

MONOGRAFIAS DE FÍSICA

v

INTRODUÇÃO À ELETRODINÂMICA QUÂNTICA

J. Leite Lopes

(2ª IMPRESSÃO)

INTRODUÇÃO

As presentes notas constituem uma introdução à eletrodinâmica quântica, como curso oferecido, em várias oportunidades, aos estudantes graduados da Faculdade Nacional de Filosofia, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e do Curso de Verão do Centro Técnico de Aeronáutica de S. José dos Campos. O método seguido é o de Feynman e permite que o estudante aplique, sem demora, a técnica de cálculo dos diagramas a processos elementares de radiação e espalhamento. Seguimos, assim, tanto quanto possível, a apresentação de Feynman nos seus trabalhos: Physical Review vol. 76, pag. 749 (1949); vol. 76, pag. 769 (1949); vol. 80, pag. 440 (1950), bem como em suas notas de curso, Quantum Electrodynamics, California Institute of Technology, 1953. Outras referências que o leitor poderá consultar com utilidade são, dentre outras, as seguintes: G. Wentzel, Quantum Theory of Fields (Interscience); Schweber, Bethe, De Hoffmann, Mesons and Fields, vol. I (Row, Peterson); Jauch and Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons (Addison-Wesley).

Uma vez apreendida a técnica, deverá o estudante demorar-se no estudo dos fundamentos da teoria quântica dos campos. Este será o objetivo de outro volume desta série.

Agradeço a colaboração dedicada de A. Luciano L. Videira, que reviu o manuscrito e cuidou da edição destas notas.

Dedico este volume aos estudantes de Física do Brasil.

J. LEITE LOPES

Rio de Janeiro, Julho de 1960

Índice

CAPÍTULO I

A EQUAÇÃO DE PAULI

CAPÍTULO II

A EQUAÇÃO DE DIRAC

| | | |
|------|--|----|
| II.1 | Equação de Klein-Gordon | 5 |
| II.2 | Equação de Dirac | 5 |
| II.3 | Álgebra das Matrizes γ de Dirac | 8 |
| II.4 | Forma Hamiltoniana da equação de Dirac | 10 |
| II.5 | Interpretação de α | 12 |
| II.6 | O spin do elétron | 13 |

CAPÍTULO III

A APROXIMAÇÃO NÃO-RELATIVISTA DA EQUAÇÃO DE DIRAC

| | | |
|-------|---|----|
| III.1 | Aproximação em 1 ^a ordem (termos em v/c). Equação de Pauli | 15 |
| III.2 | Aproximação em 2 ^a ordem (termos em v^2/c^2). Interação spin-órbita | 16 |
| III.3 | Forma quadri-dimensional da corrente | 21 |
| III.4 | Equação de Dirac adjunta | 22 |
| III.5 | Solução da equação de Dirac para partícula livre | 23 |
| III.6 | Normalização das funções de onda | 28 |
| III.7 | Pósitrons | 30 |

CAPÍTULO IV

INVARIÂNCIA RELATIVISTA

| | | |
|------|-------------------------------|----|
| IV.1 | Inváriância Relativista | 37 |
|------|-------------------------------|----|

| | | |
|------|---|----|
| IV.2 | Expressão de S | 42 |
| IV.3 | Operadores de Dirac | 44 |
| IV.4 | Ordem de grandeza dos operadores de Dirac no limite não relativista | 46 |
| IV.5 | Métodos de obtenção de alguns elementos de matriz | 49 |
| IV.6 | Operadores de projeção. Soma de elementos de matriz sobre spins | 50 |
| IV.7 | Traços de matrizes | 54 |

CAPÍTULO V

A TEORIA DO PÓSITRON

| | | |
|-----|---|----|
| V.1 | Teoria não-relativista. Propagadores de Feynman | 57 |
| V.2 | Teoria das Perturbações. O pósitron segundo Feynman e Stuckelberg | 61 |
| V.3 | Teoria relativista | 63 |
| V.4 | Campo eletromagnético | 69 |
| V.5 | Amplitudes de transição | 72 |
| V.6 | Representação de K_+ no espaço dos momenta | 74 |
| V.7 | Elementos de matriz no espaço dos momenta | 79 |

CAPÍTULO VI

APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE FEYNMAN

| | | |
|------|--|----|
| VI.1 | Probabilidade de transição por segundo | 83 |
| VI.2 | Espalhamento Rutherford | 87 |

CAPÍTULO VII

O CAMPO ELETROMAGNÉTICO

| | | |
|-------|---|----|
| VII.1 | Amplitude de emissão e absorção de um fóton | 92 |
| VII.2 | O vetor de estado do campo de radiação | 96 |
| VII.3 | Efeito Compton | 99 |

| | | |
|-------|--|-----|
| VII.4 | Aniquilação de um par com emissão de dois fótons | 114 |
| VII.5 | Bremsstrahlung..... | 119 |

CAPÍTULO VIII

INTERAÇÃO ENTRE ELÉTRONS

| | | |
|--------|--|-----|
| VIII.1 | Propagador de dois elétrons | 125 |
| VIII.2 | Interação entre cargas. Propagador de um fóton | 127 |
| VIII.3 | Representação de Fourier de $\delta_+(s^2)$ | 130 |
| VIII.4 | Espalhamento elétron-elétron | 135 |
| VIII.5 | Equivalência da soma sobre as quatro polarizações com ondas transversais mais interação de Coulomb | 139 |
| VIII.6 | Interação de Breit | 141 |

CAPÍTULO IX

O PROBLEMA DA RENORMALIZAÇÃO

| | | |
|------|---|-----|
| IX.1 | Self-energia do elétron | 145 |
| IX.2 | Renormalização de massa | 152 |
| IX.3 | Correções radiativas no espalhamento por um potencial externo | 152 |
| IX.4 | Renormalização de função de onda | 157 |
| IX.5 | Solução da catástrofe do infra-vermelho | 161 |
| IX.6 | Diagramas fechados. Renormalização da carga. Polarização do vacuo | 162 |

APÊNDICE

| | | |
|----|-------------------------|-----|
| A. | Funções de Green | 166 |
| B. | A função δ | 173 |

CAPÍTULO I

A Equação de Pauli

A equação de movimento de uma partícula de carga e num campo eletromagnético é:

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}) = \vec{\nabla} (-e\phi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}). \quad (1.1)$$

A equação de Lagrange que descreve êsse movimento é:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

ou:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \quad \text{onde } v_1 = \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}. \quad (1.2)$$

Logo, segundo as equações (1.1) e (1.2), devemos ter:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial v_1} = m v_1 + \frac{e}{c} A_1; \quad L = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} + f(\vec{x}), \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (-e\phi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}); \quad L = -e\phi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} + f(\vec{v}) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

donde:

$$\begin{cases} f(\vec{x}) = -e\phi, \\ f(\vec{v}) = \frac{1}{2} m v^2, \end{cases}$$

sendo \vec{A} e ϕ funções de \vec{x} e t e não de \vec{v} . Assim, a Lagrangeana não relativista do problema é:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} - e\phi. \quad (1.5)$$

A Hamiltoniana é:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \equiv H(q_i, p_i),$$

onde

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Levando (1.6) em (1.5):

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi. \quad (1.7)$$

A equação de Schrödinger da partícula é a seguinte:

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

isto é:

$$\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) \psi. \quad (1.8-a)$$

ou

$$\frac{1}{2m} \left(\vec{p}^2 + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2 - \frac{e}{c} \vec{p} \cdot \vec{A} - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{p} \right) \psi = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) \psi. \quad (1.8-b)$$

em que:

$$\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}.$$

Mantendo apenas os termos de ordem $\frac{e}{c}$ (em primeira aproximação), temos:

$$\frac{1}{2m} \left(\vec{p}^2 - \frac{e}{c} \vec{p} \cdot \vec{A} - \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{p} \right) \psi = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) \psi. \quad (1.8-c)$$

Ora:

$$\vec{p} \cdot (\vec{A} \psi) = (\vec{p} \cdot \vec{A}) \psi + \vec{A} \cdot (\vec{p} \psi).$$

Portanto:

$$\frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 + \frac{2ie\hbar}{c} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + \frac{ie\hbar}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right] \psi = \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right] \psi, \quad (1.9)$$

que é a equação de Schroedinger do problema e onde: $\vec{A} \cdot \vec{p}$ é a interação entre a corrente e o potencial; $\vec{p} \cdot \vec{A}$ é a parte da interação em que existe uma variação de ϕ com o tempo, pois segundo a condição de Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$. Vê-se que a equação (1.9) não contém a descrição de spin, e sim, apenas a do momentum angular orbital. Deve-se a Pauli a introdução de uma equação de onda (não relativista) para descrever o momentum angular intrínseco de partículas como o elétron e o próton.

Sejam:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

as matrizes de Pauli. Como é fácil verificar: $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$, $\sigma_x \sigma_z = -\sigma_z \sigma_x$, $\sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y$; $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$, portanto:

$$\vec{\sigma}^2 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2. \quad (1.11)$$

Contudo:

$$\frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 \neq \frac{1}{2m} [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})]^2. \quad (1.12)$$

De fato, designando uma função com duas componentes $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} & [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})] [\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})] \psi = \\ & = [(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 + \frac{e^2}{c^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{A})^2 - \frac{e}{c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) - \frac{e}{c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})] \psi = \\ & = (\vec{p}^2 + \frac{e^2}{c^2} \vec{A}^2) \psi - \frac{e}{c} [(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) \psi + (\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi]. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} & [(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})] \psi = (\sigma_i p^i \sigma_j A^j) \psi = \sigma_i \sigma_j p^i (A^j \psi) = \\ & = \sigma_i \sigma_j [(p^i A^j) \psi + (A^j p^i) \psi]. \quad (1.14-a) \end{aligned}$$

lembrando que $p^j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$. Também:

$$\left[(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \right] \psi = \sigma_i \sigma_j (A^i p^j) \psi = \sigma_j \sigma_i A^j p^i \psi \quad (1.14-b)$$

Somando (1.14-a) e (1.14-b):

$$\begin{aligned} \left[(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{A}) \right] \psi &= \sigma_i \sigma_j (p^i A^j) \psi + (\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i) A^j p^i \psi = \\ &= \sigma_i \sigma_j (p^i A^j) \psi + 2(A_i p^i) \psi = \left\{ \frac{1}{2} \left[\sigma_i \sigma_j (p^i A^j) + \sigma_j \sigma_i (p^j A^i) \right] + 2A_i p^i \right\} \psi = \\ &= -\frac{i\hbar}{2} \sigma_i \sigma_j (\partial^i A^j - \partial^j A^i) \psi - i\hbar (\partial_i A^i + 2A_i \partial^i) \psi = \\ &= \left[\hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - i\hbar \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - 2i\hbar (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \right] \psi, \end{aligned} \quad (1.15)$$

pois a indução magnética \vec{B} é tal que: $B_k = \partial^i A^j - \partial^j A^i$.

Pauli admite a equação:

$$\frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 \psi = (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi) \psi, \quad (1.16-a)$$

isto é:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 + e\phi - \frac{eh}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + \frac{ieh}{2mc} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + 2 \vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.16-b)$$

como a equação de onda não relativista para descrever uma partícula carregada, com spin $\frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$. Temos:

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \partial_j - \frac{e}{c} A_j) (-i\hbar \partial^j - \frac{e}{c} A^j) - \frac{eh}{2mc} \sigma_j B^j + e\phi \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.16-c)$$

Assim, a Hamiltoniana de Pauli é:

$$H_p = \frac{1}{2m} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 + e\phi = \frac{1}{2m} \left[\left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{eh}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] + e\phi.$$

CAPÍTULO II

A Equação de DiracII.1 Equação de Klein-Gordan

Em mecânica relativista clássica, tem-se:

$$H = \left[c^2 \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + m^2 c^4 \right]^{\frac{1}{2}} + e\phi . \quad (2.1)$$

Ao fazer a passagem à mecânica quântica, em virtude da raiz quadrada, a Hamiltoniana não pode ser obtida diretamente de (2.1). Desta última resulta:

$$(H - e\phi)^2 - c^2 \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 = m^2 c^4 ,$$

fazendo:

$$H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} ,$$

obtemos:

$$\frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right)^2 \psi - \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi = m^2 c^2 \psi ,$$

ou, em notação covariante:

$$(i\hbar \nabla_\mu - \frac{e}{c} A_\mu)(i\hbar \nabla^\mu - \frac{e}{c} A^\mu) \psi = m^2 c^2 \psi . \quad (2.2)$$

Esta é a equação de Klein-Gordon. Sendo uma generalização relativista da equação de Schroedinger, ela também não leva em consideração o spin, descrevendo apenas partículas de spin nulo, como o meson- π , em interação com um campo eletromagnético (a função ψ tem uma só componente).

II.2 Equação de Dirac

Consideremos a equação de Klein-Gordon:

$$\left[\frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right)^2 - \left(i\hbar \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \right] \psi = m^2 c^2 \psi .$$

Vamos agora introduzir uma decomposição que dará lugar a uma

nova equação:

$$\left[\frac{1}{c} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) - \vec{\sigma} \cdot \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] \left[\frac{1}{c} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) + \vec{\sigma} \cdot \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right] \psi = m^2 c^2 \psi. \quad (2.3)$$

Chamemos

$$\left. \begin{aligned} \pi_0 &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi, \\ \vec{\pi} &= -i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Levando (2.4) em (2.3):

$$\left(\frac{\pi_0}{c} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \right) \left(\frac{\pi_0}{c} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \right) \psi = m^2 c^2 \psi. \quad (2.5)$$

Esta equação é distinta da de Klein-Gordon porque, em virtude da não comutatividade de π_0 e $\vec{\pi}$ entre si:

$$\left. \begin{aligned} \pi_y \pi_z - \pi_z \pi_y &= -\frac{ie\hbar}{c} B_x, \\ \pi_0 \pi_x - \pi_x \pi_0 &= ie\hbar E_x, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

ocorrem novos termos na equação de Klein-Gordon.

A função de onda ψ em (2.5) tem duas componentes.

Definamos uma nova função X pela relação:

$$\left(\frac{1}{c} \pi_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \right) \psi = mc X.$$

(2.5) se escreve então:

$$\left(\frac{1}{c} \pi_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \right) X = mc \psi.$$

O par de equações:

$$\left(\frac{1}{c} \pi_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \right) \psi = mc X.$$

$$\left(\frac{1}{c} \pi_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \right) X = mc \psi.$$

(2.7)

é uma forma da equação de Dirac. Tanto ψ como X têm duas componentes. O par de equações envolve, portanto, quatro funções de onda.

Outra forma da equação de Dirac obtem-se introduzindo as funções ψ_a e ψ_b :

$$\left. \begin{aligned} \psi_a &= X + \psi, \\ \psi_b &= X - \psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

De (2.7) e (2.8) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \pi_0 \psi_a - (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \psi_b &= mc \psi_a, \\ -\frac{1}{c} \pi_0 \psi_b + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \psi_a &= mc \psi_b. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Observe que, por reflexão espacial, $\frac{1}{c} \pi_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}$ se transforma em $\frac{1}{c} \pi_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}$, portanto, para que o sistema (2.7) seja invariante em relação à reflexão espacial, X deve transformar-se em ψ . Por conseguinte, $\psi_a \rightarrow \psi_a$, $\psi_b \rightarrow -\psi_b$ quando $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$.

A equação de Dirac tem usualmente uma forma compacta, obtida de (2.9) pela introdução da função de onda de quatro componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{a1} \\ \psi_{a2} \\ \psi_{b1} \\ \psi_{b2} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

e das matrizes:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

onde os elementos destas são matrizes de duas linhas e duas colunas:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\vec{\sigma}$ dada em (1.10).

Obtemos, então, de (2.9):

$$\left(\frac{1}{c} \gamma_0 \pi_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi} \right) \psi = mc \psi. \quad (2.12)$$

Definamos:

$$\left. \begin{aligned} \pi^\mu &= \left(\frac{\pi_0}{c}, \vec{\pi} \right), \\ \gamma^\mu &= \left(\gamma_0, \vec{\gamma} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\gamma^\mu \pi_\mu = \frac{1}{c} \gamma^0 \pi_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi}.$$

A equação de Dirac se escreve:

$$\gamma^\mu \pi_\mu \psi = mc \psi, \quad (2.14)$$

ou,

$$\gamma^\mu \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu \right) \psi = mc \psi. \quad (2.15)$$

Observe que:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, + \vec{\nabla} \right), \quad A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, - \vec{\nabla} \right), \quad A_\mu = (\phi, -\vec{A}).$$

II. 3 Álgebra das Matrizes γ de Dirac.

Na seção anterior obteve-se a forma (2.15) da equação de Dirac:

$$\gamma^\mu (i\hbar \nabla_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) \psi = mc \psi, \quad (2.17)$$

juntamente com uma representação particular das matrizes γ^μ :

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3; \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

as quais, como se verifica f\u00e1cilmente, satisfazem \u00e0 equa\u00e7\u00e3o:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

onde:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O n\u00famero de matrizes 4×4 , satisfazendo (2.18), linearmente independentes, \u00e9 16 e elas s\u00e3o as seguintes:

$$\left. \begin{array}{l} I \\ \gamma^1 \quad \gamma^2 \quad \gamma^3 \quad \gamma^0 \\ \gamma^2\gamma^3 \quad \gamma^3\gamma^1 \quad \gamma^1\gamma^2 \quad \gamma^1\gamma^0 \quad \gamma^2\gamma^0 \quad \gamma^3\gamma^0 \\ \gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = \gamma^5 \end{array} \right\} (2.19)$$

Pode-se verificar que:

$$\sigma_j = \epsilon_{jkl} \gamma_k \gamma_l, \quad (2.20)$$

onde ϵ_{jkl} \u00e9 o tensor de Levi-Civita ($\epsilon_{jkl} = 0$ se dois \u00edndices s\u00e3o iguais; $\epsilon_{jkl} = +1$ se jkl \u00e9 uma permuta\u00e7\u00e3o par de 123; -1 , se a permuta\u00e7\u00e3o \u00e9 \u00edmpar).

Define-se uma matriz por:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \gamma_0 \vec{\gamma}. \quad (2.21)$$

É conveniente introduzir a notação de Feynman:

$$\hat{A} = a^\mu \gamma_\mu = a_0 \gamma_0 - \vec{a} \cdot \vec{\gamma}. \quad (2.22)$$

Verifique que:

$$\begin{aligned} \hat{A}^2 &= a_\mu a^\mu, \\ \hat{A}\hat{B} &= -\hat{B}\hat{A} + 2a_\mu b^\mu, \\ \hat{A}\gamma_5 &= -\gamma_5\hat{A}, \\ \gamma_x \hat{A} \gamma_x &= \hat{A} + 2a_x \gamma_x, \\ \gamma_\mu \hat{A} \gamma^\mu &= 4, \\ \gamma_\mu \hat{A} \gamma^\mu &= -2\hat{A}, \\ \gamma_\mu \hat{A} \hat{B} \gamma^\mu &= 4a_\mu b^\mu, \\ \gamma_\mu \hat{A} \hat{B} \hat{C} \gamma^\mu &= -2\hat{C}\hat{B}\hat{A}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

II.4 Forma Hamiltoniana da equação de Dirac

A equação é:

$$\gamma_\mu \pi^\mu \psi = mc \psi, \quad (2.24-a)$$

ou:

$$\frac{1}{c} \gamma_0 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) \psi - \vec{\gamma} \cdot \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi = mc \psi. \quad (2.24-b)$$

Dai:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = c \gamma_0 \vec{\gamma} \cdot \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi + e\phi \psi + \gamma_0 mc^2 \psi = H\psi, \quad (2.25)$$

chamando:

$$H = c \vec{\alpha} \cdot \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + e\phi + mc^2 \beta, \quad (2.26)$$

onde

$$\vec{\alpha} = \gamma_0 \vec{\gamma}, \quad \beta \equiv \gamma_0$$

são hermitianas:

$$\vec{\alpha}^\dagger = \vec{\alpha}, \quad \beta^\dagger = \beta \quad (\text{i.e.: } \beta_{ik}^* = \beta_{ki}). \quad (2.26-a)$$

Da equação:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2 \beta) \psi, \quad \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}, \quad (2.27)$$

1. é:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = (c \vec{\alpha}_{kl} \cdot \vec{p} + mc^2 \beta_{kl}) \psi_l,$$

vem em virtude de (2.26-a) e de $\vec{p}^* = -\vec{p}$:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi_k^*}{\partial t} = c(-\vec{p} \psi_l^* \cdot \vec{\alpha}_{lk} + mc^2 \psi_l^* \beta_{lk})$$

isto é:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} = -c \vec{p} \psi^+ \cdot \vec{\alpha} + mc^2 \psi^+ \beta \quad (2.28)$$

onde:

$$\psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \quad (2.29)$$

Graças a (2.27) e (2.28) podemos escrever:

$$\begin{aligned} i\hbar \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= c \psi^+ \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \psi + mc^2 \psi^+ \beta \psi, \\ -i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi &= -c \vec{p} \psi^+ \cdot \vec{\alpha} \psi + mc^2 \psi^+ \beta \psi. \end{aligned}$$

Subtraindo:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \psi) &= (c \psi^+ \alpha_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + c \frac{\partial \psi^+}{\partial x_j} \alpha_j \psi) (-i\hbar) = \\ &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} c \psi^+ \alpha_j \psi \end{aligned}$$

portanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \psi) + \frac{\partial}{\partial x_j} c \psi^+ \alpha_j \psi = 0 \quad (2.30)$$

que é a equação de continuidade $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ onde

$$\begin{aligned} \rho &= \psi^+ \psi, \\ \vec{j} &= c \psi^+ \vec{\alpha} \psi. \end{aligned} \quad (2.31)$$

II.5 Interpretação de α

A derivada no tempo de um operador A é:

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [H, A] .$$

Como:

$$H = c \vec{\alpha} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}) + e \phi + mc^2 \beta ,$$

Temos para a coordenada x:

$$[H, x] = c \alpha_x \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, x \right] = -i\hbar c \alpha_x ,$$

logo:

$$\dot{x} = c \alpha_x , \quad \text{ou: } \dot{\vec{x}} = c \vec{\alpha} . \quad (2.32)$$

Dai resulta, por ser $\alpha_x^2 = 1$, que $(\dot{x})^2 = c^2$ e os autovalores de \dot{x} são $\pm c$. Procura-se interpretar êste resultado dizendo que uma determinação exata da velocidade implica determinação exata da posição em dois instantes vizinhos. Pelo princípio da incerteza, a quantidade de movimento é indeterminada e, então, pela relação:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} , \quad \text{vem: } \Delta p = \frac{m \Delta v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m}{c^2} \frac{v^2 \Delta v}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3} .$$

Como $\Delta v \sim 0$, para que não seja $\Delta p \sim 0$, deve ser $v \sim c$. O argumento não é satisfatório porque \dot{x} comuta com p_x , pois α_x comuta com p_x .

Outra relação que se obtém é a seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (p_x - \frac{e}{c} A_x) &= \frac{i}{\hbar} [H, p_x] - \frac{ie}{\hbar c} [H, A_x] - \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \\ &= \frac{i}{\hbar} [e\phi, p_x] - \frac{i}{\hbar} \left[\frac{e}{c} \vec{\alpha} \cdot \vec{A}, p_x \right] - \frac{ie}{\hbar c} [\vec{c} \alpha \cdot \vec{p}, A_x] - \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -e \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \vec{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - e \left(\alpha_x \vec{v} \right) \cdot \vec{A}_x - \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \\
&= -e \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + e \left(\alpha_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + \alpha_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \right. \\
&\quad \left. - \alpha_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - \alpha_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - \alpha_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) = \\
&= -e \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + e \left[\alpha_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + \alpha_z \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right] = \\
&= e E_x + e (\vec{\alpha} \wedge \vec{B})_x = F_x,
\end{aligned}$$

portanto:

$$\frac{d}{dt} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) = e \vec{E} + e (\vec{\alpha} \wedge \vec{B}) = \vec{F} \quad (2.33)$$

onde \vec{F} é a força obtida substituindo \vec{v}/c por $\vec{\alpha}$ na força de Lorentz. Não é o análogo da equação de Newton por causa da falta de relação entre esta equação e \dot{x} .

II.6 O Spin do elétron

O momento angular orbital é:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}),$$

daf:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \dot{\vec{r}} \wedge (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt} (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) = \\
&= c \vec{\alpha} \wedge (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) + \vec{r} \wedge \vec{F}.
\end{aligned} \quad (2.34)$$

O último termo corresponde ao torque clássico, que se anula para uma força central. Neste último caso, vê-se que:

$$\dot{\vec{L}} = c \vec{\alpha} \wedge (\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}) \neq 0, \quad (2.35)$$

1.é, o momento angular \vec{L} não se conserva mesmo para forças cen-
trais.

Vamos agora considerar: $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \\ 0 \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ e calcular $\dot{\vec{\sigma}}$.

Por (2.20) e (2.21):

$$\sigma_z = i \gamma_0 \alpha_x \gamma_0 \alpha_y = -i \alpha_x \alpha_y ,$$

portanto:

$$\dot{\sigma}_z = \frac{i}{\hbar} [H, \sigma_z] = \frac{i}{\hbar} [H, \alpha_x \alpha_y] = \frac{2c}{\hbar} [\alpha_x \pi_x + \alpha_y \pi_y, \alpha_x \alpha_y]$$

mas:

$$[\alpha_x \pi_x, \alpha_x \alpha_y] = \alpha_y \pi_x + \alpha_y \pi_x = 2\alpha_y \pi_x ,$$

$$[\alpha_y \pi_y, \alpha_x \alpha_y] = -\alpha_x \pi_y - \alpha_x \pi_y = -2\alpha_x \pi_y ,$$

logo:

$$\dot{\sigma}_z = \frac{2c}{\hbar} (\alpha_y \pi_x - \alpha_x \pi_y) .$$

Dai:

$$\frac{1}{2} \hbar \dot{\vec{\sigma}} = -c(\vec{\alpha} \wedge \vec{\pi}) . \quad (2.36)$$

Portanto, por (2.35):

$$\dot{\vec{L}} + \frac{1}{2} \hbar \dot{\vec{\sigma}} = 0, \quad (2.37)$$

para forças centrais. O operador $\vec{L} + \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ é o momento angular total do elétron: \vec{L} representa o momento angular orbital e $\frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ o momento angular intrínseco: o spin do elétron.

CAPÍTULO III

Aproximação Não-Relativista da Equação de DiracIII - 1. Aproximação em 1^o ordem (termos em v/c). Equação de Pauli.

Consideremos, por simplicidade, estados estacionários

$$\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\vec{x}), \quad (3.1)$$

$$H \psi = E \psi \quad (3.2)$$

e ponhamos

$$E = mc^2 + W, \quad (3.3)$$

isto é:

$$(c \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + mc^2 \beta + e \phi) \psi(\vec{x}) = (mc^2 + W) \psi(\vec{x}). \quad (3.4)$$

Analogamente às equações (2.7), podemos escrevê-la como um par de equações:

$$\begin{aligned} (mc^2 + W) \psi_a &= c \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \psi_b + mc^2 \psi_a + e \phi \psi_a \\ (mc^2 + W) \psi_b &= c \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \psi_a - mc^2 \psi_b + e \phi \psi_b \end{aligned} \quad (3.5)$$

Daqui resulta:

$$\psi_b = \frac{1}{2mc^2 + W - e \phi} c \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \psi_a. \quad (3.6)$$

Vemos que, quando $W \ll mc^2$ e $e \phi \ll mc^2$, então:

$$\psi_b \sim \frac{v}{c} \psi_a.$$

Por isso, as duas componentes de ψ_a são chamadas as componentes grandes e as de ψ_b , as componentes pequenas.

Substituindo (3.6) na 1ª equação (3.5), vem:

$$W \psi_a = c(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \frac{1}{2mc^2 + W - e\phi} c(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \psi_a + e\phi \psi_a. \quad (3.7)$$

No caso em que se pode desprezar W e $e\phi$ diante de $2mc^2$:

$$W \psi_a = \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \psi_a + e\phi \psi_a. \quad (3.8)$$

É a equação de Pauli (obtida retendo o termo em $\frac{v}{c}$ em ψ_b), (ver (1.17)).

III - 2. Aproximação em 2ª ordem (termos em v^2/c^2).

Interação spin-órbita.

A equação de Pauli foi obtida de (3.7) desprezando W e $e\phi$ diante de $2mc^2$. Podemos desenvolver $(2mc^2 + W - e\phi)^{-1}$ em série de potências e conservar o 2º termo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2mc^2 + W - e\phi} &= \frac{1}{2mc^2} \left(1 + \frac{W - e\phi}{2mc^2}\right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{2mc^2} \left\{1 - \frac{W - e\phi}{2mc^2} + \dots\right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A equação (3.7) torna-se agora

$$W \psi_a = \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \psi_a - \frac{1}{4(m^2 c^2)} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) (W - e\phi) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \psi_a + e\phi \psi_a. \quad (3.10)$$

A condição de normalização:

$$\int (|\psi_a|^2 + |\psi_b|^2) d^3x = 1, \quad (3.11)$$

escreve-se:

$$\int \psi_a^* \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{4m^2 c^2} \right] \psi_a d^3x \cong 1 \quad (3.12)$$

se retivermos só o termo em v^2/c^2 . Observe-se que das relações (2.8):

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2} (\psi_a + \psi_b) \\ \psi &= \frac{1}{2} (\psi_a - \psi_b) \end{aligned}$$

se tem:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})}{2mc} - \dots \right] \psi_a, \\ \psi &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})}{2mc} + \dots \right] \psi_a. \end{aligned} \quad (3.13)$$

A condição de normalização (3.11) é:

$$2 \int (\chi^* \chi + \psi^* \psi) d^3x = 1,$$

e é exata.

Introduzamos a função φ , assim definida:

$$\varphi = \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right] \psi_a; \quad (3.14)$$

então, a condição de normalização (3.12) escreve-se (retendo só termos até v^2/c^2):

$$\int \varphi^* \varphi d^3x = 1. \quad (3.15)$$

Desde que desprezemos os termos de ordem superior a v^2/c^2 , a equação (3.10) é a mesma que a seguinte:

$$\left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right] (W - e\phi) \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right] \psi_a = \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \psi_a +$$

$$+ \frac{1}{8m^2 c^2} \left\{ (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 (W - e\phi) - \right. \\ \left. - 2(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(W - e\phi)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) + (W - e\phi)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \right\} \psi_a ,$$

ou pela (3.14):

$$(W - e\phi)\varphi = \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right]^{-1} \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right]^{-1} \varphi + \\ + \frac{1}{8m^2 c^2} \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right]^{-1} \left\{ (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 (W - e\phi) - 2(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(W - e\phi)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) + \right. \\ \left. + (W - e\phi)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \right\} \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right]^{-1} \varphi ,$$

ou:

$$(W - e\phi)\varphi = \left[1 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right] \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \left[1 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right] \varphi + \\ + \left[1 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right] \frac{1}{8m^2 c^2} \left\{ (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 (W - e\phi) - 2(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(W - e\phi)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) + \right. \\ \left. + (W - e\phi)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \right\} \left[1 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{8m^2 c^2} \right] \varphi . \quad (3.16)$$

Retendo, novamente, só os termos até v^2/c^2 :

$$(W - e\phi)\varphi = \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \varphi - \frac{1}{8m^3 c^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^4 \varphi + \frac{1}{8m^2 c^2} \{S\} \varphi + \dots \quad (3.17)$$

Mas: $A^2B - 2ABA + BA^2 = A(AB - BA) - (AB - BA)A$,

então:

$$\{S\} \varphi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \left\{ (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(W - e\phi) - (W - e\phi)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \right\} \varphi - \left\{ (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(W - e\phi) - \right. \\ \left. - (W - e\phi)(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \right\} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \left\{ -e(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \rho \varphi + e \rho (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \varphi \right\} - \left\{ -e(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \rho \varphi + e \rho (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \varphi \right\} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \varphi = \\
&= (\sigma \cdot \pi) \left\{ i \hbar e \rho (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) \varphi + i \hbar e [(\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) \rho] \varphi - i \hbar e \rho (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) \varphi \right\} - \\
&\qquad\qquad\qquad - \left\{ \text{termo} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. \text{idéntico} \right\} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \varphi = \\
&= (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \left\{ -i \hbar e (\vec{\sigma} \cdot \vec{E}) \varphi \right\} - \left\{ -i \hbar e (\vec{\sigma} \cdot \vec{E}) \right\} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \varphi .
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i \hbar e} \{ S \} \varphi &= [(\vec{\sigma} \cdot \vec{E})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{E})] \varphi = \\
&= [(\vec{E} \cdot \vec{\sigma})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) - (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})(\vec{\sigma} \cdot \vec{E})] \varphi = \\
&= [(\vec{E} \cdot \vec{\pi}) - (\vec{\pi} \cdot \vec{E})] \varphi + [\sigma_x \sigma_y (E_x \pi_y - E_y \pi_x + \pi_y E_x - \pi_x E_y) + \\
&+ \sigma_y \sigma_z (E_y \pi_z - E_z \pi_y + \pi_z E_y - \pi_y E_z) + \sigma_z \sigma_x (E_z \pi_x - E_x \pi_z + \\
&\qquad\qquad\qquad + \pi_x E_z - \pi_z E_x)] \varphi = \\
&= i \hbar (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \varphi + i \vec{\sigma} \cdot [(\vec{E} \wedge \vec{\pi}) - (\vec{\pi} \wedge \vec{E})] \varphi .
\end{aligned}$$

Isto é: $\{ S \} \varphi = e \hbar [-\hbar (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{\sigma} \cdot (\vec{\pi} \wedge \vec{E}) - \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{\pi})] \varphi .$

Então, voltando a (3.17):

$$\begin{aligned}
(W - e \rho) \varphi &= \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 \varphi - \frac{1}{8m^3 c^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^4 \varphi + \\
&+ \frac{e \hbar}{8m^2 c^2} \left\{ -\hbar (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{\sigma} \cdot (\vec{\pi} \wedge \vec{E}) - \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{\pi}) \right\} \varphi . \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned}
(W - e \rho) \varphi &= \frac{1}{2m} \vec{\pi}^2 \varphi + \frac{e \hbar}{2mc} (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \varphi - \frac{1}{8m^3 c^2} (\vec{p} \cdot \vec{p})^2 + \\
&+ \frac{e \hbar}{8m^2 c^2} \left\{ -\hbar \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \wedge \vec{E}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \wedge \vec{\pi}) \right\} \varphi . \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Interpretação dos termos da equação de onda (3.19):

$\frac{1}{2m} \vec{p}^2$: energia cinética e interação com o potencial \vec{A} ;

$\frac{eh}{2mc} (\vec{\sigma} \cdot \vec{B})$: interação do momento magnético de spin com \vec{B} ;

$-\frac{1}{8m^3 c^2} (\vec{p} \cdot \vec{p})^2$: correção relativista à energia cinética, pois:

$$E = c(m^2 c^2 + \vec{p}^2)^{\frac{1}{2}} = mc^2 \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= mc^2 \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{2m^2 c^2} - \frac{1}{8} \frac{\vec{p}^4}{m^4 c^4} + \dots\right).$$

O último termo dá a interação spin-órbita. Seja \vec{E} um campo central: $\vec{E} \sim e \frac{\vec{r}}{r^3}$; então:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \wedge \vec{E}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \wedge \vec{\pi}) = -2(\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \wedge \vec{\pi}),$$

logo:

$$\frac{eh}{8m^2 c^2} [(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \wedge \vec{E}) - (\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \wedge \vec{\pi})] = -\frac{e^2 h}{4m^2 c^2} \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \wedge \vec{p} = -\frac{e^2 h}{4m^2 c^2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{r^3},$$

que é o termo de spin-órbita. Desdobra os estados degenerados com um dado l e afeta a todos, menos os estados S; estes são afetados pelo termo em $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$.

Clássicamente, carga que se move em campo elétrico \vec{E} com velocidade \vec{v} , cria um campo magnético $\vec{B} = \frac{e}{c} \vec{v} \wedge \vec{E} = \frac{e}{mc} \vec{\pi} \wedge \vec{E}$.

Logo:

$$\frac{eh}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \frac{e^2 h}{2m^2 c^2} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \wedge \vec{E},$$

que, a menos de um fator 2, explica classicamente o termo

$-2(\vec{\sigma} \cdot \vec{E} \wedge \vec{\pi}) \frac{eh}{8m^2 c^2}$. Entretanto, Thomas mostrou antes de Dirac

que este argumento clássico é incompleto, havendo derivado a expressão correta.

A ordem de grandeza da interação spin-órbita ($E_{\sigma L}$) é fácil de obter-se:

$$\frac{e^2 \hbar}{2mc} \frac{1}{2mc} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{r^3} \sim \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \frac{e}{2mc} \vec{L} \frac{1}{r^3} \sim \frac{\hbar^2}{r^3} ,$$

onde $\vec{\mu}$ representa o momento magnético. Tomando para ambos os momentos o magneton de Bohr à distância de um raio de Bohr, vem:

$$E_{\sigma L} \sim \left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \left(\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^3 = \frac{me^2}{\hbar^2} e^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 = \alpha^2 \frac{e^2}{a} ,$$

onde: $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \sim \frac{1}{137}$, a = raio de Bohr

$$E_{\sigma L} \sim 10^{-4} W_B \sim 10^{-3} \text{ ev.}$$

O desdobramento dos níveis dá-se porque:

$$j(j+1) = \frac{3}{4} + l(l+1) + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{\hbar} ,$$

logo:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{L} = \begin{cases} l & , \text{ para } j = l + \frac{1}{2} \\ -l-1 & , \text{ para } j = l - \frac{1}{2} . \end{cases}$$

III - 3. Forma quadri-dimensional da corrente.

A equação de Dirac pode ser posta sob uma das formas alternativas:

$$\gamma_\mu \pi^\mu \psi = mc \psi , \tag{3.20-a}$$

$$\gamma_\mu \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{c} A^\mu \right) \psi = mc \psi , \tag{3.20-b}$$

ou:
$$\gamma_\mu (i\hbar \nabla^\mu - \frac{e}{c} A^\mu) \psi = mc \psi ; \tag{3.20-c}$$

ou ainda:
$$(i\hbar \not{\nabla} - \frac{e}{c} \not{A}) \psi = mc \psi . \tag{3.20-d}$$

Vimos, (2.31), que:

$$\begin{aligned} \rho &= \psi^\dagger \psi, \\ \vec{j} &= c \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para empregar notação relativista, definamos:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta, \quad (3.22)$$

a adjunta de ψ . Então:

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\psi} \beta \psi \\ \vec{j} &= c \bar{\psi} \beta \vec{\alpha} \psi = c \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi, \\ \vec{\gamma} &= \beta \vec{\alpha} \quad \text{e} \quad \beta^2 = I. \end{aligned}$$

pois

Portanto, a corrente se escreve:

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (3.23)$$

e obedece à equação de conservação:

$$\nabla_\mu j^\mu = 0 \quad (3.24)$$

- - - - -

III.4 Equação de Dirac adjunta

De:

$$\partial_\mu \pi^\mu \psi = mc \psi.$$

$$\text{ou: } \frac{1}{c} \gamma_0 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) - \vec{\gamma} \cdot \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi = mc \psi, \quad (3.25)$$

vem, tomando o complexo conjugado:

$$\frac{1}{c} \gamma_0^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi \right) \psi^* - \vec{\gamma}^* \cdot \left(i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi^* = mc \psi^* \quad (3.26)$$

Mas:

$$\vec{\gamma}_{ik} = \beta_{il} \vec{\alpha}_{lk} \quad \therefore \vec{\gamma}_{ik}^* = \beta_{il}^* \vec{\alpha}_{lk}^* = \vec{\alpha}_{kl} \beta_{li} = -\beta_{kl} \vec{\alpha}_{li} = -\vec{\gamma}_{ki}$$

isto é, $\vec{\gamma}$ é anti-hermitiana:

$$\vec{\gamma}^+ = -\vec{\gamma}$$

enquanto que (veja (2.26-a)) γ_0 é hermitiana:

$$\gamma_{0ik}^* = \gamma_{0ik} = \gamma_{oki} \quad \text{ou} \quad \gamma_0^+ = \gamma_0.$$

Logo, tomando o transpôsto de (3.26):

$$\frac{1}{c} \psi^{*T} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi) \gamma_0 + \psi^{*T} (i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{\gamma} = mc \psi^{*T}$$

$$\frac{1}{c} \psi^+ \beta (-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi) + \psi^+ (i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{\gamma} = mc \psi^+,$$

ou multiplicando por β :

$$\frac{1}{c} \bar{\psi} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi) \beta - \bar{\psi} (i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A}) \cdot \vec{\gamma} = mc \bar{\psi},$$

isto é:

$$\bar{\psi} (-i\hbar \vec{\nabla}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) \gamma^\mu = mc \bar{\psi}; \quad (3.27)$$

a flecha sôbre as derivadas significa derivação de $\bar{\psi}$.

