

MONOGRAFIAS DE FÍSICA

XI

ELETROMAGNETISMO II

Magnetostática no vácuo
Dielétricos e Materiais Magnéticos

por

~~DOAÇÃO~~ Jayme Tiomno

Notas Redigidas por Sarah Castro Barbosa de Andrade

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Wenceslau Braz, 71

RIO DE JANEIRO

1963

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
BIBLIOTECA

ÍNDICE

Pag.

Capítulo 9 -	<u>Campos magnéticos de correntes estacionárias</u>	1
	1. Corrente elétrica. 2. Ação de campos magnéticos sobre correntes. 3. Lei de Ampere. 4. Indução magnética de um fio retilíneo infinito, por onde passa corrente i . 5. Indução magnética sobre o eixo de rotação de uma espira circular, por onde passa corrente i . 6. Indução magnética de um solenoide cilíndrico, por onde passa corrente i . 7. Indução magnética de um condutor cilíndrico infinito, por onde passa corrente i . 8. Indução magnética de um plano infinito, por onde passa corrente superficial. 9. Indução magnética de uma espira circular, por onde passa corrente i , a grandes distâncias. Problemas.	
Capítulo 10 -	<u>Teorema de Ampere</u>	34
	1. Potencial magnético escalar. 2. Dipolo ou folheto magnético. 3. Propriedades de simetria do campo de indução magnética. 4. Teorema de Ampere. 5. Fio retilíneo infinito, por onde passa corrente i . 6. Condutor cilíndrico infinito, por onde passa corrente i . 7. Solenoide cilíndrico infinito, por onde passa corrente i . 8. Solenoide toroidal, por onde passa corrente i . 9. Plano infinito, por onde passa corrente superficial de densidade \vec{J}_s . Problemas.	
Capítulo 11 -	<u>Potencial vetor</u>	56
	1. Potencial vetor. 2. Fio retilíneo infinito, por onde passa corrente i . 3. Dipolo magnético. 4. Condutor cilíndrico infinito, por onde passa corrente i . 5. Esfera girante, com distribuição superficial de cargas \underline{u} niforme. Problemas.	
Capítulo 12 -	<u>Equações diferenciais da Magnetostática</u>	73
	1. 1ª equação diferencial. 2. 2ª equação diferencial. 3. Descontinuidade de \vec{B} numa distribuição superficial de correntes. 4. Equação diferencial do potencial vetor. Problemas.	

1. Polarização. 2. Campo elétrico de uma distribuição volumétrica de dipolos, no vácuo. 3. Vetor "deslocamento elétrico". Equações diferenciais. 4. Medida do campo elétrico total. 5. Teorema de Gauss generalizado. 6. Condições ao contorno. 7. Campo de uma carga puntiforme localizada no centro de uma camada esférica dielétrica. 8. Meios indefinidos. 9. Condensador plano. 10. Condensador plano com dois dielétricos. 11. Esfera dielétrica em campo uniforme. 12. Método das imagens elétricas. Problemas.

1. Energia de um sistema de cargas em presença de dielétricos. 2. Localização da energia no espaço. 3. Forças sobre condutores e dielétricos isolados (em função das cargas). 4. Forças entre condutores e dielétricos (em função dos potenciais). Problemas.

1. Magnetização. 2. Campo magnético de uma distribuição volumétrica de dipolos, no vácuo. 3. Vetor "campo magnético". Equações diferenciais. 4. Teorema de Ampere generalizado. 5. Condições ao contorno. 6. Meios indefinidos. 7. Campo de uma esfera uniformemente magnetizada. 8. Esfera de material magnético em campo uniforme. 9. Método das imagens. Problemas.

CAPÍTULO 9

CAMPOS MAGNÉTICOS DE CORRENTES ESTACIONÁRIAS

9 - 1. Corrente elétrica. Até aqui estudamos campos criados por cargas em repouso (Eletrostática); passaremos agora a analisar os fenômenos decorrentes do movimento de cargas elétricas, movimento este que se processa através de materiais condutores (metais) e semicondutores, eletrólitos, gases ionizados, dielétricos imperfeitos, etc. Nos metais o movimento é puramente eletrônico; já nos eletrólitos e nos gases ionizados, por exemplo, movem-se tanto os íons negativos quanto os positivos. Chama-se "corrente elétrica" a um fluxo de íons ou elétrons. Seu sentido convencional é o dos íons positivos (sentido do campo elétrico), mesmo através de condutores metálicos, embora se saiba que aí as cargas positivas localizadas nos átomos permanecem em movimento vibratório (agitação térmica) em torno de suas posições de equilíbrio, e que apenas os elétrons livres se movem através do metal, em sentido contrário ao sentido convencional da corrente.

Nos tipos de correntes aqui descritos, o que se verifica é um deslocamento de cargas elementares (elétrons e íons) através

dos materiais: estas são as correntes chamadas de condução. Quando porções macroscópicas de matéria, contendo carga elétrica, é que se deslocam, as correntes assim geradas chamam-se correntes de convecção. O disco de Rowland, que é um disco dielétrico carregado girando em torno de seu eixo, é um exemplo de corrente de convecção obtida pelo movimento de um corpo rígido. Outro exemplo do mesmo tipo é o da corrente obtida ao girar uma esfera, carregada superficialmente, em torno de um diâmetro, problema que será estudado no parágrafo 11 - 5.

Em qualquer caso, chama-se "intensidade de corrente elétrica" i , através de uma superfície, à quantidade de carga que atravessa, por segundo, essa superfície, indo da face positiva para a negativa, isto é:

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (9-1)$$

onde $q = q(t)$ é a carga total que atravessou a superfície durante o tempo t . A unidade de intensidade de corrente é o Ampère (v. parágrafo 1-1), que será definido oportunamente. Tem-se evidentemente de (9-1):

$$1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}.$$

No caso de condutores, a intensidade de corrente elétrica será a quantidade de carga que atravessa, por segundo, uma seção normal do condutor.

Em condições estacionárias, a carga elétrica que entra num volume qualquer, contido num condutor, é igual à carga que sai

dêste mesmo volume, de maneira a manter o condutor elétricamen-
te neutro no seu interior. Entretanto, cargas constantes pode-
 rão acumular-se na sua superfície, produzindo efeitos eletrostá-
 ticos perceptíveis.

Consideremos agora um meio condutor qualquer onde exista uma corrente elétrica, constituída de íons idênticos de carga Q , e seja N o número dêstes íons, por unidade de volume. Na reali-
 dade, o movimento dos íons é caótico, por efeito de suas colisões com as partículas do meio, mas existe um sentido preferencial de deslocamento: o sentido da corrente. Calculemos a intensidade de corrente elétrica que atravessa uma superfície elementar ds qualquer no interior do meio, e seja \vec{v} o valor da velocidade média de arrastamento das cargas através do meio, no ponto em que se situa o elemento ds (Fig. 9-1). Por simplicidade, admitiremos que todos os íons são positivos e têm essa velocidade \vec{v} . Du-

rante o tempo δt , cada carga se move de uma distância $\vec{v} \delta t$; se δq é a carga que atravessa a superfície ds durante o tempo δt , tem-se evidentemente:

$$\delta q = (NQ) (\vec{v} \cdot \vec{n} \delta t) ds;$$

isto é,

$$di = \frac{\delta q}{\delta t} = NQ \vec{v} \cdot \vec{ds}$$

(onde $\vec{ds} = \vec{n} ds$) é a intensidade de corrente que passa através

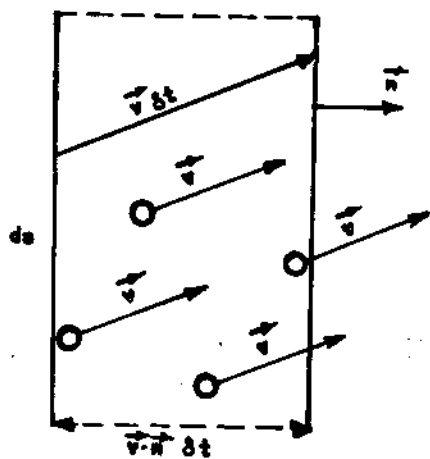


Fig. 9-1

do elemento \vec{ds} .

À função vetorial da ponto:

$$\vec{J} = NQ \vec{v} = \rho \vec{v}, \quad (9-2)$$

que tem dimensão de intensidade de corrente por unidade de área, chama-se densidade de corrente elétrica; ρ é obviamente a densidade espacial das cargas em movimento. Tem-se então:

$$di = \vec{J} \cdot \vec{ds},$$

e portanto a intensidade de corrente elétrica que passa através de uma superfície s qualquer, contida no meio, será:

$$i = \int_s \vec{J} \cdot \vec{ds}. \quad (9-3)$$

A densidade de corrente elétrica \vec{J} (quantidade de carga elétrica que atravessa, por segundo, por unidade de área, uma superfície normal à velocidade das cargas) e a densidade de carga ρ (quantidade de carga contida, em cada instante, na unidade de volume) não são grandezas independentes, sim relacionadas, em cada ponto, por uma equação. Para obtê-la, consideremos um volume v qualquer no meio, limitado por uma superfície fechada s (Fig. 9-2). Então a intensidade de corrente que sai do volume v será:

$$i = \oint_s \vec{J} \cdot \vec{ds} = \int_v \text{div } \vec{J} \, dv, \quad (9-4)$$

sendo a normal \vec{n} orientada para fora da superfície. Por outro

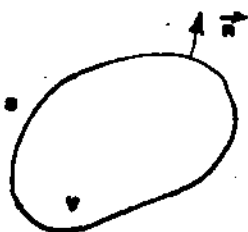


Fig. 9-2

lado, sabemos que i é a quantidade de carga transportada, por segundo, para fora do volume v , isto é, $-i$ é o aumento, por segundo, da carga q_v contida em v :

$$-i = \frac{dq_v}{dt} = \frac{d}{dt} \int_v \rho dv = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv, \quad (9-5)$$

onde a operação de derivada total $\frac{d}{dt}$ pôde ser comutada com a de integração porque o volume v é fixo, e transformou-se numa operação de derivada parcial porque ρ é função também de posição.

Identificando as expressões (9-4) e (9-5) teremos:

$$\int_v \left(\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0;$$

para que esta equação seja válida, qualquer que seja o volume v , é necessário que o integrando se anule, isto é, que:

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (9-6)$$

Esta é a equação procurada, conhecida por equação de continuidade, e significa que: "a quantidade de carga que entra, por unidade de volume, por segundo, no interior de um volume v (dada

por $-\text{div } \vec{J}$) é igual ao acréscimo de carga, por unidade de volume, por segundo, verificado em v (igual a $\frac{\partial \rho}{\partial t}$)". Ela exprime matematicamente o princípio da conservação da carga (carga elétrica não pode ser criada nem destruída).

Para que haja uma corrente elétrica de densidade \vec{J} num condutor, é necessário um campo elétrico \vec{E} que produza o movimento das cargas. Se no interior de um metal homogêneo, mantido a temperatura constante, atua um campo elétrico \vec{E} , então a densidade de corrente que flui através do metal é, em cada ponto, proporcional a \vec{E} :

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} . \quad (9-7)$$

Esta é a expressão diferencial da chamada lei de Ohm, inicialmente formulada e verificada experimentalmente em sua expressão integral:

$$\Delta V = R I , \quad (9-8)$$

onde ΔV é a diferença de potencial entre 2 pontos quaisquer do condutor linear e R a "resistência" do trecho de condutor compreendido entre os 2 pontos. Para um condutor cilíndrico, homogêneo, de comprimento l e área de seção transversal igual a s , R é dada por:

$$R = \frac{l}{\gamma s} , \quad (9-9)$$

onde a constante γ é a mesma que figura em (9-7), e se denomina "condutividade elétrica", característica do material. Ao inverso de γ se denomina "resistividade" do material. No caso

geral, γ não é constante, sim função de \vec{E} ; os materiais (metais, por exemplo) que obedecem à lei de Ohm, isto é, aqueles para os quais γ é constante, são chamados condutores "ohmicos".

A expressão diferencial (9-7) da lei de Ohm é uma consequência da lei de Ohm propriamente dita (9-8), tal como foi obtida a partir da experiência. De fato, considerando uma porção cilíndrica do condutor, com eixo na direção de \vec{E} , que é a mesma de \vec{J}

(Fig. 9-3), tem-se:

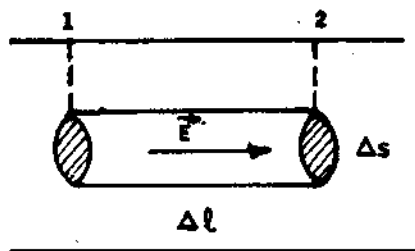


Fig. 9-3

$$V_1 - V_2 = \Delta V = E \Delta l ;$$

por outro lado, a intensidade da corrente que percorre o cilindro é:

$$\Delta i = J \Delta s ,$$

e assim, usando (9-8), vem:

$$E \Delta l = R \Delta i = \frac{\Delta l}{\gamma \Delta s} J \Delta s ,$$

o que demonstra (9-7).

No sistema M K S de unidades, resistência é medida em ohm. De (9-8) vemos que a resistência de um fio é igual a 1 ohm (1Ω) quando por êle passar uma corrente de 1 A, se entre suas extremidades houver uma diferença de potencial de 1V. De (9-9) vemos que condutividade se mede em $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ou $\text{mho} \cdot \text{m}^{-1}$, e seu inverso, a resistividade, em ohm. m.

Em condições estacionárias, a densidade local de carga $\rho(\vec{r})$

é constante no tempo, e portanto $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; pois se isso não ocorresse, haveria variação da distribuição de cargas, e conseqüentemente do campo elétrico \vec{E} , do que resultaria \vec{J} variável, e não estacionário. A equação (9-6) assume, então, a forma simplificada:

$$\text{div } \vec{J} = 0, \quad (9-10)$$

que é a equação de continuidade para correntes estacionárias. Ela significa que, para o campo \vec{J} , não há fontes nem sorvedouros, e portanto as linhas de corrente são fechadas, sendo sua configuração fixa no espaço e invariável no tempo. Podemos dizer, neste caso, que o campo vetorial \vec{J} é um campo estático. Um exemplo de corrente não estacionária (transiente), é o daquela que se obtém ao ligar, por um fio condutor, as placas de um condensador carregado: a placa positiva é uma fonte, a placa negativa um sorvedouro de corrente.

Se um condutor é atravessado por corrente estacionária, então o valor de i é constante ao longo do condutor. De fato, consideremos um volume Δv do condutor, limitado por sua super-

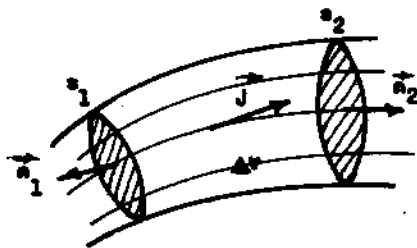


Fig. 9-4

perfície lateral e por duas superfícies transversais s_1 e s_2 (Fig. 9-4). Então, o fluxo de \vec{J} através de Δv será:

$$\oint_{\Delta s} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{J} \cdot \vec{n}_1 d s_1 + \int_{s_2} \vec{J} \cdot \vec{n}_2 d s_2 = -i_1 + i_2,$$

pois o fluxo de \vec{J} através da parede lateral do condutor é nulo; i_1 e i_2 são, respectivamente, as intensidades de corrente através de s_1 e s_2 . Por outro lado, o teorema de Gauss para divergência mostra que:

$$\oint_{\Delta s} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{\Delta v} \text{div } \vec{J} dv = 0 ,$$

pois vale aqui (9-10). Portanto $i_1 = i_2$.

9 - 2. Ação de campos magnéticos sobre correntes. Sabemos, do parágrafo 1-1, que se uma carga elétrica q move-se com velocidade \vec{v} numa região em que existe um campo magnético, sobre ela agirá uma força:

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} , \quad (9-11)$$

em que \vec{B} é o vetor indução magnética. É preciso observar aqui, análogamente ao que foi feito naquele parágrafo em relação ao campo elétrico, que a carga teste q deve ser suficientemente pequena para não alterar apreciavelmente o campo magnético existente. De fato, veremos no parágrafo seguinte que uma carga elétrica em movimento gera por sua vez um campo magnético, que interage com o campo magnético dado.

Seja agora um fio condutor, de pequena área de seção transversal, Δs , por onde passa corrente i , localizado numa região em que existe uma indução magnética \vec{B} (Fig. 9-5). Vamos calcular a força que atua sobre um elemento $d\vec{l}$ de corrente ($d\vec{l}$ toma

do no sentido da corrente). De acôrdo com (9-11) a fôrça será:

$$d \vec{F}_m = dq \vec{v} \wedge \vec{B},$$

onde dq é a carga total em movimento contida no elemento, e \vec{v} sua velocidade (por simplicidade admitimos que tôdas as partícu las têm a mesma velocidade). Ora:

$$dq \vec{v} = Nq \vec{v} dl \Delta s = (Nq v \Delta s) d\vec{l},$$

sendo N o número de partículas por unidade de volume, e podemos pôr:

$$N q v \Delta s = 1,$$

isto é:

$$d \vec{F}_m = 1 d\vec{l} \wedge \vec{B}. \quad (9-12)$$

A fôrça que atua sôbre o circuito completo (ou fechado) será:

$$\vec{F}_m = \oint_C 1 d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

Se a corrente é estacionária, i pode ser retirada do sinal de integração; se além disso \vec{B} é uniforme, tem-se:

$$\vec{F}_m = 1 \left(\oint_C d\vec{l} \right) \wedge \vec{B},$$

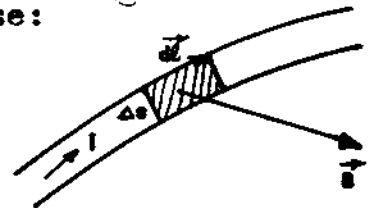


Fig. 9-5

e como a integral de $d\vec{l}$ ao longo de um circuito fechado é nula, não atuará fôrça alguma sôbre êle.

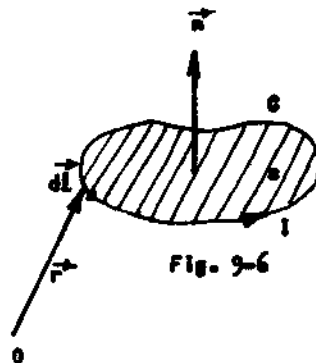
O momento que atua sobre o circuito completo é dado (Fig. 9-6) por:

$$\vec{L} = \oint_C \vec{r} \wedge d\vec{F}_m = \oint_C i \vec{r} \wedge (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) .$$

Se a corrente for estacionária e a indução magnética uniforme, teremos:

$$\vec{L} = i \vec{s} \wedge \vec{B} = \vec{m} \wedge \vec{B} , \quad (9-13)$$

em que o sentido de \vec{s} é fornecido pela regra do saca-rôlhas; \vec{m} é o chamado momento magnético do circuito.



9 - 3. Lei de Ampère. A experiência de Oersted (v. Introdução) evidenciou o fato de que uma corrente elétrica gera um campo magnético; também experimentalmente foi possível determinar o valor da indução magnética gerada por correntes estacionárias, resultado que é expresso pela lei de Ampère (muitas vezes referida na literatura como lei de Biot-Savart). Chama-se Magnetostática ao estudo dos campos magnéticos criados por correntes est

tacionárias. Uma carga isolada em movimento não constitui corrente estacionária; mas se esta carga faz parte de uma corrente estacionária, então a indução magnética \vec{B} , criada por ela em um ponto P qualquer, é determinada pela equação:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (9-14)$$

onde μ_0 é uma constante, \vec{v} é a velocidade da carga, \vec{r} é o vetor posição do ponto P em que se está calculando a indução, e \vec{r}' o raio vetor da posição da carga, em relação a uma origem O qualquer (Fig. 9-7). O fator $\frac{\mu_0}{4\pi}$ desempenha aqui o mesmo papel que

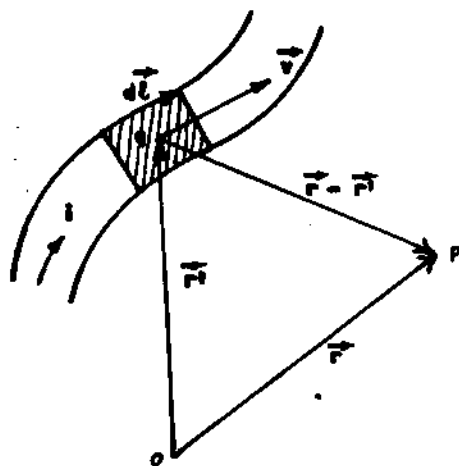


Fig. 9-7

o fator $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ em Eletrostática, isto é, é a constante requerida para expressar a lei experimental de maneira compatível com o sistema de unidades usado, e vale,

no sistema M K S:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}.$$

A contribuição para a indução magnética devida a um elemento de corrente $i \vec{dl}$ será:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (9-15)$$

e a indução magnética total produzida por um circuito C (sendo I constante):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (9-16)$$

Tanto (9-14) quanto (9-15) exprimem a lei de Ampère.

Se a corrente não for linear, mas se se distribuir com densidade \vec{J} por um condutor de seção transversal finita, então da Fig. 9-8 vemos que:

$$d\vec{\ell} d\vec{v}' = J ds d\vec{\ell} = \vec{J} ds d\vec{\ell} = \vec{J} dv', \quad (9-17)$$

e teremos para a indução magnética:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv', \quad (9-18)$$

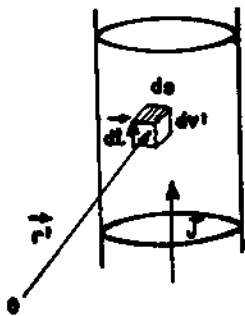


Fig. 9-8

onde \vec{r}' é o raio vetor do elemento de integração dv' .

Se a corrente for superficial, com densidade J_s tal que (Fig. 9-9):

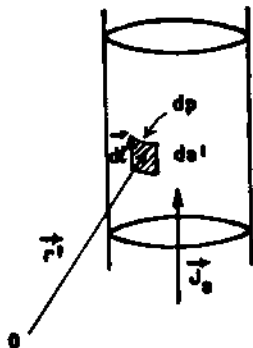
$$J_s = \frac{dI}{dp},$$

então:

$$d\vec{\ell} d\vec{v}' = J_s dp d\vec{\ell} = \vec{J}_s dp d\vec{\ell} = \vec{J}_s ds', \quad (9-19)$$

e teremos para a indução magnética:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\vec{J}_s(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds', \quad (9-20)$$



onde \vec{r}' é o raio vetor do elemento de integração ds' . Observemos que, do mesmo modo que em (9-2), obtemos para \vec{J}_s :

$$\vec{J}_s = \sigma \vec{v}, \quad (9-21)$$

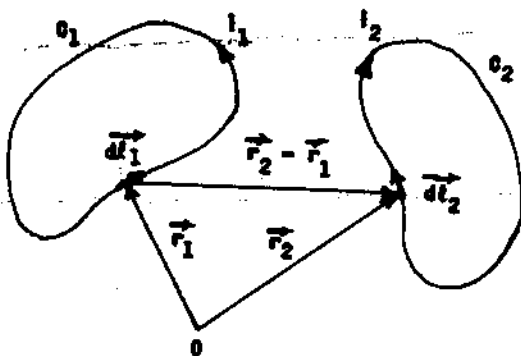
onde σ é a densidade superficial das cargas em movimento, e \vec{v} sua velocidade.

Para medir a interação de 2 circuitos conduzindo correntes i_1 e i_2 , respectivamente, devemos usar as equações (9-12) e (9-16), simultaneamente. Sejam $i_1 d\vec{l}_1$ e $i_2 d\vec{l}_2$ dois elementos de corrente tomados em cada um dos circuitos (Fig. 9-10). Que-

remos calcular a força $d\vec{F}_2$ que atua em $d\vec{l}_2$ por efeito do 1º circuito. É claro, de (9-12), que

$$d\vec{F}_2 = i_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1(\vec{r}_2),$$

onde $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ é o valor, na posição \vec{r}_2 , do campo magnético criado pelo 1º circuito. Por outro lado, de (9-16) vem:



$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3},$$

e portanto a força total que atua no 2º circuito será:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \wedge [d\vec{l}_1 \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad (9-22)$$

que dá a expressão procurada. Evidentemente, a força que age no 1º circuito, devida ao 2º, será:

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \wedge [d\vec{l}_2 \wedge (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

Aparentemente, pela falta de simetria do problema, a interação desses circuitos viola a 3ª lei de Newton da ação e reação; entretanto, usando teoremas de análise vetorial, mostra-se que a lei aqui se verifica, isto é, que:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

De fato, temos:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \left[\oint_{C_1} d\vec{l}_1 \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right] = 0,$$

pois cada um dos termos entre colchetes se anula, por ser nula a circulação de um gradiente:

$$\oint_{C_2} \vec{dl}_2 \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \oint_{C_2} \vec{dl}_2 \cdot \vec{\nabla}_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = 0 .$$

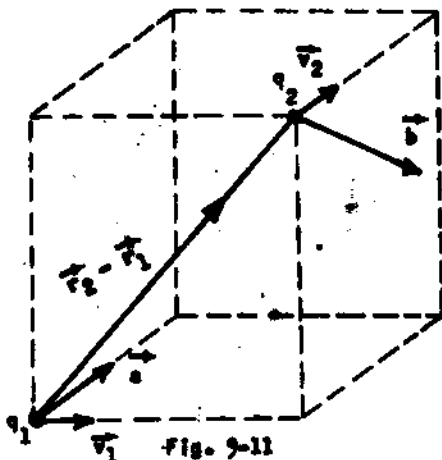
Já na expressão da interação de duas cargas q_1 e q_2 em movimento, resultante de (9-14), a 3ª lei de Newton não é válida. De fato, as forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 que atuam sobre q_1 e q_2 são diferentes:

$$\vec{F}_1(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \vec{v}_1(t) \wedge \frac{[\vec{v}_2(t) \wedge (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} ,$$

$$\vec{F}_2(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \vec{v}_2(t) \wedge \frac{[\vec{v}_1(t) \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} ,$$

isto é, $\vec{F}_1 \neq \vec{F}_2$.

A Fig. 9-11 dá o exemplo de uma situação simples em que uma dessas forças é nula e a outra não: \vec{v}_2 é perpendicular ao plano de \vec{v}_1 e $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, e o paralelepípedo está traçado para que as di



reções no espaço sejam visualizadas melhor; vê-se então que:

$$\vec{F}_1 = \vec{v}_1 \wedge \vec{b} ,$$

$$\vec{F}_2 = \vec{v}_2 \wedge \vec{a} = 0 .$$

A solução deste aparente parado-

xo está em que (9-14) só é verdadeira quando a carga q faz parte de uma corrente estacionária, ou melhor, (9-14) não é realmente correta, mas representa a parte do campo, produzido por q , que não se cancela quando somada às contribuições das demais cargas da corrente estacionária.

Veremos mais tarde que quando só existem duas cargas q_1 e q_2 em movimento, as ações não são instantâneas, mas retardadas, isto é, o campo \vec{B}_2 que atua sobre q_1 no instante t foi produzido por q_2 algum tempo antes, e propagou-se com velocidade finita. O princípio de ação e reação reaparece quando se considera a interação entre cada carga e o campo \vec{B} , e não diretamente entre as duas cargas.

A lei de força (9-22) permite definir o ampère como sendo a unidade de corrente que torna essa equação válida, quando a força é medida em newton e as distâncias em metro, sendo $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$. Escolhidos dois circuitos tais que a integral dupla (adimensional) que nela aparece tenha o valor igual a 1, sendo êles percorridos por correntes iguais, elas serão de 1 ampère, se a força entre os circuitos for de 10^{-7} N.

Calculemos, agora, as induções magnéticas criadas por diferentes tipos de correntes estacionárias.

9 - 4. Indução magnética de um fio retilíneo infinito, por onde passa corrente i . Fica evidentemente subentendido que êsse fio pertence a um circuito fechado, e é retilíneo no trecho conside-

rado, tendo aí comprimento bastante grande em comparação com a distância ao ponto P em que se quer medir o campo magnético (Fig. 9-12). Consideremos sôbre o fio retílineo um elemento de corrente

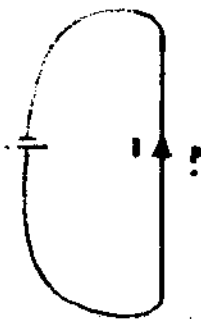


Fig. 9-12

te $i d\vec{l}$, e calculemos sua contribuição para a indução magnética no ponto P (Fig. 9-13). De (9-16) vem:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_{\text{fio}} \frac{d\vec{l}' \wedge (\vec{a} - \vec{r}')}{|\vec{a} - \vec{r}'|^3}$$

Tomando o eixo dos z sôbre o fio e o ponto P sôbre o eixo dos y, a distância do elemento de corrente à origem será z, e a integração se fará sôbre o fio, desde $-\infty$ até $+\infty$. Do produto

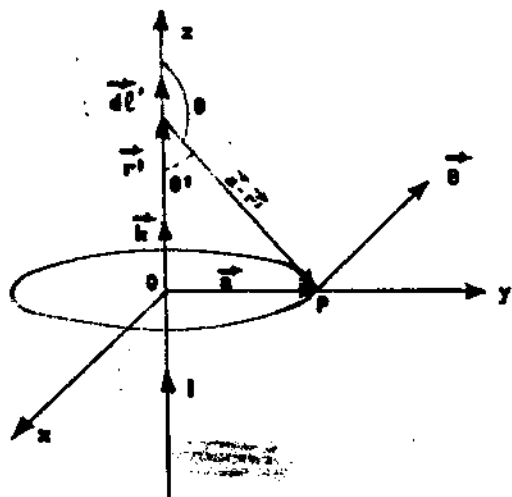


Fig. 9-13

vetorial concluímos, também, que a contribuição para a indução magnética, de cada elemento de corrente, terá sempre o mesmo sentido (o posto ao do eixo dos x), e a integração poderá ser feita escalarmente:

$$B = -B_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz \operatorname{sen} \theta}{z^2 + a^2}$$

Tomando θ como variável de integração:

$$z = \frac{a}{\operatorname{tg} \theta} = - \frac{a}{\operatorname{tg} \theta} \quad \therefore dz = \frac{a \sec^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta} d\theta$$

$$z^2 + a^2 = a^2 \frac{\sec^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta}$$

Substituindo êsses resultados na expressão de B_z virá:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi a},$$

isto é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}}{a}$$

S.I. CGS.

