

MONOGRAFIAS DE FÍSICA

X

ELETROMAGNETISMO I

Movimento de cargas em campos elétricos e magnéticos
Eletrostática no vácuo e em presença de condutores

por

Jayme Tiomno

Notas redigidas por Sarah Castro Barbosa de Andrade

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Av. Meneses Brás, 71

RIO DE JANEIRO

1963

PREFÁCIO

As presentes notas correspondem ao curso de Eletromagnetismo que temos ministrado há vários anos na 3^a série do Curso de Física da Faculdade Nacional de Filosofia. Nele levamos em consideração as duas finalidades principais desse curso, quais sejam, a formação de professores secundários e a preparação básica de futuros cientistas e especialistas. Em ambos os casos, deverão os estudantes adquirir conhecimentos básicos de Eletromagnetismo e habituar-se a manipulá-los.

O conhecimento de uma ciência é medido não pela quantidade de resultados e informações que podem ser reproduzidos, de memória ou não, ou pela massa de desenvolvimentos mais elaborados que o estudante pode acompanhar racionalmente, mas essencialmente pela capacidade que este adquire de utilizar esses conhecimentos na aplicação a situações diferentes das encontradas nos textos.

Este curso caracteriza-se pela insistência reiterada na utilização do cálculo, tendo em vista a dificuldade, peculiar a nossos estudantes, de unir a Matemática à Física, e mesmo sua falta de treino na aplicação do Cálculo Integral e da Análise Vetorial.

Devido à extensão da matéria, a publicação do curso foi dividida em três partes:

- ELETROMAGNETISMO I - Movimento de cargas em campos elétricos e magnéticos. Eletrostática no vácuo e em presença de condutores.
- ELETROMAGNETISMO II - Magnetostática no vácuo. Dielétricos e materiais magnéticos.
- ELETROMAGNETISMO III - Equações de Maxwell.

Para referências suplementares, poderão ser consultados os seguintes livros: "Foundations of Electromagnetic Theory", de Reitz-Milford; "Electromagnetism", de Slater - Frank; "Principles of Electricity and Magnetism", de Pugh - Pugh; "Electricity and Magnetism", de Abraham - Becker. Para desenvolvimento posterior,

recomendam-se o volume, desta mesma série, "Ondas Eletromagnéticas", de M. Nussenzveig (a ser publicado) e o livro "Classical Electricity and Magnetism", de W. K. H. Panofsky.

Somos gratos a S. C. B. de Andrade que redigiu estas notas, tornando possível a publicação deste curso.

Rio de Janeiro, 10 de Dezembro de 1962

J. Tiomno

Observação: As iniciais (R.M.) e (S.F.) que se seguem aos enunciados de alguns problemas, indicam que êles foram extraídos dos livros de Reitz - Milford e Slater - Frank, acima citados.

ÍNDICE

	Pag.
Introdução	1
Capítulo 1 - <u>Fôrças atuando sobre cargas</u>	10
1. Campo elétrico e campo magnético. 2. Eletrodinâmica das cargas puntiformes. 3. Energia cinética. 4. Momento angular. 5. Movimento de uma carga puntiforme q num campo magnético \vec{B} uniforme. 6. Caso relativístico. Problemas.	
Capítulo 2 - <u>Campo eletrostático no vácuo</u>	32
1. <u>Lei de Coulomb</u> . 2. <u>Princípio de superposição</u> . 3. Campo elétrico de distribuições contínuas de cargas. 4. Campo de uma carga puntiforme. 5. Campo de duas cargas puntiformes. 6. Campo de um dipolo elétrico. <u>Vetor Gradiente</u> . 7. Campo de um fio retilíneo infinito, com densidade linear λ constante. 8. Campo de um fio retilíneo de comprimento finito, com densidade linear de cargas λ constante. 9. Campo de uma distribuição plana infinita de cargas, com densidade superficial σ constante. 10. Campo criado por uma espira circular, com densidade linear de cargas λ constante. 11. Campo de um disco circular, com densidade superficial de cargas σ constante, num ponto do eixo. 12. Campo de uma distribuição esférica superficial de cargas, com densidade σ constante. 13. Campo criado por uma distribuição esférica de cargas, com densidade volumétrica ρ constante. Problemas.	
<u>Capítulo 3</u> - <u>Teorema de Gauss</u>	65
1. <u>Propriedades de simetria do campo elétrico</u> . 2. <u>Teorema de Gauss</u> . 3. Campo de uma carga puntiforme. 4. Campo de uma distribuição plana infinita, de densidade superficial de cargas σ constante. 5. Campo de uma distribuição esférica de cargas, de densidade volumétrica ρ constante. 6. Descontinuidade da componente normal do campo elétrico. Problemas.	
Capítulo 4 - <u>Potencial eletrostático</u>	80
1. Condutores e isolantes. 2. Potencial eletrostático. 3. Relação entre potencial e campo elétrico. 4. Potencial de um condutor. 5. Potencial de uma carga puntiforme. 6. Po-	

tencial de um dipolo elétrico. 7. Potencial de uma dupla camada. 8. Potencial de um fio retilíneo infinito, com densidade linear de cargas λ constante. 9. Potencial de uma espira circular, num ponto do eixo. 10. Potencial de um disco circular, num ponto do eixo. 11. Potencial de uma distribuição plana infinita de cargas. 12. Potencial de uma distribuição superficial esférica de cargas. 13. Potencial de uma distribuição esférica volumétrica de cargas. Problemas.

Capítulo 5

Equações diferenciais da Eletrostática

115

1. 1ª equação diferencial. 2. 2ª equação diferencial. 3. Sentido físico dos operadores divergência e rotacional. 4. Condições ao contorno. 5. Campo de uma camada plana infinita. 6. Equações de Poisson e Laplace. 7. Campo de uma camada plana infinita (2º processo). 8. Potencial de uma distribuição esférica volumétrica de cargas, com densidade ρ constante. 9. Potencial de uma camada cilíndrica infinita, sendo ρ uma função linear de r .

Apêndice 5-I: Teorema de Gauss para a divergência.

Apêndice 5-II: Teorema de Stokes para o rotacional.

Apêndice 5-III: Algumas propriedades dos operadores diferenciais.

Problemas.

Capítulo 6

Imagens elétricas

150

1. Propriedades do potencial. 2. Teorema de unicidade do potencial. 3. Teorema de blindagem eletrostática. 4. Método das imagens elétricas. 5. Carga puntiforme em presença de um condutor limitado por uma face plana infinita. 6. Carga puntiforme em presença de esfera condutora. 7. Condutor com cavidade esférica no interior da qual existe uma carga puntiforme. 8. Fio infinito uniformemente carregado paralelo a face plana de um condutor ligado a terra. 9. Fio infinito uniformemente carregado, paralelo ao eixo de um cilindro condutor infinito ligado a terra. 10. Esfera condutora num campo elétrico uniforme. Problemas.

Capítulo 7	-	<u>Método de Green</u>	192
		1. Teorema de Green. 2. Fórmula de Green. 3. Problema de Dirichlet.	
Capítulo 8	-	<u>Energia eletrostática</u>	200

1. Energia de um sistema de cargas puntiformes. 2. Energia de uma distribuição contínua de cargas. 3. Energia de um sistema de condutores. 4. Distribuição espacial da energia eletrostática. 5. Condensador plano. 6. Condensador esférico. 7. Condensador cilíndrico. 8. Condensador constituído por dois cilindros paralelos, de mesmo raio. 9. Carga puntiforme em frente a um condensador plano. 10. Distribuição esférica com densidade uniforme de cargas. Problemas.

INTRODUÇÃO

Torna-se indispensável, ao iniciarmos o presente curso, a apresentar em linhas gerais a evolução histórica do Eletromagnetismo - pois esta evolução nos indicará o caminho a seguir - e demonstrar a importância desse estudo no desenvolvimento da Física moderna.

As propriedades elétricas da matéria e as ações entre corpos eletrizados não eram totalmente desconhecidos na Antigüidade, mas sua formulação mais precisa data da 2ª metade do século XVIII, época em que a Mecânica já se encontrava estabelecida como ciência. Foi esta, aliás, que orientou os físicos na utilização dos métodos matemáticos e na adoção de uma atitude mecanicista, que consistia essencialmente na indagação da força atuante a substituir na equação:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

empregada na resolução de todos os problemas. Como forças, eram conhecidas apenas a força gravítica, responsável pelo movimento dos astros, as forças elásticas e, mais tarde, as forças elétricas.

O ponto fundamental de partida para o desenvolvimento da Eletrostática foi a descoberta da lei de Coulomb (1785); sucederam-se os trabalhos de Gauss, Laplace e Poisson, sobretudo no que diz respeito ao formalismo matemático da teoria.

Já no desenvolvimento da Magnetostática, que se deu a se-

guir, encontrou-se dificuldade no estabelecimento de lei análoga à da Gravitação Universal, da Mecânica, e à de Coulomb, da Eletrostática, segundo as quais entre duas massas ou duas cargas elétricas origina-se uma força central proporcional ao produto delas e ao inverso do quadrado da distância que as separa. A dificuldade reside na impossibilidade de isolar "massas magnéticas". Mas, da analogia desde logo evidenciada entre um ímã e um dipolo elétrico, resultou a hipótese artificial da existência de cargas magnéticas fictícias, positivas e negativas, correspondentes aos polos Norte e Sul de um ímã. Foi assim estabelecida uma equação para a força magnética (análoga à de Coulomb para força elétrica) que levou a conclusões acertadas, mas que por outro lado conduziu a erros, por encobrir a verdadeira natureza dos fenômenos magnéticos.

Para a elucidação destes fenômenos concorreu inicialmente a experiência de Oersted (1819), que demonstrou a existência de ações magnéticas ocasionadas por correntes elétricas; medidas foram feitas de campos magnéticos criados por alguns circuitos. Mas, na realidade, o princípio fundamental da Magnetostática surge com a lei de Ampère (1820), que determina a forma pela qual um elemento de corrente contribui para o campo magnético criado na região que o circunda. A interpretação elétrica dos fenômenos magnéticos ocorreu ao próprio Ampère, admitindo serem os ímãs constituídos de dipolos elementares, que nada mais seriam do que pequenas correntes (as "correntes de Ampère") de momento magnético determinável. Mais tarde, com o advento da Teoria Atômica, essas correntes foram identificadas com as correntes eletrônicas existentes no átomo. Modernamente descobriu-se, ainda, a existência de momentos magnéticos intrínsecos

associados às partículas, que não podem ser explicados por movimentos do tipo das correntes de Ampère.

Pôde então ser compreendido o comportamento dos materiais dielétricos e magnéticos em presença de campos estáticos, mas nada se conhecia a respeito de campos não estáticos (dependentes do tempo), até a descoberta de Faraday (1831) do fenômeno da "indução eletromagnética": se, nas proximidades de um circuito C, por onde não passa corrente, fizermos mover-se um ímã ou abrirmos e fecharmos sucessivamente um outro circuito C', conduzindo corrente, aparecerá no circuito C uma corrente elétrica induzida, variável no tempo. A lei foi descoberta experimentalmente e formulada de maneira mais ou menos intuitiva, em termos de linhas de força.

Como aplicações dessas descobertas, que constituíam um Eletromagnetismo ainda incipiente, surgiram os motores e os dínamos, responsáveis em grande parte pelo progresso industrial ocorrido na 2^a metade do século XIX.

Deve-se a Maxwell a formulação matemática da lei de Faraday. Ainda a Maxwell se deve a descoberta de um novo fenômeno: não apenas um campo magnético variável pode gerar um campo elétrico; também um campo elétrico variável pode gerar um campo magnético. Mas a descoberta de Maxwell não decorreu da experiência, porque o fenômeno é imperceptível para oscilações mais ou menos lentas do campo elétrico; decorreu de um procedimento teórico. Verificando a inconsistência das equações diferenciais do Eletromagnetismo (entre as quais já se incluía a expressão matemática da lei de Faraday) e para torná-las consistentes, adicionou Maxwell mais um termo a uma dessas

equações. O que corresponde a admitir que um campo elétrico oscilante produz um campo magnético em todo o espaço, exatamente como o faz uma carga elétrica (ou um dipolo elétrico) oscilante.

Uma vez obtido um sistema de equações coerentes, pôde verificar que o campo elétrico e o campo magnético satisfazem a certas equações já então conhecidas na Física (usadas sobretudo em Óptica e em Acústica), chamadas "equações de onda" ou "de D'Alembert", da forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 0,$$

satisfeitas, por exemplo, quando a função ϕ representa as amplitudes de vibração num meio contínuo. As soluções dessas equações descrevem ondas que se propagam no espaço com velocidade igual à constante v que figura na equação de D'Alembert. Este fato levou Maxwell a concluir da existência de ondas eletromagnéticas, cuja velocidade calculou: o resultado encontrado coincidia muito precisamente com a velocidade de propagação da luz. Por julgar improvável a existência na Natureza de dois tipos diferentes de ondas propagando-se com velocidades idênticas e tão consideráveis ($v \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$, no vácuo), concluiu ainda Maxwell (1867) do caráter eletromagnético da onda luminosa.

Entretanto, a demonstração experimental da existência de ondas eletromagnéticas só foi realizada por Hertz (1888), que conseguiu, através de oscilações muito rápidas numa bobina, obter ondas de rádio (as chamadas ondas hertzianas). De fato, sendo c (velocidade de propagação da onda eletromagnética no vácuo) muito gran-

de, o termo $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ é desprezível em face dos outros, a menos que a função ϕ (no caso o campo eletromagnético) varie muito rapidamente com o tempo. Aliás, a equação de D'Alembert, sem o último termo, já era conhecida na Eletrostática e na Magnetostática como "equação de Laplace".

Dois fatos importantes ficaram assim demonstrados: 1º) a validade das equações diferenciais de Maxwell; 2º) o caráter eletromagnético da luz, o que deu nova interpretação aos fenômenos óticos e situou a Ótica entre os capítulos do Eletromagnetismo.

Várias foram as aplicações práticas daquelas descobertas: rádio, guias de onda, radar etc. Também as propriedades eletromagnéticas dos materiais (cristais, isolantes, condutores, semi-condutores) foram sendo estudadas, e constituíram o ramo da Física que hoje se denomina a Física dos Sólidos, de grande importância no desenvolvimento industrial, principalmente no que se refere ao uso de transistores, que revolucionaram a ciência eletrônica.

Outro ramo da Física que teve por ponto de partida o Eletromagnetismo foi a Teoria da Relatividade. Dentro de uma região bem delimitada de fenômenos, as leis de Newton são perfeitamente corretas. Mas sua aplicação aos fenômenos eletromagnéticos, por exemplo em equações do tipo:

$$\vec{F}_{em} = m \frac{d\vec{v}}{dt},$$

revelou inconsistência entre as equações do Eletromagnetismo e as da Mecânica, por uma mudança de sistemas de coordenadas, e evidenciou outras contradições, o que conduziu Einstein à formulação da Teoria da Relatividade Restrita (1905). Um dos resultados fundamen

tais desta teoria foi a substituição da equação:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

pela equação mais geral:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v})$$

onde a massa depende agora da velocidade, na forma:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

em que c é a velocidade de propagação da luz no vácuo, v é a velocidade da partícula e m_0 sua "massa de repouso", que coincide com a massa da partícula clássica. Cumpre observar aqui que a equação fundamental da Dinâmica, como Newton a escreveu, se exprimia:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \text{onde } \vec{p} = m\vec{v},$$

e que Newton admitiu a constância da massa, pôsto que em todos os fenômenos observados até então ela se comportava como tal. Realmente, quando a velocidade do móvel é muito pequena em comparação com a velocidade da luz, o fator de correção relativístico é praticamente igual a 1, e permanece válida a equação clássica. Neste sentido, a Teoria da Relatividade Restrita (a Generalizada é uma teoria da gravitação, não tão sólidamente estabelecida quanto a Restrita) não veio derrubar a Mecânica Newtoniana, sim generalizar os seus resultados. Está hoje largamente comprovada e em grande precisão: pode-se, por exemplo, acelerar um elétron a energias tais, que tor-

nem sua massa superior à do próton (e a massa de repouso do próton é 1.836 vezes maior do que a do elétron). Por essa generalização, a Teoria da Relatividade Restrita engloba a Mecânica Newtoniana, novos fenômenos mecânicos antes desconhecidos e que não podem ser explicados pela Mecânica clássica, e mais a teoria Eletromagnética (que, aliás, permaneceu inalterada).

Ainda a partir do Eletromagnetismo, expandiu-se a Física em outro sentido: o do estudo das propriedades eletromagnéticas dos átomos, posto que são estes constituídos de cargas elétricas, positivas e negativas, em movimento. Mas a Teoria Eletromagnética, aplicada a essa região de fenômenos, continha grande número de inconsistências; a que primeiro se evidenciou foi a da distribuição espectral da radiação do corpo negro. A curva espectral obtida experimentalmente não coincidia, de um lado, com a obtida do Eletromagnetismo, de outro lado, com a obtida da Termodinâmica. Planck (1901) verificou que uma nova equação, representando uma curva em acôrdo com a experiência, seria obtida modificando as idéias fundamentais concernentes a trocas de energia. Se, classicamente, quantidades de energia arbitrariamente pequenas podem ser trocadas, para Planck essas trocas só se poderiam processar por quantidades discretas de energia, múltiplas de uma quantidade elementar a que êle denominou "quantum". Pouco depois (1903), Einstein logrou explicar a emissão foto-elétrica, incompreensível em termos clássicos, por uma "quantização" da energia luminosa, e chamou "fótons" às partículas de luz.

Continuava, entretanto, inexplicado o fato de que êsse novo tipo de teoria física fôsse tão somente aplicável à região limitada dos fenômenos atômicos. Só em 1926, com a Mecânica Ondulatória

de Schrödinger, é que se pôde estabelecer uma interrelação de todos os fenômenos físicos. Concluiu-se então: 1^o) que a luz tem comportamento ondulatório em certos fenômenos, corpuscular em outros; 2^o) que a matéria tem também propriedades ondulatórias: foi medido o comprimento de onda associado ao elétron; fenômenos de interferência já foram verificados com elétrons, prótons e até com moléculas.

Do mesmo modo que os fenômenos relativísticos não são observáveis quando as velocidades em estudo são muito menores do que a velocidade da luz, valendo então as equações clássicas, assim também na Mecânica Quântica só são encontrados resultados diferentes dos clássicos quando as partículas em consideração têm massa bastante pequena e estão limitadas a regiões do espaço bastante reduzidas, que é quando ganham ênfase as propriedades ondulatórias. A um corpo macroscópico corresponderia um comprimento de onda extremamente pequeno, não verificável experimentalmente.

Façamos notar aqui que o estudo das propriedades químicas da matéria está relacionado com o Eletromagnetismo no que se refere a atrações e repulsões entre átomos e moléculas, mas liga-se principalmente à Mecânica Quântica. Podemos mesmo afirmar que a Química nada mais é do que uma aplicação da Mecânica Quântica às propriedades dos átomos e das moléculas.

Tanto a Teoria da Relatividade quanto a Mecânica Quântica são generalizações da Física clássica; ambas se aplicam a certas regiões da Física; a outras regiões, ora uma, ora outra são aplicáveis. Uma generalização ainda maior, abrangendo agora a maior parte dos fenômenos físicos, é a Mecânica Quântica Relativística; teo-

ria de caráter quase universal.

Alguns fenômenos recentemente descobertos têm apenas relação remota com o Eletromagnetismo, como é o caso daqueles que constituem a Física Nuclear e a Física das Partículas Elementares, em cujo desenvolvimento a Teoria Eletromagnética, a Relatividade e a Mecânica Quântica tiveram importância fundamental.

CAPÍTULO 1

FÔRÇAS ATUANDO SÔBRE CARGAS

1 - 1. Campo elétrico e campo magnético. Quando uma partícula carregada (isto é, possuindo carga elétrica) é colocada em presença de outras cargas e de correntes elétricas, sôbre ela atuam fôrças. Estas fôrças são de 2 tipos: uma que não depende da velocidade \vec{v} da partícula, chamada fôrça elétrica; outra que depende de \vec{v} e l_{he} é sempre perpendicular, chamada fôrça magnética; são ambas proporcionais à carga q contida pela partícula. A fôrça total atuante será então

$$\vec{F}_{em} = \vec{F}_e + \vec{F}_m .$$

Para medir carga elétrica, escolhemos uma carga unitária e medimos a fôrça que atua sôbre ela; em seguida medimos a fôrça que, nas mesmas condições, atua sôbre a carga q a determinar. A razão entre a 2^a fôrça e a 1^a dará a medida de q em termos da unidade escolhida.

A "intensidade de campo elétrico" \vec{E} (ou, abreviadamente, o "campo elétrico" \vec{E}), num dado ponto, é definida como a razão entre a fôrça que atua sôbre uma carga puntiforme aí colocada em repouso e a carga:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}$$

Observações:

- 1ª) Nesta operação é indispensável que o campo se mantenha inalterável em presença da carga. Para isto é necessário que a carga-teste seja suficientemente pequena, porque em caso contrário aparecerão cargas induzidas sobre os corpos em que estão as cargas e correntes geradoras do campo, que modificarão apreciavelmente o campo. Uma definição mais rigorosa de \vec{E} seria então:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e}{q}$$

- 2ª) Entende-se por "carga puntiforme" aquela que está localizada num corpo de dimensões muito pequenas em comparação com as dimensões dos outros corpos presentes e com as distâncias consideradas.

Para medir a força magnética, colocamos no campo a carga em movimento, medimos a força total, e dela subtraímos a força elétrica. O vetor "indução magnética" \vec{B} (assim denominado por razões históricas, quando na realidade deveria chamar-se "campo magnético") é definido pela equação:

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

A direção de \vec{B} é determinada fazendo variar a direção da velocidade, até que seja nula a força magnética sobre a carga: a any

lação do produto vetorial dá-se quando \vec{B} é paralelo a \vec{v} .

O módulo de \vec{B} pode ser calculado pela fórmula:

$$F_m = q|\vec{v}| B \sin \theta$$

onde θ é o ângulo entre \vec{B} e \vec{v} . Escolhendo \vec{v} de tal maneira que θ seja igual a 90° , teremos:

$$B = \frac{F_m}{q|\vec{v}|}$$

O sentido de \vec{B} é determinado pelo produto vetorial, utilizando as regras usuais (por exemplo, a do saca-rólhas) (Fig. 1-1).

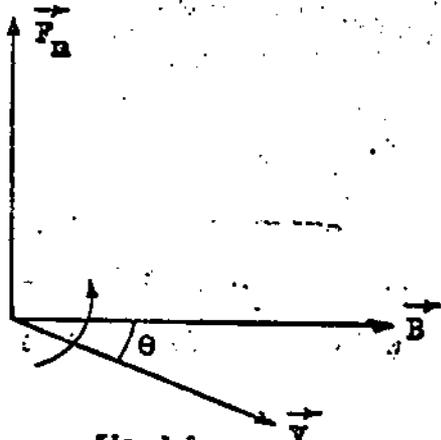


Fig. 1-1

Evidentemente, o sentido assim escolhido para \vec{B} é puramente convencional: seria igualmente válida a escolha contrária, desde que se invertesse o sinal do produto vetorial.

Observação: para a determinação completa de \vec{E} e de \vec{B} , medidas deverão ser feitas em todos os pontos do espaço, o que só será realizável, na prática, se \vec{E} e \vec{B} não dependerem do tempo (caso estacionário). Quando \vec{E} e \vec{B} variam com o tempo, sobretudo quando variam muito rapidamente com o tempo, outros métodos (indiretos) serão usados para sua determinação.

Neste curso empregaremos o sistema MKS de unidades, no qual a unidade de carga - tomada como fundamental - é o coulomb (C). Como, porém, a unidade mais facilmente determinável experimentalmen

te não é o coulomb e sim o ampère (A), unidade de intensidade de corrente elétrica, define-se coulomb como sendo "a carga que atravessa, por segundo, uma seção normal de um circuito elétrico, pelo qual passa continuamente uma corrente de intensidade igual a 1 ampère".

As unidades de campo elétrico e de indução magnética são, respectivamente, neste sistema:

$$U(\vec{E}) = \frac{N \text{ (newton)}}{C} = \frac{V \text{ (volt)}}{m \text{ (metro)}}$$

$$U(\vec{B}) = \frac{N \times s \text{ (segundo)}}{C \times m} = \frac{\text{Web (weber)}}{m^2}$$

Princípio da conservação da carga: não se pode produzir uma carga elétrica não nula; podem-se apenas separar cargas positivas e cargas negativas.

Esta é uma consequência do fato de ser toda matéria constituída de cargas idênticas, umas positivas outras negativas, e de não poderem ser alteradas essas cargas elementares. Seu valor é:

$$e \approx \pm 1,6 \times 10^{-19} \text{ C.}$$

1 - 2. Eletrodinâmica das cargas puntiformes. Para a determinação do movimento de cargas sujeitas à ação de campos elétricos e magnéticos, é usada a equação fundamental da Dinâmica:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}),$$

sendo:

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}, \quad (1-1)$$

que é a chamada "força de Lorentz"; m só poderá ser retirado do operador de derivação, por ser constante, no caso não relativístico ($v \ll c$), ou no caso relativístico quando $|\vec{v}|$ não variar com o tempo (como no movimento circular uniforme).

A equação fundamental da Dinâmica também se escreve

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}; \quad (1-2)$$

sabe-se que, para a Mecânica clássica:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v},$$

e para a Mecânica relativística:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

e que essas duas expressões se tornam idênticas para $v \ll c$, conforme foi visto na Introdução.

Clássicamente, dois conceitos importantes foram estabelecidos: o de energia cinética e o de momento angular. Vamos reformulá-los aqui usando o tratamento relativístico.

1 - 3. Energia cinética. O caminho seguido na Mecânica clássica para a conceituação de energia cinética foi (a) multiplicar escalarmente por \vec{v} ambos os membros da equação (1-2):

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

• (b) procurar obter no 2º membro uma derivada total:

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_0 v^2 \right).$$

Ora, o produto escalar $\vec{F} \cdot \vec{v}$ representa o trabalho realizado, por unidade de tempo, pelas forças presentes, isto é:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\tau}{dt};$$

por conseguinte, chamando

$$W_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

à energia cinética da partícula, conclui-se que a variação da energia cinética é igual ao trabalho realizado, por segundo, pelas forças presentes:

$$\frac{dW_{\text{cin}}}{dt} = \frac{d\tau}{dt}.$$

Se a única força que atua sobre a partícula é a força magnética, então, por ser ela sempre perpendicular à velocidade, teremos

$$\frac{dW_{\text{cin}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0,$$

isto é, a energia da partícula será mantida constante.

O mesmo raciocínio poderá ser feito em Relatividade; porém aqui o trabalho realizado, por unidade de tempo, será dado pela equação:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m_0 \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (1-3)$$

Vamos procurar obter no último membro de (1-3) uma deriva da total:

$$m_0 \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) =$$

$$= m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \times \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) =$$

$$\left(\text{somando e subtraindo} \frac{d}{dt} \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

$$= \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{-c^2 + v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

$$= \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{2} \frac{d}{dt} \left(-c^2 + \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) =$$

$$= \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) =$$

$$= \frac{m_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{2} \frac{2c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) =$$

Chamando agora

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1-4}$$

é energia total da partícula, e

$$W_{cin} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \tag{1-5}$$

à sua energia cinética (que cresce com v e se anula para $v=0$), como $m_0 c^2$ é uma constante, obtemos resultado análogo ao obtido classicamente:

$$\frac{dW_{\text{cin}}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

Aliás, mesmo classicamente, a energia cinética é definida a menos de uma constante (correspondente a $m_0 c^2$), porque a grandeza $\frac{m_0 v^2}{2}$ parece no teorema sdb o operador de derivada.

À quantidade

$$W_0 = m_0 c^2, \quad (1-6)$$

que não depende da velocidade da partícula, chamou Einstein sua "energia de repouso". A rigor, qualquer constante poderia ser adicionada à energia cinética, mas Einstein demonstrou que a equivalência entre massa e energia, evidenciada na equação (1-6), é verdadeira. E essa conclusão encontrou prova definitiva no estudo da Radioatividade. Certos elementos como o rádio, chamados "radioativos", são capazes de liberar continuamente energia, violando assim o princípio em vigor classicamente da conservação da energia. Na realidade o que vigora é o princípio da conservação de energia e massa. Medindo a massa do núcleo de um desses elementos, antes da emissão de partículas α ou β , obtém-se um número maior do que medindo a massa do núcleo, depois da emissão, e a ela adicionando a massa das partículas emitidas. Há portanto uma perda de massa, que corresponde à energia liberada. Na bomba atômica, energia é produzida às custas de uma parte da massa do átomo. A transformação total de massa em energia só é possível no processo de aniquilamento da par-

tícula por colisão com a anti-partícula, como, por exemplo, do elétron com o pósitron.

A expressão relativística de \vec{p} se confunde com a clássica para pequenas velocidades: o mesmo deve dar-se com a energia cinética. De fato, desenvolvendo (1-5) em série de Taylor, vem:

$$W_{cin} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^4} + \dots$$

Para $v \ll c$, todos os termos de ordem mais alta do que o 1º podem ser desprezados, e obtém-se a expressão clássica da energia cinética.

O 2º termo do desenvolvimento, logo depois de 1905, foi testado para altas velocidades e verificado correto. Experiências mais recentes com os grandes aceleradores e os raios cósmicos confirmaram a fórmula relativística (1-4) com precisão extraordinária.

Da equação:

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

conclui-se que, também no caso relativístico, a energia de uma partícula sujeita a forças puramente magnéticas é constante.

1 - 4. Momento angular. Multiplicando vetorialmente por \vec{r} ambos os membros da equação (1-2), vem:

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}, \quad \text{ou}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{p}) = \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{v} \wedge \vec{p}.$$

Tem-se no caso clássico:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} \quad \therefore \quad \vec{v} \wedge \vec{p} = 0,$$

e também no caso relativístico:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \therefore \quad \vec{v} \wedge \vec{p} = 0.$$

Portanto é válido nos 2 casos o teorema do momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}, \quad \text{onde } \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}.$$

Consideraremos agora alguns exemplos de estudo do movimento de cargas elétricas, tanto no caso clássico, quanto no relativístico.

1 - 5. Movimento de uma carga puntiforme q num campo magnético \vec{B} uniforme (de mesmo valor em todos os pontos do espaço) e constante (independente do tempo), no limite não relativístico ($v \ll c$). Tomemos o eixo Oz paralelo a \vec{B} . Se uma partícula for colocada em re-

pouso no campo magnético, nenhuma força atuará sobre ela, pois:

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B},$$

ela permanecerá em repouso. Consideremos, então, que sua velocidade inicial é $\vec{v}_0 \neq 0$.

Em um instante qualquer, a equação do movimento será:

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = q \vec{v} \wedge \vec{B}, \quad (1-7)$$

onde $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, e $\vec{B} = B \vec{k}$.

No limite não relativístico, a massa é constante, e (1-7) se desdobrará nas três equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dv_x}{dt} = q v_y B \\ m \frac{dv_y}{dt} = -q v_x B \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Chamando $w = \frac{qB}{m}$ e lembrando que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$, vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = w \dot{y} \\ \ddot{y} = -w \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{array} \right. \quad (1-8)$$

A terceira equação de (1-8) se integra imediatamente:

$$z = v_{0z} t + z_0, \quad (1-9)$$

onde v_{0z} é a componente segundo z da velocidade inicial da partícula, e z_0 a componente segundo z do raio vetor de sua posição inicial.

Vemos assim que a partícula tem movimento retilíneo uniforme na direção z , o que era de se esperar, pois nenhuma força age sobre ela nesta direção.

O sistema das duas primeiras equações de (1-8) pode ser resolvido pelos métodos usuais. Utilizaremos aqui, porém, o artifício do emprêgo de variáveis complexas, não apenas por se tratar de método mais compacto, mas também por ser frequentemente utilizado no Eletromagnetismo.

Multipliquemos por $i = \sqrt{-1}$ a 2ª equação de (1-8), e somemos membro a membro com a 1ª; teremos:

$$\frac{d^2}{dt^2} (x+iy) = -i\omega \frac{d}{dt} (x+iy). \quad (1-10)$$

Introduzindo agora a variável complexa

$$\xi = x+iy,$$

a equação (1-10) tomará a forma:

$$\ddot{\xi} = -i\omega \dot{\xi}$$

e terá para solução geral:

$$\xi = a e^{-i\omega t}, \quad (1-11)$$

onde a é uma constante, em geral complexa. Ponhamos:

$$a = b e^{-i\alpha},$$

com b e α reais, sendo $b > 0$ e $-\pi \leq \alpha \leq \pi$, determináveis a partir das condições iniciais do problema. Estas são duas constantes de integração, resultantes da primeira integração de duas equações diferenciais de 2^a ordem.

Expandindo (1-11) em suas partes real e imaginária, vem:

$$\begin{cases} \dot{x} = b \cos(\omega t + \alpha) \\ \dot{y} = -b \sin(\omega t + \alpha), \end{cases} \quad (1-12)$$

Quadrando (1-12) e somando membro a membro, verifica-se que

$$v_x^2 + v_y^2 = b^2,$$

isto é, que em cada instante a componente tangencial (no plano xy) da partícula (\vec{v}_{ot}) tem módulo constante (v_{ot}). Daí concluímos que $b = v_{ot}$, e portanto as equações (1-12) se escrevem:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{ot} \cos(\omega t + \alpha) \\ \dot{y} = -v_{ot} \sin(\omega t + \alpha). \end{cases} \quad (1-13)$$

Integrando agora (1-11), obtemos:

$$\xi = \xi_0 - \frac{a}{i\omega} e^{-i\omega t} = \xi_0 + \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t}, \quad (1-14)$$

onde ξ_0 é uma constante, em geral complexa. Ponhamos:

$$\xi_0 = x_0 + iy_0.$$

com x_0 e y_0 reais, determináveis a partir das condições iniciais do problema. Estas são as duas outras constantes de integração, resultantes da segunda integração das duas equações diferenciais de 2ª ordem.

Expandindo (1-14) em suas partes real e imaginária, vem:

$$\begin{aligned} \xi = x + iy &= x_0 + iy_0 + \frac{ib}{w} [\cos (wt + \alpha) - i \operatorname{sen} (wt + \alpha)] = \\ &= \left[x_0 + \frac{b}{w} \operatorname{sen} (wt + \alpha) \right] + i \left[y_0 + \frac{b}{w} \cos (wt + \alpha) \right], \end{aligned}$$

isto é:

$$\begin{cases} x = \frac{v_{ot}}{w} \operatorname{sen} (wt + \alpha) + x_0 \\ y = \frac{v_{ot}}{w} \cos (wt + \alpha) + y_0. \end{cases}$$

Quadrando (1-15) e somando membro a membro, obtemos a equação da trajetória:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{v_{ot}}{w} \right)^2, \quad (1-15)$$

que é a equação de uma circunferência, centrada no ponto (x_0, y_0) , de raio igual a $\frac{v_{ot}}{w}$. A circunferência será descrita no sentido horário, isto é, contrário ao do saca-rôlhas que avança no sentido de \vec{B} .

Podemos tornar mais intuitivo o uso da variável complexa neste caso, visualizando os eixos dos w e dos y respectivamente como os eixos real e imaginário do plano complexo. Tomando $\xi_0 = 0$, ξ representa um ponto do plano complexo que dista da origem de

$\frac{|b|}{v}$. Este valor constante é o raio do círculo de giração do ponto.

Combinando (1-9) e (1-15), vemos que o movimento da partícula será helicoidal, tendo por eixo uma reta paralela a Oz, passando pelo ponto (x_0, y_0) .

Em particular, se tomarmos para condições iniciais: (a) a partícula parte da origem, (b) com velocidade \vec{v}_0 paralela e de mesmo sentido que o eixo Oy, essas condições se escrevem:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & v_x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 & v_y(0) &= v_0 \\ z(0) &= 0 & v_z(0) &= 0. \end{aligned}$$

A equação (1-9) nos dará então: $z_0 = 0$ e $v_{oz} = 0$, isto é, o movimento da partícula será circular uniforme, no plano xy. Por outro lado, de (1-12) tiramos:

$$\begin{aligned} v_x(0) &= b \cos \alpha = 0 \longrightarrow \cos \alpha = 0 \therefore \sin \alpha = \pm 1 \\ v_y(0) &= -b \sin \alpha = v_0 \longrightarrow b = v_0, \alpha = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

e obtemos para v_x e v_y :

$$v_x = v_0 (\cos wt \cos \alpha - \sin wt \sin \alpha) = v_0 \sin wt$$

$$v_y = -v_0 (\sin wt \cos \alpha + \cos wt \sin \alpha) = v_0 \cos wt.$$

As equações do movimento serão então:

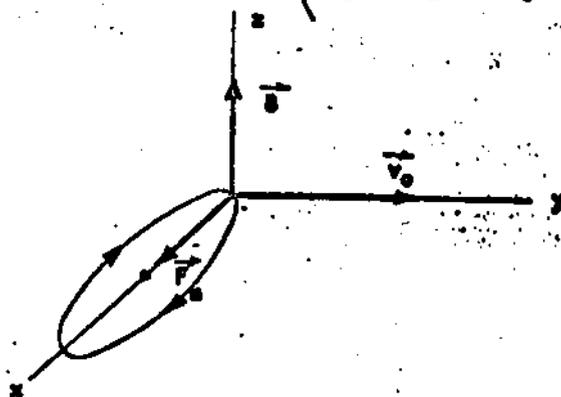
$$x = -\frac{v_0}{\omega} \cos \omega t + x_0; \quad x(0) = 0 \longrightarrow x_0 = \frac{v_0}{\omega},$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0; \quad y(0) = 0 \longrightarrow y_0 = 0.$$

Isto é:

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) \\ y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \end{cases}$$

equações paramétricas de uma circunferência de raio igual a $\frac{v_0}{\omega}$, centrada no ponto $(x_0 = \frac{v_0}{\omega}, y_0 = 0)$. A partícula descreverá, por



tanto, um movimento circular uniforme no plano perpendicular ao campo magnético (Fig. 1-2), com velocidade angular $\omega = \frac{qB}{m}$.

1 - 6. Caso relativístico. Estudaremos agora o mesmo problema na região relativística, mostrando que a frequência ω deve mudar, à medida que as partículas são aceleradas. Consideraremos o caso de prótons acelerados num ciclotron (a uma energia W_{cin} igual, por exemplo, a 500 Mev), encontrando a razão de variação da frequência durante a aceleração, até à velocidade máxima atingida.

O ciclotron é um acelerador de partículas formado essencialmente

almente por dois eletrodos em forma de "D" (Fig. 1-3), acima e abaixo dos quais estão os dois polos de um eletromagneto. No interior

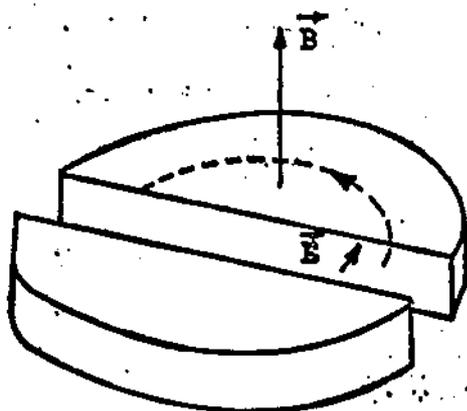


Fig. 1-3

dos eletrodos, íons estão sujeitos, portanto, a um campo magnético constante, como no problema anterior, sendo a velocidade inicial do íon adquirida entre os eletrodos por meio de um campo elétrico oscilante, perpendicular à direção de \vec{B} . No

interior dos eletrodos, portanto, os íons descrevem semi-circunferências, com raio e velocidade angular já determinados no problema anterior. A frequência angular do oscilador elétrico, ω_0 , é ajustada de tal maneira que, ao atingirem os íons o intervalo entre os eletrodos, o campo elétrico tenha sempre o sentido apropriado, de maneira que serão novamente acelerados. Assim, enquanto as velocidades dos íons forem pequenas em comparação com a velocidade da luz, valem os resultados clássicos já obtidos no problema anterior:

$$\omega_{cl} = \frac{qB}{m} = \text{constante.}$$

A frequência de ressonância ω_0 procurada será então aquela para a qual:

$$\omega_0 = \omega_{cl} = \frac{qB}{m},$$

e o raio da semi-circunferência descrita pelo íon terá o valor já calculado:

$$R_{cl} = \frac{v}{\omega_{cl}} = \frac{m}{qB} v,$$

crescendo, portanto, com a velocidade v com que o íon atinge o eletrodo, depois de cada impulso.