O adjunto de um operador (\bar{N}), é obtido revertendo a ordem dos γ 's e trocando o sinal de i . Por exemplo, seja:

$$N = \gamma_x \gamma_y, \quad \text{então:} \quad \bar{N} = \gamma_y \gamma_x = -\gamma_x \gamma_y = -N;$$

$$N = i \gamma_5, \quad \text{então:} \quad \bar{N} = -i \gamma_0 \gamma_2 \gamma_y \gamma_x = -i \gamma_5.$$

Tem-se:

$$\bar{N} = \gamma_0 N^+ \gamma_0$$

e:

$$(\bar{\psi}_2 N \psi_1)^* = (\bar{\psi}_1 \bar{N} \psi_2). \quad (3.28)$$

III.5 Solução da equação de Dirac para partícula livre

Neste caso ($A = 0$):

$$i\hbar \not{\nabla} \psi = mc \psi. \quad (3.29)$$

Façamos:

$$\psi = u e^{-1/\hbar p_\nu x^\nu} \quad (3.30)$$

como ψ é uma função de onda com 4 componentes, o que se tem é

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\nu x^\nu} \quad (3.31)$$

isto é, u_λ , $\lambda = 1, 2, 3, 4$ são as componentes de uma coluna e u é chamado um spinor de Dirac.

Para que (3.30) satisfaça (3.29) deve-se ter:

$$\not{p}\psi = mc\psi,$$

ou:

$$(\not{p} - mc)u = 0.$$

As 4 equações são:

$$\left(\gamma_0 \frac{E}{c} - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - mc\right)u = 0$$

ou, na representação (2.11):

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{E}{c} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_x - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_y - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_z - mc \right\}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.32-a)$$

ou:

$$\begin{pmatrix} \frac{E}{c} - mc & 0 & -p_z & -(p_x - ip_y) \\ 0 & \frac{E}{c} - mc & -(p_x + ip_y) & p_z \\ p_z & p_x - ip_y & -\left(\frac{E}{c} + mc\right) & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & -\left(\frac{E}{c} + mc\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = 0,$$

(3.32-b)

isto é:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{E}{c} - mc\right)u_1 - p_z u_3 - (p_x - ip_y)u_4 &= 0, \\ \left(\frac{E}{c} - mc\right)u_2 - (p_x + ip_y)u_3 + p_z u_4 &= 0, \\ p_z u_1 + (p_x - ip_y)u_2 - \left(\frac{E}{c} + mc\right)u_4 &= 0, \\ (p_x + ip_y)u_1 - p_z u_2 - \left(\frac{E}{c} + mc\right)u_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

O Determinante deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} \frac{E}{c} - mc & 0 & ip_z & -(p_x - ip_y) \\ 0 & \frac{E}{c} - mc & -(p_x + ip_y) & p_z \\ p_z & p_x - ip_y & -\left(\frac{E}{c} + mc\right) & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & -\left(\frac{E}{c} + mc\right) \end{vmatrix} = 0 .$$

Desenvolvendo:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{E}{c} - mc\right) \left\{ -p_z^2 \left(\frac{E}{c} + mc\right) + \left(\frac{E}{c} + mc\right)^2 \left(\frac{E}{c} - mc\right) - \left(\frac{E}{c} + mc\right) (p_x^2 + p_y^2) \right\} - \\ & - p_z \left(\frac{E}{c} - mc\right) p_z \left(\frac{E}{c} + mc\right) - p_z^3 - p_z (p_x + ip_y)(p_x - ip_y) \left\} + \right. \\ & + (p_x - ip_y) \left\{ -\left(\frac{E}{c} - mc\right) \left(\frac{E}{c} + mc\right) (p_x + ip_y) + (p_x + ip_y) p_z^2 + \right. \\ & \left. + (p_x + ip_y)^2 (p_x - ip_y) \right\} = \\ & = \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2\right)^2 - 2p_z^2 \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2\right) - 2p_z^2 \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2\right) - \\ & \quad - 2(p_x^2 + p_y^2) \left(\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2\right) - \\ & - 2p_z^2 (p_x^2 + p_y^2) + (p_x^2 + p_y^2)^2 + p_z^4 = \left(\frac{E^2}{c^2} - p^2 - m^2 c^2\right)^2 = 0 , \quad (3.34) \end{aligned}$$

que é a conexão relativista entre energia e quantidade de movi-

mento. Esta última equação dá as raízes duplas:

$$E = +c \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$$

e:

$$E = -c \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$$

Haverá, assim, quatro soluções, duas com energia positiva e duas com energia negativa. Estas soluções são:

| | ↑ | ↓ |
|------------------------------------|--|--|
| $E = +c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$ | $u_1 = 1$ | $u_1 = 0$ |
| | $u_2 = 0$ | $u_2 = 1$ |
| | $u_3 = \frac{cp_z}{E + mc^2} \quad (3.35)$ | $u_3 = \frac{cp_-}{E + mc^2} \quad (3.36)$ |
| | $u_4 = \frac{cp_+}{E + mc^2}$ | $u_4 = \frac{cp_z}{E + mc^2}$ |

onde: $p_+ = p_x + i p_y$, $p_- = p_x - i p_y$.

| | ↑ | ↓ |
|------------------------------------|---|--|
| $E = -c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$ | $u_1 = -\frac{cp_z}{ E + mc^2}$ | $u_1 = -\frac{cp_-}{ E + mc^2}$ |
| | $u_2 = -\frac{cp_+}{ E + mc^2} \quad (3.37)$ | $u_2 = \frac{cp_z}{ E + mc^2} \quad (3.38)$ |
| | $u_3 = 1$ | $u_3 = 0$ |
| | $u_4 = 0$ | $u_4 = 1$ |

Qual é o significado das duas soluções (linearmente independentes) com $E > 0$? Deve haver um operador que comute com \hat{p} e tal que u seja auto-solução de \hat{p} e dê esse operador. Isto é, deve existir uma grandeza física (a ser especificada),

que determine de modo único a função de onda.

Tomemos a partícula movendo-se na direção de p_z :

$$p_x = p_y = 0.$$

Logo:

$$\hat{p} = \gamma_0 p_0 - \gamma_z p_z$$

e $\sigma_z = 1 \gamma_x \gamma_y$ comuta com \hat{p} .

Definindo, então, u de tal maneira que satisfaça tanto $\hat{p} u = mcu$, como $\sigma_z u = su$, a função de onda fica completamente especificada.

Assim, as soluções são (se $p_x = p_y = 0$):

| | $E > 0$ | | $E < 0$ | |
|-------|-------------------------|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| | $u_I : s = +1 \uparrow$ | $u_{II} : s = -1 \downarrow$ | $u_{III} : s = +1 \uparrow$ | $u_{IV} : s = -1 \downarrow$ |
| u_1 | 1 | 0 | $-\frac{cp_z}{ E + mc^2}$ | 0 |
| u_2 | 0 | 1 | 0 | $\frac{cp_z}{ E + mc^2}$ |
| u_3 | $\frac{cp_z}{E + mc^2}$ | 0 | 1 | 0 |
| u_4 | 0 | $-\frac{cp_z}{E + mc^2}$ | 0 | 1 |

(3.39)

Neste caso a partícula está polarizada na direção do movimento.

III - 6. Normalização das funções de onda.

Na teoria não-relativista impõe-se:

$$\psi^+ \psi = 1 .$$

Mas aqui, na teoria de Dirac, $\psi^+ \psi$ é a quarta componente de um quadri-vetor ($j_\mu = (j_x, j_y, j_z, \rho = \psi^+ \psi)$), de modo que esta normalização não seria covariante. Podemos fazer a normalização covariante se impuzermos:

$$u^+ u = 2E , \quad (3.40)$$

onde E é a energia e 2 é escolhido por conveniência.

Tomemos a solução (3.35) para $E > 0$ e $s = +1$:

$$u = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z(E+mc^2)^{-1} \\ cp_+(E+mc^2)^{-1} \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} px} , \quad (3.41)$$

onde C_1 é o coeficiente de normalização. Temos, pois:

$$\begin{aligned} u^+ u &= C_1^2 (1, 0, cp_z(E+mc^2)^{-1}, cp_+(E+mc^2)^{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z(E+mc^2)^{-1} \\ cp_+(E+mc^2)^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \left(1 + \frac{c^2 p^2}{(E+mc^2)^2} \right) C_1^2 = \frac{E^2 + m^2 c^4 + c^2 p^2 + 2mc^2 E}{(E+mc^2)^2} C_1^2 = \\ &= \frac{2E}{E+mc^2} C_1^2 = 2E , \text{ segundo (3.40). Logo (a menos de um fator de} \\ &\text{fase):} \quad C_1 = (E+mc^2)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Logo:

$$u^I = \frac{1}{(E+mc^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} E+mc^2 \\ 0 \\ cp_z \\ cp_+ \end{pmatrix}, \quad E > 0, \quad s = +1 \quad (3.42)$$

e:

$$u^{II} = \frac{1}{(E+mc^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ E+mc^2 \\ cp_- \\ -cp_z \end{pmatrix}, \quad E > 0, \quad s = -1 \quad (3.43)$$

Para $E < 0$, $s = \pm 1$, encontra-se: $C_1' = (|E|+mc^2)^{\frac{1}{2}}$. Quer-se, agora, exprimir a normalização em termos de $\bar{u}u = u^\dagger \gamma_0 u$.

Temos, para $E > 0$, $s = +1$, pondo $E' = E+mc^2$:

$$\begin{aligned} \bar{u}u &= \frac{1}{E'} (E', 0, cp_z, cp_-) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E' \\ 0 \\ cp_z \\ cp_+ \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{E'} (E', 0, cp_z, cp_-) \begin{pmatrix} E' \\ 0 \\ -cp_z \\ -cp_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{E'} (E'^2 - c^2 \vec{p}^2) = \\ &= \frac{1}{E'} (E^2 + m^2 c^4 + 2E mc^2 - c^2 \vec{p}^2) = \frac{2mc^2(E+mc^2)}{E+mc^2} = 2mc^2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Analogamente, para $E > 0$, $s = -1$, tem-se:

$$\bar{u}u = 2mc^2 \quad (3.45)$$

Para $E < 0$, $s = \pm 1$, tem-se:

$$\bar{u}u = -2mc^2 \quad (3.46)$$

(verifique.)

Tabela dos 4 spinores que satisfazem a equação:

$$(\hat{p} - mc)u = 0.$$

| | | $E > 0$ | $E < 0$ | | |
|-------|-----------------------------|-------------------|----------------------|----------------------|-------------------------|
| u_1 | $(E + mc^2)^{-\frac{1}{2}}$ | $E + mc^2$ | 0 | $-cp_z$ | $-cp_-$ |
| u_2 | | 0 | $E + mc^2$ | $-cp_+$ | cp_z |
| u_3 | | cp_z | cp_- | $ E + mc^2$ | 0 |
| u_4 | | cp_+ | $-cp_z$ | 0 | $ E + mc^2$ |
| spin | | ↑ | ↓ | ↑ | ↓ |
| | | $u^I(\vec{p}, E)$ | $u^{II}(\vec{p}, E)$ | $u^I(\vec{p}, - E)$ | $u^{II}(\vec{p}, - E)$ |

Normalização:

$$u^r u^s = 2E \delta^{rs}$$

$$\bar{u}^r u^s = 2mc^2 \delta^{rs} \quad E > 0$$

$$\left. \begin{aligned} u^r u^s &= 2|E| \delta^{rs} \\ \bar{u}^r u^s &= -2mc^2 \delta^{rs} \end{aligned} \right\} E < 0, \quad (3.47)$$

$$r, s = I, II.$$

III - 7. Pósitrons.

Concluimos que a equação de Dirac para um elétron livre admite quatro soluções ondas planas. Duas delas descrevem um elétron de momentum \vec{p} , energia positiva $E > 0$ e spins opostos:

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_+^I &= u^I(\vec{p}, E) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} = u^I(\vec{p}, E) e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \\ \psi_+^{II} &= u^{II}(\vec{p}, E) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} = u^{II}(\vec{p}, E) e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \end{aligned} \right. \quad (3.48)$$

e duas outras descrevem um elétron de momentum \vec{p} , energia negativa $E = -|E| < 0$ e spins opostos:

$$\begin{cases} \psi_-^I = u^I(\vec{p}, -|E|) e^{-\frac{1}{\hbar} p x} = u^I(\vec{p}, -|E|) e^{+\frac{1}{\hbar} (|E|t + \vec{p} \cdot \vec{x})}, \\ \psi_-^{II} = u^{II}(\vec{p}, -|E|) e^{-\frac{1}{\hbar} p x} = u^{II}(\vec{p}, -|E|) e^{+\frac{1}{\hbar} (|E|t + \vec{p} \cdot \vec{x})} \end{cases} \quad (3.49)$$

Todos os 4 spinores u satisfazem à equação:

$$(\not{p} - mc)u = 0 \quad (3.50)$$

e são dados na tabela (3.47).

Elétrons com energia negativa não podem ser descritos fisicamente. Dirac propôs uma interpretação que utiliza o princípio de Pauli. Admitiu ele que todos os estados de energia negativa estão normalmente ocupados, de modo que um elétron com energia positiva não pode passar a um estado com energia negativa por causa do princípio de Pauli. O vácuo é definido como o estado em que todos os estados de energia negativa estão ocupados e os estados de energia positiva estão desocupados. A segunda hipótese é que os elétrons que ocupam os estados de energia negativa não contribuem à carga, ao spin, à energia, nem à quantidade de movimento observáveis. A terceira hipótese é que um campo eletromagnético ou outro que interaja com elétrons pode atuar sobre os elétrons que ocupam estados de energia negativa.

Consideremos agora um elétron num estado de energia negativa, com momentum \vec{p} , energia $E = -|E|$, carga e , spin (componente z) $\frac{1}{2}\hbar$.

Como, pela segunda hipótese, o conjunto infinito de tais elétrons (o "mar de elétrons") contribui para as resultantes dessas grandezas o valor zero, se retiramos o elétron considerado do mar e o fizermos passar a um estado de energia positiva, o mar que permanece, deverá ter um momentum $-\vec{p}$, uma energia $-E = |E|$, uma carga $-e$ e um spin $-\frac{1}{2}\hbar$. A lacuna ou furo, que era ocupada pelo

elétron retirado, comporta-se, pois, como um pósitron com energia $|E|$, momentum $-\vec{p}$, spin $+\frac{1}{2}\hbar$ e carga $-e$.

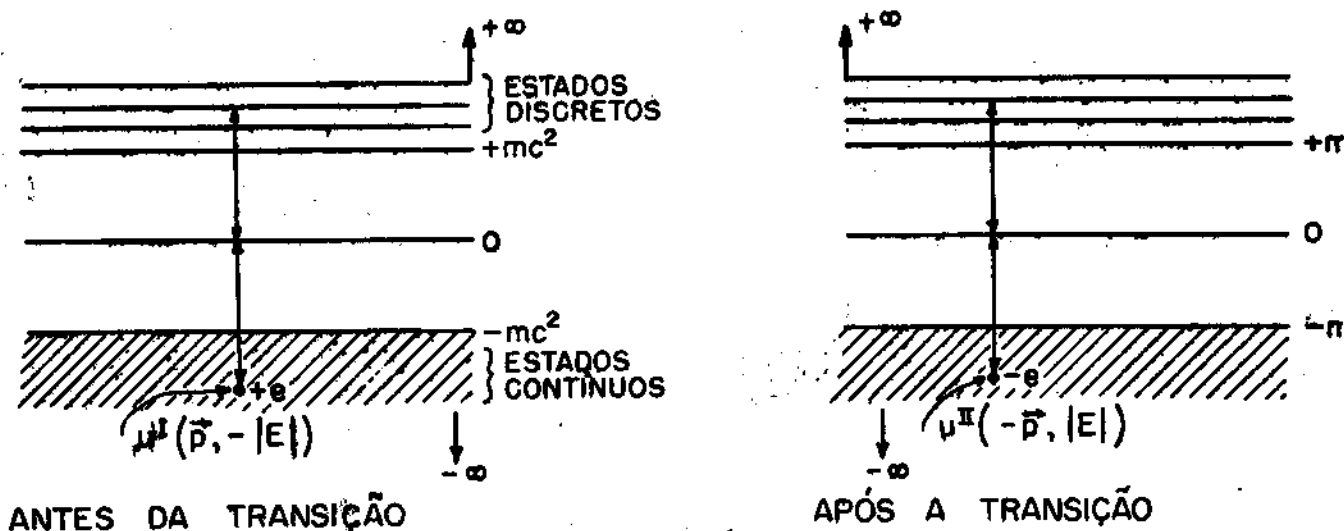


FIG. 3.1

Assim, podemos dizer que a função de onda que descreve um elétron com energia negativa $-|E|$ e momentum $-\vec{p}$ corresponde um pósitron com energia $|E|$ e momentum \vec{p} .

Consideremos, então, um elétron de energia $-|E|$ e momentum $-\vec{p}$ e de spin $+\frac{1}{2}\hbar$. Pela tabela (3.47) a função de onda é:

$$\psi_{-}^I = u^I(-\vec{p}, -|E|) e^{\frac{i}{\hbar}(|E|t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (3.51)$$

onde:

$$u^I(-\vec{p}, -|E|) = \frac{1}{(|E| + mc^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} cp_z \\ c(p_x + ip_y) \\ |E| + mc^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Tinhamos visto que:

$$(\not{p} - mc)u^I(\vec{p}, -|E|) = 0,$$

isto é:



$$(\gamma_0 \frac{E}{c} - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - mc) u^I(\vec{p}, -|E|) = (-\gamma_0 \frac{|E|}{c} - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - mc) u^I(\vec{p}, -|E|) = 0,$$

logo, no nosso caso:

$$(-\gamma_0 \frac{|E|}{c} + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - mc) u^I(-\vec{p}, -|E|) = 0,$$

ou:

$$(\not{p} + mc) u^I(-\vec{p}, -|E|) = 0. \tag{3.53}$$

Pode-se dizer que a função $v(\vec{p}, |E|) = u^I(-\vec{p}, -|E|)$ descreve o pósitron de momentum p e energia $|E|$, mas na realidade ela descreve o elétron do mar, de energia $-|E|$ e momentum $-\vec{p}$, a cuja ausência corresponde o pósitron. O spin do pósitron é o oposto do de tal elétron.

Podemos, entretanto, achar a função com energia positiva que descreve o pósitron. Ela se chama função conjugada na carga e a operação que transforma a função que descreve um elétron com momentum $-\vec{p}$, energia $-|E|$ e spin $\frac{1}{2}\hbar$, na função que descreve o pósitron com momentum \vec{p} , energia $|E|$ e spin $-\frac{1}{2}\hbar$, chama-se conjugação da carga.

Seja $w(\vec{p}, |E|)$ a função do pósitron. Como êste deve obedecer à equação de Dirac de um corpúsculo livre, devemos ter

$$\psi_{\text{PÓSITRON}} = w(\vec{p}, |E|) e^{\frac{i}{\hbar}(|E|t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \tag{3.54}$$

e

$$(\not{p} - mc) w = 0 \tag{3.55}$$

ou:

$$|E|w = (c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2 \beta) w. \tag{3.56}$$

Por outro lado, a função do elétron com energia $-|E|$ e momentum $-\vec{p}$ é:

$$\psi_{\text{ELÉTRON}} = u^I(-\vec{p}, -|E|) e^{\frac{i}{\hbar}(|E|t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \tag{3.57}$$

com:

$$(\not{p} + mc)u^I = 0, \quad (3.58)$$

isto é:

$$|E|u^I = (c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - mc^2\beta)u^I. \quad (3.59)$$

Comparando w e $-\frac{i}{\hbar}(|E|t - \vec{p}\cdot\vec{x})$ com u^I e $\frac{i}{\hbar}(|E|t - \vec{p}\cdot\vec{x})$, vemos que a primeira está relacionada com a complexa conjugada da segunda.

Ponhamos:

$$w(\vec{p}, |E|) = \mathcal{B} u^{I*}(-\vec{p}, -|E|), \quad (3.60)$$

isto é:

$$\psi_{PÓS} = \mathcal{B} \psi_{ELÉT}^* \quad (3.61)$$

De (3.59), lembrando-nos de que agora p é um número, tiramos:

$$|E|u^{I*} = (c\vec{\alpha}^*\cdot\vec{p} - mc^2\beta^*)u^{I*} \quad (3.62)$$

De (3.56) e (3.60) concluímos:

$$|E|\mathcal{B} u^{I*} = (c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta)\mathcal{B} u^{I*}. \quad (3.63)$$

Comparando estas duas últimas equações:

$$\mathcal{B}\vec{\alpha}^*\mathcal{B}^{-1} = \vec{\alpha} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}\beta^*\mathcal{B}^{-1} = -\beta. \quad (3.64)$$

Mas:

$$\vec{\alpha}_1^* = \alpha_1, \alpha_2^* = -\alpha_2, \alpha_3^* = \alpha_3, \beta^* = \beta.$$

Uma matriz \mathcal{B} que satisfaz a:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\alpha_1\mathcal{B}^{-1} &= \alpha_1, \mathcal{B}\alpha_2\mathcal{B}^{-1} = -\alpha_2, \mathcal{B}\alpha_3\mathcal{B}^{-1} = \\ &= \alpha_3, \mathcal{B}\beta\mathcal{B}^{-1} = -\beta, \end{aligned}$$

é:

$$\hat{b} = -i \gamma_2 (\equiv i \beta \alpha_2), \quad (3.65)$$

logo:

$$\hat{b}^2 = 1. \quad (3.66)$$

Observe que esta matriz \hat{b} transforma, de fato, $u^I(-\vec{p}, -|E|)$, com spin $+\frac{1}{2}\hbar$ na função $u^{II}(\vec{p}, |E|)$, com spin $-\frac{1}{2}\hbar$.

Resta provar que a função assim introduzida, descreve um corpúsculo com carga positiva. Temos:

$$\psi_{\text{PÓS}} = \hat{b} \psi_{\text{ELÉT}}^*, \quad \hat{b}^2 = 1. \quad (3.67)$$

Na presença de um campo eletromagnético é que a carga se manifesta, logo devemos considerar a equação:

$$(i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) \psi_e = mc \psi_e \quad (3.68)$$

e a equação adjunta:

$$\bar{\psi}_e (-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \mathbf{A}) = mc \bar{\psi}_e, \quad (3.69)$$

isto é,

$$\bar{\psi}_e \gamma_\mu (-i\hbar \vec{\nabla}^\mu - \frac{e}{c} A^\mu) = mc \bar{\psi}_e. \quad (3.69)$$

Agora:

$$\bar{\psi}_e \gamma_\mu = \psi_e^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu = \psi_e^{*T} \gamma_0 \gamma_\mu, \quad (3.70)$$

logo, se ψ_e descreve um elétron e ψ_p um pósitron:

$$\psi_p = \hat{b} \psi_e^*, \quad \psi_e^* = \hat{b}^{-1} \psi_p = \hat{b} \psi_p. \quad (3.71)$$

Dai:

$$\bar{\psi}_e \gamma_\mu = \psi_e^{*T} \gamma_0 \gamma_\mu = \psi_p^T \hat{b}^T \gamma_0 \gamma_\mu.$$

Substituindo na equação adjunta, obtem-se:

$$\psi_p^T \mathcal{G}^T \gamma_0 \gamma^\mu (-i\hbar \nabla_\mu - \frac{q}{c} A_\mu) = mc \psi_p^T \mathcal{G}^T \gamma_0 .$$

Tomando a transposta deste equação:

$$(-i\hbar \nabla_\mu - \frac{q}{c} A_\mu) \gamma^{\mu T} \gamma_0 \mathcal{G} \psi_p = mc \gamma_0 \mathcal{G} \psi_p .$$

Multiplicando à esquerda por $\mathcal{G}^{-1} \gamma_0$.

$$(-i\hbar \nabla_\mu - \frac{q}{c} A_\mu) \mathcal{G}^{-1} \gamma_0 \gamma^{\mu T} \gamma_0 \mathcal{G} \psi_p = mc \psi_p . \quad (3.72)$$

Mas de (3.64) resulta:

$$\mathcal{G} \gamma^\mu \gamma^{\mu T} \gamma_0 \mathcal{G}^{-1} = - \gamma^\mu \quad (3.73)$$

Por (3.72) e (3.73) :

$$(i\hbar \nabla_\mu + \frac{q}{c} A_\mu) \gamma^{\mu T} \psi_p = mc \psi_p ,$$

ou:

$$(i\hbar \nabla + \frac{q}{c} A) \psi_p = mc \psi_p ; \quad (3.74)$$

o que prova a asserção.

Muitas vezes define-se a conjugação da carga pela transformação:

$$\psi_p = C \bar{\psi}^T .$$

Vemos então que

$$\mathcal{G} \psi^* = C \gamma_0^T \psi^*$$

de onde:

$$\mathcal{G} = C \gamma_0^T$$

CAPÍTULO IV

INVARIÂNCIA RELATIVISTAIV.1 Inváriância Relativista

Estudaremos agora a invariância relativista da equação de Dirac. Evidentemente, queremos que ela seja invariante, pois as grandezas físicas descritas por uma equação relativista devem independe'r do particularreferencial de Lorentz usado. Existe uma transformação linear entre as funções de Dirac de uma partícula, relativas a dois referenciais de Lorentz, de tal modo que ambas satisfazem, em cada referencial, à equação de Dirac.

A transformação homogênea (i.é, sem translações espacio-temporais) mais geral de Lorentz é:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 a^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad a^{\mu}_{\nu} \text{ reais,} \quad (4.1-a)$$

ou em forma matricial:

$$X' = A X, \quad (4.1-b)$$

onde os coeficientes satisfazem a:

$$a^{\mu}_{\lambda} g_{\mu\nu} a^{\nu}_{\epsilon} = g_{\lambda\epsilon}$$

em virtude da invariância imposta sobre $x^{\mu} x_{\mu}$:

$$x'^{\mu} x'_{\mu} = a^{\mu}_{\lambda} x^{\lambda} g_{\mu\nu} a^{\nu}_{\epsilon} x^{\epsilon} = g_{\lambda\epsilon} x^{\lambda} x^{\epsilon}.$$

Quando há uma transformação linear das variáveis x , uma função escalar dessas variáveis se transforma da seguinte maneira: se $f(x)$ é a função e se a transformação no espaço dos x é:

$x' = Ax$, então, a função transforma-se de tal modo que:

$$f'(x) = f(A^{-1}x).$$

Isto porque queremos que a duas transformações sucessivas aplicadas numa certa ordem sobre os x correspondam duas transformações sobre f , na mesma ordem.

Seja:

$$f'(x) = T_1 f(x),$$

isto é:

$$T_1 f(x) = f(A_1^{-1}x).$$

Aplicando agora uma nova transformação T_2 :

$$T_2 T_1 f(x) = T_2 f'(x) = f'(A_2^{-1}x),$$

ou substituindo f' pela definição inicial:

$$T_2 T_1 f(x) = f'(A_2^{-1}x) = f(A_1^{-1} A_2^{-1}x) = f([A_2 A_1]^{-1}x).$$

No caso da função de Dirac, ela tem 4 componentes e a transformação de Lorentz, A , deve corresponder uma combinação linear entre as componentes de ψ . Podemos, portanto,

$$\psi'_\alpha(x') = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}(A) \psi_\beta(A^{-1}x'), \quad (4.3-2)$$

que pode ser escrita assim:

$$\psi'(x') = S(A)\psi(x), \quad (4.3-b)$$

ou, abreviadamente:

$$\psi' = S\psi, \quad (4.3-a)$$

onde S é uma matriz 4×4 que independe das coordenadas, pos-

seu inverso S^{-1} e depende unicamente dos a_{ν}^{μ} :

$$S(a_{\nu}^{\mu}) = S(A).$$

Queremos que a equação de Dirac no espaço dos x :

$$\gamma^{\mu} (i\hbar \nabla_{\mu} - \frac{e}{c} A_{\mu}) \psi = mc \psi, \quad (4.4)$$

se transforme numa equação com a mesma forma, no espaço dos x' :

$$\gamma^{\mu} (i\hbar \nabla'_{\mu} - \frac{e}{c} A'_{\mu}) \psi' = mc \psi'. \quad (4.5)$$

Como:

$$\psi = S^{-1} \psi', \quad (4.6)$$

e:

$$\nabla_{\mu} \psi = \sum_{\lambda} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \nabla'_{\lambda} \psi' = \sum_{\lambda} a^{\lambda}_{\mu} \nabla'_{\lambda} \psi', \quad (4.7)$$

$$A_{\mu} = \sum_{\lambda} a^{\lambda}_{\mu} A'_{\lambda}.$$

Por (4.6,7), (4.4) fica:

$$\sum_{\lambda, \mu} a^{\lambda}_{\mu} \gamma^{\mu} (i\hbar \nabla'_{\lambda} - \frac{e}{c} A'_{\lambda}) S^{-1} \psi' = mc S^{-1} \psi',$$

como os a^{λ}_{μ} são números, comutam com S . Portanto, multiplicando por S à esquerda:

$$\sum_{\lambda} S \sum_{\mu} a^{\lambda}_{\mu} \gamma^{\mu} S^{-1} (i\hbar \nabla'_{\lambda} - \frac{e}{c} A'_{\lambda}) \psi' = mc \psi' \quad (4.8)$$

Assim, (4.8) tem a mesma forma que (4.5), desde que:

$$\sum_{\mu} a^{\lambda}_{\mu} \gamma^{\mu} = S^{-1} \gamma^{\lambda} S. \quad (4.9)$$

Esta equação impõe uma condição sobre S . Ela decorre do fato de que se as matrizes obedecem às relações de anticomutação:

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu},$$

então, toda matriz γ'_{μ} que obedece às mesmas relações provem de γ_{μ} por uma transformação de equivalência:

$$\gamma'_{\mu} = S^{-1} \gamma_{\mu} S, \quad (4.10)$$

A relação acima é consistente com a condição de hermiticidade, pois:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\lambda} a^{\lambda} \gamma^{\lambda} \right)^{\dagger} &= \left(a^0 \gamma^0 - \sum_{\mathbf{k}} a^{\mathbf{k}} \gamma^{\mathbf{k}} \right)^{\dagger} = a^0 \gamma^0 + \sum_{\mathbf{k}} a^{\mathbf{k}} \gamma^{\mathbf{k}} = \\ &= (S^{-1} \gamma^{\lambda} S)^{\dagger}, \end{aligned}$$

pois os a^{λ} são reais, γ^0 é hermiteano e $\gamma_{\mathbf{k}}$ é anti-hermiteano: $(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0$.

Multiplicando à direita e à esquerda por γ^0 :

$$\gamma^0 \left(a^0 \gamma^0 + \sum_{\mathbf{k}} a^{\mathbf{k}} \gamma^{\mathbf{k}} \right) \gamma^0 = \sum_{\nu} a^{\nu} \gamma^{\nu} =$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma^0 (S^{-1} \gamma^{\lambda} S)^{\dagger} \gamma^0 &= \gamma^0 S^{\dagger} (\gamma^{\lambda})^{\dagger} (S^{-1})^{\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0 \gamma^{\lambda} \gamma^0 (S^{-1})^{\dagger} \gamma^0 = \\ &= (\gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0) \gamma^{\lambda} (\gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

pois:

$$(\gamma^{\lambda})^{\dagger} = \gamma^0 \gamma^{\lambda} \gamma^0, \quad (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0.$$

Mas, $\sum_{\nu} a^{\nu} \gamma^{\nu} = S^{-1} \gamma^{\lambda} S$, de modo que:

$$(\gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0) \gamma^{\lambda} (\gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0)^{-1} = S^{-1} \gamma^{\lambda} S,$$

ou:

$$(S \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0) \gamma^{\lambda} (S \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0)^{-1} = \gamma^{\lambda}. \quad (4.12)$$

Tôda matriz que comuta com as quatro γ 's é múltipla da identidade. Logo:

$$S \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0 = bI, \quad b = \text{constante}. \quad (4.13)$$

Dáí:

$$S \gamma^0 S^{\dagger} = b \gamma^0, \quad (4.14)$$

$$S^\dagger \gamma^0 = b \gamma^0 S^{-1} . \quad (4.15)$$

Como γ^0 é hermiteana, também o é $S \gamma^0 S^\dagger$, logo $b^* = b$. Se impuzermos que $\text{Det } S = 1$, deveremos ter:

$$b^4 = 1, \\ \text{daí e de } b^* = b: \quad b = \pm 1 . \quad (4.16)$$

Determinaremos agora quando é $b = +1$ e quando é $b = -1$. Para isto, consideremos a seguinte identidade:

$$S^\dagger S = S^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S = b \gamma^0 S^{-1} \gamma^0 S = b \gamma^0 \sum_{\nu} a_{\nu}^0 \gamma^{\nu} = \\ = b (a_0^0 I - \sum_k a_k^0 \alpha^k) . \quad (4.17)$$

$S^\dagger S$ é o produto de uma matriz não singular e de seu adjunto hermiteano, logo seus autovalores são reais e definidos positivos, de modo que:

$$\text{Tr}(S^\dagger S) > 0 .$$

Como o traço de α_k é nulo:

$$\text{Tr}(S^\dagger S) = 4b a_0^0 > 0 . \quad (4.18)$$

Assim, se $a_0^0 < 0$, $b = -1$ e se $a_0^0 > 0$, $b = +1$.

Quando $a_0^0 < 0$, temos uma reflexão no tempo: $t' = -t$.

A seguir, consideremos a propriedade de transformação do spinor adjunto $\bar{\psi}$.

$$\text{Como:} \quad \psi' = S \psi ,$$

$$\text{vem:} \quad (\psi')^\dagger = \psi^\dagger S^\dagger ,$$

logo:

$$\bar{\psi}' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 = b \psi^\dagger \gamma^0 S^{-1} = b \bar{\psi} S^{-1} ,$$

$$\text{isto é:} \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1} \quad (4.19)$$

para transformações que não invertem o tempo, e:

$$\bar{\psi}' = -\bar{\psi} S^{-1} \quad (4.20)$$

para as que incluem a inversão do tempo.

O significado de (4.14, 15) é melhor compreendido se considerarmos as propriedades de transformação da corrente $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ que deverá transformar-se como um quadrivetor:

$$j'^\mu = \sum_\nu a^\mu_\nu j^\nu = \sum_\nu a^\mu_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi = (\text{por (4.9)}) = \bar{\psi} S^{-1} \gamma^\mu S \psi = \psi^\dagger \gamma^0 S^{-1} \gamma^\mu S \psi.$$

Por outro lado, temos:

$$j'^\mu = \bar{\psi}' \gamma^\mu \psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu S \psi = b \psi^\dagger \gamma^0 S^{-1} \gamma^\mu S \psi = b \sum_\nu a^\mu_\nu j^\nu. \quad (4.21)$$

O que mostra que j é um quadrivetor para transformações de Lorentz sem inversão do tempo e um pseudo vetor para inversões do tempo:

$$\rho \rightarrow \rho, \vec{J} \rightarrow -\vec{J}, \text{ para } \vec{x} \rightarrow \vec{x}, t \rightarrow -t. \quad (4.22)$$

As transformações de Lorentz sem inversão de tempo chamam-se ortocrônicas.

IV.2 Expressão de S

É preciso mostrar que para toda transformação de Lorentz podemos construir uma matriz S que satisfaça a:

$$S^{-1} \gamma^\lambda S = \sum_\nu a^\lambda_\nu \gamma^\nu, \quad (4.9)$$

$$S^\dagger \gamma^0 S = b \gamma^0 \quad (4.14)$$

Consideremos o caso das transformações próprias:

$\det(S) = +1$, $a^0_0 > 0$. Basta, então, estudar as infinitesimais:

$$a^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \lambda \epsilon^{\mu}_{\nu}, \quad (4.23)$$

onde λ é uma constante infinitesimal.

Tem-se:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \lambda \sum_{\nu} \epsilon^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (4.24)$$

Como:

$$\sum_{\mu} x'^{\mu} y'_{\mu} = \sum_{\mu} x^{\mu} y_{\mu},$$

vem:

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}, \quad (4.25)$$

S é função de A . No caso atual, pondo:

$$S(A) = I + \lambda T, \quad (4.26)$$

vem

$$S^{-1} = I - \lambda T, \quad (4.27)$$

desprezando λ^2 e potências superiores de λ .

Então:

$$\begin{aligned} S^{-1} \gamma^{\mu} S &= (I - \lambda T) \gamma^{\mu} (I + \lambda T) = \gamma^{\mu} + \lambda (\gamma^{\mu} T - T \gamma^{\mu}) = \\ &= \sum_{\nu} a^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} = \gamma^{\mu} + \lambda \sum_{\nu} \epsilon^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu} \end{aligned}$$

Devemos, pois, encontrar uma T , tal que:

$$\gamma^{\mu} T - T \gamma^{\mu} = \sum_{\nu} \epsilon^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu}. \quad (4.28)$$

Obtem-se:

$$T = \frac{1}{8} \sum_{\mu, \nu} \epsilon^{\mu\nu} (\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}) \quad (4.29)$$

(Obtenha (4.29)).

Logo, por (4.26):

$$S(A) = I + \frac{1}{8} \lambda \sum_{\mu, \nu} \epsilon^{\mu\nu} (\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}) \quad (4.30)$$

IV.3 Operadores de Dirac

São os dezesseis seguintes:

$$I, \gamma^\mu, \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu), \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^5.$$

Examinemos as propriedades de transformação destas 16 matrizes quando interpostas entre $\bar{\psi}$ e ψ .

1. $\bar{\psi} I \psi$.

$$\bar{\psi}' \psi' = b \bar{\psi} S^{-1} S \psi = \bar{\psi} \psi, \quad b = +1 \quad (4.31-a)$$

1.é, é um invariante para transformações ortocrônicas; contudo:

$$\bar{\psi}' \psi' = \bar{\psi} \psi, \quad b = -1, \quad (4.31-b)$$

quando há inversão do tempo.

2. $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$.

Já vimos antes, (4.21), que êste produto se comporta como um quadrivector para transformações de Lorentz sem inversão do tempo e como um pseudovector para inversões do tempo.

$$3. \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (4.32)$$

$$\bar{\psi}' \sigma^{\mu\nu} \psi' = b \bar{\psi} S^{-1} \sigma^{\mu\nu} S \psi = b \sum_{\alpha, \beta} a_\alpha^\mu a_\beta^\nu \bar{\psi} \sigma^{\alpha\beta} \psi, \quad (4.33)$$

o que mostra que êste produto se transforma como um tensor anti-simétrico de 2ª ordem.

4. $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$.