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{c}$$

(9-23)

As linhas de \vec{B} são, evidentemente, círculos contidos em planos normais ao fio, com centros sôbre êle, orientados, em relação ao sentido da corrente, de acôrdo com a regra do saca-rôlhas (Fig. 9-14).

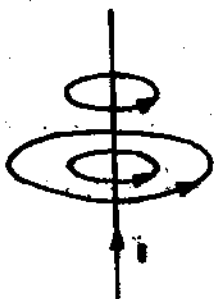


Fig. 9-14

9 - 5. Indução magnética sôbre o eixo de rotação de uma espira circular, por onde passa corrente i . O cálculo da indução, em um ponto qualquer do espaço, é complicado; mas torna-se simples quando o ponto em que se calcula a indução é um ponto do eixo da

espira; seja P este ponto, e tomemos a origem do nosso sistema de coordenadas no centro da espira

(Fig. 9-15). A contribuição para a indução, devida ao elemento $id\vec{r}'_1$, será:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{r}'_1 \wedge (\vec{z} - \vec{r}'_1)}{|\vec{z} - \vec{r}'_1|^3}.$$

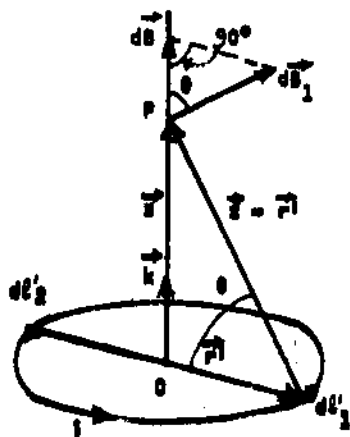


Fig. 9-15

O elemento $d\vec{r}'_2$, simétrico a $d\vec{r}'_1$ em relação a O , dará uma contribuição $d\vec{B}_2$, de mesmo módulo que $d\vec{B}_1$, e formando com o eixo da espira o mesmo ângulo θ que $d\vec{B}_1$, estando os 2 vetores e o eixo da espira sôbre

um mesmo plano. Assim, as componentes de $d\vec{B}_1$ e $d\vec{B}_2$ normais ao eixo se cancelam, e as componentes paralelas ao eixo são iguais a $dB_1 \cos \theta$, e se somam. Como a cada elemento considerado corresponde um simétrico em relação a O , vemos que a indução resultante terá a direção do eixo da espira, e seu sentido será dado pela regra do saca-rôlhas, em relação ao sentido com que a corrente percorre a espira. A indução magnética total poderá ser calculada escalarmente:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0 \frac{dl'}{s^2 + R^2} \cos \theta =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{z^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \oint_C dl',$$

pois \vec{dl}' é normal a $\vec{z} - \vec{r}'$. A integral de dl' ao longo da espira é igual a $2\pi R$, e teremos para a indução de uma espira num ponto qualquer do seu eixo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{k}. \quad (9-24)$$

9-6. Indução magnética de um solenóide cilíndrico, por onde passa corrente i . Chama-se "solenóide" cilíndrico a um conjunto de ~~de~~ espiras circulares paralelas, formando um cilindro reto de raio R o comprimento L . Na prática, uma bobina helicoidal pode ser assimilada a um solenóide.

Vamos calcular a indução magnética em um ponto P qualquer do eixo do solenóide (Fig. 9-16).

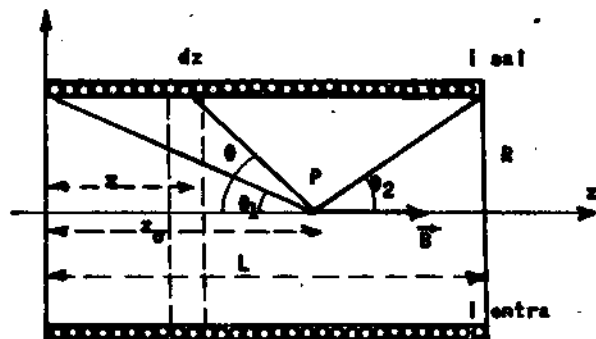


Fig. 9-16

A contribuição para a indução em P , devida ao elemento dz , que contém $\frac{N dz}{L}$ espiras, será dada, em virtude de (9-24), por:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{N dz}{L} \frac{R^2}{[(z_0 - z)^2 + R^2]^{3/2}}$$

A indução total será calculada integrando em z de 0 até L , ou em θ de θ_1 a $\pi - \theta_2$; pelas substituições:

$$z_0 - z = R \cotg \theta \quad \therefore dz = R \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta ,$$

$$(z_0 - z)^2 + R^2 = R^2 \operatorname{cosec}^2 \theta ,$$

virá:

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2L} \int_{\theta_1}^{\pi - \theta_2} \frac{R^3 \operatorname{cosec}^2 \theta}{R^3 \operatorname{cosec}^3 \theta} d\theta ,$$

isto é,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{L} \cdot \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{2} \vec{k}$$

é o valor da indução magnética num ponto qualquer do eixo do solenóide. A Fig. 9-17 dá a configuração das linhas de força do

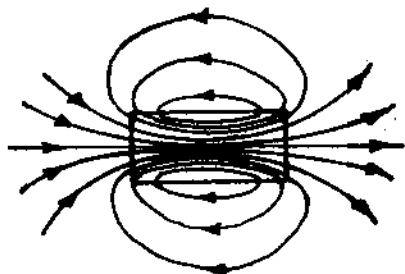


Fig. 9-17

campo criado pelo solenóide. Externamente o campo é fraco, e é bastante intenso no seu interior. Se o solenóide tem comprimento grande em relação ao seu raio, então poderemos tomar como nulos os ângulos θ_1 e θ_2 , para pontos do eixo bastante afastados das bordas, e teremos

que nelas o valor da indução será aproximadamente:

$$B = \frac{\mu_0 N i}{L} = \mu_0 n i. \quad (9-25)$$

Ainda neste limite, a indução no interior do solenóide será praticamente uniforme, com valor dado por (9-25), e será praticamente nula no seu exterior.

9-7. Indução magnética de um condutor cilíndrico infinito, por onde passa corrente i . Valem aqui as mesmas observações iniciais do parágrafo 9-4. Seja R o raio do condutor cilíndrico e $\vec{J} = J \vec{k}$ a densidade de corrente. Sendo a corrente produzida por diferença de potencial entre os extremos do condutor, do que resulta um campo elétrico \vec{E} uniforme, tem densidade constante em todo o cilindro:

$$J = \text{constante} = \frac{i}{\pi R^2}.$$

Vê-se, então, da Fig. (9-18) que a indução magnética criada em um ponto P qualquer do espaço, dada por (9-18), valerá:

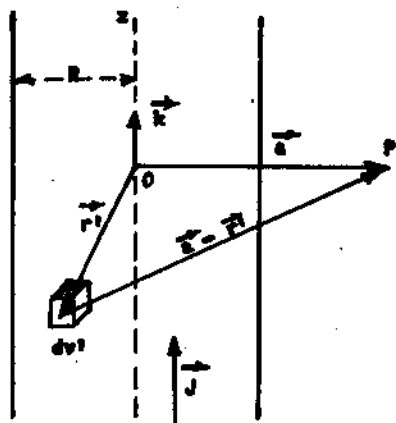


Fig. 9-18

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \vec{k} \wedge \int_V \frac{\vec{a} - \vec{r}'}{|\vec{a} - \vec{r}'|^3} dv'. \quad (9-26)$$

Esta integral poderá ser calculada utilizando resultados já conhecidos em Eletrostática. Assim, no cálculo do campo elétrico criado

por uma distribuição uniforme, cilíndrica e infinita de carga elétrica, teríamos:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{a} - \vec{r}'}{|\vec{a} - \vec{r}'|^3} dv' ,$$

e aqui aparece a mesma integral que em (9-26). Ora, o campo elétrico neste caso já foi calculado (ou então poderá ser facilmente calculado pelo teorema de Gauss), e é dado, para pontos externos, por:

$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 a^2} \vec{a} , \quad a > R .$$

Identificando as duas expressões encontradas para \vec{E} , teremos:

$$\int_V \frac{\vec{a} - \vec{r}'}{|\vec{a} - \vec{r}'|^3} dv' = \frac{2\pi R^2}{a^2} \vec{a} , \quad a > R .$$

Levando este resultado em (9-26), vem:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \vec{k} \wedge \frac{2\pi R^2}{a^2} \vec{a} ;$$

mas como $\pi R^2 J = i$, teremos finalmente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}}{a} , \quad a > R , \quad (9-27)$$

resultado que coincide com (9-23), o que significa que a indução criada por um condutor cilíndrico conduzindo corrente de densidade

de uniforme, num ponto externo ao condutor, é a mesma que se t \hat{o} da a corrente estivesse concentrada no eixo do cilindro.

Seja agora P um ponto interno ao condutor. Ent \tilde{a} o, no problema an \tilde{a} logo da Eletrost \tilde{a} tica, o campo el \tilde{e} trico em P (pelo teo-ema de Gauss) seria:

$$E \cdot 2\pi a = \frac{\rho}{\epsilon_0} \pi a^2,$$

isto \hat{e} :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{a}, \quad a < R.$$

Identificando \hat{e} ste valor com a express \tilde{a} o a integrar do campo el \tilde{e} trico, obtemos o valor da integral procurada:

$$\int_V \frac{\vec{a} - \vec{r}'}{|\vec{a} - \vec{r}'|^3} dv' = 2\pi \vec{a}, \quad a < R.$$

Levando \hat{e} ste resultado em (9-26) obtemos:

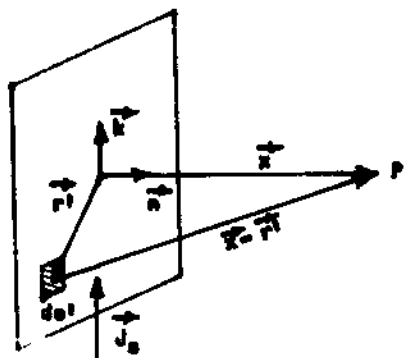
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \vec{k} \wedge 2\pi \vec{a},$$

ou ainda:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J a}{2} \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}}{a}, \quad a < R. \quad (9-28)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R^2} \vec{k} \times \frac{\vec{a}}{a}$$

9-8. Indução magnética de um plano infinito, por onde passa corrente superficial. Valem ainda aqui as mesmas observações iniciais do parágrafo 9-4. Seja \vec{J}_s a densidade superficial de corrente (constante) no plano condutor (Fig. 9-19). Vemos então que a



indução magnética criada em um ponto P qualquer do espaço, dada por (9-20), valerá:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} J_s \vec{k} \int_s \frac{\vec{x} - \vec{r}'}{|\vec{x} - \vec{r}'|^3} ds' . \quad (9-29)$$

Fig. 9-19

No problema análogo da Eletrostática (campo criado em P por uma distribuição plana, infinita e uniforme de cargas) teríamos:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\vec{x} - \vec{r}'}{|\vec{x} - \vec{r}'|^3} ds' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} ,$$

em virtude de (2-18), obtida facilmente com o auxílio do teorema de Gauss. Teremos assim para o valor da integral procurada:

$$\int_s \frac{\vec{x} - \vec{r}'}{|\vec{x} - \vec{r}'|^3} ds' = 2\pi \vec{n} .$$

Levando este resultado em (9-29), virá:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_s}{4\pi} \vec{k} \wedge 2\pi \vec{n},$$

ou ainda:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{k} \wedge \vec{n}, \quad (9-30)$$

isto é, o vetor indução magnética é constante em todo o espaço e paralelo ao plano condutor (Fig. 9-20).

Observação: Se compararmos as expressões (2-15), (2-28) e (2-18)

com as expressões (9-23), (9-28) e (9-30) respectivamente, as quais correspondem a problemas de Ele trostática e Magnetostática a-presentando uma analogia geométrica completa (isto é, tal que: $\vec{J} = \rho \vec{k}$, $\vec{J}_s = \sigma \vec{k}$, etc.), verificamos que os valores da indução magnética podem ser obtidos dos correspondentes do campo elétrico pela equação:

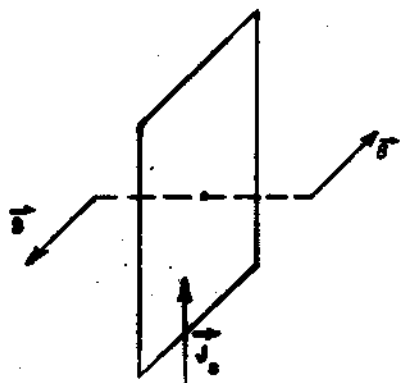


Fig. 9-20

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{k} \wedge \vec{E}, \quad (9-31)$$

onde \vec{k} é o vetor unitário da direção (constante) da corrente elétrica. A equação (9-31) exprime um teorema geral que liga a indução magnética de uma distribuição de correntes $\vec{J} = J \vec{k}$ (\vec{k} constante) ao campo elétrico de uma distribuição de cargas ρ , quando $J(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$.

9 - 9. Indução magnética de uma espira circular, por onde passa corrente i , a grandes distâncias. Tomemos a origem do sistema de referência no centro da espira, e o plano xy no plano dela (Fig. 9-21). Podemos, sem perda de generalidade, fazer passar por P (ponto em que iremos calcular a indução) um dos

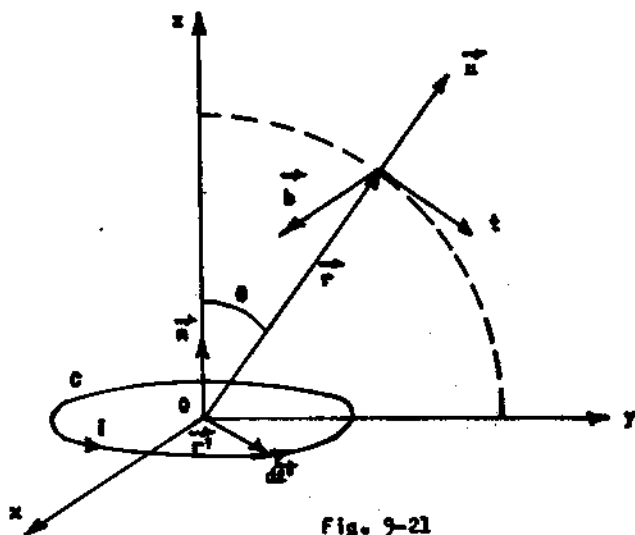


Fig. 9-21

outros planos coordenados, seja yz . Então a indução magnética criada em P pelo elemento de corrente $i dl'$ será (sendo $d\vec{l}' = d\vec{r}'$ e $|\vec{r}'| = R$):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

(9-32)

e a indução total será a integral de $d\vec{B}$ ao longo da espira. Vamos calcular o valor de \vec{B} em um ponto P , situado a uma distância bastante grande em comparação com o raio da espira; então, do desenvolvimento em série da função $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$, terão valor apreciável apenas os dois primeiros termos, porque os outros serão proporcionais a $\left(\frac{R}{r}\right)^2$, $\left(\frac{R}{r}\right)^3$ etc., e $\frac{R}{r} \ll 1$. Isto é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &\approx \frac{1}{r^3} - \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^5} \cdot \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)_{\vec{r}'=0} = \\ &= \frac{1}{r^3} + \frac{3 \vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^5}, \quad r \gg R. \end{aligned}$$

Levando êste resultado em (9-32) e integrando sôbre a espira, vê-se:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[\oint_C \frac{d\vec{r}' \wedge \vec{r}}{r^3} + \oint_C \frac{d\vec{r}' \wedge \vec{r}}{r^5} \int \vec{r}' \cdot \vec{r} - \oint_C \frac{d\vec{r}' \wedge \vec{r}'}{r^3} - \oint_C \frac{d\vec{r}' \wedge \vec{r}'}{r^5} \int \vec{r}' \cdot \vec{r} \right].$$

O 4º termo é desprezível em face dos outros, por ser proporcional a $\left(\frac{R}{r}\right)^2$; o 1º termo é nulo, pois, sendo \vec{r} constante,

$$\oint_C \frac{d\vec{r}' \wedge \vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^3} \vec{r} \wedge \oint_C d\vec{r}',$$

e a integral de $d\vec{r}'$ ao longo de um circuito fechado é nula; o 3º termo dá:

$$-\oint_C \frac{d\vec{r}' \wedge \vec{r}'}{r^3} = \frac{1}{r^3} \oint_C \vec{r}' \wedge d\vec{r}' = \frac{1}{r^3} \oint_C R d\ell' \vec{n} = \frac{R \vec{n}}{r^3} \oint_C d\ell' = \frac{2\pi R^2 \vec{n}}{r^3}.$$

Teremos então para \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{r^3} + \frac{3\mu_0 i}{4\pi r^5} \oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' \wedge \vec{r},$$

onde $\vec{m} = i\pi R^2 \vec{n} = i s \vec{n}$ (sendo s a área da espira) é o momento magnético do circuito (ver parágrafo 9-2).

Calculemos agora a integral:

$$\oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') (\overline{d\ell} \wedge \vec{r}) = - \vec{r} \wedge \oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') \overline{d\ell}' ;$$

como $z' = 0$ sobre o contorno C , tem-se:

$$\oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') \overline{d\ell}' = \oint_C (xx' + yy') \overline{d\ell}' .$$

Ora, $\overline{d\ell}' = \overline{dr}'$ tem componentes $(dx', dy', 0)$, e portanto a componente x da última integral será:

$$\oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') dx' = x \oint_C x' dx' + y \oint_C y' dx' .$$

Porém:

$$\oint_C x' dx' = \frac{1}{2} \oint_C d(x'^2) = 0 ,$$

$$\oint_C y' dx' = \int_s (-ds) = -\pi R^2$$

(ver Fig. 9-22), e portanto:

$$\oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') dx' = -\pi R^2 y .$$

Analogamente:

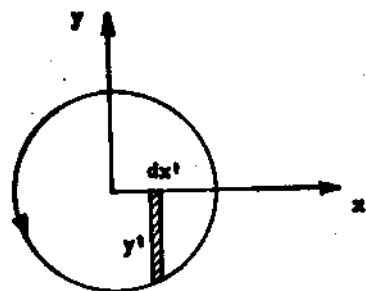


Fig. 9-22. Observe que a área achurada é $ds = -y' dx'$, pois y' é negativo.

$$\oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') dy' = \pi R^2 x,$$

$$\oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') dz' = 0,$$

e portanto:

$$\oint_C (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{l} = \pi R^2 \vec{n} \wedge \vec{r}.$$

Finalmente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[2 \frac{\vec{m}}{r^3} - 3 \frac{\vec{r} \wedge (\vec{m} \wedge \vec{r})}{r^5} \right], \text{ ou:}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[3 \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]. \quad (9-33)$$

Poderíamos ter calculado diretamente as componentes de \vec{B} em coordenadas polares, obtendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}, \\ B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}, \\ B_\varphi = 0, \end{array} \right. \quad (9-34)$$

onde $B_r = \vec{B} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$, $B_\theta = \vec{B} \cdot \vec{t}$ e $B_\varphi = \vec{B} \cdot \vec{b}$, sendo \vec{t} e \vec{b} os vetores unitários indicados na Fig. 9-21. As expressões (9-34) coincidem com (9-33).

Finalmente observemos que a expressão (9-33) de \vec{B} coincide formalmente com a expressão (2-14) do campo elétrico de um dipolo elétrico, feita a correspondência:

$$\vec{m} \longleftrightarrow \vec{p}, \quad \frac{1}{\epsilon_0} \longleftrightarrow \mu_0.$$

Este resultado mostra que uma pequena espira produz um campo de dipolo, e permitiu a Ampère justificar a origem dos dipolos magnéticos elementares que constituem os ímãs, sem introduzir a hipótese da existência de polos magnéticos.

* * *

Problemas propostos:

9-1. Calcular a indução magnética produzida por uma corrente superficial cilíndrica infinita, com densidade superficial \vec{J}_s constante, em todos os pontos do espaço.

9-2. Sobre uma esfera de raio R , está fixa uma carga superficial de densidade σ constante. Sabendo que a esfera gi

ra com velocidade angular w constante em tórno de um de seus diâmetros, calcular a indução magnética em todos os pontos dêsse eixo de rotação.

9-3. Calcular a fôrça de interação, por unidade de comprimento, de 2 fios retilíneos, infinitos, paralelos, conduzindo correntes i_1 e i_2 respectivamente, sabendo que essas correntes percorrem os fios: a) no mesmo sentido; b) em sentidos contrários.

9-4. Mostrar que (9-31) é válida quando se tem $\vec{J} = J \vec{k}$, para k constante, e $J(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$.

9-5. Uma corrente estacionária i percorre um circuito em forma de hexágono regular de lado a . Calcular a indução magnética no centro do hexágono (R. M.).

9-6. Uma faixa estreita de metal de largura d e muito longa é percorrida, no sentido do seu comprimento, por uma corrente i . Calcular a indução magnética no plano da faixa, a uma distância b da aresta mais próxima (R. M.).

* * *

CAPÍTULO 10

TEOREMA DE AMPÈRE

10 - 1. Potencial magnético escalar. A analogia evidente entre (9-18) e (2-8) sugere que se procure, também na Magnetostática, uma função potencial escalar ϕ , tal que se possa fazer:

$$\vec{B} = - \text{grad } \phi , \quad (10-1)$$

da mesma maneira que se tinha em Eletrostática:

$$\vec{E} = - \text{grad } V .$$

A função V foi de grande utilidade para a solução de muitos problemas. Além disso, o potencial elétrico é especialmente importante pela existência das pilhas e outros dispositivos que permitem manter uma dada diferença de potencial entre 2 condutores; e tem um significado físico simples: representa o trabalho, por unidade de carga, realizado pelo campo, ao transportar-se uma carga desde o ponto dado ao infinito. Por ser V contínua e monovalente, este trabalho, ao longo de uma trajetória fechada, é nulo. A expressão de V , no parágrafo 4-2, foi obtida a partir desta conceituação física; mas poderia ter sido encontrada por um procedimento mais formal, por transformações matemáticas da expressão do campo elétrico:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' ;\end{aligned}$$

como no operador $\vec{\nabla}$ as derivadas parciais são calculadas em relação à variável livre \vec{r} e não à variável de integração \vec{r}' , podemos retirá-lo do operador integral, e teremos:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right) = -\vec{\nabla} V ,$$

que dá a mesma expressão já obtida para V , em face de (4-18).

Para a obtenção da expressão do potencial escalar ϕ , definido por (10-1), poder-se-ia seguir o caminho análogo do cálculo do trabalho necessário para transportar uma certa "massa" magnética, desde o ponto dado ao infinito. Embora historicamente tenha sido este o caminho seguido, não tem sentido físico, pois sabemos que na matéria não existem massas ou polos magnéticos isolados, sim correntes e dipolos. Devemos, pois, aplicar um procedimento matemático análogo ao que foi acima empregado como 2º método para obtenção do potencial eletrostático. Partindo da expressão de \vec{B} :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' ,$$

poderíamos tentar obter uma expressão para ϕ tal que (10-1) se verificasse. Entretanto, como veremos, (10-1) é muito menos geral do que (4-18), valendo para correntes lineares, mas não para correntes espaciais; e, mesmo aí, o potencial escalar ϕ não é uma função contínua: disso decorre que a circulação de \vec{B} , ao longo de um circuito fechado, é diferente de zero se este circuito for atravessado pelas correntes.

Vamos, pois, partir da expressão da indução magnética criada por uma corrente estacionária i que percorre um circuito C (Fig. 10-1):

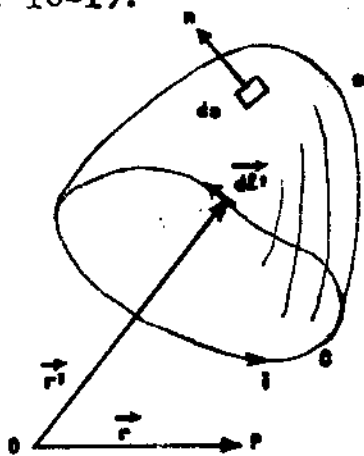


Fig. 10-1

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Seja \vec{v} um vetor unitário qualquer, e calculemos a componente de \vec{B} segundo sua direção:

$$\vec{B} \cdot \vec{v} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}' \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

$$\vec{B} \cdot \vec{v} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C d\vec{l}' \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \wedge \vec{v}. \quad (10-2)$$

Chamando $\vec{\nabla}'$ ao operador ^{gradiente} ~~gradiente~~, quando as derivadas parciais são calculadas em relação a \vec{r}' (raio vetor da posição do elemento de corrente $i d\vec{l}'$), tem-se evidentemente:

$$\vec{\nabla}' f(\vec{r} - \vec{r}') = -\vec{\nabla} f(\vec{r} - \vec{r}').$$

Podemos então aplicar o teorema de Stokes ao 2º membro de (10-2), tomando uma superfície s apoiada no contorno C , sendo aí a normal orientada no sentido usual, isto é, da face negativa para a face positiva de s . Teremos então:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{v} &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_s \vec{ds}' \cdot \vec{\nabla}' \wedge \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \wedge \vec{v} \right) = \\ &= - \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_s \vec{ds}' \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \wedge \vec{v} \right) = \\ &= - \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_s \vec{ds}' \cdot \left[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \vec{v} \left(\text{div} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Se o ponto P considerado não estiver sobre s , isto é, se $\vec{r} \neq \vec{r}'$, então o último termo do 2º membro da equação acima é nulo, e teremos:

$$\vec{B} \cdot \vec{v} = - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_s \vec{ds}' \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right).$$

Como esta relação é válida qualquer que seja \vec{v} , isto é, para qualquer componente de \vec{B} , conclui-se que:

$$\vec{B} = - \vec{\nabla} \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_s \vec{ds}' \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right),$$

e portanto vale (10-1), sendo:

$$\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \vec{ds}' \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (10-3)$$

Procuramos agora uma interpretação geométrica para ϕ , e para isso consideremos um contorno plano C limitando uma superfície plana s (Fig. 10-2). Consideremos um ponto qualquer P tal que dele

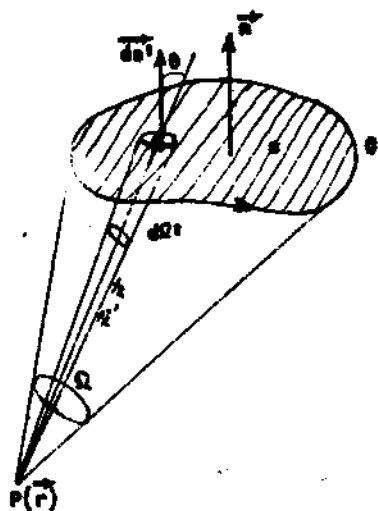


Fig. 10-2

se veja a face negativa de s . O ângulo sólido $d\Omega'$ (positivo) segundo o qual se vê, de P , o elemento de superfície ds' será:

$$\begin{aligned} d\Omega' &= \frac{ds' \cos \theta}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} = \\ &= \vec{ds}' \cdot \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \end{aligned}$$

Essa mesma expressão dá para $d\Omega'$ um valor negativo quando, de P , se vê a face positiva de ds' . Assim a expressão (10-3) se escreve:

$$\phi = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\Omega' = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega, \quad (10-4)$$

em que Ω é o ângulo sólido segundo o qual se vê, de P , a face negativa da superfície s . Isto é sempre verdade, mesmo que a superfície seja reversa (Fig. 10-3), o que se pode concluir por um

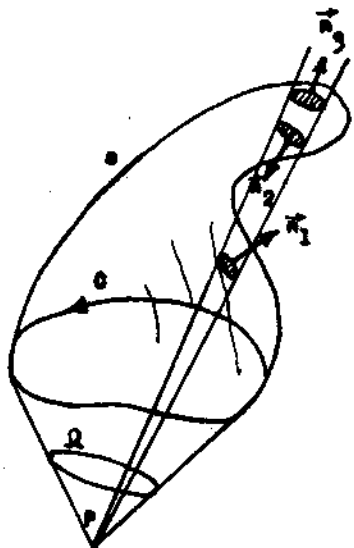


Fig. 10-3

raciocínio idêntico ao que foi feito no parágrafo 3-2. É muito importante observar que a função ϕ , expressa por (10-4), não é contínua nem é bem definida. De fato, não é contínua, porque são simétricos (iguais respectivamente a 2π e -2π) os ângulos sólidos segundo os quais s é vista de 2 pontos P_- e P_+ , infinitamente próximos às faces negativa e positiva de s (Fig. 10-4). Assim teremos:

$$\phi_{P_-} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} (2\pi) = -\frac{\mu_0 i}{2},$$

$$\phi_{P_+} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} (-2\pi) = +\frac{\mu_0 i}{2},$$

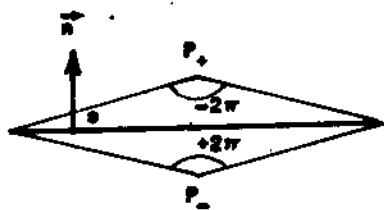


Fig. 10-4

e a descontinuidade de ϕ através de s é igual a $\mu_0 i$. Por outro lado, ϕ não é bem definida, porque assumirá valores diferentes (embora diferindo apenas por constantes), conforme a escolha que fizermos pa

ra s - que deve satisfazer apenas à condição de ser limitada pelo contorno C . Assim a função potencial escalar ϕ não tem sentido físico próprio, e servirá apenas para a determinação de \vec{B} , nos ca-

tos em que (10-1) é válida (pois os termos constantes de ϕ desaparecem nas derivações). Se, agora, as correntes se distribuem espacialmente numa certa região, ou se houver n correntes lineares i_r , teremos:

$$\phi = - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{r=1}^n i_r \Omega_r$$

(em caso de corrente espacial, o somatório deve ser substituído por uma integral). Como cada Ω_r pode ser variado de 4π por substituição da superfície s_r de contorno C_r , ϕ pode adquirir, num ponto P , muitos valores (2^n ao todo), conforme as superfícies s_r escolhidas. No caso de distribuições espaciais de correntes, ϕ poderá adquirir, num ponto dado, qualquer valor arbitrariamente prefixado, perdendo então inteiramente seu significado, por ser impossível definir unívocamente as superfícies s_r .