Como, porém, depois de um certo número de voltas, as velocidades atingidas pelos íons tornam-se consideráveis, será então necessário usar o tratamento relativístico no cálculo da velocidade angular e do raio da trajetória. A equação do movimento será:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = q \vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (1-16)$$

Como a energia total da partícula vale: $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, podemos substituir \vec{p} em (1-16) em termos de W :

$$\vec{p} = \frac{W \vec{v}}{c^2}, \text{ e teremos:}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{W \vec{v}}{c^2} = \frac{W}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}, \quad (1-17)$$

pois a energia de uma partícula num campo puramente magnético é constante no tempo. A equação (1-17) pode ser escrita:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB}{m} \vec{v} \wedge \vec{k}, \quad (1-18)$$

onde $\vec{B} = B \vec{k}$, e m é a massa relativística:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{W}{c^2}$$

Mas a equação (1-18) é formalmente a mesma equação (1-7) do problema anterior, onde m era constante. Valerá aqui, portanto, a mesma solução, isto é, os íons descreverão trajetórias circulares. Com as seguintes diferenças, porém:

- 1^o) a velocidade angular do movimento diminuirá com v , de acordo com a fórmula:

$$w_{rel} = \frac{qB}{m} = qB \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_0} = w_{cl} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- 2^o) o raio da trajetória crescerá com v mais rapidamente do que o raio clássico:

$$R_{rel} = \frac{v}{w} = \frac{vm}{qB} = \frac{v m_0}{qB} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{R_{cl}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Enquanto a velocidade dos íons for bastante baixa, m não difere de m_0 , e w é independente da energia da partícula. Porém, com o crescimento de v e a conseqüente diminuição de w , será necessário, para manter a ressonância, diminuir concomitantemente w_0 , para que se tenha sempre:

$$w_0 = w_{rel}$$

Seja v_m a velocidade máxima atingida pelo íon. Então, neste momento, a frequência do oscilador elétrico deverá igualar a frequência do movimento circular, seja w_m :

$$w_0 = w_m$$

A razão de variação da frequência do oscilador, desde o repouso até à sua velocidade máxima, será então:

$$\frac{w_m}{w_{cl}} = \frac{w_{cl} \sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}}}{w_{cl}} = \sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}}$$

Se é dada não a velocidade do íon, mas sua energia:

$$w_m = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}}} \quad \dots \quad \frac{w_m}{w_{cl}} = \frac{m_0 c^2}{w_{cl}}$$

Vamos calcular a razão pedida no caso particular do problema. Os dados numéricos são:

$$m_0 \approx 1,67248 \times 10^{-27} \text{ kg,} \\ \text{próton}$$

$$m_0 c^2 \approx 931 \text{ MeV (1 MeV = } 10^6 \text{ eV} \approx 10^6 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J).}$$

A energia de 500 MeV corresponde, no nosso problema, à diferença:

$$w_m - m_0 c^2 = \text{energia cinética do próton.}$$

Assim:

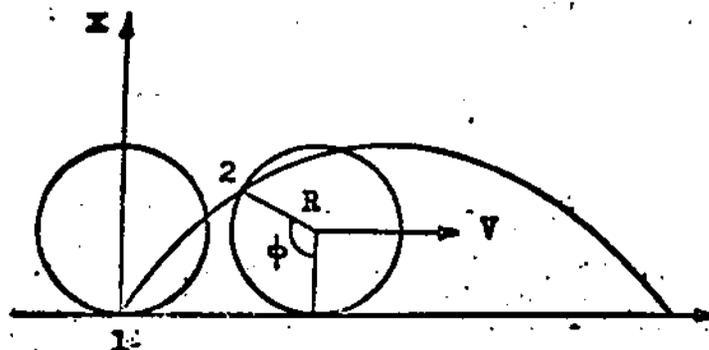
$$\frac{w_m}{w_{cl}} = \frac{931}{500 + 931} \approx 0,658$$

Problemas propostos:

1-1 - Dar a equação do movimento de uma carga puntiforme q , sujeita à ação de um campo elétrico \vec{E} uniforme, constante, sendo \vec{v}_0 a velocidade inicial da partícula. Particularizar o resultado para as condições iniciais seguintes: $x(0) = y(0) = 0$; $v_x(0) = 0$, sendo \vec{E} paralelo a Ox . ▶

1-2 - Um elétron move-se em um campo elétrico uniforme constante, dirigido segundo o eixo dos x , e um campo magnético uniforme constante, dirigido segundo o eixo dos y . Parte do repouso, na origem. Mostrar que o elétron se move numa trajetória cicloidial, encontrar a velocidade de arrastamento \vec{V} (isto é a velocidade do centro do círculo que rola ao longo do eixo dos z). Se o campo elétrico é de $10^4 \frac{V}{cm}$, e o campo magnético de 10^4 gauss, calcular o valor da velocidade de arrastamento (S.F.).

Nota: as equações paramétricas da cicloide são da forma (Fig. 1-4):



$$\begin{cases} z = R (\phi - \text{sen } \phi) \\ x = R (1 - \text{cos } \phi) \end{cases}$$

Fig. 1-4

CAMPO ELETROSTÁTICO NO VÁCUO

Trataremos inicialmente de determinar a força que age sobre uma carga puntiforme q em repouso, em presença de um sistema qualquer de cargas. Em seguida determinaremos o valor em todo o espaço do campo elétrico gerado por algumas distribuições que não variam no tempo. Chama-se Eletrostática ao estudo dos problemas que envolvem campos elétricos independentes do tempo.

2 - 1. Lei de Coulomb. Sejam duas cargas q_1 e q_2 , separadas por uma distância r . Sobre elas atua uma força \vec{F} , atrativa ou repulsiva, conforme sejam as cargas de sinais contrários ou de mesmo sinal, dada pela lei de Coulomb. O módulo dessa força é:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (2-1)$$

onde K é uma constante de proporcionalidade que depende do sistema de unidades usado. No sistema M K S, F é medida em newton, q_1 e q_2 em coulomb, r em metro. Assim a unidade de K será:

$$U(K) = \frac{N m^2}{c^2}$$

No sistema chamado "M K S racionalizado" toma-se para K o valor:

$$K = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$$

O fator 4π é incluído aqui para que posteriormente desapareça em numerosas e importantes fórmulas de Eletromagnetismo, como, por exemplo, as equações de Maxwell, que assim se exprimirão de maneira mais simples. O fator $\frac{1}{\epsilon_0}$ não é arbitrário, e ficará determinado pelas medidas em unidades M K S das outras grandezas que com parecem na equação (1-1). Chama-se ϵ_0 a "permitividade" do vácuo, e a equação (1-1) só é válida quando as cargas q_1 e q_2 estão situadas no vácuo. Os valores encontrados para K e ϵ_0 são:

$$K = 9 \times 10^9 \frac{N m^2}{c^2},$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{c^2}{N m^2} = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{farad}}{m},$$

sendo "farad" a unidade de "capacidade elétrica", neste sistema (v. parágrafo 8-3). No sistema C G S de unidades eletrostáticas, faz-se:

$$K = 1 \text{ (adimensional),}$$

e a equação (2-1) se escreve então:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

A força entre as duas cargas puntiformes tem a direção da linha que as une, e seu sentido depende do sinal das cargas. Chamam

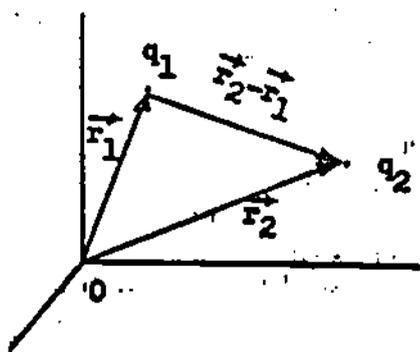


Fig. 2-1

do \vec{r}_1 e \vec{r}_2 aos raios vetores das posições das cargas q_1 e q_2 , em relação ao referencial escolhido (Fig. 2-1), teremos:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (2-2)$$

sendo \vec{F} a força que atua sobre a carga q_2 . Em (2-2) as cargas q_1 e q_2 comparecem com seus respectivos sinais; se estes forem iguais, \vec{F} terá o sentido de $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, isto é, será repulsiva.

A equação (2-2) é a expressão vetorial da lei de Coulomb.

2 - 2. Princípio de superposição. Se uma carga puntiforme q está em presença de um sistema de cargas puntiformes q_1, q_2, \dots, q_n , a força que atua sobre a carga q é dada pela soma vetorial das forças que cada carga q_i (Fig. 2-2) exerce sobre a carga q :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i1}, \text{ onde:}$$

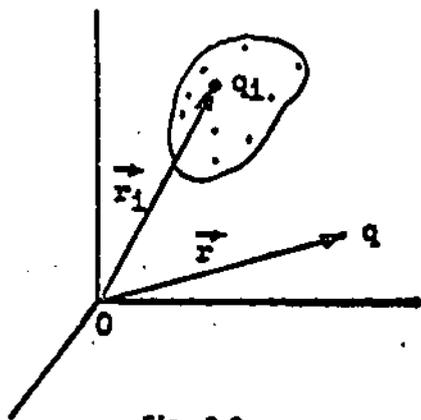


Fig. 2-2

$$\vec{F}_1 = \frac{q q_1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}; \text{ assim:}$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \frac{q q_i}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (2-3)$$

2 - 3. Campo elétrico de distribuições contínuas de cargas. Colocando em evidência a carga q que figura no somatório de (2-3), tem-se:

$$\vec{F} = q \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

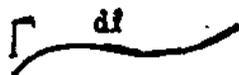
Mas como, de acordo com o que ficou estabelecido no parágrafo (1-1),

$$\vec{F} = q \vec{E}, \quad (2-4)$$

vemos que o valor do campo elétrico \vec{E} criado pelas cargas q_1, q_2, \dots, q_n , no ponto onde se situa a carga q , é dado por

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (2-5)$$

Quando a distribuição de cargas não é discreta e sim contínua, ao longo das curvas, superfícies ou volumes, é preciso definir em cada caso - uma densidade linear de cargas (Fig. 2-3, a):



(a)

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$$

= uma densidade superficial de cargas (Fig. 2-3, b):



(b)

$$\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds}$$

= uma densidade volumétrica de cargas (Fig. 2-3, c):



(c)

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}$$

Fig. 2-3

onde dq é a quantidade infinitesimal de carga contida no elemento dl , ds ou dv .

Nestes casos, a fórmula (2-5) é substituída por expressões integrais:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\vec{r}') d\ell'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad \text{ou} \quad (2-6)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad \text{ou} \quad (2-7)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2-8)$$

em que \vec{r}' é, em cada caso, o raio vetor do ponto em que se situa o

elemento de integração, e \vec{r} é o raio vetor do ponto em que se calcula o campo. As integrais se estendem ao longo de toda a curva Γ , de toda a superfície S ou de todo o volume V , onde se localizam as cargas, respectivamente (Fig. 2-4).

Seja uma distribuição espacial de cargas, de densidade $\rho = \rho(\vec{r}')$, localizada numa região finita do espaço. Então o campo elétrico criado em um ponto P , caracterizado pelo raio vetor \vec{r} , é dado por (2-8). Se o ponto P está no infinito (o que, fisicamente, significa que r é muito grande em comparação com as dimensões da distribuição de cargas) então poderemos, no desenvolvimento em série da função $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$, desprezar os termos em r' (v. parágrafo 2-6), e assim teremos para o módulo do campo:

$$|\vec{E}_\infty| = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \rho(\vec{r}') dv' = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0,$$

$$r \gg r',$$

onde q é a carga total da distribuição. Vê-se, portanto, que o campo elétrico devido a uma distribuição limitada de cargas cai a zero no infinito.

Calculemos agora o campo eletrostático devido a algumas distribuições.

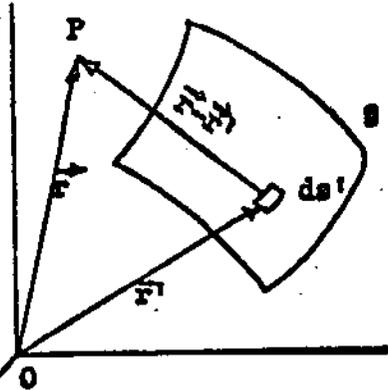


Fig. 2-4

2-4. Campo de uma carga puntiforme: Tomando para origem do sistema de referência a posição da carga q (Fig. 2-5), conclui-se de (2-5) que se tem, neste caso:

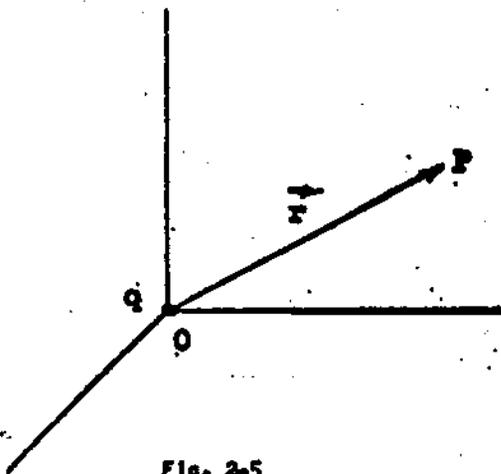


Fig. 2-5

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2-9)$$

onde o sentido de \vec{E} depende do sinal de q .

O fato de tomarmos onde quisermos a origem do sistema de referência não é trivial:

decorre da circunstância de ser \vec{r} um vetor, que é caracterizado pelas coordenadas de seus pontos extremos e que tem, portanto, tôdas as suas propriedades invariantes para qualquer mudança de sistema de coordenadas. Isso nos propicia a liberdade de escolha do referencial que nos parecer mais conveniente.

Chamamos "linha de força" aquela que, em cada ponto, tem por tangente a direção do campo neste ponto. É fácil verificar que, no caso do campo criado por uma carga puntiforme, as linhas de campo são retas que partem da carga, segundo os raios de uma esfera centrada na carga. Se orientarmos as linhas de força de acordo com o sentido do campo, então podemos dizer que elas "saem" das cargas positivas e "entram" nas cargas negativas (Fig. 2-6).

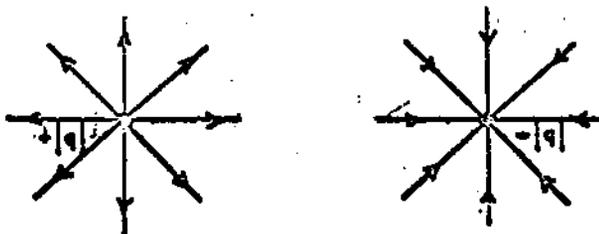


Fig. 2-6

2 - 5. Campo de duas cargas puntiformes.

Pelo princípio de superposição, vemos que o campo criado num ponto P qualquer será:

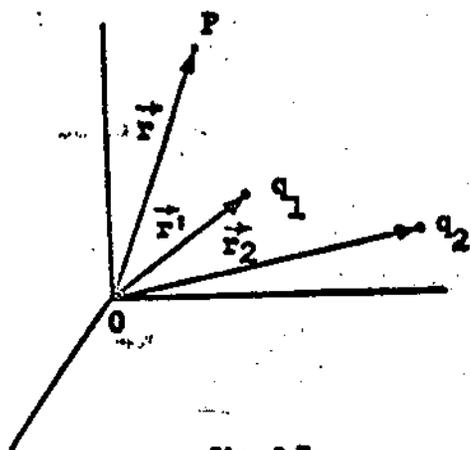


Fig. 2-7

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + q_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \right),$$

de acôrdo com (2-5). Neste caso, em geral, não haverá simplificação das fórmulas, se tomarmos a origem do sistema de coordenadas no ponto médio do segmento que une as duas cargas (Fig. 2-7); a não ser, evidentemente, em caso de simetria, isto é, se as duas cargas forem iguais em módulo.

Para traçar as linhas de força devemos calcular o campo em cada ponto.

Chamam-se "superfícies de nível" aquelas que, em cada ponto, são ortogonais à direção do campo. Representando por linhas cheias as linhas de força, e por linhas interrompidas as interseções das superfícies de nível com o plano do papel, teremos, no caso de

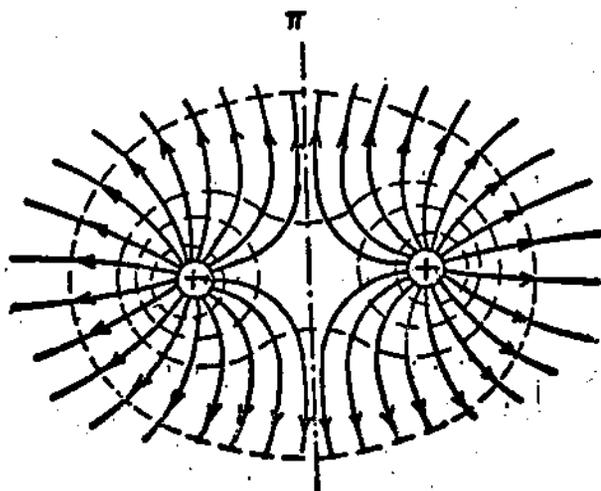


Fig. 2-8

cargas de mesmo sinal, a configuração indicada na Fig. 2-8, em que estamos considerando cargas iguais positivas; vemos que o plano π separa em duas partes as linhas de força, que nunca se encontram; e, no caso de cargas de sinais contrários, teremos a configuração indicada na Fig. 2-9, em que estamos considerando cargas de mesmo módulo; ve-

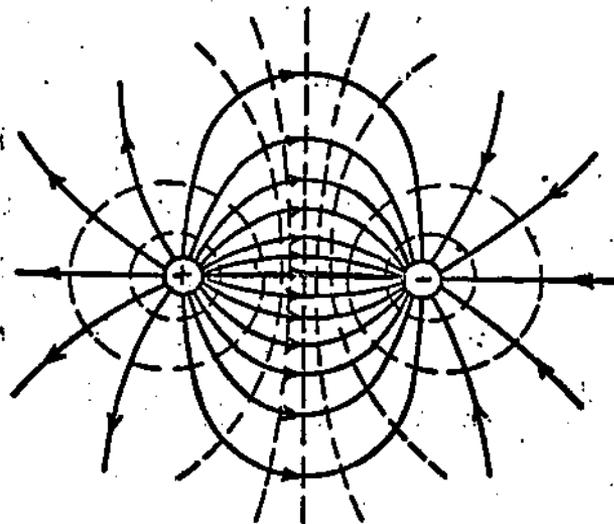
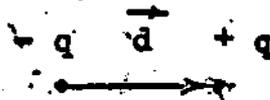


Fig. 2-9

mos que as linhas de força começam na carga positiva e terminam na negativa.

2 - 6. Campo de um dipolo elétrico. Chama-se "dipolo elétrico" ao conjunto de duas cargas de mesmo módulo e sinais contrários, separadas por uma distância muito pequena. Chama-se "momento de dipolo elétrico" à quantidade:

$$\vec{p} = q\vec{d},$$



onde \vec{d} é o segmento orientado da carga negativa para a positiva. O

dipolo é obtido como o limite da situação em que se aproxima indefinidamente uma carga de outra, ao mesmo tempo que se aumenta indefinidamente a carga, de maneira a manter constante o produto qd . Tomemos a origem do sistema de coordenadas no ponto médio de d (Fig. 2-10). Neste caso o campo elétrico em P será:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \right) \quad (2-10)$$

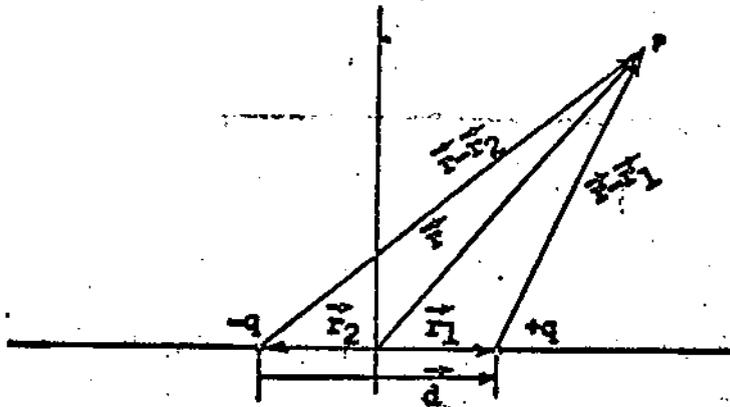


Fig. 2-10

Para desenvolver em série de Taylor a expressão de \vec{E} , lembremos que:

$$f(x+\epsilon_1, y+\epsilon_2, z+\epsilon_3) = f(x, y, z) + \epsilon_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3=0} + \epsilon_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3=0} + \epsilon_3 \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3=0} + \dots = f(x, y, z) + \vec{c} \cdot \text{grad } f + \dots$$

onde "grad f " é um vetor, dado em coordenadas cartesianas por:

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

é conveniente definir o vetor simbólico ou operador vetorial $\vec{\nabla}$ ("nabla") aplicável a funções de ponto, por:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

(2-11)

onde \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} são os vetores unitários segundo os eixos dos x , y , z , respectivamente. O vetor $\text{grad } U$ é o resultado da aplicação do operador nabla a um escalar $U = U(x, y, z)$:

$$\text{grad } U = \vec{\nabla} U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Voltando à expressão (2-10), podemos desenvolver:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = \frac{1}{r^3} = \vec{r}_1 \cdot \text{grad} \frac{1}{r^3} + \dots,$$

onde $r = |\vec{r}|$. Ora,

$$\begin{aligned} \text{grad } f(r) &= \frac{\partial f(r)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial z} \vec{k} = \\ &= \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} = \\ &= \frac{df}{dr} \text{grad } r, \end{aligned}$$

sendo:

$$\begin{aligned} \text{grad } r &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \vec{k} = \\ &= \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k}, \end{aligned}$$

valendo, portanto, as relações:

$$\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2-12)$$

$$\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2-13)$$

No nosso caso, teremos:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = \frac{1}{r^3} - \vec{r}_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^3} \right) + \dots = \frac{1}{r^3} + 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r^5} + \dots,$$

e analogamente para $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}$. Como $r_1, r_2 \ll r$, podemos desprezar

no desenvolvimento os termos em \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , do 2º grau, em diante. De (2-10) virá então:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{r}_1 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r^5} - \frac{1}{r^3} - \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r^5} \right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{r}_1 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r^5} \right) + \\ &+ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{r}_2 \left(\frac{1}{r^3} + \frac{3\vec{r} \cdot \vec{r}_2}{r^5} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r^3} - 3\vec{r}_1 \left[\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r}}{r^5} \right] \end{aligned}$$

Como

$$q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = q\vec{d} = \vec{p},$$

o campo do dipolo elétrico será dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \quad (2-14)$$

Determinando o campo em cada ponto (com suas duas componentes, uma radial e outra paralela a \vec{p}) podemos traçar as linhas de forças correspondentes (Fig. 2-11).

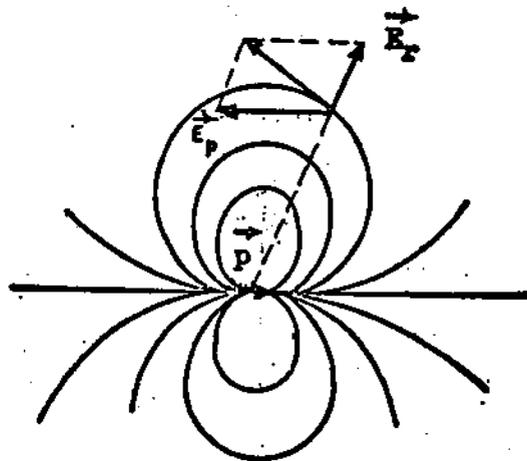


Fig. 2-11

2 - 7. Campo de um fio retilíneo infinito, com densidade linear de cargas λ constante. Fisicamente, um fio é considerado infinito quando seu comprimento é bastante grande em comparação com as distâncias dele aos pontos considerados. Vamos calcular o valor do campo em um ponto P qualquer, nessas condições. Tomemos para origem do sistema de coordenadas o pé da perpendicular baixada de P ao fio, e para eixo dos x o próprio fio (Fig. 2-12). De (2-6) vemos que a contribuição $d\vec{E}_1$ para o campo, devida ao elemento de carga $dq_1 =$

$= \lambda dx_1$, é dada por

$$d\vec{E}_1 = \frac{\lambda dx_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

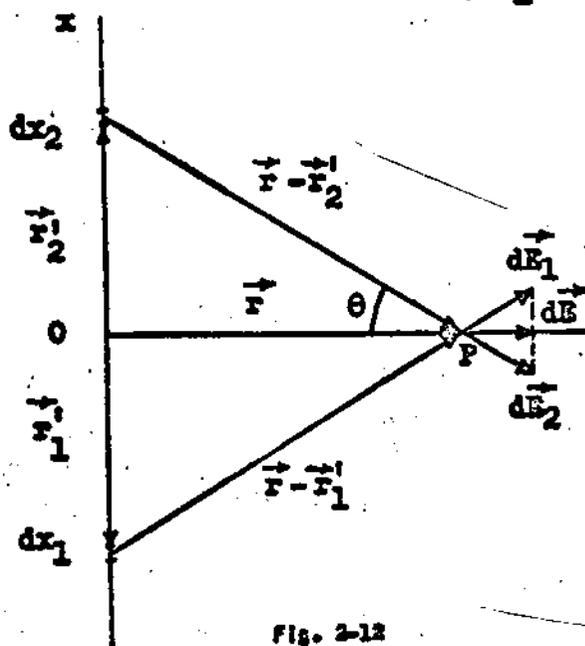


Fig. 2-12

Se considerarmos agora a contribuição $d\vec{E}_2$ devida ao elemento $dq_2 = \lambda dx_2$, simétrico a dq_1 em relação ao ponto 0, verificaremos que as componentes de $d\vec{E}_1$ e $d\vec{E}_2$ paralelas ao fio se cancelam (Fig. 2-12). Como o fio é infinito, a cada elemento dx tomado na porção negativa do eixo dos x corresponde um elemento simétrico na porção positiva. Assim as componentes paralelas ao fio, dos campos elétricos elementares, se cancelam duas a duas. Só contribuem, portanto, para o campo, as componentes normais ao fio, e o problema poderá ser resolvido escalarmente, com apenas uma integração, tomando agora para módulo do campo elementar, normal ao fio, a quantidade:

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + r^2} \cos \theta,$$

onde x é a distância do elemento considerado à origem. Utilizaremos

como variável de integração o ângulo θ , e teremos:

$$x^2 + r^2 = r^2 \operatorname{tg}^2 \theta + r^2 = r^2 \sec^2 \theta$$

$$x = r \operatorname{tg} \theta \quad \therefore dx = r \sec^2 \theta d\theta.$$

Integrando desde $\theta = -\frac{\pi}{2}$ até $\theta = +\frac{\pi}{2}$ (limites correspondentes a $x = -\infty$ e $x = +\infty$) e fazendo as substituições, vem:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\operatorname{sen} \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}.$$

Finalmente:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2-15)$$

Vemos assim que o campo cai como $\frac{1}{r}$, e não como $\frac{1}{r^2}$; que é normal e constante ao longo de superfícies cilíndricas (superfícies de nível) com eixo no fio, e as linhas de força são os raios dessas superfícies (Fig. 2-13).

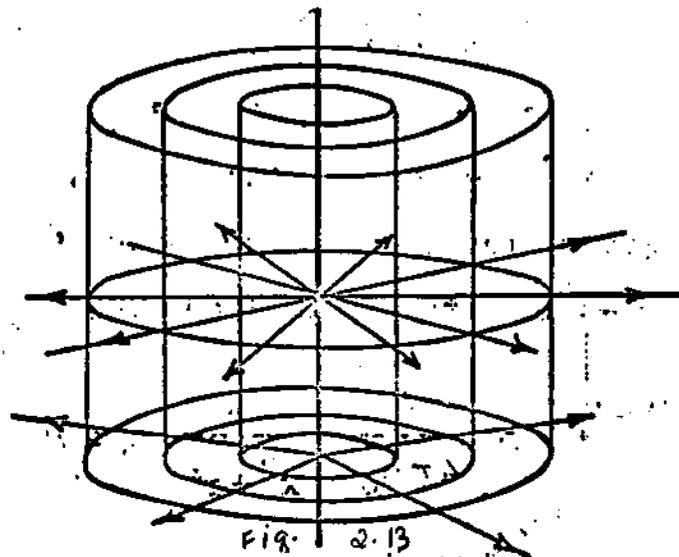


Fig. 2-13

2 - 8. Campo de um fio retilíneo de comprimento finito, com densidade linear de cargas λ constante. O campo elementar criado por $dq = \lambda dx$ é:

$$d\vec{E}' = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3},$$

onde, por simplicidade, chamamos r à distância entre dx e P ; $d\alpha$ é o ângulo do qual é visto, de P o elemento dx (Fig. 2-14).

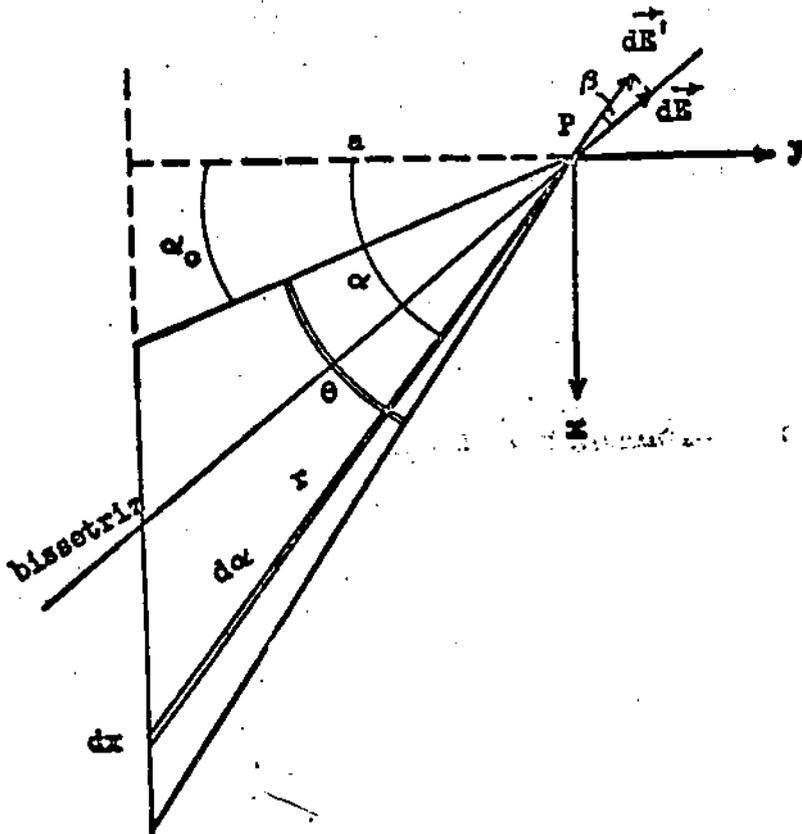


Fig. 2-14.

Tomando α como variável de integração e fazendo as substituições:

$$r = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad x = a \operatorname{tg} \alpha, \quad dx = \frac{a d\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

o campo elementar, em módulo, será dado por:

$$dE' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} d\alpha. \quad (2-16)$$

Tomemos agora a origem do nosso sistema de coordenadas sobre o ponto P, e calculemos os módulos das componentes do campo segundo os eixos dos x e dos y, tomados no plano determinado por P e pelo fio (Fig. 2-14):

$$dE_x = -dE' \sin \alpha = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin \alpha d\alpha,$$

$$dE_y = dE' \cos \alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \alpha d\alpha.$$

Integrando sobre α , desde α_0 até $\alpha_0 + \theta$, vem:

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} [\cos \alpha_0 - \cos (\alpha_0 + \theta)],$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} [\sin (\alpha_0 + \theta) - \sin \alpha_0].$$

Por considerações de simetria, vê-se imediatamente que a componente do campo segundo z, é nula. O ângulo γ que o campo \vec{E} faz com o eixo dos y (Fig. 2-15) será dado por:

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{E_x}{E_y} = \operatorname{tg} \left(\alpha_0 + \frac{\theta}{2} \right),$$

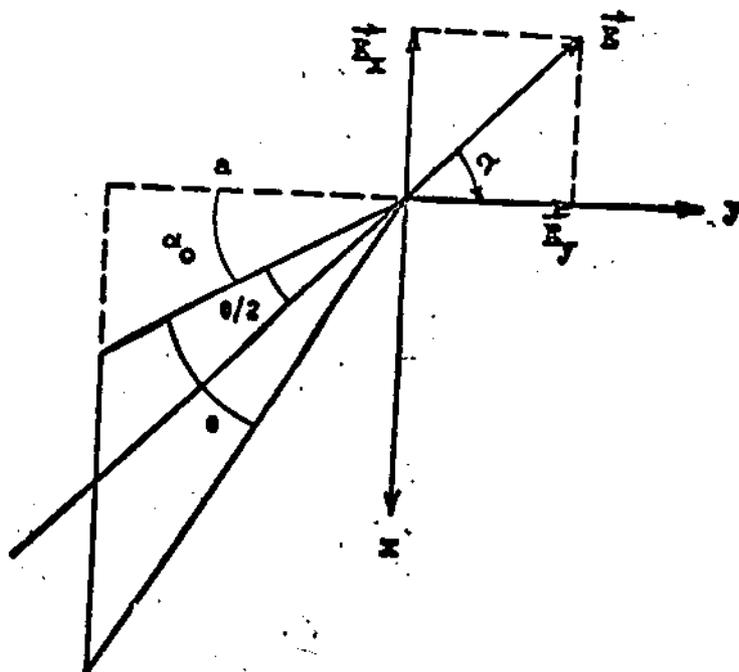


Fig. 2-15

e portanto o campo tem a direção da bissetriz de θ . O módulo do campo, finalmente, será:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sqrt{2(1 - \cos\theta)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

isto é:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2-17)$$

O mesmo resultado poderá ser encontrado mais facilmente, mediante raciocínios de simetria. Como em (2-16) o coeficiente de $d\alpha$ é constante, vemos que dE' só depende do elemento de ângulo. Dividindo o ângulo θ , do qual é visto do ponto P todo o fio, em uma infinidade de ângulos elementares iguais a $d\alpha$, verificamos que as contribuições para o campo dos elementos λdx correspondentes são tôdas iguais em módulo. Os elementos situados nas extremidades do fio, por

exemplo, contribuem com campos elementares que se somam segundo a bissetriz de θ (Fig. 2-16); o mesmo se passa com os 2 elementos contíguos, e assim por diante.

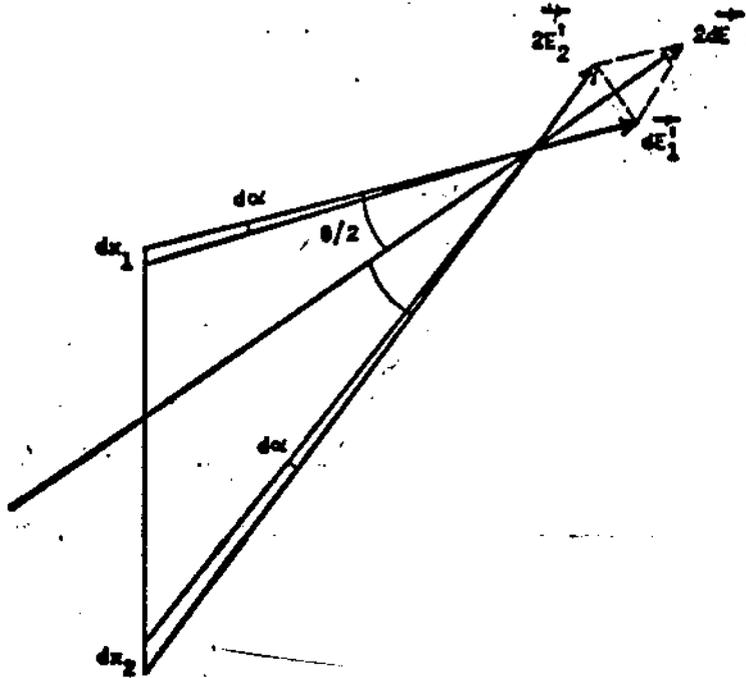


Fig. 2-16

Portanto, o campo resultante terá a direção da bissetriz de θ . O problema poderá ser resolvido escalarmente; integrando sobre todo o fio as componentes, segundo a bissetriz, dos campos elementares:

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\beta \, d\alpha.$$

Da Fig. 2-14, vemos que:

$$\alpha - \beta = \alpha_0 = \text{constante} \quad \therefore \quad d\alpha = d\beta.$$

O campo E será então:

$$E = \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \beta \, d\beta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} [\sin \beta]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \sin \frac{\theta}{2},$$

que coincide com (2-17). Quando o fio tiver comprimento infinito, $\frac{\theta}{2}$ será igual $\frac{\pi}{2}$, e obteremos a mesma expressão (2-15), do parágrafo 2-7.

Para traçar as superfícies de nível e as linhas de força, construímos, com vértice em cada ponto do espaço, ângulos apoiados nas extremidades do fio, traçamos as bissetrizes desses ângulos e fazemos passar, em cada ponto, planos normais a essas bissetrizes. As curvas tangentes, em cada ponto, às bissetrizes são as linhas de força; as superfícies envoltórias dos planos são as superfícies de

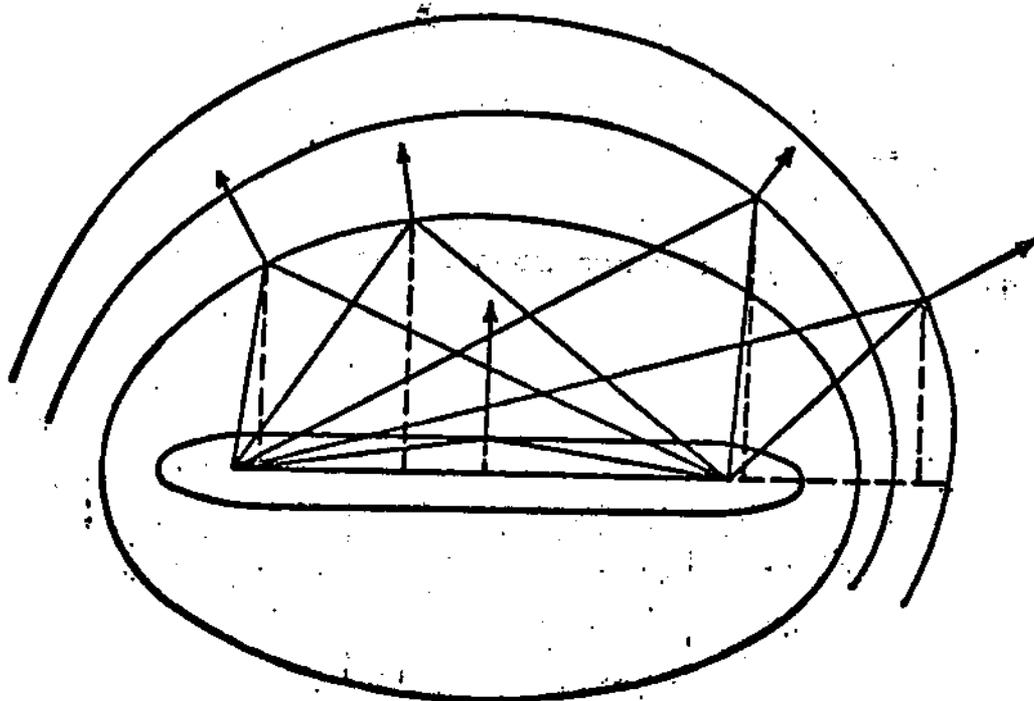


Fig. 2-17

nível. Demonstra-se que elas constituem uma família de elipsóides de revolução, com focos nas extremidades do fio, (Fig. 2-17).

Observações: 1^a) o campo é sempre normal, mas não tem valor constante ^{sobre as} ao longo destas superfícies de nível; 2^a) para pontos bastante próximos, ^{do fio e afastado da extremidade} as superfícies de nível se aproximam cada vez mais de superfícies cilíndricas; no limite de pontos infinitamente próximos, ou de fio infinitamente longo, recaímos no problema apresentado no parágrafo anterior (ver Fig. 2-13); 3^a) para pontos bastante afastados, as superfícies de nível se aproximam cada vez mais de superfícies esféricas; no limite de pontos infinitamente afastados, ou de fio infinitamente curto, recaímos no problema da carga puntiforme (parágrafo 2-4).

2 - 9. Campo de uma distribuição plana infinita de cargas com densidade superficial σ constante. Queremos calcular o valor do campo num ponto P qualquer do espaço. Tomemos para origem do nosso sistema de coordenadas o pé da perpendicular baixada do ponto sobre o plano, e para eixo dos x uma reta qualquer do plano, passando por O (Fig. 2-18). Podemos usar como elemento de integração uma faixa de largura infinitesimal dx , paralela ao eixo dos y . De (2-15) vemos que o módulo do campo criado por um fio infinito, num ponto P qualquer, é

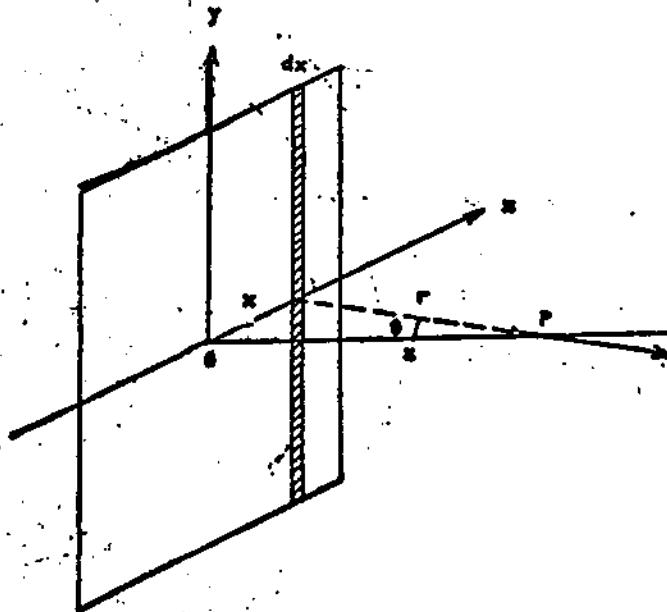


Fig. 2-18

dado por:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

onde r é a distância do fio ao ponto, e λ a carga contida na unidade de comprimento do fio. Queremos aplicar este resultado ao nosso problema. Ora, a carga contida, por unidade de comprimento, na faixa de largura infinitesimal vale $\sigma \cdot l \cdot dx$. Portanto o campo elementar criado por ela em P será:

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + z^2}} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Duas integrações deverão ser feitas, das duas componentes do campo segundo x e segundo y , separadamente. Poderemos, entretanto, reduzir nosso trabalho a apenas uma integração, por considerações de simetria.