Escrevendo γ_5 em sua forma covariante:

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!} \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \quad (4.34)$$

onde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor completamente anti-simétrico de 2ª or-

dem:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \begin{cases} +1, & \text{se } \mu\nu\rho\sigma \text{ é uma permutação par de } 0, 1, 2, 3, \\ -1, & \text{" " " " " " " " impar de } 0, 1, 2, 3 \text{ (4.35)} \\ 0 & \text{" " dois índices são iguais.} \end{cases}$$

Assim:

$$\bar{\psi}' \gamma_5 \psi' = b \bar{\psi} S^{-1} \gamma_5 S \psi. \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} S^{-1} \gamma_5 S &= \frac{1}{4!} \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (S^{-1} \gamma^\mu S) (S^{-1} \gamma^\nu S) (S^{-1} \gamma^\rho S) (S^{-1} \gamma^\sigma S) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} a_\alpha^\mu a_\beta^\nu a_\gamma^\rho a_\delta^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta. \end{aligned}$$

Mas:

$$\det|A| = a_0^\mu a_1^\nu a_2^\rho a_3^\sigma \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

donde

$$\det|A| \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma} a_\alpha^\mu a_\beta^\nu a_\gamma^\rho a_\delta^\sigma \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

Logo, graças às equações (4.34) e (4.36):

$$\bar{\psi}' \gamma_5 \psi' = b \det|A| \bar{\psi} \gamma_5 \psi$$

Portanto, para transformações próprias ortocrônicas ($\det|A| = +1$, $b = +1$):

$$\bar{\psi}' \gamma_5 \psi' = \bar{\psi} \gamma_5 \psi. \quad (4.36-a)$$

Para reflexões espaciais ($\det|A| = -1$) com $b = +1$:

$$\bar{\psi}' \gamma_5 \psi' = -\bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad (4.36-b)$$

é um pseudo-escalar.

5. $i \bar{\psi} \gamma_5 \psi$.

Devemos apenas examinar as 4 possibilidades dadas por:

$\lambda < \mu < \nu$. Tem-se:

$$\bar{\psi} \cdot a^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \psi = \sum_{\rho < \sigma < \tau} \begin{vmatrix} a^\lambda_\rho & a^\lambda_\sigma & a^\lambda_\tau \\ a^\mu_\rho & a^\mu_\sigma & a^\mu_\tau \\ a^\nu_\rho & a^\nu_\sigma & a^\nu_\tau \end{vmatrix} b \bar{\psi} \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \psi, \quad (4.37)$$

que é a transformação de um tensor de 3^a ordem, anti-simétrico nos 3 índices. Tem 4 componentes que podem ser representadas por:

$$1 \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi. \quad (4.38)$$

IV - 4. Ordem de grandeza dos operadores de Dirac no limite não-relativista.

Antes de examinar a grandeza dos elementos de matriz estudados na seção anterior, consideremos o caso em que ψ é uma onda plana, de momentum \vec{p} , energia $E > 0$ e spin $s = +1$, a menos do fator de normalização:

$$u^I \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ cp_z / (E + mc^2) \\ cp_+ / (E + mc^2) \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

que no limite não-relativista, i.é., quando a velocidade da partícula é muito pequena comparada à da luz, tem as duas últimas componentes da ordem de v/c . No limite de partícula em repouso tem-se (introduzindo-se a normalização):

$$\begin{array}{cc}
 E = +mc^2 & E = -mc^2 \\
 u^I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & u^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \uparrow & \downarrow
 \end{array}
 \tag{4.40}$$

Estudemos agora os diversos casos $\bar{u}^m \Gamma u^n$, $m, n = I, II$, Γ uma das 16 matrizes de Dirac.

$$\Gamma = I$$

$$\bar{u}^m I u_m = 1, \quad m = I, II, \text{ grande} \tag{4.41}$$

De fato, $m = I$:

$$\bar{u}_I I u_I = (1, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\Gamma = \gamma^k$$

$$\bar{u}^m \gamma^k u_m = 0, \quad m = I, II, \text{ pequenas (3)} \tag{4.42}$$

De fato, $m = I$:

$$\bar{u}_I \gamma^k u_I = (1, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & \gamma^k \\ -\gamma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

γ^k acopla componentes grandes com pequenas.

$$\Gamma = \gamma^0$$

$$\bar{u}^m \gamma^0 u_m = \pm 1, \quad m = I, II, \text{ grande} \tag{4.43}$$

De fato, $m = I$:

$$\bar{u}_I \gamma^0 u_I = \bar{u}_I \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} u_I = 1.$$

$\Gamma = \gamma^j \gamma^k = \epsilon^{jk} \sigma_l$ (ϵ^{jkl} : símbolo de Levi-Civita). Em qualquer caso existe pelo menos um elemento de matriz, $\bar{u}_m \Gamma u_n$, $m, n = I, II$, que é grande:

$$\bar{u}_I \sigma^3 u_I = 1, \quad \bar{u}_{II} \sigma^3 u_{II} = -1, \quad \text{etc.} \quad \text{grandes (3)} \quad (4.44)$$

$$\Gamma = \gamma^0 \gamma^k = \alpha_k \quad \bar{u}_m \gamma^0 \gamma^k u_n = 0, \quad m, n = I, II, \quad \text{pequenos (3)} \quad (4.45)$$

$$\Gamma = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}$$

O mesmo que para i, j, k , i.é, grandes (3) (4.46)

$$\Gamma = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_m \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 u_n = 0, \quad m, n = I, II$$

pequeno. (4.47)

$$\Gamma = \gamma^5 \quad \bar{u}_m \gamma^5 u_n = 0, \quad m, n = I, II \quad \text{pequeno.} \quad (4.48)$$

Como γ^5 é pseudoescalar, uma transformação de Lorentz que faça a velocidade passar de zero a valor finito, deixará $\bar{u}_m \gamma^5 u_n = 0$, logo o valor médio de γ^5 é nulo para qualquer partícula livre.

Assim, há 8 operadores grandes e 8 pequenos em estados de onda plana com energia positiva.

Consideremos agora as transições entre estados com energia positiva, u^I ou u^{II} (u_+), e estados com energia negativa, u^{III} ou u^{IV} (u_-), por meio do operador γ^5 .

Encontra-se que:

$$\bar{u}_- \gamma^5 u_+ = 1. \quad (4.49)$$

γ^5 muda, portanto, o sinal da energia da partícula e isto é verdade para qualquer velocidade da partícula.

Até agora, consideramos apenas transições nas quais o momentum \vec{p} era o mesmo nos estados inicial e final. Consideremos transições de um estado n, \vec{p}_1 para um estado m, \vec{p}_2 :

$$\bar{u}^m(\vec{p}_2) \gamma^5 u^n(\vec{p}_1). \quad (4.50)$$

No espaço dos momenta, temos:

$$\left. \begin{aligned} (\not{p}_1 - mc)u^n &= 0 \\ \bar{u}^m(\not{p}_2 - mc) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.51)$$

Destas duas equações tiramos:

$$2mc \bar{u}^m(\vec{p}_2) \gamma^5 u^n(\vec{p}_1) = \bar{u}^m \gamma^5 \not{p}_1 u^n + \bar{u}^m \not{p}_2 \gamma^5 u^n,$$

ou:

$$\begin{aligned} \bar{u}^m(\vec{p}_2) \gamma^5 u^n(\vec{p}_1) &= \frac{1}{2mc} \bar{u}^m \gamma^5 (\not{p}_1 - \not{p}_2) u^n = \\ &= \sum_{\mu=0}^3 \frac{p_1^\mu - p_2^\mu}{2mc} (\bar{u}^m \gamma^5 \gamma_\mu u^n), \end{aligned} \quad (4.52)$$

o que mostra que $\bar{u}^m \gamma^5 u^n = 0$ para $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$, como tínhamos visto (4.48).

Quando a energia é negativa, $\vec{p}_2 < 0$ e $\bar{u}^m(\vec{p}_2) \gamma^5 u^n(\vec{p}_1)$ é particularmente grande.

IV - 5. Métodos de obtenção de alguns elementos de matriz.

Existem, por vezes, métodos para o cálculo dos elementos de matriz, mais simples e mais úteis às nossas finalidades, do que o cálculo usual.

$$\bar{u} u = 2mc^2, \quad E > 0$$

é a condição de normalização. Daí:

$$(\bar{u} \not{p} u) = mc \bar{u} u = 2m^2 c^3. \quad (4.53)$$

Também:

$$\begin{cases} (\bar{u} \gamma^\mu \not{p} u) = mc(\bar{u} \gamma^\mu u), \\ (\bar{u} \not{p} \gamma^\mu u) = mc(\bar{u} \gamma^\mu u), \end{cases} \quad (4.54)$$

donde

$$\bar{u}(\gamma^\mu \not{p} + \not{p} \gamma^\mu)u = 2mc(\bar{u} \gamma^\mu u). \quad (4.55)$$

Como:

$$\not{a} \not{b} = -\not{b} \not{a} + 2a \cdot b$$

e:

$$\gamma^\mu = \lambda,$$

vem:

$$\not{p} \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p} = 2p^\mu. \quad (4.56)$$

Assim:

$$2p^\mu (\bar{u} u) = 2mc(\bar{u} \gamma^\mu u)$$

$$(\bar{u} \gamma^\mu u) = 2p^\mu c. \quad (4.57)$$

Vem, pois, que:

$$\frac{(\bar{u} \gamma^0 u)}{(\bar{u} u)} = \frac{E}{mc^2}. \quad (4.57)'$$

IV - 6. Operadores de projeção. Soma de elementos de matriz sobre spins.

Frequentemente, devemos somar estados intermediários de spin e além disso, dentre êsses, somar apenas os de energia positiva ou negativa.

Já vimos que:

$$\bar{u}^r(\vec{p}, |E|) u^s(\vec{p}, |E|) = 2mc^2 \delta^{rs}; r, s = I, II, \quad (4.58)$$

$$\bar{v}^r(\vec{p}, |E|) v^s(\vec{p}, |E|) = -2mc^2 \delta^{rs}; r, s = I, II, \quad (4.59)$$

onde:

$$v^r(\vec{p}, |E|) = u^r(-\vec{p}, -|E|) \quad (4.60)$$

e:

$$\bar{u}^r(\vec{p}, |E|) v^s(\vec{p}, |E|) = \bar{v}^r(\vec{p}, |E|) u^s(\vec{p}, |E|) = 0; r, s = I, II, \quad (4.61)$$

Procuraremos determinar operadores de projeção covariantes, de modo que a soma que só cobre os estados de $r, s = I, II$, se extenda aos quatro estados: isto é, procuraremos obter uma relação de completamento.

Seja φ um spinor combinação linear dos quatro u, v :

$$\varphi_i = \sum_{r=I, II} A^r u_i^r + \sum_{r=I, II} B^r v_i^r,$$

onde:

$$A^r = \frac{1}{2mc^2} (\bar{u}^r, \varphi), \quad B^r = -\frac{1}{2mc^2} (\bar{v}^r, \varphi). \quad (4.62)$$

Logo:

$$\varphi_i = \sum_r \frac{1}{2mc^2} \left\{ (\bar{u}^r, \varphi) u_i^r - (\bar{v}^r, \varphi) v_i^r \right\},$$

isto é:

$$\varphi_i = \frac{1}{2mc^2} \sum_r \left\{ u_i^r \sum_j \bar{u}_j^r \varphi_j - v_i^r \sum_j v_j^r \varphi_j \right\} \quad (4.63)$$

Portanto, deve-se ter:

$$\sum_{r=I, II} \left\{ u_i^r(p) \bar{u}_j^r(p) - v_i^r(p) \bar{v}_j^r(p) \right\} = 2mc^2 \delta_{ij}. \quad (4.64)$$

Mas:

$$\bar{u}^r u^s = 2mc^2 \delta^{rs}, \quad \bar{v}^r v^s = -2mc^2 \delta^{rs}.$$

Logo:

$$\sum_{r=1, \dots, 4} \left\{ \bar{u}^r(p) u^r(p) - \bar{v}^r(p) v^r(p) \right\} = 8mc^2. \quad (4.65)$$

Chamemos, por conveniência:

$$\left. \begin{aligned} u^r(p) &= s^r(p), & r &= I, II \\ v^r(p) &= s^{r+II}(p), & r &= I, II \end{aligned} \right\}, \quad (4.66)$$

então:

$$\sum_{r=1}^{IV} s_1^r(p) \bar{s}_j^r(p) \epsilon_r = 2mc^2 \delta_{1j},$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{r=1}^{IV} \bar{s}_1^r(p) s_i^r(p) \epsilon_r = 8mc^2, \quad (4.67)$$

onde:

$$\epsilon_r = \begin{cases} +1, & r = I, II \\ -1, & r = III, IV \end{cases} \quad (4.68)$$

Nos cálculos, teremos de lidar com matrizes, obtidas para elétrons com spin definido (i.é, polarizados) e depois calcular secções de choque, somando os quadrados dessas matrizes sobre os spins inicial e final. Assim, a expressão que se deseja é do tipo:

$$M_{rs} = \bar{u}_f^r Q u_i^s, \quad \begin{cases} i = \text{inicial} \\ f = \text{final} \end{cases}, \quad (4.69)$$

e

$$|M_{rs}|^2 = M_{rs}^\dagger M_{rs} = (u_i^{s\dagger} Q^\dagger \bar{u}_f^{r\dagger}) (\bar{u}_f^r Q u_i^s) =$$

$$= (\bar{u}_1^s \gamma^0 Q^\dagger \gamma^0 u_f^r) (\bar{u}_f^r Q u_1^s), \quad (4.70)$$

pois:

$$u_i^r \bar{u}_j^r = u_i^r u_l^r \dagger \gamma^0 \delta_{lj}.$$

Em (4.70), r e s representam soluções correspondentes a um dado spin e ambas com energia positiva. Ponhamos:

$$Q' = \gamma^0 Q^\dagger \gamma^0;$$

$$|M_{rs}|^2 = (\bar{u}_1^s Q' u_f^r) (\bar{u}_f^r Q u_1^s) \quad (4.70')$$

Primeiro, somamos sôbre o spin final, de modo que:

$$\sum_{n=I,II} (\bar{u}_1^s Q' u_f^r) (\bar{u}_f^r Q u_1^s) \quad (4.71)$$

é o que queremos calcular.

Não podemos usar a relação de completamento porque ela se refere à soma sôbre as quatro funções e em (4.71) a soma e para $r = I, II$. Contudo, como para energias negativas, se tem

$$(\not{p} + mc)v = 0, \quad \bar{v}(\not{p} + mc) = 0,$$

podemos substituir a soma acima por:

$$\frac{1}{2mc} \sum_{r=I}^{IV} (\bar{u}_1^s Q' u_f^r) (\bar{u}_f^r (\not{p}' + mc) \epsilon_r Q u_1^s), \quad (4.72)$$

pois:

$$\bar{u}_f^r (\not{p}' + mc) = \begin{cases} 2mc \bar{u}_f^r, & r = I, II \\ 0, & r = III, IV \end{cases}$$

Efetuamos, agora, a soma sôbre r e aplicamos a relação de completamento (4.67):

$$c(\bar{u}_1^s Q' (\not{p}' + mc) Q u_1^s) = \sum_r |M_{rs}|^2. \quad (4.73)$$

Se o spin inicial não é determinado, devemos tomar a sua média:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\text{II}} \sum_{r=1}^{\text{II}} |M_{rs}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\text{II}} c (\bar{u}_1^s Q'(\not{p}' + mc) Q u_1^s) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\text{IV}} c (\bar{u}_1^s Q'(\not{p}' + mc) Q (\not{p} + mc) \epsilon^s u_1^s) \frac{1}{2mc} = \\ &= \frac{1}{4m} \sum_{s=1}^{\text{IV}} \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \left\{ (\bar{u}_1^s)_\alpha [Q'(\not{p}' + mc) Q (\not{p} + mc)]_{\alpha\beta} (u_1^s)_\beta \epsilon^s \right\} = \\ &= \frac{1}{4m} \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \left\{ [Q'(\not{p}' + mc) Q (\not{p} + mc)]_{\alpha\beta} \sum_{s=1}^{\text{IV}} \epsilon^s (u_1^s)_\beta (\bar{u}_1^s)_\alpha \right\} = \\ &= \frac{c^2}{2} \sum_{\alpha=1}^4 [Q'(\not{p}' + mc) Q (\not{p} + mc)]_{\alpha\alpha} = \text{Tr} \left\{ Q'(\not{p}' + mc) Q (\not{p} + mc) \right\} \frac{c^2}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, tem-se o resultado desejado:

$$\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\text{II}} \sum_{s=1}^{\text{II}} |M_{rs}|^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ Q' c (\not{p}' + mc) Q c (\not{p} + mc) \right\}. \quad (4.74)$$

IV-7. Tracos de Matrizes.

O traço de um número ímpar de matrizes γ é zero. Observe-se que:

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA) \quad (4.75)$$

Agora, de:

$$\gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0,$$

isto é, de:

$$\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5^{-1} = -\gamma_\mu$$

resulta:

$$\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \cdots \gamma_\lambda \gamma_5^{-1} = (-1)^n \gamma_\mu \gamma_\nu \cdots \gamma_\lambda \quad (4.76)$$

onde n é o número de matrizes $\gamma_\mu, \gamma_\nu, \dots, \gamma_\lambda$.

Logo:

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\lambda) = (-1)^n \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \dots \gamma_\lambda), \quad (4.77)$$

o que prova o enunciado acima.

Assim:

$$\text{Tr} \gamma_\mu = 0, \quad (4.78)$$

$$\text{Tr} \gamma_5 = 0. \quad (4.79)$$

É claro que $\text{Tr}(I) = 4$.

Tem-se:

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \text{Tr}(\gamma_\nu \gamma_\mu) = 4g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ 4, & \nu = \mu = 0 \\ -4, & \nu = \mu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (4.80)$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - 4g_{\sigma\nu} g_{\rho\mu} + 4g_{\sigma\rho} g_{\mu\nu}. \quad (4.81)$$

Dêstes resultados, vem:

$$\text{Tr}(A) = 0; \quad (4.82)$$

se a e b comutam:

$$\text{Tr}(A B) = \frac{1}{2} \text{Tr}(A B + B A) = 4a_\mu b^\mu = 4ab. \quad (4.83)$$

$$\text{Tr}(A B A) = 0;$$

$$\text{Tr}(A B A B) = 4(abcd - acbd + adbc); \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ (p_1 + m_1)(p_2 - m_2) \} &= \text{Tr}(p_1 p_2) - \text{Tr}(m_1 m_2) = \\ &= 4 p_1 p_2 - 4m_1 m_2; \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ (p_1 + m_1)(p_2 - m_2)(p_3 + m_3)(p_4 - m_4) \} &= \\ &= 4(p_1 p_2 - m_1 m_2)(p_3 p_4 - m_3 m_4) - 4(p_1 p_3 - m_1 m_3)(p_2 p_4 - m_2 m_4) + \end{aligned}$$

$$+ 4(p_1 p_4 - m_1 m_4)(p_2 p_3 - m_2 m_3) . \quad (4.86)$$

CAPÍTULO V

A TEORIA DO PÓSITRON

Com a finalidade de simplificar os cálculos que envolvam pósitrons e elétrons em interação com campos externos, Feynman em 1949 (Phys. Rev. 76, 749; 1949), desenvolveu um novo tratamento teórico, o qual abrangia as interações entre partículas (Phys. Rev. 76, 769; 1949). Logo a seguir (Phys. Rev. 80, 440; 1950), êle prova a equivalência entre o seu método e o formalismo usual da teoria dos campos.

Trataremos, aqui, apenas do caso de interação de elétrons e pósitrons com campos eletromagnéticos externos.

V.1 Teoria Não-relativistaPropagadores de Feynman

Podemos, como sugeriu Feynman, resolver a equação de Schrödinger:

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

transformando-a em uma equação integral:

$$\psi(\vec{x}_2, t_2) = \int d^3x_1 K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) \psi(\vec{x}_1, t_1), \quad t_2 > t_1, \quad (5.2)$$

K é a função de Green da equação de Schrödinger ou propagador do corpúsculo de (\vec{x}_1, t_1) a (\vec{x}_2, t_2) . Suponhamos H independente do tempo (problema estacionário). Podemos, então, expandir $\psi(\vec{x}_1, t_1)$ no conjunto ortogonal completo das autofunções $u_n(\vec{x})$

da \hat{H} , com autovalores E_n :

$$\hat{H} u_n = E_n u_n, \quad (5.3-a)$$

$$\int u_n^*(\vec{x}) u_m(\vec{x}) d^3x = (u_n, u_m) = \delta_{n,m}, \quad (5.3-b)$$

$$\sum u_n(\vec{x}) u_n^*(\vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (5.3-c)$$

Logo:

$$\psi(\vec{x}_1, t_1) = \sum c_n u_n(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t_1}, \quad (5.4)$$

com:

$$c_n = \int u_n^*(\vec{x}_1) \psi(\vec{x}_1, t_1) e^{\frac{i}{\hbar} E_n t_1} d^3x_1. \quad (5.5)$$

Então:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}_2, t_2) &= \sum c_n u_n(\vec{x}_2) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t_2} = \\ &= \sum \int u_n^*(\vec{x}_1) \psi(\vec{x}_1, t_1) e^{\frac{i}{\hbar} E_n (t_1 - t_2)} u_n(\vec{x}_2) d^3x_1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Isto é:

$$K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = \sum u_n(\vec{x}_2) u_n^*(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_2 - t_1)} \quad (5.7)$$

Observemos que, para $t_1 = t_2 = t$:

$$K(\vec{x}_2, t; \vec{x}_1, t) = \sum u_n(\vec{x}_2) u_n^*(\vec{x}_1) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1). \quad (5.7)'$$

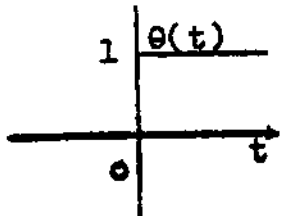
Feynman salienta que um sistema em mecânica não relativista só se propaga para o futuro; logo estamos interessados apenas no seguinte propagador (condição de causalidade):

$$K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = \begin{cases} K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) & , t_2 > t_1 \\ 0 & , t_2 < t_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

O novo propagador é, portanto:

$$K = \sum u_n(\vec{x}_2) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t_2} u_n^*(\vec{x}_1) e^{\frac{i}{\hbar} E_n t_1} \theta(t_2 - t_1), \quad (5.9)$$

onde $\theta(t)$ é a função salto unitário:



$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

(fig. 5-1)

É claro que: $\frac{d\theta}{dt} = \delta(t)$.

Qual é a equação diferencial a que satisfaz o K assim definido? É claro que o K definido por (5.7) satisfaz à equação de Schrödinger. O K definido por (5.9) satisfaz a:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\vec{x}_2) \right] K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = i\hbar \frac{\partial \theta(t_2 - t_1)}{\partial t_2}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sum u_n(\vec{x}_2) u_n^*(\vec{x}_1) e^{\frac{i}{\hbar} E_n (t_1 - t_2)} = \\ & = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \sum u_n(\vec{x}_2) u_n^*(\vec{x}_1) = \\ & = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \\ & = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Em geral, quando H é dependente do tempo, impomos:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H(\vec{x}_2, t_2) \right] K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = i\hbar \delta(t_2 - t_1) \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \quad (5.12)$$

de que H permaneça finita.

Mas:

$$K(\vec{x}_2, t_1 + \epsilon; \vec{x}_1, t_1) = 0, \text{ pois } t_1 - \epsilon < t_1,$$

logo:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K(\vec{x}_2, t_1 + \epsilon; \vec{x}_1, t_1) - K(\vec{x}_2, t_1; \vec{x}_1, t_1) = \delta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1),$$

como se queria. (Veja Apêndice A).

V-2. Teoria das Perturbações. O pósitron segundo Feynman e Stuckelberg.

Suponhamos que a Hamiltoniana se possa escrever:

$$H = H_0 + V. \quad (5.14)$$

e que saibamos resolver o problema com Hamiltoniana H_0 . Seja K_0 o propagador correspondente a H_0 e seja K o correspondente a H .

Mostra-se facilmente que as equações (5.13) são equivalentes à seguinte:

$$K(2,1) = K_0(2,1) - \frac{1}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(2,3) V(3) K(3,1) d^4x_3. \quad (5.15)$$

De fato, multiplicando ambos os lados por $[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2)]$, tem-se:

$$\begin{aligned} [i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2)] K(2,1) &= [i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2)] K_0(2,1) - \\ &- \frac{1}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} [i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2)] K_0(2,3) V(3) K(3,1) d^4x_3. \end{aligned}$$

Mas:

$$[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2)] K_0(2,3) = i\hbar \delta(x_2 - x_3) = i\hbar \delta(2,3),$$

logo:

$$\begin{aligned} \left[i \hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0(2) \right] K(2,1) &= i \hbar \delta(2,1) - \\ &- \frac{1}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} i \hbar \delta(2,3) V(3) K(3,1) d^4 x_3 = \\ &= i \hbar \delta(2,1) + V(2) K(2,1) , \end{aligned}$$

ou:

$$\left[i \hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - H(2) \right] K(2,1) = i \hbar \delta(2,1) . \quad (5.16)$$

Também, como $K_0(2,1) = 0$, para $t_2 < t_1$, $K(2,1) = 0$, para $t_2 < t_1$.

A vantagem da equação integral (5.15) sobre as equações (5.13), além de já conter as condições de fronteira, é a de poder ser resolvida por aproximações sucessivas de uma série de Neumann-Liouville:

$$\begin{aligned} K(2,1) &= K_0(2,1) + \left(\frac{-1}{\hbar c} \right) \int_{-\infty}^{\infty} K_0(2,3) V(3) K_0(3,1) d^4 x_3 + \\ &+ \left(\frac{-1}{\hbar c} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(2,3) V(3) K_0(3,4) V(4) K_0(4,1) d^4 x_3 d^4 x_4 + \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

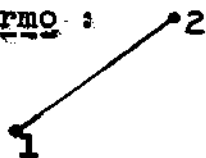
Interpretação física desta equação:

O 1^o termo representa a partícula deslocando-se livremente de 1 para 2;

O 2^o termo representa a partícula deslocando-se livremente de 1 para 3, sendo espalhada em 3 e continuando como partícula livre de 3 para 2 - integrando-se sobre todas as pontes 3 possíveis (domínio de $V(3)$).

O 3^o termo representa um espalhamento duplo nos pontos 3 e 4, etc.

1º termo :



2º termo :



3º termo :



(fig. 5 - 2)

V - 3. Teoria Relativista.

Passaremos agora à teoria relativista.

Considere a equação de Dirac, para uma partícula livre:

$$(i \hbar \not{\nabla} - mc)\psi = 0. \quad (5.18)$$

Exige-se, como antes, que $\psi(\vec{x}_2, t_2)$ seja obtida de $\psi(\vec{x}_1, t_1)$, através de $K(2,1)$, onde K é agora uma matriz 4×4 , que deve satisfazer a equação:

$$(i \hbar \not{\nabla}_2 - mc) K(2,1) = i \hbar \delta(2,1), \quad (5.19a)$$

ou:

$$(i \hbar \frac{\partial}{\partial t_2} - i \hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_2 - mc^2 \beta) K(2,1) = i \hbar c \beta \delta(2,1). \quad (5.19b)$$

Procedendo como no caso não-relativista, podemos expandir ψ em termos do conjunto completo de autofunções u_n .

Seja:

$$H = i \hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mc^2 \beta, \quad (5.20)$$

$$H u^n = E_n u^n. \quad (5.21)$$

Onde $u^n(\vec{x})$ é um spinor e:

$$\sum_{\alpha} \int u_{\alpha}^{*m}(\vec{x}) u_{\alpha}^n(\vec{x}) d^3x = \delta_{mn}, \quad (5.22)$$

$$\psi_{\alpha}(\vec{x}, t) = \sum_n c_n u_{\alpha}^n(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}. \quad (5.23)$$

Optemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \int u_{\alpha}^{m*}(\vec{x}) \psi_{\alpha}(\vec{x}, t) d^3x &= \sum_n \sum_{\alpha} \int c_n u_{\alpha}^{*m}(\vec{x}) u_{\alpha}^n(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} d^3x = \\ &= c_m e^{-\frac{i}{\hbar} E_m t}, \end{aligned}$$

donde:

$$c_m = \sum_{\alpha} \int u_{\alpha}^{m*}(\vec{x}) \psi_{\alpha}(\vec{x}, t) e^{\frac{i}{\hbar} E_m t} d^3x. \quad (5.24)$$

Logo, para $t_2 > t_1$

$$\psi_{\alpha}(\vec{x}_2, t_2) = \int \sum_n u_{\alpha}^n(\vec{x}_2) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t_2} \sum_{\beta} u_{\beta}^{n*}(\vec{x}_1) \psi_{\beta}(\vec{x}_1) e^{\frac{i}{\hbar} E_n t_1} d^3x_1. \quad (5.25)$$

Queremos:

$$\psi_{\alpha}(\vec{x}_2, t_2) = \sum_{\epsilon, \lambda} K_{\alpha\epsilon}(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) \beta_{\epsilon\lambda} \psi_{\lambda}(\vec{x}_1, t_1) d^3x_1. \quad (5.26)$$

Logo, deve ser:

$$\sum_{\epsilon, \lambda} K_{\alpha\epsilon} \beta_{\epsilon\lambda} \psi_{\lambda}(\vec{x}_1, t_1) = \sum_n u_{\alpha}^n \sum_{\lambda} u_{\lambda}^{n*}(\vec{x}_1) \psi_{\lambda}(\vec{x}_1, t_1) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_2 - t_1)},$$

donde:

$$\sum_{\epsilon} K_{\alpha\epsilon}(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) \beta_{\epsilon\lambda} = \sum_n u_{\alpha}^n(\vec{x}_2) u_{\lambda}^{n*}(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_2 - t_1)},$$

ou:

$$\sum_{\epsilon} K_{\alpha\epsilon}(2,1) \delta_{\epsilon\eta} = \sum_{n, \lambda} u_{\alpha}^n(\vec{x}_2) u_{\lambda}^{n*}(\vec{x}_1) \beta_{\lambda\eta} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_2 - t_1)},$$

isto é:

$$K(2,1) = \sum_n u^n(\vec{x}_2) \bar{u}^n(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_2 - t_1)}. \quad (5.27)$$

O propagador K deveria ser, então, por analogia com o problema não-relativista:

$$K(2,1) = \begin{cases} \sum_{E_n > 0} u^n(\vec{x}_2) \bar{u}^n(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1)} + \\ \quad + \sum_{E_n < 0} u^n(\vec{x}_2) \bar{u}^n(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1)} & \text{para } t_2 > t_1; \\ 0, & \text{para } t_2 < t_1. \end{cases}$$

De fato, o que se tem nesta equação é $K_0(2,1)$ (propagador da partícula livre).

Esta escolha não é satisfatória. Corresponde à teoria de elétrons com energia negativa e se um elétron num instante t_1 é um pacote de ondas ψ com energias positivas, em instantes $t_2 > t_1$, por causa do K acima, ψ conterá ondas com energia negativa, havendo uma probabilidade finita de encontrá-lo num estado de energia negativa.

Pela teoria dos furos, os estados de energia negativa devem estar ocupados. Para $t_2 > t_1$, deve haver disponíveis para o elétron somente estados com energia positiva. Podemos, porém, do K acima, subtrair uma solução da equação de Dirac homogênea. Uma tal solução é, por exemplo, $u^n(\vec{x}_2) \bar{u}^n(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1)}$ para todos os valores de t_2 : Devemos, então, subtrair de K

$$\sum_{E_n < 0} u^n(\vec{x}_2) \bar{u}^n(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1)},$$

para todos os valores de t_2 . Obtemos, então:

$$K_+(2,1) = \begin{cases} \sum_{E_n > 0} u_n(\vec{x}_2) \bar{u}_n(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1)}, & t_2 > t_1, \\ - \sum_{E_n < 0} u_n(\vec{x}_2) \bar{u}_n(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1)}, & t_2 < t_1. \end{cases} \quad (5.29)$$

Vemos que, quando um elétron se propaga para o futuro, somente ondas com energias positivas contribuem para o propagador. Segundo Feynman, um pósitron, com energia positiva E , propagando-se de t_1 para $t_2 > t_1$, é um elétron, com energia $-E$, propagando-se de t_2 a $t_1 < t_2$.

Esta interpretação de Feynman e Stueckelberg é sugerida pela equação clássica:

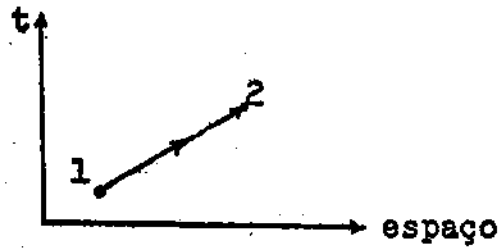
$$m_0 c \frac{d^2 z^\mu}{ds^2} = e F_{\mu\nu} \frac{dz^\nu}{ds}, \quad (5.30)$$

segundo a qual uma inversão do tempo próprio s é equivalente a uma troca de sinal de carga.

Quando está presente um potencial (agora uma matriz 4×4) a fórmula das perturbações aplica-se aqui também:

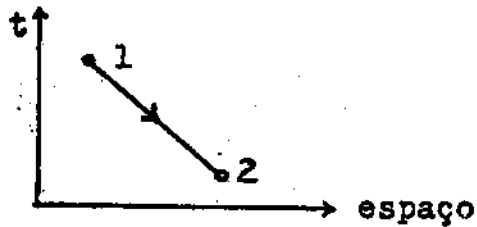
$$K_+^V(2,1) = K_+(2,1) + \left(-\frac{1}{\hbar c}\right) \int K_+(2,3) V(3) K_+(3,1) d^4 x_3 + \\ + \left(-\frac{1}{\hbar c}\right)^2 \iint K_+(2,3) V(3) K_+(3,4) V(4) K_+(4,1) d^4 x_3 d^4 x_4 + \dots \quad (5.31)$$

O 1º termo, $K_+(2,1)$, representa um elétron livre propagando-se de 1 a 2, se $t_2 > t_1$



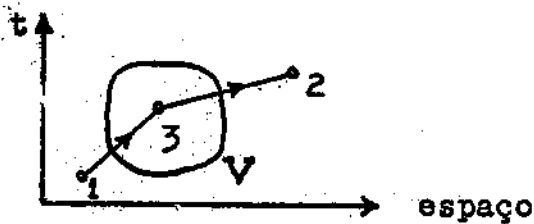
(fig. 5.3-a)

ou um pósitron propagando-se de 1 a 2, se $t_2 < t_1$ (fig. 5.3-b).



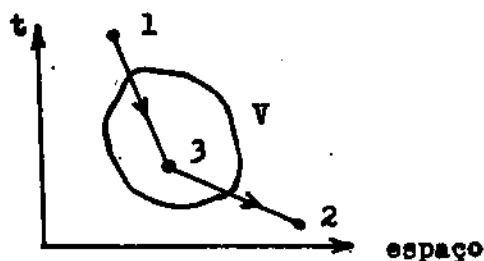
(fig. 5.3-b)

O 2º termo representa um espalhamento comum de um elétron, se $t_2 > t_3 > t_1$



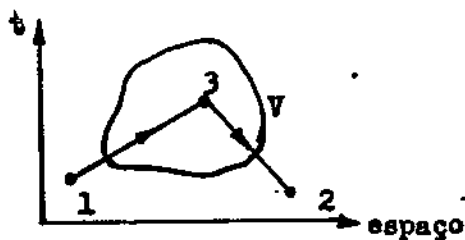
(fig. 5.4-a)

Representa o espalhamento comum de um pósitron, se $t_2 < t_3 < t_1$.



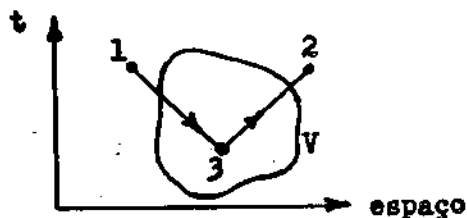
(Fig. 5.4-b)

Representa uma aniquilação de um par em 3, se $\begin{cases} t_3 > t_2 \\ t_3 > t_1 \end{cases}$ (fig. 5.4-c).



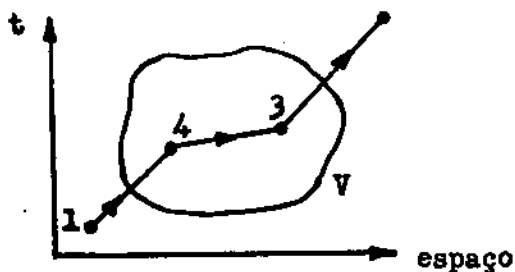
(Fig. 5.4-c)

O 2º termo representa, ao invés, uma criação de um par em 3, se $\begin{cases} t_3 < t_1 \\ t_3 < t_2 \end{cases}$ (fig. 5.4-d).



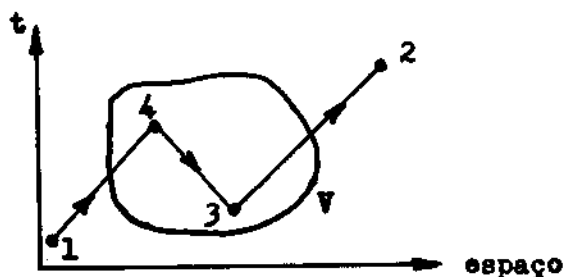
(Fig. 5.4-d)

O 3º termo representa um duplo espalhamento com as duas possibilidades: $t_2 > t_1$; $t_3 > t_4$ (fig. 5.5-a).



(Fig. 5.5-a)

é um espalhamento comum em 4 e outro em 3. A segunda possibilidade: $t_2 > t_1$; $t_3 > t_4$



(fig. 5.5-b)

corresponde à criação de um par em 3, do qual o elétron com energia positiva segue para 2; o pósitron do par segue para 4, onde aniquila o elétron que veio de 1.

Como $K_+(2,3)$, $K_+(3,4)$ e $K_+(4,1)$ são as somas positivas do primeiro caso e como $K_+(3,4)$ é a soma negativa no segundo caso, as amplitudes dos dois processos têm sinais opostos. Isto está de acordo com o princípio de Pauli, pois no segundo caso houve uma troca de um elétron de energia positiva com um elétron de energia negativa, dando lugar ao espalhamento de 1 em 2.