Entretanto a expressão (10-1) é válida em regiões onde não haja correntes, e pode ser usada com vantagem para o cálculo de alguns campos.

Vejamos um exemplo.

10 - 2. Dipolo ou folheto magnético. Chama-se "dipolo magnético" a uma corrente circular, de dimensões desprezíveis em relação às distâncias consideradas. Assim se denomina porque a expressão de sua indução magnética é formalmente análoga à do campo de um dipolo elétrico, e porque, historicamente, os ímãs eram

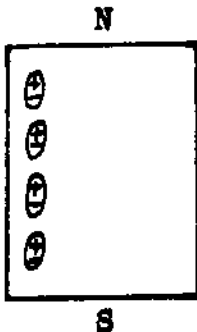


Fig. 10-5

descritos em termos de polos magnéticos positivos e negativos, formando dipolos (Fig. 10-5). Já Ampère deu nova interpretação ao comportamento dos materiais magnéticos, substituindo os dipolos por correntes elementares, cujo campo a grandes distâncias calculou, e verificou coincidir com o campo do dipolo magnético tradicional (ver parágrafo 9-9). A hipótese de Ampère das correntes elementares existentes na matéria não pôde, entretanto, ser comprovada em sua época, por não ser conhecida a Teoria Atômica.

Chama-se "momento magnético" \vec{m} de um dipolo ao produto da intensidade da corrente circular i por $\vec{s} = s\vec{n}$, sendo s a área do círculo limitado pela corrente, e \vec{n} a normal a s orientada segundo a regra do saca-rôlhas (Fig. 10-6):

$$\vec{m} = i\vec{s}. \quad (10-5)$$

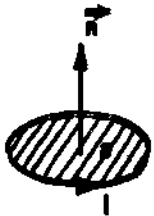


Fig. 10-6

Consideremos agora um ponto P qualquer, tão afastado do circuito circular, que o raio $R = |\vec{r}|$ deste possa ser considerado infinitesimal. Neste caso, tomando no dipolo

a origem do referencial, (10-3) dará:

$$\phi \approx \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \vec{ds}' \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \vec{s} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i s \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Logo,

$$\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \cos \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (10-6)$$

dá o potencial escalar de um dipolo magnético. É evidente a analogia entre (10-6) e a expressão (4-21) do potencial de um dipolo elétrico. As linhas de campo do dipolo magnético são também idênticas às do dipolo elétrico (Fig. 2-11).

O campo magnético do dipolo é dado então por:

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right). \quad (10-7)$$

Dos resultados obtidos no

parágrafo 2-6 e da Fig. 10-7 tiramos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} &= -3 \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} + \frac{\vec{m}}{r^3} = \\ &= -3 \frac{m \cos \theta}{r^3} \frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{m}}{r^3} = \\ &= -\frac{3 m \cos \theta}{r^3} \vec{u} + \frac{m \cos \theta}{r^3} \vec{u} - \frac{m \operatorname{sen} \theta}{r^3} \vec{t}, \end{aligned}$$

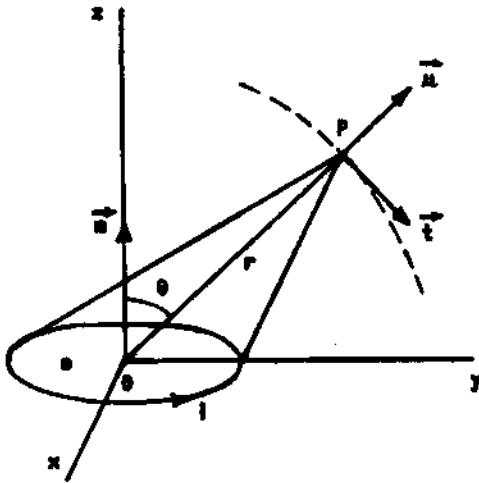


Fig. 10-7

e teremos para \vec{B} e para as componentes radial e tangencial de \vec{B} resultados que coincidem com (9-33) e (9-34).

‡

10 - 3. Propriedades de simetria do campo de indução magnética.
Analogamente ao caso da Eletrostática, uma simetria na distribuição de correntes implica em certa simetria de \vec{B} . Entre outras propriedades, são importantes as seguintes:

1^a) O campo \vec{B} , num ponto de um plano de simetria das correntes, é normal a esse plano.

Basta demonstrar essa propriedade para as contribuições de dois elementos simétricos de corrente, $id\vec{l}_1$ e $id\vec{l}_2$ (Fig. 10-8).

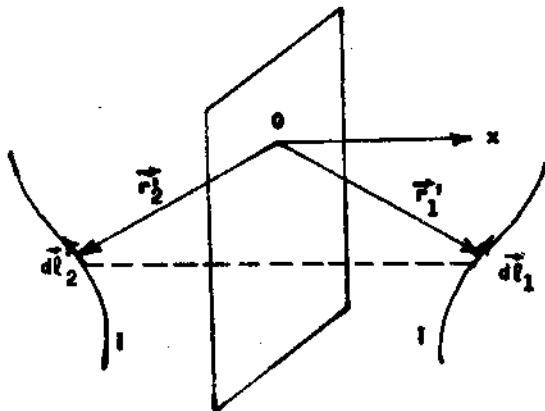


Fig. 10-8

Tomemos a origem no ponto O em que se quer calcular \vec{B} , escolhendo o eixo dos x normal ao plano de simetria. O campo elementar produzido por $id\vec{l}_1$ e $id\vec{l}_2$ é:

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{i} \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}_1 + d\vec{l}_2 \wedge \vec{r}_2}{|\vec{r}_1|^3};$$

pondo:

$$d\vec{l}_1 = \vec{i} dx' + \vec{j} dy' + \vec{k} dz' ,$$

$$\vec{r}_1' = \vec{i} x' + \vec{j} y' + \vec{k} z' ,$$

vem:

$$d\vec{l}_2 = -\vec{i} dx' + \vec{j} dy' + \vec{k} dz' ,$$

$$\vec{r}_2' = -\vec{i} x' + \vec{j} y' + \vec{k} z' ,$$

e portanto:

$$d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}_1' + d\vec{l}_2 \wedge \vec{r}_2' = 2\vec{i}(z dy - y dz), \text{ c.q.d.}$$

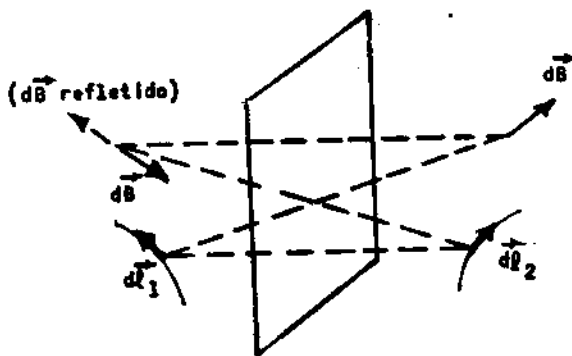


Fig. 10-9

2ª) O campo \vec{B} é antisimétrico em relação a um plano de simetria das correntes (Fig. 10-9).

Esta propriedade se demonstra de modo análogo à anterior.

10 - 4. Teorema de Ampère. Para um dado circuito C, vemos de (10-1) e (10-4) que o campo magnético em um ponto P qualquer, exterior a C, vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \text{ grad } \Omega , \quad (10-8)$$

onde i é a intensidade da corrente que percorre o circuito, e Ω o ângulo sólido do qual se vê, de P, a face negativa de uma su-

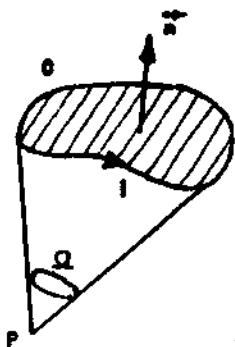


Fig. 10-10

perfície qualquer apoiada em C (Fig. 10-10). Se em vez de uma só corrente tivermos várias (Fig. 10-11), o valor de \vec{B} será:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_r i_r \text{ grad } \Omega_r, \quad (10-9)$$

expressão análoga valendo para o campo de uma distribuição contínua de correntes, num ponto fora da distribuição. Em alguns ca-

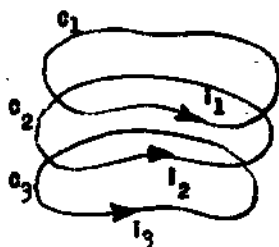


Fig. 10-11

sos, as fórmulas (10-8) e (10-9) podem ser usadas com simplicidade para o cálculo de \vec{B} , mas sua utilidade maior está na dedução do teorema de Ampère, que corresponde na Magnetostática ao teorema de Gauss da Eletrostática. Da mesma maneira que o de Gauss, o

teorema de Ampère tem aplicabilidade restrita: só é útil na resolução de problemas em que aparecem distribuições simétricas de correntes.

Consideremos um contórno Γ qualquer que enlace alguns dos circuitos representados na Fig. 10-11 (estes circuitos podem ser indiferentemente fios ou linhas de corrente - em caso de distri-

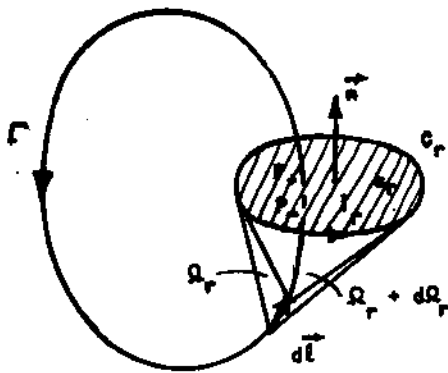


Fig. 10-12

buição contínua) e calculemos a circulação de \vec{B} ao longo de Γ (Fig. 10-12), usando (10-9):

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_r i_r \oint_{\Gamma} \text{grad } \Omega_r \cdot d\vec{l};$$

mas:

$$\vec{\nabla} \Omega_r \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \Omega_r}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_r}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega_r}{\partial z} dz = d\Omega_r,$$

e assim:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_r i_r \oint_{\Gamma} d\Omega_r. \quad (10-10)$$

Para o cálculo desta integral, escolhemos um sentido de percurso para Γ , partindo de um ponto P_+ , infinitamente próximo à face positiva de s_r , e chegando a um ponto P_- , infinitamente próximo à face negativa de s_r . Neste caso dizemos que Γ enlaça C_r no sentido positivo. É claro que Γ enlaçará C_r qualquer que seja a superfície s_r escolhida, apoiando-se sobre C_r . Vê-se da Fig. 10-13 que:

$$\int d\Omega_r = \Omega_- - \Omega_+ = 2\pi - (-2\pi) = 4\pi.$$

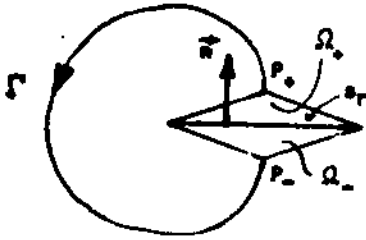


Fig. 10-13

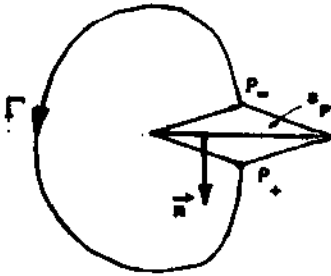


Fig. 10-14

Se Γ enlaçar outro circuito qual quer no sentido negativo (como indica a Fig. 10-14), então o valor da integral será -4π . Se Γ não enlaçar um 3.^o circuito, então podemos escolher uma superfície qualquer apoiando-se nele que não seja cortada em ponto algum pelo circuito Γ , e portanto neste caso não haverá descontinuidade para o ângulo sólido, e a integral se anula.

Chamando então i_k apenas as correntes enlaçadas, e atribuindo-lhes sinal $+$ se Γ enlaça C_k positivamente, e sinal $-$ se Γ enlaça C_k negativamente, (10-10) dará

finalmente:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum i_k 4\pi,$$

isto é:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i, \quad (10-11)$$

onde $i = \sum i_k$ é a soma algébrica das correntes que atravessam

qualquer superfície apoiada no contôrnio Γ (Fig. 10-15), da face

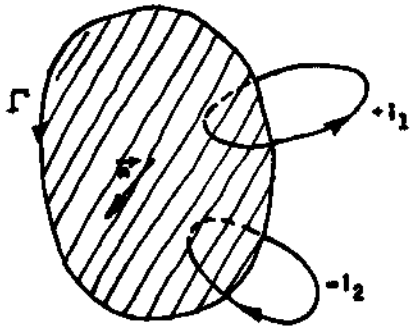


Fig. 10-15

negativa para a positiva. A equação (10-11) é a expressão matemática do teorema de Ampère, que assim se enuncia:

"A circulação do vetor indução magnética num contôrnio fechado é igual a μ_0 vezes a corrente total que o enlaça no sentido positivo".

Para uma distribuição contínua de correntes temos:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}, \quad (10-12)$$

onde s é uma superfície qualquer apoiada no contôrnio Γ .

Seja agora um circuito qualquer conduzindo corrente i . Em pontos bastantes próximos do circuito, tais que possamos tomar o trecho considerado como retilíneo, as linhas de campo são circulares, e enlaçam o circuito no sentido positivo (Fig. 10-16). És

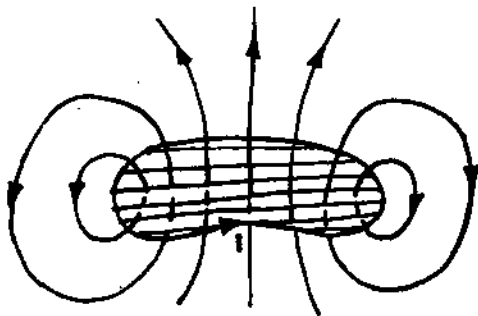


Fig. 10-16

te resultado pode ser, aliás, qualitativamente concluído do teorema de Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i.$$

De fato, a projeção de \vec{B} na direção do circuito de integração Γ deve dar contribuições predominantemente positivas, de maneira a tornar positiva a integral do 1º membro. Isto é, poderemos modificar convenientemente Γ de maneira a fazê-lo coincidir com uma linha de força. Do que se conclui que as linhas de \vec{B} são fechadas. Este fato será verificado de maneira mais precisa no capítulo 12.

Consideremos alguns exemplos em que o teorema de Ampère pode ser empregado com vantagem para o cálculo da indução magnética. Isto se dará quando as distribuições de corrente dadas forem simétricas.

10 - 5. Fio retilíneo infinito, por onde passa corrente i . Como esta distribuição de corrente tem simetria cilíndrica, \vec{B} será, no máximo, função de a e de s (a é a distância do ponto em que se calcula \vec{B} ao fio); mas como há ainda simetria de translação, conclui-se que \vec{B} é apenas função de a . Finalmente, como os planos que contêm o fio são planos de simetria da distribuição, \vec{B} será

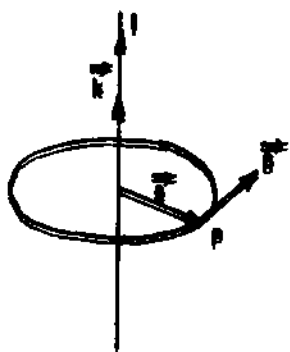


Fig. 10-17

ortogonal a esses planos (1ª propriedade), isto é, \vec{B} é da forma $B(a)\vec{t}$, em que \vec{t} é o vetor unitário tangente às superfícies cilíndricas que têm por eixo o fio. Então podemos escolher para circuito Γ de integração um circulo

lo de raio a com centro sôbre o fio, passando pelo ponto P (Fig. 10-17). O teorema de Ampère dá:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi a B = \mu_0 i,$$

donde:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a},$$

ou ainda:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}}{a},$$

que coincide com (9-23).

10 - 6. Condutor cilíndrico infinito, por onde passa corrente i .

Esta distribuição apresenta o mesmo tipo de simetria que a do parágrafo anterior, e portanto \vec{B} é, ainda aqui, da forma $B(a)\vec{t}$. Como as linhas de fôrça são círculos com centro no eixo do cilindro e ortogonais ao eixo, podemos escolher para circuito de integração aquele desses círculos que passa pelo ponto P , onde se deseja calcular \vec{B} .

A determinação de \vec{B} em pontos externos é inteiramente análoga à que se fêz no parágrafo anterior. Se agora P é um ponto interno à distribuição, distante $a < R$ do eixo, podemos tomar Γ como indica a Fig. 10-18, e calcular:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi a B = \mu_0 \pi a^2 J,$$

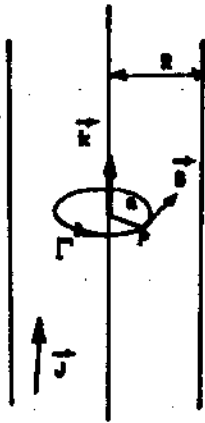


Fig. 10-18

pois J é a densidade de corrente.

Logo:

$$B = \frac{\mu_0 a}{2} J ,$$

ou ainda:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J a}{2} \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}}{a} ,$$

que coincide com (9-28).

10 - 7. Solenóide cilíndrico infinito, por onde passa corrente i .

Da simetria cilíndrica e de translação da corrente, conclui-se que \vec{B} é apenas função de a ; como ainda os planos ortogonais ao eixo do cilindro são planos de simetria, conclui-se finalmente que \vec{B} é da forma $B = B(a)\vec{k}$. Para o cálculo do campo externo pelo teorema de Ampère, podemos escolher o circuito Γ_1 (Fig.10-19), e teremos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B(a_1) - B(a_2)] \Delta l_1 = 0 ;$$

como $B(a)$ tende a zero quando $a \rightarrow \infty$, então, tomando a_2 suficientemente grande, tem-se $B(a_2) = 0$, e portanto $B(a_1) = 0$. Isto é, o campo é nulo em pontos externos ao solenóide. Para o cálculo de \vec{B} no ponto P qualquer, interno ao solenóide, podemos escolher o circuito Γ_2 (Fig. 10-19), e teremos, pelo teorema de Ampère:

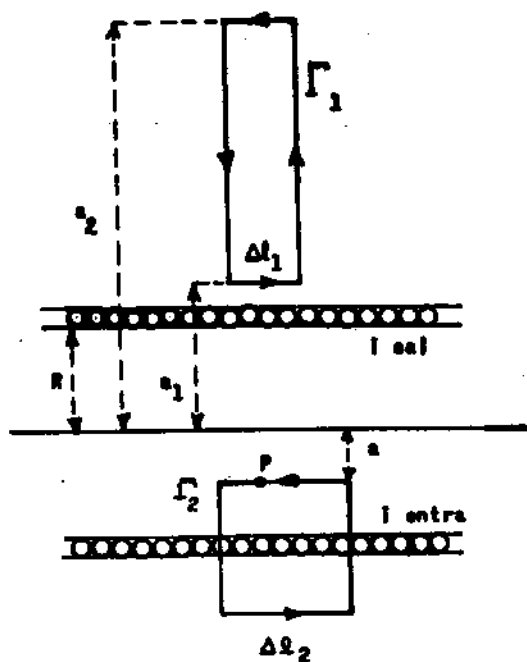


Fig. 10-19

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(a) \Delta l_2 =$$

$$= \mu_0 \frac{N}{L} i \Delta l_2,$$

onde N é o número de espiras por unidade de comprimento, e L é o comprimento do solenóide. A indução do solenóide, já obtida no parágrafo (9-6), é então:

$$B(a) = \begin{cases} 0, & a > R, \\ \frac{\mu_0 N i}{L}, & a < R. \end{cases}$$

10 - 8. Solenóide toroidal, por onde passa corrente i . O solenóide toroidal é um conjunto de N espiras justapostas, com centros sobre uma circunferência de raio R . Na prática, uma bobina recurvada até que suas extremidades se encontrem (Fig. 10-20) pode ser assimilada a um solenóide toroidal. Como a distribuição de corrente tem simetria de rotação, \vec{B} deve ser uma função de a e de z , sendo Oz o eixo normal ao plano da circunferência de raio R , com origem no seu centro, e a a distância do ponto P , em que se quer calcular \vec{B} , ao eixo OZ . Como, além disso, a distribuição tem simetria de reflexão em relação

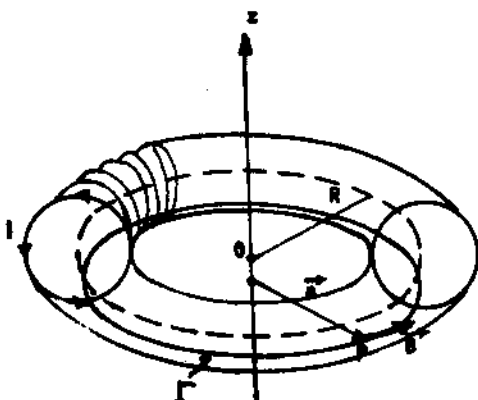


Fig. 10-20

a um plano que contenha OZ , \vec{B} é antissimétrico em relação a esse plano (2^{a} propriedade). Portanto \vec{B} é da forma $B(a, z)\vec{t}$, sendo \vec{t} um vetor unitário tangente à circunferência de raio a , com centro em Oz , orientado de acordo com o sentido da corrente, pela regra do saca-rôlhas. As linhas de força de \vec{B} são, assim, circunferências com centros sobre o eixo Oz , normal a elas,

e podemos escolher para circuito de integração Γ a circunferência que passa por P (Fig. 10-20). O teorema de Ampère dá, para um ponto exterior ao toróide:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi a B = 0, \quad (10-13)$$

isto é, a indução magnética é nula externamente. Para um ponto interior ao toróide, tem-se:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi a B = \mu_0 N i,$$

isto é, internamente a indução magnética é dada por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi a} \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}}{a} . \quad (10-14)$$

10 - 9. Plano infinito, por onde passa corrente superficial de densidade \vec{J}_s . Como esta distribuição de corrente apresenta simetria plana, \vec{B} só pode depender de x (distância do ponto P, em que se quer calcular \vec{B} , ao plano); como, além disso, há simetria de translação, \vec{B} é constante sobre planos paralelos ao plano da distribuição; finalmente, da 2ª propriedade de simetria (parágrafo 10-3) concluímos que \vec{B} é antissimétrico em relação ao plano da distribuição. \vec{B} é portanto da forma $B(x) \vec{k} \wedge \frac{\vec{x}}{x}$, sendo \vec{k} o

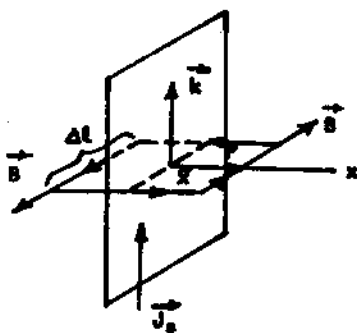


Fig. 10-21

vetor unitário de \vec{J}_s , e podemos escolher o circuito Γ , indicado na Fig. 10-21, para circuito de integração. O teorema de Ampère dá:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2 B \Delta l = \mu_0 J_s \Delta l ,$$

isto é:

$$B = \frac{\mu_0 J_s}{2} ,$$

ou ainda:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{k} \wedge \frac{\vec{x}}{x} ,$$

que coincide com (9-30).

Problemas propostos.

- 10-1. Resolva o problema 9-1 empregando o teorema de Ampère.
- 10-2. Um cabo coaxial (constituído por um cilindro condutor interno de raio a e por uma camada cilíndrica condutora de espessura desprezível, coaxial com o 1º condutor, de raio b , sendo $b > a$) é percorrido por uma corrente estacionária de intensidade i que sobe pelo condutor interno e desce pelo condutor externo. Considerando que o comprimento do cabo é bastante grande em comparação com seus raios, calcular o vetor indução magnética em todo o espaço.
- 10-3. Um circuito é constituído de 2 planos paralelos, infinitamente longos, de largura w , separados por uma distância d , sendo $d \ll w$. Calcular o vetor indução magnética entre os planos (S. F.).
- 10-4. Um circuito é constituído de 2 solenóides coaxiais de raios iguais a R_1 e R_2 ($R_2 > R_1$) e contendo respectivamente n_1 e n_2 espiras por unidade de comprimento. Uma corrente estacionária i sobe pelo solenóide interno e desce pelo externo. Supondo infinito o comprimento dos solenóides, calcular o vetor indução magnética em todo o espaço.

CAPÍTULO 11

POTENCIAL VETOR

11 - 1. Potencial vetor. Vimos no capítulo anterior que o vetor indução magnética pode ser obtido, por derivação, a partir de uma função escalar, o potencial magnético escalar ϕ , mas apenas em regiões em que não há correntes. Usando o potencial escalar, demonstramos o teorema de Ampère, válido agora em regiões em que existam distribuições espaciais de corrente (nas quais, entretanto, o potencial escalar não é bem definido), desde que excluamos da distribuição o tubo infinitesimal de corrente, coincidente com o circuito de integração escolhido; esta exclusão não alterará consideravelmente o campo. Se, porém, a corrente for linear, o teorema de Ampère perderá a validade se escolhermos para circuito de integração o próprio circuito por onde passa a corrente.

Podemos, entretanto, obter sempre o vetor indução magnética, por derivação, a partir de uma função vetorial, o "potencial vetor" \vec{A} , que tem assim muito maior sentido físico do que ϕ e aplicabilidade inteiramente geral, como veremos a seguir.

Vamos partir da expressão da indução magnética criada por μ

ma distribuição espacial de cargas $\vec{J}(\vec{r}')$ qualquer:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \wedge \vec{J}(\vec{r}') dv'.\end{aligned}$$

Usando agora a identidade (5-46) e levando em conta o fato de que o operador $\vec{\nabla}$ se refere à variável \vec{r} , e \vec{J} é função apenas de \vec{r}' , teremos:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_V \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right).$$

Invertendo as operações de integração e derivação, e chamando "potencial vetor" à função:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \quad (11-1)$$

vemos que o vetor indução magnética pode ser calculado a partir de \vec{A} pela equação:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (11-2)$$

Observemos que um campo vetorial pode ser obtido; seja como o gradiente de um campo escalar - é o caso de (10-1), seja como o rotacional de um campo vetorial - é o caso de (11-2); entretanto (10-1) tem aplicabilidade restrita, ao contrário de (11-2), sobre cuja aplicabilidade nenhuma restrição foi feita. Observe mos ainda que a expressão (11-1) de \vec{A} é muito simples, e apresenta grande analogia com a expressão (4-9) do potencial eletrostático.

Usando o raciocínio feito no parágrafo 9-3, vemos que no caso de corrente superficial o potencial vetor se escreve:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (11-3)$$

análoga a (4-11), e no caso de corrente linear:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (11-4)$$

análoga a (4-12).

Quando a distribuição de correntes que gera o campo é infinita, encontramos valor infinito para \vec{A} ; neste caso devemos calcular a diferença de potencial vetor entre o ponto P e um ponto P_0 qualquer. Seja \vec{r} o raio-vetor de P e \vec{r}_0 o de P_0 (Fig. 11-1). Então, em lugar de (11-1), utilizaremos o potencial vetor finito que se anula em \vec{r}_0 , e não no ponto do infinito:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|} dv'. \quad (11-5)$$

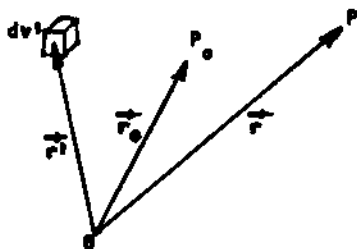


Fig. 11-1

Se as correntes se localizam numa região finita do espaço, (11-5) coincide com (11-1) quando $\vec{r}_0 \rightarrow \infty$. O vetor \vec{A} , dado por (11-5), satisfaz obviamente à equação (11-2).

Como na Eletrostática, é freqüentemente mais simples calcular o potencial (vetor) do que o campo (\vec{B}), que será depois obtido por

diferenciação do potencial.

Consideremos alguns exemplos.

11 - 2. Fio retilíneo infinito, por onde passa corrente i . Tomemos para origem do sistema de referência o pé da perpendicular baixada do ponto P, em que se quer calcular \vec{A} , ao fio (Fig.

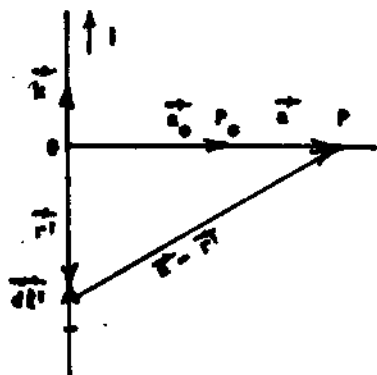


Fig. 11-2

11-2). Aplicando (11-5), encontraremos valor infinito para \vec{A} ; devemos então usar expressão semelhante a (11-5), particularizada para o caso de corrente linear:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\oint_C \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{a} - \vec{r}'|} - \oint_C \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{a}_0 - \vec{r}'|} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{k} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\ell'}{|\vec{a} - \vec{r}'|} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\ell'}{|\vec{a}_0 - \vec{r}'|} \right],$$

pois $d\vec{\ell}' = \vec{k} d\ell'$.