Da Fig. 2-19, vemos que, a cada faixa elementar na porção positiva do eixo dos x , corresponde uma simétrica na porção negativa, pois o plano é também infinito na direção x . Assim as componentes dos campos elementares, paralelas ao eixo dos x , se cancelam duas a duas. Só contribuem por-

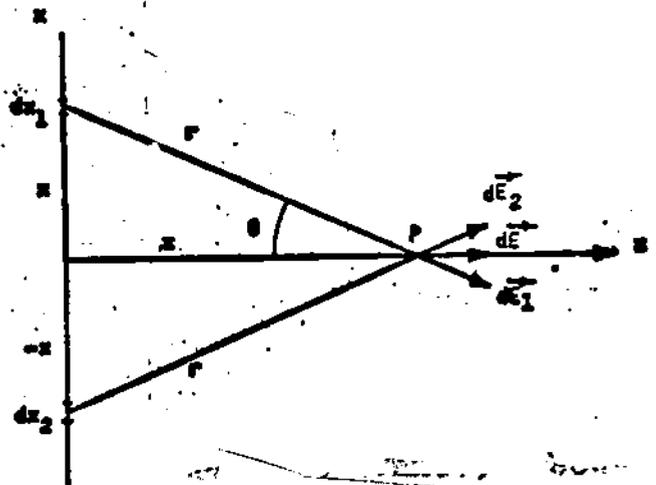


Fig. 2-19

tanto, para o campo, as componentes normais ao plano. O campo resultante será normal ao plano, e o problema poderá ser resolvido escalarmente, com apenas uma integração. O módulo do campo elementar será então dado por:

$$dE = \frac{\sigma dx}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2+z^2}} \cos\theta.$$

Utilizaremos θ como variável de integração, fazendo as substituições:

$$x = z \operatorname{tg} \theta \quad \therefore dx = z \sec^2 \theta d\theta = \frac{z d\theta}{\cos^2 \theta},$$

$$\sqrt{x^2+z^2} = r = \frac{z}{\cos \theta}.$$

Levando estes valores na expressão de dE , vem:

$$dE = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} d\theta$$

Integrando em θ , desde $-\frac{\pi}{2}$ até $+\frac{\pi}{2}$, virá para valor algébrico do campo elétrico:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}. \quad (2-18)$$

Vemos assim que o campo criado por uma distribuição plana infinita de cargas é, em todo o espaço, constante e normal ao plano das cargas.

2 - 10. Campo criado por uma espira circular, com densidade linear de cargas λ constante, num ponto de seu eixo. Vê-se imediatamente

da Fig. 2-20 que as componentes dos campos elementares, paralelas ao plano da espira, se cancelam duas a duas. Portanto só darão contribuição positiva as componentes dos campos elementares, normais ao

plano de espira; e o campo total será:

$$E = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)} \cos\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\varphi}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

isto é, o campo num ponto do eixo da espira é normal ao plano da espira, e seu valor algébrico é dado por:

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (2-19)$$

onde $q = 2\pi R \lambda$ é a carga total da espira.

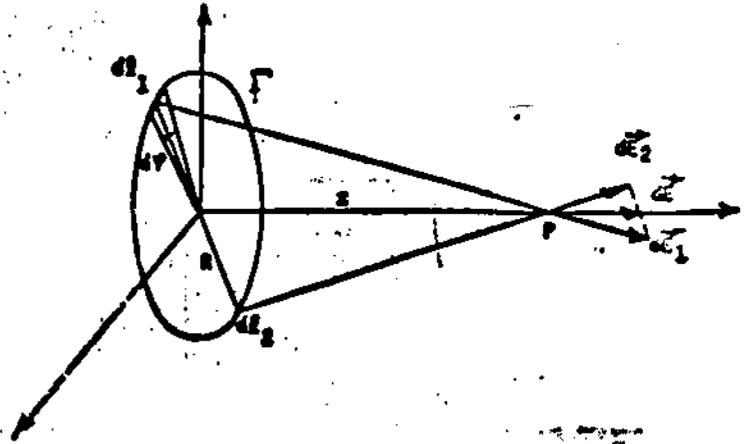


Fig. 2-20

2 - 11. Campo de um disco circular, com densidade superficial de cargas σ constante, num ponto do eixo. Tomando como elemento de integração uma espira elementar de largura dr (Fig. 2-21), vemos de (2-19) que o campo elementar será dado por:

$$dE = \frac{dq z}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

onde:

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r dr.$$

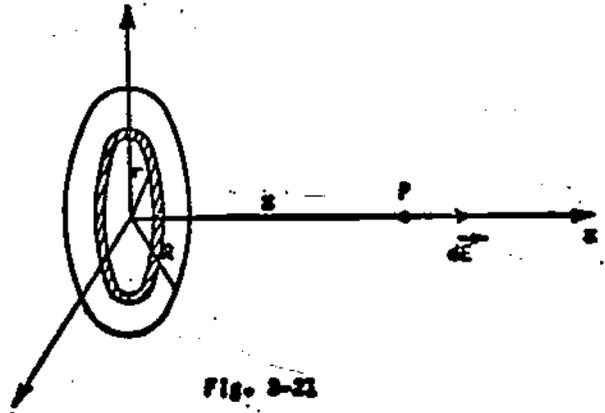


Fig. 2-21

Integrando em r , desde 0 até R , vem:

$$E = \int_0^R \frac{2\pi r dr \cdot \sigma z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_0^R =$$

$$= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right),$$

ou ainda:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right), \quad (2-20)$$

onde $q = \pi R^2 \sigma$ é a carga contida no disco. O campo no eixo do disco é, evidentemente, normal ao plano do disco.

2-12. Campo de uma distribuição esférica superficial de cargas, com densidade σ constante. Centremos o referencial no ponto 0, e tome-

mos para elemento de integração uma espira, sendo seu plano normal ao eixo dos x ; seja y o raio da espira (Fig. 2-22). Então, de (2-19), tem-se para o módulo do campo elementar:

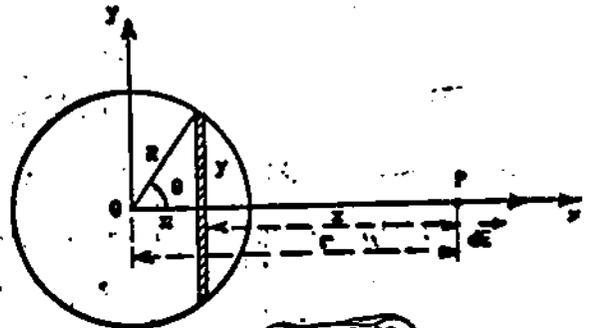


Fig. 2-22

$$dE = \frac{dq |z|}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + y^2)^{3/2}},$$

onde $dq = \sigma ds = \sigma \cdot 2\pi R dx$. Por simplicidade de notação, usaremos apenas z , querendo representar $|z|$, neste parágrafo e no seguinte,

2-13. O módulo do campo vira dado, então, por:

$$E = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0} \int_{-R}^R \frac{z}{(z^2 + y^2)^{3/2}} dx.$$

De: $x = r - z$, vem: $dx = -dz$. Integrando por partes em z , e substituindo os limites de integração em x pelos correspondentes em z , vem:

$$E = -\frac{R\sigma}{2\epsilon_0} \int_{r+R}^{r-R} \frac{zdz}{\sqrt{R^2 - r^2 + 2rz}^{3/2}}$$

$$= -\frac{R\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2} \sqrt{R^2 - r^2 + 2rz} - \frac{z}{r \sqrt{R^2 - r^2 + 2rz}} \right]_{r+R}^{r-R}$$

$$= \frac{2\pi R\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2R}{r^2}, \text{ logo:}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r > R, \quad (2-21)$$

onde $q = 4\pi R^2 \sigma$ é a carga ~~contida~~ ^{distribuída sobre} na superfície esférica. Isto é, o campo num ponto exterior à distribuição tem o mesmo valor que teria se toda a carga estivesse localizada no centro da esfera.

De maneira análoga, demonstra-se que o campo criado por uma distribuição superficial esférica de cargas é nulo no seu interior:

$$\vec{E} = 0, \quad r < R. \quad (2-22)$$

2 - 13. Campo criado por uma distribuição esférica de cargas, com densidade volumétrica ρ constante.

1º Processo - Integremos sobre camadas esféricas, utilizando os resultados (2-21) e (2-22) do problema anterior. A contribuição para o campo da camada elementar de raio l e espessura dl , num ponto P exterior a ela (Fig. 2-23), será:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

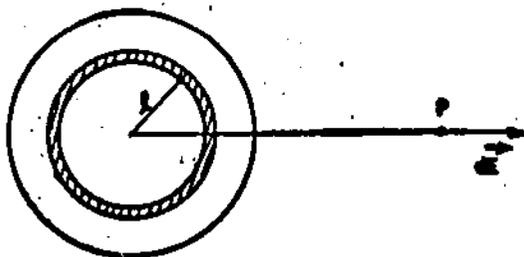


Fig. 2-23

onde r é a distância do ponto ao centro da esfera, e $dq = 4\pi l^2 dl \rho$ a carga da camada elementar.

Se o ponto P é exterior à esfera ($r > R$), teremos:

$$E = \int_0^R \frac{4\pi l^2 dl \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{4\pi\rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\frac{l^3}{3} \right]_0^R, \text{ logo:}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r > R, \quad (2-23)$$

onde $q = 4/3\pi R^3 \rho$ é a carga total contida na esfera. Isto é, o campo criado por uma distribuição esférica de cargas de densidade constante é o mesmo que se toda a carga estivesse concentrada no centro da esfera, se o ponto P é externo.

Se o ponto P é interior à esfera ($r < R$), então vê-

se, por (2-22), que as camadas exteriores a P não contribuem para o campo; o campo em P será dado então por:

$$E = \int_0^r \frac{4\pi \rho l^2 d\rho}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} \frac{r^3}{3},$$

isto é, o campo num ponto interior à distribuição é diretamente proporcional à sua distância ao centro:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r < R. \quad (2-24)$$

2º Processo - Integremos sobre discos circulares (Fig. 2-24), utilizando o resultado (2-20). Tem-se imediatamente:

$$dE = \frac{dq}{2\pi \epsilon_0 y^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} \right),$$

onde $dq = \pi y^2 \rho dx$ é a carga contida no disco elementar; virá portanto para o valor do campo externo:

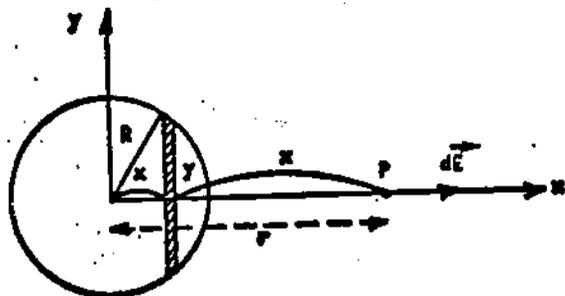


Fig. 2-24

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} \right) dx.$$

Mas $x = r - z$, donde $dx = -dz$. Tomando z como variável de integração, e substituindo os limites para x pelos correspondentes valores para z , a integral fica:

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{r+R}^{r-R} \frac{zdz}{\sqrt{R^2 - r^2 + 2rz}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{r+R}^{r-R} dz.$$

Integrando por partes, a 1ª integral dá:

$$\int \frac{zdz}{\sqrt{R^2 - r^2 + 2rz}} = \pm \frac{z}{r} \sqrt{R^2 - r^2 + 2rz} - \frac{1}{3r^2} (R^2 - r^2 + 2rz)^{3/2}.$$

O valor do campo externo será então:

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{r} \sqrt{R^2 - r^2 + 2rz} \right]_{r+R}^{r-R} - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{3r^2} (R^2 - r^2 + 2rz)^{3/2} \right]_{r+R}^{r-R}$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[z \right]_{r+R}^{r-R} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{4/3 \pi R^3 \rho}{4\pi \epsilon_0 r^2}, \text{ logo:}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r > R,$$

onde q é ainda a carga total contida na esfera.

Para o cálculo do campo interno devemos considerar separadamente os campos criados pelas camadas à esquerda do ponto (região I) e pelas camadas à direita do ponto (região II) (Fig. 2-25)

O módulo de \vec{E}_1 , campo criado pela região I, será:

$$E_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-R}^r \left(1 - \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) dz.$$

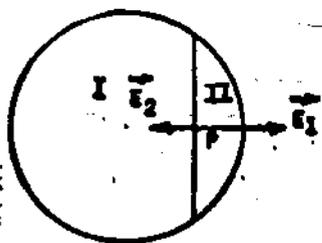


Fig. 2-25

Mas $dx = -dz$ e $y^2 = R^2 - (r-z)^2$ (Fig. 2-26), e teremos uma integral exatamente do tipo da anterior, agora entre os limites $r+R$ e 0 . Portanto:

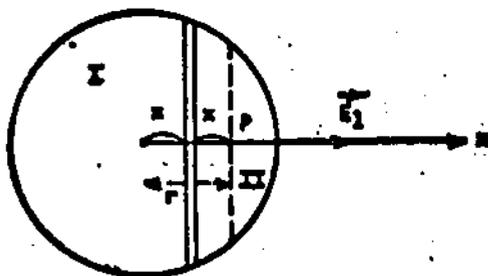


Fig. 2-26

$$E_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{r} \sqrt{R^2 - r^2 + 2rz} - \frac{(R^2 - r^2 + 2rz)^{3/2}}{3r^2} - z \right]_{R+r}^0 =$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[-\frac{(R+r)^2}{r} - \frac{(R^2 - r^2)^{3/2}}{3r^2} + \frac{(R+r)^3}{3r^2} + R+r \right]$$

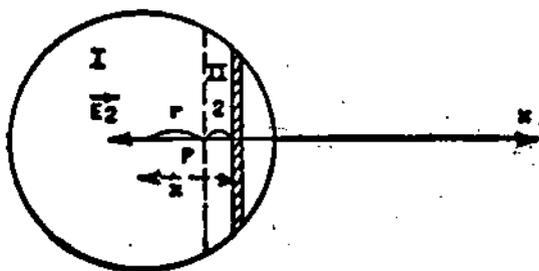


Fig. 2-27

O módulo de E_2 será:

$$E_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_r^R \left(1 - \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) dx.$$

Mas $x = r+z$ e portanto $dx = dz$; por outro lado, $y^2 = R^2 - (r+z)^2$ (Fig. 2-27), e a nossa integral em z , entre os limites 0 e $R-r$, será então:

$$E_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{R-r} dz = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{R-r} \frac{zdz}{\sqrt{R^2 - r^2 - 2rz}}$$

o que dá para E_2 :

$$E_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[z + \frac{z}{r} \sqrt{R^2 + r^2 - 2rz} \right]_0^{R-r} + \left[\frac{(R^2 + r^2 - 2rz)^{3/2}}{3r^2} \right]_0^{R-r} =$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[R - r + \frac{(R-r)^2}{r} + \frac{(R-r)^3}{3r^2} - \frac{(R^2 - r^2)^{3/2}}{3r^2} \right].$$

finalmente o valor do campo interno será:

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \frac{2r}{3}, \text{ logo:}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r}, \quad r < R,$$

que coincide com (2-24).

Problemas propostos

- 2-1. Calcule o campo criado num ponto qualquer do espaço por uma distribuição plana infinita de cargas, de densidade superficial constante e igual a σ , integrando sobre espiras circulares.
- 2-2. Calcule o campo criado por uma espira quadrada, de lado l , com densidade linear de cargas λ constante, em um ponto de seu eixo.
- 2-3. Demonstre que o campo criado por uma distribuição superficial

cilíndrica infinita de cargas, com densidade superficial constante σ , de raio R , é dado por:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r > R, \quad (2-25)$$

$$\vec{E} = 0, \quad r < R, \quad (2-26)$$

onde $\lambda = 2\pi R\sigma$ é a carga por unidade de comprimento, e r a distância do eixo do cilindro ao ponto considerado.

- 2-4. Demonstre que o campo criado por uma distribuição volumétrica cilíndrica infinita de cargas, com densidade volumétrica constante ρ , de raio R , é dado por:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r > R, \quad (2-27)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r < R, \quad (2-28)$$

onde $\lambda = \pi R^2\rho$ é a carga por unidade de comprimento, e r a distância do eixo do cilindro ao ponto considerado.

- 2-5. Um cilindro circular reto de raio R e altura A contém uma distribuição espacial de cargas com densidade ρ constante no seu interior; fora dele $\rho = 0$. Determine o campo elétrico em todos os pontos do eixo do cilindro.

- 2-6. Determine a força que se exerce, por unidade de comprimento, entre 2 fios infinitos paralelos, a uma distância de 20 cm, sobre os quais existem distribuições uniformes de carga, com densidade

Desse modo $\frac{\mu C}{m} = \frac{1}{2} \frac{\mu C}{m}$ e $\frac{\mu C}{m} = \frac{1}{2} \frac{\mu C}{m}$, respectivamente.

2-7. Um cilindro circular reto de raio R e altura A é orientado ao longo do eixo dos z . No seu interior há uma distribuição volumétrica de cargas de densidade dada por $\rho = \rho_0 + \beta z$, em relação a uma origem tomada no centro do cilindro. Encontre a força que atua sobre uma carga q colocada no centro do cilindro (R.M.).

2-8. (a) Mostre que a força que atua sobre um dipolo de momento \vec{p} colocado num campo elétrico externo \vec{E}_0 é $\vec{p} \cdot \nabla \vec{E}_0$; (b) mostre que o momento atuando sobre o dipolo neste campo é

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}_0 + \vec{p} \wedge \vec{E}_0,$$

onde $(\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}_0 = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + p_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \vec{E}_0$, e \vec{r} é a distância vetorial ao dipolo, de ponto em torno do qual o momento é medido. A quantidade $\vec{p} \wedge \vec{E}_0$, que é independente do ponto em torno do qual o momento é calculado, é chamada momento de rotação que atua sobre o dipolo (R.M.).

CAPÍTULO 3

TEOREMA DE GAUSS

3 - 1. Propriedades de simetria do campo elétrico. No cálculo direto do campo elétrico, ocorre sempre a questão da escolha da variável de integração; como a escolha pode ser vária, ora recaindo sobre um ângulo, ora sobre uma distância, poderá o mesmo problema ser resolvido por diferentes processos, uns mais simples, outros mais elaborados. A experiência indicará, em cada caso, o caminho mais simples a seguir. Sendo o campo elétrico um vetor, devemos em geral integrar separadamente suas 3 componentes, a menos que se possa conhecer a priori a direção do campo, por raciocínios de simetria. Esses raciocínios decorrem da própria definição do campo, e conduzem à formulação de propriedades de simetria, que enumeraremos a seguir:

1^a) O valor do campo elétrico, num ponto de um plano de simetria para as cargas, é um vetor contido neste plano. É o que ocorre, por exemplo, nos pontos do plano mediador do segmento que liga duas cargas puntiformes e iguais (Fig. 3-1).

2^a) O valor do campo elétrico, num ponto da reta de interseção de dois planos de simetria para as cargas, é um vetor contido nesta reta. É o que ocorre, por exemplo, na interseção de 2

planos de simetria de um conjunto de 4 cargas iguais, dispostas nos

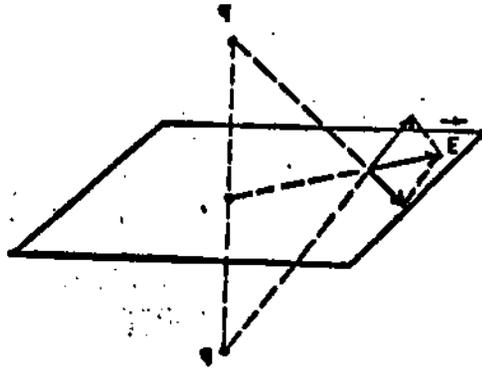


Fig. 3-1

vértices de um quadrado (Fig. 3-2).

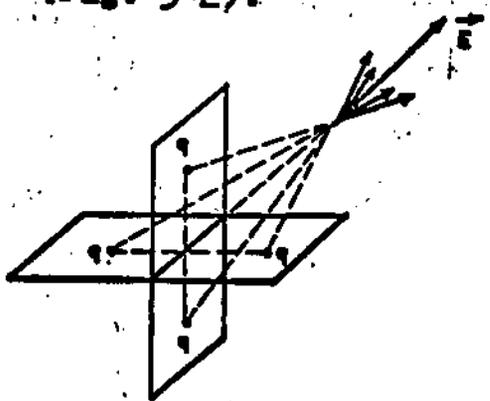


Fig. 3-2

3^a) O campo elétrico é sempre simétrico em relação a um plano de simetria das cargas (Fig. 3-3).

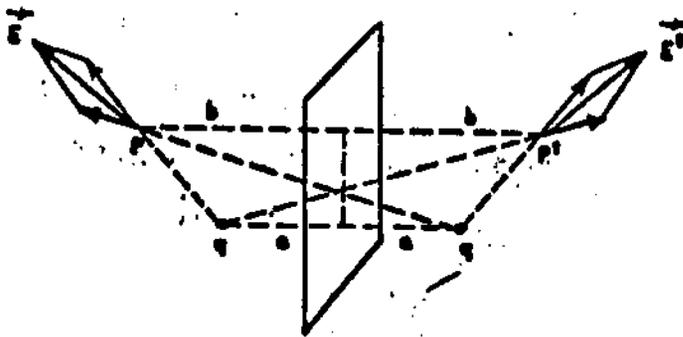


Fig. 3-3

Em caso de simetria esférica para a distribuição de cargas, isto é, quando a densidade de cargas é da forma $\rho = f(\vec{r})$ e tem, portanto, valor constante sôbre qualquer superfície esférica de raio \vec{r} , centrada na origem (Fig. 3-4), todo plano passando pela origem é um plano de simetria da distribuição. Tendo a interseção de 2 (quaisquer) dêsses planos a direção radial, o campo elétrico será também radial.

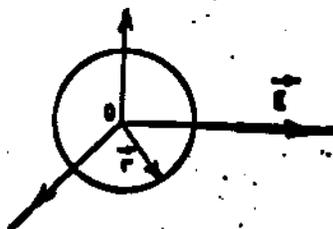


Fig. 3-4

Em caso de simetria cilíndrica para a distribuição de cargas, isto é, quando a densidade de cargas é da forma $\rho = f(\vec{r})$ e tem, portanto, valor constante sôbre qualquer superfície cilíndrica infinita de raio \vec{r} , com eixo no eixo dos x

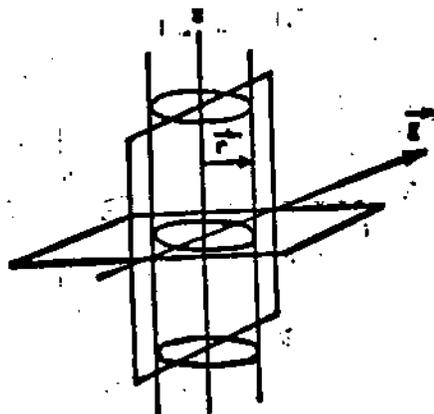


Fig. 3-5

(Fig. 3-5), todo plano que contém o eixo, ou normal a êle, é um plano de simetria da distribuição. Assim sendo, o campo terá, ainda neste caso, direção radial.

Êsses raciocínios de simetria, que já nos auxiliaram no cálculo direto do campo elétrico, terão ainda maior utilidade no cálculo do campo por um novo método, de que trataremos a seguir.

3 - 2. Teorema de Gauss. Seja um campo elétrico \vec{E} , qualquer,

definido numa certa região do espaço, e seja, nesta região, um elemento de superfície ds tomado sobre uma superfície qualquer s . Se orientarmos êsse elemento de acordo com a sua normal, atribuindo sinais positivo e negativo às suas duas faces (Fig. 3-6), então da mesma maneira estará orientada toda a superfície s . Definindo o vetor:

$$\vec{ds} = \vec{n} ds,$$



Fig. 3-6

chama-se fluxo do campo elétrico através da superfície elementar ds a quantidade (Fig. 3-7):

$$\begin{aligned} d\phi &= \vec{E} \cdot \vec{ds} = \\ &= \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \\ &= E \cos \theta ds, \end{aligned}$$

o fluxo do campo elétrico através da superfície s a quantidade:

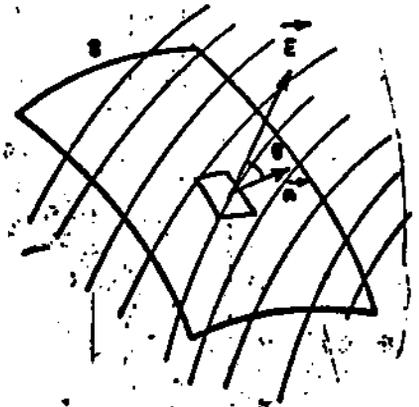


Fig. 3-7

$$\phi = \int_s E \cos \theta ds. \quad (3-1)$$

O teorema de Gauss refere-se ao valor de ϕ , quando calculado através de uma superfície fechada.

Vamos inicialmente demonstrá-lo e enunciar-lo no caso particular do campo elétrico criado por uma carga puntiforme, tomando a origem do sistema de referência na posição da carga. Depois gene

realizaremos o resultado para uma distribuição qualquer de cargas. De (2-9) e (3-1), vemos que o fluxo do campo criado pela carga q , através da superfície elementar ds , será (Fig. 3-8):

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{s} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} ds_r, \end{aligned}$$

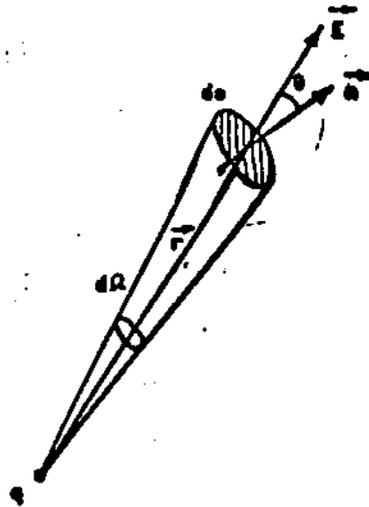


Fig. 3-8

sendo $ds_r = ds \cos \theta = \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{s}$ a projeção do elemento ds sobre um plano normal à direção de \vec{r} .

Mas, por definição, ds_r é um elemento de superfície de uma esfera de raio r , centrada em q . Logo:

$$ds_r = r^2 d\Omega, \quad \text{pois} \quad d\Omega = \frac{ds \cos \theta}{r^2},$$

e $d\Omega$ é o ângulo sólido do qual se vê, da posição da carga q , a face negativa da superfície ds . Convencionamos, neste caso, que o ângulo sólido $d\Omega$ é positivo.

Tem-se, então, para o fluxo elementar:

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

e para o fluxo total através de s :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_s d\Omega. \quad (3-2)$$

Se s é uma superfície fechada, há 2 casos a considerar:

1º caso: a carga q é exterior à superfície.

Neste caso, o ângulo sólido $d\Omega$ fura a superfície s em um número par de elementos de superfície (Fig. 3-9). Orientando a normal sempre de dentro para fora da superfície, vemos que os ângulos sólidos assim determinados serão iguais, mas de sinais contrários 2 a 2. Então na integral:

$$\int_s d\Omega$$

os ângulos sólidos se cancelarão 2 a 2, e de (3-2) vem para o valor do fluxo através de s :

$$\phi = 0. \quad (3-3)$$

2º caso: a carga q é interior à superfície.

Neste caso, há uma correspondência biunívoca entre os elementos de s e os de uma superfície esférica envolvendo q (Fig. 3-10a), e assim o ângulo sólido correspondente a s é igual ao ângulo sólido correspondente à esfera, isto é:

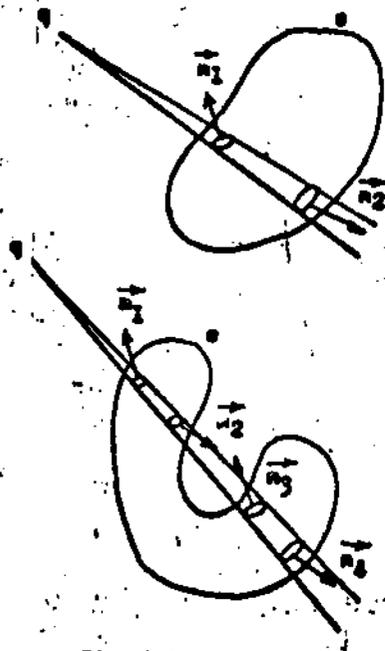


Fig. 3-9

$$\int_s d\Omega = 4\pi.$$

Se a superfície for reversa (Fig. 3-10b), vale o mesmo resultado, desde que se faça a correspondência entre cada elemento da superfície esférica e o ângulo sólido determinado pela 1ª interseção com a superfície reversa; os outros ângulos sólidos se cancelam 2 a 2.

Neste caso, de (3-2), vem para o valor do fluxo:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (3-4)$$

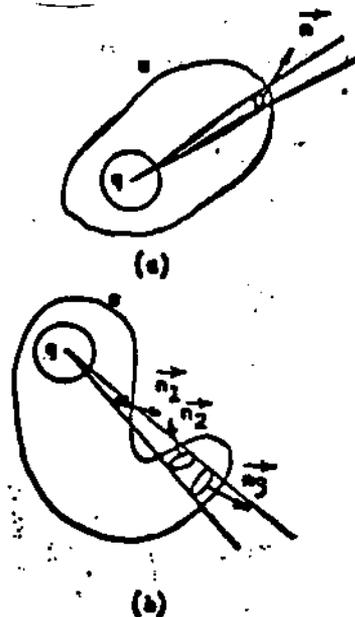


Fig. 3-10

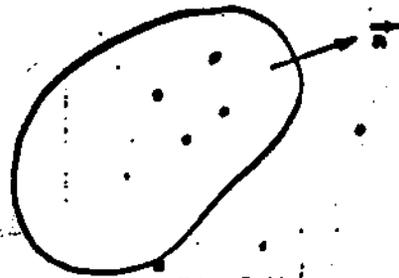
Isto é, (3-3) e (3-4) mostram que, para uma carga puntiforme, o fluxo do campo elétrico que "sai" (dizemos "sai" quando \vec{n} é orientada para fora; "entra", em caso contrário) de uma superfície fechada é nulo se a carga estiver fora, e igual a $\frac{q}{\epsilon_0}$ se a carga estiver no interior da superfície.

Este é o teorema de Gauss para uma carga puntiforme q .

Para uma distribuição qualquer de cargas, seja ela contínua ou discreta, tem-se ainda para o fluxo que sai de s (Fig. 3-11):

$$\phi = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Como o campo total é, pelo princípio de superposição, igual à soma dos campos criados pelas cargas, temos:



$$\phi = \int_S (\sum \vec{E}_1) \cdot d\vec{s} = \int_S \sum (\vec{E}_1 \cdot d\vec{s}) = \sum \int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \sum \phi_1,$$

onde \vec{E}_1 é o campo criado pela carga q_1 . Aplicando (3-3) e (3-4), vem

$$\phi = \sum_{k_{int}} \frac{q_k}{\epsilon_0} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

onde q_{int} é a carga total interna à superfície s .

Então na sua forma mais geral, o teorema de Gauss se enuncia:

"Para uma distribuição qualquer de cargas, o fluxo do campo elétrico que sai de uma superfície fechada s é igual à carga total contida no interior da superfície s , dividida por ϵ_0 ." Isto é:

$$\phi_s = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}.$$

(3-5)

O teorema de Gauss é útil no cálculo do campo elétrico em certos tipos de problemas em que a distribuição de cargas apresenta propriedades de simetria. Quando se puder, a priori, afirmar que o módulo do campo elétrico é constante sobre uma superfície fechada, e que tem direção normal a ela em toda a sua extensão, o teorema de Gauss permitirá calcular, de modo simples, o campo sobre essa superfície. Da aplicação do teorema, neste caso, resultará:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E ds = E \int_S ds = Es = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

isto é,

$$E = \frac{q_{int}}{\epsilon_0 s}$$

(3-5')

Já no caso do fio de comprimento finito (parágrafo 2-8), por exemplo, o teorema de Gauss não é aplicável para esse cálculo, mesmo que se escolha para superfície de Gauss uma superfície de nível; pois, embora sobre ela o campo elétrico seja sempre normal, seu módulo varia. Entretanto, poderemos ainda aplicar esse método se, na parte da superfície em que o módulo do campo varia, ele for tangencial à superfície.

Vejamos alguns exemplos.

3 - 3. Campo de uma carga puntiforme. Havendo simetria esférica, o campo é radial e constante em módulo sobre uma superfície esférica de raio r qualquer, com centro na carga q (Fig. 3-12). Neste caso, $s = 4\pi r^2$, e (3-5') dará imediatamente:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$



Fig. 3-12

resultado que confirma (2-9).

3 - 4. Campo de uma distribuição plana infinita, de densidade superficial de cargas σ constante. Como todos os planos normais

ao plano da distribuição são planos de simetria para a distribuição, conclui-se que o campo em todo o espaço é normal ao plano dado (Fig. 3-13).

Como a distribuição apresenta simetria de translação, conclui-se que o campo elétrico é constante ao longo de planos paralelos ao plano dado. Como, finalmente, o plano dado

é ele próprio um plano de simetria da distribuição, conclui-se que o campo é simétrico em relação a ele.

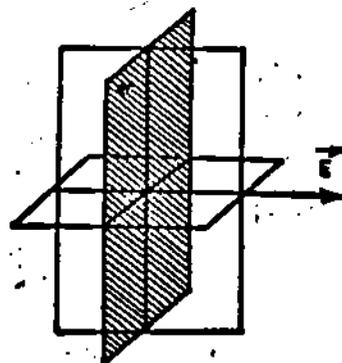


Fig. 3-13

Podemos, então, tomar para superfície de Gauss um cilindro normal ao plano, cujas bases são paralelas ao plano e simétricas em relação a ele. O fluxo que sai da superfície cilíndrica é igual (Fig. 3-14) à soma do fluxo que sai de sua superfície lateral e do que sai das bases:

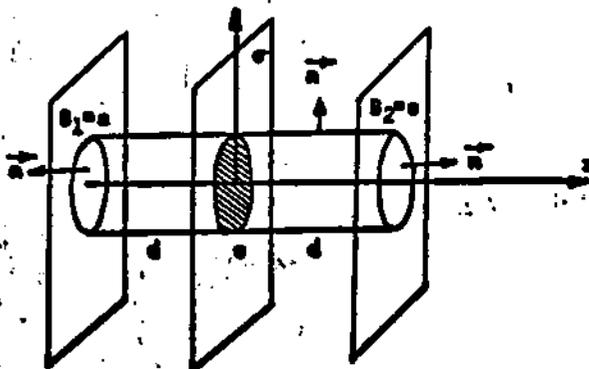


Fig. 3-14

Mas, ao longo da superfície lateral, \vec{E} é perpendicular a \vec{n} , do que

resulta:

$$\phi_L = \int_L \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

Portanto o fluxo será apenas:

$$\phi = \int_{B_1} \vec{E} \cdot \vec{ds}_1 + \int_{B_2} \vec{E} \cdot \vec{ds}_2 =$$

$$= E \left(\int_{B_1} ds_1 + \int_{B_2} ds_2 \right) =$$

$$= 2Es.$$

Pelo teorema de Gauss (3-5), o fluxo é igual à carga contida no cilindro (no caso, σs) dividida por ϵ_0 :

$$2Es = \frac{\sigma s}{\epsilon_0}$$

Logo:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

resultado que confirma (2-18).

3 - 5. Campo de uma distribuição esférica de cargas, de densidade volumétrica ρ constante. Como o problema apresenta simetria esférica, sabemos que, em todos os pontos do espaço, o campo será radial e constante sobre superfícies esféricas com centro no centro da distribuição. Estas serão, portanto, as superfícies gaussianas convenientes ao problema.

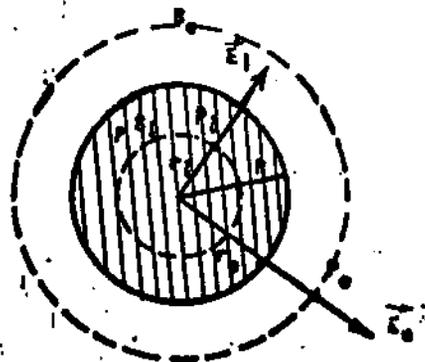


Fig. 3-15

a) Para pontos externos. Façamos passar por P_0 uma superfície esférica de raio r_0 (Fig. 3-15); o teorema de Gauss (3-5) nos dá:

$$\phi = E \cdot 4\pi r_0^2 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

onde $q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ é a carga total contida na esfera.

Portanto:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > R,$$

que confirma (2-23).

b) Para pontos internos. Façamos passar por P_1 uma superfície esférica de raio r_1 (Fig. 3-15); o teorema de Gauss (3-5) nos dá:

$$\phi = E \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{4/3 \pi r_1^3 \rho}{\epsilon_0}.$$

Portanto:

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \quad r < R,$$

que confirma (2-24).

3 - 6. Ainda como aplicação do teorema de Gauss, demonstremos que na descontinuidade da componente normal do campo elétrico através de uma superfície sobre a qual existe uma distribuição superficial de cargas, de densidade $\sigma = \sigma(\vec{r})$, é dada por $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ".

Consideremos um pequeno cilindro de base Δs e altura Δh normal à superfície, com bases de cada lado dela, e seja Δh um infinitésimo de ordem superior a Δs . Orientemos a normal à superfície s conforme indicado na Fig. 3-16. Calculemos o fluxo do campo elétrico através do cilindro:

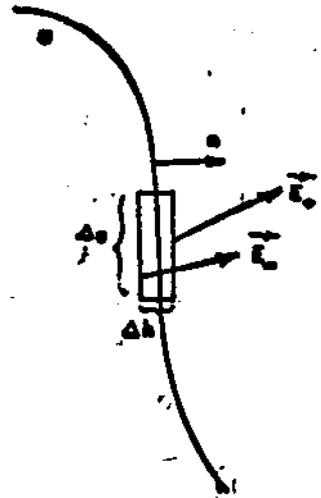


Fig. 3-16

$$\phi = \int \vec{E}_+ \cdot \vec{n} \, ds + \int \vec{E}_- \cdot (-\vec{n}) \, ds + \phi_L,$$

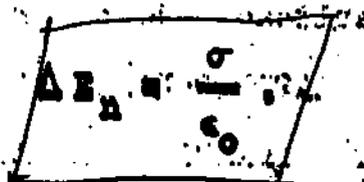
onde ϕ_L é o fluxo através da superfície lateral do cilindro. Como Δh é um infinitésimo de ordem superior a Δs , ϕ_L é desprezível em face dos outros dois termos; como ainda as bases do cilindro são bastante pequenas, podemos considerar que o campo é constante ao longo de cada uma delas, e que σ é constante em Δs .

O fluxo que sai do cilindro será então:

$$\phi = E_{+n} \int ds - E_{-n} \int ds = (E_+ - E_-)_n \cdot \Delta s = \Delta E_n \Delta s.$$

Aplicando o teorema de Gauss (3-5):

$$\Delta E_n \cdot \Delta s = \frac{\sigma \Delta s}{\epsilon_0}$$



(3-5)

Problemas Propostos:

- 3 - 1. Calcule, pelo teorema de Gauss, o campo criado por:
- um fio retilíneo infinito, com densidade linear de cargas λ constante.
 - uma superfície esférica, com densidade superficial de cargas σ constante.
 - uma superfície cilíndrica infinita, com densidade superficial de cargas σ constante.
 - uma distribuição volumétrica cilíndrica infinita, com densidade volumétrica de cargas ρ constante.
- 3 - 2. Calcule o campo criado em todo o espaço pela distribuição de cargas esféricamente simétrica representada na figura 3-17.

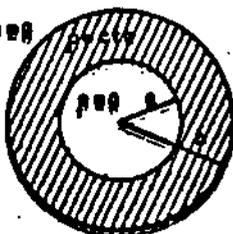


Fig. 3-17

3 - 3. Dada uma distribuição esférica de cargas, na qual a densidade é uma função de r , provar que o campo em qualquer ponto é o que seria obtido imaginando uma esfera passando pelo ponto, com centro na origem, estando toda a carga interior a essa esfera localizada no seu centro, e sendo removida toda a carga exterior à esfera. (S.F.).

3 - 4. O campo elétrico da atmosfera na superfície da terra é aproximadamente 200 V/m, dirigido verticalmente para baixo. A 1500 m acima da superfície, o campo elétrico da atmosfera é apenas 20 V/m, também dirigido para baixo. Qual é a densidade média de cargas na atmosfera abaixo de 1500 m? Há nela predominantemente íons positivos ou negativos? (R.M.)

3 - 5. Calcule o campo criado em todo o espaço por uma distribuição de cargas cilíndricamente simétrica, cuja secção transversal pode ser representada pela Fig. 3-17.