V.4 Campo Eletromagnético

No caso em que o campo externo é A_μ , K_+^A obedece à equação:

$$(i\hbar\nabla_2 - \frac{e}{c} A(2) - mc) K_+^A(2,1) = i\hbar \delta(2,1), \quad (5.32)$$

e tem somente energias positivas para $t_2 > t_1$ e apenas energias negativas para $t_2 < t_1$. Além disso:

$$K_+^A(2,1) = K_+(2,1) + \left(-\frac{ie}{\hbar c}\right) \int K_+(2,3) A(3) K_+(3,1) d^4x_3 +$$

$$+ \left(-\frac{ie}{\hbar c}\right)^2 \iint K_+(2,3) A(3) K_+(3,4) A(4) K_+(4,1) d^4x_3 d^4x_4 + \dots \quad (5.33)$$

A nossa escolha de propagador faz com que as componentes positivas de energia se propaguem para a frente no tempo e as negativas para traz. Assim, para se obter a função de onda, devem-se especificar suas componentes positivas (negativas) em alguma superfície anterior (ulterior). Logo, em vez de se ter:

$$\psi(2) = \int K_+(2,1) \beta \psi(1) d^3x_1,$$

tem-se como relação correta:

$$\psi(2) = \int_{t_1 < t_2} K_+(2,1) \beta \psi(1) d^3x_1 - \int_{t_1 > t_2} K_+(2,1') \beta \psi(1') d^3x_{1'}, \quad (5.34)$$

onde: $t_1 < t_2 < t'_1$. Podemos prová-la do seguinte modo:

Já sabemos que:

$$(i\hbar \nabla_2 - mc) K_+(2,1) = i\hbar \delta(2,1). \quad (5.35)$$

$K_+(2,1)$ também satisfaz a:

$$K_+(2,1)(-i\hbar \nabla_1 - mc) = i\hbar \delta(2,1), \quad (5.36)$$

bastando multiplicar (5.35) à direita por $(-i\hbar \nabla_1 - mc)$ e observar que $\nabla_1 \delta(2,1) = -\nabla_2 \delta(2,1)$. Multipliquemos, então, (5.36) por $\psi(1)$:

$$[K_+(2,1)(-i\hbar \nabla_1 - mc)] \psi(1) = i\hbar \delta(2,1) \psi(1) \quad (5.37)$$

e multipliquemos:

$$(i\hbar \nabla_1 - mc) \psi(1) = 0$$

por $K_+(2,1)$:

$$K_+(2,1)[(i\hbar \nabla_1 - mc) \psi(1)] = 0 \quad (5.38)$$

Subtraindo (5.38) e (5.37) e integrando sôbre d^4x_1 :

$$\begin{aligned}\psi(2) &= - \int d^4x_1 [K_+(2,1)\nabla_1\psi(1) + (\nabla_1K_+(2,1))\psi(1)] = \\ &= - \int d^4x_1 \nabla_1^\mu [K_+(2,1)\gamma_\mu\psi(1)] .\end{aligned}\quad (5.39)$$

Aplicando o teorema de Green:

$$\int_V \frac{\partial F_\mu(x)}{\partial x_\mu} d^4x = \int_S F_\mu(x)n^\mu d\sigma(x),\quad (5.40)$$

onde S é uma superfície que envolve o volume quadri-dimensio-
nal V e n^μ é a normal externa ao elemento $d\sigma(x)$ no ponto x ,
temos:

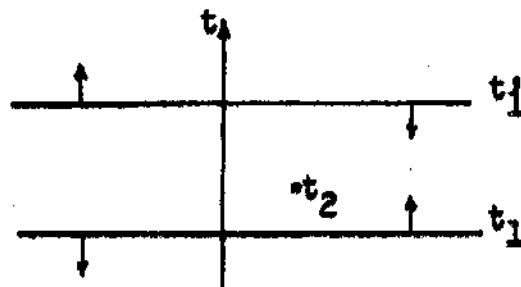
$$\psi(2) = - \int_{S_1} K_+(2,1)\gamma^\mu\psi(1) n_\mu d\sigma_1 .\quad (5.41-a)$$

Se quisermos que n_μ seja a normal interna:

$$\psi(2) = \int_{S_1} K_+(2,1)\gamma^\mu\psi(1)n_\mu d\sigma_1 .\quad (5.41-b)$$

Tomando a superfície como dois planos perpendiculares
ao eixo dos t , de um lado e do outro do ponto 2 e considerando
o cilindro que fecha a superfície, muito afastado do ponto, de
modo a dar contribuição zero à integral, vem:

$$\psi(2) = \int_{t_1 < t_2} K_+(2,1)\beta\psi(1) d^3x_1 - \int_{t_1 > t_2} K_+(2,1)\beta\psi(x_1,t_1) d^3x_1\quad (5.42)$$



(fig. 5.6)

Quando dermos a representação de $K_+(2,1)$ no espaço dos momentos, provaremos que esta matriz decai exponencialmente quando a distância entre 1 e 2 é de tipo espaço e cresce.

Na fórmula acima, só componentes de energia positiva (eléttron) de $\psi(1)$ contribuem à primeira integral e só componentes de energia negativa (pósitron) contribuem à segunda. Isto é, a amplitude para encontrar uma carga em 2 é determinada pela amplitude de encontrar um pósitron depois da medida. Isto quer dizer que, mesmo que não houvesse eléttron em t_1 , um par poderia ser criado na medida e a amplitude deste acontecimento é determinada pela amplitude de encontrar um eléttron de energia negativa (pósitron) no futuro.



(fig. 5.7)

V-5. Amplitudes de transição.

A fórmula (5.41), ou sua forma compacta (5.42), dá a amplitude para encontrar um eléttron em 2, que é determinada pelas amplitudes de um eléttron no passado e um pósitron no futuro.

Suponhamos, agora, dado um eléttron num estado $f(\vec{x})$,

num instante $t = 0$; qual é a amplitude para encontrá-lo com uma função de onda $g(\vec{x})$ no instante $t = T$?

Temos, evidentemente:

$$f(\vec{y}, T) = \int K_+(\vec{y}, T; \vec{x}, 0) \beta f(\vec{x}) d^3x \quad (5.43)$$

e a amplitude é:

$$M = \int g^*(\vec{y}, T) f(\vec{y}, T) d^3y, \quad (5.44)$$

isto é,

$$M = \iint \bar{g}(\vec{y}, T) \beta K_+(\vec{y}, T; \vec{x}, 0) \beta f(\vec{x}) d^3x d^3y. \quad (5.45)$$

Se houver um campo A_μ (potencial e A entre 0 e T), devemos usar o propagador K_+^A (ver 8V-4):

$$M = \iint \bar{g}(\vec{y}, T) \beta K_+^A(\vec{y}, T; \vec{x}, 0) \beta f(\vec{x}) d^3x d^3y. \quad (5.46)$$

Se g e f forem ortogonais (não há transição direta), então o primeiro termo de M dá zero, pois (usando o 1º termo de (5.33)):

$$\begin{aligned} \iint \bar{g}(\vec{y}, T) \beta K_+(\vec{y}, T; \vec{x}, 0) \beta f(\vec{x}) d^3x d^3y &= \\ &= \int g^*(\vec{y}, T) f(\vec{y}, T) d^3y = 0. \end{aligned}$$

A transição por efeito de 1ª ordem do campo é:

$$M_1 = \frac{-ie}{\hbar c} \iiint \bar{g}(\vec{y}, T) \beta K_+(\vec{y}, T; z) A(z) K_+(z; \vec{x}, 0) \beta f(\vec{x}) d^3x d^3y d^4x_z \quad (5.47)$$

Esta fórmula pode ser escrita de modo mais compacto e com integrações 4-dimensionais.

Definamos $f(x)$ tal que $f(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$.

Então:

$$f(z) = \int K_+(z; \vec{x}, 0) \beta f(\vec{x}) d^3x, \quad (5.48)$$

$$\bar{g}(3) = \int \bar{g}(\vec{y}, T) \beta K_+ (\vec{y}, T; 3) d^3 y, \quad (5.49)$$

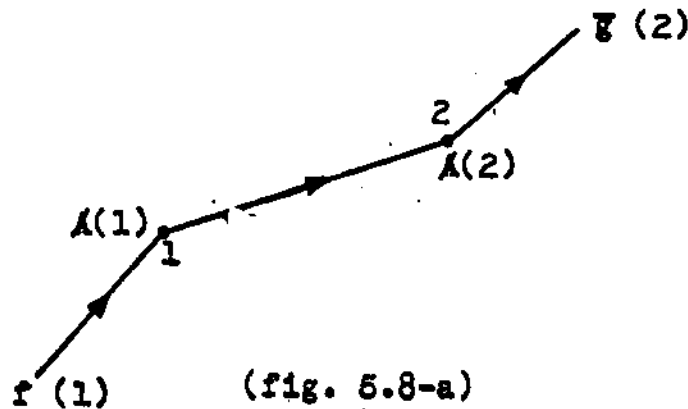
logo:

$$M_1 = -\frac{ie}{\hbar c} \int \bar{g}(3) A(3) f(3) d^4 x_3. \quad (5.50)$$

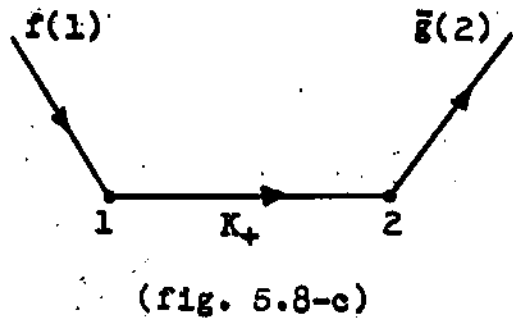
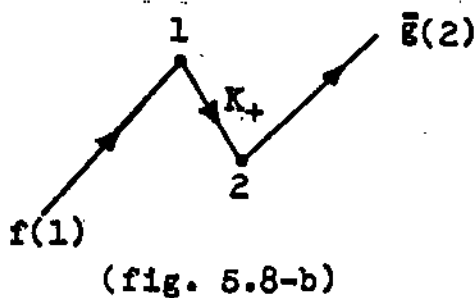
A transição de segunda ordem tem amplitude:

$$M_2 = \left(\frac{-ie}{\hbar c}\right)^2 \iint \bar{g}(2) A(2) K_+(2,1) A(1) f(1) d^4 x_1 d^4 x_2, \quad (5.51)$$

de gráfico:



e:



V-6. Representação de K_+ no espaço dos momenta.

Em grande número das aplicações da teoria é bastante mais fácil efetuar os cálculos no espaço dos momenta.

Tomemos a equação:

$$(i\hbar \not{\partial}_2 - mc) K_+(2,1) = i\hbar \delta(2,1). \quad (5.35)$$

Sabemos que:

$$\delta(2,1) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot (x_2 - x_1)} d^4 p . \quad (5.52)$$

Introduzindo a transformada de Fourier de K_+ , que denotaremos por

$S_+(p)$:

$$K_+(2,1) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int S_+(p) e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot (x_2 - x_1)} d^4 p , \quad (5.53)$$

obtemos:

$$(\not{p} - mc) S_+(p) = i\hbar , \quad (5.54)$$

$$S_+(p) = \frac{i\hbar}{\not{p} - mc} . \quad (5.55)$$

Também, podemos escrever:

$$S_+(p) = i\hbar \frac{1}{\not{p} - mc} = i\hbar \frac{\not{p} + mc}{(\not{p} + mc)(\not{p} - mc)} = i\hbar \frac{\not{p} + mc}{p^2 - m^2 c^2} .$$

Assim:

$$K_+(2,1) = \frac{i\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\not{p} + mc}{p^2 - m^2 c^2} e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot (x_2 - x_1)} d^4 p . \quad (5.56)$$

Definindo:

$$I_+(2,1) = \frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot (x_2 - x_1)}}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p , \quad (5.57)$$

podemos reescrever (5.56):

$$K_+(2,1) = \frac{i}{\hbar} (i\hbar \not{\partial}_2 + mc) I_+(2,1) . \quad (5.58)$$

Dai resulta, em virtude da equação (5.35):

$$\left(\square_2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) I_+(2,1) = -\delta(2,1) , \quad (5.59)$$

que é uma equação inhomogênea de Klein-Gordon.

O fato de que a equação para $S_+(p)$, (5.54), tem mais

de uma solução, traduz-se no fato de que $1/(\hat{p}-mc)$ é singular se $\hat{p}^2 = m^2 c^2$. Devemos dizer como tratamos os polos nas integrais:

$$I_+(2,1) = \frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} c p_0 \cdot (t_2-t_1)} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{x}_2-\vec{x}_1)} d^3 p dp_0}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 c^2} \quad (5.57)$$

Para definir a integral, devemos dizer como calculamos o resíduo do polo:

$$p_0 = \pm (\vec{p}^2 + m^2 c^2)^{\frac{1}{2}} = \pm E_p \quad (5.60)$$

Feynman impõe que a massa tenha uma parte imaginária negativa infinitesimal:

$$m \rightarrow m - i\delta, \quad \delta > 0 \quad (5.61)$$

e toma o limite para $\delta \rightarrow 0$. Esta imposição dá o K_+ correto.

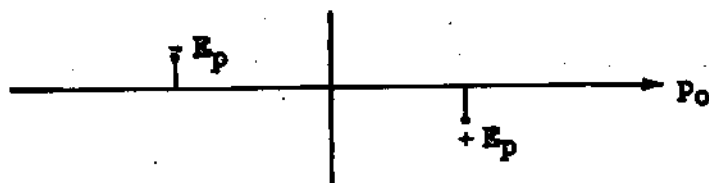
Ponhamos:

$$I_+(2,1) = \frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^4} \int d^3 p e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{x}_2-\vec{x}_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} c p_0 (t_2-t_1)}}{p_0^2 - E_p^2} \quad (5.62)$$

Como $m \rightarrow m - i\delta$, vem, desprezando termos de ordem δ^2 ou superior:

$$\pm E_p = \pm (\vec{p}^2 + m^2 c^2 - 2mi\delta c^2)^{\frac{1}{2}} = \pm (\vec{p}^2 + m^2 c^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{mi\delta c^2}{\vec{p}^2 + m^2 c^2} \right) \quad (5.63)$$

Logo, o polo $p_0 = -E_p$ está agora um pouco acima do eixo real e o polo $p_0 = +E_p$ um pouco abaixo:



(fig. 5.9)

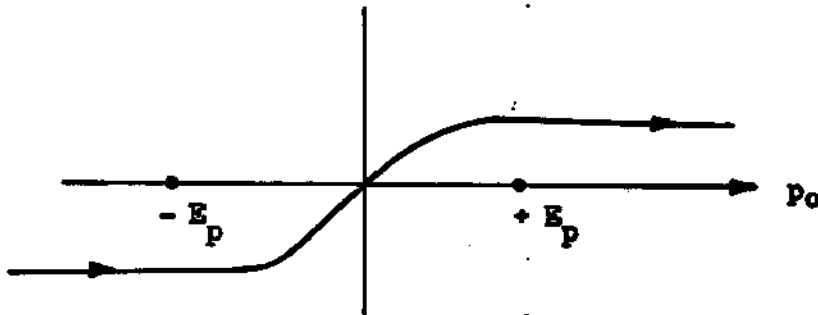
Vamos integrar primeiro para $t_2 - t_1$ positivo. Devemos, então, tomar o contorno de integração por baixo de eixo p_0 , considerado como variável complexa, fechando-se no semi-plano inferior e ficando $+E_p$ envolvido no sentido dos ponteiros do relógio. O resíduo da integral em p_0 é:

$$\frac{-2\pi i}{2|E_p|} e^{-\frac{i}{\hbar} c|E_p|(t_2-t_1)}, \quad t_2 > t_1 \quad (5.64)$$

Integremos agora para $t_2 - t_1$ negativo. Devemos completar o contorno por cima e obtemos para o resíduo:

$$\frac{-2\pi i}{2|E_p|} e^{-\frac{i}{\hbar} c|E_p|(t_2-t_1)}, \quad t_2 < t_1. \quad (5.65)$$

Assim, vemos que para $t_2 - t_1 > 0$ só o polo de energia positiva contribue à integral em p_0 ; para $t_2 - t_1 < 0$ só contribue o polo de energia negativa. Podemos também dizer que o contorno de integração é o da fig. 5.10, que deve ser fechado por baixo para $t_2 > t_1$ e por cima para $t_2 < t_1$.

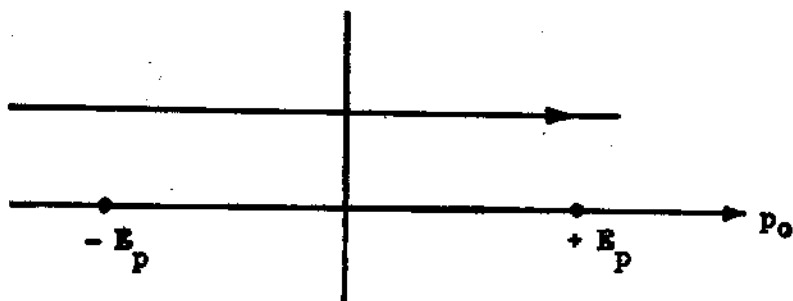


(fig. 5.10)

Se, ao invés de (5.61): $m \rightarrow m - i\delta$, $\delta > 0$, fizéssemos:

$$p_0 \rightarrow p_0 + i\delta, \quad \delta > 0, \quad (5.66)$$

isto é, se tomássemos o contorno da fig. 5.11:



(fig. 5.11)

então, para $t_2 - t_1 > 0$, ambos os polos (ambas as energias positiva e negativa) ocorreriam; para $t_2 - t_1 < 0$ nenhum polo contribuiria. É o K da teoria do elétron; "one electrons theory".

Encontra-se para I_+ :

$$I_+(x) = -\frac{1}{4\pi} \delta(s^2) + \frac{1}{8\pi} \frac{mc/h}{s} H_1^{(2)}\left(\frac{mc}{h} s\right), \quad (5.67)$$

onde $H_1^{(2)}$ é uma função de Hankel (veja M. Schönberg, Boletim de la Union Matem. Argentina, 1948; W. Pauli, Rev. Mod. Phys. 13, 203 (1941), part II, onde $I_+ = \frac{1}{2i} (D_1 - iD)$; Courant Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, II, pag. 448);

$$s = \begin{cases} +\sqrt{c^2 t^2 - x^2}, & \text{para } ct > x, \\ -i\sqrt{x^2 - c^2 t^2}, & \text{para } ct < x. \end{cases}$$

A forma assintótica de I_+ para grandes valores de s é:

$$\begin{aligned} I_+ &\sim e^{-im_0 s} \sim e^{-im_0(ct - \frac{x^2}{2ct})} \sim e^{-im_0 ct}, & \text{para } c^2 t^2 \gg x^2, \\ I_+ &\sim e^{-im_0 s} \sim e^{-im_0 \sqrt{x^2 - c^2 t^2}} \sim e^{-m_0 |x|}, & \text{para } c^2 t^2 \ll x^2, \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde. $m_0 = \frac{mc}{h}$, $x = |\vec{x}|$.

Vemos, que fora do cone de luz, I_+ decaí exponencialmente a grandes distâncias, o que prova o que dissemos na seção V.3.

Outra forma de I_+ , dada por Feynman, é:

$$I_+ = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{m^2 c^2 / \hbar^2}{\alpha} + \alpha (c^2 t^2 - x^2) \right] \right\} . \quad (5.69)$$

V-7. Elementos de matriz no espaço dos momenta.

Vimos, (5.53), que:

$$K_+(2,1) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int S_+(p) e^{-\frac{i}{\hbar} p(x_2 - x_1)} d^4 p , \quad (5.53)$$

onde:

$$S_+(p) = \int K_+(2,1) e^{\frac{i}{\hbar} p(x_2 - x_1)} d^4 x_2 = \frac{i\hbar}{p - mc} \quad (5.55)$$

é a transformada de Fourier de $K_+(2,1)$.

Podemos, também, definir a transformada de Fourier do campo eletromagnético por:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int a_\mu(p) e^{-\frac{i}{\hbar} px} d^4 p , \quad (5.70)$$

onde:

$$a_\mu(p) = \int A_\mu(x) e^{\frac{i}{\hbar} px} d^4 x . \quad (5.71)$$

Exemplo: campo coulombiano: $\vec{A} = 0, \varphi = \frac{Ze}{r}$.

Temos:

$$A(p) = 8\pi^2 Ze \frac{\delta(p_0/\hbar)}{p^2} \gamma_0 \hbar^2 \quad (5.72)$$

Consideremos a amplitude de transição de 1ª ordem:

$$M_1 = - \frac{ie}{\hbar c} \int \bar{g}(3) A(3) f(3) d^4x_3, \quad (5.73)$$

isto é, o elétron com função de onda inicial f , sofre um espalhamento pelo campo A_μ e passa ao estado g . Sejam p_1 e p_2 os momentos (4-vetores):

$$f(x) = u(\vec{p}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 x},$$

$$g(x) = u(\vec{p}_2) e^{-\frac{i}{\hbar} p_2 x}.$$

Introduzindo em (5.73) estas expressões e a transformada de Fourier, (5.72), de A_μ , vem:

$$M_1 = - \frac{ie}{\hbar c} \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \iint \bar{u}(\vec{p}_2) e^{\frac{i}{\hbar} p_2 x} A(p) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} \bar{u}(\vec{p}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 x} d^4x d^4p. \quad (5.74)$$

A integração em x dá uma função δ :

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^4x e^{-\frac{i}{\hbar} (p_2 - p - p_1) x} = \delta_4(p_2 - p_1 - p).$$

Logo:

$$M_1 = - \frac{ie}{\hbar c} \bar{u}(\vec{p}_2) A(p_2 - p_1) u(\vec{p}_1). \quad (5.75)$$

A função δ exprime a conservação do 4-vetor energia-momentum total (incluindo o campo externo) no ponto de interação.

A amplitude de transição de 2ª ordem é:

$$M_2 = \left(-\frac{ie}{\hbar c}\right)^2 \iint \bar{g}(2) A(2) K_+(2,1) A(1) f(1) d^4x_1 d^4x_2. \quad (5.76)$$

Obtemos, neste caso:

$$M_2 = \left(-\frac{ie}{\hbar c}\right)^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \bar{u}(\vec{p}_2) e^{\frac{i}{\hbar} p_2 x_2} \left\{ \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int A(p) e^{-\frac{i}{\hbar} p x_2} d^4p \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int S_+(q) e^{-\frac{i}{\hbar} q (x_2 - x_1)} d^4q \right\} \left\{ \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int A(k) e^{-\frac{i}{\hbar} k x_1} d^4k \right\} \times$$

$$\times u(\vec{p}_1) e^{\frac{i}{\hbar} p_1 x_1} . \quad (5.77)$$

Integrações em x_1 e x_2 dão duas funções δ :

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^4x_1 e^{\frac{i}{\hbar}(q-k-p_1)x_1} = \delta_4(q-k-p_1) , \quad (5.78)$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^4x_2 e^{\frac{i}{\hbar}(p_2-p-q)x_2} = \delta_4(p_2-p-q) , \quad (5.79)$$

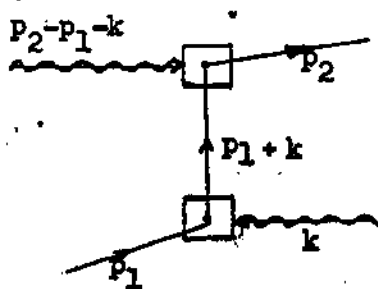
portanto :

$$q = p_1 + k = p_2 - p \quad (5.80)$$

e:

$$\begin{aligned} M_2 &= \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \iiint d^4p d^4q d^4k \bar{u}(\vec{p}_2) \not{A}(p) \frac{i\hbar}{\not{A}-mc} \not{A}(k) u(\vec{p}_1) \cdot \\ &\quad \cdot \delta_4(q-k-p_1) \delta_4(p_2-p-q) = \\ &= \left(-\frac{ie}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^4k \bar{u}(\vec{p}_2) \not{A}(p_2-p_1-k) \frac{1}{(\not{p}_1+k-mc} \not{A}(k) u(\vec{p}_1) , \end{aligned} \quad (5.81)$$

Este termo pode ser interpretado do seguinte modo: o elétron, de momentum inicial p_1 , recebe momentum k do campo e se propaga, com fator $\frac{1}{\not{p}_1+k-mc}$, com momentum p_1+k . Interage novamente com o campo externo e dele recebe momentum p_2-p_1-k , saindo com momentum p_2 . A integração sobre k é porque todos os valores de k são possíveis.



(fig. 5.12)

Como nos estados inicial e final, o elétron é livre se tem:

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2 c^2 .$$

Entretante, o estado intermediário é virtual e não é necessário que seja:

$$(p_1 + k)^2 = m^2 c^2 .$$

Como:

$$\frac{1}{p_1 + k - mc} = \frac{p_1 + k + mc}{(p_1 + k)^2 - m^2 c^2} ,$$

a importância de um estado virtual é inversamente proporcional ao grau de desvio da lei de conservação.

Eis pois as regras para a obtenção do elemento de matriz $M = (\bar{u}(\vec{p}_2) \Omega u(\vec{p}_1))$:

- 1) elétron num estado virtual de momentum \not{p} contribue com a amplitude $\frac{i\hbar}{\not{p} - mc}$;
- 2) um campo de momentum q contribue com a amplitude $-\frac{ie}{\hbar c} \hat{A}(q)$;
- 3) integram-se os momentos virtuais sôbre $\frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4}$.

CAPÍTULO VI

APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE FEYNMANVI - 1. Probabilidade de transição por segundo.

Seja M a amplitude de transição, logo $\frac{|M|^2}{t}$ é a probabilidade de transição por unidade de tempo quando fazemos a transição de um estado inicial conhecido para um único estado final. Mas se se deseja a transição para um grupo de estados finais possíveis, com energia entre E_F e $E_F + dE_F$ e densidade de estados ρ_F , a probabilidade de transição por unidade de tempo é:

$$\lambda = \int \frac{1}{t} |M|^2 \rho_F dE_F \quad (6.1)$$

Mostraremos que:

$$\lambda = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{\pi N} |H|^2 \rho_F, \quad (6.2)$$

onde:

πN é o produto dos fatores de normalização de cada função de onda ou partícula no estado inicial e no estado final:

$N = 2E$ para elétrons, porque fizemos $\bar{u} u = 2m$, ou $u^* u = 2E$. ρ_F é a densidade dos estados finais.

Vimos que, (V.5 - (5.44)), se num instante t o sistema é descrito por uma função $f(\vec{x}_1, t)$, a amplitude de probabili

dade para que, num instante t' , êle seja descrito por $g(\vec{x}_1, t')$ é:

$$M = \int g^*(\vec{x}_1, t') f(\vec{x}_1, t) d^3x_1, \quad (6.3)$$

onde $f(\vec{x}_1, t)$ resulta de $f(\vec{x}_1, t)$ pela equação de movimento. Em geral, $f(\vec{x}_1, t)$ e $g(\vec{x}_1, t')$ são auto-estados de um operador, por exemplo, estados estacionários. Suponhamos que sejam auto-estados de H_0 (Hamiltoniana sem perturbação). Ponhamos, então:

$$f(\vec{x}_1, t) = \psi_n = \varphi_n(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t}. \quad (6.4)$$

Podemos, pois, expandir a solução $\Psi(t)$ da equação de movimento, para o instante t , em termos do conjunto completo dos auto-estados $f(\vec{x}_1, t) = \psi_n$:

$$\Psi(t) = \sum b_n(t) \psi_n = \sum b_n(t) \varphi_n(\vec{x}_1) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t}, \quad (6.5)$$

com:

$$H_0 \psi_n = E_n^0 \psi_n. \quad (6.6)$$

No instante t' teremos:

$$\Psi(t') = \sum b_n(t') \psi_n \quad (6.7)$$

e se $g(\vec{x}_1, t')$ é ψ_ℓ , então M é:

$$M = \int \psi_\ell^* \Psi(t') d^3x_1 = b_\ell(t'). \quad (6.8)$$

De modo que a amplitude de probabilidade é igual ao coeficiente da expansão no tempo final t' .

Logo:

$$|M|^2 = |b_\ell(t')|^2. \quad (6.9)$$

Se no instante inicial temos: $\Psi(t) = \psi_n$, então:

$$b_n(t) = 1, \quad b_m(t) = 0, \quad m \neq n. \quad (6.10)$$

A evolução no tempo é dada pelos $b(t)$ e sua equação se obtém sub-

tituindo $\Psi(t) = \sum b_n(t) \psi_n$ em:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H_T \Psi(t), \quad (6.11)$$

onde

$$H_T = H_0 + H_{int} = H_0 + H. \quad (6.12)$$

Então, por (6.4), (6.5), (6.6):

$$i\hbar \sum \dot{b}_n(t) \psi_n = \sum b_n(t) H \psi_n. \quad (6.13)$$

Multiplicando (6.13) por $\psi_m^* = \varphi_m^*(x_1) e^{\frac{i}{\hbar} E_m^0 t}$ à esquerda e integrando:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{b}_m(t) &= \sum_n b_n(t) \int \psi_m^* H \psi_n d^3x_1 = \\ &= \sum_n b_n(t) \int \varphi_m^* H \varphi_n e^{\frac{i}{\hbar} (E_m^0 - E_n^0) t} d^3x_1 \end{aligned} \quad (6.14-a)$$

ou:

$$i\hbar \dot{b}_m(t) = \sum_n (m|H|n) e^{\frac{i}{\hbar} (E_m^0 - E_n^0) t} b_n(t). \quad (6.14-b)$$

Se no instante inicial ($t=0$) o sistema está no estado a :

$$b_a(0) = 1, b_n(0) = 0, n \neq a.$$

Depois de algum tempo t :

$$b_a(t) \neq 1, b_n(t) \neq 0:$$

Mas, por (6.14) as $b_n(t)$ são proporcionais a $H = H_{int}$, a qual supomos não ser muito grande, de modo que as $b_n(t)$ também não o são, e em primeira aproximação, para t não muito grande, podemos escrever:

$$b_n(t) = 0, b_a(t) = 1.$$

Logo:

$$i\hbar \dot{b}_m(t) = (m|H|a) e^{\frac{i}{\hbar} (E_m^0 - E_a^0) t}, \quad (6.15)$$

$$i\hbar \dot{b}_a(t) = \sum_n (a|H|n) b_n(t) e^{\frac{i}{\hbar} (E_a^0 - E_n^0) t} \quad (6.16)$$

Em vez de t' para o tempo final, ponhamos t . Integrando

$$(6.15): \quad b_m(t) = (m|H|a) \frac{e^{\frac{i}{\hbar} (E_m^0 - E_a^0) t} - 1}{E_a^0 - E_m^0}. \quad (6.17)$$

Então, usando (6.9) vemos facilmente que:

$$|b_m(t)|^2 = |(m|H|a)|^2 \frac{1 - \cos(E_m^0 - E_a^0)t/\hbar}{(E_m^0 - E_a^0)^2}. \quad (6.18)$$

Admitimos t pequeno em relação à vida média do estado a , mas vamos supor que t seja muito grande em relação a $\frac{\hbar}{E_m^0}$ e $\frac{\hbar}{E_a^0}$. Isto é:

$$\frac{\hbar}{E_m^0}, \frac{\hbar}{E_a^0} \ll t \ll \tau \text{ (vida média do estado } a). \quad (6.19)$$

Isto significa que, como:

$$\delta(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos Kx}{Kx^2}, \quad (6.20)$$

então:

$$\frac{1 - \cos \left[t \frac{E_m^0 - E_a^0}{\hbar} \right]}{t \left(\frac{E_m^0 - E_a^0}{\hbar} \right)^2} \rightarrow \pi \delta \left(\frac{E_m^0 - E_a^0}{\hbar} \right), \text{ para } t \gg \frac{\hbar}{E_m^0}, \frac{\hbar}{E_a^0}. \quad (6.21)$$

Logo:

$$\frac{1}{t} |M|^2 = \frac{1}{t} |b_m(t)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |(m|H|a)|^2 \delta(E_m^0 - E_a^0). \quad (6.22)$$

A função δ indica que só há transições entre estados com a mesma energia ($a \rightarrow m$; $E_a^0 \rightarrow E_m^0$) não perturbada.

Finalmente:

$$\lambda = \int \frac{|b_m(t)|^2}{t} \rho_F dE_F = \frac{2\pi}{h} |(m|H|a)|^2 \int \rho_F \delta(E_m^0 - E_a^0) dE_F =$$

$$= \frac{2\pi}{h} |(m|H|a)|^2 \rho_F. \quad (6.23)$$

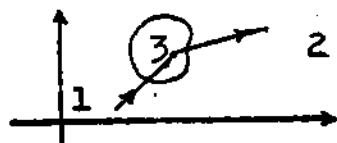
se as funções de onda são normalizadas à unidade. Se forem normalizadas a πN (πN é o produto $2E_1 \dots 2E_z$):

$$\lambda = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{\pi N} |(m|H|a)|^2 \rho_F \quad (6.24)$$

Esta relação foi chamada por Fermi "a regra de ouro".

VI. 2 Espalhamento Rutherford.

O espalhamento de um elétron por um campo externo, em primeira ordem é dado por:



(fig. 6.1)

$$M_1 = - \frac{ie}{hc} \bar{u}(\vec{p}_2) \not{A} (p_2 - p_1) u(\vec{p}_1). \quad (6.25)$$

Se o campo externo é o campo coulombiano de um núcleo de carga Ze :

$$A(p) = \int A(x) e^{\frac{1}{\hbar} p \cdot x} d^4x = 2\pi \delta\left(\frac{p_0}{\hbar}\right) \gamma_0 \int d^3x \frac{Ze}{r} e^{-\frac{1}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} =$$

$$= 8\pi^2 Z e \hbar^2 \frac{\delta(p_0/\hbar)}{\vec{p}^2} \gamma_0. \quad (6.26)$$

Como:

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{\frac{1}{\hbar} p_0 x_0} dx_0 = \delta(p_0/\hbar) = \hbar \delta(p_0) = \hbar \delta\left(\frac{E}{c}\right) = \hbar c \delta(E),$$

vem:

$$M_1 = \frac{-2\pi i}{h} \delta\left(\frac{E_2 - E_1}{h}\right) \bar{u}(\vec{p}_2) \frac{4\pi Ze^2 \hbar^2}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^2} \gamma_0 u(\vec{p}_1).$$

Daf:

$$|M_1|^2 = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \left| \bar{u}(\vec{p}_2) \frac{4\pi Ze^2 h^2}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^2} \gamma_0 u(\vec{p}_1) \right|^2 \delta\left(\frac{E_2 - E_1}{h}\right) \delta(0), \quad (6.27)$$

onde escrevemos:

$$\left[\delta\left(\frac{E_2 - E_1}{h}\right) \right]^2 = \delta\left(\frac{E_2 - E_1}{h}\right) \delta(0)$$

que é infinito devido a $\delta(0)$. Contudo $\delta(0)$ é interpretado como:

$$\begin{aligned} \delta(0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{ixt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\pi x} \operatorname{sen} \frac{xT}{2} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

onde T é o tempo de duração da interação.

Logo:

$$|M_1|^2 = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \left| \bar{u}(\vec{p}_2) \frac{4\pi Ze^2 h^2}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^2} \gamma_0 u(\vec{p}_1) \right|^2 \delta\left(\frac{E_2 - E_1}{h}\right) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi};$$

vemos que a probabilidade de transição por unidade de tempo é:

$$\frac{1}{T} |M_1|^2 = \frac{2\pi}{h} \left| \bar{u}(\vec{p}_2) \frac{4\pi Ze^2 h^2}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^2} \gamma_0 u(\vec{p}_1) \right|^2 \delta(E_2 - E_1).$$

Nesta fórmula, devemos agora dividir por πN porque os u não são normalizados a 1:

$$\frac{1}{T} |M_1|^2 = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{(2E_1)(2E_2)} \left| \bar{u}(\vec{p}_2) \gamma_0 u(\vec{p}_1) \right|^2 \left| \frac{4\pi Ze^2 h^2}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^2} \right|^2 \delta(E_2 - E_1),$$

que é a probabilidade de transição por unidade de tempo, para um único estado final. Se se quer a transição para um grupo de estados finais possíveis, com densidade ρ_F , tem-se:

$$\lambda = \int \frac{1}{T} |M_1|^2 \rho_F dE_F = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{4E_1 E_2} \left| \bar{u}(\vec{p}_2) \gamma_0 u(\vec{p}_1) \right|^2 \left| \frac{4\pi Ze^2 h^2}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^2} \right|^2 \rho_F. \quad (6.29)$$

Mas:

$$\rho_F = \frac{d^3 p_2}{(2\pi\hbar)^3 dE_2} = \frac{p_2^2 dp_2 d\Omega}{(2\pi\hbar)^3 dE_2} .$$

Como:

$$E_2^2 = \vec{p}_2^2 c^2 + m^2 c^4, \quad \frac{dp_2}{dE_2} = \frac{E_2}{p_2} c^{-2} ,$$

fica:

$$\rho_F = \frac{E_2 p_2 d\Omega}{c^2 (2\pi\hbar)^3} :$$

Logo:

$$\lambda = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{16\pi^2 e^4 \hbar^4}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^4} \frac{E_2 p_2 d\Omega}{c^2 (2\pi\hbar)^3} \left| \bar{u}(\vec{p}_2) \gamma_0 u(\vec{p}_1) \right|^2 . \quad (6.30)$$

Se somarmos sobre spins finais do elétron e tomarmos a média dos spins iniciais

$$\Lambda = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{16\pi^2 e^4 \hbar^4}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^4} \frac{E_2 p_2 d\Omega}{c^2 (2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2} \text{Traço} \left\{ \gamma_0 (\not{p}_2 + mc) \gamma_0 (\not{p}_1 + mc) \right\} \quad (6.31)$$

Mas:

$$\text{Traço} \left\{ \gamma_0 (\not{p}_2 + mc) \gamma_0 (\not{p}_1 + mc) \right\} = \text{Traço} \left\{ \not{p}_2 \not{p}_1 + m^2 c^2 \right\}; \quad \not{p}_2 = \gamma_0 \not{p}_2 \gamma_0 ;$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\not{p}_2 \not{p}_1) &= \text{Tr} \left\{ \gamma_0 (\gamma_0 p_{20} - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}_2) \gamma_0 (\gamma_0 p_{10} - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}_1) \right\} = \\ &= 4(p_{20} p_{10} + \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1) . \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \gamma_0 (\not{p}_2 + mc) \gamma_0 (\not{p}_1 + mc) \right\} &= \\ &= \frac{c^2}{2} 4(p_{20} p_{10} + \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1 + m^2 c^2) = 2(E_2 E_1 + c^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + m^2 c^4) , \end{aligned}$$

que levado em (6.31) dá:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{4E_1E_2} \frac{16\pi^2 Z^2 e^4 h^4}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^4} \frac{E_2 p_2^d \Omega}{(2\pi h)^3 c^2} 2(E_1 E_2 + c^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + m^2 c^4) . \quad (6.32)$$

Como o campo é estacionário:

$$E_1 = E_2 = (c^2 \vec{p}_1^2 + m^2 c^4)^{\frac{1}{2}} = E, \quad p_1^2 = p_2^2 .$$

Chamando θ o ângulo (\vec{p}_1, \vec{p}_2) :

$$c^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = c^2 p_1^2 \cos \theta = (E^2 - m^2 c^4) \cos \theta .$$

Logo:

$$E_1 E_2 + c^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + m^2 c^4 = E^2 + (E^2 - m^2 c^4) \cos \theta + m^2 c^4 .$$

Como:

$$E = \frac{m c^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} , \quad \text{temos:}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_1 E_2 + c^2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + m^2 c^4}{E_1 E_2} &= 1 + \left(1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}\right) \cos \theta + \frac{m^2 c^4}{E^2} = \\ &= 2 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \cos \theta = 2 - \frac{v^2}{c^2} (1 - \cos \theta) = \\ &= 2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) . \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{2\pi}{h} \frac{\pi^2 Z^2 e^4 h^4}{(p \sin \frac{\theta}{2})^4} \frac{E p d \Omega}{c^2 (2\pi h)^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \\ &= \frac{Z^2 e^4}{4} \frac{E p d \Omega}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) / \left(p \sin \frac{\theta}{2}\right)^4 . \quad (6.33) \end{aligned}$$

Agora a secção de choque é:

$$\sigma = \frac{\Lambda}{v} . \quad (6.34)$$

Logo, como

$$p = \frac{Ev}{c^2},$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4} \frac{E^2}{(cp \sin \frac{\theta}{2})^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (6.35)$$

É a seção de choque diferencial de Rutherford.

CAPÍTULO VII

O Campo EletromagnéticoVII.1 Amplitude de emissão e absorção de um fóton

Em mecânica quântica, as grandezas físicas são representadas por operadores. Isto é verdade também para os campos associados às partículas e em particular, para o campo eletromagnético. As componentes do campo, ou do potencial de que deriva, são operadores que, em geral, não comutam entre si. A introdução desses operadores se faz considerando o campo de radiação e provando que ele é equivalente a uma superposição de osciladores lineares.