A diferença de integrais acima já foi calculada em Eletrostática (parágrafo 4-8); de fato, encontramos:

$$V - V_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda d\ell'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{a} - \vec{r}'|} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda d\ell'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{a}_0 - \vec{r}'|} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{a}{a_0},$$

e teremos portanto para \vec{A} :

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{a}{a_0} \vec{k}.$$

Se tomarmos, por exemplo, $a_0 = 1\text{m}$, vem:

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \log a \vec{k}. \quad (11-6)$$

O campo vetorial \vec{A} será paralelo à direção da corrente, e terá a configuração indicada na Fig. 11-3.

O vetor indução magnética pode então ser calculado por

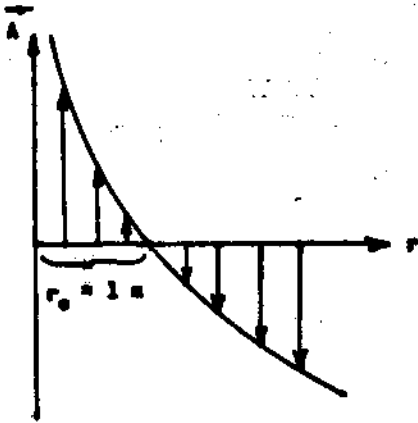


Fig. 11-3

(11-2), e valerá:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \vec{\nabla} \wedge (\log a \vec{k}) = \\ &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi} (\vec{\nabla} \log a) \wedge \vec{k} = \\ &= -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\vec{a}}{a^2} \wedge \vec{k}, \end{aligned}$$

onde foram empregadas as identidades (5-46) e (2-13).

Portanto:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}}{a},$$

resultado que coincide com (9-23).

11 - 3. Dipolo magnético. Da Fig. 9-21, usando (11-6), vemos que a expressão:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad |\vec{r}'| = R,$$

dá o potencial vetor de uma espira conduzindo corrente i . A grandes distâncias, este potencial será o mesmo do que o de um dipolo magnético localizado na origem. Para $r \gg R$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)_{\vec{r}'=0} = \frac{1}{r} + \vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r^3},$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \oint_C \vec{dl}' + \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} \oint_C (\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{dl}'.$$

Tomando o eixo dos y na direção da projeção de \vec{r} sobre o plano da espira, e dos z segundo a normal ao plano orientado da espira, vemos que $\vec{r} \cdot \vec{r}' = y' y$, logo (ver parágrafo 9-9):

$$\oint_C (\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{dl}' = y \oint_C y' \vec{dl}' = -y s \vec{i}.$$

Pondo agora:

$$\vec{m} = i s \vec{k}, \quad \vec{r} = y \vec{j} + z \vec{k}$$

teremos finalmente para \vec{A} :

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 m y \vec{i}}{4\pi r^3},$$

isto é:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}, \quad (11-7)$$

análoga a (4-22).

As linhas de campo de \vec{A} são círculos paralelos ao plano da espira, orientados no sentido da corrente, com centros sobre o

eixo da espira (Fig. 11-4). O vetor indução magnética, dado por (11-2), é:

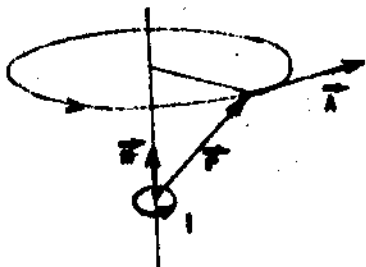


Fig. 11-4

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{m} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \right);$$

aplicando (5-47) e lembrando que \vec{m} é constante:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\vec{m} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} \right];$$

mas $\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\Delta \frac{1}{r} = 0$ (para $r \neq 0$), e portanto:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \frac{1}{r}.$$

De (5-41) tiramos:

$$(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \left(\vec{m} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = -\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right),$$

e assim teremos

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right),$$

que coincide com (10-7);

11 - 4. Condutor cilíndrico infinito, por onde passa corrente i.
Trata-se da mesma distribuição de correntes estudada no parágrafo 9-7. Tem-se para o potencial vetor (Fig. 9-18):

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{a} - \vec{r}'|} dv',$$

que dá resultado infinito. Usando (11-8) virá:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J} \left[\int_V \frac{dv'}{|\vec{a} - \vec{r}'|} - \int_V \frac{dv'}{|\vec{a}_0 - \vec{r}'|} \right].$$

Esta diferença de integrais é a mesma que aparece no problema de potencial eletrostático de uma distribuição espacial de cargas com ρ constante, num cilindro indefinido:

$$V(\vec{a}) - V(\vec{a}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \left[\int_V \frac{dv'}{|\vec{a} - \vec{r}'|} - \int_V \frac{dv'}{|\vec{a}_0 - \vec{r}'|} \right], \quad (11-8)$$

onde \vec{a}_0 é a distância, ao eixo do cilindro, de um ponto P_0 qualquer, que tomaremos, por exemplo, fora da distribuição de cargas (Fig. 11-8). O cálculo de (11-8) pode ser feito diretamente (problema 4-8), ou lembrando que:

$$V(\vec{a}) - V(\vec{a}_0) = \int_{PP_0} \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

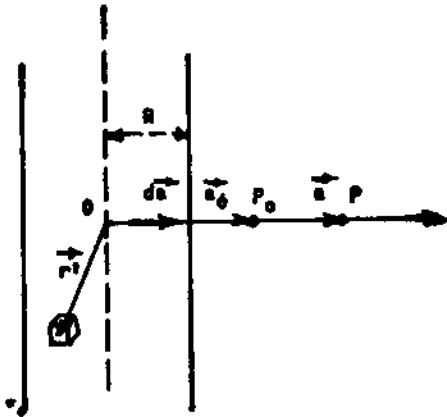


Fig. 11-5.

sendo o campo elétrico dado por:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho R^2 \vec{a}}{2 \epsilon_0 a^2}, & a > R \\ \frac{\rho a \vec{a}}{2 \epsilon_0}, & a < R. \end{cases}$$

Tem-se então, para pontos externos (tomando $a_0 \geq R$):

$$V(\vec{a}) - V(\vec{a}_0) = - \int_{a_0}^a \frac{\rho R^2 \vec{a}}{2 \epsilon_0 a^2} \cdot d\vec{a} = - \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0} \log \frac{a}{a_0}, \quad a > R,$$

e para pontos internos:

$$V(\vec{a}) - V(\vec{a}_0) = \int_a^R \frac{\rho a \vec{a}}{2 \epsilon_0} \cdot d\vec{a} + \int_R^{a_0} \frac{\rho R^2 \vec{a}}{2 \epsilon_0 a} \cdot d\vec{a} = \frac{\rho}{4 \epsilon_0} (R^2 - a^2) + \frac{\rho R^2}{2 \epsilon_0} \log \frac{a_0}{R}.$$

Comparando êsses resultados com (11-8) e levando na expressão de \vec{A} os valores encontrados, em cada caso, para a diferença de integrais, teremos:

$$\vec{A} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 \vec{J} R^2}{2} \log \frac{a}{a_0}, & a > R \\ \frac{\mu_0 \vec{J}}{2} \left(\frac{R^2 - a^2}{2} + R^2 \log \frac{a_0}{R} \right), & a < R. \end{cases}$$

Se escolhermos P_0 tal que $|\vec{a}_0| = R$, as expressões de \vec{A} se tornam:

$$\vec{A} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 \vec{J} R^2}{2} \log \frac{a}{R}, & a > R \\ \frac{\mu_0 \vec{J}}{4} (R^2 - a^2), & a < R. \end{cases} \quad (11-9)$$

Com essa escolha, verificamos que $\vec{A}_i(R) = \vec{A}_e(R) = 0$, o que corresponde a ter tomado, para origem dos potenciais, um ponto qualquer da superfície cilíndrica.

Observemos que (11-9) coincide com (11-6), isto é, o potencial vetor criado por uma distribuição uniforme de corrente através de um condutor cilíndrico infinito é, nos pontos externos, o mesmo que se toda a corrente estivesse passando por um fio localizado no eixo do cilindro. Internamente, o potencial vetor varia como $R^2 - a^2$. O potencial vetor terá sempre a direção da corrente, e suas linhas de força terão a configuração indicada na Fig. 11-6.

O vetor indução magnética será calculado a partir de \vec{A} . Pa-

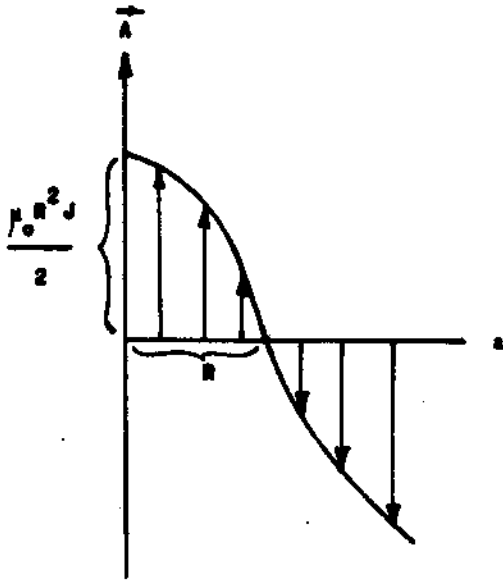


Fig. 11-6

ra pontos externos, o cálculo já foi feito no parágrafo 11-2; para pontos internos:

$$\vec{B} = - \frac{\mu_0}{4} \vec{\nabla} \wedge (\vec{J} a^2) ;$$

usando (5-46):

$$\begin{aligned} \vec{B} &= - \frac{\mu_0}{4} (\vec{\nabla} a^2) \wedge \vec{J} = \\ &= - \frac{\mu_0}{4} \cdot 2 \vec{a} \wedge \vec{J} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0 J a}{2} \vec{k} \wedge \frac{\vec{a}}{a}, \quad a < R,$$

resultado que coincide com (9-28).

†

11 - 5. Esfera girante, com distribuição superficial de cargas uniforme. Seja uma esfera de raio R sobre a qual está fixa uma carga superficial de densidade σ constante, girando em torno de um de seus diâmetros com velocidade angular ω constante. Queremos calcular o potencial vetor criado pela corrente superficial assim gerada, em pontos internos e externos à superfície. Tomemos a origem do referencial no centro da esfera e consideremos o elemento de superfície ds' (Fig. 11-7). A densidade de corren-

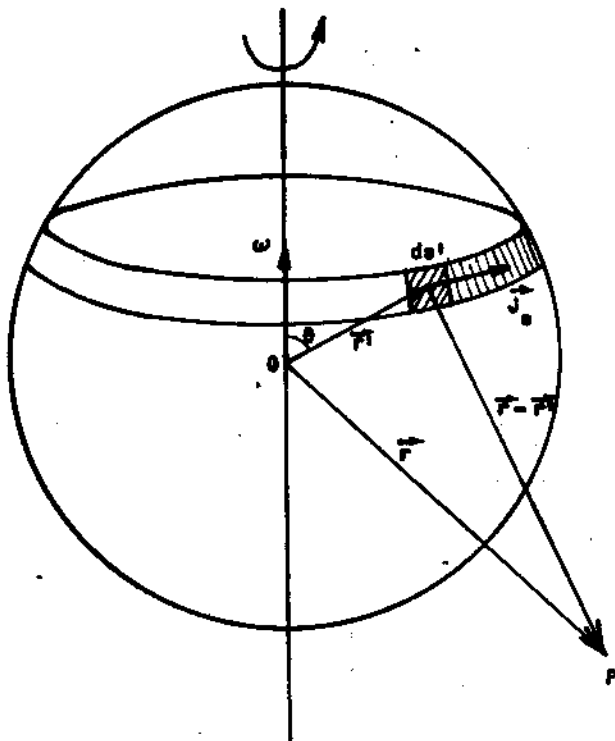


Fig. 11-7

te nesse elemento será dada por (9-21):

$$\vec{J}_s = \sigma \vec{v},$$

e portanto:

$$\vec{J}_s = \sigma \vec{\omega} \wedge \vec{r}', \quad |\vec{r}'| = R.$$

A fórmula (11-3) dará então para o potencial vetor:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_S \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{r}' ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \sigma R}{4\pi} \vec{\omega} \wedge \int_S \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (11-10)$$

pois $\vec{r}' ds' = r' \vec{ds}' = R \vec{ds}'$.

Demonstremos agora que:

$$\int_S f(\vec{r}') \vec{ds}' = \int_V \vec{\nabla}' f(\vec{r}') dv', \quad (11-11)$$

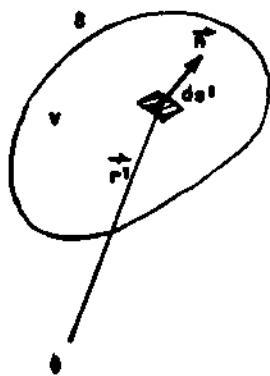


Fig. 11-8

sendo s a superfície que limita o volume v (Fig. 11-8), e f uma função qualquer de \vec{r}' . De fato, multipliquemos escalarmente por um vetor constante qualquer o 1º membro de (11-11):

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \int_s f(\vec{r}') d\vec{s}' &= \int_s (\vec{a} f) \cdot d\vec{s}' = \\ &= \int_v \text{div}' (\vec{a} f) dv' ; \end{aligned}$$

usando (5-43):

$$\vec{a} \cdot \int_s f(\vec{r}') d\vec{s}' = \int_v \left[f \cancel{dV} \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla}' f \right] dv' = \vec{a} \cdot \int_v \vec{\nabla}' f(\vec{r}') dv' ;$$

como \vec{a} é um vetor inteiramente arbitrário, vale (11-11).

Apliquemos agora (11-11) à expressão (11-10), tomando $f(\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \sigma R}{4\pi} \vec{w} \wedge \int_v \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' , \quad (11-12)$$

onde v agora é o volume da esfera. Esta integral já foi calculada em Eletrostática para o campo de uma distribuição esférica uniforme de cargas. De fato, tínhamos (Fig. 11-9):

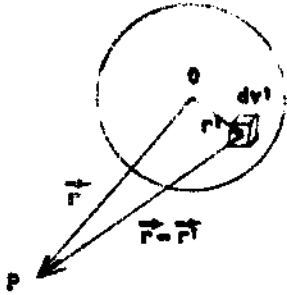


Fig. 11-9

$$\begin{aligned}\vec{E} &= - \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \\ &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv',\end{aligned}$$

que calculado deu:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{v\rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, & r > R, \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r}, & r < R. \end{cases}$$

Levando estes valores em (11-12), virá para pontos externos:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \sigma v R}{4\pi} \vec{w} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3},$$

ou ainda:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}, \quad r > R,$$

isto é, para pontos externos, a esfera girante se comporta como um dipolo magnético de momento:

$$\vec{m} = \sigma v R \vec{w},$$

localizado na origem. O vetor indução magnética, externamente, é portanto igual a (10-7), com \vec{m} dado pela expressão acima, ou

ainda:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3} \operatorname{rot} \frac{\vec{w} \wedge \vec{r}}{r^3}, \quad r > R. \quad (11-13)$$

Para pontos internos vem:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \sigma R}{3} \vec{w} \wedge \vec{r}, \quad r < R.$$

O vetor indução magnética será:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 \sigma R}{3} \vec{\nabla} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{r}) = \\ &= \frac{\mu_0 \sigma R}{3} \left[\vec{w} \operatorname{div} \vec{r} - (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} \right] = \frac{\mu_0 \sigma R}{3} (3 \vec{w} - \vec{w}), \end{aligned}$$

pois $(\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = w \frac{\partial}{\partial z} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = w \vec{k} = \vec{w}$; isto é:

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \vec{w}, \quad r < R. \quad (11-14)$$

Isto é, o vetor indução magnética no interior da esfera é paralelo e de mesmo sentido que \vec{w} , e tem módulo constante.

Problemas propostos.

- em um ponto qualquer do eixo de uma espira circular conduzindo corrente estacionária i .
- 11-1. Calcular o potencial vetor criado por uma corrente superficial plana infinita de densidade \vec{J}_s constante, e a partir da expressão obtida calcular o vetor indução magnética.
- 11-2. Calcular o potencial vetor em um ponto qualquer do eixo de uma espira circular conduzindo corrente estacionária i . O valor obtido implica em que $\vec{B} = 0$ sobre o eixo? Porque? (Ver correções, última Pág.).
- 11-3. Calcular o potencial vetor criado por uma corrente superficial cilíndrica infinita de densidade \vec{J}_s constante, e a partir da expressão obtida calcular o vetor indução magnética, em todo o espaço.

CAPÍTULO 12

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DA MAGNETOSTÁTICA

Vimos em Eletrostática (capítulo 5) que o campo elétrico satisfaz a duas equações diferenciais: a primeira, (5-1), decorre do teorema de Gauss; a segunda, (5-4), exprime o fato de que o campo elétrico deriva de um potencial. Por procedimentos análogos aos empregados naquele capítulo, vamos aqui determinar e interpretar as equações diferenciais satisfeitas pelo vetor indução magnética.

12 - 1. 1ª equação diferencial. É expressa por:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (12-1)$$

e decorre, como veremos, do teorema de Ampère. Aliás, (12-1) é o equivalente diferencial do teorema de Ampère, da mesma maneira que (5-1) é o equivalente diferencial do teorema de Gauss.

Consideremos um contórno fechado arbitrário Γ (Fig. 12-1), e apliquemos o teorema de Stokes, (5-37), à circulação do vetor indução magnética (existente na região onde se situa o contórno), ao longo de Γ :



Fig. 12-1

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_s \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{s},$$

em que s é uma superfície qualquer apoiada em Γ , sendo as orientações de s e Γ relacionadas da maneira usual. Ora, de acôrdo com o teorema de Ampère,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i,$$

onde i é a corrente que atravessa s no sentido positivo, e portanto:

$$\int_s \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s},$$

isto é:

$$\int_s (\text{rot } \vec{B} - \mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{s} = 0.$$

Como esta equação é verdadeira qualquer que seja s (em particular, para qualquer s infinitesimal), o integrando do 1º membro deve anular-se, o que demonstra (12-1).

Inversamente, se partirmos da equação diferencial (12-1) poderemos deduzir a expressão (10-12) do teorema de Ampère. Convém frisar ainda uma vez que, se \vec{B} derivasse de um potencial escalar contínuo e unívoco, e portanto se tivéssemos:

$$\text{rot } \vec{B} = 0 ,$$

então, seguindo a demonstração anterior em caminho inverso, terí-
amos:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 ,$$

em contradição com o teorema de Ampère. Isso confirma o resulta-
do obtido anteriormente de que o potencial escalar magnético só
tem aplicação em regiões onde não há correntes.

De (12-1) tiramos:

$$\text{div rot } \vec{B} = \mu_0 \text{div } \vec{J} = 0 ,$$

o que dará $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, pois a equação de continuidade (9-6) vale
sempre. Mas esta é simplesmente a condição necessária da Magne-
tostática, em que se estudam apenas correntes estacionárias.

Quando há correntes não estacionárias, tem-se: $\text{div } \vec{J} \neq 0$, fato
inconsistente com a equação (12-1). Esta deverá então ser alte-
rada, para que se possa aplicar a correntes não estacionárias: a
equação (12-1) devidamente modificada constituirá uma das equa-
ções de Maxwell do Eletromagnetismo.

12 - 2. 2ª equação diferencial. É expressa por:

$$\text{div } \vec{B} = 0 , \quad (12-2)$$

e decorre imediatamente do fato de ser \vec{B} o rotacional de \vec{A} - e-
quação (11-2) - pois sabemos, por (5-49), que a divergência do
rotacional de qualquer vetor é identicamente nula. A equação
(12-2) evidencia o fato de que não existem cargas magnéticas (co

mo foi visto no parágrafo 5-3), isto é, de que não há fontes nem sorvedouros para as linhas de \vec{B} , que são portanto fechadas.

É preciso notar aqui que (11-2) e portanto (12-2) têm validade absolutamente geral; o mesmo não ocorreria com a equação diferencial:

$$\text{rot } \vec{B} = 0 ,$$

consequência imediata de (10-1), pois esta equação só é verdadeira em regiões onde não existam correntes.

12 - 3. Descontinuidade de \vec{B} numa distribuição superficial de correntes. Do mesmo modo que na Eletrostática, o campo \vec{B} pode ser determinado resolvendo as equações diferenciais (12-1) e (12-2). Para uma distribuição espacial, demonstra-se que \vec{B} é contínuo. Em distribuições superficiais, \vec{B} é descontínuo (veja os parágrafos 10-5 e 10-8, por exemplo). Mostraremos, porém, que, a partir das equações diferenciais ou das leis correspondentes, resulta que, através de uma superfície por onde passa corrente superficial:

$$\vec{B}_+ - \vec{B}_- = \Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n} . \quad (12-3)$$

Esta equação é equivalente às seguintes:

$$(\vec{B}_+ - \vec{B}_-) \cdot \vec{n} = \Delta B_n = 0 , \quad (12-4)$$

$$(\vec{B}_+ - \vec{B}_-) \cdot \vec{t} = \Delta B_t = \mu_0 \vec{t} \cdot \vec{J}_s \wedge \vec{n} , \quad (12-5)$$

onde \vec{n} é a normal à superfície no ponto considerado, e \vec{t} um ve-

tor unitário qualquer, tangente à superfície; (12-4) decorre de (12-2) ou da equação equivalente:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0,$$

por raciocínio análogo ao que dá a descontinuidade de E_n na Eletrostática; (12-5) decorre de (12-1), ou do Teorema de Ampère.

De fato, consideremos o contorno Γ indicado na Fig. 12-2, com

os dois lados maiores (infinitésimos) paralelos a \vec{t} , e os outros dois (infinitésimos de 2ª ordem) paralelos a \vec{n} . A circulação de \vec{B} é dada por:

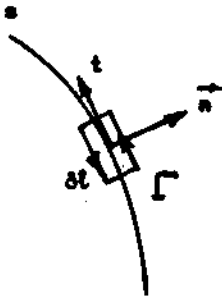


Fig. 12-2

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \delta l (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) \cdot \vec{t},$$

e pelo teorema de Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_s = \mu_0 J_s \delta l,$$

como $J_s = \vec{J}_s \cdot \vec{n} \wedge \vec{t}$, virá:

$$\Delta B_t = \mu_0 \vec{J}_s \cdot \vec{n} \wedge \vec{t} = \mu_0 \vec{t} \cdot \vec{J}_s \wedge \vec{n}, \quad \text{c.q.d.}$$

A equação 12-3 é importante para ajustar as soluções gerais das equações diferenciais de \vec{B} em duas regiões separadas por uma superfície em que $\vec{J}_s \neq 0$.

12 - 4. Equação diferencial do potencial vetor. Se na equação (12-1) substituirmos \vec{B} por $\text{rot } \vec{A}$, obteremos:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{J},$$

ou, aplicando (5-50),

$$\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J}.$$

As três componentes desta equação diferencial de 2^a ordem diferem formalmente da equação de Poisson, (5-16), por apresentarem mais um termo em $\text{div } \vec{A}$. Somos então levados a considerar a possibilidade de impor a condição suplementar:

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (12-6)$$

Ora, de (11-1) vem:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_\infty} dv' \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

pois vale (5-43), e \vec{J} não é função de \vec{r} , sim de \vec{r}' ; v_∞ designa o espaço inteiro. Isto é:

$$\text{div } \vec{A} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v_\infty} dv' \left[\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J} \right],$$

onde $\vec{\nabla}'$ é o operador nabla referente às coordenadas de \vec{r}' . Como $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J} = 0$, o que, como foi visto, decorre de (12-1), teremos, usando o teorema de Gauss (5-35) para a divergência:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A} &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} dv' \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_\infty} ds' \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \end{aligned}$$

Se as correntes estão limitadas a uma região finita do espaço, pode-se escolher s_∞ suficientemente grande, tal que $\vec{J} = 0$ em s_∞ e fora de s_∞ , o que anula a divergência de \vec{A} . Em problemas matemáticos em que há correntes no infinito, apesar de serem idealizações de casos reais, pode-se verificar, em cada caso, que $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.

A possibilidade de impor a condição $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ decorre do fato de que \vec{A} é definido a menos de um termo do tipo $\vec{\nabla}\chi$, cujo rotacional é nulo, pois, ainda com esta definição, valeria (12-2). Assim sendo, se num dado problema o potencial \vec{A}' encontrado não satisfaz (12-6), então podemos aplicar a \vec{A}' uma "transformação padrão" ("gauge") e procurar uma função χ tal que o novo potencial vetor:

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}\chi$$

satisfaça (12-6). Para isso bastará resolver a equação em χ :

$$\operatorname{div} \vec{A}' = - \Delta \chi .$$

Vemos assim que é sempre possível, em Magnetostática, to-

mar $\text{div } \vec{A} = 0$, por uma escolha apropriada de \vec{A} , e então a equação diferencial satisfeita pelo potencial vetor assumirá a forma simplificada:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}, \quad (12-7)$$

cujas três componentes são formalmente idênticas à equação de Poisson da Eletrostática.

Observemos que a expressão (11-1) do potencial vetor poderia ser obtida de (12-7) por analogia com a expressão (4-9) do potencial elétrico, pois V e as componentes de \vec{A} satisfazem à mesma equação diferencial. Tal como na Eletrostática, \vec{A} é contínuo em todo o espaço para distribuições espaciais e superficiais de corrente; é somente descontínuo (e infinito) ao longo de correntes lineares.

* * *

Problemas propostos.

12-1. Demonstre, a partir de (12-7), que se $\vec{J} = J(a)\vec{k}$, sendo \vec{k} constante, então:

$$\vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{k} V(a),$$

onde $V(a)$ é o potencial eletrostático da distribuição de cargas

com $\rho = J$. A partir desse resultado, mostre que:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \vec{J} = 0, \text{ e}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{k} \wedge \vec{E}.$$

12-2. Mostre, por raciocínios de simetria, que o campo de uma corrente uniforme num condutor cilíndrico infinito é da forma:

$$\vec{B} = f(a) \vec{k} \wedge \vec{a}.$$

Demonstre que a equação 12-2 é satisfeita idênticamente. Obtenha e resolva a equação para $f(a)$ que resulta de (12-1), determinando \vec{B} em todo o espaço.

12-3. Resolva o problema anterior calculando primeiro o potencial vetor em todo o espaço, resolvendo as equações diferenciais de \vec{A} e tomando $\vec{A} = 0$ para $|\vec{a}| = R$. Observação: em coordenadas cilíndricas,

$$\Delta = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a} \left(a \frac{\partial}{\partial a} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Mostre preliminarmente que $\vec{A} = \vec{k} f(a)$.

CAPÍTULO 13

DIELÉTRICOS

13 - 1. Polarização. Como foi visto no parágrafo 4-1, podemos dividir os materiais em condutores e isolantes, embora essa classificação não seja rígida. Nos condutores, havendo um campo elétrico, as cargas se movem livremente, sejam as negativas e as positivas (íons), como nos eletrólitos, sejam apenas as negativas (elétrons), como nos metais. Já nos isolantes, não há possibilidade de movimento livre de cargas pelo interior do material, e a aplicação de um campo elétrico produz efeitos diversos. Estes efeitos são de dois tipos, conforme a natureza do material: (a) os materiais de estrutura molecular simétrica têm coincidentes o centro de "gravidade" das cargas positivas (núcleos) e o das cargas negativas (nuvem eletrônica), antes da aplicação do campo; uma vez aplicado o campo elétrico, as cargas positivas se deslocam (pouco) no sentido do campo, as negativas em sentido contrário, de maneira que seus centros de carga, diferindo, passam a constituir dipolos, cujo campo tende a opor-se ao campo externo; (b) os materiais de estrutura molecular assimétrica (como a água, por exemplo) já contêm dipolos permanentes antes da aplicação do campo externo, orientados de maneira caótica, do que resultará um campo total nulo no interior do isolante; pela aplicação do campo externo, ao fenômeno do tipo (a), que ocorre ainda aqui, acrescenta-se outro: os dipolos já existen-

tes ficarão orientados de preferência no sentido do campo (essa orientação preferencial é dificultada pela agitação térmica), e os campos dos dipolos não mais se compensarão, mas se somarão, enfraquecendo ainda aqui o campo aplicado.

Estes fenômenos de formação ou de orientação de dipolos elétricos têm a denominação genérica de "polarização". Quando os efeitos de polarização são consideráveis, os isolantes passam a denominar-se "dielétricos". Na realidade, todas as substâncias exibem esses efeitos; mesmo nos condutores, além dos movimentos das cargas livres, ocorrem os das cargas ligadas. Mas aí a polarização é transitória, porque os elétrons livres movem-se tão rapidamente que logo anulam o campo no seu interior. Entretanto, se aplicarmos num metal um campo elétrico oscilante de frequência suficientemente grande (como o de uma onda luminosa através de uma lâmina fina de cobre, por exemplo), não haverá tempo para a anulação do campo pelo movimento dos elétrons livres, e poderá observar-se a polarização dos átomos.

Dessa maneira, um dielétrico polarizado pode ser visualizado como uma distribuição de dipolos elétricos localizada no vácuo. Estudemos o campo elétrico criado por tal distribuição.

13 - 2. Campo elétrico de uma distribuição volumétrica de dipolos no vácuo. Admitamos que se conheça o momento \vec{p} de cada um dos dipolos. Chama-se "vetor polarização" \vec{P} ao momento de dipolo resultante, por unidade de volume. Teremos (Fig. 13-1):

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4.22)$$

$$\vec{p} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}}{\Delta v} = \frac{d\vec{p}}{dv'} \quad (13-1)$$

densidade de dipolo

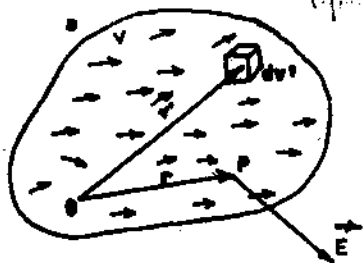


Fig. 13-1

Então, de acordo com (4-22), o potencial elétrico criado no ponto \$P\$ pela distribuição de dipolos, limitada ao volume \$v\$, será:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' ,$$

pois \$\vec{P} dv' = d\vec{p}\$, ou ainda:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \vec{P} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' ,$$

que, integrado por partes, dá:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_v \operatorname{div}' \frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' - \int_v \frac{\operatorname{div}' \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right]$$

Aplicando o teorema de Gauss para a divergência ao 1º termo do 2º membro, virá:

$$\operatorname{div}' \left(\frac{\vec{A}}{f} \right) = f \operatorname{div}' \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla' f$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\vec{P} \cdot \vec{\nabla}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\operatorname{div}' \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' , \quad (13-2)$$

em que s é a fronteira da distribuição.