CAPÍTULO 4

POTENCIAL ELETROSTÁTICO

4 - 1. Condutores e isolantes. Até o presente momento, restringimos o estudo da Eletrostática ao das cargas, sem nos preocuparmos com os corpos em que elas se situam. Nas situações físicas reais, entretanto, essas cargas não estão suspensas no espaço vazio, sim colocadas em meios materiais. Por ora classificaremos êsses meios em dois grandes grupos: o dos condutores e o dos isolantes, baseando essa classificação no seu comportamento relativo às cargas elétricas neles colocadas. Nos condutores, as cargas se movem rapidamente e logo adquirem posição de equilíbrio; nos isolantes, as cargas se movem com dificuldade e podem neles conservar-se durante um longo tempo (como no âmbar, por exemplo).

Esta classificação não é rígida, pois na realidade todo corpo material apresenta ambas as propriedades; assim, em vez de condutores e isolantes, devemos dizer de preferência "bons" e "maus" condutores e isolantes. Na região intermediária entre os bons condutores e os bons isolantes situam-se os maus condutores (que também são maus isolantes).

O problema de gradação da condutibilidade, aliás, é irrelevante em Eletrostática, onde só tem interesse a situação em que

as cargas já se encontram em equilíbrio, pouco importando a maior ou menor dificuldade que existiu para que esse equilíbrio fôsse atingido. Trabalha-se em Eletrostática com condutores ideais, nos quais a carga atinge instantaneamente sua posição de equilíbrio; mesmo um bom isolante, porém, poderá ser considerado um condutor ideal, uma vez atingida a situação de equilíbrio. Aliás, não existem na Natureza condutores ideais; nem mesmo o são ouro e platina, em que as cargas podem mover-se até ao equilíbrio em intervalos de tempo extraordinariamente pequenos. Os melhores condutores são, de modo geral, os metais.

O comportamento dos condutores e dos isolantes é perfeitamente explicado pelas teorias modernas. Sendo a matéria constituída de átomos, com núcleos positivos e elétrons negativos, a carga total dos corpos é nula em geral. Pode acontecer que os elétrons sejam tão ligados aos átomos, que nunca saiam de uma região próxima à posição de equilíbrio, não podendo, portanto, mover-se livremente no interior do material. Materiais desse tipo são os isolantes, e mais ainda os dielétricos, cujos átomos podem polarizar-se. Já nos metais (condutores), a maioria dos elétrons mantêm-se presos aos átomos; porém alguns deles são livres, com a possibilidade de mover-se através do meio, sofrendo ainda as ações dos núcleos, embora insuficientes para prendê-los aos átomos. Assim, se um campo elétrico atua num condutor, os elétrons livres movem-se em sentido oposto ao do campo (os íons positivos de soluções eletrolíticas - que também são condutores - movem-se no sentido do campo), o que já se evidencia em (2-4). De fato, o sentido da força elétrica (igual ou contrário ao do campo dado), que atua sobre uma carga q , é fixado pelo

sinal (positivo ou negativo) de q .

Por definição, a situação de equilíbrio num condutor é atingida quando o campo elétrico é nulo no seu interior; porque, existindo elétrons livres, se houvesse força elétrica em algum ponto do condutor, êsses elétrons se moveriam sob a ação dessa força, e deixaria de existir equilíbrio.

Vale aqui uma observação importante. Temos desde o início do curso admitido um princípio que é fundamental no Eletromagnetismo e que não foi enunciado explicitamente: "qualquer que seja o meio material considerado, as ações elétricas e magnéticas, em presença dêsse meio, ficam inteiramente determinadas quando se conhecem as distribuições de cargas e de correntes nêsse meio, e os campos elétrico e magnético (\vec{E} e \vec{B}) são os mesmos que se essas distribuições estivessem no vácuo". Isto é, o fato de haver matéria não tem influência sobre as ações elétricas e magnéticas, que só dependem das cargas existentes, desde que se levem em consideração tôdas as cargas e correntes, incluindo as intra-atômicas. A confirmação dêste princípio está no fato experimental de que a força que atua sobre a carga elétrica, qualquer que seja o meio material em que ela se situa, é realmente a força de Lorentz, dada por (1-1).

Dentro de um condutor em equilíbrio a carga é nula, isto é, toda carga elétrica não neutralizada está situada na superfície do condutor. De fato, apliquemos o teorema de Gauss a uma superfície fechada qualquer no interior de um condutor carregado, seja essa superfície (Fig. 4-1). O fluxo do campo elétrico através de S é igual à carga contida no seu interior, dividida por ϵ_0 :

$$\phi_s = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Mas:

$$\phi_s = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \text{ pois } \vec{E} = 0$$

no interior do condutor. Portanto $q_{int} = 0$, qualquer que seja a superfície s considerada.

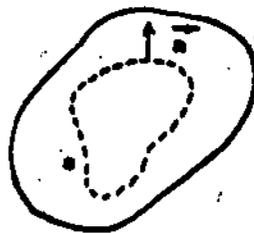


Fig. 4-1

Calculemos agora o valor do campo elétrico num ponto exterior ao condutor, muito próximo de sua superfície, P_+ (Fig. 4-2).

De acordo com (3-6) temos:

$$E_{+n} - E_{-n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

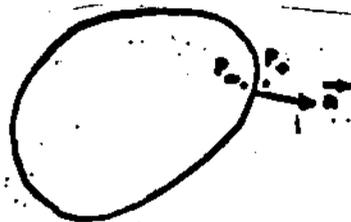


Fig. 4-2

Ora, E_{-n} é nulo, por ser nulo o campo no interior de um condutor. Por outro lado, o campo elétrico em P_+ não pode ter componente tangencial, porque, como veremos a seguir (parágrafo 4-4), a superfície de um condutor é sempre uma superfície de nível. Portanto o campo elétrico num ponto muito próximo à superfície do condutor, e externo a ele, é dado por:

$$\vec{E}_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}, \quad (4-1)$$

onde σ é a densidade superficial de cargas no ponto considerado, e \vec{n} a normal à superfície do condutor, para fora, tomada no ponto.

4 - 2. Potencial eletrostático. O conceito de potencial é importante, porque nos vai fornecer mais um método para cálculo de campo, mais simples em geral do que o cálculo direto, sendo o potencial uma grandeza escalar; e também porque desempenha função essencial no comportamento de condutores e de pilhas elétricas.

Seja uma carga puntiforme q' que se desloca em presença de um campo de forças qualquer. Dizemos que este campo é "conservativo" se o trabalho realizado nesse deslocamento não depender da trajetória. Se o campo é conservativo, podemos sempre definir uma função escalar W (energia potencial) e mostrar que a força de campo pode ser obtida simplesmente, pelas derivadas de W , mediante a equação:

$$\vec{F} = - \text{grad } W, \quad (4-2)$$

onde grad é o operador diferencial já definido na parágrafo (2-6).

Demonstremos agora que o campo elétrico é conservativo. Utilizaremos, de início, um campo coulombiano, e depois generalizaremos os resultados, aplicando o princípio de superposição. Seja o campo coulombiano criado pela carga q . O trabalho, por unidade de carga, realizado pelas forças de campo para deslocar a carga q' desde A até B, ao longo da curva Γ (Fig. 4-3), será:

$$\tau'_{AB} = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (4-3)$$

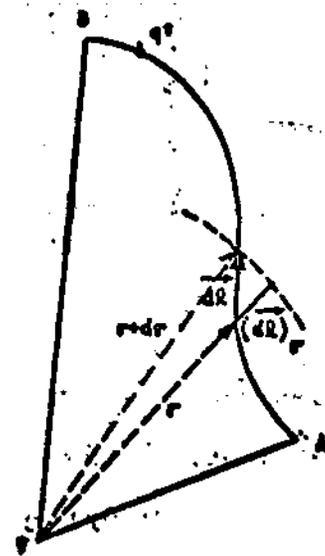


Fig. 4-3

onde:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{l} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (d\vec{l})_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

Logo:

$$V_{AB} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{dr}{r^2}.$$

Qualquer que seja Γ , o que aparece como variável de integração é a distância r do ponto ao centro. Isto é, a integração na verdade se rá feita desde r_A até r_B , e todos os percursos possíveis entre A e B conduzem ao mesmo resultado:

$$\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}.$$

Isto é, na expressão obtida para o trabalho:

$$V_{AB} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (4-4)$$

não sobrou vestígio do percurso de integração, e portanto o campo coulombiano é conservativo.

Se em vez de apenas uma carga q , tivermos várias cargas criando o campo, calcularemos separadamente as contribuições para

o trabalho devidas a cada carga; sendo cada contribuição independente do percurso, a soma delas - que dá o trabalho total - será também independente do percurso, e assim o campo total é ainda conservativo. Se agora a distribuição de cargas que gera o campo não é discreta, e sim se estende continuamente por uma certa região R do espaço, de volume v , então o trabalho, por unidade de carga, realizado pelas forças de campo para transportar uma carga desde o ponto A até o ponto B será:

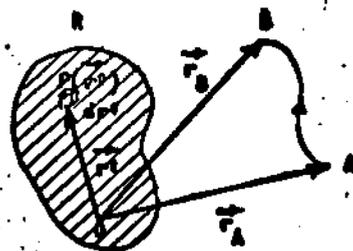


Fig. 4-4

$$\tau'_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}_A - \vec{r}'|} dv' - \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}_B - \vec{r}'|} dv' \right), \quad (4-5)$$

onde \vec{r}' é o vetor posição do elemento de carga, $\rho(\vec{r}')$ a densidade de carga na posição do elemento, e dv' o volume do elemento, dado em coordenadas cartesianas por $dx' dy' dz'$ (Fig. 4-4).

Chamaremos diferença de potencial entre A e B ($V_A - V_B$) ao trabalho, por unidade de carga, realizado pelas forças de campo para transportar uma dada carga desde o ponto A até o ponto B , isto é:

$$V_A - V_B = \tau'_{AB}. \quad (4-6)$$

Chamando P ao ponto A e P_0 ao ponto B , \vec{r} ao vetor \vec{r}_A e \vec{r}_0 ao \vec{r}_B , de (4-5) e (4-6) vem:

$$V_P - V_{P_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r}_0 - \vec{r}'|} \quad (4-7)$$

Por outro lado, de (4-3) e (4-6) vem:

$$V_P - V_{P_0} = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

isto é (Fig. 4-5):

$$V_P - V_{P_0} = - \int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4-8)$$

O ponto P_0 é escolhido arbitrariamente; em particular, se tomarmos P_0 no infinito, e se para $r_0 \rightarrow \infty$ o 2º termo do 2º membro de (4-7) se anular, então podemos impor que a constante V_{P_0} seja feita nula, e definiremos como potencial V do ponto P a expressão:

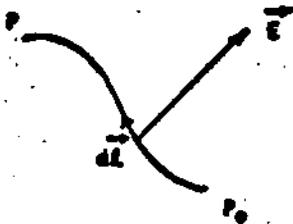


Fig. 4-5

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4-9)$$

Neste caso ainda, (4-8) dá:

$$V = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (4-10)$$

e assim o potencial do ponto P será definido como o trabalho, por unidade de carga, realizado pelas forças de campo para transportar uma dada carga desde o ponto P até o infinito, mantendo-se fixa a

distribuição de cargas responsável pelo campo.

Se as cargas se distribuem continuamente sobre uma superfície s , com densidade superficial $\sigma(\vec{r}')$, então o potencial em um ponto qualquer do espaço será dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma(\vec{r}') ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4-11)$$

Se as cargas se distribuem continuamente sobre uma curva Γ , com densidade linear $\lambda(\vec{r}')$, então o potencial em um ponto qualquer do espaço será dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4-12)$$

Para uma carga q' ,

$$W = q' V \quad (4-13)$$

é o trabalho realizado pelas forças de campo para transportar a carga q' desde o ponto P até o infinito. W é a "energia potencial" da carga q' no ponto P , em presença da distribuição fixa de cargas considerada.

De maneira geral, sempre que a distribuição de cargas geradora do campo se estende a uma região finita do espaço, o 2º termo do 2º membro de (4-7) se anula para $r_0 \rightarrow \infty$, e podemos tomar um ponto no infinito para origem dos potenciais. Quando, po-

rém, isso não se dá, isto é, quando a distribuição de cargas é infinita, então utilizamos (4-7) para o cálculo do potencial no ponto P, e obteremos, depois da integração, uma expressão do tipo:

$$V - V_0 = f(r) - f(r_0), \quad (4-14)$$

onde V é o valor do potencial em P, e V_0 o valor do potencial em P_0 .

Sendo P_0 um ponto arbitrário, podemos escolhê-lo de tal maneira que $f(r_0) = 0$, e então impor $V_0 = 0$. Neste caso, (4-14) dará o valor do potencial eletrostático no ponto P, em relação à origem P_0 .

4 = 3. Relação entre potencial e campo elétrico. Já vimos, de (4-8), como se pode calcular o potencial, sendo dado o campo elétrico; veremos agora como obter o campo elétrico a partir do potencial.

Consideremos a variação sofrida pelo valor do potencial quando se passa da posição \vec{r} para a posição $\vec{r} + d\vec{r}$ (Fig. 4-6):

$$\begin{aligned} dV &= V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) = \\ &= V(\vec{r}) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{\vec{r}} dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{\vec{r}} dy + \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{\vec{r}} dz + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_{\vec{r}} dx^2 + \dots = \\ &= V(\vec{r}), \end{aligned}$$

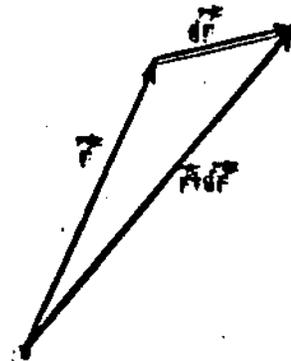


Fig. 4-6

Isto é:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{\vec{r}} dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{\vec{r}} dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{\vec{r}} dz, \quad (4-15)$$

pois os infinitésimos de 2ª ordem em diante são desprezíveis. De (4-15) e da definição de gradiente (2-11), vemos que a diferença de potencial entre dois pontos infinitamente próximos, de raios vetores \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$ respectivamente, é dada por:

$$dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \quad (4-16)$$

Vamos identificar (4-16) com a definição de diferença de potencial expressa por (4-8). Da Fig. 4-7 e de (4-8) virá:

$$V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) = dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Identificando este resultado com (4-16):

$$\vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}; \quad (4-17)$$

Isto é:

$$(\vec{\nabla} V + \vec{E}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

Como $d\vec{r}$ é arbitrário, concluímos:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V, \quad (4-18)$$

Isto é, as componentes do campo elétrico, em termos da função potencial, são dadas por:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (4-19)$$



Fig. 4-7

Por outro lado, como:

$$\vec{F} = q \vec{E},$$

e por (4-13), teremos:

$$\vec{F} = - \text{grad } W,$$

que coincide com (4-2).

Em geral podemos escolher um ponto no infinito como origem dos potenciais. Como, porém, o infinito é inacessível, usa-se na prática tomar como origem o potencial da Terra, o potencial "terra". Essa escolha se justifica pelo fato de ser a Terra um objeto de grandes dimensões e, portanto, o de condições elétricas mais estáveis; de fato, qualquer quantidade de carga que a atinge logo se distribui por seu volume (pois a Terra é um bom condutor) e não produz nenhum efeito sensível, mantendo-a assim a um potencial sempre constante.

Chamamos "superfície equipotencial" ao lugar dos pontos de mesmo potencial. Mostremos que as superfícies equipotenciais coincidem com as superfícies de nível, já estudadas no parágrafo 2-5. Seja s uma superfície equipotencial, e P um ponto qualquer dela; seja \vec{E} o valor do campo elétrico no ponto P (Fig. 4-8). Sabemos, de (4-17), que a variação dV sofrida pelo potencial ao passar do ponto \vec{r} para o ponto $\vec{r} + d\vec{r}$, qualquer que seja

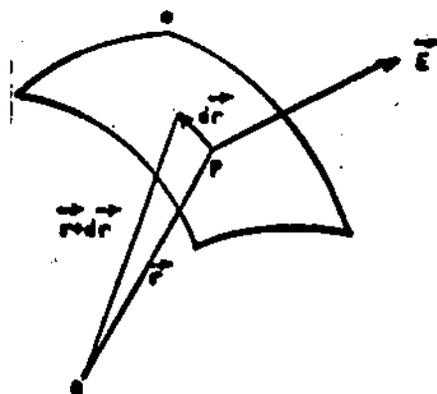


Fig. 4-8

$d\vec{r}$, é dada por:

$$dV = - \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Se tomarmos $d\vec{r}$ tangente à superfície equipotencial, dV será a diferença de potencial entre dois pontos da superfície, e portanto teremos $dV = 0$. Logo:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0,$$

isto é, \vec{E} será normal a um vetor $d\vec{r}$ qualquer, tangente à superfície s em P . Portanto s é uma superfície de nível. Reciprocamente, por procedimento análogo, demonstra-se que toda superfície de nível é uma superfície equipotencial.

4 - 4. Potencial de um condutor. Sendo nulo, por definição (parágrafo 4-1), o campo elétrico no interior de um condutor, a diferença de potencial entre dois (quaisquer) de seus pontos é nula, por (4-17). Então todos os pontos do condutor, inclusive os da superfície, estão a um mesmo potencial. A esse valor constante se chama "potencial do condutor".

Se o condutor for ligado à terra (Fig. 4-9), as cargas se distribuirão de tal maneira que, ao atingir o equilíbrio, o



Fig. 4-9.

condutor estará a potencial zero. Assim sendo, a superfície de um condutor em equilíbrio é sempre uma superfície equipotencial, e portanto uma superfície de nível (parágrafo 4-3).

Vale portanto (4-1), e o campo elétrico num ponto exterior imediatamente próximo à superfície será dirigido para fora, se $\sigma > 0$, e para dentro, se $\sigma < 0$.

Por outro lado:

$$\vec{E}_s \cdot \vec{t} = 0,$$

onde \vec{t} é um vetor unitário tangente à superfície do condutor. Um resultado geral em Eletrostática, que vale aqui em particular, é o de que a componente tangencial de um campo elétrico é contínua através de uma superfície, carregada ou não; isto é:

$$\Delta E_t = E_{t+} - E_{t-} = 0, \quad (4-20)$$

fato que decorre imediatamente de (4-18) e da continuidade do potencial através de uma superfície qualquer, carregada ou não.

Calculemos agora o potencial eletrostático devido a algumas distribuições.

4 - 5. Potencial de uma carga puntiforme. Tomando para origem de referencial a posição da carga q (Fig. 2-5), e a origem dos potenciais no infinito, (4-4) e (4-6) nos dão:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4-21)$$

As superfícies equipotenciais são superfícies esféricas centradas na posição de q .

Se a carga q é positiva, o potencial em P é positivo e decresce até o infinito, onde tem valor zero; se q é negativa, o potencial é negativo e cresce até o infinito, onde se anula. O sentido das linhas de campo num caso e no outro (Fig. 2-6) indicam que o sentido do campo é dos potenciais mais altos para os mais baixos. Este, aliás, é um fato geral que decorre imediatamente de (4-17). Usando (4-18) e (2-13), obtemos para o campo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

4-6. Potencial de um dipolo elétrico. Tomando para origem do referencial o ponto médio de d (Fig. 2-10), vemos de (4-21) que o potencial em P é dado por:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right),$$

que, desenvolvido em série de Taylor, dará:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots - \frac{1}{r} + \vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \right]$$

Desprezando os termos em \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , do 2º grau em diante, virá:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}}{r^3} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4-22)$$

Para obter o campo do dipolo, usando (4-18), devemos calcular o gradiente da função $\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$. Demonstra-se facilmente que:

$$\begin{aligned} \text{grad}(u v) &= u \text{ grad } v + v \text{ grad } u, \\ \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{r}) &= \vec{p}. \end{aligned}$$

Usando estes resultados, e mais (2-12) e (2-13), virá:

$$\begin{aligned} \text{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} &= (\vec{p} \cdot \vec{r}) \text{ grad} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \text{ grad}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \\ &= (\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^3} \right) \frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{p}}{r^3}, \end{aligned}$$

e portanto teremos para o campo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^6} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right),$$

que coincide com (2-14).

4 - 7. Potencial de uma dupla camada. Chama-se "dupla camada" ao conjunto de duas camadas paralelas, separadas por uma distância d muito pequena, e contendo cargas superficiais, com densidades de mesmo módulo, $|\sigma|$, e de sinais contrários, em cada ponto (Fig.4-10). Chama-se "potência" da dupla camada à quantidade:

$$\vec{m} = \sigma \vec{d}, \quad (4-23)$$

onde \vec{d} é o segmento orientado que vai da camada negativa para a positiva, perpendicularmente a elas. A dupla camada é obtida como o limite da situação em que se aproxima indefinidamente uma camada da outra, ao mesmo tempo que se aumenta

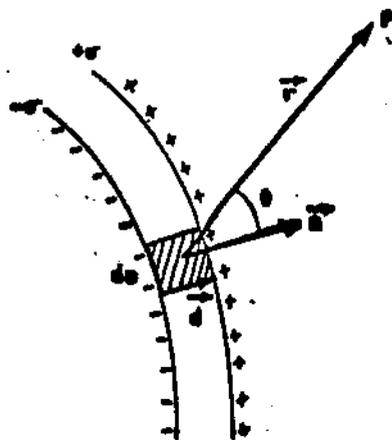


Fig. 4-10

indefinidamente a densidade superficial de cargas, de maneira a manter constante o produto σd . Neste sentido, a dupla camada nada mais é do que uma distribuição contínua de dipolos, cujo momento correspondente à superfície ds é:

$$d\vec{p} = dq \cdot \vec{d} = \sigma ds \cdot \vec{d}. \quad (4-24)$$

Assim a potência \vec{m} da dupla camada pode ser definida como a densidade de momentos de dipolo (momento de dipolo por unidade de área), pois por (4-23) e (4-24) tem-se:

$$\vec{m} = \frac{d\vec{p}}{ds}.$$

Diz-se que uma dupla camada é uniforme quando $|\vec{m}|$ é constante, e \vec{p} é normal à dupla camada, em todos os seus pontos.

Seja uma dupla camada apoiada num contorno C (Fig. 4-11), e calculemos o potencial num ponto P qualquer do espaço. Tomemos $s\hat{q}$ bre a dupla camada um elemento de superfície ds , e suponhamos que o ponto P , distando r de ds , esteja mais próximo da camada positiva;

neste caso, o ângulo θ formado entre \vec{r} e \vec{n} (orientada sempre da camada negativa para a positiva) é menor do que 90° . A contribuição para o potencial em P, devida ao momento de dipolo $d\vec{p}$, será, por (4-22):

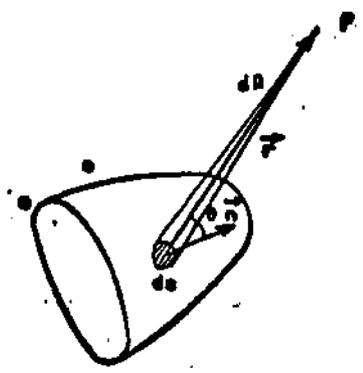


Fig. 4-11

$$dV = \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{dp \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m}{4\pi\epsilon_0} \frac{ds \cos\theta}{r^2} = \frac{m d\Omega}{4\pi\epsilon_0},$$

onde $d\Omega$ é o ângulo sólido (positivo, neste caso) do qual é visto de P o elemento ds . O potencial em P, devido à dupla camada, será então:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S m d\Omega.$$

constante, e teremos:

$$V = \frac{m\Omega}{4\pi\epsilon_0}, \tag{4-25}$$

onde Ω é o ângulo sólido do qual se vê, de P, o contôrno C; isto é, para um dado m, o potencial em P é o mesmo para tôdas as duplas camadas apoiando-se sôbre um mesmo contôrno.

Para uma dupla camada uniforme fechada, da Fig. 4-12 vemos imediatamente que o potencial num ponto externo será dado por:..

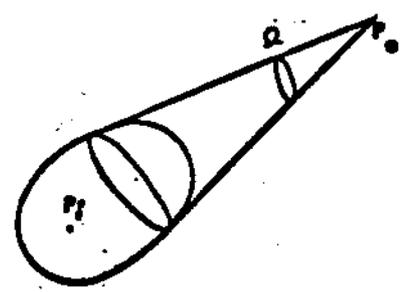


Fig. 4-12

$$V_P = \frac{m}{4\pi\epsilon_0} \Omega + \frac{m}{4\pi\epsilon_0} (-\Omega) = 0,$$

o potencial num ponto interno será dado por:

$$V_1 = \pm \frac{m}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \pm \frac{m}{\epsilon_0},$$

onde o sinal + ou - será usado conforme seja positiva ou negativa a camada interna.

Estudemos agora as descontinuidades do campo e do potencial, através de uma dupla camada.

Se considerarmos dois pontos infinitamente próximos da dupla camada, sendo um de cada lado (Fig. 4-13), então, nas proximidades dos pontos, ela se comporta como uma dupla camada plana. Aplicando o teorema de Gauss a um cilindro com bases apoiadas nos pontos, teremos:

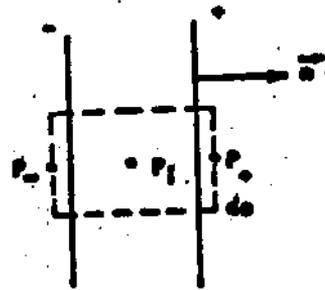


Fig. 4-13

$$\vec{E}_+ \cdot \vec{n} ds - \vec{E}_- \cdot \vec{n} ds = 0,$$

pois a carga total contida no cilindro será nula. Assim:

$$E_{+n} = E_{-n}, \quad (4-26)$$

e portanto a componente normal do campo, através de uma dupla camada, é contínua.

Num ponto P_1 , interior à dupla camada, o campo será, antes da passagem ao limite ($d \rightarrow 0$):

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{n}) + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}.$$

A descontinuidade do potencial através da dupla camada será então dada por:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_{P_+}^{P_-} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \left[-\frac{\sigma l}{\epsilon_0} \right]_d = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}, \text{ isto é:}$$

$$\Delta V = \frac{m}{\epsilon_0}. \quad (4-27)$$

A componente tangencial do campo na face negativa será:

$$E_{-t} = -\frac{\partial V}{\partial t},$$

onde $d\vec{t}$ é um vetor tangente à superfície, e na face positiva:

$$E_{+t} = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial t} \frac{1}{\epsilon_0} \right),$$

como se conclui de (4-27). Então, se a dupla camada é uniforme, $\frac{\partial m}{\partial t} = 0$, e a componente tangencial do campo será também contínua.

Vemos assim de (4-26) que, através de uma dupla camada, a componente normal do campo é contínua, e o potencial sofre uma descontinuidade dada por (4-27), ao contrário do que se passa com uma camada simples, através da qual o potencial é contínuo, e a componente normal do campo sofre uma descontinuidade dada por (3-6), fatos estes ilustrados na Fig. 4-14.

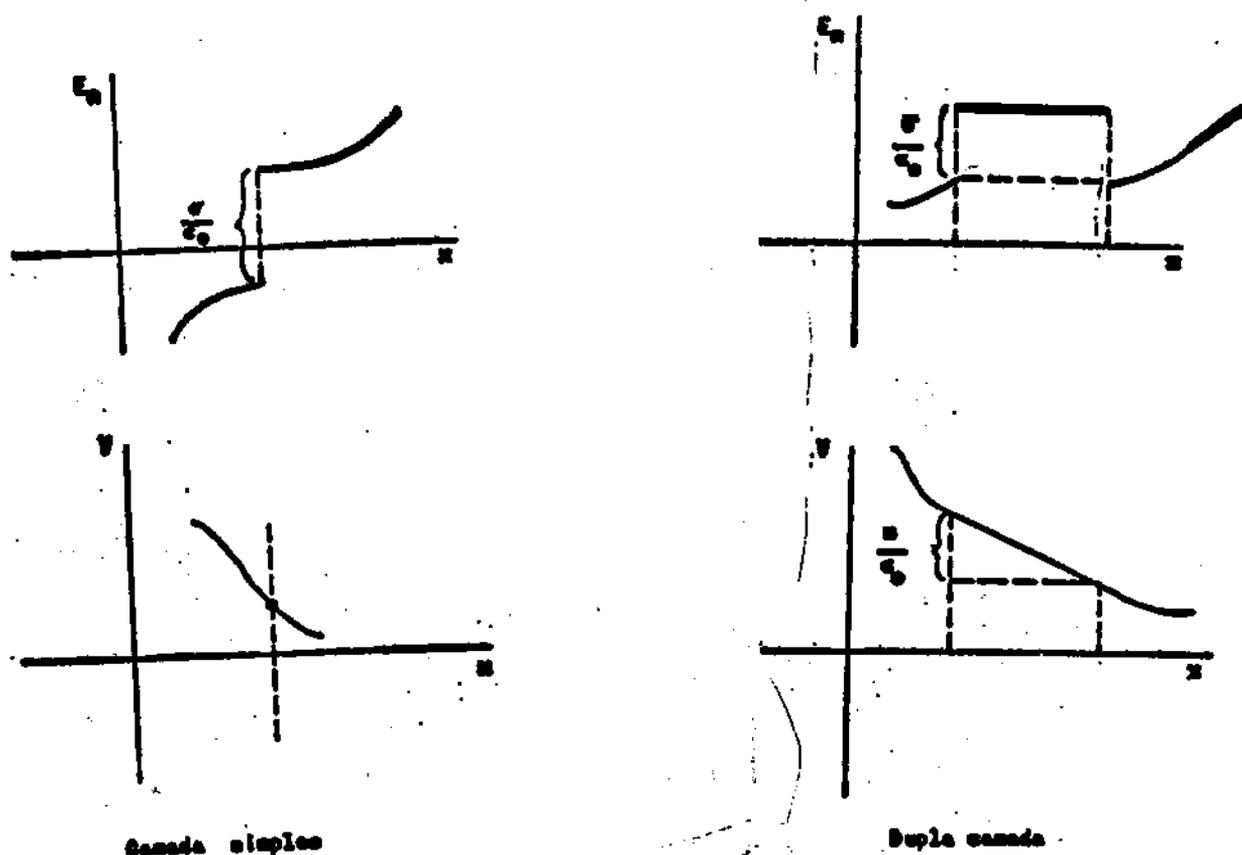


Fig. 4-14

4 - 8. Potencial de um fio retilíneo infinito, com densidade linear de cargas λ constante. Tomemos para origem do referencial o pé da perpendicular baixada do ponto P, em que se quer calcular o potencial, ao fio. Como neste caso as cargas não estão limitadas a uma região finita do espaço, não podemos tomar como nulo o potencial no infinito. Vamos então usar (4-12), e calcular a diferença de poten-

cial entre o ponto P e um ponto P_0 qualquer (Fig. 4-15). Temos

$$V - V_0 = \int_{r_0}^r \frac{\lambda dl'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \int_{r_0}^r \frac{\lambda dl'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_0 - \vec{r}'|}$$

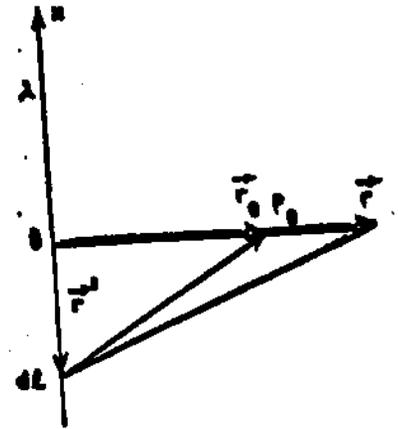


Fig. 4-15

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r^2}} - \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r_0^2}} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\log \left(x + \sqrt{x^2 + r^2} \right) - \log \left(x + \sqrt{x^2 + r_0^2} \right) \right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(x + \sqrt{x^2 + r^2} \right) - \log r - \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(x + \sqrt{x^2 + r_0^2} \right) + \log r_0 \right].$$

Portanto:

$$V - V_0 = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\log r - \log r_0), \text{ ou:}$$

$$V - V_0 = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r}{r_0}, \quad (4-28)$$

isto é, obtivemos um resultado da forma (4-14). Se escolhermos o ponto P_0 de modo a tornar $f(r_0) = \log r_0 = 0$, isto é, se escolhermos $r_0 = 1\text{m}$, então podemos tomar

$$V = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r \quad (4-29)$$

como o valor do potencial no ponto P em relação a um ponto P_0 , cuja distância ao fio é unitária.

Para o cálculo do campo elétrico, podemos utilizar independentemente (4-28) ou (4-29), pois o campo é calculado a partir do potencial por derivação, e a derivada de uma constante é nula. Aplicando (4-18) virá:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} (\log r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\vec{r}}{r},$$

que coincide com (2-15).

4 - 9. Potencial de uma espira circular, num ponto do eixo. Da Fig. 2-20 vemos que:

$$V = \int_{\text{espira}} \frac{\lambda dl'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta,$$

isto é:

$$V = \frac{\lambda R}{2 \epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}, \quad (4-30)$$

sendo $q = 2 \pi R \lambda$ a carga total da espira, e tem-se para o campo:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\lambda R}{2 \epsilon_0} \frac{d}{dz} (R^2 + z^2)^{-1/2} \vec{k}, \text{ ou:}$$

$$E = \frac{\lambda R z}{2 \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{q z}{4 \pi \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

que coincide com (2-19).

4 - 10. Potencial de um disco circular, num ponto do eixo. Tomando como elemento de integração uma espira circular de raio r e largura dr (Fig. 2-21), vemos de (4-11) e (4-30) que o potencial no ponto P será dado por:

$$V = \int_0^R \frac{\sigma dr r}{2 \epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R$$

isto é:

$$V = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right).$$

(4-31)

por (4-18) tem-se imediatamente a expressão do campo (2-20).

4 - 11. Potencial de uma distribuição plana infinita de cargas. Tomemos como elemento de integração uma espira circular elementar, centrada no pé da perpendicular baixada do ponto ao plano (Fig. 4-16). Como não podemos tomar como nulo o potencial no infinito, calcularemos a diferença de potencial entre o ponto P e um ponto P_0 qualquer. De (4-11) e (4-30) vem:

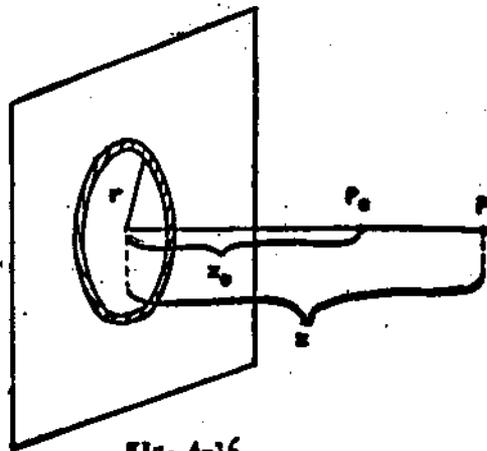


Fig. 4-16

$$\begin{aligned}
 V - V_0 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} = \\
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} - \sqrt{r^2 + z_0^2} \right]_0^{\infty} = \\
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r^2 + z^2} - |z| - \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r^2 + z_0^2} + |z_0| \right],
 \end{aligned}$$

isto é:

$$V - V_0 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (|z| - |z_0|),$$

resultado que é da forma (4-14). Se escolhermos o ponto P_0 dado por $z_0 = 0$, então podemos tornar V_0 igual a zero, e teremos:

$$V = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| \quad (4-32)$$

como o valor do potencial no ponto P , em relação ao plano da distribuição.

O campo virá imediatamente, usando (4-18):

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} |z| \vec{k}, \text{ isto é:}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|},$$

que coincide com (2-18).

4 - 12. Potencial de uma distribuição superficial esférica de cargas. Integrando sobre espiras elementares (Fig. 2-22), (4-30) nos dará, para ponto externo:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{esfera}} \frac{dq}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$

onde $dq = 2\pi R \sigma dx$ é a carga da espira. Então:

$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{y^2 + z^2}} = - \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{r+R}^{r-R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - r^2 + 2rx}} =$$

$$= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[\frac{\sqrt{R^2 - r^2 + 2rx}}{r} \right]_{r-R}^{r+R}, \text{ logo!}$$

$$V = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r \geq R \quad (4-33)$$

sendo $q = 4\pi R^2 \sigma$ a carga da superfície esférica. Isto é, o potencial de uma distribuição superficial esférica, para pontos externos, é o mesmo que se toda a carga estivesse localizada no seu centro. O valor do potencial sobre a superfície será:

$$V_s = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad r = R. \quad (4-34)$$

O potencial num ponto interno será dado pela soma das contribuições das espiras situadas à esquerda e à direita de P (Fig. 2-25):

$$V = V_1 + V_2, \quad r < R,$$

onde V_1 é dado por (Fig. 2-26):

$$V_1 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_0^{R+r} \frac{dz}{\sqrt{R^2 - r^2 + 2rz}} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{R+r}{r} - \frac{R^2 - r^2}{r^2} \right)$$

• V_2 é dado por (Fig. 2-27):

$$V_2 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_0^{R-r} \frac{dz}{\sqrt{R^2 - r^2 - 2rz}} = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{R-r}{r} - \frac{R^2 - r^2}{r} \right)$$

Logo:

$$V = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad r < R, \quad (4-35)$$

isto é, o potencial interno é constante e igual ao potencial na superfície, (4-34).

4 - 13. Potencial de uma distribuição esférica volumétrica.

1º Processo. Integremos sôbre camadas esféricas, utilizando os resultados (4-33) e (4-35) do parágrafo 4-12. Para um ponto P externo teremos (Fig. 2-23):

$$V = \int_0^R \frac{4\pi l^2 \rho dl}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{4/3\pi R^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r},$$

isto é, o potencial externo é o mesmo que se toda a carga estivesse concentrada no centro da esfera:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r > R,$$

(4-36)

onde $q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ é a carga total da esfera.

Para um ponto interno, a uma distância r do centro da esfera, as camadas interiores a P contribuirão para o potencial com termos do tipo

$$dV_1 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r},$$

como se conclui de (4-33), ao passo que as camadas exteriores a P contribuirão com termos do tipo

$$dV_2 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 l},$$

como se conclui de (4-35). Então o valor do potencial em P será:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0 r} \int_0^r l^2 dl + \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_r^R \frac{l^2 dl}{l}, \text{ isto é:}$$

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right), \quad r \leq R. \quad (4-37)$$

Verifica-se facilmente que (4-36) e (4-37) fornecem o mesmo resultado para $r = R$ (potencial na superfície).

O cálculo do campo interno é feito, a partir de (4-37), utilizando (4-18):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{\rho}{6\epsilon_0} \vec{\nabla} (r^2) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} \frac{d}{dr} (r^2) \frac{\vec{r}}{r},$$

isto é:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

que coincide com (2-24).

2º Processo. Integremos sobre discos circulares, utilizando (4-31).

Para um ponto P externo tem-se (tomando z por |z|):

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-R}^R \left(\sqrt{z^2 + y^2} - z \right) dz,$$

onde $x = r - z$ (Fig. 2-24). Tomando z como variável de integração e modificando adequadamente os limites de integração, vem:

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{r+R}^{r-R} z dz - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{r+R}^{r-R} \left(R^2 - r^2 + 2rz \right)^{\frac{1}{2}} dz =$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{(R^2 - r^2 + 2rz)^{3/2}}{3r} \right]_{r+R}^{r-R} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}, \text{ isto é:}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

$r \geq R,$

que coincide com (4-36).

Para um ponto P interno, devemos somar a contribuição V_1 , das camadas à esquerda de P, com a V_2 , das camadas à direita de P. Da Fig. 2-26 vemos que, para a 1ª região, $dx = -dz$, $z = r - x$ e $y^2 = R^2 - (r - z)^2$; da Fig. 2-27 vemos que, para a 2ª região, $dx = dz$, $z = x - r$ e $y^2 = R^2 - (r + z)^2$. Temos então para o potencial, usando z como variável de integração, e modificando adequadamente os limites:

$$\begin{aligned}
 V = V_1 + V_2 &= \left[\frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{r+R}^0 z dz - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{r+R}^0 dz \sqrt{R^2 - r^2 + 2rz} \right] + \\
 &+ \left[\frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{R-r} dz \sqrt{R^2 - r^2 - 2rz} - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{R-r} z dz \right] = \\
 &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{(R^2 - r^2 + 2rz)^{3/2}}{3r} \right]_{r+R}^0 - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\frac{z^2}{2} + \frac{(R^2 - r^2 - 2rz)^{3/2}}{3r} \right]_0^{R-r}.
 \end{aligned}$$

Calculando, vem:

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad r < R,$$

que coincide com (4-37).