Um campo de radiação é descrito por $\vec{A} = (0, \vec{A})$ e se tem:

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad (7.1)$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{-1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Podemos desenvolver \vec{A} em série de Fourier:

$$\vec{A} = \sum_{\lambda} \left\{ q_{\lambda}(t) \vec{A}_{\lambda}(\vec{x}) + q_{\lambda}^*(t) \vec{A}_{\lambda}'(\vec{x}) \right\}, \quad \vec{A}_{\lambda} = \sqrt{4\pi c^2} \vec{e}_{\lambda} e^{i(\vec{K}_{\lambda} \cdot \vec{x})}. \quad (7.3)$$

\vec{A} satisfaz às equações:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

Se os \vec{A}_λ satisfizerem a:

$$\nabla^2 \vec{A}_\lambda + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \vec{A}_\lambda = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\lambda = 0, \quad (7.4)$$

então:

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = 0 \quad (7.5)$$

A energia é:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8\pi} \int (\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2) d\tau = \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{1}{c^2} \sum_{\lambda, \mu} \int \left\{ \dot{q}_\lambda \dot{q}_\mu \vec{A}_\lambda \cdot \vec{A}_\mu + \dot{q}_\lambda^* \dot{q}_\mu^* \vec{A}_\lambda^* \cdot \vec{A}_\mu^* + \dot{q}_\lambda \dot{q}_\mu^* \vec{A}_\lambda \cdot \vec{A}_\mu^* + \dot{q}_\lambda^* \dot{q}_\mu \vec{A}_\lambda^* \cdot \vec{A}_\mu + \right. \\ &+ c^2 q_\lambda q_\mu (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\lambda) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\mu) + c^2 q_\lambda^* q_\mu^* (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\lambda^*) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\mu^*) + c^2 q_\lambda q_\mu^* (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\lambda^*) \cdot \\ &\left. \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\mu) + c^2 q_\lambda^* q_\mu (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\lambda) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\mu^*) \right\} d\tau. \quad (7.6) \end{aligned}$$

Os \vec{A}_λ são ortogonais:

$$\int \vec{A}_\lambda \cdot \vec{A}_\mu^* d\tau = 4\pi c^2 \delta_{\lambda\mu}, \quad (7.7)$$

$$\int \vec{A}_\lambda \cdot \vec{A}_\mu d\tau = \int \vec{A}_\lambda^* \cdot \vec{A}_\mu^* d\tau = 0.$$

Como:

$$\int (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\lambda) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\mu) d\tau = \oint d\sigma [\vec{A}_\lambda (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\mu)]_n + \int \vec{A}_\lambda \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\mu) d\tau$$

e se supõe que \vec{A}_λ é periódico sobre a superfície que contorna o volume unidade, tem-se:

$$\oint d\sigma [\vec{A}_\lambda (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\mu)]_n = 0$$

Além disso, como:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\lambda = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\lambda) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}_\lambda = \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \vec{A}_\lambda,$$

resulta.

$$\int (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\lambda) \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\mu) d\tau = \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \int \vec{A}_\lambda \cdot \vec{A}_\mu d\tau = 0.$$

Logo (7.6) reduz-se a:

$$H = \frac{1}{8\pi c^2} \sum_{\lambda} \left\{ 4\pi c^2 (q_{\lambda} \dot{q}_{\lambda}^* + \dot{q}_{\lambda}^* q_{\lambda}) + 4\pi c^2 \omega_{\lambda}^2 (q_{\lambda}^* q_{\lambda} + q_{\lambda} q_{\lambda}^*) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left\{ \dot{q}_{\lambda} \dot{q}_{\lambda}^* + \dot{q}_{\lambda}^* \dot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 (q_{\lambda}^* q_{\lambda} + q_{\lambda} q_{\lambda}^*) \right\}. \quad (7.8)$$

No caso clássico:

$$H = \sum_{\lambda} \left\{ \dot{q}_{\lambda}^* \dot{q}_{\lambda} + \frac{1}{2} \omega_{\lambda}^2 (q_{\lambda}^* q_{\lambda} + q_{\lambda} q_{\lambda}^*) \right\}. \quad (7.8')$$

Como solução da equação de movimento (7.5) podemos tomar:

$$q_{\lambda} = |q_{\lambda}| e^{-i\omega_{\lambda} t}, \quad (7.9)$$

de onde:

$$\dot{q}_{\lambda} = -i\omega_{\lambda} q_{\lambda}, \quad (7.10)$$

portanto:

$$H = 2 \sum_{\lambda} \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}^* q_{\lambda}. \quad (7.11)$$

Introduzindo as variáveis canônicas:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\lambda} &= q_{\lambda} + q_{\lambda}^*, \\ P_{\lambda} &= -i\omega_{\lambda} (q_{\lambda} - q_{\lambda}^*), \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

obtem-se para a energia:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (P_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 Q_{\lambda}^2). \quad (7.13)$$

A passagem à teoria quântica é agora feita, considerando P_{λ} e Q_{λ} como operadores que satisfazem às relações de comutação:

$$\left. \begin{aligned} [P_{\lambda}, Q_{\mu}] &= -i\hbar \delta_{\lambda\mu}, \\ [P_{\lambda}, P_{\mu}] &= [Q_{\lambda}, Q_{\mu}] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Substituímos, então o complexo conjugado pelo hermitiano conjugado em (7.12):

$$\left. \begin{aligned} Q_\lambda &= q_\lambda + q_\lambda^+ \\ p_\lambda &= -i\omega_\lambda (q_\lambda - q_\lambda^+) \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

A energia (7.8) se escreve:

$$H = \sum_\lambda \omega_\lambda^2 (q_\lambda^+ q_\lambda + q_\lambda q_\lambda^+) = \frac{1}{2} \sum_\lambda (p_\lambda^2 - \omega_\lambda^2 q_\lambda^2) \quad (7.16)$$

que coincide formalmente com a expressão clássica. Os autovalores desta Hamiltoniana são, então:

$$E_\lambda = (n_\lambda + \frac{1}{2})\hbar \omega_\lambda, \quad (7.17)$$

onde n_λ é um inteiro. As autofunções são as do oscilador harmônico com massa $m = 1$:

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \Psi_{n_1, n_2, \dots, n_\lambda, \dots} (q_1, q_2, \dots, q_\lambda, \dots) = \\ &= \prod_{n_\lambda} N_{n_\lambda} H_{n_\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} q_\lambda e^{-\frac{1}{2} \frac{\omega q_\lambda^2}{\hbar}} \end{aligned} \quad (7.18)$$

O elemento de matriz Q pode ser obtido como o de x para o oscilador harmônico ordinário:

$$(Q_\lambda)_{n,m} = \int \Psi_n^* q_\lambda \Psi_m dq_1 \dots dq_\lambda \dots = \begin{cases} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (n_\lambda + 1), & m_\lambda = n_\lambda + 1, \\ \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} n_\lambda, & m_\lambda = n_\lambda - 1, \\ 0, & m_\lambda \neq n_\lambda \pm 1. \end{cases} \quad (7.19)$$

Também:

$$(Q_\lambda^+)_{n_\lambda+1, n_\lambda} = (Q_\lambda)_{n_\lambda, n_\lambda+1}. \quad (7.20)$$

Logo, as amplitudes complexas q_λ, q_λ^+ , que não são hermitianas, têm os seguintes elementos de matriz:

$$\left. \begin{aligned} q_{n+1, n}^* &= q_{n, n+1} = \sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{2}} \\ q_{n+1, n} &= q_{n, n+1}^* = 0 \end{aligned} \right\} \text{ para cada } \lambda. \quad (7.21)$$

Tem-se:

$$[q_\lambda, q_\mu^\dagger] = \frac{\hbar}{2\omega_\lambda} \delta_{\lambda\mu}. \quad (7.22)$$

Um estado do campo de radiação é agora descrito pelos números n_λ para todos os osciladores de radiação.

Pode-se mostrar que, quanto à sua energia e momentum, uma osciladora plana se comporta exatamente como um feixe de n partículas, cada uma das quais com energia $\hbar\omega$, e momentum \vec{k}_λ : os quanta de luz ou fótons (a energia do ponto zero $\frac{1}{2}\hbar\omega_\lambda$ é omitida).

VII - 2. O vetor de estado do campo de radiação.

Após a quantização, as componentes do campo \vec{A} (e consequentemente \vec{E} e \vec{H}) tornam-se operadores que devem atuar sobre um vetor de estado Ψ , que obedece à equação:

$$i\hbar \dot{\Psi} = H\Psi. \quad (7.23)$$

Para o campo de radiação, H é dada por (7.16):

$$H = \frac{1}{2} \sum_\lambda (p_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 q_\lambda^2) \equiv \sum_\lambda H_\lambda. \quad (7.24)$$

Como cada oscilador linear representa um grau de liberdade, o campo de radiação tem um número infinito de graus de liberdade. Se a Hamiltoniana é (7.24) não há interação entre os osciladores e um auto-estado de H deve ser o produto:

$$\Psi(1) \cdot \Psi(2) \dots \Psi(\lambda) \dots,$$

$\Psi(\lambda)$ sendo um auto-estado normalizado de H_λ , com autovalor

$E_\lambda = n_\lambda \hbar \omega_\lambda$; n_λ é o número de fótons de energia $\hbar \omega_\lambda$:

$$\Psi(\lambda) = \Psi_{n_\lambda}; \quad n_\lambda = 0, 1, 2, \dots; \quad H \Psi_{n_\lambda} = n_\lambda \hbar \omega_\lambda \Psi_{n_\lambda}, \quad (7.25)$$

A solução geral de (7.23) é:

$$\Psi(t) = \sum_{n_1, \dots, n_\lambda, \dots} C_{n_1 \dots n_\lambda \dots}(t) \Psi_{n_1} \Psi_{n_2} \dots \Psi_{n_\lambda} \dots \quad (7.26)$$

onde os C são as amplitudes de probabilidade de estados com $n_1 \dots n_\lambda \dots$ fótons. Um autoestado de (7.23) com energia $E = \sum_{\lambda} E_{\lambda}$ é:

$$\prod_{\lambda} e^{-iE_{\lambda} t/\hbar} \Psi_{n_{\lambda}} \equiv e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} \Psi_{n_1} \dots e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\lambda} t} \Psi_{n_{\lambda}} \dots \quad (7.27)$$

Os elementos de matriz (7.21) são satisfeitos pondo-se:

$$\left. \begin{aligned} q \Psi_n &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \sqrt{n} \Psi_{n-1} \\ q^\dagger \Psi_n &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \sqrt{n+1} \Psi_{n+1} \end{aligned} \right\}, \quad (7.28)$$

i.é, o efeito de q, q^\dagger sobre Ψ_n é produzir os estados Ψ_{n-1} , Ψ_{n+1} , que são os estados que têm um fóton a menos e um fóton a mais, respectivamente, do que Ψ_n . Assim, q_λ descreve a absorção de um fóton, é o operador de absorção de um fóton λ ; q_λ^\dagger descreve a emissão de um fóton, é o operador de emissão de um fóton λ .

Substituindo agora o valor de $(q_\lambda)_{0,1}$ e levando em conta a normalização de \vec{A}_λ , podemos escrever que a onda que representa a amplitude de absorção de um fóton de comprimento de onda λ é:

$$[\vec{A}_\lambda(\vec{x}, t)]_{0,1} = \sqrt{4\pi c^2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}} \vec{\epsilon}_\lambda e^{-i(\omega_\lambda t - \vec{k}_\lambda \cdot \vec{x})} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi c^2 \hbar^2}{2\hbar \omega_\lambda}} \vec{\epsilon}_\lambda e^{-i(\omega_\lambda t - \vec{k}_\lambda \cdot \vec{x})} \quad (7.29)$$

Observe-se que tomamos o campo encerrado na unidade de volume, de outra maneira teríamos o fator $L^{-3/2}$. Observe-se também a condição de transversalidade, na teoria quântica, é $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\lambda) \Psi = 0$ no nosso caso em que tomamos $\Psi = 0$ (Coulomb gauge). Em geral, temos, para o quadrivetor:

$$|A_\mu(\vec{x}, t)|_{0,1} = \sqrt{\frac{4\pi c^2 \hbar^2}{2\hbar \omega_\lambda}} \epsilon_\mu e^{-i(\omega_\lambda t - \vec{k}_\lambda \cdot \vec{x})} \quad (7.29')$$

A condição de transversalidade é, na realidade, $\frac{\partial A_\mu^{(+)}}{\partial x^\mu} \Psi = 0$ e não $\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} \Psi = 0$, onde $A_\mu^{(+)}$ é a parte de A_μ que só contém operador de absorção. Para provar a transversalidade observe-se que a amplitude para encontrar no estado Ψ um fóton de momentum \vec{k} , frequência $\omega = c|\vec{k}| = ck_0$ e polarização ϵ_μ é:

$$f_\mu^{(1)}(k) = (\Phi_0, A_\mu(k) \Psi),$$

onde:

$$A_\mu(k) = \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}} \epsilon_\mu.$$

De $\frac{\partial A_\mu^{(+)}}{\partial x^\mu} \Psi = 0$, resulta: $k_\mu f_\mu^{(1)}(k) = 0$.

Vamos escolher:

$$f_\mu'^{(1)}(k) = f_\mu^{(1)}(k) - \frac{k_\mu}{k_0} f_0^{(1)}(k),$$

isto é, fazer uma transformação de calibre, mudando A_μ assim:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu},$$

ou

$$A_\mu(k) \rightarrow A_\mu(k) + k_\mu \Lambda(k), \quad \Lambda(k) = -f_0^{(1)}(k)/k_0.$$

Então, a transversalidade é:

$$\vec{k} \cdot \vec{f}'^{(1)}(k) = 0.$$

A amplitude (7.29)' foi normalizada a 1 fóton por cm^3 . Podemos normalizá-la a $2\hbar\omega_\lambda$ fótons por cm^3 e neste caso ela é:

$$[A_\mu(x)]_{0,1} = \sqrt{4\pi c^2 \hbar^2} \epsilon_\mu(k) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (7.29)''$$

No espaço dos momenta, a amplitude para absorver um fóton de polarização ϵ_μ e momentum $\hbar k$ é:

$$\mathcal{M}(p) = \sqrt{4\pi c^2 \hbar^2} \epsilon(k) (2\pi\hbar)^4 \delta_4(p - \hbar k), \quad (7.30)$$

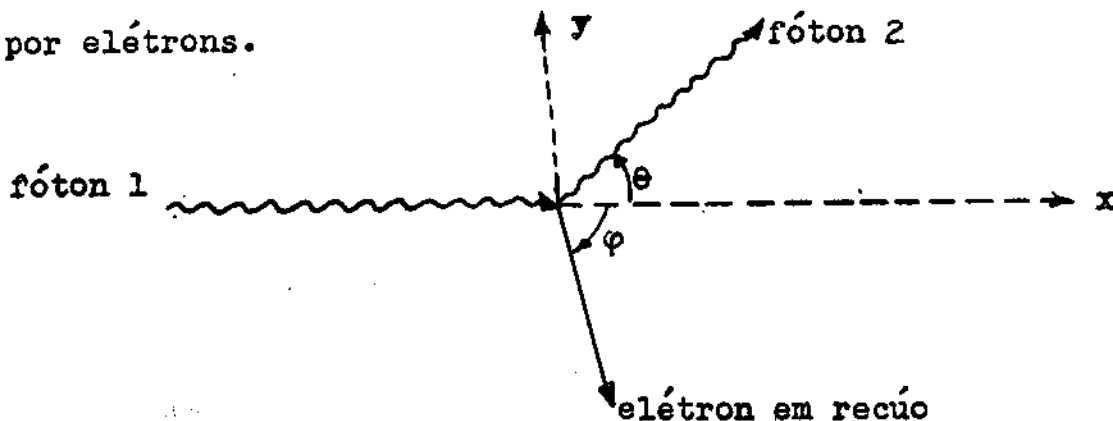
onde:

$$\epsilon_\mu \epsilon^\mu = 1, \quad k_\mu \epsilon^\mu = 0.$$

Esta normalização de potenciais de fótons a $2\hbar\omega$ fótons por cm^3 torna qualquer elemento de matriz invariante, mas para se obterem as transições corretas é necessário que se recoloque um fator $(2\hbar\omega)^{-1}$ para cada fóton nos estados inicial e final.

VII.3 Efeito Compton.

Estudaremos agora o espalhamento relativista de fótons por elétrons.



O eixo dos z é perpendicular ao plano desta fôlha de papel.

(Fig. 7.1)

O fóton 1 incide sobre o elétron livre, em repouso; este recua com momentum p_2 e o fóton sai.

$$\text{Fóton 1 : } A_{1\mu} = \epsilon_{1\mu} e^{-\frac{i}{\hbar} q_1 x},$$

$$\text{Fóton 2 : } A_{2\mu} = \epsilon_{2\mu} e^{-\frac{i}{\hbar} q_2 x},$$

$$\text{Elétron inicial: } \psi_1 = u_1 e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 x},$$

$$\text{Elétron final: } \psi_2 = u_2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_2 x}.$$

A luz está polarizada perpendicularmente à direção de propagação:

$$\epsilon_1 \cdot q_1 = \epsilon_2 \cdot q_2 = 0; \quad q_1^2 = q_2^2 = 0. \quad (7.31)$$

Tem-se:

$$\left. \begin{aligned} \not{p}_1 u_1 &= mc u_1, & p_1^2 &= m^2 c^2, \\ \not{p}_2 u_2 &= mc u_2, & p_2^2 &= m^2 c^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Conservação de energia - momentum impõe:

$$\not{p}_1 + \not{q}_1 = \not{p}_2 + \not{q}_2. \quad (7.33)$$

Como o elétron 1 está em repouso (vêr figura (7.1)):

$$\left. \begin{aligned} c \not{p}_1 &= mc^2 \gamma_0, \\ c \not{p}_2 &= E_2 \gamma_0 - cp_2 \cos \varphi \gamma_x + cp_2 \sin \varphi \gamma_y, \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

$$\left. \begin{aligned} c \not{q}_1 &= \hbar \omega_1 (\gamma_0 - \gamma_x), \\ c \not{q}_2 &= \hbar \omega_2 (\gamma_0 - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta) \end{aligned} \right\} \cdot \quad (7.35)$$

O fóton incidente pode ter dois tipos de polarização independentes, ou combinação linear dêles:

$$(A): \epsilon_1 = \gamma_z, \quad (B): \epsilon_1 = \gamma_y, \quad (7.36)$$

com o vetor elétrico na direção z e y respectivamente. Do mesmo modo para o fóton 2:

$$(A'): \phi_2 = \gamma_z, \quad (B'): \phi_2 = \gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta. \quad (7.37)$$

Se não nos interessa conhecer a direção de recuo do elétron, eliminamos p_2 , obtendo

$$\phi_2 = \phi_1 + A_1 - A_2,$$

$$\begin{aligned} c^2 p_2^2 &= m^2 c^4 = c^2 (p_1 + q_1 - q_2)^2 = c^2 (p_1^2 + q_2^2 + 2p_1 q_1 - 2p_1 q_2 - 2q_1 q_2) = \\ &= c^2 \left[m^2 c^2 + 0 + 0 + 2mc \frac{h\omega_1}{c} - 2mc \frac{h\omega_2}{c} - 2 \frac{h\omega_1}{c} \frac{h\omega_2}{c} (1 - \cos \theta) \right] \end{aligned}$$

ou:

$$mc^2 h (\omega_1 - \omega_2) = h\omega_1 h\omega_2 (1 - \cos \theta),$$

$$\frac{mc^2}{h\omega_2} - \frac{mc^2}{h\omega_1} = 1 - \cos \theta, \quad (7.38)$$

que é a fórmula de Compton.

Densidade de estados finais.

A densidade de estados finais de um sistema de energia total E e momentum total \vec{p} , que se desintegra em duas partículas é:

$$\rho_F = \frac{dn_F}{dE} = \frac{p_1^2 dp_1 d\Omega_1}{(2\pi\hbar)^3 dE}.$$

Sejam \vec{p}_1 e \vec{p}_2 os momenta das duas partículas finais, de massas m_1 e m_2 :

$$E = c(\vec{p}_1^2 + m_1^2 c^2)^{\frac{1}{2}} + c(\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^2)^{\frac{1}{2}} = E_1 + E_2$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 .$$

Temos (chamando θ o ângulo entre \vec{p} e \vec{p}_1):

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dp_1} &= c^2 \frac{p_1}{E_1} + c^2 \frac{p_1 - p \cos \theta}{E_2} = c^2 \frac{E_2 p_1 + E_1 p_1 - E_1 p \cos \theta}{E_1 E_2} = \\ &= c^2 \frac{E p_1 - E_1 p \cos \theta}{E_1 E_2} , \end{aligned}$$

$$\frac{dp_1}{dE} = \frac{E_1 E_2 p_1}{c^2 (E p_1^2 - E_1 \vec{p}_1 \cdot \vec{p})} ,$$

onde $p_1 = |\vec{p}_1|$.

Portanto:

$$\rho_F = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} E_1 E_2 \frac{p_1^3 d\Omega_1}{c^2 (E p_1^2 - E_1 \vec{p}_1 \cdot \vec{p})} .$$

No nosso caso:

$$E_1 = \hbar \omega_2 (\text{fóton 2}); E_2 = E_2 (\text{elétron 2})$$

$d\Omega_1 =$ ângulo sólido dentro do qual sai a partícula 1 (fóton 2) = $d\Omega_\omega$.

Assim:

$$\rho_F = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \hbar \omega_2 E_2 \frac{\left(\frac{\hbar \omega_2}{c}\right)^3 d\Omega_\omega}{c^2 \left[(mc^2 + \hbar \omega_1) \left(\frac{\hbar \omega_2}{c}\right)^2 - \hbar \omega_2 \frac{\hbar \omega_1 \hbar \omega_2 \cos \theta}{c^2} \right]} .$$

Mas de (7.38.) resulta:

$$\cos \theta = 1 + \frac{mc^2}{\hbar \omega_1} - \frac{mc^2}{\hbar \omega_2} = \frac{\hbar \omega_1 \hbar \omega_2 + mc^2 (\hbar \omega_2 - \hbar \omega_1)}{\hbar \omega_1 \hbar \omega_2} .$$

Logo:

$$\rho_F = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{(\hbar \omega_2)^2}{c^3} \frac{d\Omega_\omega}{\hbar \omega_1 + mc^2 - \hbar \omega_1 \frac{\hbar \omega_1 \hbar \omega_2 + mc^2 (\hbar \omega_2 - \hbar \omega_1)}{\hbar \omega_1 \hbar \omega_2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_2(\hbar\omega_2)^3 d\Omega_\omega}{c^3 mc^2 \hbar\omega_1} . \quad (7.39)$$

Probabilidade de transição, por segundo, por cm^3 .

Esta probabilidade é

$$\lambda = \int d\lambda = \int \frac{|M|^2}{VT} \rho_F dE_F = \int \frac{|M|^2}{VT} dn_F , \quad (7.40)$$

onde, no nosso caso (efeito Compton):

$$dn_F = \frac{d^3 q_2 d^3 p_2}{(2\pi\hbar)^6} = n^\circ \text{ de partículas com momentum entre } q_2 \text{ e } q_2 + dq_2, p_2 \text{ e } p_2 + dp_2 \quad (7.41)$$

Ponhamos:

$$M = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\frac{p_2 + q_2 - p_1 - q_1}{\hbar} \right) K , \quad (7.42)$$

temos, então:

$$|M|^2 = (2\pi)^8 \delta^4 \left(\frac{p_2 + q_2 - p_1 - q_1}{\hbar} \right) |K|^2 \delta^4(0) \quad (7.43)$$

Mas:

$$\delta(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} , \quad \delta^4(0) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{VTc}{(2\pi)^4} ,$$

$$\text{logo:} \quad VT \rightarrow (2\pi)^4 \delta^4(0)/c . \quad (7.44)$$

Introduzindo (7.41), (7.43) e (7.44) em (7.40), obtemos:

$$\lambda = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iint |K|^2 c \delta^4(p_2 + q_2 - p_1 - q_1) d^3 p_2 d^3 q_2 .$$

Como a conservação de momentum determina o momentum final da partícula 2 uma vez conhecido o da partícula 1, necessitamos apenas integrar sobre $d^3 q_2$, eliminando a função delta tri-

dimensional. Assim:

$$\lambda = \int \frac{|K|^2 c^2}{(2\pi\hbar)^2} \delta(E_2 + Q_2 - E_1 - Q_1) d^3 p_2 \quad (7.45)$$

Para eliminar a função δ restante, integremos sobre $d^3 p_2$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{|K|^2 c^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \delta(E_f - E_i) \frac{d^3 p_2}{dE_f} dE_f = \\ &= \frac{|K|^2 c^2}{(2\pi\hbar)^2} \left. \frac{d^3 p_2}{dE_f} \right|_{E_f=E_i} \end{aligned} \quad (7.46)$$

Inserindo o fator de normalização: $\Pi N = E_1 Q_1 E_2 Q_2$, vem:

$$\lambda = \frac{|K|^2}{\Pi N} \frac{c^2}{(2\pi\hbar)^2} \frac{d^3 p_2}{d(E_2 + Q_2)} \quad (7.47)$$

$$\text{Mas: } \rho_F = \frac{dn_F}{dE_F} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 p_2}{d(E_2 + Q_2)} \quad (7.48)$$

e pondo:

$$K = \frac{L}{ch} \quad (7.49)$$

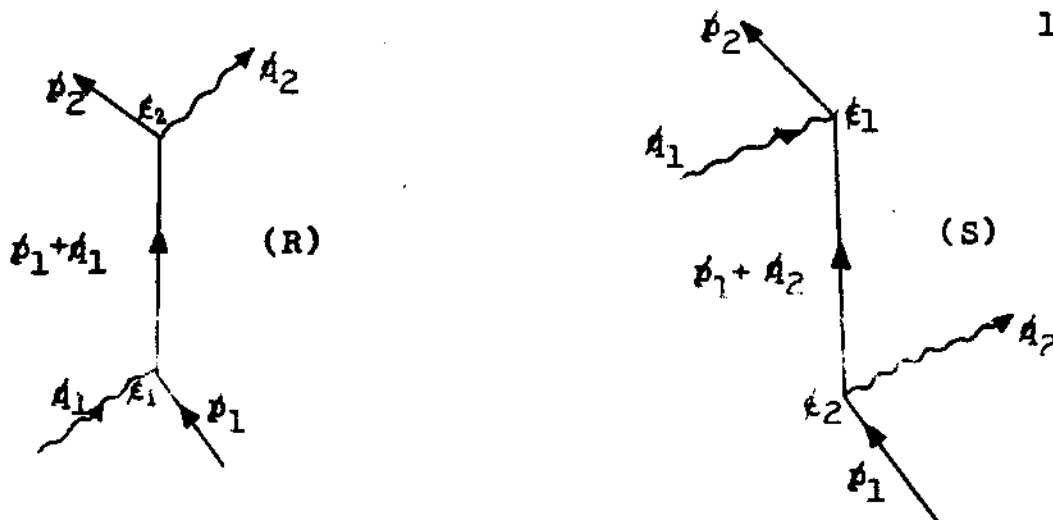
vem:

$$\lambda = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{\Pi N} |L|^2 \rho_F \quad (7.50)$$

Portanto, para o efeito Compton a probabilidade de transição é:

$$\lambda = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{2E_1 2E_2 2\hbar\omega_1 2\hbar\omega_2} |L|^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E_2 (\hbar\omega_2)^3 d\Omega_\omega}{c^3 m c^2 \hbar\omega_1} \quad (7.51)$$

Há dois gráficos para o espalhamento Compton (Fig. 7.2):



(Fig. 7.2)

Assim:

$$M = M_R + M_S, \quad (7.52)$$

$$M_R = \frac{i\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \int \bar{u}(p_2) \left(\frac{ie}{\hbar c}\right) A_2(p_1+q-p_2) \frac{1}{p_1+A-mc} \left(\frac{ie}{\hbar c}\right) A_1(q) u(p_1) d^4q, \quad (7.53)$$

$$M_S = \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int \bar{u}(p_2) \left(\frac{ie}{\hbar c}\right) A_2(p_2-p_1+q) \frac{1}{p_1-q-mc} \left(\frac{ie}{\hbar c}\right) A_1(q) u(p_1) d^4q. \quad (7.54)$$

Usando (7.30):

$$M_R = \frac{i\hbar}{(2\pi\hbar)^4} \left(\frac{ie}{\hbar c}\right)^2 4\pi c^2 \hbar^2 (2\pi\hbar)^8 \int \bar{u}(p_2) \delta^4(p_1-p_2-q_2+q) \not{\epsilon}_2 \frac{1}{p_1+A-mc} \not{\epsilon}_1 \cdot \delta^4(q-q_1) u(p_1) d^4q$$

e análogamente para M_S . Logo:

$$M_R = -4\pi i e^2 \hbar (2\pi\hbar)^4 \bar{u}(p_2) \delta^4(p_1-p_2-q_2+q_1) \not{\epsilon}_2 \frac{1}{p_1+q_1-mc} \not{\epsilon}_1 u(p_1), \quad (7.55)$$

$$M_S = -4\pi i e^2 \hbar (2\pi\hbar)^4 \bar{u}(p_2) \delta^4(p_2-p_1-q_1+q_2) \not{\epsilon}_1 \frac{1}{p_1-A_2-mc} \not{\epsilon}_2 u(p_1). \quad (7.56)$$

Porhamos:

$$\left. \begin{aligned} R &= \epsilon_2 \frac{1}{p_1 + A_1 - mc} \epsilon_1, \\ S &= \epsilon_1 \frac{1}{A_1 - A_2 - mc} \epsilon_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.57)$$

Vem:

$$M = -4\pi i e^2 \hbar (2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \bar{u}(p_2)(R+S)u(p_1). \quad (7.58)$$

$$|M|^2 = (4\pi\hbar)^2 e^4 (2\pi\hbar)^8 |\bar{u}(p_2)(R+S)u(p_1)|^2 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \delta^4(0). \quad (7.59)$$

Portanto, levando (7.59), (7.43) e (7.49) em (7.51), vemos que:

$$\lambda = \frac{1}{4c} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 |\bar{u}(p_2)(R+S)u(p_1)|^2 d\Omega_{\omega_2}. \quad (7.60)$$

Cálculo de (R + S):

$$R = \epsilon_2 \frac{1}{p_1 + A_1 - mc} \epsilon_1 = \frac{\epsilon_2(p_1 + A_1 + mc)\epsilon_1}{(p_1 + A_1)^2 - m^2c^2}.$$

Mas: $p_1^2 = m^2c^2$, $A_1^2 = 0$, $p_1 A_1 + A_1 p_1 = 2p_1 q_1 = 2m\hbar\omega_1$,

logo:
$$R = \frac{\epsilon_2(p_1 + A_1 + mc)\epsilon_1}{2m\hbar\omega_1}.$$

De: $A \cdot B = 2AB - BA$, resulta: $\epsilon_2 p_1 \epsilon_1 = \epsilon_2(2p_1 \epsilon_1) - \epsilon_2 \epsilon_1 p_1$.

Mas p_1 só tem componente mc (elétron em repouso) e ϵ_1 só uma componente espacial, assim $p_1 \epsilon_1 = 0$. E como $p_1 u_1 = mc u_1$, vem:

$$\bar{u}_2 \epsilon_2 p_1 \epsilon_1 u_1 = -mc(\bar{u}_2 \epsilon_2 \epsilon_1 u_1).$$

Este termo cancela com o último de R, logo:

$$\bar{u}_2 R u_1 = \bar{u}_2 \frac{\epsilon_2 A_1 \epsilon_1}{2m\hbar\omega_1} u_1. \quad (7.61)$$

Com S acontece a mesma coisa:

$$\bar{u}_2^S u_1 = \bar{u}_2 \frac{\epsilon_1 A_2 \epsilon_2}{2m\hbar\omega_2} u_1 . \quad (7.62)$$

Assim:

$$2mc(R+S) = \frac{\epsilon_2 \hbar\omega_1 (\gamma_0 - \gamma_x) \epsilon_1}{\hbar\omega_1} + \frac{\epsilon_1 \hbar\omega_2 (\gamma_0 - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta) \epsilon_2}{\hbar\omega_2} =$$

$$= \epsilon_2 (\gamma_0 - \gamma_x) \epsilon_1 + \epsilon_1 (\gamma_0 - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta) \epsilon_2 .$$

Agora: $\epsilon_1 A_1 = -A_1 \epsilon_1$, porque $\epsilon_1 q_1 = 0$ e $\epsilon_2 A_2 = -A_2 \epsilon_2$

pela mesma razão. Logo:

$$\begin{aligned} 2mc(R+S) &= -\epsilon_2 \epsilon_1 (\gamma_0 - \gamma_x) - \epsilon_1 \epsilon_2 (\gamma_0 - \gamma_x \cos \theta - \gamma_y \sin \theta) = \\ &= -2(\epsilon_2 \epsilon_1)(\gamma_0 - \gamma_x) - \epsilon_1 \epsilon_2 [\gamma_x (1 - \cos \theta) - \gamma_y \sin \theta] . \end{aligned} \quad (7.63)$$

Para a polarização existem apenas quatro possibilidades:

(AA'), (AB'), (BA') e (BB').

Agora suponhamos que as polarizações dos fótons 1 e 2 sejam (AB'), isto é:

$$\epsilon_1 = \gamma_z, \quad \epsilon_2 = \gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta .$$

Como $\epsilon_2 \epsilon_1 = 0$,

$$\begin{aligned} 2mc(R+S) &= -\gamma_z (\gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta) [\gamma_x (1 - \cos \theta) - \gamma_y \sin \theta] = \\ &= -\gamma_z [\gamma_y \gamma_x \cos \theta (1 - \cos \theta) + \gamma_x \gamma_y \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad + \sin \theta (1 - \cos \theta)] = \\ &= -\gamma_x \gamma_y \gamma_z (1 - \cos \theta) - \gamma_z \sin \theta . \end{aligned} \quad (7.64)$$

Para polarizações (AA'):

$$\xi_1 = \gamma_z, \quad \xi_2 = \gamma_z,$$

tem-se:

$$2mc(R+S) = 2(\gamma_0 - \gamma_x) + \gamma_x(1 - \cos \theta) - \gamma_y \sin \theta. \quad (7.65)$$

Polarizações (BA'):

$$\xi_1 = \gamma_y, \quad \xi_2 = \gamma_z,$$

vem:

$$2mc(R+S) = -\gamma_y \gamma_z \gamma_x (1 - \cos \theta) + \gamma_z \sin \theta. \quad (7.66)$$

Polarizações (BB'):

$$\xi_1 = \gamma_y, \quad \xi_2 = \gamma_y \cos \theta - \gamma_x \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} 2mc(R+S) &= 2 \cos \theta (\gamma_0 - \gamma_x) + (\cos \theta - \gamma_x \gamma_y \sin \theta) [\gamma_x(1 - \cos \theta) - \\ &\quad - \gamma_y \sin \theta] = \\ &= 2 \cos \theta \gamma_0 - \gamma_x(1 + \cos \theta) - \gamma_y \sin \theta. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Vimos que:

$$\lambda = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{h^2 c^3} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 d\Omega_{\omega_2} |\bar{u}_2(R+S) u_1|^2 h^2 c^2 \quad (7.60)$$

logo, a secção de choque é:

$$\sigma_{21} = \frac{\lambda}{c} \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{h^2 c^3} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 d\Omega_{\omega_2} |\bar{u}_2(R+S) u_1|^2 h^2 c^2 \quad (7.68)$$

Devemos ainda somar sôbre os estados de spin finais do elétron e tomar a média sôbre os spins iniciais:

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{h^2 c^4} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 d\Omega_{\omega_2} \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (R' + S') c (\not{p}_2 + mc) \right. \\ &\quad \left. \cdot (R + S) c (\not{p}_1 + mc) \right\}, \end{aligned} \quad (7.69)$$

$$\text{onde: } R' + S' = \gamma_0 (R+S)^\dagger \gamma_0 .$$

No caso da polarização (AA'), por exemplo, temos:

$$2mc (R' + S') = 2\gamma_0 - \gamma_x (1 + \cos \theta) - \gamma_y \text{ sen } \theta = 2mc (R + S),$$

logo:

$$(2mc)^2 \text{ Traço} = \text{Tr} \left\{ [2\gamma_0 - \gamma_x (1 + \cos \theta) - \gamma_y \text{ sen } \theta] c (\not{p}_2 + mc) \cdot [2\gamma_0 - \gamma_x (1 + \cos \theta) - \gamma_y \text{ sen } \theta] c (\not{p}_1 + mc) \right\} .$$

Agora:

$$c^2 \text{Tr} \left\{ \gamma_0 \not{p}_2 \gamma_0 \not{p}_1 \right\} = 4 (E_2 E_1 + c^2 \vec{p}_2 \vec{p}_1) = 4mc^2 E_2 ,$$

$$c^2 \text{Tr} \left\{ \gamma_0 \not{p}_2 \gamma_x \not{p}_1 \right\} = 4 (E_{10} c p_{2x} + E_{20} c p_{1x}) = 4mc^2 c p_2 \cos \varphi ,$$

$$c^2 \text{Tr} \left\{ \gamma_0 \not{p}_2 \gamma_y \not{p}_1 \right\} = 4 (E_{10} c p_{2y} + E_{20} c p_{1y}) = -4mc^2 c p_2 \text{ sen } \varphi ,$$

$$c^2 \text{Tr} \left\{ \gamma_x \not{p}_2 \gamma_x \not{p}_1 \right\} = 4c^2 (p_{1x} p_{2x} + p_1^\mu p_{2\mu} + p_{2x} p_{1x}) = 4mc^2 E_2 = c^2 \text{Tr} \left\{ \gamma_y \not{p}_2 \gamma_y \not{p}_1 \right\} .$$

$$c^2 \text{Tr} \left\{ \gamma_x \not{p}_2 \gamma_y \not{p}_1 \right\} = 4c^2 (p_{1x} p_{2y} + p_{2x} p_{1y}) = 0 .$$

Dai:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{1}{2} \text{Traço} &= \frac{1}{8m^2 c^4} 16mc^2 (mc^2 + E_2) - 16mc^2 c p_2 \cos \varphi (1 + \cos \theta) + \\ &+ 16mc^2 c p_2 \text{ sen } \varphi \text{ sen } \theta + 4c^2 m (E_2 - mc^2) [(1 + \cos \theta)^2 + \text{sen}^2 \theta] = \\ &= 2 \left(1 + \frac{E_2}{mc^2} \right) - 2 \frac{p_2}{mc} \cos \varphi (1 + \cos \theta) + 2 \frac{p_2}{mc} \text{ sen } \varphi \text{ sen } \theta + \left(\frac{E_2}{mc^2} - 1 \right) . \end{aligned}$$

$$(1 + \cos \theta) .$$

Agora, as leis de conservação dão:

$$E_2 + \hbar\omega_2 = mc^2 + \hbar\omega_1 ,$$

$$cp_2 \cos \varphi = \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 \cos \theta ,$$

$$0 = -p_2 \sin \varphi + \hbar\omega_2 \sin \theta / c .$$

Daí:

$$1 + \frac{E_2}{mc^2} = 2 + \frac{\hbar\omega_1}{mc^2} - \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} ,$$

$$\frac{E_2}{mc^2} - 1 = \frac{\hbar\omega_1}{mc^2} - \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} ,$$

$$cp_2 \cos \varphi = \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 \cos \theta ,$$

$$cp_2 \sin \varphi = \hbar\omega_2 \sin \theta .$$

Além disso, a fórmula de Compton dá:

$$\frac{mc^2}{\hbar\omega_2} - \frac{mc^2}{\hbar\omega_1} = 1 - \cos \theta ,$$

ou:

$$1 + \cos \theta = 2 + \frac{mc^2}{\hbar\omega_1} - \frac{mc^2}{\hbar\omega_2} .$$

Logo:

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{2} \text{ traço} = 4 + 2 \frac{\hbar\omega_1}{mc^2} - 2 \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} - 2 \left(\frac{\hbar\omega_1}{mc^2} - \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} \cos \theta \right) .$$

$$\cdot (1 + \cos \theta) + \frac{2\hbar\omega_2}{mc^2} \sin^2 \theta + \left(\frac{\hbar\omega_1}{mc^2} - \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} \right) (1 + \cos \theta) =$$

$$= 4 + 2 \frac{\hbar\omega_1}{mc^2} - 2 \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} - \frac{\hbar\omega_1}{mc^2} (1 + \cos \theta) + 2 \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} + \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} \cos \theta -$$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} &= 4 + 2 \frac{\hbar\omega_1}{mc^2} - \frac{\hbar\omega_1}{mc^2} \left(2 + \frac{mc^2}{\hbar\omega_1} - \frac{mc^2}{\hbar\omega_2} \right) + \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} \left(1 + \frac{mc^2}{\hbar\omega_1} - \frac{mc^2}{\hbar\omega_2} \right) - \\ &- \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} = 4 + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} . \end{aligned} \quad (7.70)$$

Portanto, para a polarização (AA'):

$$\sigma_{21} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 d\Omega \omega_2 \left[4 + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} \right] \hbar^2 c^2 . \quad (7.71)$$

Para as demais polarizações o fator [] é:

$$(AA') : \quad \left[4 + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} \right] , \quad (7.70)$$

$$(AB') : \quad \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} , \quad (7.72)$$

$$(BA') : \quad \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} , \quad (7.73)$$

$$BB') : \quad \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} + 4 \cos^2 \theta . \quad (7.74)$$

A fórmula geral, para qualquer dessas polarizações é:

$$\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{\omega_1 \omega_2} + 4 (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 , \quad (7.75)$$

isto é:

$$\sigma_{21} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 d\Omega \omega_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 + 4 (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 \right) \quad (7.76)$$

que é a fórmula de Klein-Nishina para fótons polarizados.