Se fizermos agora:

$$- \operatorname{div} \vec{P} = \rho' , \quad (13-3)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \sigma' , \quad (13-4)$$

sendo \vec{n} a normal à superfície no ponto considerado, (13-2) poderá ser escrita:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma' ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho' dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ,$$

da qual, no 2º membro, o 2º termo corresponde exatamente ao potencial devido a uma distribuição volumétrica de cargas em v , de densidade ρ' , e o 1º termo corresponde ao potencial de uma distribuição superficial de cargas, sobre s , de densidade σ' , sendo ρ' e σ' dados respectivamente por (13-3) e (13-4).

Conclusão: se numa região considerada, de volume v , existe uma distribuição qualquer de dipolos elétricos tal que o vetor polarização seja igual a \vec{P} (contínuo), então o campo criado por essa distribuição é o mesmo que o de uma distribuição espacial de cargas, contida em v , de densidade $\rho' = -\operatorname{div} \vec{P}$, mais o de uma distribuição superficial de cargas, sobre a fronteira s da região, de densidade $\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}$.

Veremos agora que as distribuições de equivalência σ' e ρ' são formadas com as próprias cargas que constituem os dipolos.

Consideraremos um modelo simplificado da situação real, em que

todos os dipolos sejam idênticos e de momento \vec{p} , paralelo a \vec{P} (na realidade, a agitação térmica impede que isto ocorra). Considere-mos uma camada de espessura $\vec{d} \cdot \vec{n}$, infinitesimal, na fronteira s da distribuição (Fig. 13-2), sendo d a distância entre as cargas do

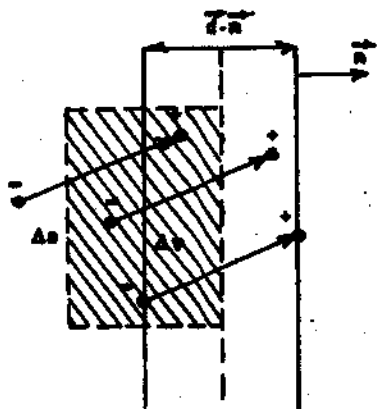


Fig. 13-2

dipolo; então, nesta camada, só haverá cargas positivas. Na camada seguinte, para o interior, haverá cargas tanto positivas quanto negativas, em igual número, se nesta 2ª camada o vetor polarização \vec{P} for igual ao da camada superficial; isto é, a carga total da 2ª camada será nula. Se \vec{P} não for uniforme, isto é, se $\text{div } \vec{P} \neq 0$, não se dará esse cancelamento, surgindo uma distribuição espacial de cargas de polarização, de densidade $\rho' = -\text{div } \vec{P}$.

A carga total positiva Δq , contida na área Δs da camada superficial, pode ser calculada pelo número de centros de dipolos existentes no volume $\Delta v = \vec{d} \cdot \vec{n} \Delta s$ (região achuriada na Fig. 13-2). Portanto, se N é o número de dipolos por unidade de volume,

$$\Delta q = q N \Delta v = q N \vec{d} \cdot \vec{n} \Delta s ,$$

onde q é o valor absoluto de cada uma das cargas dos dipolos. Mas $q N \vec{d} = \vec{P}$, isto é:

$$\Delta q = \vec{P} \cdot \vec{n} \Delta s ,$$

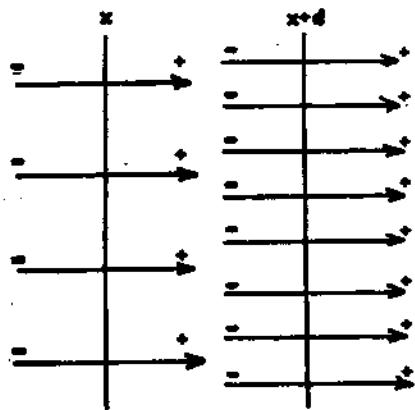
e a densidade superficial das "cargas de polarização", será, em

acôrdo com (13-4):

$$\sigma' = \frac{\Delta q}{\Delta s} = \vec{P} \cdot \vec{n} .$$

Isto acontece porque na superfície da região há uma situação de descontinuidade, o que não se dá no interior da distribuição, em que \vec{P} varia continuamente. Aí não haverá distribuições superficiais ($\sigma' = 0$), mas distribuição espacial de carga equivalente (ρ').

A Fig. 13-3 mostra como surgem essas cargas, quando \vec{P} cresce ^{numa} na direção qualquer. Por simplicidade,



(Fig. 13-3)

consideraremos o caso em que \vec{P} tem a direção do eixo dos x e cresce em módulo nesta direção: $P = P(x)$. Além disso, os dipolos com cargas $+q$ e $-q$, distando d uma da outra, foram todos colocados com centros nos planos $x, x + d, x + 2d, \text{etc.}$ A carga entre os planos x e $x + d$ é negativa e pode ser calculada,

para uma área Δs , normal ao eixo dos x :

$$\Delta q = p [N(x) - N(x + d)] \Delta s, \text{ isto é:}$$

$$\rho' = \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{P(x) - P(x + d)}{d \cdot \Delta s} \Delta s = - \frac{P(x + d) - P(x)}{d} ;$$

para $d \rightarrow 0$, tem-se:

$$\rho' = \frac{dq}{dv} = - \frac{dP}{dx} .$$

Este resultado é idêntico a (13-3) quando $\vec{P} = \vec{I} P(x)$.

Na verdade, podemos obter rigorosamente (13-3) a partir de (13-4). Consideremos para isso uma superfície fechada s , inteiramente contida na distribuição de dipolos (Fig. 13-4). Alguns dipolos

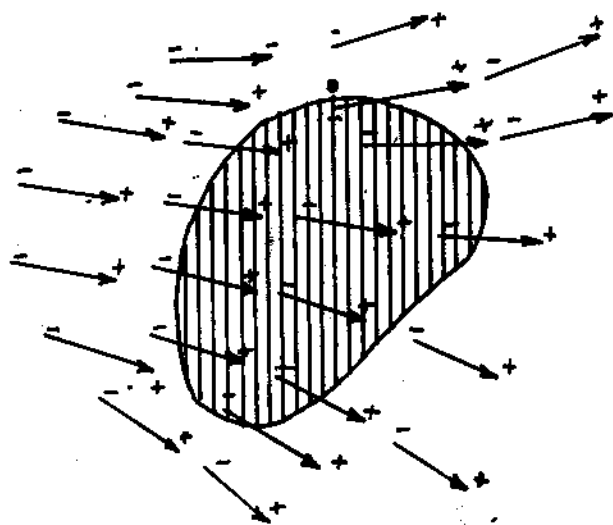


Fig. 13-4

los têm apenas a carga positiva no interior do volume v limitado por s , alguns apenas a carga negativa, e outros têm ambas as cargas seja no interior seja no exterior de v . Consideremos agora os dipolos que têm pelo menos a carga positiva ou a negativa no interior de s .

Sua carga total Q é nula. As cargas (dêsses dipolos) que caem fora de s constituem uma distribuição superficial σ' , que se verifica (pelo mesmo raciocínio já feito) ser dada por (13-4). As cargas que caem no interior de s formam uma distribuição espacial com densidade ρ' a determinar. Sendo $Q = 0$, vem:

$$\int_v \rho' dv' + \int_s \sigma' ds' = 0 ; \quad (13-5)$$

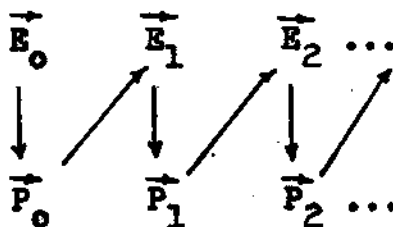
logo, ρ' e σ' não são quantidades independentes. A equação (13-5) também se escreve:

$$\int_V \rho' dv' + \int_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = 0, \text{ ou :}$$

$$\int_V \rho' dv' + \int_V \text{div } \vec{P} dv' = 0,$$

para v qualquer, o que dará (13-3).

13 - 3. Vetor "deslocamento elétrico". Equações diferenciais. Vejamos agora o que ocorre quando colocamos um dielétrico numa região de vácuo onde existia antes um campo elétrico \vec{E}_0 . É claro que o campo \vec{E}_0 polariza o dielétrico, isto é, produz nele uma polarização \vec{P}_0 ; desta resulta, por outro lado, um campo elétrico \vec{E}_1 , responsável por nova polarização \vec{P}_1 , que por sua vez gera um campo elétrico \vec{E}_2 , e assim por diante:



Então o campo elétrico resultante \vec{E} e a polarização resultante \vec{P} serão dados por séries:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots$$

O cálculo de \vec{E} e de \vec{P} constitui problema aparentemente complicado, mas poderá, em muitos casos, ser resolvido de maneira muito simples.

se usarmos o seguinte raciocínio: na ausência do dielétrico, o campo \vec{E}_0 resultava de uma distribuição de cargas externas, de densidade ρ ; portanto \vec{E}_0 satisfaz às equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E}_0 &= \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, o campo adicional no dielétrico, \vec{E}' , resultou de uma distribuição de polarização \vec{P} equivalente a uma distribuição de cargas de polarização de densidade ρ' , de tal maneira que o campo resultante $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$, produzido pelas cargas ρ e ρ' , satisfaz às equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} &= \rho + \rho', \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0. \end{aligned}$$

(13-6)

A última equação decorre do fato de que \vec{E}' (e portanto, \vec{E}) também deriva de um potencial. Usando agora (13-3), virá:

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho. \quad -\operatorname{div} \vec{P} = \rho' \quad (13-3)$$

Chamando "vetor deslocamento" ao vetor:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

(13-7)

teremos:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

(13-8)

As equações (13-6) e (13-8) constituem as equações diferenciais da Eletrostática num meio material, sendo \vec{E} e \vec{D} ligados por (13-7).

O vetor deslocamento elétrico é medido, no sistema MKS, em $C \cdot m^{-2}$

(ver parágrafo 13-5).

Verifica-se experimentalmente que o vetor polarização é, em geral, proporcional ao campo elétrico resultante no interior do dielétrico; a constante de proporcionalidade α , chamada "polarizabilidade" do material, vale:

$$\alpha = \chi_e \epsilon_0,$$

sendo χ_e a "susceptibilidade elétrica" do material. Assim:

$$\vec{P} = \alpha \vec{E} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (13-9)$$

e portanto, de (13-7) e (13-9), virá:

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E};$$

chamando:

$$k_e = 1 + \chi_e \quad (13-10)$$

a "constante dielétrica" do material, e

$$\epsilon = k_e \epsilon_0 \quad (13-11)$$

sua "permitividade elétrica", virá finalmente:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (13-12)$$

e o problema proposto ficará inteiramente resolvido, se for resolvido o sistema constituído pelas equações (13-6), (13-8) e (13-12). A tabela a seguir fornece a constante dielétrica de algumas substâncias isolantes (R. M., 1960, pg. 80). A constante dielétrica é

Material	k_e
Vidro	5 - 10
Mica	6
Borracha	2 - 3,5
Madeira	2,5 - 8
Alcool (0° C)	28,4
Água (0° C)	88
Água (20° C)	80
Ar (1 atm)	1,00059
Ar (100 atm)	1,0548

um número adimensional; a permitividade elétrica se mede em farad. m^{-1} (ver parágrafo 15-9).

É preciso observar que a permitividade elétrica ϵ só é um escalar, valendo portanto (13-12), nos meios materiais isotrópicos. Em meios cristalinos, onde os átomos se distribuem com certa regularidade, as propriedades elétricas do meio dependem da direção.

Se um campo elétrico \vec{E} , de componentes $E_x = E_1$, $E_y = E_2$ e $E_z = E_3$, for aplicado em um meio anisotrópico, as componentes do vetor deslocamento não serão mais dadas por (13-12), sim pela nova equação:

$$D_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j$$

(os índices 1, 2, 3 correspondendo às componentes x, y, z), da qual resulta que os vetores \vec{E} e \vec{D} deixam de ser paralelos. Demonstra-se que o tensor ϵ_{ij} é simétrico, e como tal pode ser diagonalizado, o que significa fisicamente que no meio cristalino há 3 direções privilegiadas. Para cada uma delas se tem:

$$D_i = \epsilon'_i E_i,$$

sendo $i = 1, 2, 3$. Se, então, o campo elétrico tiver por direção uma dessas direções privilegiadas, o deslocamento das cargas (e

portanto a polarização) se fará nessa mesma direção. Se o meio é isotrópico, demonstra-se que, em qualquer sistema de coordenadas, o tensor permitividade elétrica assume a forma:

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad (\text{ou } \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon; \epsilon_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j)$$

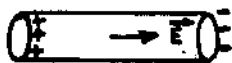
podendo, portanto, ser assimilado a um escalar.

As mesmas observações poderiam ter sido feitas em relação à condutividade elétrica, que nos meios anisotrópicos se comporta como um tensor de componentes γ_{ij} , de tal maneira que, em lugar de (9-7), teríamos:

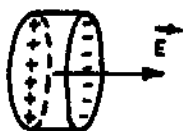
$$J_i = \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} E_j .$$

13 - 4. Medida do campo elétrico total. Uma experiência hipotética, realizável em princípio, será fazer no interior do dielétrico uma cavidade pequena e medir o valor do campo elétrico em um de seus pontos. O problema será apenas procurar a forma que deverá ter essa cavidade, afim de que a retirada da porção de dielétrico correspondente não venha a alterar apreciavelmente o valor do campo. Suponhamos que se conheça a priori a direção do campo, e tomemos uma cavidade cilíndrica de geratriz paralela ao campo; se o cilindro for bastante longo (Fig. 13-5a), então as cargas de polari-

zação alterarão pouco o valor do campo no ponto médio, onde é medido, ao contrário do que ocorre se o cilindro fôr achatado (Fig. 13-5b). A 1ª forma



(a)



(b)

Fig. 13-5

deve ser então a escolhida para medir E . Se não conhecemos a direção do campo, para determiná-la praticamos no dielétrico a cavidade cilíndrica numa direção qualquer; o valor do campo aí medido será sempre maior

do que o valor verdadeiro, como se pode concluir facilmente da Fig. 13-6, em que \vec{E}' é o campo criado pelas cargas superficiais de pola-

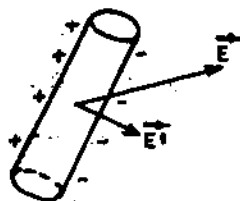


Fig. 13-6

rização nas paredes da cavidade. A direção de \vec{E} será então aquela direção do eixo do cilindro para a qual o valor do campo medido é mínimo.

13 - 5. Teorema de Gauss generalizado. De (13-8) concluímos, pela aplicação do teorema de Gauss para divergência, que a expressão de teorema de Gauss aplicado a um dielétrico é:

$$\int_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = q_{int}, \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad (13-8) \quad (13-13)$$

onde s é uma superfície fechada mergulhada no dielétrico e q_{int} o valor total das cargas livres (ficando excluídas, portanto, as cargas ligadas, ou de polarização) existentes no interior de s ; (13-13) exprime o teorema de Gauss generalizado, válido para um

meio material qualquer. De (13-13) vemos que o vetor deslocamento elétrico é medido, no sistema MKS, em coulomb por metro quadrado.

Se o meio é isotrópico, vale (13-12), e teremos:

$$\int_s \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_{\text{int}},$$

e se além disso o meio é homogêneo, isto é, se $\epsilon = \text{constante}$, teremos ainda:

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon}. \quad (13-14)$$

É muito importante frisar que (13-13) vale sempre, mas que (13-14) deixa de ser válida quando ϵ varia na região limitada por s . É o

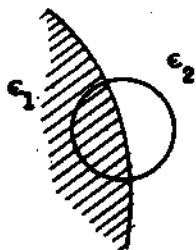


Fig. 13-7

que ocorre, por exemplo, quando s envolve parte da superfície de separação de dois meios de permitividades diferentes (Fig. 13-7).

13 - 6. Condições ao contorno. De modo geral, num dielétrico isotrópico e não homogêneo, ϵ é função de posição. Um dos casos mais frequentes de variação de ϵ é aquele em que existe um meio dielétrico de constante dielétrica k_0 em presença do ar ou do vácuo (a constante dielétrica do vácuo é 1; a do ar é aproximadamente a mesma), ou então dois ou mais dielétricos em presença. Se tivermos uma certa porção de dielétrico envolvida de ar ou de vácuo, a superfície do dielétrico é uma região em que ϵ está variando, e portan

to decorre de (13-9) e (13-4) que sôbre esta superfície haverá cargas de polarização.

Suponhamos que numa certa região do espaço, no vácuo, é dada uma densidade volumétrica de cargas, e que sôbre a superfície dessa região é dada uma densidade superficial de cargas; sabemos que nas equações diferenciais da Eletrostática no vácuo (cap. 5) não comparecem cargas superficiais; mas, ao aplicarmos o teorema de

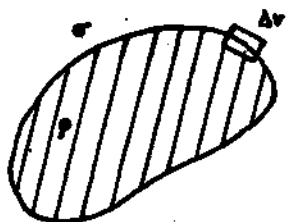


Fig. 13-8

gerais das equações diferenciais nas superfícies de descontinuidade que separam as diversas regiões com

dielétricos distintos. Apliquemos o teorema de Gauss a um pequeno cilindro de volume Δv , tomado na superfície de um dielétrico (Fig. 13-9). O teorema deverá ser usado em sua forma generalizada (13-13), como ficou visto no parágrafo anterior. Como o volume considerado é pequeno, podemos escrever:

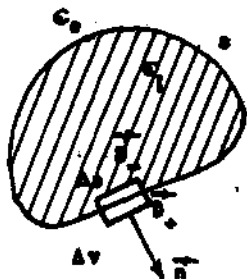


Fig. 13-9

$$\int_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = (D_{n+} - D_{n-}) \Delta s = \Delta D_n \Delta s = \sigma \Delta s,$$

onde σ é a densidade superficial de cargas livres, e Δs a área das bases do cilindro, de altura infinitésima em relação ao diâmetro das bases. Tem-se portanto:

$$\Delta D_n = \sigma,$$

(13-15)

isto é, a descontinuidade da componente normal de \vec{D} , através da superfície de separação dos dois meios, é igual à densidade superficial de carga livre existente na superfície. Se $\sigma = 0$, isto é, se sobre a superfície não houver cargas livres, a componente normal de \vec{D} é contínua, isto é:

$$\Delta D_n = D_{n+} - D_{n-} = 0,$$

$$\text{div } \epsilon_0 \vec{E} = \rho + \rho', \quad (13-6)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

(13-16)

ou ainda:

$$\epsilon_1 E_{n-} = \epsilon_2 E_{n+}.$$

Por outro lado, de (13-6) resulta, ao aplicarmos o teorema de Stokes para o rotacional a um contorno C retangular, infinitesimal, tomado como indica a Fig. 13-10:

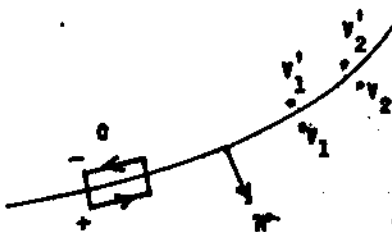


Fig. 13-10

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_s \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0,$$

isto é:

$$\Delta E_t = E_{t+} - E_{t-} = 0, \quad (13-17)$$

onde tomamos os lados do retângulo C , normais a s , como infinitésimos de ordem superior aos outros dois lados. Portanto, a componente tangencial do campo elétrico, através de uma superfície de separação de dois dielétricos, é sempre contínua, haja ou não haja cargas sobre ela. Poderemos chegar a essa mesma conclusão por um raciocínio físico: tomemos 2 pontos próximos localizados junto à superfície e seus correspondentes do outro lado. O campo tangencial será proporcional a $V_1 - V_2$ de um lado, a $V_1' - V_2'$ do outro lado da superfície; como o potencial é contínuo através dela (a não ser para a dupla camada), também será contínua a componente tangencial do campo.

13 - 7. Campo de uma carga puntiforme localizada no centro de uma camada esférica dielétrica.

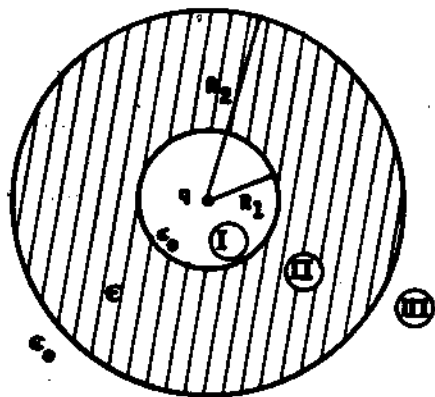


Fig. 13-11

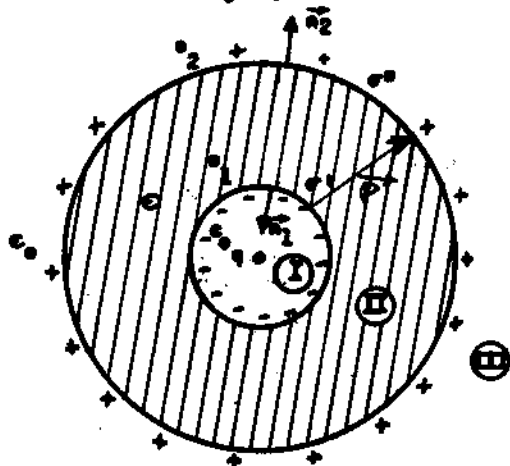


Fig. 13-12

Sejam q esta carga, ϵ a permissividade do dielétrico, e R_1 e R_2 os raios interno e externo da camada (Fig. 13-11). Resolveremos este problema por 3 processos diferentes.

1º Processo: Cálculo direto - Visualizemos o dielétrico como uma distribuição de dipolos localizados no vácuo, e utilizemos a conclusão alcançada no parágrafo 13-2: o campo elétrico gerado pela carga q e pelas cargas de pola

rização é o mesmo que o gerado pela carga q , mais uma distribuição espacial de cargas de densidade ρ' localizada na região II e ainda pelas distribuições superficiais, nas fronteiras desta região, de densidades σ' e σ'' , estando tôdas essas cargas localizadas no vácuo (Fig. 13-12).

Como $\text{div } \vec{E} = 0$, exceto na origem, \vec{P} é proporcional a \vec{E} , por (13-9), e ϵ constante, segue-se de (13-3) que $\rho' = 0$.

Aplicando-se o teorema de Gauss à região I (ou usando a expressão do campo de distribuições uniformes em superfícies esféricas), obtém-se imediatamente o valor do campo aí. Aplicado à região II, na forma (3-5), o teorema de Gauss dá:

$$E_2 = \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

onde $q' = 4\pi R_1^2 \sigma'$; ora, de (13-4) e (13-9) vemos que:

$$\sigma' = \vec{P}(R_1) \cdot \vec{n}_1 = -P(R_1) = -\epsilon_0 \chi_e E_2(R_1), \text{ e portanto:}$$

$$q' = -4\pi R_1^2 \epsilon_0 \chi_e \frac{q + q'}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}, \text{ isto é:}$$

$$q' = -\chi_e (q + q') = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} q \therefore q + q' = \frac{q}{1 + \chi_e} = \frac{q}{k_e},$$

por (13-10); tem-se então:

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 k_e r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2},$$

por (13-11). Aplicado à região III, o teorema de Gauss dá:

$$E_3 = \frac{q + q' + q''}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

onde $q'' = 4\pi R_2^2 \sigma''$; ora,

$$\sigma'' = \vec{P}(R_2) \cdot \vec{n}_2 = P(R_2) = \epsilon_0 \chi_e E_2(R_2), \quad \text{e portanto:}$$

$$q'' = 4\pi R_2^2 \epsilon_0 \chi_e \frac{q}{4\pi \epsilon_0 k_e R_2^2} = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} q = -q', \quad \text{isto é:}$$

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

resultados que coincidem com os já obtidos.

Observe-se que, neste caso, a equação (13-5) é obviamente satisfeita.

2º Processo: Utilização do Teorema de Gauss - Sua expressão (13-14), aplicada a uma esfera de raio r , centrada em q e contida na região I, dará:

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \text{isto é,}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r < R_1;$$

para a região II:

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon}, \quad \text{isto é,}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad R_1 < r < R_2;$$

e para a região III resultado idêntico ao encontrado para a região I, o qual, aliás, coincide com (2-9):

$$\vec{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r > R_2.$$

3º Processo: Solução das Equações Diferenciais - Por raciocínios de simetria, já empregados no processo anterior, vemos que o campo é radial em todo o espaço, e procuremos a forma que deve ter, em cada uma das regiões consideradas:

$$\vec{E}_1 = f_1(r) \vec{r}; \quad \vec{E}_2 = f_2(r) \vec{r}; \quad \vec{E}_3 = f_3(r) \vec{r}.$$

A equação (13-6) é satisfeita idênticamente; a equação (13-8) dá:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\epsilon \vec{E}) = 0, \quad r \neq 0.$$

Em cada região, ϵ é constante; portanto tem-se para $f = f_1$ ou f_2 ou f_3 , conforme a região:

$$\operatorname{div}(f \vec{r}) = 0, \quad \text{isto é, usando (5-62):}$$

$$r \frac{df}{dr} = -3f \rightarrow \frac{df}{f} = -3 \frac{dr}{r}.$$

Integrando, vem:

$$f = \frac{A}{r^3}, \quad \text{e portanto:}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{A_1}{r^3} \vec{r}; \quad \vec{E}_2 = \frac{A_2}{r^3} \vec{r}; \quad \vec{E}_3 = \frac{A_3}{r^3} \vec{r}.$$

Como, num entôrno infinitésimo de uma carga puntiforme q , o campo tem que ser da forma:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{E}_0,$$

onde o campo constante (nesse entôrno) \vec{E}_0 é produzido pelas demais cargas, temos, por comparação com \vec{E}_1 nesse entôrno, que:

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Consideremos agora as condições ao contôrno para $r = R_1$ e $r = R_2$. Como E_t é sempre nulo, a condição $\Delta E_t = 0$ não dá qualquer restrição. Consideremos, portanto:

$$\Delta D_n = 0,$$

pois $\sigma = 0$; para $r = R$, vem:

$$D_{1n} = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{R_1^2} = \frac{A_2}{R_1^2} = D_{2n}, \text{ isto é,}$$

$$\vec{D}_2 = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Analogamente, tomando $r = R_2$, vem:

$$\vec{D}_3 = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

13 - 8. Meios indefinidos. Se as cargas estão localizadas em meios indefinidos homogêneos, para os quais ϵ é constante, as equações diferenciais (13-8) e (13-6) podem ser escritas indiferentemente como um sistema de equações diferenciais em \vec{E} :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \end{cases} \quad (13-18)$$

pois $\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \epsilon \vec{E} = \epsilon \operatorname{div} \vec{E}$, ou como um sistema de equações diferenciais em \vec{D} :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{D} = 0, \end{cases} \quad (13-19)$$

pois $\operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \vec{D}$.

As equações (13-19) permitem enunciar um teorema muito importante: o vetor deslocamento num meio indefinido é independente de ϵ .

Se as cargas livres forem as mesmas numa distribuição no vácuo ou num dielétrico, os vetores \vec{D}_0 e \vec{D} correspondentes serão iguais, isto é, $\epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon \vec{E}$, e como $\epsilon = k_e \epsilon_0$, tem-se sempre, neste caso:

$$\vec{E} = \frac{1}{k_e} \vec{E}_0.$$

Então, se as distribuições de cargas dadas não estiverem localizadas no vácuo, sim num meio dielétrico indefinido e homogêneo, o campo elétrico gerado por elas é o mesmo que no vácuo, a menos do fator $\frac{1}{k_e}$. Assim, por exemplo, o campo gerado por uma carga puntiforme mergulhada num meio dielétrico indefinido, de permitividade ϵ , é:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (13-20)$$

e o vetor deslocamento correspondente é:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (13-21)$$

Por outro lado, de (13-18) conclui-se que a equação de Poisson, num meio dielétrico indefinido e homogêneo, assume a forma:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (13-22)$$

Portanto, se um sistema de condutores é mantido a potenciais dados ($\rho = 0$), o potencial (e portanto \vec{E}) em todo o espaço é o mesmo que no vácuo, qualquer que seja o dielétrico (indefinido) em que estão os condutores:

$$V = V_0; \quad \vec{E} = \vec{E}_0.$$

Por outro lado, temos:

$$\vec{D} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \vec{D}_0 = k_e \vec{D}_0; \quad \sigma = k_e \sigma_0.$$

Em particular, êsses resultados se aplicam ao caso de um condensador com dielétrico, para o campo (e o vetor deslocamento) entre as placas, como verificaremos a seguir.

