MONOGRAFIAS DE FISICA

IV

FUNDAMENTOS DA ELETRODINÂMICA CLÁSSICA

J. LEITE LOPES

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FISICAS

BRASIL

E R R A T A

Pag. - Linha:	Onde está:	leia-se:
24 - ultima	$\dots = a\, K_\mu^2 +$	$\dots = a k_\mu^2 + \dots$
28 - ultima	$\dots + A_\mu^{ev}(x)]$	$\dots + A_\mu^{av}(x)\ ]$
33 - 8	$D(x) = \frac{1}{4\pi r}\left[\epsilon(r + x_o) - \dots\right.$	$D(x) = \frac{1}{4\pi r}\left[\delta(r + x_o)\dots\right.$
47 - 9↑	$t(\Theta) = \dot{a}_{n+1}(\Theta);$	$t(\Theta) = q_{n+1}(\Theta);$
49 - 6	prtanto	portanto
56 - 12	onde o	onde no
58 - 7	$\dots = \delta(\vec{y} - t)\,\delta_{\lambda\mu}$	$= \delta(\vec{y} - \vec{x})\,\delta_{\lambda\mu}$
58 - 3↑	$\dots = \delta_{\mu\nu}\ \dots$	$\dots = \delta_{\mu\lambda}$
59 - 9	$a_\mu(x) = [a_U(x), \overline{K}]\ ;\ \mathfrak{P}_U(x) = \dots$	$\dot{a}_\mu(x) = [a_\mu(x), \overline{K}]\ ;\ \dot{\mathfrak{P}}_\mu = \dots$
83 - 10	usa	uso
83 - 4↑	sistetizadas	sintetizadas
89 - 2	$\dot{z}_\mu(x_o - \sigma) =$	$\dot{z}\ (s_o - \sigma) =$
90 - 6	$\dots - \frac{1}{2}\ \dot{v}_\mu\, v_\nu - \dots$	$\dots - \frac{1}{2}\,\sigma^{-1}\,\dot{v}_\mu v_\nu - \dots$
103 - 6	$\Longrightarrow \mu \longrightarrow 0$	$\Longrightarrow \mu \longrightarrow o\,.$

PREFÁCIO

O principal objetivo destas notas é salientar idéias e relações usadas na eletrodinâmica quântica e que já tenham origem na teoria clássica. Tais a função de Jordan-Pauli, as funções de Green retardada e avançada, os parêntesis de Poisson do campo eletromagnético.

A fim de melhor compreender a teoria quântica do electron, é de importância conhecerem-se os esforços desenvolvidos para descrever êsse corpúsculo clàssicamente. Discutimos, por isso, a teoria de Lorentz e a de Dirac-Lorentz.

No apêndice, discuto o problema da inversão do tempo na mecânica clássica, na eletrodinâmica e na teoria do electron. Demonstra-se alí que a teoria de Dirac-Lorentz é invariante quando electrons com energia positiva evoluindo para o futuro são substituidos por electrons de carga oposta, com energia negativa e evoluindo para o passado. A imagem obtida é análoga à da teoria quântica de Feymman-Stuckelberg.

CAPITULO I

A ELETRODINÂMICA DE MAXWELL

PARTE A - FUNDAMENTOS DA TEORIA

PARTE B - INTEGRAÇÃO DE POTENCIAIS

PARTE C - PRINCIPIO VARIACIONAL E FORMALISMO HAMILTONIANO

PARTE D - FORMA COVARIANTE DO FORMALISMO HAMILTONIANO DA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL

CAPÍTULO II

TEORIA CLÁSSICA DO ELETRON PUNTIFORME

PARTE A - EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA TEORIA

PARTE B - APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE LORENTZ-DIRAC

APÊNDICE

INVERSÃO DO TEMPO

CAPITULO I

A ELETRODINÂMICA DE MAXWELL

PARTE A: FUNDAMENTOS DA TEORIA

1. Equações de Maxwell.

A eletrodinâmica clássica de Maxwell estuda a interação entre um campo eletromagnético e distribuições contínuas de cargas. Uma distribuição contínua de cargas é definida por duas funções contínuas e deriváveis, a densidade de carga $\rho(\vec{x},t)$ e o vetor densidade de corrente $\vec{J}(\vec{x},t)$. Estas duas funções são obrigadas a satisfazer a uma relação, a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 , \tag{1}$$

que fìsicamente exprime o princípio de conservação das cargas.

As leis fundamentais da eletrodinâmica são as bem conhecidas equações de Maxwell. Representando por E e H um campo elétrico e magnético em interação com a distribuição de cargas, estas equações são as seguintes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{J} \tag{5}$$

onde supomos $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$; c é a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo.