No limite em que $\hbar\omega_1 \ll mc^2$, temos, pela fórmula de Compton:

$$mc^2 \hbar\omega_1 - mc^2 \hbar\omega_2 = \hbar\omega_1 \hbar\omega_2 (1 - \cos \theta),$$

$$\frac{\hbar\omega_1}{mc^2} - \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} = \frac{\hbar\omega_1}{mc^2} \frac{\hbar\omega_2}{mc^2} (1 - \cos \theta),$$

dando: $\omega_1 \sim \omega_2,$

isto é, a fórmula de Klein-Nishina tende para:

$$\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)^2 d\Omega_\omega. \quad (7.77)$$

que é a de Rayleigh-Thomson. Neste caso, $\hbar\omega$ ainda é muito maior que as energias atômicas.

Suponhamos que tanto o feixe incidente como o emergente não polarizados. Tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} (AA' + AB') + \frac{1}{2} (BA' + BB') = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 d\Omega_\omega \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \sin^2 \theta \right], \end{aligned} \quad (7.78)$$

que é a fórmula de K.N. para fótons incidentes e emergentes não polarizados.

Se o fóton incidente é não polarizado e se mede a polarização do emergente, então:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Probabilidade de polarização } A'}{\text{Probabilidade de polarização } B'} &= \frac{\frac{1}{2} [(AA') + (BA')]}{\frac{1}{2} [(AB') + (BB')]} = \\ &= \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (7.79)$$

A radiação para a frente, $\theta = 0$, é não polarizada. A polarização é encontrada para $\theta \neq 0$. Para baixa frequência, $\omega_1 \sim \omega_2$, polarização completa é encontrada a $\theta = \pi/2$.

Secção de choque total.

Integrando a secção de choque (7.78) sobre o ângulo sólido:

$$d\Omega = -2\pi d(\cos \theta) = 2\pi \frac{m}{\omega_2^2} d\omega_2 \frac{c^2}{h},$$

pois: $\cos \theta = 1 - \frac{mc^2}{h\omega_2} + \frac{mc^2}{h\omega_1}$,

onde ω_2 varia entre $\frac{mc^2}{2h\omega_1 + mc^2}$ e ω_1 , quando $\cos \theta$ varia entre

-1 e $+1$.

Então:

$$\sigma_T = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 2\pi \frac{mc^2}{h\omega_2^2} d\omega_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{2mc^2}{h\omega_2} + \frac{2mc^2}{h\omega_1} + \frac{m^2 c^4}{h^2 \omega_2^2} + \frac{m^2 c^4}{h^2 \omega_1^2} - \frac{2m^2 c^4}{h^2 \omega_1 \omega_2} \right).$$

A integração dá:

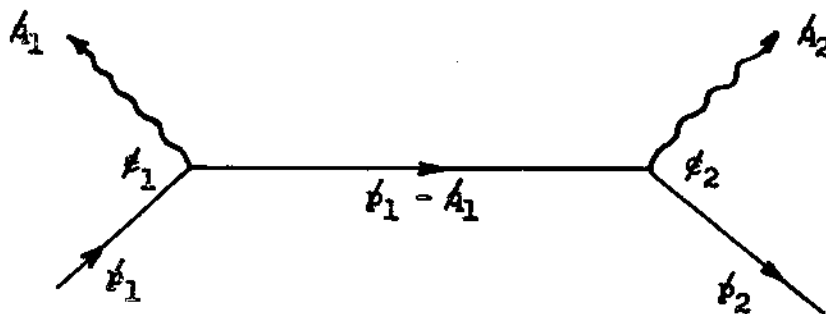
$$\sigma_T = \pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left\{ \left[\frac{mc^2}{h\omega_1} - \frac{2m^2 c^4}{h^2 \omega_1^2} - 2 \left(\frac{mc^2}{h\omega_1} \right)^3 \right] \log \left(1 + \frac{2h\omega_1}{mc^2} \right) + \frac{mc^2}{2h\omega_1} + 4 \left(\frac{mc^2}{h\omega_1} \right)^2 - \frac{(mc^2)^3}{2h\omega_1 (2h\omega_1 + mc^2)^2} \right\}. \quad (7.81)$$

No limite $\omega_1 \rightarrow \infty$, $\sigma_T \rightarrow 0$, isto é, o espalhamento Compton tor-

na-se desprezível e o efeito importante fica sendo a produção de pares.

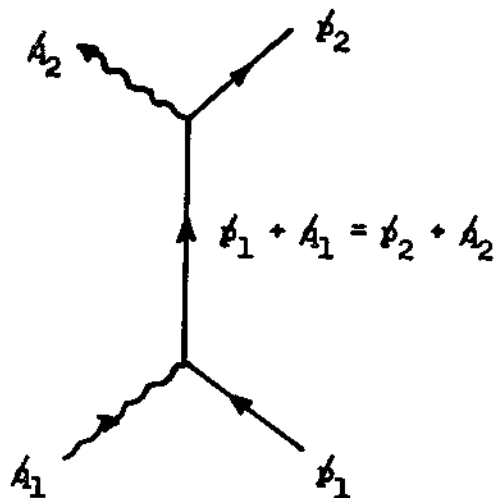
VII.4 Aniquilação de um par com emissão de dois fótons

O primeiro diagrama para este processo é (fig. 7.3):



(fig. 7.3)

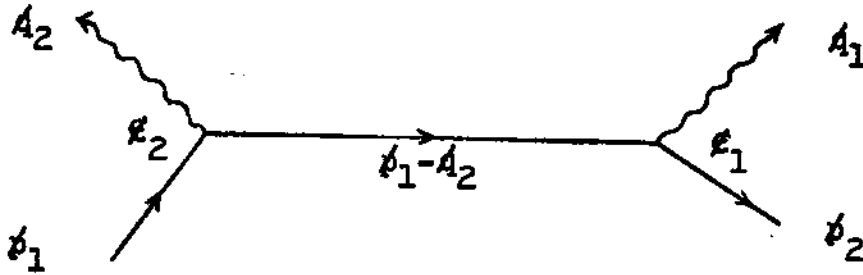
Vemos que é análogo ao do efeito Compton,



(fig. 7.4)

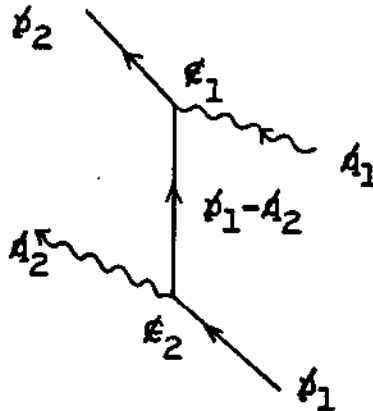
a diferença sendo: a) o sentido de A_1 , b) $p_2 = -$ momentum de um pósitron.

O outro diagrama é o da fig. 7.5:



(fig. 7.5)

que corresponde ao seguinte do efeito Compton:



(fig. 7.6)

Assim, façamos:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= E_{(-)}\gamma_0 - \vec{p}_{(-)} \cdot \vec{\gamma} , \\ p_2 &= -(E_{(+)}\gamma_0 - \vec{p}_{(+)} \cdot \vec{\gamma}) , \end{aligned} \right\} \quad (7.82)$$

onde $E_{(-)}$ e $E_{(+)}$ são as energias do elétron e do pósitron, ambas positivas.

A conservação é:

$$p_2 = p_1 - A_2 - A_1, \text{ ou: } p_2 + A_2 = p_1 - A_1.$$

O elemento de matriz é obtido do correspondente do efeito Compton:

$$(R): 4\pi i e^2 \hbar \left(\bar{u}(p_2) \not{\epsilon}_2 \frac{1}{p_1 - A_1 - mc} \not{\epsilon}_1 u(p_1) \right), \quad (7.83)$$

o outro:

$$(S): -4\pi i e^2 \hbar \left(\bar{u}(p_2) \not{\epsilon}_1 \frac{1}{p_1 - A_2 - mc} \not{\epsilon}_2 u(p_1) \right). \quad (7.84)$$

Tomemos o sistema em que o elétron está em repouso e o pósitron com velocidade $v_{(+)}$. Então:

$$\lambda = \sigma v_{(+)} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{2E_{(-)} 2E_{(+)} 2\hbar\omega_1 2\hbar\omega_2} \left| \bar{u}_2 (R+S) u_1 \right|^2 \frac{dn_F}{dE},$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} R &= \not{\epsilon}_2 \frac{1}{p_1 - A_1 - mc} \not{\epsilon}_1, \\ S &= \not{\epsilon}_1 \frac{1}{p_1 - A_2 - mc} \not{\epsilon}_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.85)$$

Aqui:

$$\begin{aligned} \frac{dn_F}{dE} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} E_1 E_2 \frac{p_1^3 d\Omega_1}{c^2 (E \vec{p}_1 - E_1 \vec{p} \cdot \vec{p}_1)} = \\ &= \frac{\hbar\omega_1 \hbar\omega_2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\left(\frac{\hbar\omega_1}{c}\right)^3 d\Omega_1}{c^2 \left[(\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2) \left(\frac{\hbar\omega_1}{c}\right)^2 - \hbar\omega_1 \left(\frac{\hbar\omega_1}{c} + \frac{\hbar\omega_2}{c}\right) \cdot \frac{\hbar\omega_1}{c} \right]} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\hbar\omega_1 \hbar\omega_2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\left(\frac{\hbar\omega_1}{c}\right)^3 d\Omega_1}{c^2 \left[(\hbar\omega_2 \left(\frac{\hbar\omega_1}{c}\right)^2 - \hbar\omega_1 \vec{Q}_2 \cdot \vec{Q}_1) \right]} =$$

$$= \frac{\hbar\omega_1 \hbar\omega_2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^3} \frac{(\hbar\omega_1)^2 d\Omega_1}{\hbar\omega_2 \hbar\omega_1 - c^2 \vec{Q}_2 \cdot \vec{Q}_1}, \quad (7.86)$$

onde: $\vec{Q}_1 = \frac{\hbar\vec{\omega}_1}{c}$ = momentum do fóton 1, $i = 1, 2$.

Agora, de:

$$p_1 - p_2 = A_1 + A_2$$

e como:

$$p_{(+)} = -p_2,$$

obtem-se:

$$p_1 + p_{(+)} = A_1 + A_2.$$

Dai resulta que

$$2mc^4 + 2c^2 p_1 \cdot p_{(+)} = 2q_1 \cdot q_2 c^2,$$

ou:

$$2mc^4 + 2mc^2 E_{(+)} = 2\hbar\omega_1 \hbar\omega_2 - 2c^2 \vec{Q}_1 \cdot \vec{Q}_2.$$

Assim a probabilidade de transição é:

$$\lambda = \sigma v_{(+)} = \sigma \frac{p_{(+)}}{E_{(+)}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{|\bar{u}_2(R+S)u_1|^2}{16mc^2 E_{(+)} \hbar\omega_1 \hbar\omega_2} \frac{\hbar\omega_1 \hbar\omega_2}{(2\pi\hbar)^3 c^3}.$$

$$\cdot \frac{(\hbar\omega_1)^2 d\Omega}{mc^2(mc^2 + E_{(+)})} = \frac{2\pi}{\hbar} \hbar\omega_1^2 \frac{d\Omega}{16mc^2 E_{(+)}} \frac{1}{(2\pi\hbar c)^3} .$$

$$\cdot \frac{1}{mc^2(mc^2 + E_{(+)})} |\bar{u}_2 (R + S) u_1|^2 .$$

Quanto ao traço, deve ser o do efeito Compton substituindo ω_1 por $-\omega_1$:

$$\sigma = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{(\hbar\omega_1)^2}{cp_{(+)} (E_{(+)} + mc^2)} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} + 2 - 4 (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \right)^2 \quad (7.87)$$

que diverge quando a velocidade do pósitron $\rightarrow 0$ como $\sigma \sim \frac{1}{v_{(+)}}$, característico dos processos de absorção de partículas incidentes.

Num meio de densidade de elétrons ρ , definimos:

$$\lambda = \sigma v_{(+)} \rho .$$

Quando $v_{(+)} \rightarrow 0$, $E_{(+)} \rightarrow mc^2$, $\omega_1 \rightarrow \omega_2 \rightarrow \frac{mc^2}{\hbar}$,

logo:

$$\lambda = \sigma v_{(+)} \rho = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \rho c \sin^2 \theta d\Omega . \quad (7.88)$$

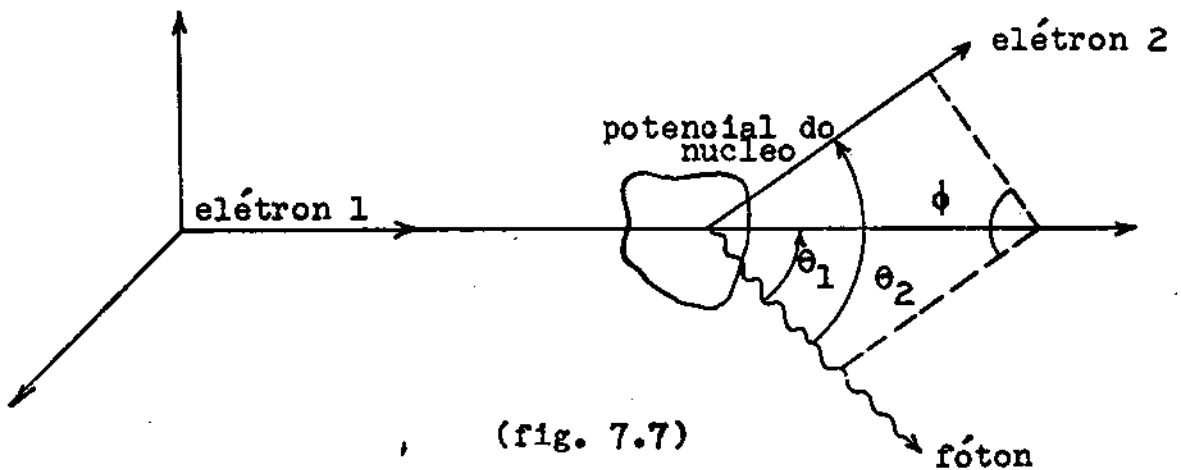
A dependência $\sin^2 \theta$ indica que os dois fótons têm suas polarizações em ângulo reto (probabilidade máxima para $\theta = \frac{\pi}{2}$).

Probabilidade total para qualquer direção (integre sobre $d\Omega$) e para qualquer polarização (tome a média em θ : $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}$):

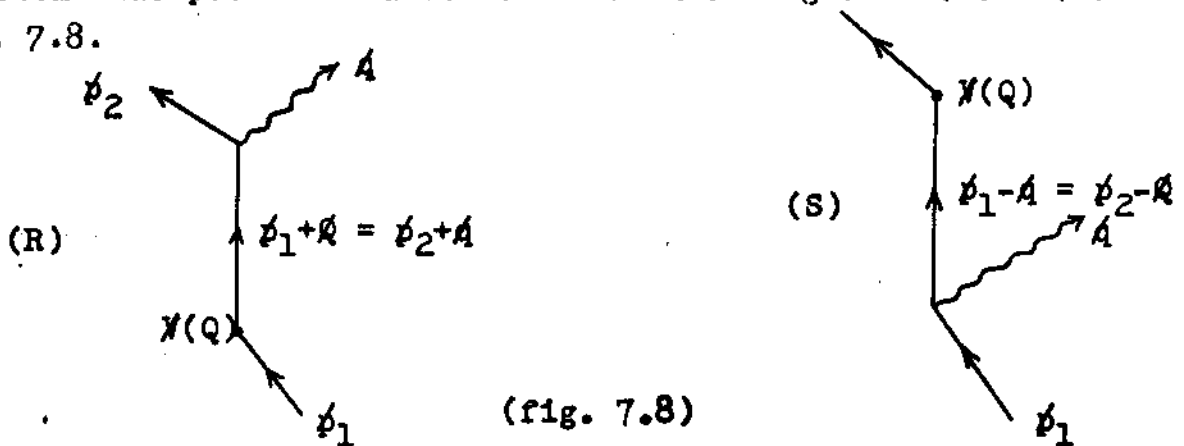
$$\tilde{\lambda} = \pi r_e c [(e^2/mc^2)^2 - r_0^2] . \quad (7.89)$$

VII.5 Bremsstrahlung.

Quando um elétron é desviado pelo campo coulombiano de um núcleo, êle é acelerado. Clássicamente, esta aceleração dá lugar a radiação. De acôrdo com a eletrodinâmica quântica, existe uma probabilidade de que êsse elétron, sob a ação dêsse campo, efetue uma transição para outro estado emitindo um fóton no processo.



Existem duas possibilidades indicadas nos diagramas (R) e (S) da fig. 7.8.



e a conservação de energia e momentum dá:

$$p_1 + Q = p_2 + A, \quad (7.89)$$

onde Q representa o quadri-vetor da energia e quantidade de movimento que o elétron recebe do campo coulombiano. Mas como a transformada de Fourier do potencial de Coulomb contém uma função δ na energia Q_0 , $\delta(Q_0)$, isto quer dizer que deverá ser $Q_0 = 0$, isto é, a energia se conserva entre o elétron incidente, o emergente e o fóton emitido:

$$E_i = E_1 = E_2 + h\omega = E_F.$$

No estado inicial o sistema é formado pelo elétron e um núcleo atômico (caso coulombiano). No estado final há um elétron, um núcleo e um fóton. A probabilidade de transição é:

$$\lambda = \sigma v_1 = \frac{2\pi}{h} \frac{1}{2E_1 2E_2 2h\omega} |M|^2 \frac{dn_F}{dE_F}.$$

Agora o número de estados finais é:

$$dn_F = \rho_F dE_F = dn_p dn_q = (2\pi h)^{-6} p_2^2 dp_2 q^2 dq d\Omega_2 d\Omega_q.$$

Logo:

$$\rho_F = \frac{dn_F}{dE_F} = \frac{dn_F}{d(E_2 + E_q)},$$

mas como para cada q , $E_q = \text{const.}$, tem-se:

$$\rho_F = \frac{dn_F}{dE_2} = \frac{dn_p}{dE_2} dn_q = \rho_p dn_q,$$

$$\frac{n_p}{E_2} = \frac{p_2 E_2 d\Omega_2}{(2\pi\hbar)^3 c^2}, \quad dn_q = \frac{q^2 dq d\Omega_q}{(2\pi\hbar)^3},$$

onde:

$$\rho_F = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \frac{p_2 E_2}{c^2} q^2 dq d\Omega_2 d\Omega_q;$$

em nosso caso:

$$q^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2, \quad dq = \frac{\hbar}{c} d\omega,$$

portanto:

$$\rho_F = \frac{1}{(2\pi\hbar c)^6} p_2 E_2 (\hbar\omega)^2 \hbar d\omega d\Omega_2 d\Omega_q.$$

A energia do fóton pode tomar valores de 0 a E_1 . Como antes, vê-se que o elemento de matriz correspondente aos diagramas acima é:

$$\begin{aligned} M_R + M_S = & \bar{u}(\vec{p}_2) \left[\left(\frac{-ie}{\hbar c} \sqrt{4\pi c^2 \hbar^2} \not{\epsilon} \right) \frac{i\hbar}{p_1 + \not{Q} - mc} \not{Y}(Q) + \right. \\ & \left. + \not{Y}(Q) \frac{i\hbar}{p_2 - \not{Q} - mc} \left(-\frac{ie}{\hbar c} \sqrt{4\pi c^2 \hbar^2} \not{\epsilon} \right) \right] u(\vec{p}_1). \end{aligned}$$

Como vimos na equação (5.72):

$$\begin{aligned} \not{Y}(Q) &= 8\pi^2 Ze \frac{\delta(Q_0/\hbar)}{Q^2} \hbar^2 \gamma_0 \\ &= v(Q) \delta(Q_0) \gamma_0. \end{aligned}$$

Logo:

$$M_R + M_S = \frac{e}{c} \sqrt{4\pi c^2 \hbar^2} \bar{u}(p_2) \left\{ \not{\epsilon} \frac{\not{p}_1 + \not{Q} + mc}{-2\vec{p}_1 \cdot \vec{Q} - Q^2} \gamma_0 + \right. \\ \left. + \gamma_0 \frac{\not{p}_2 - \not{Q} + mc}{2\vec{p}_2 \cdot \vec{Q} - Q^2} \not{\epsilon} \right\} v(Q) u(p_1). \quad (7.90)$$

onde levamos em conta que:

$$(\not{p}_1 + \not{Q} - mc) (\not{p}_1 + \not{Q} + mc) = p_1^2 + Q^2 - m^2 c^2 + 2p_1 Q = Q^2 + 2p_1 Q = \\ = -Q^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{Q}, \text{ porque } Q_0 = 0.$$

Depois de somar sobre a polarização do fóton, sobre o spin do elétron final e de tomar a média sobre o spin inicial do elétron, encontra-se:

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Ze^2}{c^2 Q^2} \right)^2 \frac{e^2 d\omega}{\hbar c \omega} \frac{p_2^2}{p_1} \sin \theta_2 d\theta_2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi. \\ \cdot c^2 \left\{ \frac{p_2^2 \sin^2 \theta_2 (4E_1^2 - c^2 Q^2)}{(E_2 - cp_2 \cos \theta_2)^2} + \frac{p_1^2 \sin^2 \theta_1 (4E_2^2 - c^2 Q^2)}{(E_1 - p_1 \cos \theta_1)^2} - \right. \\ \left. - \frac{2p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi (4E_1 E_2 - c^2 Q^2 + 2(\hbar\omega)^2)}{(E_2 - cp_2 \cos \theta_2) (E_1 - cp_1 \cos \theta_1)} \right\}$$

$$\left. - \frac{2\hbar\omega^2 c^2 (p_1^2 \sin^2 \theta_1 + p_2^2 \sin^2 \theta_2)}{(E_2 - cp_2 \cos \theta_2)(E_1 - cp_1 \cos \theta_1)} \right\} \cdot$$

(7.91)

Uma expressão aproximada - e de fácil interpretação - obtem-se para energias do fóton pequenas em relação a mc^2 , porém grandes em relação às energias de ligação do elétron.

Escrevendo (7.90) em função de A ao invés de q , tem-se:

$$M_R + M_S \sim \bar{u}_2 \left[\not{\epsilon} \frac{1}{p_2 + A - mc} \not{Y}(Q) + \not{Y}(Q) \frac{1}{p_1 - A - mc} \not{\epsilon} \right] u_1 \sim$$

$$\sim \bar{u}_2 \left[\not{\epsilon} \frac{p_2 + A + mc}{2p_2 q} \not{Y}(Q) + \not{Y}(Q) \frac{p_1 - A + mc}{-2p_1 q} \not{\epsilon} \right] u_1 \cdot$$

Como:

$$\left. \begin{aligned} \not{\epsilon} p_2 &= -p_2 \not{\epsilon} + 2\epsilon \cdot p_2, \\ p_1 \not{\epsilon} &= -\not{\epsilon} p_1 + 2\epsilon \cdot p_1 \end{aligned} \right\}$$

e desprezando A no numerador, por ser pequeno diante de mc , vem:

$$M_R + M_S = \sim \bar{u}_2 \left[\not{v}(Q) \left\{ \frac{-p_2 \not{\epsilon} \gamma_0 + 2\epsilon p_2 \gamma_0 + mc \not{\epsilon} \gamma_0}{2p_2 \cdot q} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{-\gamma_0 \not{\epsilon} p_1 + 2\epsilon p_1 \gamma_0 + mc \gamma_0 \not{\epsilon}}{-2p_1 \cdot q} \right\} \right] u_1 \sim$$

$$\sim \bar{u}_2 \gamma(Q) \left\{ \frac{\epsilon \cdot p_2 \gamma_0}{p_2 \cdot q} - \frac{\epsilon \cdot p_1 \gamma_0}{p_1 \cdot q} \right\} u_1, \quad (7.92)$$

pois:

$$\bar{u}_2 \not{p}_2 = mc \bar{u}_2,$$

$$\not{p}_1 u_1 = mc u_1.$$

Obtemos, assim, para σ :

$$d\sigma = \frac{1}{v} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{4E_1 E_2} \left| \bar{u}_2 \gamma_0 u_1 \right|^2 \left| \frac{4\pi Z e^2 \hbar^2}{|\vec{p}_2 - \vec{p}_1|^2} \right|^2 \frac{E_2 p_2 d\Omega_2}{c^2 (2\pi\hbar)^3} \cdot \left[\frac{\epsilon \cdot p_2}{p_2 \cdot q} - \frac{\epsilon \cdot p_1}{p_1 \cdot q} \right] \frac{\omega^2 d\omega d\Omega_q}{(2\pi c)^3}, \quad (7.93)$$

que é a probabilidade de transição no espalhamento elástico multi-iplificada por uma expressão que pode ser interpretada como a probabilidade de emissão de um fóton no intervalo $d\omega$, $d\Omega_q$.

CAPÍTULO VIII

Interação entre ElétronsVIII.1 Propagador de dois elétrons

Apesar de a equação de Dirac não quantizada descrever somente o movimento de uma partícula, ainda podemos obter a amplitude para a interação de duas ou mais partículas dos princípios da eletrodinâmica quântica.

Consideremos dois elétrons a e b movendo-se através de um potencial e suponhamos que eles não interajam entre si. Assim, a amplitude para que o elétron a passe de 1 a 3, enquanto o elétron b se move de 2 a 4, $K(3,4; 1,2)$, pode ser escrita:

$$K(3,4; 1,2) = K_+^{(a)}(3,1) K_+^{(b)}(4,2), \quad (8.1)$$

onde o primeiro fator opera sobre as variáveis de a e o segundo sobre as de b.

Contudo, pela indistinguibilidade dos elétrons, é possível que o elétron a vá de 1 a 4 e o elétron b passe de 2 a 3, sem que possamos distinguir este processo do primeiro (ver fig. 8.1).

Pelo princípio de Pauli, a função de onda do sistema de elétrons mudará de sinal se permutarmos dois elétrons. Assim, a amplitude que descreve ambos os casos é:

$$K = K(3,4; 1,2) - K(4,3; 1,2) \quad (8.2)$$

ou:

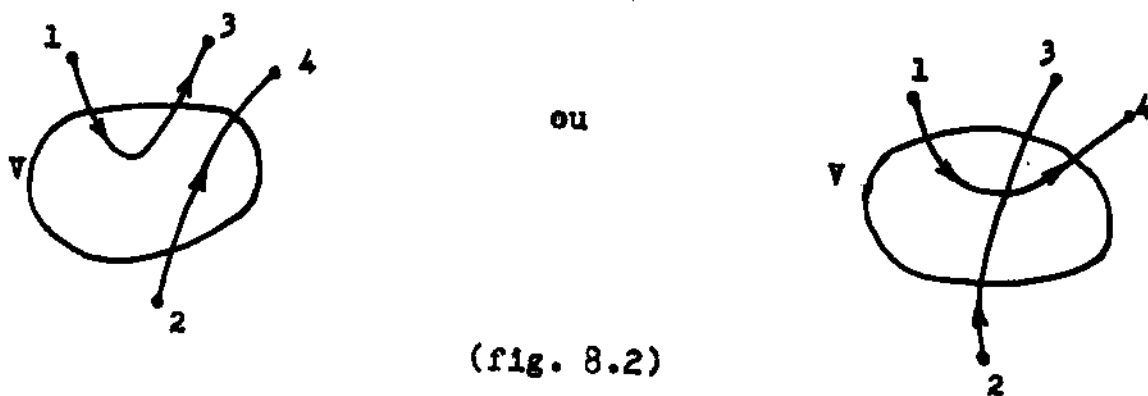
$$K = K_+^{(a)}(3,1) K_+^{(b)}(4,2) - K_+^{(a)}(4,1) K_+^{(b)}(3,2) . \quad (8.2)$$

É óbvia a generalização para o caso de várias partículas.



(fig. 8.1)

Estamos fazendo a hipótese de que ambos os elétrons se movem em um potencial comum. É possível que neste potencial um elétron, ao deslocar-se, dê lugar à criação de um par. Teremos, as sim, os dois diagramas da figura 8.2.



(fig. 8.2)

Consideremos apenas uma das possibilidades. Para obter a amplitude total deve-se fazer a troca de variáveis, fazer a tro

ca de sinais e somar as amplitudes obtidas.

VIII.2 Interação entre cargas - Propagador de um Fóton

Consideremos em primeiro lugar o caso não-relativista:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi .$$

A aproximação não-relativista, de Born, da amplitude para uma interação é:

$$K(3,4 ; 1,2) = K^{(0)} + K^{(1)} , \quad (8.3)$$

onde, como se viu na fórmula (8.1):

$$K_0 = K_{0(a)}(3,1) K_{0(b)}(4,2) , \quad (8.4)$$

$$K_1 = -\frac{1}{\hbar} \int K^{(0)}(3,4 ; 5,6) V(5,6) K^{(0)}(5,6 ; 1,2) d^3x_5 d^3x_6 dt_5 . \quad (8.5)$$

Como no caso não-relativista, a interação é simultânea a ambas as partículas, $t_5 = t_6$. A energia potencial (Coulombiana) da interação é dada por:

$$V_E(5,6) = \frac{e^2}{r_{56}} . \quad (8.6)$$

Incluindo-se a função $\delta(t_5 - t_6)$, pode-se pôr:

$$K^{(1)}(3,4 ; 1,2) = \frac{-1}{\hbar} \int K_0(3,5) K_0(4,6) \frac{e^2}{r_{56}} \delta(t_5 - t_6) K_0(5,1) K_0(6,2) . \quad (8.7)$$

Poder-se-ia pensar que o propagador relativista poderia ser

obtido, substituindo-se K_0 por K_+ e o potencial (8.6) por um potencial retardado através da substituição de $\delta(t_5 - t_6)$ por $\delta(t_5 - t_6 - \frac{r_{56}}{c})$. Entretanto, a transformada de Fourier desta função contém tanto frequências positivas como negativas:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega,$$

enquanto que um fóton tem apenas energia positiva. Somos, assim, levados a introduzir a função (cfr. Apêndice B)

$$\delta_+(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (8.8)$$

a qual contém apenas frequências positivas.

Pelo fato de tanto a atuar em b (a emite um quantum absorvido por b), como b em a (b emite um quantum absorvido por a) devemos considerar $t_5 \leq t_6$ (1º caso), bem como $t_6 \leq t_5$ (2º caso), i.e., tomar a média:

$$\begin{aligned} V_E(5,6) &= \frac{e^2}{2r_{56}} \left\{ \delta_+ \left(t_5 - t_6 - \frac{r_{56}}{c} \right) + \delta_+ \left(t_6 - t_5 - \frac{r_{56}}{c} \right) \right\} = \\ &= \frac{e^2}{2r_{56}} \left\{ \delta_+ \left(t_{56} - \frac{r_{56}}{c} \right) + \delta \left(-t_{56} - \frac{r_{56}}{c} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Como (Apêndice B, (B.25')):

$$\delta_+ \left(c^2 t_{56}^2 - r_{56}^2 \right) = \frac{1}{2r_{56}c} \left\{ \delta_+ \left(t_{56} - \frac{r_{56}}{c} \right) + \delta_+ \left(-t_{56} - \frac{r_{56}}{c} \right) \right\},$$

vem para a energia coulombiana:

$$V_E(5,6) = e^2 c \delta_+ \left(s_{56}^2 \right), \quad (8.10)$$

onde: $s_{56}^2 = c^2 t_{56}^2 - r_{56}^2$, um invariante relativista.

Como na eletrodinâmica clássica, também existe interação com o campo magnético, é necessário introduzir no potencial um termo que dê conta desta interação.

Sabemos que o potencial vetor produzido pelo elétron a em b é:

$$\vec{A}_b = \frac{e}{c} \vec{v}_a / r_{ab}$$

e que a energia de interação correspondente entre os dois corpúsculos se escreve: $V_H = - \frac{e}{c} \vec{A}_b \cdot \vec{v}_b = \frac{e^2}{c^2} \frac{\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b}{r_{ab}}$.

Na teoria de Dirac: $\vec{v} \rightarrow c \vec{\alpha}$, assim:

$$V_H = - \frac{e^2}{c^2} c^2 \vec{\alpha}_a \cdot \vec{\alpha}_b / r_{ab}.$$

Como vimos antes:

$$V_E = \frac{e^2}{r_{56}} \rightarrow e^2 c \delta_+(s_{56}^2),$$

é natural escrevermos para a interação magnética:

$$V_H(5,6) = - e^2 c \vec{\alpha}_a \cdot \vec{\alpha}_b \delta_+(s_{56}^2),$$

A interação completa é:

$$V(5,6) = V_E + V_H = (1 - \vec{\alpha}_a \cdot \vec{\alpha}_b) e^2 c \delta_+(s_{56}^2). \quad (8.11)$$

Como no propagador relativista, K_+ , aparecem β 's, pomos:

$$V(5,6) = [\beta_a \beta_b - (\beta \vec{\alpha})_a \cdot (\beta \vec{\alpha})_b] e^2 c \delta_+(s_{56}^2) \quad (8.11')$$

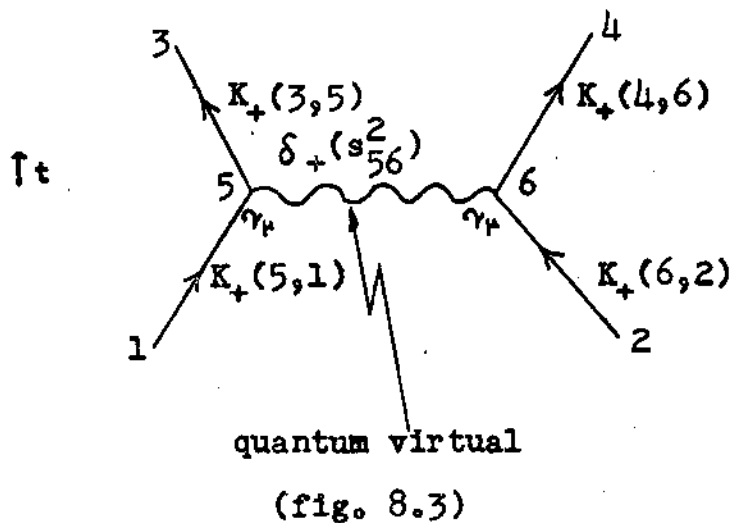
ou:

$$V(5,6) = e^2 c \delta_+(s_{56}^2) \gamma_a^\mu \gamma_{\mu b}. \quad (8.11'')$$

Logo, para elétrons relativistas:

$$\begin{aligned}
 K^{(1)}(3,4; 1,2) &= \frac{-ie^2}{\hbar c} \iint K_{+a}(3,5) K_{+b}(4,6) \gamma_a^\mu \gamma_{\mu b} \delta_+(s_{56}^2) \cdot \\
 &\quad K_{+b}(5,1) K_{+b}(6,2) d^4x_5 d^4x_6 = \\
 &= -\frac{ie^2}{\hbar c} \iint \left[K_{+}(3,5) \gamma^\mu K_{+}(5,1) \right]_a \delta_+(s_{56}^2) \left[K_{+}(4,6) \gamma_\mu K_{+}(6,2) \right]_b d^4x_5 d^4x_6.
 \end{aligned}
 \tag{8.12}$$

que pode ser representado pelo diagrama da figura 8.3.



A equação (8.12) é fundamental na eletrodinâmica quântica. Ela descreve o efeito de troca de um fóton virtual entre dois elétrons. O fóton virtual pode estar polarizado em qualquer das quatro direções x_μ , indicando $\gamma_\mu \gamma^\mu$ a soma sobre estas quatro possibilidades.

VIII. 3 Representação de Fourier de $\delta_+(s^2)$

A representação de Fourier de $\delta_+(s^2)$ é:

$$\delta_+(s^2) = \frac{-4\pi}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^2 + i\epsilon} d^4k, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (8.13)$$

De fato, ponhamos:

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k^2 + i\epsilon} d^4k = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon} dk_0 = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_0 x_0} dk_0}{(k_0 + \sqrt{\vec{k}^2 - i\epsilon})(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 - i\epsilon})}. \end{aligned}$$

Seja:

$$J_1 = \int_{-R}^R \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \alpha^2} dk_0 + \int_{C_1} \frac{e^{-ik_0 x_0} e^{-yx_0}}{k_0^2 - y^2 + 2ik_0 y - \alpha^2} d(k_0 + iy)$$

onde C é o semi-círculo da figura (8.5). Aqui $k_0 \rightarrow k_0 - iy$, $y > 0$, e quando $x_0 > 0$ e $R \rightarrow \infty$, $y \rightarrow +\infty$, a 2ª integral se anula. Pelo teorema dos resíduos:

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - \alpha^2} dk_0 = -2\pi i \frac{e^{-i\alpha x_0}}{2\alpha},$$

(o sinal negativo provem do sentido do contorno C_1), onde $\alpha = (\vec{k}^2 - i\epsilon)^{\frac{1}{2}} \approx |\vec{k}| \left(1 - \frac{1}{2} \frac{i\epsilon}{|\vec{k}|^2}\right)$. Quando $\epsilon \rightarrow 0$:

$$J_1 = -\pi i \frac{e^{-i|\vec{k}|x_0}}{|\vec{k}|}, \quad x_0 > 0$$

Então:

$$I_1 = \pi i \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i|\vec{k}|x_0}}{|\vec{k}|} d^3\vec{k} =$$

$$= \pi^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i|\vec{k}|x_0} e^{i|\vec{k}|r \cos \theta}}{|\vec{k}|} |\vec{k}|^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= - \frac{2\pi^2}{r} \int_0^{\infty} dk \left[e^{-i|\vec{k}|(x_0 + r)} - e^{-i|\vec{k}|(x_0 - r)} \right] =$$

Usando a função δ_+ dada no Apêndice B obtemos:

$$I_1 = 4\pi^3 \frac{1}{2r} \left[\delta_+(x_0 - r) - \delta_+(x_0 + r) \right] =$$

Quando a fórmula (B.15) do Apêndice:

$$= 4\pi^3 \left\{ \frac{1}{2r} \left[\delta(x_0 - r) - \delta(x_0 + r) \right] + \frac{1}{\pi i} \frac{1}{2r} \left[\mathcal{P}\left(\frac{1}{x_0 - r}\right) - \mathcal{P}\left(\frac{1}{x_0 + r}\right) \right] \right\}.$$

Pela fórmula (B.23) do Apêndice B:

$$\frac{1}{2r} \left[\mathcal{P}\left(\frac{1}{x_0 - r}\right) - \mathcal{P}\left(\frac{1}{x_0 + r}\right) \right] = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x_0^2 - r^2}\right),$$

ou:

$$\frac{1}{2r} \left\{ \delta(x_0 - r) - \delta(x_0 + r) \right\} = \epsilon(x_0) \delta(x_0^2 - r^2),$$

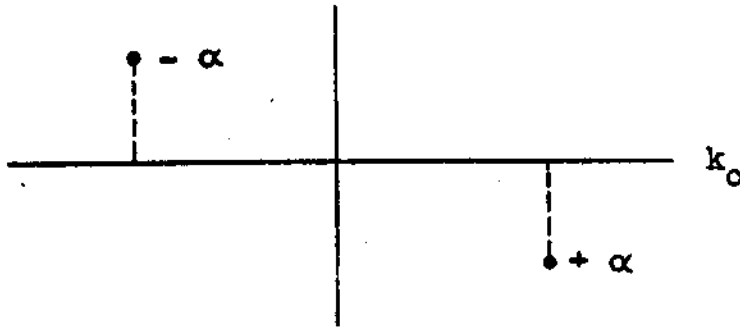
como $x_0 > 0$, $\epsilon(x_0) = +1 \Rightarrow \delta(x_0^2 - r^2) = \delta(x_0^2 - r^2) = \frac{1}{2r} \left\{ \delta(x_0 - r) - \delta(x_0 + r) \right\}$.