13 - 9. Condensador plano. Se entre as placas de um condensador plano, com densidade de carga σ_0 dada, no vácuo, fôr inserido um dielétrico de permitividade ϵ (Fig. 13-13), as cargas de polarização, no dielétrico, enfraquecerão o campo entre as placas, que passará a ser:

$$E = \frac{\sigma_0}{\epsilon} = \frac{1}{k_e} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{1}{k_e} E_0,$$

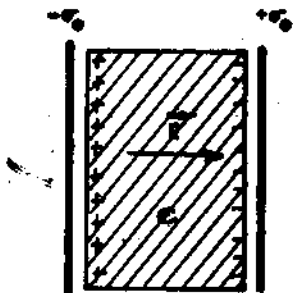


Fig. 13-13

e também a diferença de potencial entre as placas, que passará a ser:

$$\Delta V = \frac{\sigma_0 d}{\epsilon} = \frac{1}{k_e} \Delta V_0$$

(onde d é a distância entre as placas), sendo \vec{E}_0 e ΔV_0 o campo e a diferença de potencial entre as placas, antes da inserção do dielétrico (parágrafo 8-5). Conseqüentemente, a capacidade do condensador será agora:

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = k_e \frac{Q_0}{\Delta V_0} = k_e C_0,$$

isto é, a capacidade de um condensador plano aumenta k_e vezes quando se introduz entre suas placas, onde antes era vácuo, um dielétrico.

co de constante dielétrica k_e . Demonstra-se facilmente que isto o corre sempre, qualquer que seja a forma geométrica do condensador.

A partir da expressão:

$$C = \frac{\epsilon A}{d},$$

define-se a unidade de permitividade elétrica, no sistema MKS, o "farad por metro", como sendo a permitividade de um dielétrico tal que, inserido entre as placas de um condensador plano cuja razão $\frac{A}{d}$ valha 1 m, faz que sua capacidade seja de 1 farad.

Se agora quisermos manter fixa a diferença de potencial entre as placas, ligando-as, por exemplo, a uma bateria (Fig. 13-14), esta diferença de potencial, ΔV , depois de inserido o dielétrico, permanecerá a mesma que no vácuo, ΔV_0 :

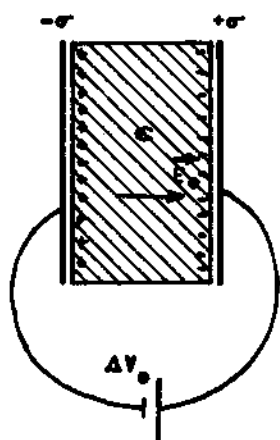


Fig. 13-14

$$\Delta V = \Delta V_0,$$

e conseqüentemente o campo elétrico também se manterá:

$$\vec{E} = \vec{E}_0.$$

Ora, sabemos que as cargas de polarização do dielétrico enfraquecem o campo no seu interior, e portanto êste efeito só poderia ter

sido compensado por um aumento de cargas livres sôbre as placas do condensador: σ terá que ser agora maior do que σ_0 . De fato:

$$\sigma = \epsilon E = \epsilon E_0 = k_e \epsilon_0 E_0 = k_e \sigma_0,$$

isto é, a carga sôbre as placas tornou-se k_e vêzes maior. Verifica-se, ^{assim} ainda neste caso, que a capacidade do condensador também aumentou k_e vêzes. Medindo-se a capacidade de um condensador no vácuo, C_0 , e depois a capacidade do mesmo condensador no qual se introduziu um material dielétrico, C , pode-se encontrar a constante dielétrica do material, calculando a razão:

$$k_e = \frac{C}{C_0} .$$

13 - 10. Condensador com dois dielétricos. Se ϵ varia entre as placas do condensador, como no caso particular de 2 dielétricos ho-

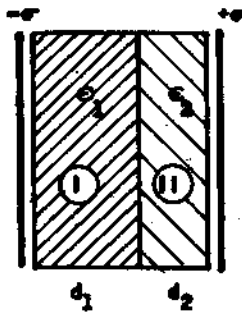


Fig. 13-15

mogêneos superpostos (Fig. 13-15), de permitividades ϵ_1 e ϵ_2 , podemos calcular a capacidade do condensador mantendo fixas as cargas livres sôbre as placas, e lembrando que o vetor deslocamento \vec{D} não depende de ϵ e é, portanto, constante entre as placas e igual ao que seria se entre elas houvesse vácuo.

Isso decorre das equações (13-19), válidas fora da superfície de separação dos dielétricos (na qual ϵ varia), e do fato de que \vec{D} é contínuo nessa superfície, sôbre a qual não há cargas:

$$\Delta D_n = 0, \Delta D_t = \epsilon_1 E_{1t} - \epsilon_2 E_{2t} = 0 .$$

Teremos então para valor do campo nas regiões I e II respectivamente

te:

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = \frac{Q}{\epsilon_1 A},$$

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{Q}{\epsilon_2 A},$$

onde Q é o valor absoluto da carga em cada placa e A sua área. A diferença de potencial entre as placas será então:

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q}{A} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right),$$

onde d_1 e d_2 são as espessuras dos dois dielétricos. Finalmente, a capacidade do condensador será:

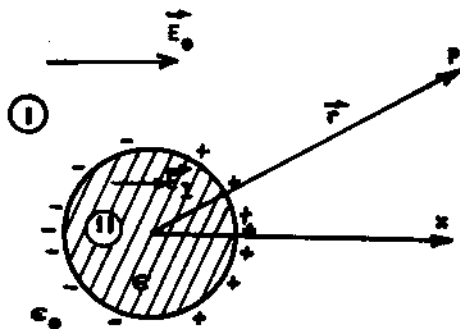
$$C = \frac{A}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}.$$

Observemos que C está relacionado com as capacidades C_1 e C_2 que teriam 2 condensadores de espessuras d_1 e d_2 , contendo dielétricos de permitividades ϵ_1 e ϵ_2 respectivamente, por uma fórmula do tipo de (8-19), pela qual se calcula a capacidade de um sistema de condensadores associados em série. De fato:

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

13 - 11. Esfera dielétrica em campo uniforme. Na resolução de problemas eletrostáticos envolvendo dielétricos, é preciso sempre lembrar que as soluções encontradas devem satisfazer às equações de Laplace e Poisson, e que continua válido o teorema da unicidade do potencial. Assim sendo, é conveniente não perder de vista problemas já resolvidos envolvendo condutores no vácuo, e testar, nos problemas com dielétricos, soluções sugeridas pelos problemas correspondentes, com condutores. Se tal solução satisfizer às equações diferenciais e às condições ao contorno, concluiremos ser ela a solução do problema.

Para o problema proposto aqui, vamos, por analogia com o problema já resolvido no parágrafo 6-10 da esfera condutora num campo uniforme, tentar a solução (Fig.



Figs. 13-16

uniforme, tentar a solução (Fig. 13-16):

$$V = \begin{cases} -E_0 r \cos \theta + \frac{b \cos \theta}{r^2}, & r > R, \\ -E_1 r \cos \theta, & r < R, \end{cases} \quad (13-23)$$

onde já tomamos nula a constante a menos da qual o potencial se define, e onde supusemos constante, porém não nulo, o campo no interior do dielétrico; de fato, aqui devemos esperar que a polarização não seja suficientemente grande para anular completamente o campo no interior da esfera, como acontece quando a esfera é condutora. Para pontos externos, estamos admitindo que o campo seja o resultado da superposição do campo uniforme dado e do campo de dipolo elétrico, orientado segundo x e localizado na origem, como no caso da esfera

condutora. As expressões (13-23) são soluções da equação de Laplace no interior e no exterior da esfera, e dão o campo \vec{E}_0 para distâncias suficientemente grandes. Veremos que existem valores das constantes E_1 e b que permitem fazer o ajustamento em todos os pontos da superfície da esfera; as expressões (13-23) constituirão uma solução para o nosso problema, portanto a solução.

Aplicando à superfície da esfera a condição ao contorno (13-17) para o campo, que corresponde à continuidade do potencial, virá:

$$- E_0 R \cos \theta + \frac{b \cos \theta}{R^2} = - E_1 R \cos \theta,$$

isto é:

$$E_1 = E_0 - \frac{b}{R^3}. \quad (13-24)$$

Aplicando a condição (13-16), que também se exprime:

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial V_I}{\partial r} \right)_R = \epsilon \left(\frac{\partial V_{II}}{\partial r} \right)_R,$$

e é válida por não haver cargas livres sobre a esfera, virá:

$$- E_0 \epsilon_0 \cos \theta - \frac{2b \epsilon_0 \cos \theta}{R^3} = - \epsilon E_1 \cos \theta,$$

isto é:

$$E_1 = \frac{E_0}{k_0} + \frac{2b}{k_0 R^3}. \quad (13-25)$$

Resolvendo as equações (13-24) e (13-25) encontramos, para as constantes procuradas, os valores:

$$b = E_0 R^3 \frac{k_e - 1}{k_e + 2},$$

$$E_1 = \frac{3}{k_e + 2} E_0 \longrightarrow \underline{\underline{\vec{E}_1 = \frac{3}{k_e + 2} \vec{E}_0}}, \quad r < R. \quad (13-26)$$

Vê-se então que o momento de dipolo da esfera é:

$$p = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3 \frac{k_e - 1}{k_e + 2},$$

e com êste valor, V se escreve, na região I:

$$V = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad r \geq R.$$

O vetor polarização tem por módulo:

$$P = \frac{p}{v} = 3\epsilon_0 E_0 \frac{k_e - 1}{k_e + 2},$$

onde v é o volume da esfera, e a polarizabilidade vale, portanto,

$$\alpha = \frac{p}{E_1} = \epsilon_0 (k_e - 1) = \epsilon_0 \chi_e,$$

de acôrdo com (13-9).

O campo elétrico no interior da esfera, dado por (13-26), é evidentemente menor do que E_0 , pois k_e é um número maior do que 1.

O vetor deslocamento no interior da esfera vale:

$$\vec{D} = \frac{3\epsilon}{k_e + 2} \vec{E}_0, \quad r < R,$$

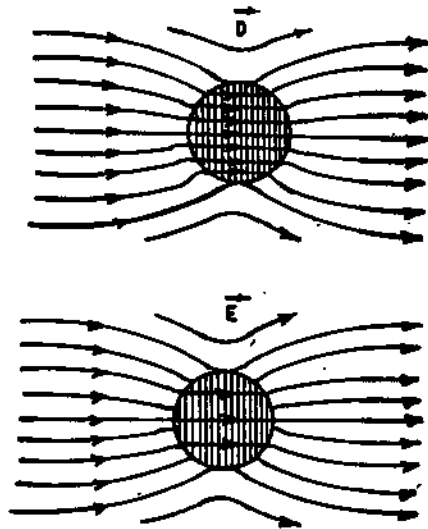


Fig. 13-17

e as linhas de campo de \vec{E} e de \vec{D} estão representadas na Fig. 13-17. A densidade superficial de cargas de polarização sobre a esfera pode ser calculada por (13-4) e vale:

$$\sigma' = 3\epsilon_0 E_0 \frac{k_e - 1}{k_e + 2} \cos\theta.$$

13-12. Método das imagens elétricas. Este método, pelas razões apresentadas no parágrafo anterior, pode ser empregado para a resolução de problemas com dielétricos, e é de grande utilidade em muitos casos.

Tomemos, por exemplo, uma carga puntiforme q localizada no vá-

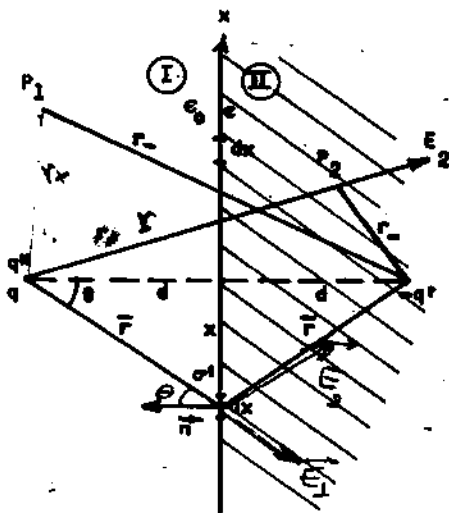


Fig. 13-18

cuo, a uma distância d da face plana de um dielétrico infinito, de permitividade ϵ (Fig. 13-18). Vimos no parágrafo 6-5 que, quando se trata de condutor, o campo da carga q , que é radial, anula-se completamente no seu interior, por efeito da indução; já no caso de um dielétrico, a polariza-

ção produz efeito menor, e o campo elétrico no seu interior é cancelado apenas em parte, como veremos, permanecendo radial. O valor total das cargas de polarização, na superfície do dielétrico, será portanto inferior a q . Tentemos então verificar se a solução é do seguinte tipo: a) à esquerda do plano, na região I, o campo é o criado pela carga q e pelas cargas de polarização; admitiremos que o campo das cargas de polarização é nessa região equivalente ao da imagem $-q'$, à direita do plano, como se estivesse no vácuo; b) na região II, o campo é o criado pela carga q e pelas cargas de polarização, representadas por sua imagem $-q'$, agora situada na posição da própria carga q : o efeito total, na região II, é então o de uma única carga, localizada no vácuo na posição de q , e valendo $q'' = q - q'$ (o fato expresso nesta última relação, intuitivo fisicamente, será ignorado, para ser obtido analiticamente a partir de uma das condições ao contorno).

Tôdas essas considerações equivalem a admitir, para o potencial, a forma:

$$V = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q'}{r_-} \right), & \text{na região I,} \\ \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 r}, & \text{na região II.} \end{cases}$$

① A continuidade do potencial sobre o plano dá:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 r},$$

o que fornece a equação já intuída:

$$q'' = q - q' . \quad (13-27)$$

① A continuidade da componente normal de \vec{D} (não há cargas livres sobre o plano) dá: $E = \nabla V$

$$\frac{\epsilon_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta + \frac{\epsilon_0 q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = \frac{\epsilon q''}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta ,$$

que fornece a 2^a equação nas constantes a determinar, q' e q'' :

$$q + q' = k_e q'' . \quad (13-28)$$

Resolvendo (13-27) e (13-28) obtemos:

$$q' = \frac{k_e - 1}{k_e + 1} q ,$$

$$q'' = \frac{2}{k_e + 1} q ,$$

o que dará finalmente para o potencial:

$$V = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{k_e - 1}{k_e + 1} \frac{1}{r_-} \right) , & \text{na região I,} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{2k_e}{k_e + 1} \frac{1}{r} , & \text{na região II;} \end{cases}$$

para o campo elétrico:

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{k_e - 1}{k_e + 1} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right), & \text{na região I,} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{2k_e}{k_e + 1} \frac{\vec{r}}{r^3}, & \text{na região II,} \end{cases}$$

e para o vetor deslocamento:

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi} \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{k_e - 1}{k_e + 1} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right), & \text{na região I,} \\ \frac{q}{4\pi} \frac{2k_e}{k_e + 1} \frac{\vec{r}}{r^3}, & \text{na região II.} \end{cases}$$

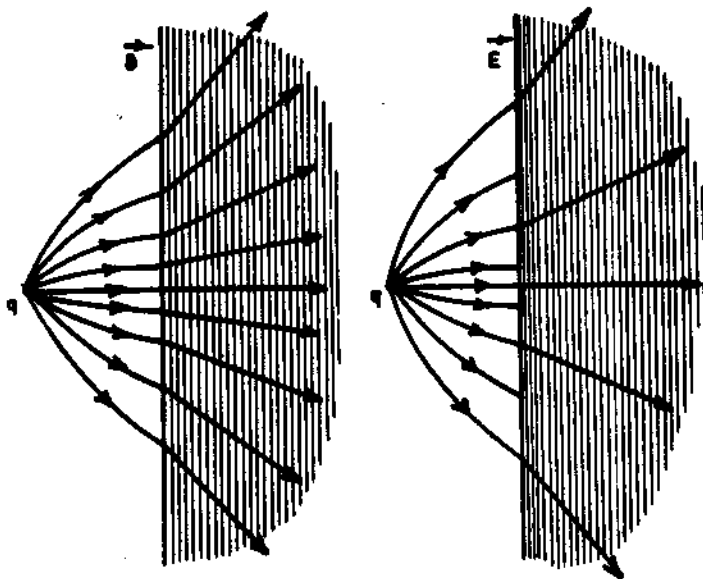


Fig. 13-19

Verifica-se facilmente que o valor da componente normal do campo elétrico, à esquerda do plano, é k_e vezes maior do que à direita; por isso, as linhas de campo de \vec{D} e \vec{E} têm a configuração apresentada na Fig. 13-19.

A densidade superficial de cargas de polarização sôbre o plano pode ser

calculada por (13-4), e vale:

$$\sigma' = \epsilon_e \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n} = - \frac{2 \epsilon_e}{k_e + 1} \frac{q}{4\pi r^2} \cos \theta ;$$

e a carga total de polarização (Fig. 13-18):

$$Q' = \int \sigma' ds = - \frac{2 \epsilon_e q d}{4\pi (k_e + 1)} \int_0^{\infty} \frac{2\pi x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = - \frac{\epsilon_e}{k_e + 1} q = - q'.$$

* * *

Problemas propostos:

- 13-1. Demonstre que (13-4) continuará válida, mesmo que não se admita a hipótese simplificadora de que todos os dipolos tenham momento idêntico a \vec{p} , mas sim que a fração f_1 do total tenha momento \vec{p}_1 , a fração f_2 tenha momento \vec{p}_2 , etc.
- 13-2. Usando as propriedades de continuidade das componentes dos vetores \vec{E} e \vec{D} quando se atravessa a superfície de separação de dois meios, de constantes dielétricas k_1 e k_2 , obtenha a lei de refração das linhas de força.
- 13-3. Num condensador plano estão inseridos 2 dielétricos, de per

mitividades ϵ_1 e ϵ_2 , conforme indica a Fig. 13-20; a) calcule a capacidade do condensador, e estabeleça a analogia entre o valor encontrado e a fórmula (8-18); b) calcule a densidade de cargas de polarização nas superfícies dos dielétricos.



Fig. 13-20

13-4. Num condensador plano estão inseridos 2 dielétricos, de permitividades ϵ_1 e ϵ_2 , conforme indica a Fig. 13-15. Calcule a densidade de cargas de polarização na superfície de separação dos dielétricos.

13-5. Calcule a capacidade de um condensador plano, no qual está inserido um dielétrico de permitividade ϵ e espessura t , conforme indica a Fig. 13-21.

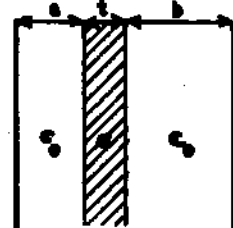


Fig. 13-21

13-6. Entre as placas de um condensador plano existe um dielétrico, cuja constante dielétrica varia linearmente com x (o eixo Ox é tomado perpendicularmente às placas), e apresenta os valores k_1 e k_2 junto a uma e a outra placa. Calcule a capacidade deste condensador, a densidade espacial de cargas de polarização no dielétrico e as densidades superficiais de cargas de polarização junto às placas.

13-7. Entre as placas de um condensador esférico há dois dielétricos, de permitividades ϵ_1 e ϵ_2 , conforme indica a Fig. 13-22.

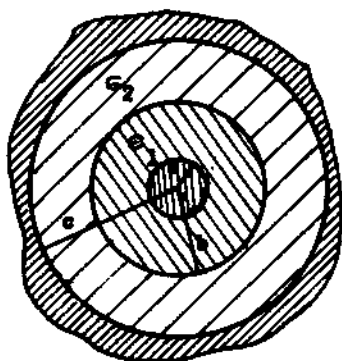


Fig. 13-22

Calcule: a) pelo 1º e pelo 3º processos indicados no parágrafo 13-7, a capacidade d'êste condensador; b) a densidade de cargas superficiais de polarização na interface dos dielétricos.

- 13-8. Um condensador esférico tem um hemisfério cheio de um isolante, de constante dielétrica ϵ , e suas armaduras estão a uma diferença de potencial V . a) Mostre, pelo exame das equações diferenciais de campo e suas condições de continuidade, que os vetores \vec{E} e \vec{D} estão ligados ao mesmo problema sem dielétrico por $\vec{E} = \vec{E}_0$ e $\vec{D} = \epsilon(r) \vec{E}_0$; b) Calcule as densidades de carga nas armaduras, a carga total nas armaduras e a capacidade do condensador, em função dos valores no problema sem dielétrico.
- 13-9. Suponha, no problema 13-6, o condensador de forma cilíndrica, e obtenha os resultados pedidos (a capacidade deve ser aqui calculada por unidade de comprimento).
- 13-10. Num meio dielétrico indefinido, de permitividade ϵ , no qual atua um campo elétrico uniforme \vec{E} , abre-se uma cavidade esférica de raio R . Calcule o campo resultante em todo o espaço e a densidade de cargas de polarização sobre a superfície da cavidade.

- 13-11. Um cilindro de raio R e comprimento infinito feito de material dielétrico homogêneo de permitividade ϵ , é colocado em um campo elétrico uniforme \vec{E}_0 , cuja direção é perpendicular ao eixo do cilindro. Calcular: a) o campo elétrico resultante, em todo o espaço; b) o vetor polarização no cilindro dielétrico.
- 13-12. Num meio dielétrico indefinido, de permitividade ϵ , existe uma cavidade esférica de raio R (no vácuo), no centro da qual está um dipolo elétrico de momento \vec{p} . Calcule o campo elétrico em todo o espaço e a densidade superficial de cargas de polarização sôbre a esfera.
- 13-13. Um fio retilíneo infinito, uniformemente carregado com densidade linear λ , é colocado paralelamente à face plana infinita de um dielétrico de permitividade elétrica ϵ_2 ; o fio está mergulhado em óleo, de permitividade ϵ_1 , que ocupa todo o outro semi-espaço. Calcular: a) o campo em todo o espaço; b) a força atrativa, por unidade de comprimento, entre o fio e o dielétrico; c) a densidade superficial de cargas de polarização sôbre o plano.

CAPÍTULO 14

ENERGIA E FÓRCAS ENTRE CONDUTORES E DIELETRICOS14 - 1. Energia de um sistema de cargas em presença de dielétricos

Vimos, no capítulo 8, que a energia eletrostática de um sistema de cargas com densidade espacial ρ e superficial σ era dada por:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \rho(\vec{r}') V(\vec{r}') dV' + \frac{1}{2} \sum_1 \int_{s_1} \sigma(\vec{r}') V(\vec{r}') ds' . \quad (14-1)$$

Aqui a 1ª integral é estendida a todo o espaço (anula-se o integrando onde $\rho = 0$) e s_1 indica uma qualquer das superfícies em que $\sigma \neq 0$.

Deve-se esperar que uma expressão do tipo (14-1) valha para cargas em presença de dielétricos. Mostraremos que êste é o caso, e que ρ e σ são as densidades de cargas livres, sendo que as de polarização (σ' e ρ') não dão contribuição. A rigor, a fórmula (14-1) não foi demonstrada para o caso em que algumas das superfícies s_1 são superfícies de condutores, se bem que tenha sido extrapolada para êste caso. A demonstração que se segue prova que foi correta essa extensão.

Consideremos portanto o caso geral em que temos distribuições de cargas $\rho(\vec{r})$ e $\sigma(\vec{r})$ em presença de dielétricos e condutores em equilíbrio. Seja $V(\vec{r})$ o potencial produzido por essas distribuições,

correspondendo ao campo $\vec{E}(\vec{r})$. Observemos preliminarmente que as distribuições:

$$\rho_{\alpha}(\vec{r}) = \alpha\rho(\vec{r}), \quad \sigma_{\alpha}(\vec{r}) = \alpha\sigma(\vec{r})$$

produzem os campos $\vec{D}_{\alpha}(\vec{r}) = \alpha\vec{D}(\vec{r})$, $\vec{E}_{\alpha}(\vec{r}) = \alpha\vec{E}(\vec{r})$ e portanto o potencial $V_{\alpha}(\vec{r}) = \alpha V(\vec{r})$, se α é uma constante. Essas distribuições mantêm o equilíbrio nos condutores, pois o potencial V_{α} continua a ser constante no interior dos mesmos (como V o era).

Calculemos, agora, o trabalho realizado pelas forças do campo quando cargas infinitésimas são retiradas sucessivamente e dispersadas no infinito, de modo que, em qualquer situação intermediária, a distribuição seja dada por $\rho_{\alpha}(\vec{r})$, $\sigma_{\alpha}(\vec{r})$, com $0 \leq \alpha < 1$ (para $\alpha = 1$; $\rho_{\alpha}, \sigma_{\alpha} \rightarrow \rho, \sigma$).

Assim, em tal situação deve-se retirar carga infinitésima tal que ρ_{α} e σ_{α} variem de:

$$\delta\rho_{\alpha} = -\rho\delta\alpha; \quad \delta\sigma_{\alpha} = -\sigma\delta\alpha$$

(a carga vai decrescendo). Quando as cargas correspondentes são levadas ao infinito, o campo realiza trabalho, dado pela energia dessas cargas infinitésimas em presença das restantes (que produzem o potencial V_{α}):

$$\delta W = \int V_{\alpha}(\vec{r}') [-\rho(\vec{r}')\delta\alpha] dv' + \int V_{\alpha}(\vec{r}') [-\sigma(\vec{r}')\delta\alpha] ds', \quad \text{ou:}$$

$$\delta W = - \left[\int V(\vec{r}') \rho(\vec{r}') dv' + \int V(\vec{r}') \sigma(\vec{r}') ds' \right] \alpha d\alpha.$$

Como o termo entre colchetes é independente de α , e:

$$\int_1^0 \alpha d\alpha = -\frac{1}{2},$$

vem:

$$W = \frac{1}{2} \int V(\vec{r}') \rho(\vec{r}') dv' + \frac{1}{2} \int V(\vec{r}') \sigma(r') ds', \quad \text{c.q.d.}$$

14 - 2. Localização da energia no espaço. Até aqui consideramos a energia potencial como dependendo das cargas, de acordo com (14-1), cujos integrandos se anulam onde não há cargas ($\rho = \sigma = 0$). Veremos que, como na Eletrostática no vácuo (Capítulo 8), W pode ser escrita como uma integral sobre todo o espaço, com contribuições mesmo de regiões onde não há carga.

Para isso observemos que, utilizando relações já conhecidas, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho V &= V \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} (V \vec{D}) - \vec{D} \cdot \vec{\nabla} V = \\ &= \operatorname{div} (V \vec{D}) + \vec{D} \cdot \vec{E}. \end{aligned}$$

Levando este resultado em (14-1), virá:

$$W = \frac{1}{2} \left[\int_{V_{\infty}} \operatorname{div}(V \vec{D}) dv' + \int_{V_{\infty}} \vec{D} \cdot \vec{E} dv' + \sum_1 \int_{S_1} \sigma V ds' \right].$$

Transformando a 1^a integral pelo teorema de Gauss para divergência, virá:

$$\int_{v_{\infty}} \operatorname{div} (V\vec{D}) dv' = \int_{s_{\infty}} (V\vec{D}) \cdot \vec{n} ds' + \sum_1 \int_{s_1} (V\vec{D}) \cdot \vec{n} ds' =$$

$$= \int_{s_{\infty}} (V\vec{D}) \cdot \vec{n} ds' - \sum_1 \int_{s_1} (V\vec{D}) \cdot \vec{n} ds' ,$$

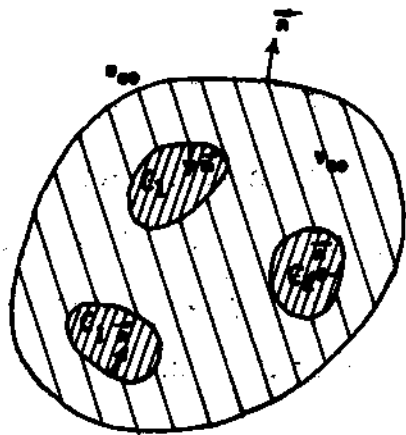


Fig. 14-1

sendo \vec{n} a normal orientada para fora da fronteira de v_{∞} , e \vec{n} a normal orientada para fora dos condutores. A 1ª integral do 2º membro se anula, porque sobre s o campo e o potencial caem a zero como $\frac{1}{r^2}$ e $\frac{1}{r}$ (com $r \rightarrow \infty$), enquanto ds' é proporcional a r^2 (as distribuições de cargas consideradas situam-se numa região finita do espaço). Então (14-1) ficará:

$$W = \frac{1}{2} \int_{v_{\infty}} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' - \frac{1}{2} \sum_1 \int_{s_1} V \vec{D} \cdot \vec{n} ds' + \frac{1}{2} \sum_1 \int_{s_1} V \sigma ds' .$$

Tendo em conta que $\vec{D} \cdot \vec{n} = \sigma$, vem:

$$W = \frac{1}{2} \int_{v_{\infty}} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' = \int_{v_{\infty}} \frac{dW}{dv'} dv' . \quad (14-2)$$

Vemos assim que a energia W pode ser considerada como distribuída por todo o espaço, com densidade:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}. \quad (14-3)$$

Nos meios isotrópicos em que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, vemos que, mesmo que ϵ varie de um ponto a outro, tem-se:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon E^2. \quad (14-4)$$

Esta expressão matemática, obtida aqui de modo formal, desempenhou papel importante na conceituação de campo elétrico. Com ela se pôde compreender que o campo elétrico, em um ponto, tem um sentido físico mais profundo do que a simples propriedade de caracterizar a força que atua sobre uma carga unitária puntiforme, após ser a mesma colocada no ponto. Mesmo sem colocar essa carga, o campo já determinaria a energia eletrostática nesse ponto. A descoberta, feita por Maxwell, de que a energia elétrica poderia propagar-se no espaço mostrou ser correta aquela atitude, que levou à Teoria dos Campos.

Examinemos, como verificação da equação (14-2), a energia de um condensador esférico com dielétrico (armadura externa a potencial nulo). Se Q é a carga da armadura interna, temos:

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon},$$

portanto:

$$W = \frac{Q^2}{32 \pi^2 \epsilon} \int_V \frac{dv'}{r^4} = \frac{4 \pi Q^2}{32 \pi^2 \epsilon} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8 \pi \epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right),$$

que coincide com a expressão já obtida no parágrafo 8-6.