3º Processo. Vamos agora calcular o potencial da distribuição esférica utilizando (4-3), isto é, calculando o trabalho do campo. Para

um ponto P_o externo teremos (Fig. 4-17), em virtude de (2-23):

$$\begin{aligned}
 V_o &= \int_{P_o}^{\infty} \vec{E}_o \cdot d\vec{l} = \\
 &= - \int_{\infty}^{r_o} \frac{q}{4\pi\epsilon_o r^2} dr = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_o r_o}
 \end{aligned}$$

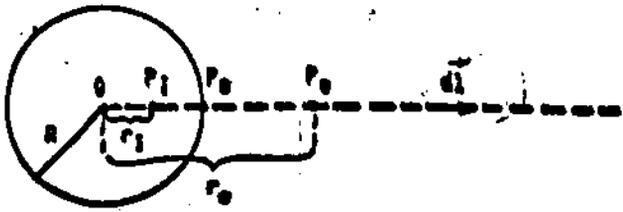


Fig. 4-17

que coincide com (4-36). Para um ponto P_i interno teremos, em virtude de (2-23) e (2-24):

$$\begin{aligned}
 V_i &= \int_{P_i}^{P_s} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} + \int_{P_s}^{\infty} \vec{E}_o \cdot d\vec{l} = \int_r^R \frac{\rho r dr}{3\epsilon_o} - \int_{\infty}^{r_i} \frac{q}{4\pi\epsilon_o r} dr = \\
 &= \frac{\rho}{2\epsilon_o} \left(R^2 - \frac{r_i^2}{3} \right),
 \end{aligned}$$

que coincide com (4-37).

Problemas Propostos:

- 4 - 1. Admitindo, no problema 3-4, que o campo varie linearmente com a altitude, determinar o potencial elétrico a 1000 m, em relação ao "terra". (R.M.).
- 4 - 2. No espaço entre dois planos paralelos S_1 e S_2 , distando entre si de D , há uma distribuição de cargas dada por $\rho = \rho_0 + ax$, sendo ρ_0 e a constantes, e x a distância a um dos planos (S_1); no espaço fora da região assim definida ρ é nulo. Calcular, por integração direta, o potencial em todo o espaço, tomando como nulo o potencial da superfície S_1 . Determinar o campo elétrico em todo o espaço.
- 4 - 3. Partindo do potencial de uma distribuição superficial de cargas sobre uma esfera; determinar o potencial, em todo o espaço, produzido por uma distribuição espacial de cargas com simetria esférica de densidade ρ , dada por:
- $$\rho = \frac{k}{r}, \quad \text{para } r < R$$
- $$\rho = 0, \quad \text{para } r > R. \quad (\text{R.M.})$$
- 4 - 4. Um campo elétrico tem a direção do eixo dos z numa região R em que não há cargas elétricas. a) Examine a dependência em x e y do potencial e do campo elétrico; b) empregando o teorema de Gauss para cilindros retos de eixos segundo z , de-

termine a dependência em z do campo elétrico e do potencial.

- 4 - 5. Para uma certa distribuição esférica de cargas, o potencial é dado por $V = -\frac{q_0 e^{-ar}}{4\pi\epsilon_0 r}$, onde q e a são constantes. Achar a distribuição de cargas que produza este potencial, determinando $Q(r)$. Verificar se uma carga puntiforme na origem é também necessária para produzir este potencial. A distribuição de cargas resultante representa grosseiramente a distribuição de cargas no interior do átomo. (S.F.).
- 4 - 6. Como será visto no parágrafo 6-1, o potencial não pode ter máximo nem mínimo em uma região do espaço em que não haja cargas. Provar, então, que uma carga puntiforme não pode estar em equilíbrio estável sob a ação de forças eletrostáticas, em uma região do espaço em que não haja cargas. (S.F.).
- 4 - 7. Calcule o potencial, em todo o espaço, devido a uma distribuição de cargas superficial cilíndrica infinita, com densidade σ constante.
- 4 - 8. Calcule o potencial, em todo o espaço, devido a uma distribuição de cargas volumétrica cilíndrica infinita, com densidade ρ constante.
- 4 - 9. Resolva os problemas 4-7 e 4-8 pelo cálculo do trabalho do campo, usando (4-3).

- 4 - 10. Ainda usando (4-3), calcule o potencial, em todo o espaço, devido às seguintes distribuições de carga:
- a) fio retilíneo infinito.
 - b) plano infinito.
 - c) espira circular.
 - d) disco circular.
 - e) superfície esférica,
- 4 - 11. Um condutor tem uma cavidade no seu interior. Se uma carga puntiforme q é introduzida na cavidade, mostre que a carga $-q$ é induzida sobre a superfície da cavidade. (R.M.).

CAPÍTULO 5

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DA ELETROSTÁTICA

Até aqui tratamos campo e potencial elétricos por métodos integrais: conhecida a distribuição de cargas, somamos as contribuições de todos os elementos dessa distribuição, para obter o campo total e o potencial total produzidos num ponto qualquer do espaço. Uma vez conhecidos campo e potencial, poderemos saber como variam de um ponto a outro. Entretanto, o conhecimento dessa variação pode ser alcançado, mesmo quando não se conhece a distribuição de cargas em to-dos os pontos do espaço, mas apenas na região em que essa variação é estudada. Este fato está ligado a propriedades locais do campo elétrico e do potencial, que são expressas por equações diferenciais. Tais equações devem, aliás, surgir como consequências das leis já conhecidas, e conduzir a resultados que coincidam com os resultados já obtidos.

5 - 1. 1ª equação diferencial. É satisfeita pelo campo elétrico e expressa por:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

(5-1)

onde $\rho = \frac{dq}{dv}$ é o valor da densidade espacial de cargas no ponto em que se estuda a variação do campo, e div ("divergência") um operador diferencial que será conceituado adiante. É claro que esta equação só tem sentido em regiões onde se possa definir uma densidade volumétrica de cargas; se a distribuição for superficial, ou linear, ou puntiforme, devemos substituí-la, respectivamente, por uma camada de espessura infinitesimal δl (tomando $\sigma = \rho \delta l$), ou por um cilindro de seção infinitesimal δs (tomando $\lambda = \rho \delta s$), ou por uma pequena esfera de volume δv (tomando $q = \rho \delta v$).

O operador diferencial divergência, presente em (5-1), aplica-se apenas a campos vetoriais, e define-se por:

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{i} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}, \quad (5-2)$$

onde $\vec{\nabla}$ é o operador nabla já conhecido, de (2-11). Chamando F_x , F_y e F_z às componentes de \vec{F} e desenvolvendo (5-2), vem:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Assim (5-1), em coordenadas cartesianas, se exprime:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

onde, em geral, os três termos do 1º membro são diferentes de zero, pois as três componentes de \vec{E} são, em geral, funções de x , y e z .

Vamos mostrar que a equação diferencial (5-1) poder ser obtida a partir do teorema de Gauss. Para isso usaremos o teorema

de Green, que relaciona uma integral de volume, numa certa região, com integrais de superfície, nessa mesma região.

Seja um campo vetorial \vec{F} qualquer, definido no interior de um certo volume v . A expressão matemática do teorema de Green é (Apêndice 5-1) dada por (5-35):

$$\int_v \text{div } \vec{F} \, dv = \int_s \vec{F} \cdot \vec{ds},$$

onde o 1º membro é uma integral de volume sobre v , e o 2º membro representa o fluxo do vetor \vec{F} , que sai da superfície fechada s que limita o volume v . (Fig. 5-1). Se num volume v é definido um campo elétrico \vec{E} , então, pelo teorema de Gauss (3-5), temos:

$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho \, dv.$$



Fig. 5-1

Como uma integral se refere à superfície s e a outra ao volume v que ela limita, não podemos comparar seus integrandos, a menos que apliquemos à 1ª delas o teorema de Green, expresso por (5-35); neste caso, teremos:

$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_v \text{div } \vec{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho \, dv,$$

válida qualquer que seja v . Se duas integrais de duas funções são 1

iguais, qualquer que seja o domínio de integração a que ambas se estendem, então as duas funções são necessariamente iguais, o que, aplicado às igualdades acima, demonstra (5-1).

A equação (5-1) é, portanto, a expressão diferencial do teorema de Gauss.

5 - 2. 2ª equação diferencial. É satisfeita pelo campo elétrico e expressa por:

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = 0.} \quad (5-4)$$

O operador diferencial "rotacional", presente em (5-4), aplica-se apenas a campos vetoriais, e define-se por:

$$\vec{G} = \text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (5-5)$$

Mostra-se que: se F_x , F_y e F_z são as componentes, num sistema cartesiano, de um vetor \vec{F} , então G_x , G_y e G_z , dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \\ G_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \\ G_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{array} \right. \quad (5-6)$$

são também as componentes de um vetor (o vetor é caracterizado pelo fato de que suas componentes num dado sistema podem ser obtidas a partir de suas componentes em outro sistema por uma transformação linear apropriada).

A equação (5-4) é uma decorrência imediata do fato de que se tem sempre:

$$\text{rot grad } u = 0, \quad (5-7)$$

qualquer que seja a função escalar u . De fato, simbolicamente tem-se:

$$\text{rot grad } u = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} u).$$

Como $\vec{\nabla}$ é um operador diferencial,

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} u) = (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}) u;$$

ora, o produto vetorial de um vetor por si mesmo é nulo, se suas componentes comutam; de fato:

$$(\vec{A} \wedge \vec{A})_k = A_1 A_j - A_j A_1;$$

se $A_1 A_j = A_j A_1$, então $\vec{A} \wedge \vec{A} = 0$. No caso do operador $\vec{\nabla}$, suas componentes são operações de derivação com relação a x , y e z , e, para a classe de funções consideradas na Física, a ordem em que se processam as derivações é irrelevante, valendo portanto (5-7).

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ (4-18) Como o campo elétrico deriva de um potencial escalar na forma (4-18), então o campo elétrico é irrotacional. A equação (5-4) exprime, pois, o fato de que o campo eletrostático deriva de um potencial.

5 - 3. Sentido físico dos operadores divergência e rotacional. Vamos estabelecer uma analogia entre a Eletrostática e a Dinâmica dos Fluidos, supondo, em primeiro lugar, uma certa massa de água no interior da qual existe uma fonte ou um ladrão, por onde brota ou escoa continuamente água. Diz-se que no interior da massa líquida está "divergindo" água. Neste caso tem-se um campo de velocidades \vec{v} , e a quantidade de água que atravessa, por unidade de tempo, a superfície ds , supondo a densidade da água igual a 1, será (Fig. 5-2):

$$d\phi = \vec{v} \cdot \vec{ds}.$$

Consideremos o caso em

que a fonte (ou sorvedouro) seja muito pequena (puntiforme): o campo de velocidades será então radial e com simetria esférica (Fig. 5-3). Sendo ϕ o fluxo, por unidade de tempo, que sai (ou entra) de uma superfície esférica de raio r , teremos:

$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot \vec{ds} = v(\vec{r}) \cdot 4\pi r^2, \text{ donde:}$$

$$v(\vec{r}) = \frac{\phi}{4\pi r^2}, \text{ isto é:}$$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\phi}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^2}.$$

Neste caso se obtém, para $r > 0$:

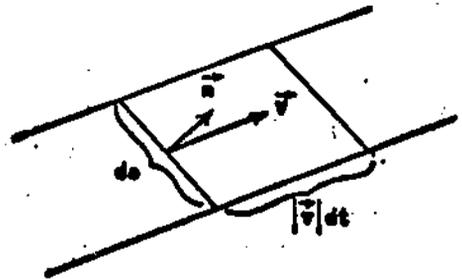


Fig. 5-2



Fig. 5-3

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\phi}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \right] = 0,$$

o que significa que não há fonte (ou sorvedouro) para $r > 0$. Para $r = 0$, $\operatorname{div} \vec{v}$ não é definida.

Consideremos agora o caso em que, numa região esférica de raio R , haja uma distribuição uniforme de fontes idênticas, de modo que o fluxo que sai de uma esfera de raio $r < R$ é proporcional ao volume:

$$\phi = \int \vec{v} \cdot d\vec{s} = K \cdot \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ donde:}$$

$$\vec{v}(\vec{r}) \cdot 4\pi r^2 = K \cdot \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ isto é:}$$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{K}{3} \vec{r}, \quad r < R.$$

Para $r > R$, como não há fontes fora da região de raio R , tem-se

$$\phi = \int \vec{v} \cdot d\vec{s} = K \cdot \frac{4}{3} \pi R^3, \text{ donde:}$$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{KR^3}{3} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r > R.$$

Aqui, como antes, tem-se ainda:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad r > R;$$

porém para $r < R$ tem-se:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{K}{3} \operatorname{div} \vec{r}, \text{ como:}$$

$$\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3, \quad (5-8)$$

segue-se que:

$$\operatorname{div} \vec{v} = K \neq 0.$$

Isto é, a divergência de \vec{v} é igual ao fator K , que representa o fluxo, por unidade de tempo, emitido pela unidade de volume da região em que estão distribuídas as fontes.

Então o fluxo através de uma superfície fechada só será nulo, se dentro da superfície não houver fontes nem sorvedouros; caso haja fontes, dizemos que $\operatorname{div} \vec{v} > 0$; caso haja sorvedouros, que $\operatorname{div} \vec{v} < 0$. O mesmo se dá com $\operatorname{div} \vec{E}$ em regiões em que haja cargas positivas (fontes), ou negativas (sorvedouros).

Suponhamos, agora, uma certa quantidade de água girando num recipiente, com velocidade angular $\vec{\omega}$. Neste caso, a velocidade da água em um certo ponto será Fig. 5-4):

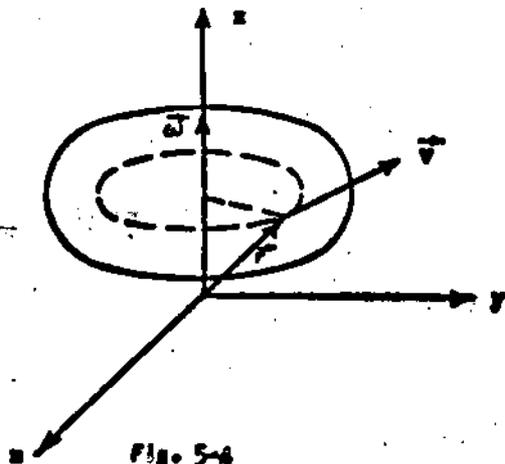


Fig. 5-4

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}.$$

Então, de (5-47), apêndice 5-III, vem:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \vec{\omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r}.$$

Ora, de (5-8):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \operatorname{div} \vec{r} = 3,$$

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \omega \frac{\partial}{\partial z} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \omega \vec{k} = \vec{\omega};$$

ainda:

portanto:

$$\text{rot } \vec{v} = 3 \vec{v} - \vec{v} = 2 \vec{v} \neq 0.$$

Verificamos assim que o campo das velocidades, neste caso, tem rotacional não nulo. É este o caso do campo magnético, para o qual (como veremos no capítulo 12),

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

onde μ_0 é uma constante e \vec{J} a densidade de corrente elétrica. Por outro lado:

$$\text{div } \vec{B} = 0,$$

isto é, o campo magnético é do tipo "líquido girando", e não apresenta fontes ou sorvedouros; ao passo que o campo elétrico é do tipo "líquido fluindo", e pode apresentar fontes ou sorvedouros. Ou por outra, existem cargas elétricas, mas não existem "cargas" magnéticas.

5 - 4: Condições ao contorno. Na resolução dos problemas eletrostáticos pela integração de equações diferenciais dos tipos (5-1) e (5-4), ou de equações diferenciais da 2ª ordem (equações de Laplace e Poisson, que serão estudadas no parágrafo 5-6), surgem constantes de integração que poderão ser determinadas por certas condições, chamadas "condições ao contorno", a que devem satisfazer as soluções encontradas. Essas condições dependerão em parte dos dados particulares de cada problema; mas têm validade geral as seguintes condições: 1ª) no infinito, o campo é nulo e o potencial tem valor constante (que em geral fazemos igual a zero), se a distribuição de cargas se limita a u-

na região finita do espaço; 2^a) potencial e campo são finitos em pontos onde não se situam cargas puntiformes; 3^a) potencial e campo são finitos ao longo de linhas sobre as quais $\lambda = 0$; 4^a) o potencial é sempre contínuo através de superfícies carregadas ou não; 5^a) o campo elétrico é contínuo através de superfícies sobre as quais $\sigma = 0$; 6^a) a componente tangencial do campo elétrico é sempre contínua, de acordo com (4-20); 7^a) a componente normal do campo é contínua através de superfícies sobre as quais $\sigma = 0$; quando $\sigma \neq 0$, o campo sofre na descontinuidade igual a $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, de acordo com (3-6).

Vejamos agora uma aplicação das equações diferenciais (5-1) e (5-4).

5 - 5. Campo de uma camada plana. Seja uma região limitada por 2 planos infinitos, sendo $\rho = 0$ fora, e $\rho = \rho_0 = \text{cte}$ dentro da região. Calculemos o campo elétrico em todo o espaço. Vemos, por simetria, que o campo é perpendicular à distribuição, isto é, paralelo ao eixo dos z (Fig. 5-5); como, além disso, o sistema apresenta simetria de translação, o campo deve ser função apenas de z . Seja l a distância entre os planos. Calculemos:

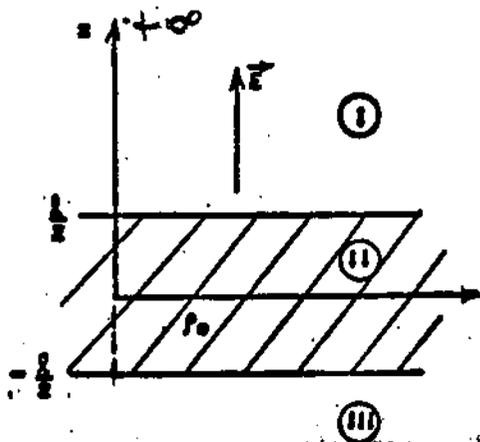


Fig. 5-5

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{k} E = \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{dE}{dz}$$

De (5-1) virá então, nas regiões I, II e III:

$$\frac{dE_1}{dz} = 0, \quad \frac{dE_2}{dz} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}, \quad \frac{dE_3}{dz} = 0. \quad (5-9)$$

A equação (5-4) está satisfeita automaticamente:

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{k} E) = -\vec{k} \wedge \vec{\nabla} E = 0,$$

pois na expressão (5-6) do rotacional só interferem derivadas de componentes relativas a eixos de nomes diferentes, e $E = E_z$ só depende de z :

$$\vec{\nabla} E = \vec{k} \frac{dE}{dz}.$$

A integração de (5-9) dará:

$$E_1 = A_1, \quad E_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z + A_2, \quad E_3 = A_3, \quad (5-10)$$

onde A_1, A_2, A_3 são constantes de integração. Para determiná-las, devemos considerar as condições de continuidade do campo nos planos de descontinuidade da distribuição (condições ao contôrno), que são duas, e mais a condição no infinito: 3 equações para a determinação de 3 constantes.

Condições ao contôrno:

1^a) O campo é contínuo através do plano $z = -\frac{l}{2}$ (não há cargas superficiais sobre este plano). Então de (5-10) vem:

$$E_3 \left(-\frac{l}{2} \right) = A_3 = E_2 \left(-\frac{l}{2} \right) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(-\frac{l}{2} \right) + A_2, \text{ donde:}$$

$$A_3 = -\frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0} + A_2. \quad (5-11)$$

2ª) O campo é contínuo através do plano $z = +\frac{l}{2}$ (não há cargas superficiais sobre este plano). Então de (5-10) vem:

$$E_1 \left(+\frac{l}{2} \right) = A_1 = E_2 \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{l}{2} \right) + A_2, \text{ donde:}$$

$$A_1 = \frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0} + A_2. \quad (5-12)$$

3ª) Condição no infinito: para pontos infinitamente afastados da distribuição ($z \rightarrow \pm \infty$), o potencial deve ter o mesmo valor em ambos os lados, e o campo deve ser simétrico, isto é:

$$V_{+\infty} = V_{-\infty}, \quad E_{+\infty} = -E_{-\infty}. \quad (5-13)$$

De fato, sendo a distribuição de cargas simétrica, a simetria do campo é óbvia; mas mesmo que a distribuição não fôsse simétrica, funcionaria como um plano para pontos suficientemente afastados (espessura l desprezível em face das distâncias aos pontos).

De (5-13) vem imediatamente:

$$A_1 = -A_2.$$

De (5-11) e (5-12) virão ainda:

$$A_2 = 0, \quad A_1 = \frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0},$$

e teremos finalmente para o campo:

$$E_1 = \frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z, \quad E_3 = -\frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0}.$$

5 - 6. Equações de Poisson e Laplace. Frequentemente se torna mais conveniente calcular o potencial em lugar do campo. Será, para isso, necessário substituir o sistema de equações diferenciais de 1ª ordem (5-1) e (5-4) por uma equação de 2ª ordem, satisfeita pelo potencial eletrostático.

Para transformar um sistema de equações de 1ª ordem num sistema de equações de 2ª ordem, toma-se a classe mais geral de soluções de uma das equações, e substitui-se nas outras equações. No mesmo caso, a classe mais geral de soluções de (5-1) é dada por:

$$\vec{E} = - \text{grad } V;$$

substituindo em (5-4), virá:

$$\text{div } \vec{E} = - \text{div grad } V = - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = - \Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

onde o operador $\Delta = \vec{\nabla}^2$ (chamado "laplaciano") significa:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

(5-15)

Assim as equações (5-1) e (5-4) ficam substituídas por uma única:

$$\Delta V = - \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

(5-16)

onde ρ é o valor da densidade espacial de cargas no ponto em que se estuda a variação do potencial. A equação (5-16) é chamada equação de Poisson.

Numa região em que não há cargas, $\rho = 0$, e (5-16) se es-

creve:

$$\Delta v = 0,$$

(5-17)

que é a equação de Laplace. As soluções da equação de Laplace chamam-se funções harmônicas. A função $\frac{1}{r}$, por exemplo, é uma função harmônica, pois:

$$\frac{1}{r} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) =$$

$$= - \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$= - \frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} =$$

$$= - \frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Vejamos agora algumas aplicações das equações de Poisson e Laplace para o cálculo do potencial e do campo eletrostáticos.

6 - 7. Campo de uma camada plana.

Trata-se do mesmo problema re-

solvido no parágrafo 5-5, agora por outro método.

O potencial satisfaz à equação (5-17) nas regiões (I) e (III), e à equação (5-16) na região (II). Tem-se então:

$$\frac{d^2 v_1}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 v_2}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}, \quad \frac{d^2 v_3}{dz^2} = 0. \quad (5-18)$$

Estas equações integradas uma vez dão:

$$\frac{dv_1}{dz} = A_1, \quad \frac{dv_2}{dz} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} z + A_2, \quad \frac{dv_3}{dz} = A_3, \quad (5-19)$$

equações que, a menos do sinal, dão as componentes do campo elétrico, e que integradas novamente dão:

$$v_1 = A_1 z + B_1, \quad v_2 = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} z^2 + A_2 z + B_2, \quad v_3 = A_3 z + B_3. \quad (5-20)$$

Sendo (5-18) equações de segunda ordem, as condições ao contorno referem-se não só às próprias soluções dadas por (5-20), como ainda às suas derivadas 1^{as}, dadas por (5-19). Temos assim 4 condições ao contorno (duas para cada plano) e uma condição no infinito, para 6 constantes a determinar. A arbitrariedade sobre uma das constantes poderá ser suprimida pela escolha de uma particular origem dos potenciais.

Condição no infinito: devemos ter ainda aqui:

$$V_{\infty} = V_{-\infty}, \quad E_{\infty} = -E_{-\infty},$$

o que dá $A_1 = -A_3 = A$.

Origem dos potenciais: tomando $V_2(0) = 0$, tem-se imediatamente $B_2 = 0$.

Com as substituições devidas, as condições ao contorno for-
necerão:

$$1^{\text{a}}) \left. \frac{dV_2}{ds} \right|_{-\frac{l}{2}} = \left. \frac{dV_3}{ds} \right|_{-\frac{l}{2}} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0} + A_2 = -A_1 \end{array} \right. \quad (5-21)$$

$$2^{\text{a}}) \left. \frac{dV_1}{ds} \right|_{\frac{l}{2}} = \left. \frac{dV_2}{ds} \right|_{\frac{l}{2}} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0} + A_2 \end{array} \right. \quad (5-22)$$

De (5-21) e (5-22) tem-se imediatamente: $A_2 = 0$ e $A = -\frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0}$.

$$3^{\text{a}}) V_2\left(-\frac{l}{2}\right) = V_3\left(-\frac{l}{2}\right) \longrightarrow \frac{A}{2} \frac{l^2}{4} = \frac{A l}{2} + B_3,$$

$$\text{logo: } B_3 = \frac{\rho_0 l^2}{8\epsilon_0}.$$

$$4^{\text{a}}) V_1\left(\frac{l}{2}\right) = V_2\left(\frac{l}{2}\right) \longrightarrow \frac{A l}{2} + B_1 = \frac{A}{2} \frac{l^2}{4},$$

$$\text{logo: } B_1 = B_3.$$

Virá assim para o potencial:

$$V_1 = -\frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0} x + \frac{\rho_0 l^2}{8\epsilon_0}, \quad V_2 = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} x^2, \quad V_3 = \frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0} x + \frac{\rho_0 l^2}{8\epsilon_0},$$

e para o campo:

$$E_1 = \frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x, \quad E_3 = -\frac{\rho_0 l}{2\epsilon_0},$$

expressões que coincidem com (5-14).

5 - 8. Potencial de uma distribuição esférica volumétrica de cargas, com densidade ρ constante. Como o problema tem simetria esférica, devemos usar o laplaciano na forma (5-55) do Apêndice 5-III, e as equações do problema serão então:

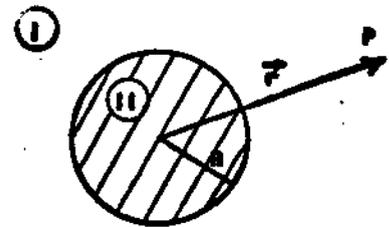


Fig. 5-6

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_1}{dr} \right) = 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_2}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \end{cases} \quad (5-23)$$

A 1ª das equações (5-23) dá:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_1}{dr} \right) = 0 \longrightarrow r^2 \frac{dV_1}{dr} = A_1,$$

$$\frac{dV_1}{dr} = \frac{A_1}{r^2}, \quad (5-24)$$

$$V_1 = -\frac{A_1}{r} + B_1. \quad (5-25)$$

a 2ª das equações (5-23) dá:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_2}{dr} \right) = - \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \longrightarrow r^2 \frac{dV_2}{dr} = - \frac{\rho r^3}{3 \epsilon_0} + A_2,$$

$$\frac{dV_2}{dr} = - \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} + \frac{A_2}{r^2}, \quad (5-26)$$

$$V_2 = - \frac{\rho r^2}{6 \epsilon_0} - \frac{A_2}{r} + B_2. \quad (5-27)$$

Para determinar as 4 constantes, dispomos de duas condições ao contorno sobre a superfície da esfera (Fig. 5-6), uma para o potencial, outra para a derivada 1ª (que, a menos do sinal, dá o campo elétrico), uma condição no infinito (que pode aqui ser tomado como origem dos potenciais), e uma condição na origem: como não há carga puntiforme na origem, o potencial (e o campo) deve aí ser finito.

Condição na origem:

$$V_2(0) = \text{finito} \longrightarrow A_2 = 0.$$

Condição no infinito:

$$V_1(\infty) = 0 \longrightarrow B_1 = 0.$$

Condições ao contornos:

$$1^{\text{a}}) \left. \frac{dV_1}{dr} \right|_R = \left. \frac{dV_2}{dr} \right|_R \longrightarrow \frac{A_1}{R^2} = - \frac{\rho R}{3 \epsilon_0} \therefore A_1 = - \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0},$$

$$2^{\text{a}}) \cdot V_1(R) = V_2(R) \longrightarrow -\frac{A_1}{R} = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + B_2,$$

$$\text{logo: } B_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}.$$

Substituindo os valores de A_1 , A_2 , B_1 e B_2 nas expressões (5-26) e (5-27), obtemos as fórmulas (4-36) e (4-37) já conhecidas.

5 - 9. Potencial de uma camada cilíndrica, sendo ρ uma função linear de r . Sejam a e b os raios interno e externo da camada cilíndrica, e seja ρ definido por (Fig. 5-7):

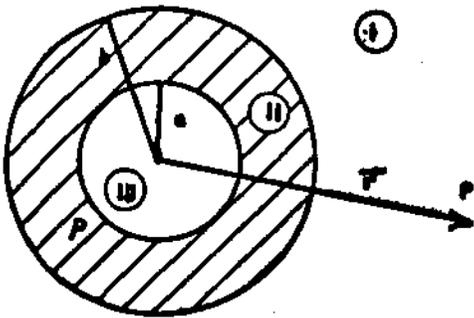


Fig. 5-7

$$\begin{cases} \rho = 0, & r < a \quad \text{e} \quad r > b, \\ \rho = k r, & a < r < b. \end{cases}$$

Como o problema tem simetria cilíndrica, devemos usar o laplaciano na forma (5-58) do Apêndice 5-III, e as equações do problema serão então

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_1}{dr} \right) = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_2}{dr} \right) = -\frac{kr}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_3}{dr} \right) = 0 \end{cases} \quad (5-28)$$

A 1ª das equações (5-28) dá:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_1}{dr} \right) = 0 \longrightarrow r \frac{dV_1}{dr} = A_1,$$

$$\frac{dV_1}{dr} = \frac{A_1}{r},$$

$$V_1 = A_1 \log r + B_1. \quad (5-29)$$

A 3ª das equações (5-28) analogamente dá:

$$\frac{dV_3}{dr} = \frac{A_3}{r},$$

$$V_3 = A_3 \log r + B_3. \quad (5-30)$$

A 2ª das equações (5-28) dá:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_2}{dr} \right) = - \frac{k}{\epsilon_0} r^2 \longrightarrow r \frac{dV_2}{dr} = - \frac{kr^3}{3\epsilon_0} + A_2,$$

$$\frac{dV_2}{dr} = - \frac{kr^2}{3\epsilon_0} + \frac{A_2}{r},$$

$$V_2 = - \frac{kr^3}{9\epsilon_0} + A_2 \log r + B_2. \quad (5-31)$$

Para determinar as 6 constantes, dispomos de 4 condições ao contórno sôbre as superfícies cilíndricas de raios a e b , e uma

condição na origem: o potencial deve aí ser finito. A arbitrariedade sobre uma das constantes poderá ser suprimida, pela escolha de uma particular origem dos potenciais.

Condição na origem:

$$V_3(0) = \text{finito} \longrightarrow A_3 = 0$$

Origem dos potenciais: tomando $V_2(b) = 0$, por exemplo,

teremos: *

$$B_2 = \frac{kb^3}{9\epsilon_0} - A_2 \log b. \quad (5-32)$$

Condições ao contorno:

$$1^{\text{a}}) \left. \frac{dV_1}{dr} \right|_b = \left. \frac{dV_2}{dr} \right|_b \longrightarrow \frac{A_1}{b} = -\frac{kb^2}{3\epsilon_0} + \frac{A_2}{b}. \quad (5-33)$$

$$2^{\text{a}}) \left. \frac{dV_2}{dr} \right|_a = \left. \frac{dV_3}{dr} \right|_a \longrightarrow -\frac{ka^2}{3\epsilon_0} + \frac{A_2}{a} = 0,$$

$$\text{logo: } A_2 = \frac{ka^3}{3\epsilon_0},$$

* portanto, de (5-32):

$$B_2 = \frac{kb^3}{9\epsilon_0} - \frac{ka^3}{3\epsilon_0} \log b.$$

$$3^{\text{a}}) V_1(b) = V_2(b) \longrightarrow A_1 \log b + B_1 = 0.$$

$$4^a) V_2(a) = V_3(a) \longrightarrow -\frac{ka^3}{9\epsilon_0} + A_2 \log a + B_2 = B_3,$$

$$\text{logo: } B_3 = \frac{k}{9\epsilon_0} (b^3 - a^3) - \frac{ka^3}{3\epsilon_0} \log \frac{b}{a}.$$

Resolvendo (5-33) e (5-34), temos:

$$A_1 = -\frac{k}{3\epsilon_0} (b^3 - a^3),$$

$$B_1 = \frac{k}{3\epsilon_0} (b^3 - a^3) \log b.$$

Teremos finalmente para o potencial, substituindo em (5-29), (5-31) e (5-30) os valores obtidos para as constantes:

$$V_1 = -\frac{k}{3\epsilon_0} (b^3 - a^3) \log \frac{r}{b}, \quad r > b,$$

$$V_2 = \frac{k}{9\epsilon_0} (b^3 - r^3) - \frac{ka^3}{3\epsilon_0} \log \frac{b}{r}, \quad a < r < b,$$

$$V_3 = \frac{k}{9\epsilon_0} (b^3 - a^3) - \frac{ka^3}{3\epsilon_0} \log \frac{b}{a}, \quad r < a,$$

e para o campo elétrico:

$$E_1 = \frac{k}{3\epsilon_0} (b^3 - a^3) \frac{1}{r},$$

$$E_2 = \frac{k}{3\epsilon_0} \left(r^2 - \frac{a^3}{r} \right),$$

$$E_3 = 0.$$

Adêndice 5-I.

Teorema de Gauss para a divergência. Seja \vec{F} um campo vetorial diferenciável numa certa região de volume v , limitada por uma superfície s , e suponhamos que se conheça o valor de $\text{div } \vec{F}$ em cada um dos pontos da região. Então se tem:

$$\int_v \text{div } \vec{F} \, dv = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (5-35)$$

onde $d\vec{s} = \vec{n} ds$, sendo \vec{n} orientada para fora da superfície. Isto significa que: "a integral da divergência de \vec{F} no volume v é igual ao fluxo de \vec{F} que sai através da fronteira s da região". Este é o enunciado do teorema de Gauss.

Para demonstrá-lo, mostraremos inicialmente que $\text{div } \vec{F}$ pode ser tomada como o limite do quociente do fluxo de \vec{F} que sai de um volume Δv , pelo volume Δv , quando $\Delta v \rightarrow 0$:

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta s} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (5-36)$$

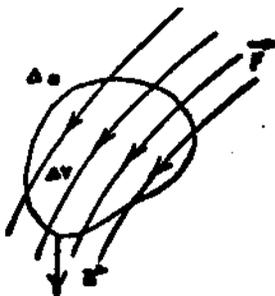


Fig. 5-8

onde Δs é a fronteira do volume Δv (Fig. 5-8). Vamos escolher para Δv uma célula retangular de arestas Δx , Δy , Δz , paralelas aos eixos coordenados (Fig. 5-9), e

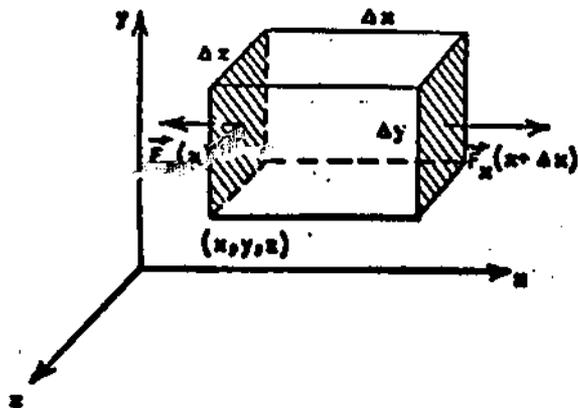


Fig. 5-3

calcular o fluxo total ϕ_x que sai de Δ e segundo a direção x :

$$\phi_x = \int_{\Delta y \Delta z} [F_x(x + \Delta x) - F_x(x)] dy dz.$$

Como Δx é pequeno, podemos tomar:

$$\begin{aligned} F_x(x + \Delta x) - F_x(x) &= F_x(x) + \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots - F_x(x) = \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x, \end{aligned}$$

onde foram suprimidos os termos de ordem superior a Δx , que faremos tender a zero. Daqui por diante, em situações análogas, omitiremos automaticamente êsses termos.

Teremos então para o fluxo:

$$\phi_x = \int_{\Delta y \Delta z} \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x dy dz,$$

e por conseguinte:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\phi_x}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta y \Delta z} \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x dy dz =$$

$$= \frac{\partial F_x}{\partial x} \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta v} = \frac{\partial F_x}{\partial x},$$

pois, quando $\Delta v \rightarrow 0$, $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ fica praticamente constante em Δv . Da mesma maneira se demonstra que o limite do fluxo, por unidade de volume, que sai na direção y é $\frac{\partial F_y}{\partial y}$, e na direção z , $\frac{\partial F_z}{\partial z}$. Assim o limite do fluxo total, por unidade de volume, que sai do volume Δv é:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\phi}{\Delta v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{\Delta s} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

o que demonstra (5-36).

Consideremos agora uma região do espaço de volume v , limitada por uma superfície s , e vamos dividi-la num certo número n de células retangulares de volume Δv_1 , limitadas por superfícies Δs_1 . Então se tem, da definição de integral de volume:

$$\int_v \operatorname{div} \vec{F} dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \operatorname{div} \vec{F} \Delta v_1,$$

onde $\operatorname{div} \vec{F}$ é calculado num ponto qualquer de cada volume Δv_1 . Usando (5-36) e tomando Δv como o próprio volume Δv_1 , teremos para a integral:

$$\int_v \operatorname{div} \vec{F} dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\lim_{\Delta v_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v_1} \int_{\Delta s_1} \vec{F} \cdot \vec{ds} \right] \Delta v_1 =$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta v_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n \int_{\Delta s_i} \vec{F} \cdot \vec{ds}.$$

Ora, no último somatório, os fluxos através de cada parede comum a duas regiões adjacentes se cancelam, porque as normais a essa parede são orientadas em sentidos contrários, para uma e outra região. Então os fluxos através das paredes internas das células se cancelam, e restará, do somatório, o fluxo através da superfície externa s_n do conjunto de células (Fig. 5-10):

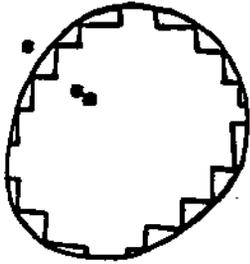


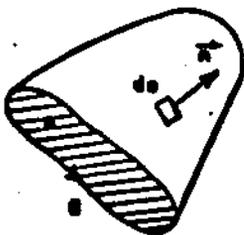
Fig. 5-10

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{s_n} \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_s \vec{F} \cdot \vec{ds},$$

pois s é o limite de s_n quando $n \rightarrow \infty$, e assim fica demonstrado o teorema.

Apêndice 5-II

Teorema de Stokes para o rotacional. Seja \vec{F} um campo vetorial diferenciável numa certa região, e seja, nessa região, uma superfície qualquer s , apoiada num contorno C . Dando a C um sentido de percurso, orientaremos a normal a cada elemento de superfície ds , de acordo com o sentido escolhido para C , pela regra do saca-rôlhas.



(Fig. 5-11) valerá então:

$$\int_s \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}, \quad (5-37)$$

isto é, "o fluxo do rotacional do campo \vec{F} , através da superfície s , é igual à circulação do campo \vec{F} ao longo do contorno C , sobre o qual se apóia a superfície". Este é o enunciado do teorema de Stokes.

Para demonstrá-lo, mostraremos inicialmente que a componente do rotacional de \vec{F} , segundo uma certa direção \vec{a} , pode ser tomada como o limite do quociente da circulação de \vec{F} ao longo de um contorno C , pela área Δs limitada por C , quando $\Delta s \rightarrow 0$ (Fig. 5-12):

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{a} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (5-38)$$

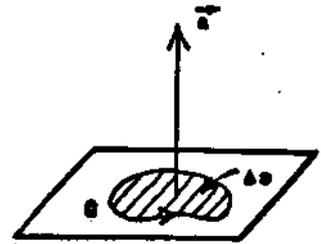


Fig. 5-12

Vamos escolher, para Δs , um retângulo de lados Δy e Δz , normal a x , tomar a direção \vec{a} como a do eixo dos x (Fig. 5-13), e calcular a circulação de \vec{F} ao longo de C :

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \oint_C \left\{ [F_y(z) - F_y(z + \Delta z)] dy + [-F_z(y) + F_z(y + \Delta y)] dz \right\} = \\ &= \oint_C \left(-\frac{\partial F_y}{\partial z} \Delta z dy + \frac{\partial F_z}{\partial y} \Delta y dz \right). \end{aligned}$$

Por conseguinte:

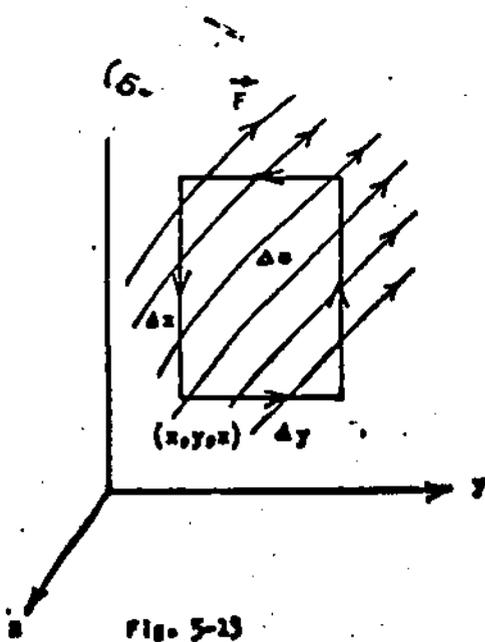


Fig. 5-38

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} =$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_C \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} \Delta y dz - \frac{\partial F_y}{\partial z} \Delta z dy \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta s} =$$

$$= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \text{rot}_x \vec{F},$$

pois quando $\Delta s \rightarrow 0$, $\frac{\partial F_y}{\partial z}$ e $\frac{\partial F_z}{\partial y}$ ficam praticamente constantes em Δs , e assim está demonstrada (5-38).

