060
26				
27				
28	9	9,34	0,12	0,010
29				
30				
31				

$$\Sigma = 300$$

$$\Sigma = 16,16$$



As frequências correspondentes às atividades registradas 5, 6, 7 e 8 e 26, 27, 28, 29, 30 e 31 foram agrupadas pois é aconselhável trabalhar, para o teste  $\chi^2$  com classes cuja frequência seja no mínimo igual a 5. O número de graus de liberdade do valor de  $\chi^2$  estimado será 19-1 e para este valor de n a probabilidade de  $\chi^2$  ser igual ou exceder, por acaso, 16 é da ordem de 50%. Pode-se, concluir, portanto, com razoável grau de confiança que a distribuição de Poisson representa a flutuação do "back-ground" do tubo.

\* \* \*

#### BIBLIOGRAFIA

- B1 - Acton, F.S. - Analysis of Straight Line Data, N. York (1959).
- B2 - Aitken, A.C. - Statistical Mathematics, N. York (1942).
- B3 - Bennet, G.A., Franklin, N.L. - Statistical Analysis in Chemistry and the Chemical Industry, N. York (1954).
- B4 - Borel, E., Deltheil, R. - Probabilités, Erreus, Paris (1946).
- B5 - Born, M. - Natural Philosophy of Cause and Chance, Oxford (1949).
- B6 - Carnap, R. - Logical Foundations of Probability, Chicago (1950).
- B7 - Cramér, H. - Mathematical Methods of Statistics, Princeton (1946).
- B8 - Cramér, H. - The Elements of Probability Theory, N. York (1959).
- B9 - Crow, E.L., Davis, F.A., Maxfield, M.W. - Statistics Manual, N. York (1960).
- B10 - Grumpler, F.B., Yoe, J.H. - Chemical Computations and Errors, N. York (1940).
- B11 - Deming, W.E. - Statistical Adjustment of Data, N. York (1948).
- B12 - Dwight, H. B. - Mathematical Tables, N. York (1941).
- B13 - Fisher, R.A. - Statistical Methods for Research Workers, Edinburgh (1938)
- B14 - Fisher, R.A., Yates, F. - Statistical Tables, N. York (1953).
- B15 - Fisher, R.A. - The Mathematical Theory of Probabilities, N. York (1922).
- B16 - Fisz, M. - Wahrscheinlichkeitrechnung und Mathematische Statistik, Berlin (1958).
- B17 - Fraser, D.A.S. - Statistics: an Introduction, N. York (1958).
- B18 - Fry, T.C. - Probability and its Engineering Uses, N. York (1928).

- B19 - Guest, P.G. - Numerical Methods of Curve Fitting, Cambridge (1961).
- B20 - Hald, A. - Statistical Tables and Formulas, N. York (1960).
- B21 - Jakovlev, K.P. - Mathematische Auswertung von Messergebnissen, Berlin (1952).
- B22 - Laplace, P.S. - A Philosophical Essay on Probabilities, N. York (1952).
- B23 - Linnik, J.W. - Die Methode der Kleinsten Quadrate in Moderner Darstellung, Berlin (1961).
- B24 - Mises, R. von - Wahrscheinlichkeitsrechnung, N. York (1943).
- B25 - Reichenbach, H. - Wahrscheinlichkeitslehre, Leiden (1935).
- B26 - Sanden, H. von - Practical Mathematical Analysis, London (1923).
- B27 - Tippet, L.H.G. - Technological Applications of Statistics, N. York (1950).
- B28 - Whitehead, T.W. - The Design and use of Instruments and Accurate Mechanism, N. York (1954).
- B29 - Whittaker, E.T., Robinson, G. - The Calculus of Observations, London (1944).
- B30 - Willers, F.A. - Practical Analysis, N. York (1947).
- B31 - Worthing, A.G., Geffner, J. - Treatment of Experimental Data, N. York (1959).
- B32 - Yule, G.U., Kendall, M.G. - An Introduction to the Theory of Statistics, N. York (1950).

\* \* \*

# ÍNDICE

Página

## Capítulo 1

ESTIMATIVA DE MEDIDAS DIRETAS .....	3
1.1 - Valor Representativo; Nível de Confiança .....	3
1.2 - Média Aritmética .....	5
1.3 - Erros Ocasionais: Erros Sistemáticos .....	7
1.4 - Medidas de Dispersão: Semi-amplitude .....	9
1.5 - Medidas de Dispersão: Afastamento Absoluto Médio ....	11
1.6 - Medidas de Dispersão: Desvio Padrão .....	12
1.7 - Estimativa do Nível de Confiança em Grandes Amostras	15
1.8 - Estimativa do Nível de Confiança em Pequenas Amostras	17
1.9 - Níveis de Confiança Associados ao Desvio Padrão .....	19
1.10- Expressão do Resultado de uma Medida Experimental Di- reta .....	20
1.11- Estimativa Direta do Erro .....	21
1.12- Estimativa da Significância da Diferença de Médias ..	23
1.13- Estimativa Desvio Padrão a Partir da Amplitude da A- mostra .....	25

## Capítulo 2

ESTIMATIVAS DE MEDIDAS INDIRETAS E AJUSTE DE DADOS .....	27
2.1 - Estimativas de Medidas Indiretas Lineares .....	27
2.2 - Estimativa de Medidas Indiretas Não-Lineares .....	29
2.3 - Estimativa Simplificada do Erro Propagado .....	33
2.4 - Estimativa de Medidas Indiretas Utilizando Medidas Di- retas de Diferentes Precisoões .....	35
2.5 - Ajuste de Dados: Método dos Mínimos Quadrados .....	36
2.6 - Ajuste Não-Linear: Método dos Mínimos Quadrados .....	41

## Capítulo 3

PROBABILIDADES E DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES .....	44
3.1 - Introdução .....	44
3.2 - Distribuição de Frequências de Variáveis Discretas ..	45
3.3 - Distribuições de Probabilidades de Variáveis Contínuas	48
3.4 - Tabelas de Frequências, Histogramas e Curvas de Proba- bilidade .....	50
3.5 - Medidas de Tendência Central ou de Localização .....	53
3.6 - Medidas de Dispersão .....	59

Capítulo 4

DISTRIBUIÇÃO NORMAL. ESTIMATIVAS ESTATÍSTICAS .....	62
4.1 - Distribuição Normal ou de Gauss; Propriedades .....	62
4.2 - Função Característica: Propriedades .....	66
4.3 - Função Característica de uma Distribuição Normal .....	69
4.4 - Estimativas dos Parâmetros da População Normal a Partir dos Parâmetros da Amostra .....	72
4.5 - Níveis de Confiança .....	75
4.6 - Estimativa a Partir de Pequenas Amostras .....	76
4.7 - Estimativa da Diferença entre Médias pelo Teste t .....	79
4.8 - Propagação de Erros .....	82
4.9 - Estimativas de Peso de Medidas Diretas .....	83

Capítulo 5

AJUSTE DE DADOS E MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS

5.1 - Introdução .....	85
5.2 - Ajuste ou Interpolação Linear .....	86
5.3 - Interpolação Não-Linear .....	90
5.4 - Ajuste de Distribuições de Frequências. Teste $\chi^2$ .....	91