14 - 3. Fôrças sôbre condutores e dielétricos isolados (em função das cargas). Dado um condutor ou uma porção de dielétrico rígido, carregado ou não, em presença de outros condutores e dielétricos e letrizados, podemos calcular a fôrça elétrica que atua sôbre o condutor ou dielétrico, seja diretamente, integrando as fôrças que atuam sôbre suas cargas e dipolos, seja indiretamente, como veremos a seguir, a partir da energia eletrostática do sistema.

Se um condutor isolado ou uma porção de dielétrico rígido está em repouso em relação ao campo produzido por uma distribuição estática de cargas, então atua sôbre êle uma fôrça mecânica que equilibra a fôrça elétrica \vec{F} produzida por essas cargas. Se, por uma variação infinitésima, conveniente, da fôrça mecânica, permitimos que o condutor (ou dielétrico) sofra uma translação $d\vec{l}$ para nova posição de equilíbrio, o trabalho da fôrça mecânica será:

$$d\mathcal{U} = - \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Êste trabalho será igual à variação de energia eletrostática (potencial) do sistema:

$$d\mathcal{U} = dW, \text{ ou :}$$

$$-\vec{F} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_Q dx + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_Q dy + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)_Q dz . \quad (14-5)$$

O índice Q em (14-5) indica que a carga dos condutores presentes permanece constante nesse deslocamento, isto é, que os condutores são isolados; portanto, o seu potencial variará. Como em (14-5) $d\vec{l}$ é arbitrário, obtemos:

$$\vec{F} = - (\vec{\nabla} W)_Q . \quad (14-6)$$

Como exemplo, calculemos a força entre as placas de um condensador plano de ar com carga constante (desprezando o efeito das bordas). A energia entre as placas é (Fig. 14-2):

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} ,$$

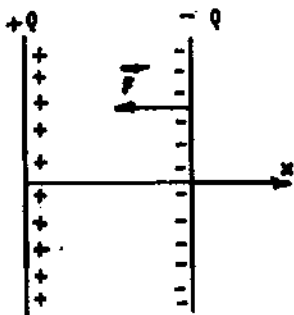


Fig. 14-2

e sua capacidade C , quando a distância entre as placas é x ,

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{x} ,$$

sendo A a área das placas. Portanto:

$$W = \frac{1}{2 \epsilon_0 A} Q^2 x ,$$

e (14-6) nos dará a força procurada; tomando o eixo dos x como na Fig. 14-2, com origem na placa ~~negativa~~ ^{positiva}, temos:

$$F_x = - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_Q = - \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 A} ; F_y = F_z = 0 .$$

Esta é a força sobre a placa negativa (que se move quando x varia), que pode também ser calculada por:

$$F_x = \int_S (-\sigma) E_+ ds, \quad F_y = F_z = 0 ,$$

onde aparece o sinal - porque \vec{F} é a força que atua sobre a placa negativa, e aí a densidade de cargas é negativa; E_+ é o campo criado pela placa positiva (a placa negativa não produz força sobre si mesma), e vale:

$$E_+ = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0 A} .$$

Portanto:

$$F_x = - \int_0^A \frac{Q}{A} E_+ ds = - \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 A} \int_0^A ds = - \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 A} ,$$

que coincide com o resultado anterior.

14 - 4. Fôrças entre condutores e dielétricos (em função dos potenciais). Aqui, os condutores em que se localizam as cargas livres são mantidos a potenciais constantes por meio de baterias. Se umas das partes do sistema se deslocar de $d\vec{l}$, sob a ação das fôrças mecânicas que equilibram as elétricas, o trabalho mecânico realizado

será ainda:

$$d W_{\text{mec}} = - \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl},$$

mas a equação de conservação da energia será:

$$d W = d W_{\text{mec}} + d W_b ,$$

onde $d W_b$ é a energia fornecida pelas baterias. Ora, a energia eletrostática de um sistema de condutores carregados é, como sabemos:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i ,$$

onde Q_i e V_i são a carga e o potencial do i ésimo condutor; assim, quando alguma parte do sistema é deslocada, permanecendo fixos todos os potenciais, a variação de energia correspondente será:

$$d W = \frac{1}{2} \sum_i V_i d Q_i .$$

Por outro lado, a energia suprida pelas baterias a cada condutor é o trabalho necessário para mover a carga desde o potencial zero até o potencial do condutor, isto é:

$$d W_b = \sum_i V_i d Q_i .$$

Portanto:

$$d W_b = 2 d W ,$$

e assim:

$$d W = - d W_{\text{mec}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl},$$

tendo-se finalmente para a força, correspondendo a (14-6) do caso anterior:

$$\vec{F} = (\vec{\nabla} W)_{\nabla} . \quad (14-7)$$

Como exemplo, calculemos a força entre as placas de um condensador plano, mantido a potencial constante. Sua energia é:

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{\epsilon_0 A}{2x} V^2 ,$$

e portanto a força que atua sobre a placa negativa será:

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{\nabla} = - \frac{\epsilon_0 A}{2x^2} V^2 = - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} , \quad F_y = F_z = 0 ,$$

resultado idêntico ao do caso anterior.

Outro exemplo é o de um condensador plano retangular com um dielétrico parcialmente inserido entre suas placas (Fig. 14-3). Seja d a distância entre as placas, a e b suas dimensões, ΔV a diferença de potencial fixa a que são mantidas, ϵ a permitividade do dielétrico e x o comprimento da porção de dielétrico que está entre as placas. A energia do condensador, desprezando os efeitos de bordas, é:

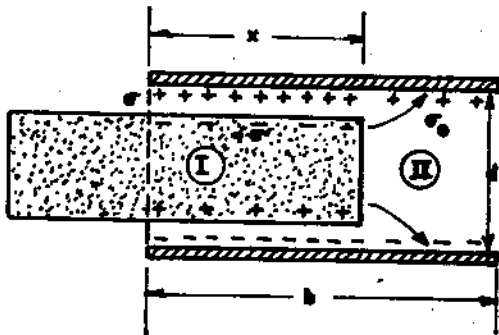


Fig. 14-3

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\Delta V}{d} \right)^2 a dx + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{d} \right)^2 a d(b-x) ,$$

e portanto, por (14-7):

$$F = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) a \frac{\Delta V^2}{d} ,$$

(no sentido de x crescente). A força tende, portanto, a puxar o dielétrico para dentro do condensador, como era de se esperar (veja a Fig. 14-3). No cálculo foi usado o fato de que o campo no interior de todo o condensador é constante ($\Delta V/d$), mas o vetor deslocamento varia da região I para a região II, nas quais vale respectivamente $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}$. Também a densidade superficial de cargas nas placas é diferente nas duas regiões, valendo respectivamente $\sigma = D = \epsilon E$ e $\sigma_0 = D_0 = \epsilon_0 E$. A densidade superficial de cargas de polarização no dielétrico, dada por (13-4), vale então:

$$\sigma' = \chi_e \epsilon_0 E ,$$

e portanto:

$$\sigma = \epsilon E = \epsilon_0 (1 + \chi_e) E = \sigma_0 + \sigma' .$$

Esse mesmo problema poderia ter sido resolvido pelo método da carga constante.

Problemas propostos:

- 14-1. Calcule a energia armazenada no condensador do problema 13-7, a partir da densidade espacial de energia, quando o potencial da placa interna é V e o da externa nulo. A partir da expressão obtida, determine a capacidade do condensador.
- 14-2. Calcule a energia armazenada nos condensadores dos problemas 13-8 e 13-9.
- 14-3. As extremidades de 2 cilindros metálicos coaxiais, de raios a e b , formando um condensador cilíndrico, são imersas, normalmente à superfície, num líquido dielétrico de suscetibilidade χ_e e peso específico ξ . A que altura sobe o dielétrico quando a diferença de potencial entre os cilindros é V ?

CAPÍTULO 15

MATERIAIS MAGNÉTICOS

15 - 1. Magnetização. Em capítulos anteriores, vimos como distribuições de correntes, localizadas no vácuo, geram campos magnéticos, e calculamos as induções magnéticas produzidas por algumas dessas distribuições. Nesse capítulo, veremos de que maneira a presença de meios materiais altera o valor da indução magnética.

Desde o tempo de Ampère (v. Introdução) já se admitia a existência de correntes atômicas - pequenas correntes circulares ou dipolos magnéticos - presentes em toda matéria, a cada uma das quais se associa um momento magnético $\vec{m} = i \vec{n} ds = i \vec{ds}$, sendo i a intensidade da corrente elementar, s a área do circuito e \vec{n} a normal a êle, orientada da maneira usual (Fig. 10-6). Sabe-se hoje que êsses dipolos elementares são constituídos por elétrons que giram em torno dos núcleos, e os momentos magnéticos assim gerados são chamados momentos magnéticos orbitais. Mais recentemente descobriu-se que ao próprio elétron está associado um momento magnético intrínseco, que não corresponde a uma rotação de cargas.

Em algumas substâncias, as mais numerosas, os momentos magnéticos (orbitais e intrínsecos) dos elétrons cancelam-se entre si, em cada átomo. Estas substâncias (como a água, o mercúrio, o álcool, o cobre, o carbono, o ouro, o zinco, o nitrogênio, o hélio etc),

que não apresentam dipolos magnéticos permanentes, são chamadas diamagnéticas.

Em outras substâncias (como o alumínio, a platina, o sódio, o estanho, o oxigênio, o ar, etc), os momentos magnéticos não se cancelam nos átomos; são as chamadas substâncias paramagnéticas, que apresentam dipolos magnéticos permanentes.

Seja qual fôr o tipo de substância considerada, se sobre ela atua um campo magnético externo, aparecerão nos átomos dipolos magnéticos induzidos, em consequência ao fenômeno da indução eletromagnética, que será estudado no capítulo 16. Os momentos magnéticos induzidos tendem a enfraquecer o campo magnético externo: a êste efeito se denomina diamagnetismo. Se a substância considerada é paramagnética, a êste efeito se superpõe outro mais forte, que é o da orientação dos dipolos magnéticos, já existentes, no sentido do campo (tal como ocorre nos dielétricos que apresentam dipolos permanentes, esta orientação num sentido preferencial é dificultada pela agitação térmica). Os campos dos dipolos magnéticos assim orientados enfraquecerão ainda o campo externo: a êste efeito se denomina paramagnetismo.

As substâncias em que o efeito de paramagnetismo é particularmente grande dizem-se ferromagnéticas; é o caso do ferro, do níquel e do cobalto.

Êstes fenômenos de formação ou de orientação de dipolos magnéticos recebem a denominação genérica de "magnetização". Uma substância magnetizada pode ser visualizada como uma distribuição de dipolos magnéticos localizados no vácuo. Estudemos o campo criado por tal

distribuição.

15 - 2. Campo magnético de uma distribuição volumétrica de dipolos, no vácuo. Admitamos que se conheça o momento \vec{m} de cada um dos dipolos. Chama-se "vetor magnetização" \vec{M} ao momento de dipolo resultante, por unidade de volume.

Teremos (Fig. 15-1):

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{m}}{\Delta v} = \frac{d\vec{m}}{dv'} \quad (15-1)$$



Fig. 15-1

Então, de acordo com (11-6), o potencial vetor criado no ponto P pela distribuição de dipolos, limitada ao volume v , será:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{M} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' ,$$

pois $\vec{M} dv' = d\vec{m}$, ou ainda:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \vec{M} \wedge \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' . \quad (15-2)$$

Em virtude de (5-46), vale a identidade vetorial:

$$\vec{M} \wedge \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\text{rot } \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \text{rot} \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ,$$

que dá para (15-2):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot}' \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot}' \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'. \quad (15-3)$$

Vamos agora transformar a 2^a integral de (15-3) numa integral de superfície, aplicando-lhe o teorema de Gauss para divergência. Para isso, consideremos um vetor constante \vec{k} , de direção arbitrária. Pondo $\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{U}$, podemos escrever, em virtude de (5-44):

$$\vec{k} \cdot \int_V \text{rot} \vec{U} dv' = \int_V \text{div} (\vec{U} \wedge \vec{k}) dv' = \int_S (\vec{U} \wedge \vec{k}) \cdot d\vec{s}',$$

onde s é a fronteira da distribuição, isto é:

$$\vec{k} \cdot \int_V \text{rot} \vec{U} dv' = \vec{k} \cdot \int_S d\vec{s}' \wedge \vec{U}. \quad (15-4)$$

Como a relação (15-4) é válida para qualquer \vec{k} , temos:

$$\int_V \text{rot} \vec{U} dv' = \int_S d\vec{s}' \wedge \vec{U}. \quad (15-5)$$

Utilizando esta consequência (15-5) do teorema de Gauss, (15-3) poderá ser escrita:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot}' \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S d\vec{s}' \wedge \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Se fizermos agora:

$$\text{rot } \vec{M} = \vec{J}^i, \quad (15-6)$$

$$\vec{M} \wedge \vec{n} = \vec{J}_s^i, \quad (15-7)$$

sendo \vec{n} a normal à superfície no ponto considerado, teremos ainda como expressão do potencial vetor:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}^i dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s^i ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

da qual, no 2º membro, o 1º termo corresponde ao potencial vetor devido a uma distribuição espacial de correntes, em v , de densidade de \vec{J}^i ; e o 2º termo, ao potencial vetor de uma distribuição superficial de correntes, sobre s , de densidade \vec{J}_s^i .

Conclusão: se numa região considerada, de volume v , existe uma distribuição qualquer de dipolos magnéticos tal que o vetor magnetização seja igual a \vec{M} (contínuo), então o campo criado por essa distribuição é o mesmo que o de uma distribuição espacial de correntes, contida em v , de densidade $\vec{J}^i = \text{rot } \vec{M}$, mais o de uma distribuição superficial de correntes, sobre a fronteira s da região, de densidade $\vec{J}_s^i = \vec{M} \wedge \vec{n}$.

Do mesmo modo que no caso de dielétricos, podemos visualizar a origem dessas correntes, pela análise das correntes elementares (no caso de momentos magnéticos intrínsecos, essa visualização não é possível, porque não há correntes elementares associadas, e o raciocínio seguinte vale apenas como analogia).

Consideremos, por simplicidade, uma substância magnética pela

rizada, sendo \vec{M} tangencial à superfície no ponto considerado. Admitiremos todos os dipolos iguais e com momento \vec{m} na direção de \vec{M} ; sendo N o número de correntes elementares por unidade de volume, teremos:

$$\vec{M} = N \vec{m}.$$

Ainda para simplificar o raciocínio, tomaremos as correntes elementares como circuitos quadrados de lado l , sendo um dos lados paralelos à superfície. A Fig. 15-2 representa um corte do material, normal a \vec{M} (\vec{M} aponta para cima). A reta A representa a superfície do corpo, e B um plano paralelo a ela, e dela distando de l ; várias correntes elementares próximas à superfície estão aí repre-

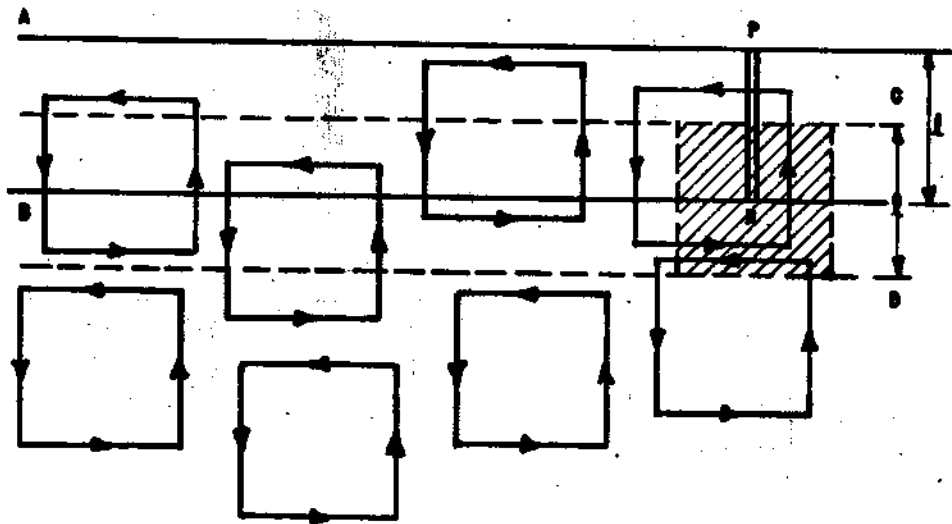


Fig. 15-2

sentadas. Vemos que, entre os planos A e B, as correntes elementares tangentes à superfície são tôdas da direita para a esquerda, somando-se, portanto, e determinando uma corrente superficial f_i

nita. Fora dessa camada, as correntes tangenciais de circuitos próximos se cancelam em média; correntes normais à superfície também se cancelam em média, mesmo nessa camada.

Calculemos, agora, a densidade superficial de corrente. A corrente que atravessa a linha PQ (paralela a \vec{M}), de comprimento h ,

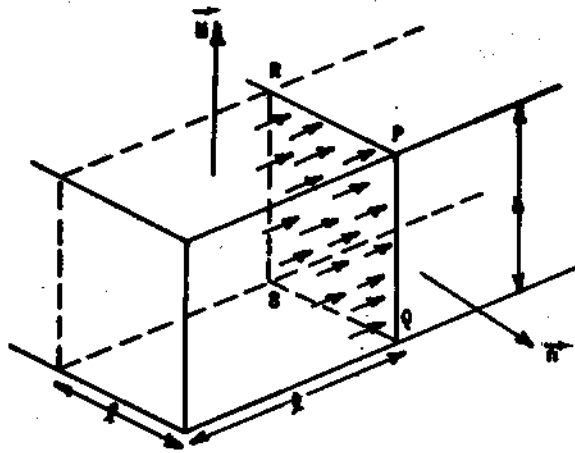


Fig. 15-3

ou melhor, a corrente que atravessa a superfície PQRS, de dimensões l e h (Fig. 15-3), é igual a $J'_s h$. Na Fig. 15-2, a superfície PQRS está representada pela linha dupla PR. Cada um dos dipolos com centro no quadrado tracejado de lado l (Fig. 15-2), ou melhor, no paralelepípedo que tem essa seção e altura h (Fig. 15-3), dá à corrente superficial considerada uma contribuição igual a

$i = \frac{m}{l^2}$.

Portanto, a corrente total através do retângulo PQRS é:

$$J'_s h = N v \frac{m}{l^2},$$

sendo v o volume do paralelepípedo acima referido. Levando em conta que $v = l^2 h$, temos:

$$J'_s = N m = M .$$

Examinando a Fig. 15-3, vemos que é válida, de fato, a relação vetorial (15-7).

A origem da corrente espacial de magnetização pode também ser compreendida por uma análise semelhante à do caso de dipolos elétricos.

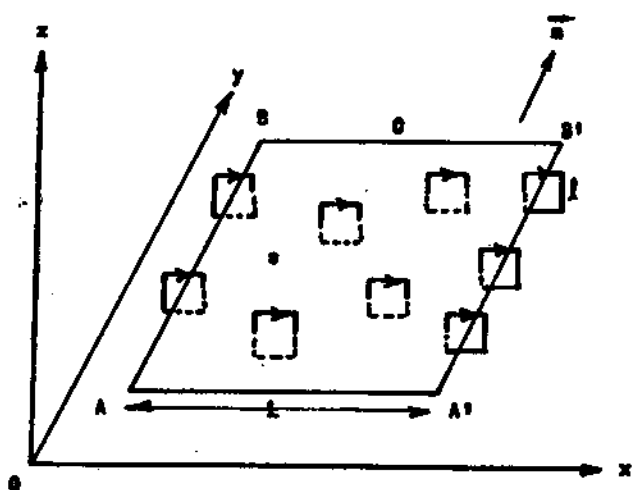


Fig. 15-4

Consideremos uma área de contorno C , no interior da substância magnética; por simplicidade, tomaremos C quadrado, de lado L , e os momentos dos dipolos paralelos a um dos lados (Fig. 15-4). As correntes elementares (tomadas de circuito quadrado de lado l , por simplicidade) cujos centros

estiverem dentro dos prismas de eixos AB e $A'B'$, de lados l e comprimento L , atravessam a área s uma só vez, contribuindo para a corrente através desta superfície. As demais correntes ou não atravessam s ou a atravessam duas vezes, em sentidos opostos, cancelando-se. Portanto, a contribuição para a corrente que atravessa s na direção z , devida aos dipolos próximos de $A'B'$ é:

$$(N i v)_{x+L} = \left(N \frac{m}{l^2} L l^2 \right)_{x+L} = L (M)_{x+L} ,$$

sendo x a coordenada de A e B , e $x+L$ a de A' e B' , na direção de $A A'$. A contribuição das correntes de centros próximos a AB é, a-

nãlogamente, $L (M)_x$. Portanto a corrente que passa através de s na direção z será:

$$J'_s = J' L^2 = L \left[(M)_{x+L} - (M)_x \right],$$

isto é:

$$J' = \frac{(M)_{x+L} - (M)_x}{L} .$$

Fazendo L tender a zero, e lembrando que $J = J_z$, $M = M_y$, vem:

$$J'_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} ,$$

que é a componente z da equação (15-6), quando $M_x = 0$. Como também $M_z = 0$, a equação (15-6) dá:

$$J'_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = 0 ,$$

o que confirma o fato de que a distribuição indicada na Fig. 15-4 não pode produzir correntes de magnetização na direção Oy , porque as correntes elementares estão contidas no plano xz . Finalmente, a repetição da análise feita no plano xy mostrará que, para um circuito no plano yz , resulta:

$$J'_x = - \frac{\partial M_y}{\partial z} ,$$

que dá exatamente a componente x da equação (15-5).

Na realidade, as expressões (15-6) e (15-7) para a densidade espacial e a densidade superficial de correntes de magnetização não são independentes. De fato, admitamos que a densidade super-

ficial é dada por (15-7) e consideremos um volume v arbitrário, limitado pela superfície fechada s . A corrente total sobre a superfície, produzida pelos dipolos cujos centros estão no interior de v , é dada, pelo mesmo raciocínio anterior, por:

$$\int_s \vec{J}_s \, ds = \int_s \vec{M} \wedge \vec{ds}.$$

Como, porém, a corrente total de um dipolo magnético é nula, a corrente superficial em s é igual e contrária à corrente espacial em v :

$$\int_s \vec{M} \wedge \vec{ds} = - \int_v \vec{J}' \, dv.$$

Aplicando (14-5), vem:

$$- \int_v \vec{J}' \, dv = \int_s \vec{M} \wedge \vec{ds}' = - \int_v \text{rot } \vec{M} \, dv.$$

Como as duas integrais de volume são iguais para qualquer volume, os integrandos devem coincidir, isto é, vale (15-6). Reciprocamente, mostra-se que a expressão (15-7) da corrente superficial é consequência da forma (15-6) da corrente espacial de magnetização.

15 - 3. Vetor "campo magnético". Equações diferenciais. Até aqui, estudamos a indução magnética \vec{B}_0 produzida, no vácuo, por um sistema de "correntes livres", em que cargas livres descrevem cir-

cuitos macroscópicos, com densidade de corrente \vec{J} . O vetor \vec{B}_0 satisfaz então às equações diferenciais:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B}_0 = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}. \end{cases}$$

Como foi visto no capítulo 12, a 1ª equação exprime o fato de que o campo \vec{B}_0 é solenoidal, isto é, suas linhas de força são fechadas. Isto equivale ao fato físico de que não existem monopolos magnéticos. A 2ª equação exprime o fato de que \vec{J} é a fonte do campo.

Se agora colocarmos um material magnético na região onde existia a indução \vec{B}_0 , esta orientará os dipolos magnéticos do material, de tal maneira que as correntes elementares contribuirão para a corrente de magnetização \vec{J}' , na superfície do material e eventualmente também no seu interior. O campo produzido por essas correntes de magnetização é o de dipolos magnéticos, como foi visto no parágrafo anterior. Então, para que a equação (12-1) descreva a indução total \vec{B} produzida pelas correntes livres e de magnetização, devemos - análogamente ao que foi feito no caso de dielétricos - adicionar-lhe o termo $\vec{J}' = \operatorname{rot} \vec{M}$ (já vimos que nas equações diferenciais não entram as correntes superficiais). As equações diferenciais satisfeitas pela indução magnética resultante serão agora:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}'),$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

A última equação decorre do fato de que \vec{B} também é solenoidal. U-

sando (15-6), virá para a 1^a equação diferencial:

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}.$$

Tal como em Eletrostática foi conveniente introduzir o vetor deslocamento \vec{D} , pela definição (13-7), aqui também é conveniente definir o vetor "campo magnético" \vec{H} pela relação:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \quad (15-8)$$

As equações diferenciais da Magnetostática num meio material se escrevem então:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{B} = 0 & (15-9) \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{J} & (15-10) \end{cases}$$

as quais, juntamente com (15-8), permitem determinar \vec{B} e \vec{H} quando se conhecem \vec{J} e \vec{M} . O campo magnético é medido, no sistema MKS, em A-espira $\cdot \text{m}^{-1}$ (ver parágrafo 15-6).

Verifica-se experimentalmente que o vetor magnetização é, em geral, proporcional ao vetor indução magnética resultante no interior do material, sendo a constante de proporcionalidade negativa, no caso de substâncias diamagnéticas, e positiva, no de substâncias paramagnéticas. Então, em vista de (15-8), \vec{H} também é proporcional a \vec{B} e, inversamente, \vec{B} é proporcional a \vec{H} ; podemos escrever:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (15-11)$$

análoga a (13-12), que vale em geral. Se, entretanto, o meio considerado é anisotrópico, em lugar da relação vetorial (15-11), em que μ (a "permeabilidade" magnética do material) é um escalar, aparece a relação:

$$B_i = \sum_{j=1,2,3} \mu_{ij} H_j ,$$

análogamente ao que se passa em Eletrostática, em que agora μ_{ij} são as componentes do tensor permeabilidade magnética.

A permeabilidade magnética também pode ser escrita:

$$\mu = k_m \mu_0 , \quad (15-12)$$

em que k_m , adimensional, é a "permeabilidade relativa" do material, em analogia com (13-11). A permeabilidade magnética é medida em henry $\cdot m^{-1}$, sendo "henry" a unidade de "indutância", no sistema MKS, conforme veremos no capítulo 16.

Da relação de proporcionalidade:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} , \quad (15-13)$$

em que χ_m é a "susceptibilidade" magnética do material, resulta evidentemente:

$$k_m = 1 + \chi_m , \quad (15-14)$$

análoga a (13-10).

Material	χ_m
Alumínio	$2,3 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1,66 \times 10^{-5}$
Cobre	$-0,98 \times 10^{-5}$
Diamante	$-2,2 \times 10^{-5}$
Mercúrio	$-3,2 \times 10^{-5}$
Magnésio	$1,2 \times 10^{-5}$
Tungstênio	$6,8 \times 10^{-5}$
Oxigênio (1 atm)	209×10^{-8}
Hidrogênio (1 atm)	$-0,21 \times 10^{-8}$

A tabela ao lado fornece valores de suscetibilidade para algumas substâncias diamagnéticas ($\chi_m < 0$) e paramagnéticas ($\chi_m > 0$), na temperatura ambiente, para medidas feitas em unidades do sistema MKS racionalizado (R. M., 1960, pg. 194).

De (14-8) e (14-11), tiramos:

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{k_m} \frac{1}{\mu_0} \vec{B},$$

correspondente à fórmula (13-9) da Eletrostática, sendo que μ_0 aparece em denominador, ao contrário de ϵ_0 . As fórmulas da Magnetostática seriam mais semelhantes às da Eletrostática, se se substituísse μ_0 por $\frac{1}{\mu_0}$. A convenção atualmente adotada tem origem histórica, devida à tentativa inicial de se estabelecer a teoria do Magnetismo a partir de polos magnéticos fictícios. Nesse tratamento, havia uma analogia entre os vetores \vec{H} e \vec{E} e entre \vec{B} e \vec{D} ; daí se ter definido a relação entre \vec{B} e \vec{H} como dada em (15-11).

No caso de substâncias ferromagnéticas, as relações entre \vec{M} e \vec{B} e entre \vec{B} e \vec{H} não são lineares. Apesar disso, costuma-se usar ainda definir uma permeabilidade relativa

$$k_m = \frac{B}{\mu_0 H}$$

que depende, no entanto, de H , ou usar uma tabela ou gráfico que dá B em função de H .

15 - 4. Teorema de Ampère generalizado. De (15-10) concluímos, pela aplicação do Teorema de Stokes para rotacional, que a expressão do teorema de Ampère em um meio material é:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i, \quad (15-15)$$

onde C é um contórno fechado mergulhado no material e i o valor total das correntes livres (ficando excluídas, portanto, as correntes de magnetização) que o enlaçam no sentido positivo (ver parágrafo 10-4); (15-15) exprime o teorema de Ampère generalizado, válido para um meio material qualquer. Se o meio é isotrópico, vale (15-11), e teremos:

$$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot d\vec{\ell} = i,$$

e se o meio é homogêneo, isto é, se $\mu = \text{constante}$, teremos ainda:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu i. \quad (15-16)$$

É muito importante frisar que (15-15) vale sempre, mas que (15-16) deixa de valer quando μ varia na região em que C se situa. É o que ocorre, por exemplo, quando C atravessa a superfície de separação

ção de dois meios de propriedades magnéticas diferentes, onde μ sofre uma descontinuidade. Veremos a seguir como variam \vec{B} e \vec{H} através dessa interface.

15 - 5. Condições ao contôrno. Suponhamos que na região do espaço em que se situam os materiais magnéticos haja uma distribuição volumétrica de correntes livres, de densidade \vec{J} , e que na interface dos materiais haja uma corrente livre superficial, de densidade \vec{J}_s . Sabemos que nas equações diferenciais (15-9) e (15-10) não comparecem correntes superficiais; mas elas terão que ser levadas em conta quando ajustarmos as soluções gerais das equações diferenciais nas superfícies de descontinuidade.