Consideremos agora a superfície s indicada no início deste parágrafo, e vamos dividi-la em pequenos elementos de superfície Δs_1 , que podem ser tomados como partes dos planos tangentes associados; sejam as fronteiras C_1 , dessas superfícies, orientadas de acordo com a orientação de C . Então se tem, da definição de integral de superfície:

$$\int_s \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{s}_i,$$

onde $\text{rot } \vec{F}$ é calculado num ponto qualquer de cada superfície Δs_1 . Usando (5-38), e tomando Δs como a própria superfície Δs_1 , teremos para a integral:

$$\int_s \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s_1} \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} \right] =$$

$$= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta s_1 \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Ora, no último somatório, as circulações ao longo de cada lado comum a duas superfícies adjacentes se cancelam, porque êsse lado é orientado, ora num sentido, ora em sentido contrário, para cada uma das duas superfícies. Então as circulações ao longo das fronteiras internas das superfícies se cancelam, e restará, do somatório, a circulação ao longo da fronteira externa C_n do conjunto de superfícies elementares (Fig. 5-14):

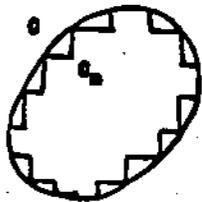


Fig. 5-14

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

pois C é o limite de C_n quando $n \rightarrow \infty$, e fica assim demonstrado o teorema.

Apêndice 5-III.

Algumas propriedades dos operadores diferenciais. De-

monstra-se facilmente, usando as definições dos operadores grad, div, rot e Δ , que:

$$\text{grad } (u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v, \quad (5-39)$$

$$\text{grad } (u v) = u \text{ grad } v + \text{grad } u v, \quad (5-40)$$

$$\text{grad } (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{u} \text{ div } \vec{v} + \vec{v} \text{ div } \vec{u}, \quad (5-41)$$

$$\text{div } (\vec{u} + \vec{v}) = \text{div } \vec{u} + \text{div } \vec{v}, \quad (5-42)$$

$$\text{div } (u \vec{v}) = \text{grad } u \cdot \vec{v} + u \text{ div } \vec{v}, \quad (5-43)$$

$$\operatorname{div} (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}, \quad (5-44)$$

$$\operatorname{rot} (\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{rot} \vec{v}, \quad (5-45)$$

$$\operatorname{rot} (u \vec{v}) = \operatorname{grad} u \wedge \vec{v} + u \operatorname{rot} \vec{v}, \quad (5-46)$$

$$\operatorname{rot} (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{u} \operatorname{div} \vec{v} - \vec{v} \operatorname{div} \vec{u}, \quad (5-47)$$

onde:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Os operadores de 2ª ordem resultam da aplicação sucessiva de 2 operadores de 1ª ordem. Além do laplaciano, já conhecido (5-15):

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u = \Delta u,$$

demonstra-se facilmente que:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} u = 0 \quad (5-48)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = 0 \quad (5-49)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u},$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \Delta \vec{u}, \quad (5-50)$$

onde:

$$\Delta \vec{u} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{u} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{u} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{u}, \quad (5-51)$$

sendo $\vec{u} = u_x(x, y, z) \vec{i} + u_y(x, y, z) \vec{j} + u_z(x, y, z) \vec{k}$.

Quando as funções de ponto consideradas (escalares ou vetoriais) têm simetria esférica ou cilíndrica, é conveniente conhecer alguns resultados, frequentemente usados nos cálculos.

a) Funções com simetria esférica. São as funções da forma $f(r)$,

onde r é a distância da origem ao ponto considerado (Fig. 5-15). Já são resultados conhecidos (2-12), (2-13) e

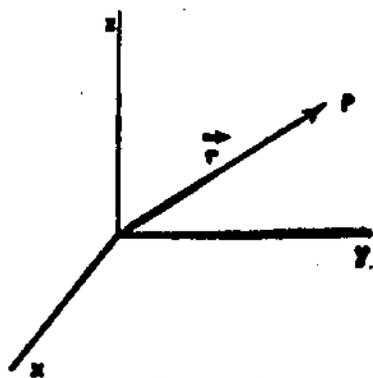


Fig. 5-15

(5-8):

$$\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\text{div } \vec{r} = 3.$$

Demonstremos ainda que:

$$\text{div} [f(r) \vec{r}] = 3 f(r) + r \frac{df}{dr}, \quad (5-52)$$

$$\text{rot } \vec{r} = 0, \quad (5-53)$$

$$\text{rot} [f(r) \vec{r}] = 0, \quad (5-54)$$

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right). \quad (5-55)$$

De (5-43) vemos que:

$$\begin{aligned} \text{div} [f(r) \vec{r}] &= \text{grad } f(r) \cdot \vec{r} + f(r) \text{div } \vec{r} = \frac{df}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} + f(r) \cdot 3 = \\ &= 3 f(r) + r \frac{df}{dr}, \end{aligned}$$

que coincide com (5-52).

De (5-6) vemos que:

$$\text{rot } \vec{r} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0,$$

o que verifica (5-53).

De (5-46) vemos que:

$$\text{rot}[f(r)\vec{r}] = \text{grad } f(r) \wedge \vec{r} + f(r) \text{rot } \vec{r} = \frac{df}{dr} \vec{r} \wedge \vec{r} = 0,$$

o que verifica (5-54).

Finalmente:

$$\begin{aligned} \Delta f(r) &= \text{div grad } f(r) = \text{div} \left[\frac{df}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \right] = \\ &= \text{grad} \left[\frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right] \cdot \vec{r} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \text{div } \vec{r} = \\ &= \left(-\frac{1}{r^2} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2f}{dr^2} \right) \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} + \frac{3}{r} \frac{df}{dr} = \\ &= -\frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{df}{dr} = \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr}, \end{aligned}$$

que confirma (5-55).

Para funções que não apresentem simetria esférica, mas da forma $f(r, \theta, \varphi)$, onde r , θ e φ são coordenadas esféricas, tem-se para a expressão do laplaciano:

$$\Delta f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

b) Funções com simetria cilíndrica. São as funções da forma $f(r)$, onde agora r é a distância do eixo Oz ao ponto considerado (Fig. 5-16). Se f é função apenas de r , não será função de z , e teremos:

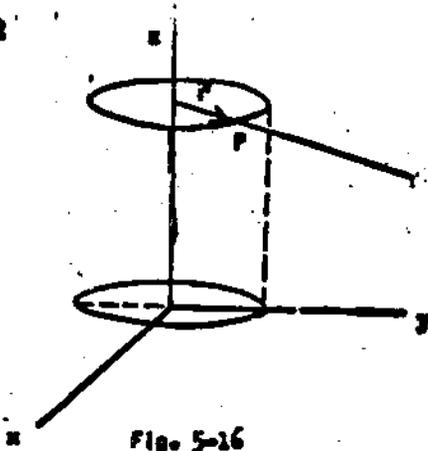


Fig. 5-16

$$\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\text{div } \vec{r} = 2, \quad (5-56)$$

pois agora:

$$\text{div } \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}.$$

Do mesmo modo, verificam-se fórmulas análogas a (5-53) e (5-54), sendo que em lugar de (5-52) teremos aqui:

$$\text{div} [f(r) \vec{r}] = 2 f(r) + r \frac{df}{dr}. \quad (5-57)$$

Finalmente o laplaciano de $f(r)$ será:

$$\Delta f(r) = \text{div grad } f(r) =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2 r}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} = \\ & = \frac{d^2 r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr}, \end{aligned}$$

Isto é:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) \quad (5-58)$$

Para funções que não apresentem simetria cilíndrica, mas da forma $f(r, \theta, z)$, onde r, θ e z são coordenadas cilíndricas, tem-se para a expressão do laplaciano:

$$\Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Problemas Propostos:

- 5-1. Resolva, usando a equação de Poisson, os problemas 2-4, 3-2, 3-3, 4-2, 4-3, 4-5.
- 5-2. Um certo tubo de vácuo contém um cátodo cilíndrico de raio a . Em volta dele há uma camada com carga espacial de densidade $= \rho$ (onde ρ é constante positiva), estendendo-se até o raio b . O ânodo é um cilindro de raio ainda maior c . Se o cátodo está a um potencial ψ_1 e o ânodo a um potencial ψ_2 , determine o potencial como função de r , dentro e fora da distribuição de cargas (S.F.).
- 5-3. Entre dois condutores planos infinitos, S_1 e S_2 , existe uma distribuição espacial de cargas de densidade $= \rho$ (onde ρ é constante positiva). Tomando o eixo x normal aos planos, o condutor S_1 (cátodo) está no plano $x = 0$, a distribuição de

cargas se estende entre os planos $x = 0$ e $x = a$, e o condutor S_2 (ânodo) está no plano $x = b$, sendo $b > a$. Se o cátodo está a um potencial φ_1 e o ânodo a um potencial φ_2 , determine o potencial como função de x , em todos os pontos entre S_1 e S_2 .

- 5-4. Para uma certa distribuição esférica de cargas, o potencial é dado por:

$$V(r) = \frac{\rho_0}{a^3 \epsilon_0} \left[\frac{2}{r} - \left(a + \frac{2}{r} \right) e^{-ar} \right]$$

onde a e ρ_0 são constantes. Calcular a distribuição de cargas que produz este potencial.

- 5-5. Uma válvula cilíndrica é formada por um condutor interno de raio a , a um potencial V_0 , e por uma capa condutora com superfície interna cilíndrica, concêntrica com a superfície do condutor interno, de raio b , ligada à terra. No espaço entre estes dois condutores, existe uma distribuição espacial de cargas de densidade $\rho = \rho_0 e^{\frac{a^2}{b}} \frac{r-b}{r}$, onde ρ_0 é constante. Calcular o potencial num ponto qualquer entre os condutores (supor os condutores infinitos).

IMAGENS ELÉTRICAS

6 - 1. Propriedades do potencial. Demonstraremos, inicialmente, duas propriedades do potencial eletrostático:

1^a) "O potencial não pode ter máximo nem mínimo numa região em que não haja cargas" (assumiremos sempre distribuições contínuas de cargas, procedendo em relação a distribuições discretas como ficou indicado no parágrafo 5-1).

Demonstração: Seja $\rho = 0$ numa certa região, e \bar{x} um ponto dessa região, e suponhamos, por absurdo, que \bar{x} seja um ponto de máximo (ou mínimo) para o potencial. Isto significa que, num ponto dado da vizinhança de \bar{x} , o potencial é menor (ou maior) que $V(\bar{x})$, ou eventualmente igual a $V(\bar{x})$. Se o ponto x é tal que $V(x) = V(\bar{x})$, para todos os pontos x da vizinhança de \bar{x} , neste caso tomaremos um outro ponto \bar{x}' , mais afastado, onde o potencial comece a decrescer (ou a crescer). Então a derivada de V , calculada num ponto próximo a \bar{x} , é menor (ou maior) do que zero, ou eventualmente igual a zero, mas não idênticamente nula (se escolhermos adequadamente \bar{x}). Tomando em torno de \bar{x} uma pequena esfera, e aplicando a ela o teorema de Gauss, virá:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E_r ds = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}.$$

Mas $\int_S E_r ds > 0$ (ou < 0) porque $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$, e como $q_{int} = 0$ por hipótese (pois, por hipótese, $\rho = 0$ no entorno do ponto \bar{x}), então chegamos a uma contradição, proveniente do fato de termos suposto \bar{x} um ponto de máximo (ou mínimo) para o potencial. Esta propriedade corresponde ao teorema matemático que diz que uma função harmônica (solução da equação de Laplace), definida numa certa região, não pode aí ter máximo ou mínimo.

2^a) "O potencial não pode ter máximo nem mínimo num condutor descarregado" (isto é, contendo carga total nula, ficando incluído aqui o caso em que exista uma densidade de cargas $\sigma \neq 0$ sobre a superfície s do condutor, tal que $\int_S \sigma ds = 0$).

Demonstração: admitamos, por absurdo, que V seja máximo (ou mínimo) no condutor. Ora, o campo elétrico num ponto externo, muito próximo ao condutor, é normal à sua superfície, e por (4-1) tem-se:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = E = -\frac{\partial V}{\partial n} = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} V,$$

e $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} V$ será sempre < 0 se V é máximo, e > 0 se V é mínimo no condutor. Aplicando o teorema de Gauss a uma superfície externa ao condutor e infinitamente próxima de sua superfície, vem:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E ds = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Mas $\int_S E ds \geq 0$ (ou ≤ 0), e como $q = 0$ por hipótese (pois, por hipótese, o condutor é descarregado), então chegamos a uma contradição, proveniente do fato de termos suposto o potencial máximo (ou mínimo) no condutor.

6 - 2. Teorema da unicidade do potencial. "Se, para um sistema de condutores e de cargas (dadas), são dados, seja o potencial, seja a carga de cada condutor, então só existe uma função potencial V tal que se anule no infinito, e que forneça para cada condutor, seja o potencial, seja a carga dados."

Demonstração: seja V_1 o potencial do 1º condutor, q_2 a carga do 2º condutor, etc. Então a função V , solução do problema, que dá o potencial em qualquer ponto do espaço, deve satisfazer às condições:

$$1^a) V(\infty) = 0,$$

$$2^a) \Delta V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ onde } \rho \text{ é a densidade de cargas em cada ponto do espaço,}$$

$$3^a) V(1) = V_1,$$

$$4^a) q_2 = \epsilon_0 \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} = - \epsilon_0 \int_{S_2} \text{grad } V \cdot \vec{ds},$$

etc. Suponhamos que V não seja único, isto é, que exista uma outra solução V' , satisfazendo às mesmas condições:

$$1^a) V'(\infty) = 0,$$

$$2^a) \Delta V' = - \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

$$3^{\text{a}}) V'(1) = V_1,$$

$$4^{\text{a}}) q_2 = - \epsilon_0 \int_{s_2} \text{grad } V' \cdot \vec{ds},$$

etc. Seja agora uma outra distribuição de cargas, em tudo idêntica à 1^a, exceto pelos sinais das cargas. Então, se V é solução do 1^o problema, $V'' = -V'$ será solução do 2^o, e deverá satisfazer às condições:

$$1^{\text{a}}) V''(\infty) = 0,$$

$$2^{\text{a}}) V'' = - \frac{\rho''}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$3^{\text{a}}) V''(1) = -V_1,$$

$$4^{\text{a}}) -q_2 = -\epsilon_0 \int_{s_2} \text{grad } V'' \cdot \vec{ds},$$

etc. De acôrdo com o princípio de superposição, se existe uma distribuição de cargas em equilíbrio num condutor, então adicionando cargas ao condutor, correspondentes a outra distribuição de equilíbrio, o campo e o potencial resultantes serão a soma dos campos e potenciais dados; e como o campo é nulo no condutor, e o potencial constante, mesmo para as cargas suplementares, a distribuição de cargas total é ainda uma distribuição de equilíbrio.

Vamos então superpor as duas distribuições consideradas, correspondentes às soluções V e V'' ; o potencial resultante será:

$$\bar{V} = V + V'' = V - V',$$

e deve satisfazer às condições:

$$1^a) \bar{V}(\infty) = 0, \quad (6-1)$$

$$2^a) \Delta \bar{V} = 0, \text{ pois } \bar{\rho} = \rho + \rho'' = \rho - \rho = 0,$$

$$3^a) \bar{V}(1) = 0, \quad (6-2)$$

$$4^a) 0 = -\epsilon_0 \int_{S_2} \text{grad } \bar{V} \cdot \overrightarrow{ds},$$

etc. Como \bar{V} não pode ser máximo nem mínimo em cada condutor cuja carga era dada (2^a propriedade), nem em qualquer ponto do espaço em que antes havia carga (1^a propriedade), então só poderá ser máximo ou mínimo no infinito, ou nos condutores em que o potencial era dado; mas aí, por (6-1) e (6-2), o potencial é nulo. Logo:

$$\bar{V}_{\text{máx}} = \bar{V}_{\text{mín}} = 0,$$

e portanto $\bar{V} \equiv 0$, isto é, $V \equiv V'$, em todo o espaço, e o teorema fica demonstrado.

Este teorema se aplica, em particular, aos casos em que V é dado sobre toda a fronteira de uma certa região; neste caso ficará univocamente determinado no interior de toda a região. O cálculo de V no interior da região é em geral complicado, a não ser que se possa desde logo reconhecer, pela forma de V na fronteira, a distribuição de cargas que o produz. Assim, se V na fronteira s é da forma $\frac{1}{r}$, onde r é a distância de uma certa origem até um ponto qualquer da fronteira (Fig. 6-1), então sabemos que V só pode ser o potencial de uma carga puntiforme $q = 4\pi\epsilon_0$ localizada na origem, e neste caso o potencial num ponto P qualquer da região será ainda da forma $\frac{1}{r}$. Problemas mais complicados podem ser resolvidos por métodos experimentais, ou por um método muito elegante, imaginado por Dirich

let, métodos êsses que transcendem os objetivos dêste curso. Veremos, entretanto, no próximo capítulo que: se fôr dado, além de V sôbre a fronteira, o valor sôbre ela de sua derivada l^a (dado, portanto, superabundante), pode-se calcular mais fâcilmente o potencial na região interior à fronteira.

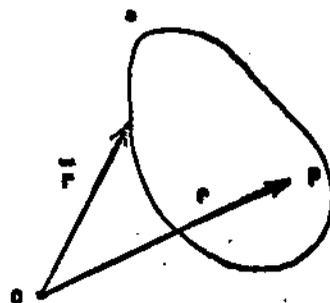


Fig. 6-1

O teorema da unicidade do potencial, por outro lado, assegura a possibilidade de descobrir a solução de problemas complicados, usando soluções conhecidas de problemas mais simples. Sabemos, por exemplo, que as superfícies de nível do campo criado por um fio de comprimento l carregado (com densidade linear de cargas λ constante) são elipsóides confocais, estando os focos nas extremidades do fio (parágrafo 2-8). Como sôbre êsses elipsóides o potencial é constante, podemos calcular seu valor em qualquer ponto do elipsóide, em particular nos pontos A ou B (Fig. 6-2), para os quais o cálculo é mais simples. Para o cálculo em A, por exemplo, podemos integrar diretamente o potencial devido a um elemento de carga λdx , desde $-f$ até $+f$ ($l = 2f$), e encontraremos:

$$V_A = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{x+f}{x-f} \quad (6-3)$$

Para o potencial em B, podemos calcular, usando (4-10), a integral do campo elétrico dado por (2-17) num percurso retilíneo, normal ao fio, que

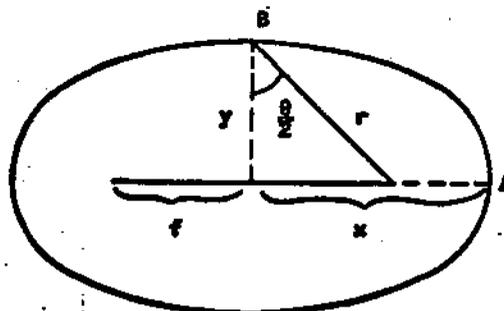


Fig. 6-2

vai desde B até o infinito, e encontraremos:

$$V_B = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r + \sqrt{y^2 + r^2}}{y} .$$

É fácil verificar, usando as propriedades do elipsóide:

$$x = r, \quad y^2 + r^2 = x^2 ,$$

que $V_A = V_B$, o que é necessariamente verdadeiro, pois o elipsóide é uma superfície equipotencial.

Se agora materializarmos este elipsóide por um condutor carregado com carga $q = \lambda l$, então demonstraremos que se tem:

$$V'_S = V_A = V'_I, \quad V'_E = V_E , \quad (6-4)$$

onde V' é o potencial criado pelo condutor carregado (V'_S sobre a superfície, V'_I em pontos internos, V'_E em pontos externos); V_A é o potencial sobre o elipsóide, dado por (6-3), e V_E o potencial em pontos externos ao elipsóide, ambos devidos ao fio de comprimento l .

De fato, sabemos que V' deve satisfazer às condições:

$$1^a) \quad V'(\infty) = 0,$$

$$2^a) \quad \Delta V'_E = 0,$$

$$3^a) \quad q = -\epsilon_0 \int_S \text{grad } V' \cdot \vec{ds} ;$$

ora, se mostrarmos que V satisfaz externamente às mesmas condições que V' , então, pelo teorema da unicidade do potencial, teremos ne-

cessariamente:

$$V \equiv V',$$

em toda a região externa ao elipsóide.

A 1ª condição é obviamente satisfeita por V ; a 2ª também, pois não há cargas externas ao fio. Finalmente, o fluxo que sai do elipsóide devido à carga $q = \lambda l$ contida no fio é, aplicando o teorema de Gauss,

$$\phi = - \int_s \text{grad } V \cdot \vec{ds} = \int_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

e assim verificamos que V também satisfaz à 3ª condição.

Vemos, portanto, que o campo criado por um condutor em forma de elipsóide de revolução, contendo carga q , é o mesmo que o criado por um fio retilíneo de comprimento $l = 2f$, com extremidades nos focos do elipsóide, contendo a mesma carga q , distribuída uniformemente ao longo dele - para pontos externos ao elipsóide. Esta conclusão poupa-nos enorme trabalho, que consistiria (se quiséssemos calcular o campo devido ao condutor elipsoidal) em procurar a distribuição de cargas σ que tornasse a superfície do condutor uma equipotencial, e em seguida aplicar a fórmula:

$$\sigma = - \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}. \quad (6-5)$$

Usando os resultados (6-4), entretanto, e supondo igual a a o semi-eixo de rotação do elipsóide, achamos imediatamente a solução do nosso problema, que é:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_i' = V_s' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{a+f}{a-f}, \\ V_e' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log \frac{x+f}{x-f}, \end{array} \right.$$

onde x é o semi-eixo de rotação do elipsóide sôbre o qual se encontra o ponto P , externo ao condutor. O valor de σ , em um ponto qualquer do condutor, será calculado a posteriori, por (6-5), onde \vec{n} tem a direção normal ao elipsóide no ponto, isto é, a direção da bissetriz do ângulo θ (Fig. 2-15).

6 - 3. Teorema da blindagem eletrostática. "Se num condutor há uma cavidade, no interior da qual existem cargas distribuídas de certa maneira, então qualquer modificação imposta a essa distribuição (sem que se altere o valor de sua carga total) não influirá sôbre o potencial eletrostático na região externa ao condutor. Por outro lado, se o condutor estiver ligado à terra, qualquer modificação imposta à distribuição de cargas externas ao condutor (sem que se altere o valor total dessas cargas) não influirá sôbre o potencial no interior da cavidade."

Assim o condutor funciona como uma blindagem para as duas regiões; êste é o princípio da gaiola de Faraday.

Para demonstrar a 1ª parte do teorema, suponhamos que o potencial na região externa seja inicialmente V_1 e que, depois de alterada a distribuição de cargas no interior da cavidade, passe a

ser V_2 . Suponhamos ainda que o condutor esteja isolado, com carga total constante, seja Q' ; então, se a carga existente na cavidade for igual a $+Q$ (Fig. 6-3), aplicando-se o teorema de Gauss a uma superfície \bar{s} qualquer, toda ela contida no condutor, vemos que a carga total induzida na superfície da cavidade é $-Q$ (pois o fluxo através da superfície de Gauss é nulo - por ser nulo o campo no interior do condutor - e portanto é nula a soma das cargas internas a ela). Então sobre a superfície externa do condutor haverá carga $Q + Q'$. Estes resultados valerão antes (1^a situação) e depois (2^a situação) da redistribuição das cargas Q existentes na cavidade.

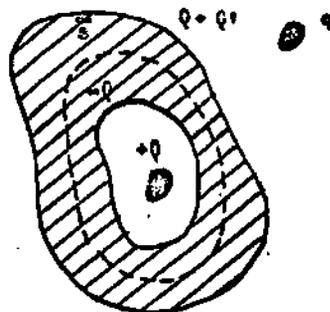


Fig. 6-3

Consideremos agora a situação simétrica da 2^a situação, isto é, uma 3^a situação de equilíbrio, com todas as distribuições de cargas idênticas às da 2^a , apenas com os sinais trocados. E vamos superpor a 1^a e a 3^a situações, o que dará ainda uma situação de equilíbrio, em virtude do princípio de superposição. Teremos então: a) potencial igual a $V_1 - V_2$ no exterior; b) carga nula no exterior e no condutor. Ora, não havendo cargas na região externa nem no condutor, o potencial só poderá apresentar máximo ou mínimo no infinito, mas aí é nulo. Então é nulo em toda a região externa, e teremos $V_1 \equiv \equiv V_2$.

Para demonstrar a 2^a parte do teorema, suponhamos que o potencial na cavidade seja inicialmente V_1 e que, depois de alterada a distribuição das cargas q externas ao condutor, passe a ser V_2 .

Como o condutor está ligado à terra, o potencial na superfície da cavidade será sempre $V_s = 0$, e como a distribuição de cargas Q no interior da cavidade não sofreu alteração, o potencial no interior da cavidade estará unívocamente determinado (teorema da unicidade do potencial), e teremos $V_1 = V_2$.

Seja agora um condutor com uma cavidade, no interior da qual existe um outro condutor contendo carga positiva. Se ligarmos os 2 condutores por um fio, toda carga fluirá para a superfície externa do condutor externo. De fato, suponhamos que alguma carga tenha permanecido no condutor interno; então haverá carga negativa correspondente na superfície da cavidade, e linhas de força ligando essas cargas. Ao longo de cada linha de força teremos:

$$V_1 - V_2 = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0,$$

que dará a diferença de potencial entre os dois condutores. Mas se os condutores estão ligados e em equilíbrio eletrostático, estarão a um mesmo potencial, e portanto $V_1 = V_2$, isto é, $\vec{E} = 0$. O mesmo fato poderia ser demonstrado usando o fato de que, se $\vec{E} = 0$ na cavidade (pois $V_1 = V_2$), então $\sigma = 0$, isto é, não haverá cargas nas superfícies internas.

O princípio de funcionamento do gerador de Van der Graaf é estabelecido com base nesses fenômenos. Consiste em carregar por dentro um condutor que apresenta uma cavidade em comunicação com o exterior (Fig. 6-4). Qualquer quantidade de carga levada para dentro da cavidade, e posta em contato com o condutor, se distribuirá sobre sua superfície externa. Isto permite aí acumular grande

quantidade de carga, o que não se conseguiria diretamente, porque a força de repulsão que se estabeleceria entre a carga adicional e a já existente seria enorme.

Com base nos teoremas precedentes é que se fundamenta um importante método para cálculo do campo elétrico, que veremos a seguir.

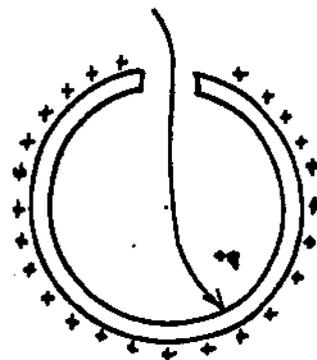


Fig. 6-4

6 - 4. Método das imagens elétricas. Certos problemas em Eletrostática são dificilmente resolvidos pelos métodos estudados até agora, em que campo e potencial são calculados a partir de distribuições de cargas dadas. É o caso, por exemplo, de problemas em que aparecem condutores carregados, para os quais σ não pode ser dado a priori, sim calculado simultaneamente com o campo. Em problemas deste tipo, vale-nos o método das imagens elétricas, que é, aliás, um método de aplicação muito restrita.

Quando um condutor descarregado é colocado em presença de cargas, ocorre um fenômeno de indução no condutor, isto é, cargas negativas são repelidas ou atraídas pelas cargas presentes conforme seu sinal, e se redistribuem no condutor até que se atinja a situação de equilíbrio, que é aquela em que o campo no interior do condutor é nulo (Fig. 6-5). En-

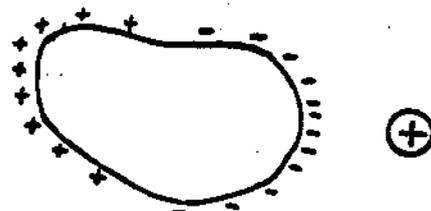


Fig. 6-5

tão o campo em todo o espaço será, agora, o produzido pelas cargas presentes e pela distribuição superficial de cargas, antes inexistente, no condutor. É claro que a carga total do condutor, neste caso, continuará nula. Em alguns casos deste tipo, a distribuição de cargas no condutor poderá ser substituída por cargas fictícias que produzam o mesmo campo, fora do condutor. Vejamos alguns exemplos.

6 - 5. Carga puntiforme em presença de um condutor limitado por uma face plana indefinida. Se a carga $+q$ é colocada em frente

à face plana do condutor, sobre esta aparecerão cargas negativas,

distribuídas com uma certa densidade

σ , função de posição; quantidade e-

quivalente de carga positiva se dis-

tribuirá sobre a face oposta do con-

ductor, o mais longe possível da car-

ga q . Se o condutor fôr ligado à

terra (Fig. 6-6), essas cargas posi-

tivas "fluirão" do condutor para a terra (ou melhor, serão neutra-

lizadas por cargas negativas que fluirão da terra para o condutor).

O condutor estará assim carregado com uma certa carga $-q'$, sendo

q' positivo. Para a determinação de q' , consideremos uma superfí-

cie de Gauss s passando pelo interior do condutor e fechando-se no

infinito (Fig. 6-7). Como o campo é nulo sobre toda a superfície,

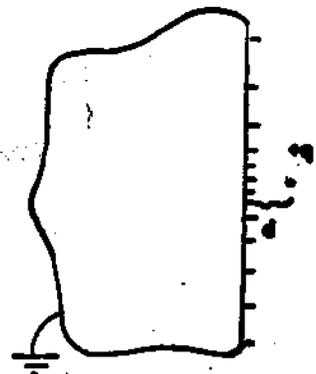


Fig. 6-6

do teorema de Gauss virá:

$$0 = \phi_s = \frac{q_{\text{int.}}}{\epsilon_0} = q - q',$$

do que se conclui que a carga total induzida sobre a face plana do condutor é $-q$.

A face plana do condutor divide o espaço em duas regiões. Em qualquer ponto da região à esquerda, o campo é nulo. De fato, em toda a fronteira desta região o potencial é nulo (nulo na face plana e nulo no infinito), e como não há cargas no seu interior, o potencial é nulo em todos os seus pontos. Na região à direita, campo e potencial são determinados pela carga puntiforme positiva q e pela distribuição contínua de cargas negativas induzidas sobre a face plana do condutor. Se quiséssemos calcular diretamente campo e potencial nesta região, teríamos de calcular primeiro a densidade superficial σ de cargas induzidas no condutor, problema de grande dificuldade. O método das imagens elétricas, entretanto, fornece solução simples ao problema.

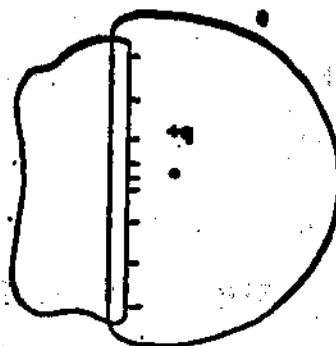


Fig. 6-7

Vimos no parágrafo 2-4 que o plano mediador π do segmento que liga duas cargas puntiformes de mesmo módulo e sinais contrários, $+q$ e $-q$, é uma superfície de nível, e portanto, equipotencial (Fig. 2-9). Mostremos agora que sobre ele o potencial é nulo. Seja então \bar{P} um ponto qualquer desse plano. (Fig. 6-8); o potencial em \bar{P} será:

$$V_{\vec{P}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \bar{r}_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \bar{r}_-} = 0,$$

pois $\bar{r}_+ = \bar{r}_-$. O potencial é ainda nulo no infinito, e seu valor em um ponto P qualquer do espaço é:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right). \quad (6-6)$$

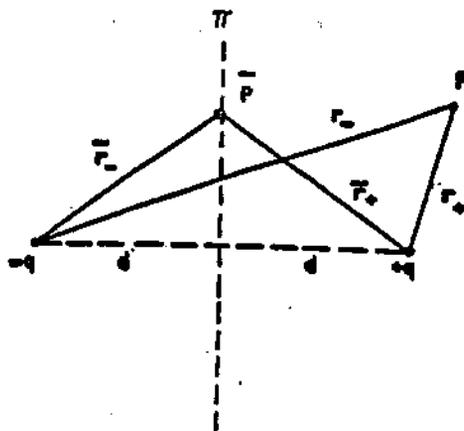


Fig. 6-8

Se agora materializarmos o plano π por um condutor ligado à terra, e se retirarmos a carga $-q$, mantendo na mesma posição (a uma distância d do plano) a carga $+q$, teremos o problema proposto no início deste parágrafo. Vamos mostrar que (6-6) é uma solução deste problema. De fato, (6-6) é solução da equação de Laplace; fornece potencial nulo sobre o condutor e no infinito, portanto em toda a fronteira da região à direita; e tende a:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+}$$

ao fazermos $r_+ \rightarrow 0$ (porque, neste caso, $\frac{1}{r_-}$ se torna desprezível em face de $\frac{1}{r_+}$), isto é, dá o valor correto para o potencial criado por $+q$ em sua vizinhança. Então se (6-6) é solução, pelo teorema da unicidade do potencial, é única.

O problema do condutor e da carga pode assim ser identificado com o problema das duas cargas, com as seguintes restrições:

1^a) A expressão (6-6) vale em todo o espaço para o problema das duas cargas, mas só vale no semi-espaço à direita, pa-

ra o do condutor e da carga; neste problema, como já vimos, $V = 0$ à esquerda.

2^a) A carga $-q$, no problema do condutor, é fictícia; chama-se "imagem elétrica" da carga q em relação ao plano.

3^a) Sôbre a face plana do condutor há uma distribuição de cargas negativas reais; no caso das duas cargas reais, o plano é imaterial e portanto descarregado.

A solução do nosso problema é então (Fig. 6-9):

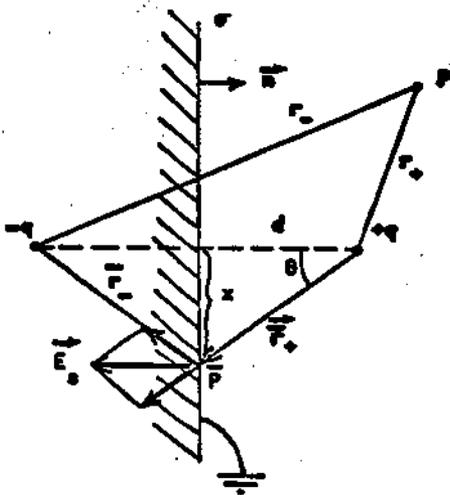


Fig. 6-9

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right), \text{ à direita do} \\ \text{condutor,} \\ V = 0, \text{ no condutor e à sua esquerda.} \end{array} \right.$$

Nestas mesmas regiões, respectivamente, o campo é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right), \\ \vec{E} = 0, \end{array} \right.$$

isto é, o campo à direita do plano é o mesmo que o criado pela carga q e sua imagem $-q$ (fictícia), localizada na posição simétrica à de q em relação ao plano.

Para calcular σ , devemos usar (4-1):

$$\sigma = \epsilon_0 E_s,$$

e portanto calcular E_s . Da figura 6-9 vê-se imediatamente que o campo em \bar{P} será:

$$E_s = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\frac{\vec{r}_+ \cdot \vec{n}}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_- \cdot \vec{n}}{r_-^3}}{r^2} \right) = - \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta,$$

onde $r = \bar{r}_+ = \bar{r}_-$. Chamando x à distância do ponto do plano ao ponto médio do segmento que liga as cargas, teremos finalmente:

$$\sigma = - \frac{qd}{2\pi(x^2 + d^2)^{3/2}}, \quad (6-7)$$

isto é, a densidade de cargas é máxima no ponto do plano mais próximo de q (para $x = 0$), tem valor constante ao longo de cada círculo de raio x centrado nesse ponto de máximo, e cai rapidamente a zero (como $\frac{1}{r^3}$) à medida que nos afastamos desse ponto.

6 - 6. Carga puntiforme em presença de esfera condutora. Haverá polarização na esfera, sendo cargas negativas atraídas e cargas positivas repelidas pela carga puntiforme $+q$ (Fig. 6-10). Se a esfera condutora fôr ligada à terra, as cargas positivas serão neutralizadas por cargas negativas que fluirão da terra para a esfera, e esta ficará negativamente carregada (Fig. 6-11). Campo e potencial no interior da esfera condutora são nulos; no exterior, são os produzi

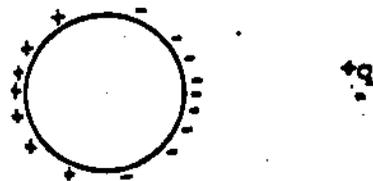


Fig. 6-10

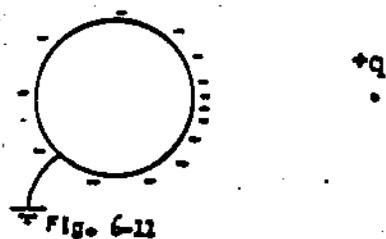


Fig. 6-11

dos pela carga puntiforme q , mais a distribuição de cargas de densidade σ localizada na superfície da esfera. A mesma dificuldade do problema anterior surge no cálculo direto do potencial e do campo, e mais uma vez vai-nos valer o método das imagens elétricas.

Para usá-lo, devemos antes resolver o seguinte problema: sejam duas cargas puntiformes $+q$ e $-q'$, sendo $q' \neq q$. Qual é a superfície equipotencial sobre a qual $V = 0$? A assimetria do problema indica, desde logo, que ela não poderá mais ser o plano mediador do segmento que une as cargas. Pode-se demonstrar, aliás, que neste caso não haverá nenhuma superfície equipotencial plana. Vamos agora demonstrar que a superfície procurada, isto é, aquela para a qual $V = 0$, é uma superfície esférica, e determinar seu raio e a posição de seu centro.

Seja s essa superfície, e P um ponto qualquer dela; escolhem_o um ponto O qualquer do espaço para origem do sistema de coordenadas (Fig. 6-12), teremos para o potencial em P :

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_+|} - \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_-|} \right) \quad (6-8)$$

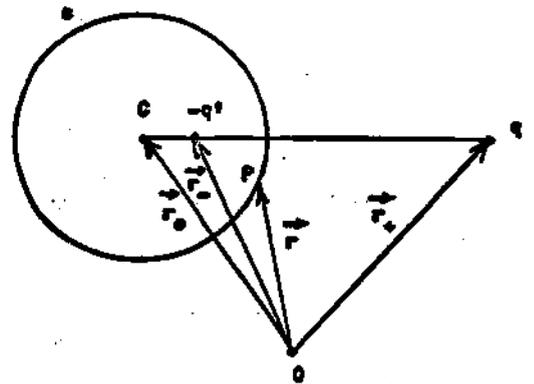


Fig. 6-12

Impomos agora a condição de que s seja uma equipotencial a potencial nulo; então sua equação será dada por:

$$V_P = 0 ,$$

isto é, s é o lugar geométrico de todos os pontos que gozam da propriedade:

$$|\vec{r} - \vec{r}_+|^2 = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 |\vec{r} - \vec{r}_-|^2 \quad (6-9)$$

ou, chamando $\left(\frac{q}{q'}\right)^2 = \lambda$:

$$r^2 + r_+^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_+ = \lambda(r^2 + r_-^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_-),$$

que é a equação de uma quádrlica. Esta equação também pode ser escrita:

$$\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_+ - \lambda\vec{r}_-}{1-\lambda}\right)^2 - \left|\frac{\vec{r}_+ - \lambda\vec{r}_-}{1-\lambda}\right|^2 = \frac{\lambda r_-^2 - r_+^2}{1-\lambda} \quad (6-10)$$

Chamando:

$$\frac{\vec{r}_+ - \lambda\vec{r}_-}{1-\lambda} = \vec{r}_0 \quad \text{e} \quad \frac{\lambda r_-^2 - r_+^2}{1-\lambda} + r_0^2 = R^2,$$

a equação (6-10) finalmente se escreve:

$$|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = R^2,$$

isto é, existe um ponto C (Fig. 6-12) de raio vetor \vec{r}_0 , tal que o quadrado da distância de C até o ponto P é constante; logo, o ponto C é o centro de uma esfera de raio igual a $|\vec{r} - \vec{r}_0|^2$.

Se tomarmos, agora, a origem do nosso sistema de coordenadas no próprio ponto C, teremos $\vec{r}_0 = 0$, e portanto:

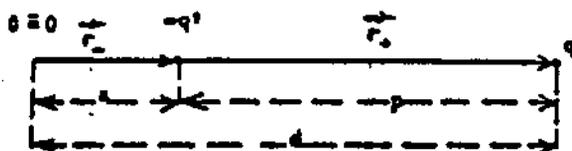


Fig. 6-12

$$\vec{r}_+ = \lambda\vec{r}_-; \quad (6-11)$$

como λ é um escalar, os raios vetores \vec{r}_- e \vec{r}_+ têm mesma direção, e o ponto C está alinhado

com as posições das cargas q e $-q'$; como além disso $\lambda > 0$, os dois vetores têm mesmo sentido, e o ponto C é exterior ao segmento que liga as duas cargas (Fig. 6-13). Por outro lado,

$$R^2 = \frac{\lambda r_-^2 - r_+^2}{1 - \lambda}, \quad (6-12)$$

e as equações (6-11) e (6-12) fornecem a solução de nosso problema: pois a primeira fixa a posição do centro da esfera, e a segunda o seu raio.