$\epsilon(x_0)$ é o sinal de x_0 (ver Apêndice A).

A integral (8.13) possui dois polos, $+\alpha$ e $-\alpha$, acima e abaixo do eixo real:

o polo positivo, $+\alpha = |\vec{k}| - \frac{1}{2} i$ está abaixo do eixo real;

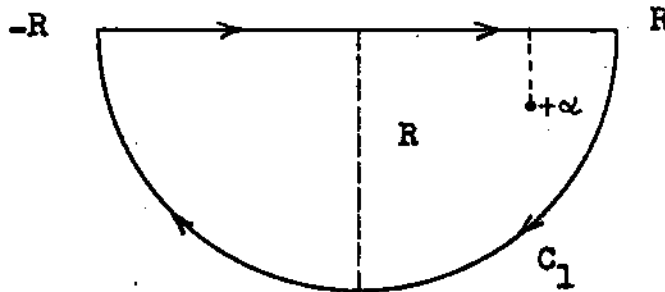
o polo negativo, $-\alpha = -|\vec{k}| + \frac{1}{2} i$ está sobre o eixo real.



(fig. 8.4)

Como estamos interessados em integrar sobre todo o eixo real, podemos usar qualquer contorno que contenha $+\alpha$ ou $-\alpha$. Assim:

A) $x_0 > 0 \rightarrow$ deve-se integrar usando o contorno contendo $+\alpha$, pois o contorno envolvendo $-\alpha$, quando $x_0 > 0$, faz a integral divergir:



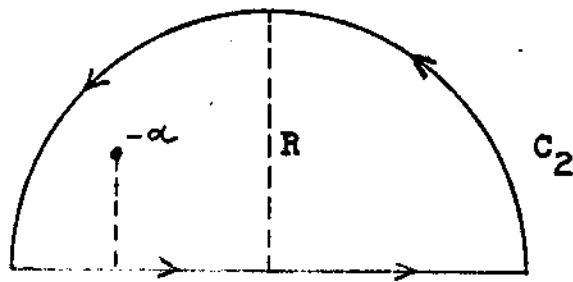
(fig. 8.5)

Logo:

$$\Gamma_1 = 4\pi^3 \left\{ \delta(s^2) + \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \left(\frac{1}{s^2} \right) \right\} = 4\pi^3 \delta_+(s^2), \quad x_0 > 0 \quad (8.14)$$

B) $x_0 < 0 \rightarrow$ deve-se integrar o contorno contendo $-\alpha$ (fig. 8.6).

Assim:



(fig. 8.6)

$$J_2 = 2\pi i \frac{e^{i\alpha x_0}}{-2\alpha} = -\pi i \frac{e^{i\alpha x_0}}{\alpha},$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$,

$$J_2 = -\pi i \frac{e^{i|\vec{k}|x_0}}{|\vec{k}|}, \quad x_0 < 0.$$

Donde:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2\pi^2}{r} \int_0^\infty dk \left(e^{ik(r+x_0)} - e^{-ik(r-x_0)} \right) = \\ &= 4\pi^3 \frac{1}{2r} \left[\delta_-(r-x_0) - \delta_+(r-x_0) \right] = \end{aligned}$$

$$= 4\pi^3 \left\{ \frac{1}{2r} \left[\delta(r+x_0) - \delta(r-x_0) \right] - \frac{1}{\pi i} \frac{1}{2r} \left[\mathcal{P}\left(\frac{1}{r+x_0}\right) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{r-x_0}\right) \right] \right\}.$$

Mas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r} \left[\delta(r+x_0) - \delta(r-x_0) \right] &= -\frac{1}{2r} \left[\delta(x_0-r) - \delta(x_0+r) \right] = \epsilon(x_0) \delta(x_0^2) = \\ &= \delta(x_0^2 - r^2), \text{ pois } x_0 < 0 \Rightarrow \epsilon(x_0) = -1. \end{aligned}$$

Donde:

$$I_2 = 4\pi^3 \left[\delta(x_0^2 - r^2) + \mathcal{P} \left(\frac{1}{x_0^2 - r^2} \right) \right] = 4\pi^3 \delta_+(s^2), \quad x_0 < 0 \quad (8.15)$$

c.q.d.

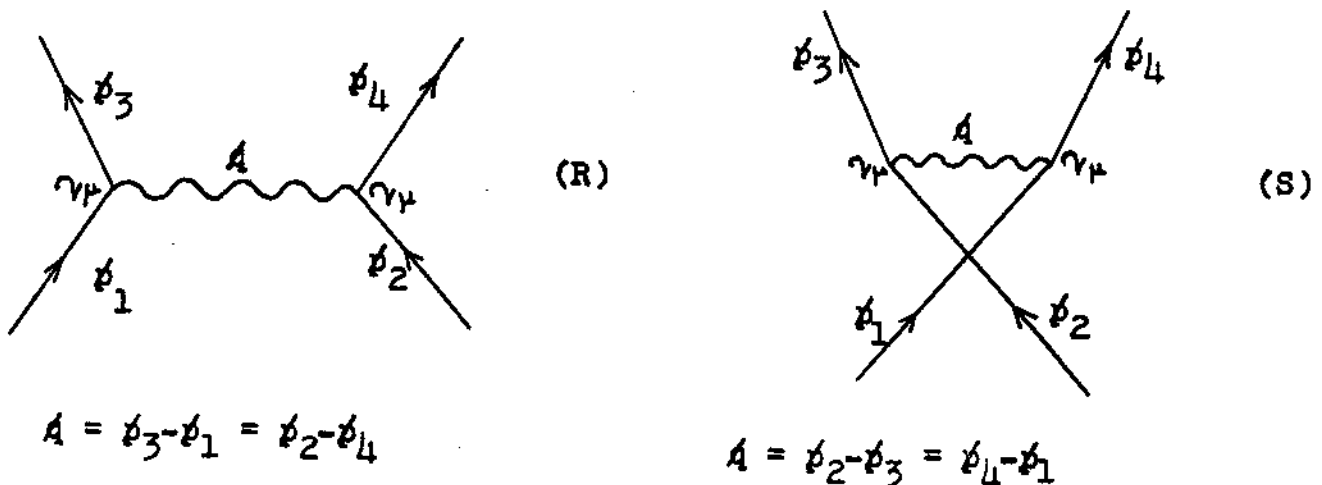
Assim, de (8.13) vemos que no espaço dos momenta, a transformada $\delta_+(k^2)$ de $\delta_+(s^2)$ é:

$$\delta_+(k^2) = -\frac{4\pi}{k^2}. \quad (8.16)$$

Cumpra observar que $\delta_+(s^2)$ é a mesma função $I_+(s^2)$, que aparecia na derivação do propagador de uma partícula livre, com m igual a zero (massa do fóton).

VIII.4 Espalhamento elétron-elétron.

Obteremos, agora, a secção de choque para o espalhamento elétron-elétron. Existem dois diagramas indistinguíveis (ver. 8.7):



(fig. 8.7)

Consideremos dois elétrons descritos no estado inicial por:

$$f_1(x_1) = u_1 e^{-ip_1 x_1} \quad \text{e} \quad f_2(x_2) = u_2 e^{-ip_2 x_2},$$

e no estado final, por:

$$g_3(x_3) = u_3 e^{ip_3 x_3} \quad \text{e} \quad g_4(x_4) = u_4 e^{-ip_4 x_4}.$$

Por (V.2), (5.43), sabe-se que:

$$\begin{cases} \int K_+(5,1) \beta u_1 e^{-ip_1 x_1} d^3 x_1 = u_1 e^{-ip_1 x_5}, \\ \int K_+(6,2) \beta u_2 e^{-ip_2 x_2} d^3 x_2 = u_2 e^{-ip_2 x_6}, \end{cases}$$

e:

$$\begin{cases} \int \bar{u}_3 e^{ip_3 x_3} \beta K_+(3,5) d^3 x_3 = \bar{u}_3 e^{ip_3 x_5}, \\ \int \bar{u}_4 e^{ip_4 x_4} \beta K_+(4,6) d^3 x_4 = \bar{u}_4 e^{ip_4 x_6}. \end{cases}$$

Generalizando (5.45) para duas partículas:

$$M_R = \int \bar{g}_3 \bar{g}_4 \beta_a \beta_b K^{(1)}(3,4;1,2) \beta_a \beta_b f_1 f_2 d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 x_3 d^3 x_4. \quad (8.17)$$

Logo, levando (8.12) em (8.17):

$$\begin{aligned} M_R = \int \bar{g}_3 \bar{g}_4 \beta_a \beta_b \left\{ -ie \iint \left[K_+(3,5) \gamma_\mu K_+(5,1) \right]_a \delta_+(s_{56}^2) \left[K_+(4,6) \gamma_\mu K_+(6,2) \right]_b \right. \\ \left. \cdot d^4 x_5 d^4 x_6 \right\} \beta_a \beta_b f_1 f_2 d^3 x_1 \dots d^3 x_4. \quad (8.18) \end{aligned}$$

Mas:

$$\left\{ \int \bar{g}_3 \beta_a K_+(3,5) d^3 x_3 \right\} \gamma^\mu \left\{ K_+(5,1) \beta_a f_1 d^3 x_1 \right\} = \bar{g}_5 \gamma^\mu f_5 ,$$

$$\left\{ \int \bar{g}_4 \beta_b K_+(4,6) d^3 x_4 \right\} \gamma^\nu \left\{ K_+(6,2) \beta_b f_2 d^3 x_2 \right\} = \bar{g}_6 \gamma^\nu f_6 ,$$

onde:

$$\begin{cases} \bar{g}_5(x_5) = \bar{u}_3 e^{ip_3 x_5} , & \bar{g}_6(x_6) = \bar{u}_4 e^{ip_4 x_6} , \\ f_5(x_5) = u_1 e^{-ip_1 x_5} , & f_6(x_6) = u_2 e^{-ip_2 x_6} . \end{cases}$$

donde:

$$\begin{aligned} M_R &= -ie^2 \iint \bar{g}_5 \gamma^\mu f_5 \delta(s_{56}^2) \bar{g}_6 \gamma^\nu f_6 d^4 x_5 d^4 x_6 = \\ &= -ie^2 \int (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2) \delta(p_3 - p_1 + k) \delta(p_4 - p_2 - k) \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \frac{(2\pi)^8}{k^2} d^4 k = \\ &= -ie^2 (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2) 4\pi (2\pi)^4 \delta(p_3 - p_1 + p_4 - p_2) \frac{1}{(p_3 - p_1)^2} . \quad (8.19) \end{aligned}$$

Diagrama S:

Analogamente:

$$M_S = -ie^2 4\pi (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_2) (2\pi)^4 \frac{\delta(p_3 - p_1 + p_4 - p_2)}{(p_4 - p_1)^2} .$$

Pelo princípio de exclusão:

$$K^{(1)} = K_R^{(1)} - K_S^{(1)} ,$$

donde:

$$M = M_R - M_S .$$

Então, por (22.46), (22.47):

$$\sigma = -4\pi i e^2 \sum_{\mu} \left\{ \frac{(\bar{u}_4 \gamma_{\mu} u_2)(\bar{u}_3 \gamma_{\mu} u_1)}{(p_3 - p_1)^2} - \frac{(\bar{u}_4 \gamma_{\mu} u_1)(\bar{u}_3 \gamma_{\mu} u_2)}{(p_4 - p_1)^2} \right\}$$

Calcularemos σ no sistema centro de massa (S.C.M.) por simplicidade:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = -\vec{p}_3, \quad \vec{p}_3 = -\vec{p}_4 = \vec{p}_F, \quad |\vec{p}_1| = |\vec{p}_F|$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E$$

$$dn_F = \rho_F dE_F = \rho_E dE = dn_E,$$

i.é, o número de estados finais no sistema de laboratório (S.L.), no qual um elétron tem energia E_F , é igual ao número de estados no S.C.M., no qual um elétron tem energia E .

Comq:

$$E_F = E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = 2E,$$

$$\rho_F = \frac{1}{2} \rho_E = \frac{1}{2} \frac{p E d\Omega}{(2\pi)^3},$$

logo:

$$\lambda = \sigma v_1 = \frac{2\pi}{(2E)^4} |L|^2 \frac{1}{2} \frac{p E d\Omega}{(2\pi)^3}.$$

Tomando a média sobre os estados iniciais de spin e somando sobre os estados finais de spin, obtem-se:

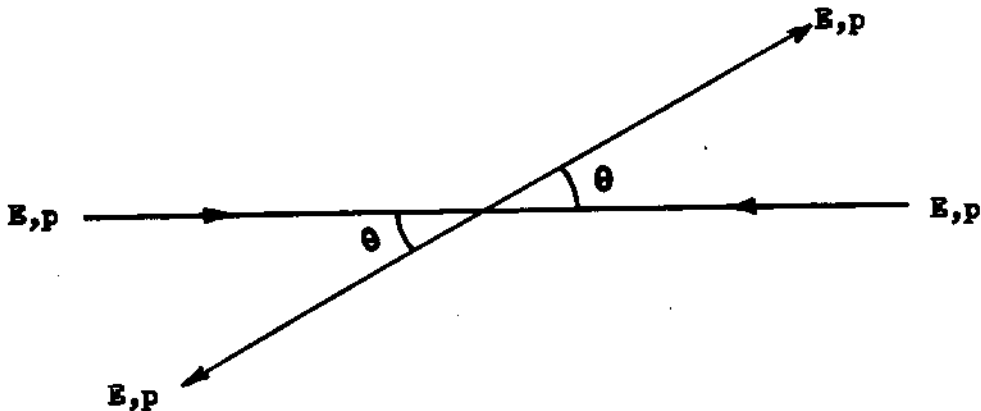
$$d\sigma = \frac{2e^4 p d\Omega}{E^3} \frac{4x^2 + 8x \cos \theta + 2(1 - \cos^2 \theta) + 4 \cos \theta}{(1 - \cos \theta)}$$

$$+ \frac{4x^2 - 8x \cos \theta + 2(1 - \cos^2 \theta) - 4 \cos \theta}{(1 + \cos \theta)^2} - \frac{4(1+x)(x-3)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}, \quad (8.20)$$

onde:

$$x = \frac{E^2}{p^2}, \quad h = c = 1,$$

A (8.20) é a fórmula do espalhamento elétron-elétron, de Möller.



VIII.5 Equivalência da soma sôbre as quatro polarizações com a ação das ondas transversais mais a da interação de Coulomb

Sabe-se que na eletrodinâmica clássica as ondas longitudinais são equivalentes a ondas transversais mais uma interação Coulombiana. Demonstraremos, que na eletrodinâmica quântica, análogamente, existe uma equivalência entre "soma sôbre quatro polarizações" e "ondas transversais mais uma interação Coulombiana instantânea".

Em vez de escolher as direções x, y, z , tome-se a direção paralela a \vec{q} (momentum do fóton) e duas direções transversais a esta.

O elemento de matriz L , contém termos do tipo:

$$S = \sum_{\mu} (\bar{u}_4 \gamma^{\mu} u_2) (\bar{u}_3 \gamma_{\mu} u_1) \frac{1}{q^2}, \quad (8.21)$$

os quais fazendo-se a substituição indicada, se transformam em:

$$S = (\bar{u}_4 \gamma_0 u_2) \frac{1}{q^2} (\bar{u}_3 \gamma_0 u_1) - (\bar{u}_4 \gamma_q u_2) (\bar{u}_3 \gamma_q u_1) \frac{1}{q^2} - \not\delta (\bar{u}_4 \gamma_{tr} u_2) (\bar{u}_3 \gamma_{tr} u_1) \frac{1}{q^2}. \quad (8.22)$$

onde o símbolo $\not\delta$ representa a soma sôbre as duas direções transversais, γ_q é a componente da matriz γ na direção paralela a \vec{q} e γ_{tr} é a componente da matriz em qualquer uma das duas direções transversais. Em geral (por gauge-invariance) o elemento de matriz de: $\not{A} = q_0 \gamma_0 - \vec{q} \cdot \gamma$ é zero. No nosso caso particular isto vê-se facilmente:

$$(\bar{u}_4 \not{A} u_2) = (\bar{u}_4 (\not{p}_2 - \not{p}_4) u_2) = (\bar{u}_4 \not{p}_2 u_2) - (\bar{u}_4 \not{p}_4 u_2) = \bar{u}_4 m u_2 - m \bar{u}_4 u_2 = 0.$$

Assim:

$$(\bar{u}_4 \gamma_q u_2) = \frac{q_0}{|\vec{q}|} (\bar{u}_4 \gamma_0 u_2). \quad (8.23)$$

Introduzindo (8.23) em (8.22):

$$S = - (\bar{u}_4 \gamma_0 u_2) \frac{1}{q^2} (\bar{u}_3 \gamma_0 u_1) - \sum_{1,2} (\bar{u}_4 \gamma_{tr} u_2) (\bar{u}_3 \gamma_{tr} u_1) \frac{1}{q^2}. \quad (8.24)$$

Como $\frac{1}{q^2}$ é proporcional a um campo coulombiano no espaço dos momenta e γ_0 é a 4ª componente da densidade de corrente, o 1º termo de (8.24) representa uma interação coulombiana, e o 2º contém a interação por ondas transversais.

VIII.6 Interação de Breit.

Para elétrons de velocidade não muito grande, a interação relativista dá alguns termos de correção do potencial puramente coulombiano.

Vimos nos dois parágrafos anteriores que a amplitude da interação de dois elétrons é proporcional a

$(\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1)(\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) \frac{1}{q^2}$; $q = (q_0, \vec{q})$ é o momentum transferido entre os dois elétrons.

De $\not{q} = \not{p}_1 - \not{p}_3$ resulta, como já vimos:

$$(\bar{u}_3 \not{q} u_1) = 0,$$

o que nos permite escrever:

$$S = -\frac{1}{q^2} (\bar{u}_4 \gamma_0 u_2)(\bar{u}_3 \gamma_0 u_1) - \sum_{1,2} (\bar{u}_4 \gamma_{tr} u_2)(\bar{u}_3 \gamma_{tr} u_1) \frac{1}{q^2}. \quad (8.25)$$

Tomando-se a transformada de Fourier do primeiro termo vê-se que êle representa um potencial coulombiano puro. O segundo termo constitue, então, uma correção à interação coulombiana.

No caso de elétrons lentos:

$$E_0 = E_1 - E_3 \approx \left(mc^2 + \frac{p_1^2}{2m} \right) - \left(mc^2 + \frac{p_3^2}{2m} \right) = \frac{p_1^2 - p_3^2}{2m} =$$

$$= \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_3}{2m} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \sim \vec{v} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_3) = \vec{v} \cdot \vec{q},$$

$$q_0^2 \sim \frac{v^2}{c^2} \vec{q}^2.$$

Assim, podemos desprezar este termo diante de q^2 e substituir, com pequeno erro, q^2 por $-\vec{q}^2$ (recordemos que $q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2$).

Logo a correção ao termo coulombiano em S é:

$$\sum_{1,2} \frac{1}{q^2} (\bar{u}_3 \gamma_{tr} u_1) (\bar{u}_4 \gamma_{tr} u_2). \quad (8.26)$$

Agora:

$$(\bar{u}_3 \gamma_{tr} u_1) (u_3^+ \alpha_{tr} u_1).$$

Vimos em (III.1) que: $u = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}$ e que:

$$u_b \sim \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) u_a$$

na aproximação não-relativista.

Como:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

segue-se que:

$$(u_3^+ \vec{\sigma}_{tr} u_1) = (u_{3a}^*, u_{3b}^*) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}_{tr} \\ \vec{\sigma}_{tr} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1a} \\ u_{1b} \end{pmatrix} = u_{3a}^* \vec{\sigma}_{tr} u_{1b} + u_{3b}^* \vec{\sigma}_{tr} u_{1a} =$$

$$= \frac{1}{2m} \left\{ u_{3a}^* \left[\vec{\sigma}_{\text{tr}} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}_1) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}_3) \vec{\sigma}_{\text{tr}} \right] u_{1a} \right\}. \quad (8.27)$$

Chamemos:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_q + \sigma_{\text{tr}}, \quad (8.28)$$

onde:

$$\vec{\sigma}_q = \left(\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} \right) \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = \sigma_\ell \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}, \quad (8.29)$$

e

$$\vec{\sigma}_{\text{tr}} = (\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \sigma_j \vec{e}_1 + \sigma_k \vec{e}_2, \quad (8.30)$$

Os vetores \vec{e}_1 e \vec{e}_2 são definidos pelas relações:

$$(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) = (\vec{e}_1 \cdot \vec{q}) = (\vec{e}_2 \cdot \vec{q}) = 0; \quad \vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = 1.$$

É claro que:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) = \sigma_j \pi_j + \sigma_k \pi_k + \sigma_\ell \pi_\ell.$$

Assim, a componente j de $\vec{\sigma}_{\text{tr}} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}_1) + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}_3) \vec{\sigma}_{\text{tr}}$ é (observe-se que

$\pi \equiv p$):

$$\begin{aligned} & \sigma_j (\sigma_j p_{1j} + \sigma_k p_{1k} + \sigma_\ell p_{1\ell}) + (\sigma_j p_{3j} + \sigma_k p_{3k} + \sigma_\ell p_{3\ell}) \sigma_j = \\ & = (\vec{p}_1 + \vec{p}_3)_j + i \left[\sigma_\ell (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)_k - \sigma_k (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)_\ell \right]. \end{aligned}$$

Temos, pois:

$$\begin{aligned} & \sum_{1,2} \frac{1}{q^2} \left\{ u_{3a}^* \left[\frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_3}{2m} - i \frac{\vec{\sigma} \wedge (\vec{p}_1 - \vec{p}_3)}{2m} \right]_{\text{tr}} u_{1a} \right\} \cdot \\ & \left\{ u_{4a}^* \left[\frac{\vec{p}_2 + \vec{p}_4}{2m} - i \frac{\vec{\sigma} \wedge (\vec{p}_2 - \vec{p}_4)}{2m} \right]_{\text{tr}} u_{2a} \right\} \cdot \end{aligned} \quad (8.31)$$

Os primeiros termos dos dois parênteses representam correntes devidas ao movimento dos elétrons, transversal a \vec{q} , e os segundos representam as componentes do dipolo magnético. Os termos de correção são, pois, devidos às interações corrente-corrente, corrente-dipolo e dipolo-dipolo. São os termos de Breit.

A matriz da interação dipolo-dipolo é (lembrando que $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_3 = \vec{p}_4 - \vec{p}_2$) :

$$\sum_{1,2} \frac{(\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{q})_{tr} \cdot (\vec{\sigma}_2 \wedge \vec{q})_{tr}}{q^2} . \quad (8.32)$$

Como $\vec{\sigma} \wedge \vec{q}$ é zero para a componente σ_q de $\vec{\sigma}$, paralela a \vec{q} , este termo pode ser escrito:

$$\frac{(\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{q}) \cdot (\vec{\sigma}_2 \wedge \vec{q})}{q^2} \quad (8.33)$$

cuja transformada é:

$$(\vec{\sigma}_1 \wedge \vec{\nabla}) \cdot (\vec{\sigma}_2 \wedge \vec{\nabla}) \frac{1}{r} , \quad (8.34)$$

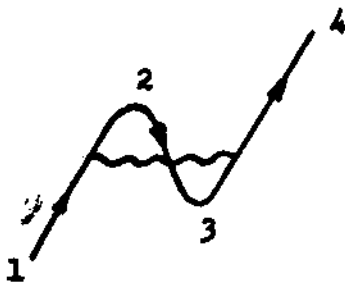
interação de dois dipolos magnéticos.

CAPÍTULO IX

O Problema da Renormalização

IX.1 Self-energia do elétron

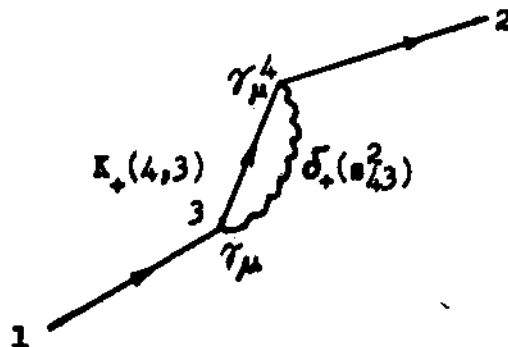
A troca de fótons virtuais entre dois elétrons conduz-nos ao seguinte diagrama possível (fig. 9.1): um elétron, que vai de 1 a 2, troca um fóton com um elétron do par criado em 3. Mas pela concepção de Feynman, a linha pode ser considerada como a de um elétron que caminha para o passado entre 2 e 3.



(fig. 9.1)

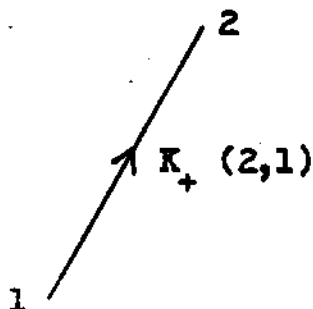
Assim, o propagador de um elétron livre, de 1 a 2, pode ser escrito:

$$K(2,1) = K_+(2,1) - \frac{ie^2}{\hbar c} \iint K_+(2,4) \gamma^\mu K_+(4,3) \gamma_\mu K_+(3,1) \delta_+(s_{43}^2) d^4x_4 d^4x_3. \quad (9.1)$$



(Fig. 9.2)

O primeiro termo é representado pelo diagrama da fig. 9.3.



(fig. 9.3)

O segundo termo, $K^{(1)}(2,1)$, está relacionado com a energia própria do elétron da seguinte maneira. Suponhamos que em 1 o elétron tenha função de onda $f(1)$. Depois de um longo intervalo de tempo, a amplitude para que em 2, a função de onda seja $f(2)$, é, como vimos antes:

$$M^{(1)} = \iint \bar{f}(2) \beta K^{(1)}(2,1) \beta f(1) d^3x_1 d^3x_2 =$$

$$= - \frac{1e^2}{\hbar c} \iint \bar{f}(4) \gamma^\mu K_+(4,3) \gamma_\mu f(3) \delta_+(s_{43}^2) d^4x_3 d^4x_4. \quad (9.2)$$

Se $f(1)$ é uma onda plana $u e^{-\frac{1}{\hbar} p x_1}$, obtem-se:

$$M^{(1)} = - \frac{1e^2}{\hbar c} \iint (\bar{u} \gamma^\mu K_+(4,3) \gamma_\mu u) e^{\frac{1}{\hbar} p \cdot (x_4 - x_3)} \delta_+(s_{43}^2) d^4x_3 d^4x_4. \quad (9.3)$$

Como $K_+(4,3)$ só depende da diferença das coordenadas, é claro que a integração sobre x_4 dá um resultado independente de x_3 . Logo, $M^{(1)}$ é proporcional a $V T$ se f for normalizada a 1 na unidade de volume. Como a normalização que adotamos é:

$$\int f^* f d^3x = \frac{2E}{\text{cm}^3} \cdot V,$$

devemos dividir $M^{(1)}$ por esta expressão.

Por outro lado, o efeito da interação do elétron com o seu campo de radiação é mudar a fase da função de onda, com um fator de fase proporcional ao tempo de duração da perturbação, de modo que, se em 1 a função de onda é proporcional a $e^{-\frac{i}{\hbar} E t_1}$, em 2 será proporcional a $e^{-\frac{i}{\hbar} E t_2}$ e $e^{-\frac{i}{\hbar} (\Delta E) T}$, onde $T = t_2 - t_1$, $\Delta E = E_2 - E_1$.

Como a perturbação é pequena:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} (\Delta E) T} \sim 1 - \frac{i}{\hbar} (\Delta E) T$$

Assim:

$$\frac{1}{\hbar} (\Delta E) T = - \frac{1e^2}{\hbar c} \iint (\bar{u} \gamma^\mu K_{+(4,3)} \gamma_\mu u) e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot (x_4 - x_3)} \delta_+(s_{43}^2) d^4 x_3 d^4 x_4,$$

de onde:

$$2E\Delta E = - e^2 \int (\bar{u} \gamma^\mu K_{+(4,3)} \gamma_\mu u) e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot (x_4 - x_3)} \delta_+(s_{43}^2) d^4 x_4, \quad (9.4)$$

pois a integral sobre x_3 dá VTc.

Como:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

$$2E\Delta E = 2m \Delta m c^4,$$

sendo p o mesmo em 1 e 2, a mudança em energia pode ser atribuída a uma mudança na massa do elétron.

Dáí, passando para o espaço dos momenta, obtem-se:

$$\Delta m = \frac{e^2 \hbar^2}{2mc^4} \int \left(\bar{u} \gamma^\mu \frac{1\hbar}{\not{p} - \not{k} - mc} \gamma_\mu u \right) \frac{4\pi}{k^2} \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4}. \quad (9.5)$$

Agora:

$$\bar{u} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - mc} \gamma_\mu u = \bar{u} \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + mc) \gamma_\mu}{p^2 - 2pk + k^2 - m^2 c^2} u = \bar{u} \frac{2(mc + \not{k})}{k^2 - 2pk} u ,$$

$$\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = - 2\not{p} , \quad \not{p} u = mc u .$$

Portanto:

$$\Delta m = \frac{4\pi e^2 \hbar^2 i \hbar}{(2\pi \hbar)^4 mc^4} \int \bar{u} \frac{mc + \not{k}}{k^2 - 2pk} u \frac{d^4 k}{k^2} \quad (9.6)$$

Esta integral diverge. Feynman introduz um fator de corte:

$$C(k^2) = \frac{-\Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} , \quad (9.7)$$

de modo que o propagador $\frac{1}{k^2}$ é substituído por:

$$\frac{C(k^2)}{k^2} = - \frac{\Lambda^2}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} , \quad (9.8)$$

que corresponde a subtrair do propagador $\frac{1}{k^2}$ do fóton, o propagador de um fóton de massa Λ/c . Podemos escrever:

$$\frac{C(k^2)}{k^2} = - \int_0^{\Lambda^2} \frac{dL}{(k^2 - L^2)^2} . \quad (9.9)$$

Assim, a integral de Δm acima, (9.6), é substituída por:

$$\int \bar{u} \frac{mc + \not{k}}{k^2 - 2pk} u \frac{d^4 k}{k^2} \frac{-\Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} . \quad (9.10)$$

Integração de (9.10)

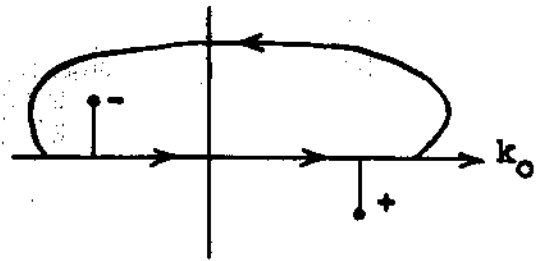
Consideremos a seguinte integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(k^2 + i\epsilon - L)^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 k \, dk_0}{[k_0^2 + i\epsilon - (\vec{k}^2 + L)]^3} \quad (9.11)$$

Para $\epsilon \ll k^2 + L$, os polos da integral são $k_0 = \pm \left(\sqrt{\vec{k}^2 + L} - i\epsilon \right)$.

Integrando no semi-plano superior:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{[k_0^2 + i\epsilon - (\vec{k}^2 + L)]^3} = \frac{2\pi i}{-2\sqrt{\vec{k}^2 + L}}$$



Derivando duas vezes em relação a L:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{[k_0^2 + i\epsilon - (\vec{k}^2 + L)]^3} = \frac{6\pi}{16i} \frac{1}{(\vec{k}^2 + L)^{5/2}}$$

(fig. 9.4)

Assim:

$$I = \frac{6\pi}{16i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 k}{(\vec{k}^2 + L)^{5/2}} = \frac{24\pi^2}{16i} \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{(\vec{k}^2 + L)^{5/2}} = \frac{24\pi^2}{16i} \frac{1}{3L}$$

Substituindo k por $k-p$ em (9.11), vem:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 k}{(k^2 - 2k \cdot p + i\epsilon - \Delta)^3} = \frac{\pi^2}{2i} \frac{1}{p^2 + \Delta}$$

pois a integral é a mesma e $\Delta = L - p^2$.

É claro que:

$$I_{\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0 d^4 k}{(k^2 + i\epsilon - L)^3} = 0$$

Dai resulta que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{\sigma} d^4 k}{(k^2 - 2k_{\sigma} p + i\epsilon - \Delta)^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_{\sigma} + p_{\sigma}) d^4 k}{(k^2 + i\epsilon - L)^3} = \frac{p_{\sigma}}{2i} \frac{\pi^2}{p^2 + \Delta} .$$

Logo:

$$I(1; p_{\sigma}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1; k_{\sigma}) d^4 k}{(k^2 - 2k_{\sigma} p + i\epsilon - \Delta)^3} = \frac{\pi^2}{2i} \frac{(1; p_{\sigma})}{p^2 + \Delta} . \quad (9.12)$$

Ora, a integral da energia própria do elétron, com o fator de corte, como vimos em (9.10), é da forma:

$$J = \int_0^{\Lambda^2} dL \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1; k_{\sigma})}{(k^2 - 2kp)(k^2 - L^2)} \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} . \quad (9.13)$$

Utilizando a integral:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2} ,$$

donde:

$$\frac{1}{ab^2} = \int_0^1 \frac{2(1-x)dx}{[ax + b(1-x)]^3} ,$$

podemos pôr:

$$\frac{1}{(k^2 - 2kp)(k^2 - L)^2} = \int_0^1 \frac{2(1-x)dx}{[k^2 - 2kpx - L(1-x)]^3} .$$

Portanto:

$$J = \int_0^{\Lambda^2} dL \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{(1; k_{\sigma}) 2(1-x)dx}{[k^2 - 2kpx - L(1-x)]^3} . \quad (9.14)$$

Integrando sôbre k segundo o resultado obtido para $I(1; p_\sigma)$, onde se substitue p por px e Δ por $L(1-x)$, vem:

$$J = \int_0^{\Lambda^2} dL \int_0^1 \frac{(1; xp_\sigma) 2(1-x) dx}{32\pi^2 \hbar^4 [x^2 p^2 + L(1-x)]}, \text{ onde } p^2 = m^2 c^2. \quad (9.15)$$

A integração sôbre L dá:

$$J = \frac{2}{32\pi^2 \hbar^4} \int_0^1 dx (1; xp_\sigma) \log \left[\frac{(1-x)\Lambda^2 + m^2 x^2 c^2}{m^2 x^2 c^2} \right]. \quad (9.16)$$

Para $\Lambda^2 \gg m^2 c^2$, podemos desprezar $m^2 c^2 x^2$ no numerador. Quando x é vizinho de 1, isso não é mais verdade, mas o êrro cometido nessa aproximação é pequeno porque o intervalo em que $x \sim 1$ é pequeno.

Como:

$$\int_0^1 \log \frac{1-x}{x^2} dx = 1, \quad \int_0^1 \frac{1}{x} \log \frac{1-x}{x^2} dx = -\frac{1}{4},$$

vem, de (9.16):

$$J \approx \frac{1}{32\pi^2 \hbar^4} \left[2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2 c^2} + 2; p_\sigma \left(\log \frac{\Lambda^2}{m^2 c^2} - \frac{1}{2} \right) \right], \Lambda^2 \gg m^2 c^2.$$

Logo:

$$c^2 \Delta_m = \frac{1}{8\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left\{ \bar{u} \left[\left(2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2 c^2} + 2 \right) + \frac{\not{v}}{mc} \left(\log \frac{\Lambda^2}{m^2 c^2} - \frac{1}{2} \right) \right] u \right\} \quad (9.17)$$

Agora: $\not{v}u = mcu$; $\bar{u}u = 2mc^2$,

logo:

$$\frac{\Delta_m}{m} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{3}{2} \log \frac{\Lambda^2}{m^2 c^2} + \frac{3}{4} \right), \quad (9.18)$$

que dá um pequeno valor para Δ_m/m , pois $e^2/2\pi\hbar c \sim 10^{-3}$, e isto,

mesmo para $\Lambda \gg mc$.

IX.2 Renormalização de massa

Interpretamos, agora, a expressão (9.18). Qualquer que seja o valor de Δm , êle já deve estar incorporado na massa medida experimentalmente. Assim:

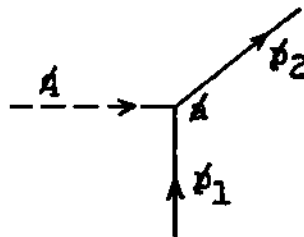
$$m_{\text{exp}} = m_{\text{teór}} + \Delta m \quad (9.19)$$

e é claro que no valor de m_{exp} já está incluída a self-energia; a $m_{\text{teór}}$ (sem energia própria) não pode ser determinada. Isto nos conduz a considerar que uma teoria que use $m_{\text{teór}}$ e calcule a self-energia é equivalente a uma teoria que use m_{exp} , considere a self-energia e subtraia Δm computada para um elétron livre. No caso do elétron livre, a self-energia cancela $c^2 \Delta m$ e ficamos com uma teoria correta, onde a massa é m_{exp} . Quando o elétron não é livre, a diferença entre a self-energia e Δmc^2 dá correções radiativas.

IX.3 Correções radiativas no espalhamento por um potencial externo.

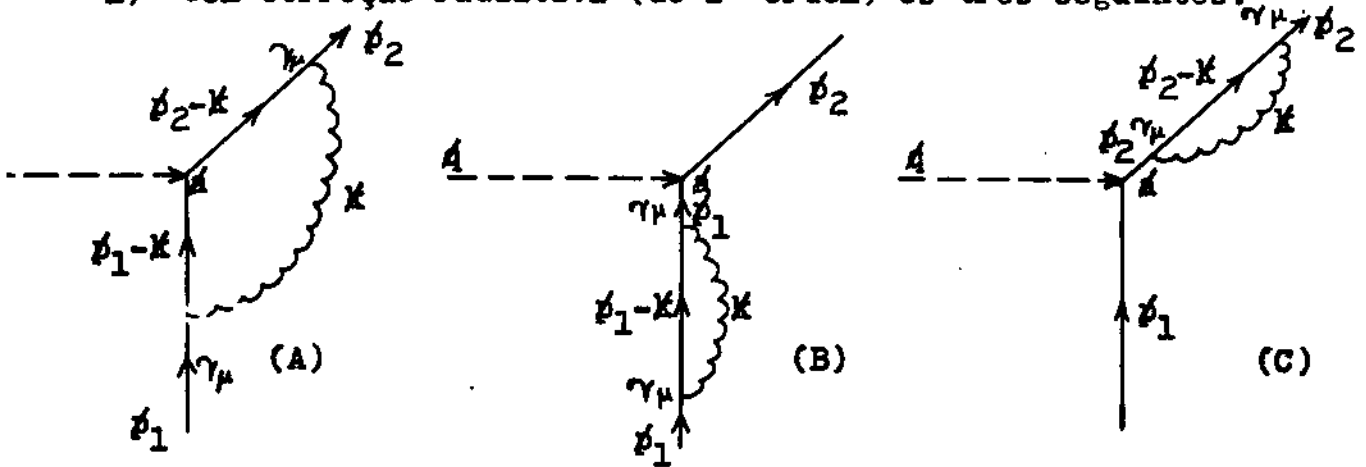
Os diagramas são:

1) sem correção radiativa:



(fig. 9.5)

2) Com correção radiativa (de 1ª ordem) os três seguintes:



(fig. 9.6)

A amplitude do diagrama (A) é:

$$\begin{aligned}
 M_A &\sim \int (\bar{u}_2 \gamma_\mu \frac{1}{p_2 - k - mc} \not{A} \frac{1}{p_1 - k - mc} \gamma_\mu u_1) \frac{1}{k^2} \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} = \\
 &= \int \frac{(\bar{u}_2 \gamma_\mu (\not{p}_2 - k + mc) \not{A} (\not{p}_1 - k + mc) \gamma_\mu u_1)}{(k^2 - 2p_2 k)(k^2 - 2p_1 k)} \left(\frac{-\Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \right) \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \cdot \quad (9.20)
 \end{aligned}$$

A integral também diverge para pequenos k (catástrofe do infra-vermelho), mas isto pode ser resolvido sem dificuldades. Substituímos k^2 no denominador (ao lado de $(2\pi\hbar)^4$) por $k^2 - \lambda_{\min}^2$, onde $\lambda_{\min} \ll mc$, que interpretaremos depois.