A equação diferencial (15-9) significa que a componente normal de \vec{B} é contínua, ainda neste caso (ver parágrafo 12-3):

$$\Delta B_n = 0 . \quad (15-17)$$

A descontinuidade da componente tangencial de \vec{H} pode ser obtida a partir de (15-10), análogamente ao que se fez para \vec{B} no parágrafo 12-3. Obteremos aqui:

$$\Delta H_t = \vec{t} \cdot \vec{J}_s \wedge \vec{n} . \quad (15-18)$$

Se na superfície de descontinuidade não há correntes livres, isto é, quando êsses materiais não estão em contato com condutores por onde passam correntes, $\vec{J}_s = 0$ e a componente tangencial de \vec{H} será contínua:

$$\Delta H_t = 0 . \quad (15-19)$$

Seja, por exemplo, o caso de uma corrente linear infinita i envolta por uma capa cilíndrica de material magnético, cercada de vácuo (Fig. 15-5). O exemplo é o de um fio elétrico comum. Devemos admitir para \vec{B} e \vec{H} , nas duas regiões distintas, as formas:

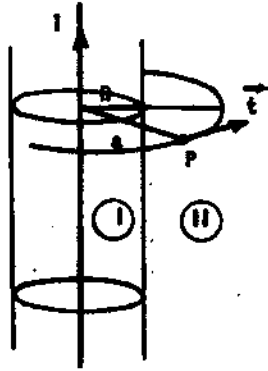


Fig. 15-5

$$B = \begin{cases} K_1 \mu \frac{\vec{t}}{a} \\ K_2 \mu_0 \frac{\vec{t}}{a} \end{cases}, \quad \vec{H} = \begin{cases} K_1 \frac{\vec{t}}{a} & a < R \\ K_2 \frac{\vec{t}}{a} & a > R \end{cases}$$

onde R é o raio do envólucro, a a distância do ponto P considerado ao fio, e \vec{t} o vetor unitário tangente em P ao cilindro de raio a com eixo no fio, orientado, em relação ao sentido de i , pela regra do saca-rôlhas.

A condição (15-17) verifica-se obviamente.

Como não há correntes superficiais, vale a condição (15-19), que dá:

$$\frac{K_1}{R} = \frac{K_2}{R} \longrightarrow K_1 = K_2 = K .$$

O valor de K é fixado imediatamente pela distribuição de correntes, pois o valor de \vec{H} é o mesmo que no vácuo. De fato, a equação

(15-9) é equivalente a:

$$\mu \operatorname{div} \vec{H} + \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \mu = 0 .$$

Nesta equação, o 2º termo nem sempre é nulo, e pode dar contribuição numa região de descontinuidade de μ . Porém, se na superfície de descontinuidade, a componente normal de \vec{H} for nula (e este é o caso de nosso problema), o 2º termo se anula pois $\vec{\nabla} \mu$ é um vetor normal à superfície. Então vale a equação:

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 ,$$

tal como no vácuo, satisfeita pela solução:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 = \frac{1}{2\pi a} \vec{t} .$$

Assim encontramos $K = \frac{1}{2\pi}$, e o problema está resolvido.

15 - 6. Meios indefinidos. Se as correntes estão localizadas em meios indefinidos homogêneos, para os quais μ é constante, as equações diferenciais (15-9) e (15-10) podem ser escritas indistintamente como um sistema de equações diferenciais em \vec{B} :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 , \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{J} , \end{cases} \quad (15-20)$$

pois $\operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{B}$, ou como um sistema de equações diferenciais em \vec{H} :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} , \end{cases} \quad (15-21)$$

pois $\nabla \cdot \vec{B} = \text{div}$

As equações (15-21) permitem enunciar um teorema importante: o vetor campo magnético num meio indefinido é independente de μ .

Se as correntes livres forem as mesmas numa distribuição no vácuo ou num meio magnético, os vetores \vec{H}_0 e \vec{H} correspondentes serão iguais, isto é, $\frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{H}$, e como $\mu = k_m \mu_0$, tem-se sempre, neste caso:

$$\vec{B} = k_m \vec{B}_0.$$

Então, se as distribuições de correntes dadas não estiverem localizadas no vácuo, sim num meio magnético indefinido e homogêneo, a indução magnética gerada por elas é a mesma que no vácuo, a menos do fator k_m . Assim, por exemplo, a indução magnética criada por uma corrente linear infinita i que passa através de um meio magnético indefinido de permeabilidade μ é:

$$\vec{B} = \frac{\mu i}{2\pi a} \vec{t}, \quad (15-22)$$

e o campo magnético correspondente é:

$$\vec{H} = \frac{i}{2\pi a} \vec{t}. \quad (15-23)$$

Outro exemplo é o de um solenóide cilíndrico infinito, com n espiras por unidade de comprimento. O campo magnético no seu interior vale:

$$H = ni,$$

e é a partir desta fórmula que se define a unidade de campo magnético no sistema MKS. Chama-se "ampère - espira por metro", e é

definida como a intensidade do campo magnético existente no interior de um solenóide cilíndrico, infinito, que contenha uma espira por metro, e pelo qual passa uma corrente de 1A.

15 - 7. Campo de uma esfera uniformemente magnetizada. Se temos uma distribuição de dipolos magnéticos com densidade \vec{M} constante num volume esférico, seu campo é equivalente ao de uma distribuição espacial de correntes, com densidade:

$$\vec{J}' = \text{rot } \vec{M} = 0 ,$$

e uma distribuição superficial, com densidade:

$$\vec{J}'_s = \vec{M} \wedge \vec{n} = \frac{\vec{M} \wedge \vec{R}}{R} ,$$

sendo \vec{R} o raio da esfera, orientado para fora.

Essa distribuição de correntes é exatamente da mesma forma que a que ocorre no problema da esfera em rotação, estudado anteriormente no parágrafo 11-5, e sua densidade superficial coincidirá com a obtida naquele parágrafo, se fizermos:

$$\sigma \vec{\omega} = \frac{\vec{M}}{R} .$$

Com essa substituição, tôdas as fórmulas obtidas lá servirão também aqui, isto é, a indução magnética da esfera uniformemente magnetizada é:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{1}{3} \mu_0 R^3 \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3} \right), & r > R, \\ \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}, & r < R, \end{cases}$$

expressões análogas a (11-12) e (11-13). Isto é: o campo no exterior é o mesmo que se todo o momento magnético $\vec{m} = v \vec{M} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M}$ estivesse localizado no centro da esfera. De (15-8) calcula-se

\vec{H} e obtém-se:

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{1}{3} R^3 \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3} \right), & r > R \\ -\frac{1}{3} \vec{M} & , \quad r < R. \end{cases}$$

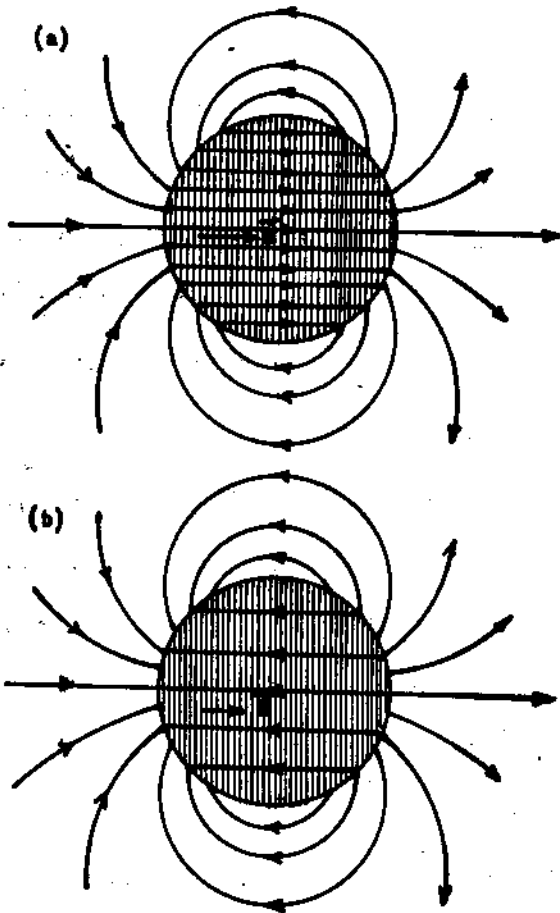


Fig. 15-6

A Fig. 15-6a mostra a configuração das linhas de força de \vec{B} : observa-se a conservação das linhas de força. A Fig. 15-6b mostra a configuração das linhas de força de \vec{H} : observa-se a criação e a divergência de linhas de força na superfície da esfera.

Pode-se verificar a continuidade da componente normal de \vec{B} e da componente tangencial de \vec{H} , calculando:

$$\vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{R} = \frac{\mu_0}{3} \vec{R} \cdot \text{rot} (\vec{M} \wedge \vec{r})_{r=R} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M} \cdot \vec{R} = \vec{B}_{\text{int}} \cdot \vec{R},$$

$$\vec{H}_{\text{ext}} \cdot \vec{t} = \frac{2}{3} \vec{M} \cdot \vec{t} - \vec{t} \cdot \frac{\vec{r} \wedge (\vec{M} \wedge \vec{r})}{r^2} = -\frac{1}{3} \vec{M} \cdot \vec{t} = \vec{H}_{\text{int}} \cdot \vec{t}.$$

15 - 8. Esfera de material magnético em campo uniforme. Considere uma esfera constituída de material para ou diamagnético, colocada num campo uniforme \vec{B}_0 . Determinaremos o campo \vec{B} em todo o espaço.

Podemos prever desde logo a forma do campo pelas considerações seguintes. Ao colocarmos a esfera no campo uniforme, produz-se uma magnetização \vec{M}_0 uniforme na mesma, por ser \vec{M} proporcional a \vec{B} (desprezamos até aqui o campo produzido pela própria magnetização). Essa magnetização uniforme produz no exterior da esfera o campo de um dipolo colocado no centro, de mesma direção que \vec{B}_0 , e no interior um campo uniforme de mesma direção que \vec{M}_0 , e portanto que \vec{B}_0 . Esse campo adicional dá nova contribuição para \vec{M} sem alterar no entanto sua direção. Prosseguindo com este raciocínio, isto é, levando em conta a nova contribuição para o campo dessa magnetização adicional, mais a nova modificação de magnetização por esse campo, e assim por diante, concluiremos que a distribuição final corresponderá a uma magnetização uniforme \vec{M} da esfera, a um campo uniforme \vec{B}_1 no seu interior e a um campo $\vec{B}_0 + \vec{B}_2$ fora da esfera, sendo \vec{B}_2 o campo de um dipolo magnético \vec{m} localizado no centro da esfera e igual à sua magnetização total. Portanto, a solução do nosso problema é da forma:

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{B}_1 = \lambda \vec{B}_0 = \text{const.}, & r < R, \\ \vec{B}_0 + \frac{K\mu_0}{4\pi} \text{rot} \frac{\vec{B}_0 \wedge \vec{r}}{r^3}, & r > R. \end{cases} \quad (15-24)$$

Verificamos que \vec{B} satisfaz às equações diferenciais do campo, tanto na região interna quanto na externa. Vamos agora impor as condições de continuidade na superfície, que são:

1ª condição - $\Delta B_n = 0$.

Sendo $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ a normal à superfície da esfera, devemos ter, para $r = R$:

$$\lambda \vec{B}_0 \cdot \vec{n} = \vec{B}_0 \cdot \vec{n} + \frac{K\mu_0}{4\pi} \vec{n} \cdot \left[\frac{2\vec{B}_0}{R^3} - \frac{3}{R^5} \vec{R} \wedge (\vec{B}_0 \wedge \vec{R}) \right],$$

onde a expressão entre colchetes nada mais é do que o desenvolvimento de $\text{rot} \frac{\vec{B}_0 \wedge \vec{r}}{r^3}$, para $r = R$.

Como o duplo produto vetorial é ortogonal a \vec{n} , vem:

$$\lambda B_0 \cos \theta = B_0 \cos \theta + \frac{K\mu_0}{2\pi R^3} B_0 \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo entre \vec{n} e \vec{B}_0 . Portanto, a condição de continuidade de B_n implica na relação entre λ e K :

$$\lambda = 1 + \frac{K\mu_0}{2\pi R^3}. \quad (15-25)$$

Observe-se que, como no caso da esfera dielétrica, essa con-

dição independe de θ , e pode assim ser imposta a todos os pontos da superfície da esfera.

2ª condição - $\Delta H_t = 0$.

Consideremos agora um vetor unitário tangencial \vec{t} . Sendo:

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{\vec{B}}{\mu}, & r < R, \\ \frac{\vec{B}}{\mu_0}, & r > R, \end{cases}$$

vem:

$$\frac{\lambda}{\mu} \vec{B}_0 \cdot \vec{t} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \cdot \vec{t} + \frac{K}{4\pi} \vec{t} \cdot \left[-\frac{\vec{B}_0}{R^3} + 3 \frac{\vec{n}}{R^3} \vec{B}_0 \cdot \vec{n} \right].$$

Como $\vec{n} \cdot \vec{t} = 0$ e, em geral, $\vec{B}_0 \cdot \vec{t} \neq 0$, obtemos:

$$\frac{\lambda}{k_m} = 1 - \frac{K \mu_0}{4\pi R^3}. \quad (15-26)$$

Resolvendo as equações (15-25) e (15-26) tem-se:

$$\lambda = \frac{3 k_m}{2 + k_m}$$

$$K = \frac{4\pi R^3}{\mu_0} \frac{k_m - 1}{2 + k_m}.$$

Levando esses valores em (15-24), tem-se a solução do problema:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{3 k_m}{2 + k_m} \vec{B}_0, & r < R, \\ \vec{B}_0 + R^3 \frac{k_m - 1}{2 + k_m} \operatorname{rot} \frac{\vec{B}_0 \wedge \vec{r}}{r^3}, & r > R. \end{cases}$$

Calculemos agora a densidade de magnetização:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}_{\text{int}} = \chi_m \frac{B_{\text{int}}}{\mu},$$

isto é:

$$\vec{M} = \frac{3 \chi_m}{2 + k_m} \vec{H}_0, \quad (15-27)$$

onde $\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$.

Outro modo (mais simples) de encontrar a solução deste problema, é o seguinte:

Pelo raciocínio do início deste parágrafo, \vec{B} no interior da esfera é igual a \vec{B}_0 acrescido da indução produzida pela magnetização uniforme \vec{M} . Portanto:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}, \quad r < R,$$

isto é, a indução magnética no interior da esfera é aumentada do termo $\frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$. Por outro lado:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{M}}{\chi_m}, \quad r < R.$$

Eliminando \vec{M} entre estas duas equações, vem:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{2}{3} \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}, \quad r < R,$$

isto é:

$$\vec{B} = \frac{3 k_m}{k_m + 2} \vec{B}_0, \quad r < R,$$

que coincide com o valor anteriormente obtido e do qual decorre a expressão (15-27), já obtida para \vec{M} .

Na região externa, como foi visto inicialmente, \vec{B} é igual a \vec{B}_0 somado ao campo de um dipolo de momento igual à magnetização total, colocado no centro da esfera. Esse campo coincide com o dado em (15-24), porque \vec{m} é de fato a magnetização total:

$$\vec{m} = \chi \vec{B}_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M}.$$

O campo magnético no interior da esfera é:

$$\vec{H}_{int} = \vec{H}_0 - \frac{\vec{M}}{3}.$$

Este efeito pelo qual o campo magnético \vec{H} é subtraído de $\frac{\vec{M}}{3}$, em consequência da magnetização da esfera, é denominado "efeito desmagnetizante", sendo o fator $\frac{1}{3}$ (que depende da forma do corpo) chamado "fator desmagnetizante".

As figuras 15-7 ilustram o comportamento de \vec{B} e \vec{H} nos casos de materiais paramagnéticos e diamagnéticos. No caso (a) de esfera paramagnética, \vec{B} no interior da esfera é maior do que \vec{B}_0 , o que se traduz pela maior concentração das linhas de força; no caso (b) de esfera diamagnética ocorre o contrário. Pode-se dizer que

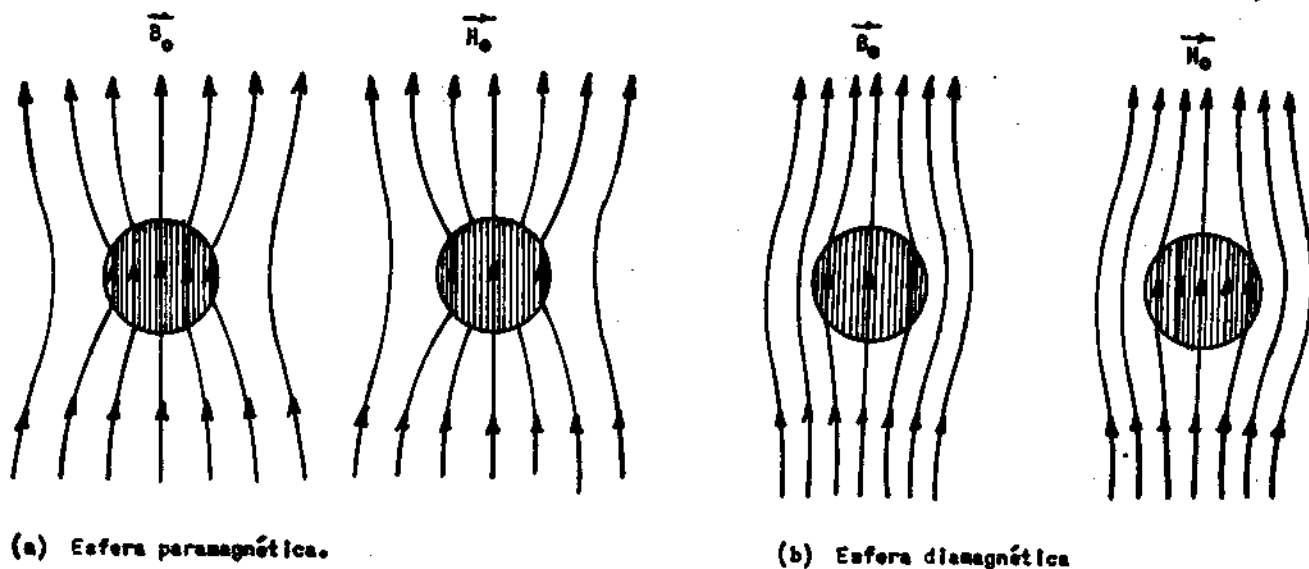


Fig. 15-7

a esfera paramagnética "atrai" as linhas de \vec{B} , enquanto a diamagnética as "repele". No caso (a) de esfera paramagnética, há rarefação das linhas de força para \vec{H} no interior da esfera, o que corresponde ao fato de ser \vec{H} menor do que \vec{H}_0 (efeito desmagnetizante); embora as linhas de \vec{H} sejam também "atraídas" pela esfera neste caso, mantêm-se mais concentradas fora da esfera, porque há linhas que se originam na superfície, ao contrário do caso de \vec{B} , que é um campo de divergência nula. Isso porque:

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{M}$$

e, sendo \vec{M} uniforme, sua divergência é nula, exceto na superfície da esfera (lembramos o caso do dielétrico em que, sendo \vec{P} constante, $-\operatorname{div} \vec{P}$ corresponde a uma distribuição superficial de cargas de polarização $\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}$), e linhas de força podem originar-se aí. Essas linhas de força têm o sentido de \vec{H}_0 fora da esfera e o sentido oposto dentro dela, contribuindo assim para diminuir \vec{H} .

No caso da esfera diamagnética, ocorre a situação oposta, sendo as linhas de \vec{H} "repelidas" pela esfera, mas mais concentradas no interior da esfera, porque as linhas originadas por $-\text{div } \vec{M}$ têm agora o mesmo sentido que \vec{H}_0 no interior da esfera, pois \vec{M} tem agora sentido oposto ao do caso anterior.

15 - 9. Método das imagens. Este método, com as devidas adaptações, pode ser muitas vezes usado com êxito em Magnetostática. Vejamos um exemplo.

Seja um fio retilíneo infinito, conduzindo corrente i , localizado no vácuo, paralelamente à face plana de um meio magnético infinito definido, de permeabilidade μ . Queremos calcular a indução magnética e o campo em todo o espaço (Fig. 15-8). Por motivo de simetria, a corrente superficial de magnetização sobre o plano tem o sentido da corrente i :

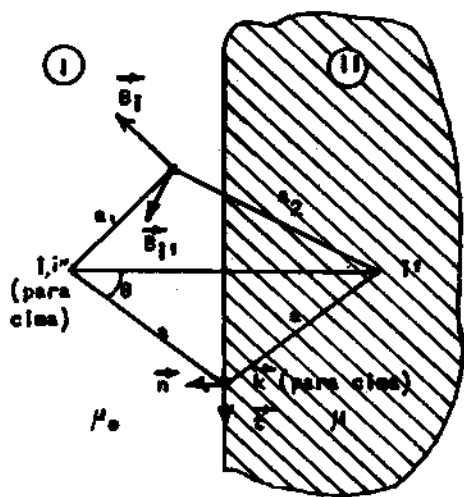


Fig. 15-8

$$\vec{J}'_s = \vec{M} \wedge \vec{n} = J'_s \vec{k},$$

onde \vec{k} é o vetor unitário da direção da corrente i . Por outro lado, é nula a densidade volumétrica de corrente de magnetização no interior do material; de fato:

$$\vec{J}' = \text{rot } \vec{M} = \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \right) = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \text{rot } \vec{H} = 0,$$

pois $\vec{B} = \mu \vec{H}$ e, sendo $\vec{J} = 0$, vê-se por (15-10) que $\text{rot } \vec{H} = 0$.

Agora, por um raciocínio análogo ao que foi feito no parágrafo 13-12, tentaremos verificar se a solução é do tipo: (a) à esquerda do plano, na região I, a indução é a criada pela corrente i e pela corrente superficial de magnetização; admitiremos que a indução da corrente superficial de magnetização é equivalente à da corrente i' , imagem de i em relação ao plano, como se estivesse no vácuo; (b) na região II, a indução é a criada por uma corrente de intensidade i'' , a determinar, localizada na posição da própria corrente i , e representando o efeito conjunto de i e da corrente superficial de polarização, como se estivessem no vácuo.

Tôdas essas considerações equivalem a admitir, para \vec{B} , a forma:

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi a_1} \frac{\vec{k} \wedge \vec{a}_1}{a_1} + \frac{\mu_0 i'}{2\pi a_2} \frac{\vec{k} \wedge \vec{a}_2}{a_2}, & \text{na região I,} \\ \frac{\mu_0 i''}{2\pi a_1} \frac{\vec{k} \wedge \vec{a}_1}{a_1}, & \text{na região II.} \end{cases}$$

A condição (15-17) dá, sobre o plano:

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi a} \text{sen } \theta + \frac{\mu_0 i'}{2\pi a} \text{sen } \theta = \frac{\mu_0 i''}{2\pi a} \text{sen } \theta,$$

que fornece a equação:

$$i + i' = i'' . \quad (15-28)$$

A condição (15-19) dá, sobre o plano:

$$\frac{i}{2\pi a} \cos \theta - \frac{i'}{2\pi a} \cos \theta = \frac{i''}{2\pi a k_m} ,$$

que fornece a 2^a equação nas constantes a determinar, i' e i'' :

$$i - i' = \frac{i''}{k_m} . \quad (15-29)$$

Resolvendo (15-28) e (15-29) obtemos:

$$i'' = \frac{2k_m}{k_m + 1} i$$

$$i' = \frac{k_m - 1}{k_m + 1} i ,$$

o que dá finalmente para a indução magnética:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{a}_1}{a_1^2} + \frac{k_m - 1}{k_m + 1} \frac{\vec{k} \wedge \vec{a}_2}{a_2^2} \right), & \text{na região I,} \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{2}{k_m + 1} \frac{\vec{k} \wedge \vec{a}}{a^2}, & \text{na região II.} \end{cases}$$

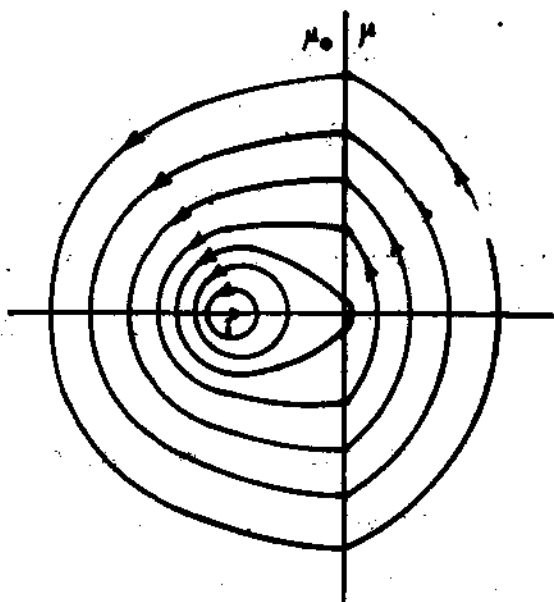


Fig. 15-9

As linhas de \vec{B} têm a configuração indicada na figura 15-9 (dentro do material, arcos de circunferências centradas no fio).

Se tivermos, na região I, um meio material de permeabilidade μ' , encontraremos para i' :

$$i' = \frac{k_m - k'_m}{k_m + k'_m} i$$

(na expressão de \vec{B} , na região I, devemos colocar μ' em lugar de μ_0). Quando $k_m > k'_m$ (é o caso do vácuo na região I), a corrente fictícia i' tem o mesmo sentido que i ; em caso contrário, inverte-se o sentido da corrente imagem.

* * *

Problemas propostos:

- 15-1. No problema apresentado no parágrafo 15-9, calcule a força, por unidade de comprimento, entre a corrente e o material magnético.
- 15-2. Um cilindro de raio R e comprimento infinito, feito de ma-

terial magnético homogêneo, de permeabilidade μ , é colocado em um campo magnético uniforme de indução \vec{B}_0 , cuja direção é perpendicular ao eixo do cilindro. Calcular: (a) a indução e o campo magnético em todo o espaço; (b) o vetor magnetização no cilindro.

15-3. Num meio magnético indefinido, de permeabilidade μ , existe uma cavidade esférica de raio R (no vácuo), no centro da qual está um dipolo magnético de momento \vec{m} . Calcule a indução e o campo magnético em todo o espaço e a densidade superficial de correntes de magnetização sobre a esfera.

15-4. Um fio retilíneo infinito, conduzindo corrente i , é colocado paralelamente à face plana infinita de um material magnético de permeabilidade μ_2 ; o fio está mergulhado em óleo, de permeabilidade μ_1 , que ocupa todo o outro semi-espaço. Calcular: (a) o campo magnético em todo o espaço; (b) a força, por unidade de comprimento, entre o fio e o material; (c) a densidade superficial de correntes de magnetização sobre o plano.

15-5. Um ímã permanente tem a forma de um cilindro circular reto de comprimento L . Se a magnetização \vec{M} é uniforme e tem a direção do eixo do cilindro, encontre as densidades de correntes de magnetização, \vec{J}' e \vec{J}'_s . Compare a distribuição de correntes com a do solenóide (R. M.).

ELETROMAGNETISMO II - ERRATA

Pag.	Linha	Onde se lê	leia-se
26	1	DASSA	<u>DASSA corrente</u>
33	10	$\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$	$\vec{J}(\vec{a}) = \rho(\vec{a})$
36	17	gradiente	nabla
41	última	ds'	$d\vec{s}'$
49	16	z	a
58	18	\vec{r}	\vec{r}
59	16	(11-3)	(11-4)
61	10	(11-5)	(11-4)
62	8	$\vec{r} = y\vec{j}$	$\vec{r} = y\vec{j} + zk$
77	16	$\vec{J}_s \cdot \vec{n} \wedge \vec{t} = \vec{t} \cdot \vec{J}_s \wedge \vec{n}$	$\mu_0 \vec{J}_s \cdot \vec{n} \wedge \vec{t} = \mu_0 \vec{t} \cdot \vec{J}_s \wedge \vec{n}$
79	16	$\vec{A}' - \nabla \psi$	$\vec{A}' + \nabla \psi$
80	15	(12-4)	(12-7)
86	17	$\text{div } \vec{P}$	$-\text{div } \vec{P}$
105	última	\vec{E}_0	\vec{D}_0
108	2	ca-se	ca-se assim,
124	última	$\frac{dW}{dv}$	$\frac{dW}{dv'}$
127	última	negativa	positiva
128	11	$-\frac{q^2}{2\pi A}$	$-\frac{q^2}{2\pi A^2}$
130	3	\vec{F}	\vec{F}
146	4, 5	$ x_m $	x_m

Eletrromagnetismo II - Errata (Continuação)

155	2	\vec{n}	\vec{B}_0
155	9	$\vec{n} [$	$\vec{n} - [$
155	11	\vec{B}	\vec{B}_0
155	13	$B_0 \cos \theta =$	$\lambda B_0 \cos \theta =$
157	2	\vec{n}	\vec{B}_0
157	penultima	B	\vec{B}
158	10	C	K
161	16	$\frac{\vec{k} \wedge \vec{a}_1}{2\pi a_1}$	$\frac{\vec{k} \wedge \vec{a}_1}{a_1}$
163	12	$k_n > k_m$	$k'_m > k'_n$

* * *

CORREÇÕES EM FIGURAS

Fig. 9-22 (pag. 30)

Acrescentar à legenda: "e que nos 4 quadrantes o produto $y'dx'$ é negativo, se seguirmos ao longo de C a orientação convencional."

Fig. 13-18 (pag. 113)

Substituir r_+ por r , r por r_- e ligar P_1 a q'' , chamando r_+ a essa distância.

* * *

SUBSTITUIR O ENUNCIADO DO PROBLEMA

11 - 2 (pag. 72), por:

Calcular o potencial vetor em um ponto qualquer do eixo de uma espira circular conduzindo corrente estacionária i . O valor obtido implica em que $\vec{B} = 0$ sobre o eixo? Por que?

* * *