Chamemos agora (Fig. 6-13):

$$r_- = a, \quad r_+ = d, \quad p = d - a;$$

então de (6-11) vem:

$$d = \lambda a \quad \therefore \quad a + p = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 a,$$

e portanto a estará determinado em função de q , q' e p (dados do problema), por:

$$a = \frac{p}{\left(\frac{q}{q'}\right)^2 - 1}. \quad (6-13)$$

Como $a > 0$, tem-se necessariamente $q > q'$, isto é, a esfera está envolvendo a carga de módulo menor.

De (6-12) vem:

$$R^2 = \frac{\lambda a^2 - d^2}{1 - \lambda} = \frac{\lambda - \lambda^2}{1 - \lambda} a^2 = \lambda a^2;$$

como $\lambda a = d$:

$$R^2 = ad, \quad (6-14)$$

isto é, o raio da esfera é a média geométrica entre as distâncias de seu centro às duas cargas. De (6-14) virá ainda:

$$\frac{R^2}{d^2} = \frac{a}{d} = \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{q'}{q}\right)^2, \text{ e portanto:}$$

$$\frac{R}{d} = \frac{q'}{q}. \quad (6-15)$$

Então, dados q , q' e p (distância entre as cargas), por (6-13) determinamos a e conseqüentemente d , pois $d = p + a$; finalmente, conhecendo a e d , R estará determinado, e o problema resolvido. O potencial em um ponto P qualquer do espaço, criado pelas cargas q e $-q'$, será (Fig. 6-14) da forma (6-8):

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{\frac{R}{d}q}{r_-} \right), \quad (6-16)$$

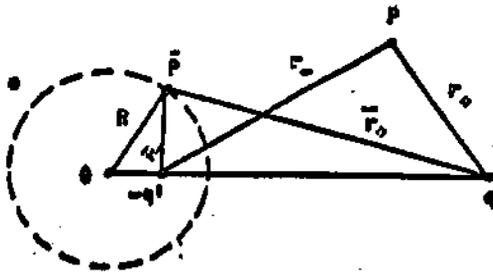


Fig. 6-14

\bar{r}_+ suas distâncias às cargas q e $-q'$ respectivamente, vemos de (6-9), (6-15) e (6-14):

$$\frac{\bar{r}_-}{\bar{r}_+} = \frac{q'}{q} = \frac{R}{d} = \frac{a}{R}, \quad (6-17)$$

e aplicando (6-16) ao ponto \bar{P} verificamos que $V_{\bar{P}} = 0$.

Se agora materializarmos a esfera s por um condutor ligado à terra, e se retirarmos a carga $-q'$, mantendo na mesma posição (a uma distância d do centro da esfera) a carga $+q$, teremos o problema proposto no início deste parágrafo. Vamos mostrar que (6-16) é uma solução deste problema. De fato, (6-16) é solução da equação de Laplace; fornece potencial nulo sobre o condutor e no infinito, e portanto em toda a fronteira da região exterior à esfera; e tende a:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+}$$

ao fazermos $r_+ \rightarrow 0$. Então, se (6-16) é solução, pelo teorema da unicidade do potencial, é única.

O problema da esfera condutora e da carga $+q$ pode assim ser identificado com o problema das duas cargas $-q'$ e $+q$, desde que sejam feitas restrições análogas às do parágrafo anterior. A solução do nosso problema será então:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{\frac{R}{d}}{r_-} \right), \text{ fora do condutor,} \\ V = 0, \text{ no condutor.} \end{array} \right.$$

Nessas mesmas regiões, respectivamente, o campo é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\frac{R}{d} \vec{r}_-}{r_-^3} \right), \end{array} \right. \quad (6-18)$$

isto é, o campo externo é o mesmo que o criado pela carga q e sua imagem $-q' = -\frac{R}{d}q$ (fictícia), localizada a uma distância $a = \frac{R^2}{d}$ do centro da esfera, sôbre a reta que liga q ao centro da esfera, e entre q e este centro.

Para determinar σ , devemos calcular E_s , isto é, o valor do campo num ponto exterior muito próximo à superfície da esfera (já sabemos, de (4-1), que o campo é af normal e igual a $-\frac{\sigma}{\epsilon_0}$). Para isso, ou usamos (6-18) e calculamos diretamente E_s , ou partimos de (6-16) e calculamos $\frac{\partial V}{\partial n}$. Usaremos o segundo método:

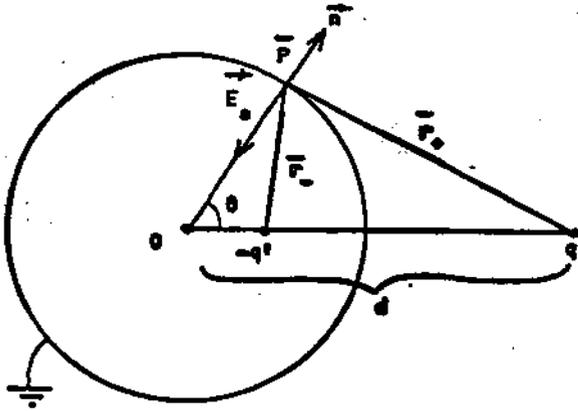


Fig. 6-15

$$E_s = -\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{r=R} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R},$$

sendo r a distância do centro da esfera a um ponto exterior vizinho a \bar{P} , sôbre o mesmo raio. Da Fig. 6-15 vemos que:

$$r_+ = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}, \quad r_- = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta},$$

e portanto:

$$E_s = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{R}{r_-} \right) \right]_{r=R} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_+^2} \frac{\partial r_+}{\partial r} - \frac{R}{d} \frac{1}{r_-^2} \frac{\partial r_-}{\partial r} \right]_{r=R} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\bar{r}_+} (R - d \cos \theta) - \frac{R}{d} \cdot \frac{1}{\bar{r}_-} (R - a \cos \theta) \right]$$

Substituindo agora \bar{r}_+ por $\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta}$ e \bar{r}_- por $\sqrt{R^2 + a^2 - 2ad \cos \theta}$, e usando as relações (6-17), obtemos:

$$E_s = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{d^2 - R^2}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{3/2}},$$

e portanto:

$$\sigma = - \frac{q}{4\pi R} \frac{d^2 - R^2}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{3/2}} \quad (6-19)$$

De (6-19) vemos que o valor absoluto máximo de σ é dado para $\theta = 0$, isto é, no ponto da esfera mais próximo da carga q ; e seu valor absoluto mínimo é dado para $\theta = \pi$, isto é, no ponto mais afastado. Pode-se imediatamente verificar que:

$$\int_s \sigma \, ds = -q',$$

isto é, a carga total induzida sobre a esfera condutora é igual à carga imagem.

A força atrativa entre a esfera e a carga q é a mesma que existiria entre q e a carga fictícia $-q'$, isto é:

$$F = \frac{-q \cdot q'}{4\pi\epsilon_0 (d-a)^2} = - \frac{q^2 R d}{4\pi\epsilon_0 (d^2 - R^2)^2}$$

Calculemos agora o trabalho realizado pela força \vec{F} , quando se transporta a carga q desde sua posição inicial até o infinito (Fig. 6-16):

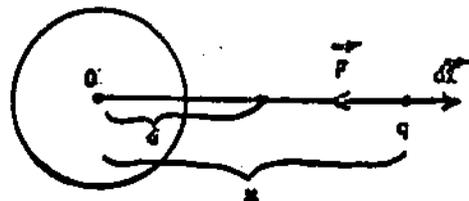


Fig. 6-16

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int_d^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_d^{\infty} F(x) dx = \\ &= - \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 - R^2)^2} = - \frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0(d^2 - R^2)}, \end{aligned}$$

isto é, o trabalho por unidade de carga será:

$$\mathcal{U}' = - \frac{q R}{8\pi\epsilon_0(d^2 - R^2)}.$$

Entretanto, o valor do potencial na posição da carga q , devido à carga $-q'$ (o potencial de uma carga puntiforme no ponto em que ela se situa não tem sentido físico) é, em virtude de (6-16), dado por:

$$V = - \frac{q \frac{R}{d}}{4\pi\epsilon_0(d-a)} = - \frac{qR}{4\pi\epsilon_0(d^2 - R^2)},$$

que vale o dobro de \mathcal{U}' , resultado em aparente contradição com a definição de potencial elétrico, introduzida no parágrafo 4-2. A contradição desaparece, todavia, quando lembramos que o potencial é definido como o trabalho realizado pelo campo, quando se trans

porta a carga unitária desde o ponto até o infinito, desde que se mantenham fixas as cargas que geram o campo. Ora, $-q'$ não é uma carga fixa: não só se desloca aproximando-se do centro da esfera quando q se afasta (pois a é inversamente proporcional a d), como ainda seu módulo diminui quando q se afasta (pois q' é inversamente proporcional a d).

Até aqui supusemos a esfera condutora ligada à terra. O mesmo método de solução poderia ser usado nos seguintes casos: esfera isolada e neutra; esfera isolada com carga total Q ; esfera a um potencial dado, V_0 . Vejamos cada caso isoladamente:

1^o) Esfera isolada e neutra. Podemos partir do problema anterior, no qual a esfera está ligada à terra, contendo carga total $-q'$, numa distribuição de equilíbrio. Se isolarmos agora a esfera, nada sucederá, a não ser que acrescentemos carga à esfera. Neste caso, a carga adicionada se redistribuirá sobre a superfície da esfera, até que se atinja a situação de equilíbrio para as cargas adicionais, que é a da distribuição uniforme. Como as duas distribuições de carga, a primitiva e a adicional, são distribuições de equilíbrio, uma não interfere sobre a outra, e pelo teorema de superposição, campo e potencial em todo o espaço serão a soma dos campos e dos potenciais devidos às duas distribuições. Se queremos que a esfera esteja neutra, isto é, com carga total nula, devemos acrescentar-lhe carga q' ; esta carga adicional dará campo nulo e potencial constante $\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R}$ no interior, e no exterior produzirá o mesmo campo e o mesmo potencial que uma carga $+q'$ localizada na origem (Fig. 6-17). O potencial em todo o espaço será então:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{R}{r_-} + \frac{R}{r} \right), \text{ fora do condutor} \\ V = \frac{\frac{R}{d} q}{4\pi\epsilon_0 R}, \text{ no condutor.} \end{array} \right.$$

A densidade superficial de cargas σ' valerá agora:

$$\sigma' = \sigma + \frac{\frac{R}{d} q}{4\pi R^2},$$

onde σ é dada por (6-19).

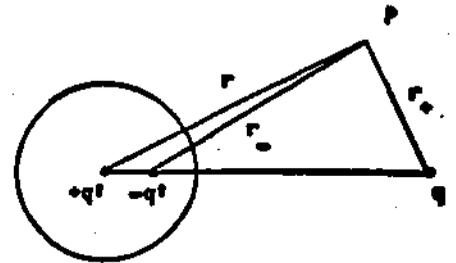


Fig. 6-17

2^o) Esfera com carga total Q. À situação anterior, bastará acrescentarmos nova distribuição de equilíbrio, resultante da adição de carga Q à esfera (Fig. 6-18).

Teremos para o potencial:

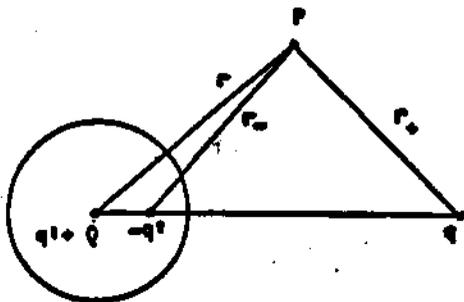


Fig. 6-18

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{R}{r_-} \right) + \frac{\frac{R}{d} q + Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \\ \text{fora do condutor;} \\ V = \frac{\frac{R}{d} q + Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \text{ no condutor;} \end{array} \right.$$

e para a densidade superficial de cargas:

$$\sigma'' = \sigma + \frac{\frac{R}{d} q + Q}{4\pi R^2}.$$

3º) Esfera a um potencial V_0 . À esfera isolada neutra, bastará acrescentarmos carga \bar{Q} , tal que o potencial no seu interior seja (Fig. 6-19):

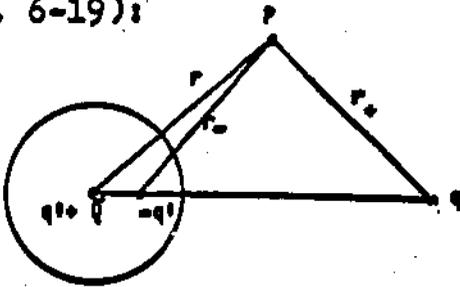


Fig. 6-19

$$V_0 = \frac{\bar{Q}}{4\pi\epsilon_0 R},$$

$$\text{isto é, } \bar{Q} = 4\pi\epsilon_0 R V_0.$$

Teremos então para o potencial:

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{\frac{R}{d}}{r_-} \right) + \frac{RV_0}{r}, \text{ fora do con-} \\ \text{dutor,} \\ V = V_0, \text{ no condutor,} \end{array} \right.$$

e para a densidade superficial de cargas:

$$\sigma''' = \sigma + \frac{4\pi\epsilon_0 RV_0}{4\pi R^2} = \sigma + \frac{\epsilon_0 V_0}{R}.$$

6 - 7. Condutor com cavidade esférica no interior da qual existe uma carga puntiforme. Sejam R o raio da cavidade e q uma carga puntiforme situada a uma distância a do centro da cavidade (Fig. 6-20); e seja o condutor ligado à terra. Por sugestão do problema

anterior, tentemos a solução:

$$\begin{cases} V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{R}{r_-} \right), & \text{na cavidade,} \\ V = 0, & \text{no condutor e fora dele,} \end{cases} \quad (6-20)$$

isto é, admitamos que o potencial em um ponto qualquer da cavidade, criado pela carga q e pela distribuição de cargas induzidas na superfície da cavidade, seja o mesmo que o criado pela carga q e por sua imagem $-q' = -\frac{R}{a}q$, situada a uma distância $d = \frac{R^2}{a}$ do centro da cavidade; e que o potencial seja nulo

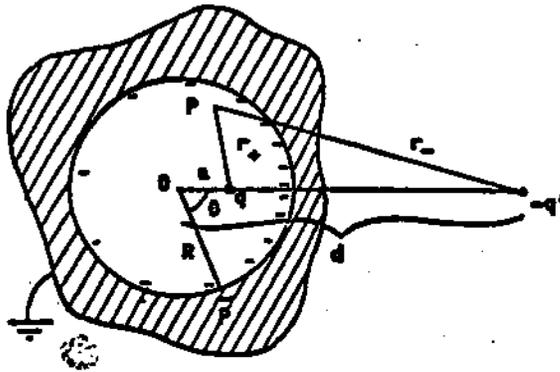


Fig. 6-20

no condutor e fora dele.

De (6-20) e usando as relações (6-17), vemos que o potencial na superfície da cavidade será:

$$V_s = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{R} \right) = 0,$$

que é uma das condições a que deve satisfazer nossa solução. Por outro lado, quando $r_+ \rightarrow 0$, (6-20) fornece o potencial da carga puntiforme q . Finalmente, sendo o potencial nulo sobre o condutor e nulo no infinito, e não havendo cargas externas ao condu-

tor (a carga - q' é fictícia), então o potencial é nulo em todo o espaço, e (6-20) é solução para o problema. Logo, é única.

Aplicando o teorema de Gauss a uma superfície inteiramente contida no condutor, sendo nulo o campo em toda a sua extensão, vemos que a carga interior à superfície de Gauss considerada é nula, e portanto a carga induzida na superfície da cavidade é igual a - q. O mesmo resultado poderia ser obtido diretamente, calculando $\int_s \sigma ds$ sobre a superfície da cavidade, sendo que:

$$\sigma = - \frac{q}{4\pi R} \frac{R^2 - a^2}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{3/2}} \quad (6-21)$$

pode ser calculado por processo análogo ao usado no parágrafo 6-6.

Podemos, ainda aqui, calcular a força atrativa entre a carga e o condutor, e finalmente estudar os diferentes casos: condutor com carga total nula, condutor com carga total Q, e condutor a um potencial V_0 dado, o que ficará deixado como exercício.

6 - 8. Fio infinito uniformemente carregado paralelo à face plana de um condutor ligado à terra. Seja λ a densidade linear de cargas sobre o fio, e d a distância do fio ao plano (Fig. 6-21). Cargas negativas com densidade σ serão induzidas na superfície do condutor, de difícil determinação. Poderemos, ainda aqui, utilizar o método das imagens elétricas e admitir, por sugestão do problema resolvido no parágrafo 6-5, que o potencial na região à di-

reita do plano é o mesmo que seria produzido pelo fio com densidade linear λ e por outro fio com densidade linear $-\lambda$, paralelo ao primeiro, e a uma distância d para trás do plano. É claro, por razões análogas às expostas no parágrafo 6-5, que o campo e o potencial são nulos em toda a região à esquerda do plano.

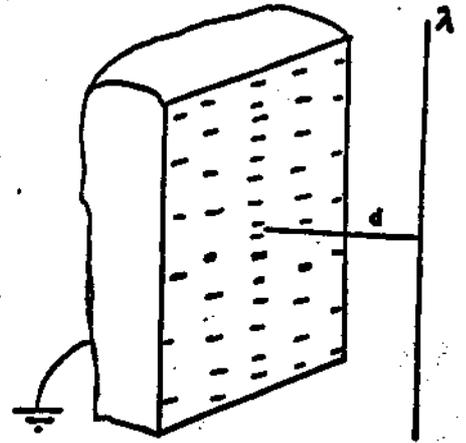


Fig. 6-21

Vamos então admitir que o potencial à direita do plano é dado pelo potencial dos 2 fios (Fig. 6-22):

$$V_p = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\log \frac{1}{r_+} - \log \frac{1}{r_-} \right) + C,$$

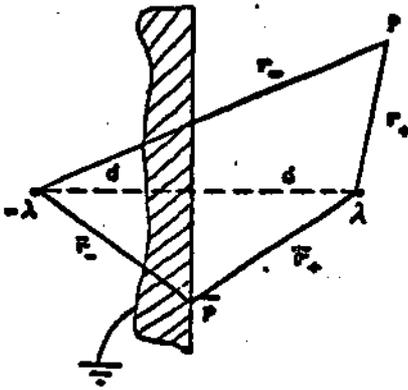


Fig. 6-22

em virtude de (4-29), onde C é uma constante arbitrária dependente da escolha da origem dos potenciais. A escolha que convém ao nosso problema é aquela que faz nulo o potencial sobre o plano, isto é, aquela para a qual:

$$V_s = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\log \frac{1}{\bar{r}_+} - \log \frac{1}{\bar{r}_-} \right) + C = 0;$$

ora, $\bar{r}_+ = \bar{r}_-$, e portanto devemos tomar $C = 0$. Então a função:

$$\begin{cases} V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_-}{r_+}, & \text{à direita do condutor,} \\ V = 0, & \text{no condutor e à sua esquerda,} \end{cases} \quad (6-22)$$

satisfaz a t odas as condi oes exigidas pelo nosso problema, e   portanto única. Isto  , o potencial (e o campo) criado por um fio infinito com distribui o linear uniforme de cargas λ , paralelo a um condutor plano ligado   terra, na região   direita do condutor,   o mesmo que o criado pelo fio (λ) e por sua imagem ($-\lambda$) em rela o ao plano.

6 - 9. Fio infinito uniformemente carregado paralelo ao eixo de um cilindro condutor infinito ligado   terra. Para resolver êste problema, vamos antes resolver o seguinte: quais são as superfícies equipotenciais para o campo criado por 2 fios paralelos, infinitos, com densidades lineares uniformes de carga $+\lambda$ e $-\lambda$ respectivamente, separados por uma distância p ? (uma delas   o plano paralelo aos fios e equidistante d eles, como vimos no parágrafo

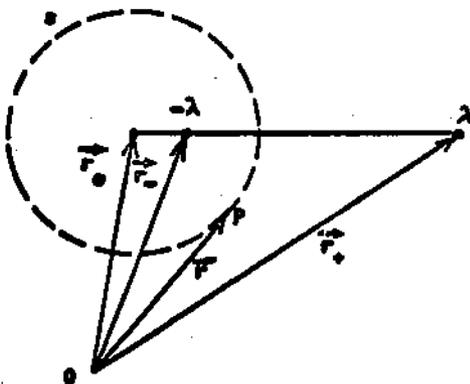


Fig. 6-23

6-8). Seja s uma dessas superfícies, e P um ponto qualquer dela; escolhendo um ponto qualquer O do espaço para origem do sistema de coordenadas (Fig. 6-23), teremos para o potencial em P :

$$V_P = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{|\vec{r} - \vec{r}_-|}{|\vec{r} - \vec{r}_+|} + C ;$$

então a equa o da superfície equipotencial passando por P será:

$$V_p = \text{cte},$$

isto é:

$$|\vec{r} - \vec{r}_+|^2 = k^2 |\vec{r} - \vec{r}_-|^2. \quad (6-23)$$

Mas esta é formalmente a mesma equação (6-9), com as diferenças de que agora $|\vec{r} - \vec{r}_+|$ e $|\vec{r} - \vec{r}_-|$ representam distâncias a uma reta e não a um ponto, como no parágrafo 6-6, e que em lugar de λ , que tem valor fixo, nela aparece k^2 , sendo k um parâmetro. A Fig. 6-23 representa assim a seção normal à superfície equipotencial, feita pelo plano que contém P. Vemos que tôdas as superfícies equipotenciais são cilindros de revolução com eixos paralelos aos fios, cada um determinado por um valor do parâmetro k . Continua a valer, ainda aqui, a relação (6-10), com as restrições acima, e também (6-11) e (6-12), quando a origem do sistema de coordenadas é tomada sobre o eixo, no plano que contém P, normal aos fios. Fazendo neste caso $r_+ = d$ e $r_- = a$, teremos:

$$d = k^2 a, \quad p = d - a \quad \text{e} \quad R = \frac{d}{k}.$$

Assim, fixado um k , teremos determinado a posição do eixo do cilindro equipotencial,

$$a = \frac{p}{k^2 - 1},$$

e o seu raio:

$$R = \frac{p + a}{k}.$$

Inversamente, poderemos determinar qual o valor de k para o qual se tenha um cilindro equipotencial de raio R ; êste valor será:

$$k = \frac{d}{R}, \quad (6-24)$$

sendo d calculável em termos de p e R . Seja \bar{P} um ponto dessa equipotencial, e chamemos \bar{r}_+ e \bar{r}_- às distâncias de \bar{P} aos fios (Fig. 6-24). Então o potencial em \bar{P} será:

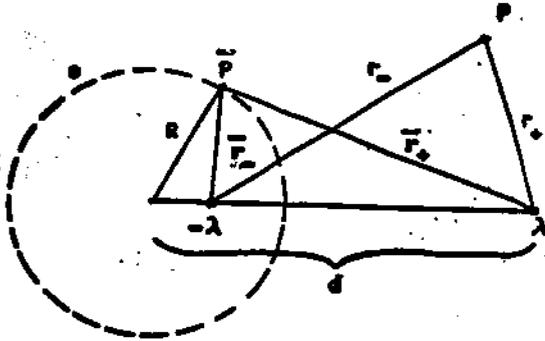


Fig. 6-24

$$V_{\bar{P}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\bar{r}_-}{\bar{r}_+} + C,$$

ou ainda, em virtude de (6-23) e (6-24):

$$V_{\bar{P}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{R}{d} + C.$$

Se quisermos então que s seja uma superfície a potencial nulo, devemos tomar:

$$C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{d}{R}.$$

Escolhendo esta origem para os potenciais, o potencial em um ponto P qualquer do espaço será dado por:

$$V_P = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_- d}{r_+ R}, \quad (6-25)$$

e se \bar{P} é um ponto da superfície s , valem as relações:

$$\frac{\bar{r}_-}{\bar{r}_+} = \frac{R}{a} = \frac{d}{R}. \quad (6-26)$$

Se agora materializarmos o cilindro s por um condu-

tor ligado à terra, e se retirarmos o fio de densidade $-\lambda$, mantendo na mesma posição (a uma distância d do eixo do cilindro) o fio de densidade $+\lambda$, teremos o problema proposto no início do parágrafo.

Vamos mostrar que (6-25) é uma solução, portanto única, do problema. De fato, (6-25) é solução da equação de Laplace; fornece potencial nulo sobre o condutor e constante no infinito, e o potencial de um fio nas vizinhanças de $+\lambda$. Então a solução do nosso problema será:

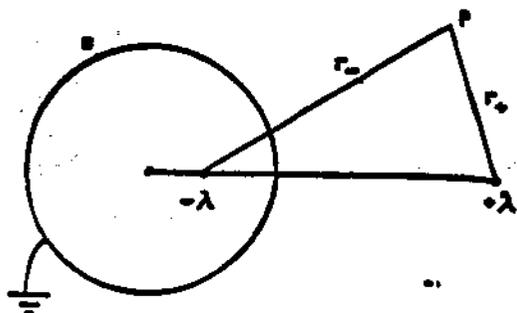


Fig. 6-25

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_- d}{r_+ R}, \text{ fora do condutor,} \\ V = 0, \text{ no condutor.} \end{array} \right. \quad (6-27)$$

Isto é, o potencial (e o campo) criado por um fio infinito com distribuição linear uniforme de cargas λ , paralelo ao eixo de um condutor cilíndrico infinito ligado à terra, em pontos externos ao condutor, é o mesmo que o criado pelo fio e por sua imagem, que é um fio com densidade linear de cargas (fictícias) $-\lambda$, paralelo ao fio dado, e colocado a uma distância $a = \frac{R^2}{d}$ do eixo do cilindro, sendo R o raio do cilindro e d a distância de seu eixo ao fio dado.

6 - 10. Esfera condutora num campo elétrico uniforme. Seja um campo elétrico uniforme \vec{E}_0 paralelo ao eixo dos x . As linhas de fôr

ça são então retas paralelas ao eixo dos x . Se neste campo colocarmos uma esfera condutora isolada e neutra, ela continuará descarregada, mas suas cargas se redistribuirão, deslocando-se as cargas negativas em sentido contrário ao campo, até que se atinja a situação de equilíbrio, para a qual a esfera ficará a potencial constante, diferente de zero, e terá campo nulo no seu interior (Fig. 6-26). O

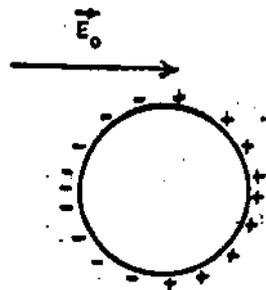


Fig. 6-26

campo externo se modificará, e portanto a configuração das linhas de força.

Podemos resolver este problema pelo método das imagens utilizando o seguinte artifício: consideremos duas cargas $+Q$ e $-Q$ muito grandes, colocadas sobre o eixo dos x , nos pontos $-x_0$ e $+x_0$ respectivamente (sendo x_0 muito grande em comparação com o raio da esfera), em que estamos tomando a origem no centro O da esfera condutora (Fig. 6-27). Então, no ponto O , o campo valerá:

$$E = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 x_0^2},$$

de acordo com as hipóteses consideradas, nas proximidades do ponto O , isto é, na região em que se situa a esfera, o campo é aproximadamente uniforme (ver figura 2-9); e se

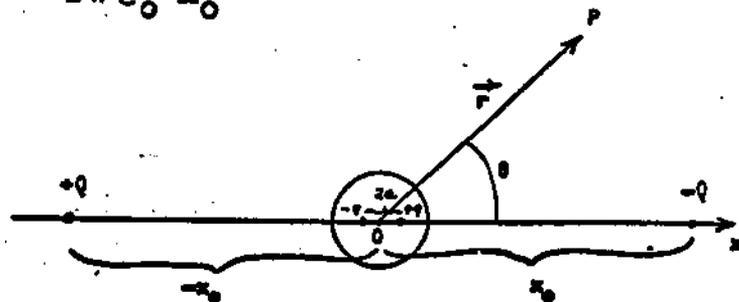


Fig. 6-27

queremos que ele valha \vec{E}_0 , devemos impor:

$$Q = 2\pi \epsilon_0 x_0^2 E_0 .$$

Ora, a distribuição de cargas resultante sobre a esfera deve ser tal que o campo que ela produza externamente seja o mesmo que o produzido pelas cargas $-q$ e $+q$, situadas nos pontos $-a$ e a , imagens das cargas $+Q$ e $-Q$, respectivamente, em relação à esfera. Vamos mostrar que essa hipótese é válida. Em primeiro lugar, vemos que a carga total da esfera é nula, porque a $-q$ corresponde carga $-q$ sobre a esfera, e a $+q$, carga $+q$ sobre ela. Em seguida verificaremos se o potencial da distribuição assim obtida, que é um dipolo elétrico localizado na origem, fornece na região externa um potencial que satisfaça a todas as condições exigidas.

O momento do dipolo elétrico constituído pelas cargas - imagens é:

$$p = qd = 2a q = 2 \frac{R^2}{x_0} \frac{RQ}{x_0}, \text{ isto é:}$$

$$p = 4\pi \epsilon_0 E_0 R^3. \quad (6-28)$$

Tentemos agora a solução:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_p = -E_0 x + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} + A, \text{ fora do condutor,} \\ V_i = B, \text{ no condutor,} \end{array} \right. \quad (6-29)$$

onde A e B são constantes que dependem da origem escolhida para o potencial, e em que o 1º termo de V_p dá o potencial devido ao campo externo, e o 2º termo, o campo de um dipolo localizado na ori-

gem, calculado num ponto de raio vetor $\vec{r} = (x, y, z)$. Como o problema tem simetria cilíndrica em torno do eixo dos x , o potencial é apenas função de duas coordenadas, que podemos tomar, por exemplo, como r e θ . Nas novas coordenadas, e usando (6-28), as equações (6-29) se escrevem:

$$\begin{cases} V = E_0 \left(-r + \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta + A, \text{ fora do condutor,} \\ V = B, \text{ no condutor.} \end{cases} \quad (6-30)$$

Mostremos que as funções (6-30) dão a solução do nosso problema. De fato: 1^o) satisfazem à equação de Laplace; 2^o) a 1^a função, que representa o potencial externo, dá o potencial correspondente ao campo elétrico \vec{E}_0 quando $r \rightarrow \infty$; e 3^o) para $r = R$ tem-se potencial constante na superfície:

$$V_s = E_0 \left(-R + \frac{R^3}{R^2} \right) \cos \theta + A = A.$$

Vemos também que, pela continuidade do potencial para $r = R$, tem-se:

$$A = B.$$

Calculemos agora a densidade de cargas sobre a superfície da esfera:

$$\sigma = \epsilon_0 E_s = - \epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = E_0 \epsilon_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{R^3} \right) \cos \theta,$$

isto é:

$$\sigma = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

Vemos então que σ tem valor absoluto máximo nos pontos da superfície do condutor para, os quais $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, e tem valor nulo nos pontos $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. As linhas de força terão a configuração apresentada na Fig. 6-28, saindo das cargas positivas e entrando nas cargas negativas induzidas na superfície da esfera.

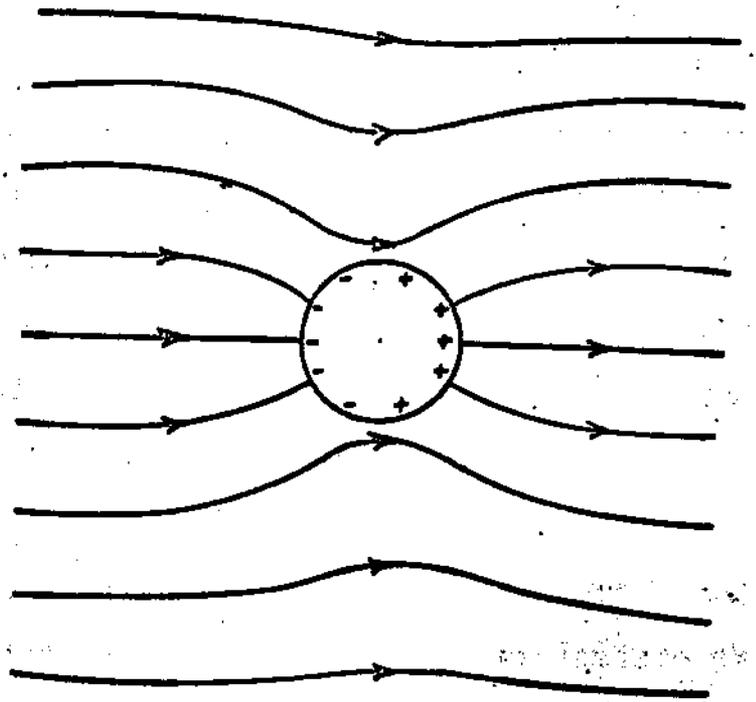


Fig. 6-28

Problemas propostos:

- 6-1. Demonstre, a partir de (6-7), que a carga total induzida sobre a superfície do plano condutor é $-q$.
- 6-2. Calcule a força de atração entre o condutor e a carga q (parágrafo 6-4), e demonstre que o trabalho, por unidade de carga, realizado por esta força, quando se transporta a carga q desde uma dada posição até o infinito, é a metade do valor do potencial na posição inicial da carga q . Explique por quê.
- 6-3. Demonstre, usando (6-19) e integrando sobre espiras circulares

que a carga total induzida sobre a esfera condutora é $-q \frac{R}{d}$.

- 6-4. Calcule a força atrativa entre uma esfera condutora e uma carga q externa (parágrafo 6-5), e o trabalho, por unidade de carga, realizado por esta força para transportar a carga q desde uma dada posição até o infinito, comparando-o com o valor do potencial na posição inicial da carga q , nos seguintes casos: 1º) esfera isolada e neutra; 2º) esfera com carga total Q ; 3º) esfera a um potencial V_0 .
- 6-5. Um condutor esférico de raio R_2 tem uma cavidade esférica, concêntrica com a superfície do condutor, de raio R_1 , na qual existe uma carga q , situada a uma distância a do centro do condutor. Calcular o potencial em todo o espaço e as densidades de carga sobre as superfícies interna e externa do condutor, nos seguintes casos: 1º) condutor ligado à terra; 2º) condutor isolado e neutro; 3º) condutor com carga total Q ; 4º) condutor a um potencial V_0 .
- 6-6. Demonstre, usando (6-22), que a densidade de cargas induzidas sobre o plano condutor é igual a $-\frac{\lambda d}{\pi r^2}$, onde r é a distância do ponto considerado ao fio, e que a carga total induzida por unidade de comprimento é $-\lambda$.
- 6-7. Calcule, usando (6-25) e (6-26), a densidade superficial de cargas induzidas sobre o cilindro condutor, e demonstre que a carga total induzida, por unidade de comprimento, é $-\lambda$.

- 6-8. Calcule o potencial em todo o espaço criado por um cilindro condutor infinito, paralelo a um fio infinito com densidade linear de cargas $\lambda = \text{cte}$, nos seguintes casos: 1º) cilindro isolado com carga total nula; 2º) cilindro isolado com densidade linear de cargas λ ; 3º) cilindro a um potencial V_0 .
- 6-9. Calcule o potencial em todo o espaço devido a um condutor, ligado à terra, com uma cavidade cilíndrica infinita, no interior da qual existe um fio infinito com densidade linear de cargas $\lambda = \text{cte}$, paralelo ao eixo do cilindro, e distante dele de a .
- 6-10. Calcule o potencial e o campo em todo o espaço devidos a um cilindro isolado que é colocado num campo externo uniforme \vec{E}_0 .
- 6-11. Uma esfera metálica, com carga total nula e de raio igual a R_2 , tem uma cavidade esférica de raio R_1 , cujo centro O' está a uma distância D do centro O da superfície externa do condutor. Coloca-se uma carga q a uma distância $a < R_1$ de O' , sobre a reta OO' . Calcular o potencial elétrico em todo o espaço.
- 6-12. Um condutor metálico tem a forma de uma camada esférica de raios interno e externo iguais a 10 cm e 12 cm, e está isolado e neutro. No seu interior existe uma esfera metálica de raio igual a 5 cm, com centro a 2 cm do centro da camada esférica. Sabendo que a esfera interna tem carga igual a 10^{-10} C

e que, em dado momento, os 2 condutores são postos em contato: a) calcular numéricamente a distribuição de cargas nos condutores, após o equilíbrio; b) determinar a forma do potencial em todo o espaço, e calcular numéricamente seu valor no condutor externo.

6-13. Uma carga puntiforme $q = 10^{-9}$ C é colocada a uma distância de 10 cm do centro de uma esfera condutora de raio igual a 3 cm, isolada e neutra. Calcular a força atrativa entre a esfera e a carga.

6-14. Seja uma camada esférica condutora de raio R e espessura desprezível. A uma distância

$p > R$ de seu centro coloca-

se uma carga puntiforme q ,

e no seu interior, a uma

distância $p' = \frac{R^2}{p}$ de O, co-

loca-se outra carga puntiforme

$q' = \frac{R}{p} q$ (Fig. 6-29). Calcular o potencial em todo o espaço, sabendo que o condutor está isolado e neutro.

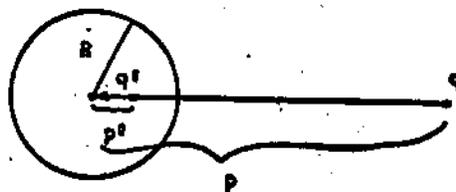


Fig. 6-29

CAPÍTULO 7

MÉTODO DE GREEN

É um método geral para a resolução de equações diferenciais lineares (como a equação de Poisson, por exemplo), e com outras aplicações na teoria dos campos. Vamos estudá-lo aqui sem grande desenvolvimento, apenas como uma aplicação dos conhecimentos adquiridos de Análise Vetorial.

Suponhamos que se queira encontrar a solução V da equação de Poisson, (5-16), e examinar esta solução numa região limitada por uma superfície s (a região não é necessariamente conexa); sejam nessa região distribuições de cargas ρ (as distribuições puntiformes, lineares ou superficiais porventura existentes serão substituídas por distribuições espaciais); e sejam $V_s(\vec{r})$ - potencial sobre s - e eventualmente $E_n = \left(-\frac{\partial V}{\partial n}\right)_s$ funções conhecidas de $\vec{r} = (x, y, z)$. Antes de procurar a solução V em qualquer ponto da região, demonstremos um lema preliminar, o chamado "teorema de Green", que é uma consequência imediata do teorema de Gauss.

7 - 1. Teorema de Green. É expresso pela equação:

$$\int_s (\varphi \text{ grad } \psi - \psi \text{ grad } \varphi) \cdot \vec{ds} = \int_v (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dv, \quad (7-1)$$

onde s é a fronteira da região, v o seu volume e $\vec{ds} = \vec{n} ds$, sendo \vec{n} orientada para fora da região (Fig. 7-1). Usando o teorema de Gauss para divergência, (5-35), os

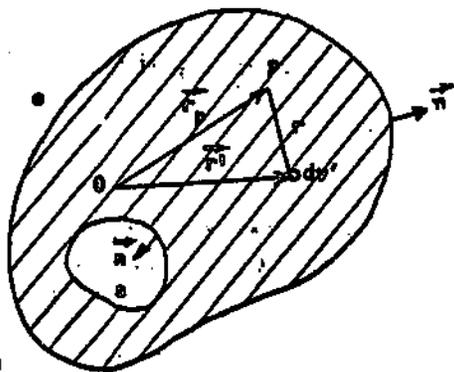


Fig. 7-1

para divergência, (5-35), os 2 termos do 1º membro de (7-1) poderão ser transformados da seguinte maneira:

$$\int_s \varphi \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{ds} = \int_v \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi) dv.$$

Mas:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \varphi \Delta \psi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi,$$

e assim o 1º membro de (7-1) dará:

$$\int_s (\varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{ds} = \int_v (\varphi \Delta \psi + \cancel{\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi} - \psi \Delta \varphi - \cancel{\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi}) dv,$$

o que demonstra o teorema.

7 - 2. Fórmula de Green. Vamos agora usar (7-1) para a determinação de potencial no ponto P , interior à região, de raio vetor \vec{r}_p .