Agora:

$$\begin{aligned}
 \int_{\lambda_{\min}^2}^{\Lambda^2} \frac{dL}{(k^2 - L)^2} &= \frac{1}{k^2 - \lambda_{\min}^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = \frac{\lambda_{\min}^2 - \Lambda^2}{(k^2 - \lambda_{\min}^2)(k^2 - \Lambda^2)} = \\
 &\approx \frac{-\Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \frac{1}{k^2 - \lambda_{\min}^2} \cdot
 \end{aligned}$$

As integrais de (A) são, pois, da forma:

$$\int_{\lambda_{\min}}^{\Lambda} dL \frac{(1; k_{\sigma}; k_{\sigma} k_r)}{(k^2 - 2kp_1)(k^2 - 2kp_2)(k^2 - L)^2} \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} .$$

Usando a identidade:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2} ,$$

vem:

$$\frac{1}{(k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k)} = \int_0^1 \frac{dy}{(k^2 - 2p_y \cdot k)^2} ,$$

onde: $p_y = yp_1 + (1-y)p_2 .$

O resultado da integração para o elemento de (A) é:

$$M_A = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left\{ 2 \left(\log \frac{mc}{\lambda_{\min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \right) + \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{4}{\operatorname{tg} 2\theta} \right. \\ \left. \cdot \int_0^{\theta} x \operatorname{tg} x dx \right\} a + \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left[\frac{1}{4mc} (dA - dA) \frac{2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} + D dA \right] , \quad (9.21)$$

onde D depende de Λ :

$$D = \log \frac{\Lambda}{mc} + \frac{9}{4} - 2 \log \frac{mc}{\lambda_{\min}} \quad (9.22)$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{q^2}{4m^2 c^2} , \quad q = p_2 - p_1 .$$

Vemos, pois, que:

$$M_A = M_{AC} + \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} D_A \quad (9.23)$$

e que M_{AC} converge para $\Lambda \rightarrow \infty$, pois não depende de Λ ; D é a parte divergente. Notemos que M_{AC} tende para zero quando $q \rightarrow 0$; como D não contém q , vemos que a parte divergente de M_A é a que sobrevive quando fazemos $q \rightarrow 0$. Isto é de esperar-se. Em M_A temos o fator

$$\frac{1}{p_2 - k - mc}, \text{ que podemos escrever como } \frac{1}{p_1 + (p_2 - p_1) - k - mc}.$$

Agora o teorema:

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots, \quad (9.24)$$

cuja demonstração é a seguinte:

$$A \frac{1}{A+B} = 1 - B \frac{1}{A} + B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots,$$

$$B \frac{1}{A+B} = B \frac{1}{A} - B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots$$

$$\text{donde: } (A+B) \frac{1}{A+B} = 1,$$

dá lugar a que possamos pôr:

$$\frac{1}{p_1 + (p_2 - p_1) - k - mc} = \frac{1}{p_1 - k - mc} - \frac{1}{p_1 - k - mc} (p_2 - p_1) \frac{1}{p_1 - k - mc} + \dots$$

O primeiro termo do segundo membro, substituído em (A) dá uma integral em k logicamente divergente; os restantes termos dão integrais convergentes, proporcionais a potências de $p_2 - p_1$. A parte convergente da soma $M = M_A + M_B + M_C$ pode ser escrita da seguinte maneira aproximada, quando q é pequeno.

$$M_C \sim \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \left[\frac{1}{2mc} (A A - A A) + \frac{4q^2}{3m^2 c^2} A \left(\log \frac{mc}{\lambda_{\min}} - \frac{3}{8} \right) \right]. \quad (9.25)$$

O termo em $\hat{A}\hat{A} - \hat{A}\hat{A}$ representa uma contribuição do momento magnético do elétron. De fato:

$$\hat{A}\hat{A} - \hat{A}\hat{A} = \gamma^\mu \gamma^\nu (a_\mu q_\nu - q_\mu a_\nu),$$

ou:

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{A} - \hat{A}\hat{A} &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) (a_\mu q_\nu - q_\mu a_\nu) = \\ &= -i\sigma^{\mu\nu} (a_\mu \nabla_\nu - \nabla_\mu a_\nu) = -i\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Agora, sendo: $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, vem:

$$\frac{e^2}{4\pi\hbar c} \frac{e\hbar}{2mc} (\hat{A}\hat{A} - \hat{A}\hat{A}) = -\frac{ie\hbar}{2mc} \frac{\alpha}{2} \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} (a_\mu q_\nu - a_\nu q_\mu). (*)$$

Por outro lado, vimos que uma interação $e\hat{A}$ contribue uma amplitude de espalhamento, em primeira aproximação:

$$- \frac{ie}{\hbar c} \bar{u}(p_2) \hat{A} (\not{p}_2 - \not{p}_1) u(p_1),$$

então, uma interação $\Delta_\mu \frac{e\hbar}{2mc} \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ contribue, em primeira aproximação, uma amplitude:

$$- \frac{1}{\hbar c} \bar{u}(p_2) \Delta_\mu \frac{e\hbar}{2mc} \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} (a_\mu q_\nu - a_\nu q_\mu) u(p_1), (**)$$

porque a transformada de Fourier de $F_{\mu\nu}$ é:

$$F_{\mu\nu}(x) = \int d^4q e^{-iqx} F_{\mu\nu}(q) = -i \int d^4q e^{-iqx} (q_\mu a_\nu - q_\nu a_\mu),$$

se:

$$A_\mu(x) = \int d^4q e^{-iqx} a_\mu(q).$$

Comparando (*) com (**) vemos que a contribuição do termo $\hat{A}\hat{A} - \hat{A}\hat{A}$ ao espalhamento, pode ser interpretada como devida a um momento magnético anômalo do elétron:

$$\Delta\mu = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{e^2}{2\pi\hbar c}.$$

Até segunda aproximação, o momento magnético do elétron é, pois:

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \left(1 + \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1}{2\pi} \right). \quad (9.26)$$

IX.4 Renormalização da função de onda.

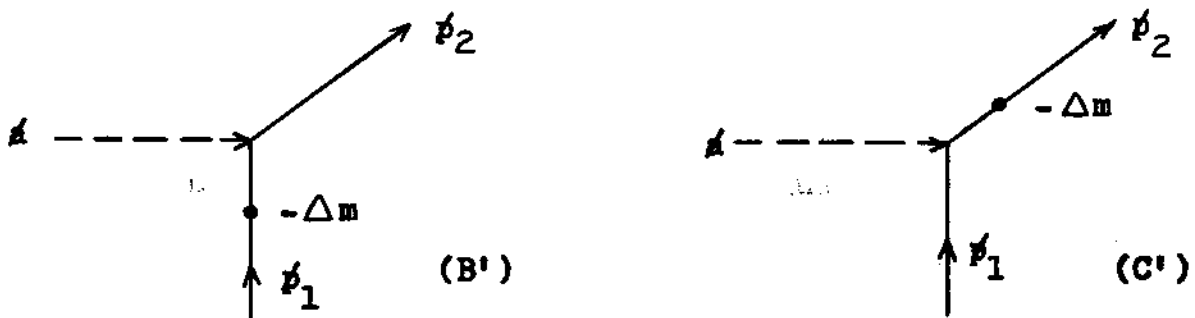
Vimos no parágrafo anterior que quando uma partícula é espalhada por um potencial, o efeito principal é o de A e do diagrama (A), que forneciam o termo de correção (9.21). Resta-nos, ainda, considerar os diagramas (B) e (C) e levar em conta o princípio da renormalização. Este último diz que de cada gráfico com self-energia devemos subtrair Δm . Isto se vê da equação de Dirac:

$$(i\hbar \not{\nabla} - mc) \psi = \frac{e}{c} A$$

posta em termos da massa experimental $m_{\text{exp}} = m + \Delta m$,

$$(i\hbar \not{\nabla} - m_{\text{exp}} c) \psi = \frac{e}{c} (A - \Delta mc) \psi.$$

Assim, aos diagramas (B) e (C) devemos somar os seguintes:



(fig. 9.7)

A amplitude de (B) é:

$$M_B \sim \int \bar{u}_2 \frac{1}{\not{p}_1 - mc} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k} - mc} \gamma^\mu u_1 \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda_{\min}^2} \frac{-\Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \quad (9.27)$$

e de (B') é:

$$M_{B'} \sim -\bar{u}_2 \not{\Delta} \frac{1}{\not{p}_1 - mc} \Delta u_1. \quad (9.28)$$

A soma de (B) e (B') dá lugar a 0/0, porque Δm cancela a integral em M_B , mas por outro lado $\frac{1}{\not{p}_1 - mc}$ aplicado a u_1 dá zero no denominador. Análogamente para (C) e (C'). A ambiguidade é eliminada considerando que, como um elétron nunca é livre, $p^2 \neq m^2 c^2$, podemos pôr:

$$p^2 = m^2 c^2 (1 + \epsilon)^2,$$

onde

$$m c^2 \epsilon = \frac{\hbar}{T}$$

e T é o intervalo entre dois espalhamentos sucessivos. Quando $T \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$.

Façamos:

$$\not{p} = (1 + \epsilon) \not{p}_0,$$

onde \not{p}_0 se refere a um elétron livre. Se \not{A} e \not{B} são as transformadas dos potenciais que realizam espalhamento nos pontos a e b, então a amplitude para o elétron ir de a a b, sem espalhamento, é:

$$\not{B} \frac{1}{\not{p} - mc} \not{A} = \not{B} \frac{\not{p} + mc}{p^2 - m^2 c^2} \not{A} = \not{B} \frac{\not{p} + mc}{2m^2 c^2 \epsilon} \not{A},$$

a menos de ϵ^2 .

Levando em conta os diagramas (B), (C), (B') e (C'), a amplitude é (pois entre \not{A} e \not{B} os diagramas (B) e (C) são indistinguíveis):

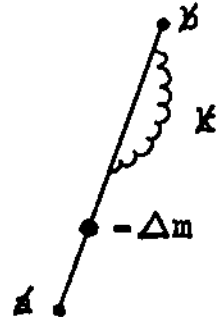
$$\frac{4\pi e^2}{\hbar c} \int \not{B} \frac{1}{\not{p}-mc} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}-\not{k}-mc} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}-mc} \not{A} \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda_{\min}^2} \frac{-\Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} -$$

$$- \not{B} \frac{1}{\not{p}-mc} \Delta m \frac{1}{\not{p}-mc} \not{A} .$$

(9.29)



Sem perturbação



Com perturbação de self-ação e correção de massa.

(fig. 9.8)

Pelo resultado do teorema (9.24), a matriz (9.29) fica:

$$\frac{4\pi e^2}{\hbar c} \int \not{B} \frac{\not{p} + mc}{2m^2 c^2 \epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_0 - \not{k} - mc} \gamma^\mu \frac{\not{p} + mc}{2m^2 c^2 \epsilon} \not{A} \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda_{\min}^2} \frac{-\Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} -$$

$$- \frac{4\pi e^2}{\hbar c} \int \not{B} \frac{\not{p} + mc}{2m^2 c^2 \epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_0 - \not{k} - mc} \not{p}_0 \frac{1}{\not{p}_0 - \not{k} - mc} \gamma^\mu \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda_{\min}^2} \frac{\not{p} + mc}{2m^2 c^2} \not{A} \frac{-\Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} .$$

$$\cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} - \not{B} \frac{\not{p} + mc}{2m^2 c^2 \epsilon} \Delta m \frac{\not{p} + mc}{2m^2 c^2 \epsilon} \not{A} .$$

(9.30)

Resulta:

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} D \not{p} \frac{\not{p} + mc}{2m^2 c^2 \epsilon} \not{p}_0 \frac{\not{p} + mc}{2m^2 c^2} \not{A} . \quad (9.31)$$

definido em (9.22).

No numerador podemos substituir p por p_0 , pois estamos considerando no desenvolvimento até termos de ordem ϵ , e obtemos:

$$(\not{p}_0 + mc) \not{p}_0 (\not{p}_0 + mc) = 2m^2 c^2 (\not{p}_0 + mc) .$$

Assim, de (9.31):

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} D \not{p} \frac{\not{p}_0 + mc}{2m^2 c^2 \epsilon} \not{A} . \quad (9.32)$$

Mas $\not{p} \frac{\not{p}_0 + mc}{2m^2 c^2 \epsilon} \not{A}$ é a amplitude do diagrama não perturbado da fig. 9.8. Logo, o termo de correção dos diagramas (B), (C), (B') e (C') obtem-se, substituindo-se \not{A} por $-\frac{e^2}{2\pi\hbar c} D\not{A}$.

Portanto, o termo completo de correção, devido à self-ação e à correção de massa é:

$$M_A + M_B + M_C + M_{B'} + M_{C'} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left\{ 2 \left(\log \frac{mc}{\lambda_{\min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \right) + \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{4}{\operatorname{tg} 2\theta} \int_0^\theta x \operatorname{tg} x dx \right\} \not{A} + \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1}{4mc} (\not{A}\not{A} - \not{A}\not{A}) \frac{2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} . \quad (9.33)$$

O diagrama (A) chama-se o diagrama-vértice. Os diagramas (B), (B'), (C) e (C') chamam-se os diagramas da renormalização da função de onda (que é claro pelo método de cálculo utilizado).

IX.5 Solução da catástrofe do infra-vermelho.

A secção de choque para espalhamento pelo potencial \hat{A} , incluindo as correções radiativas em $\frac{e^2}{\hbar c}$, será:

$$\sigma = \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left[2 \left(\log \frac{mc}{\lambda_{\min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{têrmos inde} \\ \text{pendentes de} \\ \lambda_{\min} \end{array} \right) \right] \right\}^2$$

$$= \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left[\left(2 \log \frac{mc}{\lambda_{\min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{têrmos inde} \\ \text{pendentes de} \\ \text{min} \end{array} \right) \right] \right\},$$

(9.34)

onde σ_0 é a secção de choque sem correção radiativa. σ diverge logaritmicamente para $\lambda_{\min} \rightarrow 0$. Esta divergência resulta do fato de estarmos respondendo a uma pergunta mal feita: qual é a probabilidade de espalhamento sem emissão de fótons? Na realidade, como a carga muda de momentum ao ser espalhada, seu campo eletromagnético muda, o que é acompanhado pela emissão de radiação. Na verdade, a pergunta deve ser: qual é a probabilidade de espalhamento sem emissão de fótons com energia maior que k_0 ? Pois abaixo de k_0 , a resolução da experiência não permite sua detecção.

Assim, o que devemos calcular para responder à última pergunta é:

secção de choque de espalhamento sem emissão de fótons +
 + " " " " " com " " 1 fóton de ener-
 gia $< k_0$ +

+ secção de choque de espalhamento com emissão de 2 fótons de energia $< k_0 + \text{etc.}$.

Em aproximação $\frac{e^2}{\hbar c}$, devemos calcular só os dois primeiros termos. Ora, no estudo do Bremsstrahlung, vimos que a secção de choque para emissão de 1 fóton com energia $\ll mc^2$ é:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2 d\Omega_\omega}{4\pi} \left| \frac{p_1 \cdot e}{p_1 \cdot k} - \frac{p_2 \cdot e}{p_2 \cdot k} \right|^2 \frac{d\omega}{\omega} . \quad (9.35)$$

Somando sôbre as polarizações, integrando sôbre Ω e ω , obtem-se (integrando de λ_{\min} a k_0):

$$\sigma_{1 \text{ fóton}} = \sigma_0 \frac{2e^2}{\hbar c} \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) \log \frac{k_0}{\lambda_{\min}} . \quad (9.36)$$

Logo, a probabilidade de espalhamento sem emissão de fóton de energia $> k_0$ é:

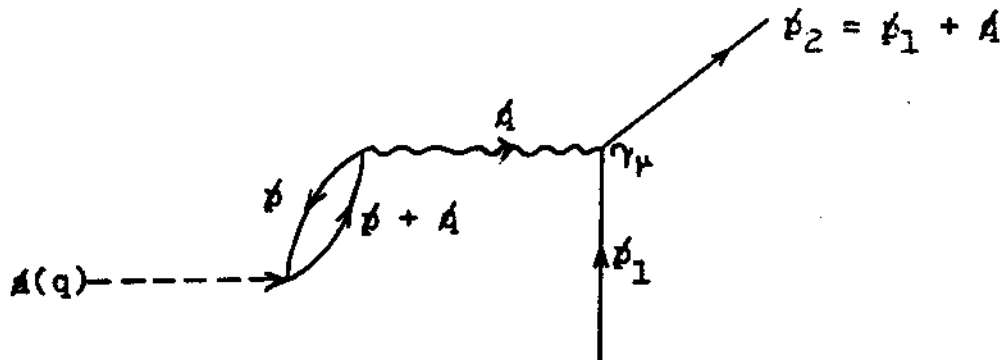
$$\sigma = \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{2e^2}{\hbar c} \frac{1}{\pi} \left(\log \frac{mc}{\lambda_{\min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) + \frac{2e^2}{\hbar c \pi} \log \frac{k_0}{\lambda_{\min}} \cdot \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) \right\} = \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{2e^2}{\hbar c \pi} \log \frac{mc}{k_0} \left(1 - \frac{2\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{térmos in-} \\ \text{dependentes} \\ \text{de } \lambda_{\min} \end{array} \right) \right\} , \quad (9.37)$$

que é o resultado desejado para a "catástrofe do infra-vermelho".

IX.6 Diagramas Fechados. Renormalização da carga. Polarização do vácuo.

Um diagrama que foi omitido no estudo da correção radia-

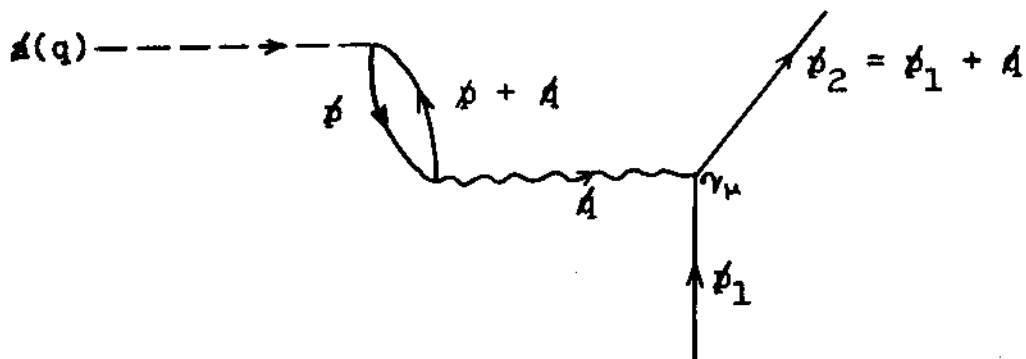
tiva ao espalhamento de elétrons por um potencial dado é o seguinte:



(fig. 9.9)

O potencial A , em vez de atuar diretamente no elétron cria um par elétron-pósitron. Este par se aniquila e emite um fóton que é absorvido pelo elétron inicial, que passa ao estado final.

Outro diagrama possível é obtido invertendo a ordem no tempo do diagrama do par e considerando que este primeiro é criado com emissão de um fóton e depois aniquilado pelo campo externo.



(fig. 9.10)

Tais diagramas de pares chamam-se diagramas fechados (closed loops).

A amplitude do processo pode ser escrita inspecionando o diagrama e é igual a:

$$\frac{4\pi e^2}{\hbar c} \sum_{\substack{\text{estados} \\ \text{de spin} \\ \text{de } u}} \int (\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1) \frac{1}{q^2} \left(\bar{u} \frac{1}{\not{p}-mc} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}+\not{q}-mc} \not{A} u \right) d^4p \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} . \quad (9.38)$$

A integração é sobre os momentos p do pósitron virtual e a soma sobre os estados de spin deste. A soma sobre os quatro estados de spin leva em conta os dois diagramas. Logo:

$$\frac{4\pi e^2}{\hbar c} \int (\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1) \frac{1}{q^2} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p}-mc} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}+\not{q}-mc} \not{A} \right] \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} d^4p , \quad (9.39)$$

que contém ambos os diagramas. A integral diverge. Subtrae-se dela a integral obtida substituindo a massa m por uma massa auxiliar $M \gg m$:

$$(\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1) a_\mu \frac{e^2}{\hbar c \pi} \left[-\frac{1}{3} \log \left(\frac{M}{m} \right)^2 - \left(1 - \frac{\theta}{\text{tg } 2\theta} \right) \frac{4m^2 c^2 + 2q^2}{3q^2} - \frac{1}{9} \right] ,$$

$$q^2 = 4m^2 c^2 \text{sen}^2 \theta .$$

O termo divergente é:

$$\frac{e^2}{\hbar c \pi} \left[\bar{u}_2 \not{A} u_1 \right] \left[-\frac{1}{3} \log \left(\frac{M}{m} \right)^2 \right] .$$

Como o termo de espalhamento sem correção radiativa é $(\bar{u}_2 \not{A} u_1)$ vemos que o potencial efetivo para o espalhamento, incluindo a correção radiativa é:

$$A_R = A \left[1 - \frac{e^2}{\hbar c \pi} \frac{1}{3} \log \left(\frac{M}{m} \right)^2 \right],$$

isto é, o termo divergente pode ser incorporado no termo de ordem zero $\frac{e^2}{\hbar c}$. Isto pode ser interpretado como renormalização do potencial externo. Como a equação do campo externo é:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^{\text{ext}}}{\partial x_\nu} = 4\pi j_\mu^{\text{ext}},$$

vem, no espaço dos momentos:

$$(g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) a_\mu = 4\pi j_\nu,$$

ou:

$$(g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) a_R^\mu = 4\pi j_R^\nu,$$

onde:

$$j_R^\nu = j^\nu \left[1 - \frac{e^2}{\hbar c \pi} \frac{1}{3} \log \left(\frac{M}{m} \right)^2 \right].$$

Isto significa que há uma renormalização da carga:

$$e_{\text{exp}} = e_{\text{teór}} + \Delta e,$$

onde:

$$\Delta e^2 = - \frac{e^2}{3\pi\hbar c} \log \left(\frac{M}{m} \right)^2.$$

O termo $\frac{2}{15} \frac{e^2}{\pi} q^2 A$ representa uma perturbação $\frac{2}{15} \frac{e^2}{\hbar} \nabla^2 V$, que dá lugar a uma contribuição ao "Lamb-shift" de 27 megaciclos. Chama-se a polarização do vácuo.

Apêndice

A. Funções de Green.

Seja:

$$\left[1 \frac{\partial}{\partial t} - H(q) \right] K^{(0)}(q, t; q', t') = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$K^{(0)}(q, t; q', t) = \delta(q - q').$$

$$\text{Chamemos: } \epsilon(t - t') = \text{sinal}(t - t') = \begin{cases} 1, t > t' \\ -1, t < t' \end{cases}.$$

Definamos:

$$\begin{aligned} K_{\text{ret}}(q, t; q', t') &= \frac{1 + \epsilon(t - t')}{2} K^{(0)}(q, t; q', t') = \\ &= \begin{cases} K_0, t > t' \\ 0, t < t' \end{cases} \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} K_{\text{ret}}(q, t; q', t) &= \lim_{t \rightarrow t'+} \frac{1 + \epsilon(t - t')}{2} K^{(0)}(q, t; q', t') = \\ &= \delta(q - q'). \quad (\text{A.2}') \end{aligned}$$

Definamos ainda:

$$\begin{aligned} K_{\text{av}}(q, t; q', t') &= - \frac{1 - \epsilon(t - t')}{2} K^{(0)}(q, t; q', t') = \\ &= \begin{cases} 0, t > t' \\ -K_0, t < t' \end{cases} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

e:

$$K_{av}(q, t; q', t) = \lim_{t \rightarrow t'_-} K_{av}(q, t; q', t') = -\delta(q - q'). \quad (\text{A.3}')$$

Equações para K_{ret} e K_{av} :

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - H(q) \right] K_{ret}(q, t; q', t') = i\delta(q, t; q', t'), \quad (\text{A.4})$$

$$\left[i \frac{\partial}{\partial t} - H(q) \right] K_{av}(q, t; q', t') = i\delta(q, t; q', t'). \quad (\text{A.5})$$

Vemos que:

$$K^{(0)}(q, t; q', t') = \left[K_{ret}(q, t; q', t') - K_{av}(q, t; q', t') \right]. \quad (\text{A.6})$$

Pode-se ainda introduzir o K_{lig} assim:

$$K_{lig}(q, t; q', t') = \frac{1}{2} \left[K_{ret} + K_{av} \right] = \frac{1}{2} \epsilon(t - t') K^{(0)}(q, t; q', t'). \quad (\text{A.7})$$

$K^{(0)}$ tem limite para $t \rightarrow t'$, que é $\delta(q - q')$; K_{lig} não tem limite para $t \rightarrow t'$. (pela direita é $\frac{1}{2} \delta(q - q')$, pela esquerda é $-\frac{1}{2} \delta(q - q')$).

No caso em que H não depende de t , $K^{(0)}$ depende de t e t' na diferença $t - t'$:

$$K^{(0)}(q, \tau; q', 0), \text{ onde } \tau = t - t'. \quad (\text{A.8})$$

e temos:

$$\left[i \frac{\partial}{\partial \tau} - H(q) \right] K^{(0)}(q, \tau; q', 0) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Mude τ em $-\tau$:

$$\left[-i \frac{\partial}{\partial \tau} - H(q) \right] K^{(0)}(q, -\tau ; q', 0) = 0 .$$

$K^{(0)}$ é simétrica em q e q' , logo:

$$\left[-i \frac{\partial}{\partial \tau} - H(q') \right] K^{(0)}(q', -\tau ; q, 0) = 0 .$$

Daf:

$$\left[i \frac{\partial}{\partial \tau} - H(q') \right] K^{(0)*}(q', -\tau ; q, 0) = 0 .$$

Como para $\tau = 0$, $K^{(0)}(q, 0 ; q', 0) = \delta(q - q') = K^{(0)*}(q', 0 ; q, 0)$ e como $K^{(0)}$ e $K^{(0)*}$ satisfazem a mesma equação, temos:

$$K^{(0)}(q, \tau ; q', 0) = K^{(0)*}(q', -\tau ; q, 0) . \quad (\text{A.10})$$

Em geral:

$$K^{(0)}(q, t ; q', t') = K^{(0)*}(q', t' ; q, t) . \quad (\text{A.10}')$$

Isto pode ser visto também pela expressão de $K^{(0)}(q, t ; q', t')$ no caso estacionário:

$$K^{(0)}(q, t ; q', t') = \sum_n u_n(q) u_n^*(q') e^{-iE_n(t-t')} .$$

Vemos que:

$$K^{(0)}(q, t ; q', t') = K_0^*(q', t' ; q, t) . \quad (\text{A.10}'')$$

Vemos ainda que:

$$\int K^{(0)}(q, t ; q', t') K^{(0)*}(q, t ; q'', t') = \delta(q' - q'') \quad (\text{A.11})$$

$$\left. \begin{aligned} \left[i \frac{\partial}{\partial t} - H(q) \right] K^{(0)}(q, t ; q', t') &= 0, \\ \left[-i \frac{\partial}{\partial t'} - H(q') \right] K^{(0)}(q, t ; q', t') &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.12})$$

$$\left. \begin{aligned} \left[-i \frac{\partial}{\partial t'} - H(q') \right] K^{(0)*}(q', t' ; q, t) &= 0, \\ \left[i \frac{\partial}{\partial t} - H(q) \right] K^{(0)*}(q', t' ; q, t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.13})$$

Admitiremos essas relações quando H depende de t .

De:

$$K_{\text{ret}}(q, t ; q', t') = \frac{1 + \epsilon(t - t')}{2} K^{(0)}(q, t ; q', t')$$

$$K_{\text{av}}(q, t ; q', t') = -\frac{1 - \epsilon(t - t')}{2} K^{(0)}(q, t ; q', t'),$$

resulta:

$$K_{\text{ret}}^*(q', t' ; q, t) = \frac{1 + \epsilon(t' - t)}{2} K^{(0)*}(q', t' ; q, t) =$$

$$= \frac{1 - \epsilon(t - t')}{2} K^{(0)}(q, t ; q', t') =$$

$$= -K_{\text{av}}(q, t ; q', t'),$$

isto é:

$$K_{\text{ret}}^*(q', t' ; q, t) = -K_{\text{av}}(q, t ; q', t'), \quad (\text{A.14})$$

$$K_{av}^* (q', t'; q, t) = - K_{ret} (q, t ; q' t') . \quad (A.15)$$

Como:

$$\left[1 \frac{\partial}{\partial t} - H (q) \right] K_{av} (q, t ; q' t') = i \delta (q, t ; q' t')$$

e como:

$$K_{av} (q, t ; q', t') = - K_{ret}^* (q' t'; q, t) ,$$

segue-se que:

$$\left[1 \frac{\partial}{\partial t} - H (q) \right] K_{ret}^* (q', t'; q, t) = -i \delta (q, t ; q', t') . \quad (A.16)$$

Observe-se que a equação em K_{av} vale para $t < t'$, logo esta última também. Analogamente, de:

$$\left[1 \frac{\partial}{\partial t} - H (q) \right] K_{ret} (q, t ; q', t') = i \delta (q, t ; q', t') ,$$

segue-se:

$$\left[1 \frac{\partial}{\partial t} - H (q) \right] K_{av}^* (q', t'; q, t) = -i \delta (q, t ; q', t') . \quad (A.17)$$

Integração da equação:

$$\left[1 \frac{\partial}{\partial t_2} - H (2) \right] K_{ret} (2, 1) = i \delta (2, 1) , \quad (A.18)$$

onde:

$$H (2) = H_0 (2) + V (2)$$

e onde:

$$\left[1 \frac{\partial}{\partial t_2} - H_0 (2) \right] K_0 (2, 1) = i \delta (2, 1) , \quad K_0 (2, 1) \text{ é}$$

conhecida e é função de Green retardada não perturbada.

Temos:

$$\left[1 \frac{\partial}{\partial t_3} - H_0(3) \right] K_{\text{ret}}(3,1) = 1 \delta(3,1) + V(3) K_{\text{ret}}(3,1).$$

Multiplicando por $K_0(2,3)$:

$$K_0(2,3) \left[1 \frac{\partial}{\partial t_3} - H_0(3) \right] K_{\text{ret}}(3,1) = 1 K_0(2,3) \delta(3,1) + K_0(2,3) V(3) K_{\text{ret}}(3,1)$$

e integrando em 3:

$$- 1 \int K_0(2,3) \left[1 \frac{\partial}{\partial t_3} - H(3) \right] K_{\text{ret}}(3,1) = K_0(2,1) - \int K_0(2,3) V(3) K_{\text{ret}}(3,1).$$

Mas:

$$\begin{aligned} & \int K_0(2,3) \left[1 \frac{\partial}{\partial t_3} - H(3) \right] K_{\text{ret}}(3,1) d^3 = \\ & = \int \left\{ \left[1 \frac{\partial}{\partial t_3} - H(3) \right] K_0^*(2,3) \right\}^\dagger K_{\text{ret}}(3,1) d^3 = \\ & = \left\{ \text{porque } \left[1 \frac{\partial}{\partial t_3} - H(3) \right] K_0^*(2,3) = 1 \delta(2,3) \right\} = \\ & = \int (-1 \delta(2,3))^\dagger K_{\text{ret}}(3,1) d^3 = 1 K_{\text{ret}}(2,1). \end{aligned}$$

Logo:

$$K_{\text{ret}}(2,1) = K_0(2,1) - \int K_0(2,3) V(3) K_{\text{ret}}(3,1) d^3. \quad (\text{A.19})$$

Podíamos também ter escrito:

$$K_0 \text{ ret}(2,3) \left[1 \frac{\partial}{\partial t_3} - H(3) \right] K_{\text{ret}}(3,1) d^3 =$$

$$= \int \left\{ - \left[1 \frac{\partial}{\partial t_3} - H(3) \right] K_{o \text{ av}}(3,2) \right\}^\dagger K_{\text{ret}}(3,1) d^3 ,$$

porque:

$$\left[- K_{o \text{ av}}(3,2) \right]^\dagger = K_{o \text{ ret}}(2,3) , \quad (\text{A.20})$$

entendendo por \dagger , conjugação complexa e troca dos argumentos.

Dá o mesmo resultado.

Já a função de Green-Feynman da equação de Dirac pode ser escrita assim:

$$K_+(2,1) = \sum_{E_n} u_n(x_2) \bar{u}_n(x_1) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \left\{ \frac{1 + \epsilon(t_2-t_1)}{2} - \frac{1 - \epsilon(E_n)}{2} \right\} =$$

$$= \sum_{E_n} u_n(x_2) \bar{u}_n(x_1) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \left[\frac{\epsilon(2,1) + \epsilon(E_n)}{2} \right] , \quad (\text{A.21})$$

ou ainda:

$$\sum_{E_n} u_n(x_2) \bar{u}_n(x_1) e^{-iE_n(t_2-t_1)} \left\{ - \frac{1 - \epsilon(t_2-t_1)}{2} + \frac{1 + \epsilon(E_n)}{2} \right\} . \quad (\text{A.21'})$$

Vemos que ela é a soma da função de Green retardada no tempo com a avançada na energia. Ou a soma da avançada no tempo com a retarda-

da na energia.

Ou ainda: a soma da função de Green ligada no tempo com a ligada na energia.

B.1 A função δ .

Definimos a função imprópria:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \cos kx dk = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } Kx}{x} \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Seja f uma função regular para $x = 0$. O teorema de Dirichlet nos dá:

$$\frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-aK}^{bK} f\left(\frac{y}{K}\right) \frac{\text{sen } y}{y} dy = f(0), \quad -a < 0 < b. \quad (\text{B.2})$$

A troca do limite com a operação de integração que não é possível, é simbolizada pela função δ e pela relação:

$$\int_{-a}^b f(x) \delta(x) dx = f(0). \quad (\text{B.2}')$$

Se $f(x) = 1$, temos:

$$\int_{-a}^b \delta(x) dx = 1 \quad (\text{B.2}'')$$

$\delta(x)$ pode ser representada de diversas maneiras. Todo conjunto

completo de funções de onda ortogonais $u_n(x)$ fornece uma representação de $\delta(x)$:

$$\sum_n u_n^*(x) u_n(x') = \delta(x-x'), \quad (\text{B.3})$$

$\delta(x)$ também pode ser definida por meio de integração curvilínea no plano complexo. Seja C um contórno fechado contendo $x=0$ e que não contenha pontos singulares de $f(x)$. Pelo teorema de Cauchy:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(x)}{x} dx$$

Comparando com (B.2'), temos simbolicamente:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x} \Big|_C. \quad (\text{B.4})$$

Como $\delta(x)$ é uma função par de x :

$$\int_0^x \delta(k) dk = \frac{1}{2} \epsilon(x), \quad \epsilon(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

De fato:

$$1 = \int_{-x}^x \delta(k) dk = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_{-x}^{-\alpha} \delta(k) dk + \int_{\alpha}^x \delta(k) dk \right) =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_x^{\alpha} \delta(-k) d(-k) + \int_{\alpha}^x \delta(k) dk \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} .$$

$$\left(- \int_x^{\alpha} \delta(k) dk + \int_{\alpha}^x \delta(k) dk \right) =$$

$$= 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^x \delta(k) dk .$$

Algumas propriedades da função δ :

$$\delta(x) = \delta(-x) , \quad (\text{B.6})$$

$$x\delta(x) = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) , \quad (\text{B.8})$$

$$\delta[(x-a)(x-b)] = \frac{\delta(x-a) + \delta(x-b)}{|a-b|} , \quad (\text{B.9})$$

$$\text{donde: } \delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x-a) + \delta(x+a)] , \quad (\text{B.9'})$$

$$\delta(x-a)\delta(x-b) = \delta(x-a)\delta(a-b) = \delta(x-b)\delta(a-b) \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{d}{dx} \delta(x) = - \frac{d}{dx} \delta(-x) \quad (\text{B.11})$$

$$x \frac{d}{dx} \delta(x) = - \delta(x) \quad (\text{B.12})$$

$$f(x) \delta(x-a) = f(a) \delta(x-a) \quad (\text{B.13})$$

$$\int \delta(a-x) \delta(x-b) dx = \delta(a-b) \quad (\text{B.14})$$

Definamos agora:

$$\begin{aligned} \delta_+(x) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ikx} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K e^{-ikx} dk = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{e^{-iKx} - 1}{-ix} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi i} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-iKx}}{x} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \cos Kx}{x} + i \frac{\sin Kx}{x} \right) \equiv \frac{1}{\pi i} \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) + \delta(x) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Analogamente:

$$\delta_-(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{ikx} dk = -\frac{1}{\pi i} \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) + \delta(x) . \quad (\text{B.16})$$

Onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) &\equiv \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos Kx}{x} = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \sin kx dk = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \epsilon(k) dk . \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

De fato:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_0^K \sin kx dk = \lim_{K \rightarrow \infty} \left[\frac{-\cos kx}{x} \right]_0^K = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos kx}{x} .$$

$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ é chamado o valor principal de $\frac{1}{x}$. Comporta-se como $\frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$ pois $\cos Kx$ oscila rapidamente e não contribue para nenhuma integração sobre x ; e anula-se para $x = 0$.

Pelo teorema de L'Hopital:

$$\lim_{\substack{K \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos Kx}{x} = \lim_{\substack{K \rightarrow \infty \\ x \rightarrow 0}} \frac{K \operatorname{sen} Kx}{1} = 0.$$

Assim:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^b f(x) \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \int_{-a}^b f(x) \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos Kx}{x} dx = \\ &= \int_{-a}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^b \frac{f(x)}{x} dx, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ é uma função ímpar de x .

De (B.15) e (B.16):

$$\left\{ \begin{aligned} \delta(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \delta_+(x) + \delta_-(x) \right\}, \end{aligned} \right. \quad (\text{B.19})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{2} \left\{ \delta_+(x) - \delta_-(x) \right\}. \end{aligned} \right. \quad (\text{B.20})$$

$$\text{Daí: } \delta_+(x) = \delta(x) + \frac{1}{\sqrt{|x|}} \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right);$$

Algumas propriedades de $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) = -\mathcal{P}\left(\frac{1}{-x}\right), \quad (\text{B.21})$$

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{ax}\right) = \frac{1}{a} \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right), \quad (\text{B.22})$$

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x^2 - a^2}\right) = \frac{1}{+2a} \left[\mathcal{P}\left(\frac{1}{x-a}\right) - \mathcal{P}\left(\frac{1}{x+a}\right) \right] \quad (\text{verifique})(\text{B.23})$$

Por (B.15), (B.8) e (B.22):

$$\delta_+(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad . \quad (\text{B.24})$$

Por (B.15), (B.9') e (B.23):

$$\delta_+(a^2 - x^2) = \frac{1}{2|a|} \left\{ \delta_+(a - x) + \delta_+(a + x) \right\}, \quad (\text{B.25})$$

ou:

$$\delta_+(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \left\{ \delta_+(x - a) + \delta_+(-x - a) \right\}. \quad (\text{B.25'})$$