Tomemos para função ψ o potencial V , cujo laplaciano é dado por (5-16) e do qual conhecemos V_s e eventualmente $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_s$, e tomemos para ψ uma função cujo laplaciano também conheçamos, como por exemplo $\frac{1}{r}$, para a qual:

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0, \text{ desde que } r = |\vec{r}_p - \vec{r}'| \neq 0.$$

Chamando $dv' = dx' dy' dz'$ ao elemento de integração, determinado pelo raio vetor \vec{r}' , teremos:

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

onde x, y, z são as componentes de \vec{r}_p . Neste caso, $\frac{1}{r}$ representa o potencial criado em dv' por uma carga igual a $4\pi\epsilon_0$, colocada em P . Como no ponto P a função ψ apresenta uma singularidade, vamos excluí-lo da região, cercado-o por uma esfera de raio R que faremos depois tender a zero. Chamemos s_0 à fronteira da região e s_1 à superfície da

esfera (Fig. 7-2). O 2º membro de (7-1) dará:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \Delta \frac{1}{r} dv' &= \int_V \frac{1}{r} \left(-\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dv' = \\ &= \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0 r} dv', \end{aligned} \quad (7-2)$$

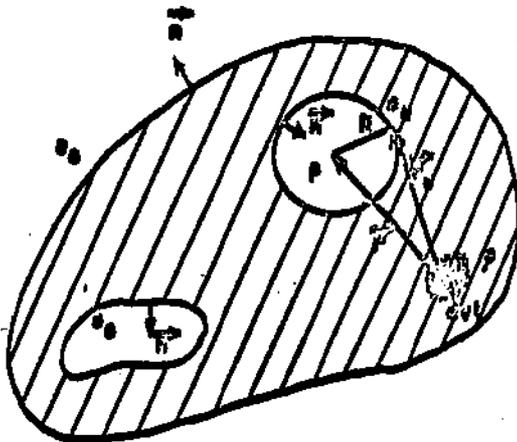


Fig. 7-2

e o 1º membro constará de 4 termos:

$$\int_{s_e} v(\vec{r}_e) \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{ds} - \int_{s_e} \frac{1}{R} \vec{\nabla} v \cdot \vec{ds} + \int_{s_0} v \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{ds} - \int_{s_0} \frac{1}{r} \vec{\nabla} v \cdot \vec{ds}. \quad (7-3)$$

Fazendo $R \rightarrow 0$, o potencial em qualquer ponto de s_e tende ao potencial em P, e $v(\vec{r}_e)$ fica constante e igual a $v(\vec{r})$. Assim o 1º termo de (7-3) se escreve:

$$v(\vec{r}) \int_{s_e} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{ds} = 4\pi v(\vec{r}). \quad (7-4)$$

Que o valor da integral do 1º membro de (7-4) é 4π , verifica-se calculando-a diretamente, ou então por um raciocínio físico: ela vale o fluxo, que sai da superfície esférica de raio R, do campo gerado por uma carga $q = 4\pi\epsilon_0$ situada em P (pois, embora $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$ seja igual a $-\vec{E}$, em s_e a normal está orientada para dentro). Mas, pelo teorema de Gauss, esse fluxo vale $\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\epsilon_0} = 4\pi$.

O 2º termo de (7-3) se escreve:

$$-\frac{1}{R} \int_{s_e} \vec{\nabla} v \cdot \vec{ds} = -\frac{1}{R\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

valendo aqui o mesmo raciocínio feito no cálculo da integral anterior. Quando $R \rightarrow 0$, esta integral tende a zero.

Finalmente, igualando (7-2) e (7-3), a equação (7-1) se torna:

$$v(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dv'}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{s_0} \frac{1}{r} \vec{\nabla} v \cdot \vec{ds} - \frac{1}{4\pi} \int_{s_0} v \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{ds}, \quad (7-5)$$

que é a chamada "fórmula de Green". Vejamos sua interpretação física: o valor do potencial num ponto P, interno à região, é dado por uma soma de 3 termos:

1º termo: representa o potencial criado pelas distribuições de cargas existentes no interior da região.

Os outros dois termos correspondem ao potencial em P, devido às distribuições de cargas exteriores à região:

2º termo: representa o potencial criado por uma distribuição superficial de cargas fictícias, localizadas sobre a fronteira da região, de densidade:

$$\sigma' = -\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$$

(sendo \vec{n} orientado para fora da região), pois:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{1}{r} \vec{\nabla} V \cdot \vec{ds} = \int_{S_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \epsilon_0 (-\vec{E}) \cdot \vec{ds} = \int_{S_0} \frac{-\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}}{4\pi\epsilon_0 r} ds.$$

3º termo: representa o potencial criado por uma dupla camada fictícia, ao longo da fronteira da região, de potência:

$$m' = \epsilon_0 V_s.$$

De fato, o último termo de (7-5) se escreve:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} V \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{ds} = - \int_{S_0} (\epsilon_0 V_s) \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \right) ds. \quad (7-6)$$

De (4-22) vemos que

$$-\left(\epsilon_0 V_s \vec{n} ds\right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\right) = \frac{(\epsilon_0 V_s \vec{n} ds) \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

é o potencial de um dipolo, de momento $\vec{dp} = \epsilon_0 V_s \vec{n} ds$, e assim a integral representa o potencial de uma dupla camada (parágrafo 4-7), de potência $\vec{m}^i = \frac{dp}{ds} \vec{n} = \epsilon_0 V_s \vec{n}$, levando em conta que a normal foi aqui orientada da mesma maneira que no parágrafo 4-7.

Com essas interpretações, a fórmula de Green também se escreve:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \frac{\rho dv'}{r} + \int_S \frac{\sigma' ds}{r} + \int_S \frac{\vec{m}^i \cdot \vec{r}}{r^3} ds \right]. \quad (7-7)$$

Demonstra-se que $V(\vec{r})$, dado por (7-7), se anula quando estendido analiticamente para a região exterior. Na realidade, o potencial não é necessariamente nulo fora da região considerada; isso significa apenas que a fórmula de Green (7-7) só é válida no interior da região.

Nosso desenvolvimento foi feito com uma determinada escolha da função ψ ; em verdade, poderíamos ter tomado qualquer função que satisfizesse às condições:

$$\Delta\psi = 0, \quad \text{se } r \neq 0; \quad \psi \rightarrow \frac{1}{r}, \quad \text{se } r \rightarrow 0. \quad (7-8)$$

O desenvolvimento para a obtenção da fórmula de Green seria, então, inteiramente análogo ao anterior, e conduziria à fórmula de Green generalizada:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \psi \rho dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{ds} - \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{ds}. \quad (7-9)$$

7 - 3. Problema de Dirichlet. Sabemos que o potencial fica unívocamente determinado em todos os pontos de uma região, quando se conhecem seu valor sobre toda a fronteira da região, e as distribuições de cargas existentes no seu interior. Assim, o valor do campo elétrico sobre a fronteira é um dado superabundante, cujo conhecimento se faz, entretanto, necessário, para a aplicação da fórmula de Green (7-5). Uma escolha adequada para a função ψ em (7-9) poderá suprimir essa superabundância: se ela se anula sobre a superfície s , o 2º termo de (7-9) não comparece.

Exemplo: seja um disco condutor mantido a potencial V_0 , blindado por uma lâmina infinita, mantida a potencial nulo (Fig. 7-3). Queremos determinar o potencial e o campo num ponto qualquer do eixo de simetria. Seja R o raio do disco, e $P(x,0)$ o ponto no qual queremos calcular o potencial. Usaremos o método de Green a-

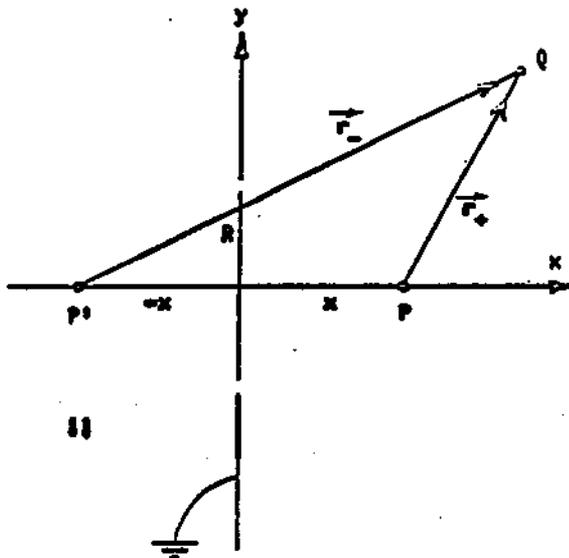


Fig. 7-3

plicado à região que inclui P , limitada, à esquerda, pelo plano $x=0$ e, à direita, por uma superfície no infinito. Devemos aqui escolher, em (7-9), uma ψ que satisfaça à equação de Laplace, que se comporte como $\frac{1}{r}$ nas vizinhanças de P , e que se anule sobre o plano: podemos então tomar, para ψ , o potencial devido à carga $4\pi\epsilon_0$, situada em P , e mais à carga $-4\pi\epsilon_0$, situada em

P' , imagem de P em relação ao plano. Neste caso, o potencial em um ponto genérico Q da região será (Fig. 7-3):

$$\psi_Q = \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}$$

Como $\rho = 0$ na região, em (7-9) anula-se também o 1º termo, e o potencial em P será dado por:

$$V_P = -\frac{1}{4\pi} \int_S V_s \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi} \int_S V_s \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right) \cdot d\vec{s}$$

(esta expressão seria válida mesmo que P não estivesse sobre o eixo de simetria). Como $V_s = 0$ em todos os pontos da superfície, exceto sobre o disco de raio R, e como sobre o plano $x = 0$ tem-se $r_+ = r_- = r$, e $\vec{r} \cdot d\vec{s} = \vec{r} \cdot \vec{n} ds = r \cos \theta ds$ (Fig. 7-4), virá:

$$V_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{disco}} V_0 \frac{2 \cos \theta}{r^2} ds$$

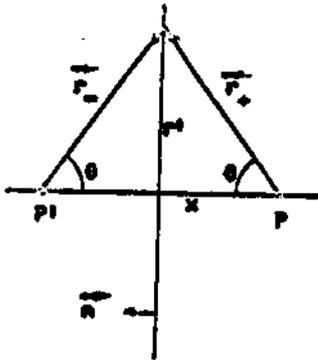


Fig. 7-4

Como P está no eixo de simetria:

$$V_P = \frac{V_0 x}{2\pi} \int_0^R \frac{2\pi r' dr'}{(x^2 + r'^2)^{3/2}} =$$

$$= V_0 x \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + r'^2}} \right]_0^R$$

E, portando,

$$V_P = V_0 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

dá o potencial num ponto P qualquer do eixo dos x.

CAPÍTULO 8

ENERGIA ELETROSTÁTICA

8 - 1. Energia de um sistema de cargas puntiformes. Seja um sistema de cargas puntiformes q_1, q_2, \dots, q_n , tôdas positivas. Quando colocadas em proximidade, nas posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, repelem-se e tendem a afastar-se o mais possível umas das outras. Podemos, portanto, retirar trabalho dêsse sistema de cargas. Chama-

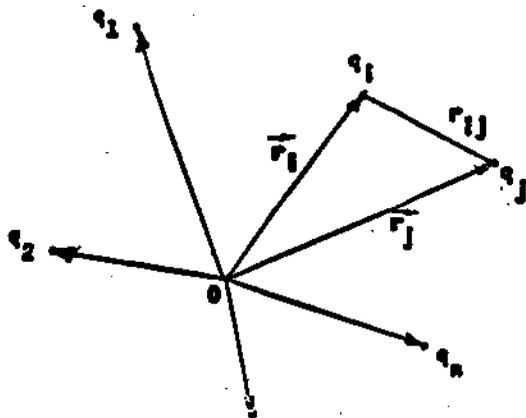


Fig. 8-1

se "energia eletrostática" do sistema ao trabalho máximo que dêle pudermos retirar, isto é, ao trabalho realizado pelas forças elétricas, quando as cargas se afastam tanto, que sôbre elas deixem de atuar forças.

O método particular que usaremos para calcular êsse trabalho (qualquer outro método conduziria ao mesmo resultado) será mantermos inicialmente fixas tôdas as cargas, exceto q_1 , que afastaremos o mais possível das outras. Em seguida afastar q_2 , mantendo as outras cargas fixas e assim por diante, até permanecer em

sua posição apenas uma carga, q_n , da qual não poderemos mais retirar trabalho, porque sobre ela nenhuma força atua. O trabalho total obtido será então:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z} = & q_1 \sum_{i=2}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i1}} + q_2 \sum_{n=3}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i2}} + \dots + \\
 & + q_{n-1} \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 r_{n,n-1}} .
 \end{aligned}$$

Em forma compacta, este trabalho - que é igual à energia eletrostática do sistema - se escreve:

$$W = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} , \quad (8-1)$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ apareceu porque a restrição $i > j$ foi substituída pela restrição $i \neq j$, que permite o aparecimento de cada parcela contada duas vezes. Desdobrando o somatório:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} . \quad (8-2)$$

Chamando

$$V_i^0 = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

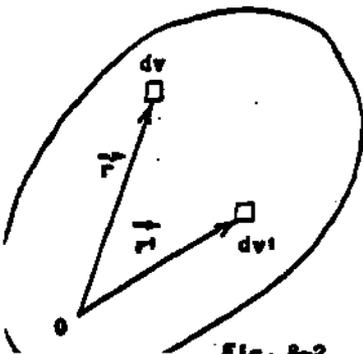
ao potencial, na posição da carga q_i , produzido por tôdas as outras cargas (o potencial produzido pela carga q_i sôbre si mesma não tem sentido físico), (8-2) se escreverá:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i' . \quad (8-3)$$

8 - 2. Energia de uma distribuição contínua de cargas. Neste caso, devemos substituir q_i por ρdv , q_j por $\rho' dv'$ e o somatório por uma integral; (8-1) dará então:

$$W = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho \rho' dv dv'}{4\pi \epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} , \quad (8-4)$$

onde ρ e ρ' são as densidades de carga nas posições \vec{r} e \vec{r}' , onde estão localizados os elementos dv e dv' (Fig. 8-2). Na integral (8-4) está incluído, sem inconveniente, o caso da ação de uma carga sôbre si mesma, pois sendo o volume proporcional a r^3 , cai a zero (quando $r \rightarrow 0$) muito mais rapidamente do que o denominador. A expressão (8-4) para a energia pode também ser escrita:



$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv, \quad (8-5)$$

e aqui aparece sem inconveniente, pelo mesmo motivo anterior, o potencial de uma carga elementar atuando sôbre si mesma.

8 - 3. Energia de um sistema de condutores. Sejam n condutores a potenciais V_1, V_2, \dots, V_n , contendo cargas Q_1, Q_2, \dots, Q_n respectivamente. De (8-5), e lembrando que agora as distribuições de cargas são superficiais e não volumétricas, teremos para a energia do sistema:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \sigma V_i ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \int_{s_i} \sigma ds,$$

onde s_i é a superfície do i ésimo condutor. Isto é:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i V_i Q_i,$$

em que não comparece V_i' , como em (8-3), sim o potencial do próprio condutor que contém a carga Q_i . Analisemos, em particular, o caso de um condensador, que é um sistema de 2 condutores (dos quais um envolve geralmente o outro) tais que um dêles contém carga $+Q$ e o outro carga $-Q$ (Fig. 8-3), estando êsses condutores a potenciais respectivamente iguais a V_+ e V_- . Define-se capacidade C de um condensador como sendo a razão entre a carga Q contida em uma de suas "placas" ou "armaduras", tomada positivamente, e a diferença de potencial V entre elas, isto é:

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{Q}{V}. \quad (8-6)$$

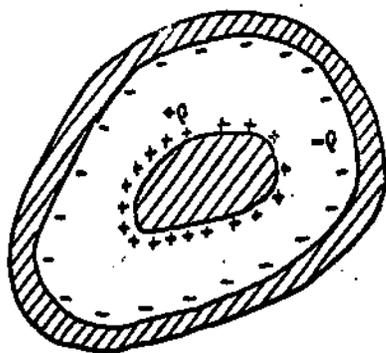


Fig. 8-3

No sistema MKS de unidades, capacidade se mede farad.

Tem-se:

$$1 \text{ f} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}.$$

A energia eletrostática do condensador é dada por:

$$W = \frac{1}{2} [QV_+ + (-Q)V_-] = \frac{1}{2} Q(V_+ - V_-) = \frac{1}{2} QV;$$

da definição (8-6) de capacidade, vemos que, em termos da carga, do potencial e da capacidade, a energia do condensador se exprime das seguintes maneiras possíveis:

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2. \quad (8-7)$$

Um método mais físico para o cálculo dessa energia seria o indicado pelo fato de que ela representa o trabalho que podemos retirar do condensador quando o descarregamos, o que se poderá fazer, seja levando toda a sua carga até o infinito, seja transportando carga de uma armadura para outra. Utilizemos o 2º método, e imaginemos que, no decorrer do processo, num dado instante t , a carga existente nas placas seja $q(t) = CV(t)$. Então o trabalho elementar realizado para transportar a carga dq da placa positiva para a negativa será:

$$d\tau = V(t) dq = \frac{q(t)}{C} dq,$$

onde dq está significando a quantidade elementar positiva de carga retirada da placa positiva; então a variação no tempo de carga na placa será $-\frac{dq}{dt}$ (porque nela a carga está diminuindo), e o trabalho total realizado para descarregar completamente o condensador será:

$$W = \gamma = \int_{Q_0}^{t_{\text{final}}} \left(\frac{q(t)}{C} \right) \left(-\frac{dq}{dt} \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{C} \int_{Q_0}^0 q \, dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} .$$

Se tivermos um sistema de n condutores, aceitaremos sem demonstração os seguintes resultados: o potencial do i ésimo condutor, em termos das cargas de todos os condutores, o i ésimo inclusive, é dado por:

$$V_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} Q_j ,$$

onde os coeficientes a_{ij} só dependem da geometria dos condutores; a carga do i ésimo condutor é dada por:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j ;$$

os coeficientes C_{ij} , chamados "coeficientes de capacidade" do sistema (para $i=j$ eles representam a capacidade do i ésimo condutor), só dependem, também, da geometria dos condutores; e finalmente a energia do sistema será dada por:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij} V_i V_j .$$

8 - 4. Distribuição espacial da energia eletrostática. Já vimos que a energia de um sistema de cargas pode ser calculada, indiferentemente, pelas fórmulas (8-1) ou (8-3), se a distribuição for discreta, e pelas fórmulas (8-4) ou (8-5), se a distribuição for contínua.

Existe ainda uma 3ª maneira de exprimir a energia de um sistema que encontraremos agora a partir de (8-5), usando (5-1) na forma:

$$\rho = \text{div} (\epsilon_0 \vec{E}) ,$$

pois ϵ_0 é constante. Assim (8-5) se escreve:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \text{div} (\epsilon_0 \vec{E}) dv , \quad (8-8)$$

sendo agora necessário observar o seguinte: a integral que comparece em (8-5) estende-se à região em que existe carga; mas não há inconveniente em estendê-la a todo o espaço, porque, nas regiões em que $\rho = 0$, o integrando é automaticamente nulo. Já em (8-8), V e \vec{E} não se anulam necessariamente nas regiões em que $\rho = 0$, e portanto aí v está significando o espaço inteiro.

Aplicando agora (5-43) a (8-8), virá:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_{\infty}} \operatorname{div} (V \epsilon_0 \vec{E}) \, dv - \frac{1}{2} \int_{V_{\infty}} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V \, dv ,$$

e aplicando o teorema de Gauss, (5-35), ao 1.^o termo do 2.^o membro:

$$W = \frac{1}{2} \int_{S_{\infty}} (V \epsilon_0 \vec{E}) \cdot \vec{ds} + \frac{1}{2} \int_{V_{\infty}} \epsilon_0 E^2 \, dv . \quad (8-9)$$

Ora, a 1.^a dessas integrais é nula, porque nas situações físicas reais não há campo no infinito. Então teremos para a energia:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_{\infty}} \epsilon_0 E^2 \, dv , \quad (8-10)$$

onde a integral se estende a todo o espaço.

Aparentemente, (8-10) em nada se distingue de (8-5), e dela resultou mediante um simples artifício matemático. Entretanto, (8-10) tem sentido físico próprio, e contribuiu enormemente para o desenvolvimento do Eletromagnetismo. Com efeito, (8-10) permite associar energia ao próprio campo elétrico, e definir em cada ponto do espaço em que $\vec{E} \neq 0$ uma "densidade de energia":

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 . \quad (8-11)$$

Assim o campo elétrico deixa de ser apenas um vetor matemático, e adquire sentido físico, como alguma coisa que existe realmente no es

paço (independentemente de cargas - testes aí colocadas), e à qual está associada energia. Isto sugere a possibilidade de propagação desta energia de ponto para ponto, e o desenvolvimento dessas idéias conduziu à formulação da teoria eletromagnética de Maxwell.

O cálculo da energia eletrostática, em cada caso, se fará indiferentemente pelo emprêgo de uma das 3 fórmulas, e a escolha de verá ser feita por um critério de simplicidade. Vejamos alguns exemplos.

8 - 5. Condensador plano. É constituído de duas placas condutoras planas e paralelas, separadas uma da outra por uma distância d muito pequena em comparação com as dimensões das placas. Desprezando os efeitos de bordas, ou colocando um anel de guarda, ou considerando apenas a parte central do condensador, podemos admitir o campo no seu interior constante, dado por duas parcelas do tipo (2-18), de mesmo sentido (Fig. 8-4). Isto é:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

onde $\sigma = \frac{Q}{A}$ é o módulo da densidade de cargas em qualquer das placas, sendo

Q a carga total contida na área A considerada. Valem aqui as relações (8-7), que deveremos encontrar novamente neste caso particular.

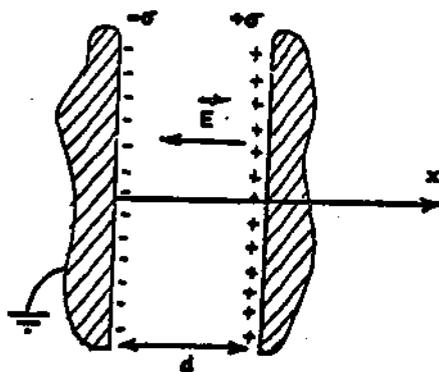


Fig. 8-4

Sendo nulo o potencial da placa carregada negativamente (ligada à terra) e V_0 o potencial da outra placa, teremos para a energia do condensador, usando (8-5):

$$W = \frac{1}{2} \int_A V(-\sigma) ds + \frac{1}{2} \int_A V_0 \sigma ds = \frac{1}{2} V_0 \sigma A = \frac{1}{2} Q V_0.$$

Para determinar C , capacidade do condensador, calculemos V_0 como o trabalho do campo:

$$V_0 = \int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_d^0 E dx = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}.$$

Substituindo V_0 na expressão de W :

$$W = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{A \epsilon_0}$$

Como, por (8-7), sabemos que $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$, concluímos que a capacidade do condensador plano é dada por:

$$C = \frac{A \epsilon_0}{d}. \quad (8-12)$$

Esta mesma expressão pode ser obtida de (8-6), dividindo $Q = \sigma A$ por $V_0 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$.

A energia do condensador plano pode ainda ser determinada por (8-10). Neste caso:

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dv = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Ad = \frac{\epsilon_0 Ad}{2} \frac{Q^2}{A^2 \epsilon_0^2} = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

8 - 6: Condensador esférico. É constituído de um condutor interno, limitado por uma superfície esférica, envolvido por um outro condutor de superfície interna também esférica, concêntrica com a 1^a

(Fig. 8-5). Se o condutor interno estiver carregado com uma carga Q , então sobre a superfície interna do outro condutor aparecerá uma carga $-Q$. Seja V_0 o potencial da armadura interna, e nulo o da armadura externa (ligada à terra), e sejam respectivamente

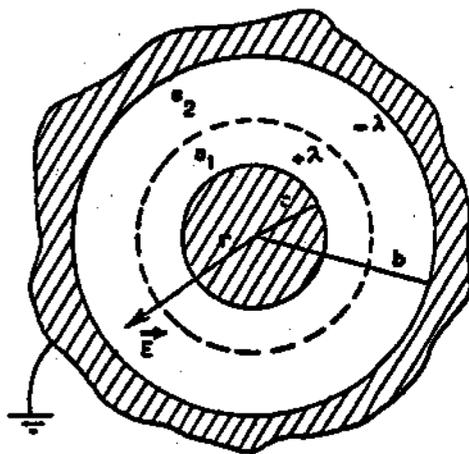


Fig. 8-5

te a e b os seus raios. Aplicando o teorema de Gauss a uma superfície esférica de raio r , concêntrica com as armaduras, sendo $a < r < b$, vemos que o campo elétrico entre as armaduras será dado por:

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} .$$

Calcularemos agora a energia do condensador usando primeiramente (8-5):

$$W = \frac{1}{2} \int_{s_1} V_0 \sigma_+ ds + \frac{1}{2} \int_{s_2} V \sigma_- ds = \frac{1}{2} V_0 \sigma_+ \int_{s_1} ds = 2\pi a^2 V_0 \sigma_+ .$$

Como $\sigma_+ = \frac{Q}{4\pi a^2}$, tem-se o resultado já conhecido:

$$W = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} .$$

Por outro lado:

$$V_0 = \int_a^b E \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} ,$$

e portanto:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} , \quad (8-13)$$

que dá a capacidade do condensador esférico.

A energia do condensador esférico pode ainda ser determinada por (8-10). Neste caso:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{4\pi r^2 \, dr}{r^4} = \\ &= \frac{Q^2(b-a)}{8\pi\epsilon_0 ab} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} . \end{aligned}$$

8 - 7. Condensador cilíndrico. É constituído por dois condutores cilíndricos concêntricos, sendo seus raios pequenos em comparação com a altura dos cilindros, de maneira que se possam desprezar os efeitos de bordas. Seja λ a carga por unidade de comprimento da

armadura interna, $-\lambda$ a da armadura externa; e sejam respectivamente a e b os raios, e V_0 e 0 os potenciais dessas armaduras (Fig. 8-6).

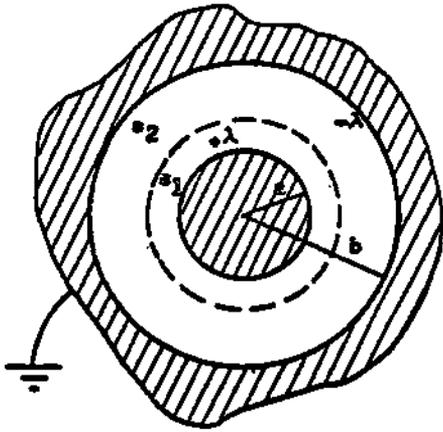


Fig. 8-6

Tem-se, de (8-5), que a energia por unidade de comprimento do condensador será:

$$W' = \frac{1}{2} \int_{s_1} \sigma_+ V_0 ds =$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_+ V_0 \int_{s_1} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_+ V_0 2\pi a = \frac{1}{2} \lambda V_0,$$

pois

$$\lambda = 2\pi a \sigma_+.$$

Por outro lado:

$$V_0 = \int_a^b E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a}.$$

Chamando $C' = \frac{\lambda}{\Delta V}$ a capacidade por unidade de comprimento do condensador, teremos imediatamente:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log \frac{b}{a}}, \quad (8-14)$$

e ainda:

$$W' = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{C'}$$

Este mesmo resultado pode ser obtido de (8-10):

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2} \int_a^b \frac{2\pi r dr}{r} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{C'} \end{aligned}$$

8 - 8. Condensador constituído por dois cilindros paralelos de mesmo raio. Seja λ a densidade linear de carga de um dos cilindros; colceando-se o outro cilindro nas proximidades do primeiro, cargas negativas serão induzidas na sua superfície, com densidade $-\lambda$, se êle estiver ligado à terra. Seja R o raio dos cilindros e D a distância entre seus eixos. A capacidade dêste condensador, por unidade comprimento, será calculada por:

$$C' = \frac{\lambda}{\Delta V},$$

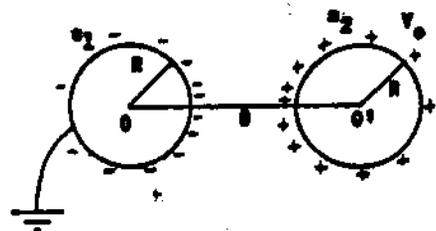


Fig. 8-7

sendo $\Delta V = V_0 - 0 = V_0$, potencial da armadura positiva. Ora, para determinar C' em termos das dimensões do condensador, precisamos de determinar o valor de V_0 , problema extremamente complicado se fôr tentado o cálculo direto. Mas podemos, neste caso, usar o método das imagens, aproveitando os resultados encontrados no parágrafo 6-9. Sabemos que as superfícies s_1 e s_2 são superfícies equipotenciais para o campo criado por 2 fios, com densidades lineares de carga $-\lambda$ e $+\lambda$, colocados a distâncias iguais a $a = \frac{R^2}{d}$ de O e O' , respectivamente (Fig. 8-8). Se o potencial é nulo em s_1 , então em s_2 , por (6-25), valerá:

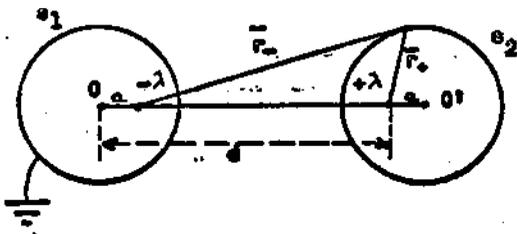


Fig. 8-8

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{\bar{r}_- d}{\bar{r}_+ R} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{d^2}{R^2},$$

ou ainda:

$$V_0 = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \log \frac{d}{R},$$

e então:

$$C' = \frac{\pi\epsilon_0}{\log \frac{d}{R}}, \quad (8-15)$$

$$W' = \frac{\lambda^2 \log \frac{d}{R}}{2\pi\epsilon_0}$$

Para exprimir C' em termos dos dados do problema, que são D e R , cal

cuemos:

$$\frac{D}{R} = \frac{a+d}{R} = \frac{a}{R} + \frac{d}{R} = \frac{R}{d} + \frac{d}{R}.$$

De (8-15) tiramos:

$$\log \frac{d}{R} = \frac{\pi \epsilon_0}{C'} \quad \therefore \quad \frac{d}{R} = e^{\frac{\pi \epsilon_0}{C'}}$$

$$\log \frac{R}{d} = -\frac{\pi \epsilon_0}{C'} \quad \therefore \quad \frac{R}{d} = e^{-\frac{\pi \epsilon_0}{C'}},$$

isto é:

$$\frac{D}{R} = e^{\frac{\pi \epsilon_0}{C'}} + e^{-\frac{\pi \epsilon_0}{C'}} = 2 \cosh \frac{\pi \epsilon_0}{C'},$$

e finalmente:

$$C' = \frac{\pi \epsilon_0}{\cosh^{-1} \frac{D}{2R}}. \quad (8-16)$$

8 - 9. Carga puntiforme em frente a um condutor plano. A expressão (8-5) para a energia dará neste caso:

$$W = \frac{1}{2} q V_\sigma + \frac{1}{2} \int_S \sigma V \cdot ds,$$

onde V_σ é o potencial criado pela distribuição σ do condutor, na posição da carga q . Se o condutor estiver ligado à terra, como no pa

rágrafo 6-5, a 2ª integral é nula; por outro lado, o potencial V_{σ} é o mesmo que o criado pela carga $-q$, imagem de q em relação ao plano. Então se tem:

$$W = \frac{1}{2} q \cdot \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(2d)} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d},$$

que representa o trabalho realizado para transportar a carga q desde sua posição até o infinito.

8 - 10. Distribuição esférica com densidade uniforme de cargas. Seja R o raio da esfera e ρ a densidade volumétrica de cargas. Tem-se para a energia, usando (8-5) e (4-37):

$$W = \frac{1}{2} \int_0^R \left(\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \right) \cdot 4\pi r^2 dr, \text{ isto é:}$$

$$W = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (8-17)$$

onde Q é a carga total da esfera.

O mesmo resultado pode ser obtido usando (8-10), (2-24) e (2-23):

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_0^R \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^{\infty} \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \right],$$

onde tomamos o valor do campo externo, dado por (2-23), em termos da densidade de carga:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{4/3 \pi R^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} .$$

* * *

Problemas propostos

8-1. Calcule a energia eletrostática de uma distribuição esférica de cargas dada por:

$$\rho = k r, \quad r \leq R$$

$$\rho = 0, \quad r > R$$

8-2. Calcule a energia eletrostática da distribuição de cargas apresentada no problema 3-2.

8-3. Calcule a energia eletrostática da distribuição de cargas apresentada no problema 4-5.

8-4. Calcule, usando (8-5), a energia eletrostática de um sistema constituído de uma carga puntiforme colocada nas proximidades de uma esfera metálica: a) ligada à terra; b) isolada e neutra; c) isolada e com carga total diferente de zero; d) a um potencial dado.

- 8-5. Uma carga $Q = 10^{-8} \text{C}$ está distribuída em todo o espaço com simetria esférica em torno da origem, com densidade:

$$\rho = A \frac{e^{-ar}}{r},$$

onde A é uma constante e $a = 0,1 \text{ cm}^{-1}$. Determinar a energia eletrostática do sistema.

- 8-6. Admitindo que o elétron seja uma partícula esférica de raio R , uniformemente carregada, e que sua energia de repouso, mc^2 (onde m é a massa do elétron e c a velocidade da luz), é de origem eletrostática, determine o seu "raio clássico" $R(R.M.)$. ($m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$).

- 8-7. Sabe-se que as superfícies de nível do campo elétrico de uma distribuição de cargas de densidade linear constante, num segmento de reta \overline{AB} , são elipsóides de revolução, com focos em A e B . Determinar a capacidade de um condensador em que a superfície externa da armadura interna e a superfície interna da armadura externa são elipsóides de revolução, confocais, de distância focal f , sendo a e b os semi-eixos de rotação desses elipsóides, respectivamente (Sugestão: usar o método das imagens elétricas).

- 8-8. Demonstre que a capacidade C de um sistema de n condensadores, de capacidades C_1, C_2, \dots, C_n , associados em paralelo, é dada pela fórmula:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i . \quad (8.18)$$

8-9. Demonstre que a capacidade C de um sistema de n condensadores de capacidade C_1, C_2, \dots, C_n , associados em série, é calculável pela fórmula:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (8.19)$$

* * *

ELETROMAGNETISMO I - ERRATA

Pag.	Linha	Onde se lê	leia-se
10	9	contida pela	da
17	7	<u>total</u>	<u>intrínseca</u>
18	20	numero	valor
19	7	$\frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^4}$	$\frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}$
21	11	$q v_x B$	$- q v_x B$
21	15	$w x$	$- w x$
27	1	"D"	"D" ôco
27	7	dade inicial do íon adquirida	dade do íon aumentada
28	8	total	intrínseca
31	4	$x(0) = y(0) = 0$	$x(0) = y(0) = z(0) = 0$
31	5	$v_x(0) = 0$	$v_x(0) = v_z(0) = 0$
36	12	dv	dv'
43	11	$- \frac{3 \vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r^5} \Bigg)$	$- \frac{3 \vec{r} \cdot \vec{r}_2}{r^5} \Bigg)$
43	12	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r^3} - \dots \right]$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r^3} - \dots \right] \right\}$
44	1	$q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$	$q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$
45	11	tomando agora para módulo	sendo o módulo da componente
46	10	ao longo de	sobre
50	2	com os 2 elementos contíguos, e assim por diante.	com 2 quaisquer elementos simé- tricos em relação à bissetriz.
52	4	ao longo destas	sobre as

Pag.	Linha	Onde se lê	leia-se
52	5	próximos,	próximos do fio e afastados das extremidades,
53	8	$4\pi\epsilon_0$	$2\pi\epsilon_0$
54	1	$4\pi\epsilon_0$	$2\pi\epsilon_0$
54	9	E	E_z
55	2	E	E_z
55	7	E	E_z
55	15	dE	dE_z
56	1	E	E_z
56	4	E	E_z
57	4	$\sqrt{R^2 - r^2 + 2rz}$	$(R^2 - r^2 + 2rz)^{3/2}$
57	8	contida na	distribuída sobre a
64	9	$\vec{p} \cdot \vec{E}_e$	$(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_e$
64	12	$\left(p_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + p_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$	$\left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$
69	12	$dQ = \dots,$	$dQ = \dots = \frac{\vec{ds} \cdot \vec{r}}{r^3},$
74	10	ao longo de	sobre
77	7	Δs	Δs (raio Δr)
77	10	Δs	Δr
77	17	Δs	Δr
77	20	ao longo de	sobre

Pag.	Linha	Onde se lê	leia-se
77	última	$E_{+n} \dots E_{-n} \dots (E_+ - E_-)_n$	$E_n^+ \dots E_n^- \dots (E^+ - E^-)_n$
83	9	$E_{+n} - E_{-n}$	$E_n^+ - E_n^-$
83	10	E_{-n}	E_n^-
84	14	na	no
87	1	$\rho(r')$	$\rho(\vec{r}')$
91	12	seu volume	sua superfície
91	14	sempre	praticamente
93	10	$E_{t+} - E_{t-}$	$E_t^+ - E_t^-$
94	última	$\left[\frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}}{r^3} \right] = \dots$ $\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r}}{r^3}$	$\left[\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}}{r^3} \right] = \dots \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{r}}{r^3}$
96	19	$ \vec{m} $ é constante, e \vec{p} é normal à dupla camada, em todos os seus pontos.	$ \vec{m} = m$ é constante, em todos os seus pontos.
97	7	$\frac{dp \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$\frac{m \, d\vec{s} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
97	7	$\frac{m \, dQ}{4\pi\epsilon_0}$	$-\frac{m \, dQ}{4\pi\epsilon_0}$
97	8	positivo	negativo
97	10	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_B$	$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_B$

Pag.	Linha	Onde se lê	leia-se
97	12	$\frac{m \Omega}{4\pi\epsilon_0}$	$-\frac{m \Omega}{4\pi\epsilon_0}$
97	15	contorno.	contorno, desde que a face vista de P tenha sempre o mesmo sinal.
97	última	V_e	$-V_e$
98	17	$E_{+n} = E_{-n}$	$E_n^+ = E_n^-$
99	6	E_{-t}	E_t^-
99	8	E_{+t}	E_t^+
103	5	E	E_z
105	8	E	E_z
106	última	$-\frac{R^2 - r^2}{r}$	$-\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}$
107	2	$-\frac{R^2 - r^2}{r}$	$-\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}$
111	7	$\int_r^R \frac{\rho r \, dr}{3 \epsilon_0} - \int_{\infty}^{r_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dr$	$\int_{r_1}^R \frac{\rho r \, dr}{3 \epsilon_0} - \int_{\infty}^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dr$
116	10	O operador	A operação
116	20	poder	pode
118	9	O operador	A operação
120	penúltima	$\frac{F}{r^2}$	$\frac{F}{r^3}$
121	13	$\frac{F}{r^2}$	$\frac{F}{r^3}$

Pag.	Linha	Onde se lê	leia-se
122	7	através	que sai
123	6	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
127	9	(5-1)	(5-4)
127	11	(5-4)	(5-1)
127	16	$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
128	6	$\frac{1}{r} =$	$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) =$
139	6	$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int$	$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int$
141	9	C,	C, situado num plano normal a \vec{a} ,
141	11	$\text{rot } \vec{F}$	$\text{rot}_a \vec{F}$
142	12	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{s}_i$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{rot}_{a_i} \vec{F} \Delta s_i$
142	16	$\vec{F} \cdot d\vec{l}] =$	$\vec{F} \cdot d\vec{l}] \Delta s_1 =$
151	9	ter	ser
151	17	E	E_n
151	última	$\int_S E ds$	$\int_S E_n ds$
152	5	da unicidade	de unicidade
153	8	2ª) V^*	2ª) ΔV^*
158	10	imposta a essa	dessa

Pag.	Linha	Onde se lê	leia-se
158	13	imposta à	da
163	2	$q - q'$	$\frac{q - q'}{\epsilon_0}$
168	13	$ \vec{r} - \vec{r}_0 ^2$	$ \vec{r} - \vec{r}_0 $
170	11	$\frac{R/d}{r_-}$	$\frac{R/d}{r_-}$
172	8	$-\frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$\frac{\sigma}{\epsilon_0}$
186	última	campo	potencial
188	17	6-4),	6-5),
191	2	nos	entre os
195	11	dentro)	dentro da esfera).
196	15	ao longo da	sobre a
201	4	$\sum_{n=3}^n$	$\sum_{i=3}^n$
211	9	$\frac{q^2}{\dots} \frac{4 \dots}{\dots}$	$\frac{q^2}{\dots} \int_a^b \frac{4 \dots}{\dots}$
218	10	10^{-19} c).	10^{-19} C, $c = 3 \times 10^8$ m/s).

CORREÇÕES EM FIGURAS

Fig. 2-26 (pag. 61)

Substituir a letra x colocada entre x e P pela letra z.

Fig. 2-27 (pag. 61)

Substituir o 2 colocado abaixo de II pela letra z.

Fig. 5-9 (pag. 138)

Inverter o sentido de $\vec{F}_x(x)$.

Fig. 8-5 (pag. 210)

Substituir $+\lambda$ e $-\lambda$ por $+\sigma$ e $-\sigma$.

* * *

SUBSTITUIR O ENUNCIADO DOS PROBLEMAS

3 - 5 (pag. 79), por:

Calcule o campo criado em todo o espaço por uma distribuição uniforme de cargas entre duas superfícies cilíndricas, coaxiais, infinitas, de raios a e b ($a < b$).

6 - 10 (pag. 190), por:

Calcule o potencial e o campo em todo o espaço, devidos a um cilindro condutor, infinito, isolado, que é colocado num campo externo uniforme \vec{E}_0 , perpendicular ao eixo do cilindro.

* * *

ACRESCENTAR AO TEXTO

Pag. 203, linha 2, em seguida a: " ... sôbre si mesma.":

No caso geral, em que há cargas puntiformes e distribuições contínuas de cargas (lineares, superficiais e volumétricas), tem-se para a energia eletrostática do sistema:

$$\begin{aligned}
 W = \frac{1}{2} \sum_1 q_1 v_1' + \frac{1}{2} \sum_1 \int_{\Gamma_1} \lambda(\vec{r}) v(\vec{r}) d\ell + \frac{1}{2} \sum_1 \int_{S_1} \sigma(\vec{r}) v(\vec{r}) ds + \\
 + \frac{1}{2} \sum_1 \int_{V_1} \rho(\vec{r}) v(\vec{r}) dv. \quad (8-5')
 \end{aligned}$$