2 - <u>Potenciais eletromagnéticos</u>.

O estudo matemático das equações de Maxwell é facilitado pela introdução dos potenciais eletromagnéticos, $\phi(\vec{x},t)$ e $\vec{A}(\vec{x},t)$. A equação (3) permite-nos escrever:

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{6}$$

e a relação (6), inserta em (4), conduz a:

$$\vec{\nabla} \times \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} = 0$$

o que nos permite pôr:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \tag{7}$$

Levando (6) e (7) nas equações com 2º membro (2) e (5), obtemos:

$$\vec{\nabla}^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho \; , \tag{8}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} \vec{J} \tag{9}$$

desde que $\vec{A}$ e ϕ satisfaçam à condição:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

Assim o problema de determinar o campo eletromagnético produzido por uma distribuição de cargas conhecida (ρ e $\vec{j}$, funções dadas) se reduz a integrar as equações (8) e (9) e escolher as soluções que satisfazem à condição (10). Os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são então obtidas de $\vec{A}$ e ϕ pelas fórmulas (6) e (7). As equações (8) e (9) são equações em derivadas parciais, de 2a. ordem, de tipo hiperbólico e não homogêneas. A uma solução particular destas podemos sempre somar uma solução geral das equações homogêneas:

$$\vec{\nabla}^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \ ,$$
$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{11}$$

Estas têm a mesma forma da bem conhecida equação das ondas.

3 - Transformação de calibre. Invariância de calibre.

Uma propriedade importante das relações (6) e (7), que definem o potencial eletromagnético, é a seguinte. Sejam $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{A}$ e ϕ, que satisfazem as equações (6), (7), (8), (9) e (10). Seja, agora, $\wedge$ uma função derivável arbitrária. Formemos o potencial:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \wedge \ . \tag{12}$$

Como:

$$\nabla \times \nabla \wedge = 0$$

vemos que o campo magnético $\vec{H}'$ correspondente a $\vec{A}'$ coincide com $\vec{H}$:

$$\vec{H}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{H}$$

Vejamos, então, que transformação no potencial ϕ a transformação (12) induz, de modo que o novo campo $\vec{E}'$ também seja igual a $\vec{E}$.

Estamos impondo:

$$\vec{E}' = \vec{E}$$

ou

$$\vec{\nabla}\phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ .$$

Substituindo nesta equação $\vec{A}'$ por (12) obtemos:

$$\vec{\nabla}\phi' + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial \triangle}{\partial t} = \vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

o que dá:

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \triangle}{\partial t} \qquad (13)$$

Assim, os potenciais $\vec{A}'$ e ϕ', obtidos de $\vec{A}$ e ϕ pela transformação (12) e (13), correspondem ao mesmo campo eletromagnético que êstes. A transformação definida por (12) e (13) chama-se uma <u>transformação de calibre</u> (em inglês, "gauge transformation"). Ela deixa as equações de Maxwell (2), (3), (4), (5) invariantes. Êste fato nos mostra que o que tem uma significação física imediata é o campo $\vec{E}$, $\vec{H}$. Numa observação, o que se mede é o campo eletromagnético e não o potencial.

Como o campo $\vec{E}$, $\vec{H}$ é invariante em relação à transformação de calibre, é natural considerarmos $\vec{A}$, ϕ e $\vec{A}'$, ϕ' dados por (12) e (13), como fisicamente equivalentes. Devemos, pois, impôr a $\vec{A}'$, ϕ' que satisfaçam também às equações (8), (9) e (10). A condição suplementar (10) será satisfeita por $\vec{A}'$, ϕ' (e por $\vec{A}$, ϕ) se

$$\vec{\nabla}^2\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\triangle}{\partial t^2} = 0 . \qquad (14)$$

Em virtude de (14), (8) e (9) serão satisfeitos automàticamente por $\vec{A}'$ e ϕ'. A equação (14) restringe a arbitrariedade da função $\triangle$ da transformação de calibre (12), (13). É de verificação imediata que as transformações de calibre formam um grupo.

4 - Transformação de Lorentz. Cône de luz e conceitos correlatos.

Para todos os fenômenos em que não intervém a gravitação, devemos construir teorias relativisticamente invariantes, isto é, cujas equações sejam invariantes em relação ao grupo das transformações de Lorentz. A eletrodinâmica de Maxwell foi o primeiro exemplo de uma tal teoria. A invariância relativista torna-se evidente quando usamos o formalismo quadri-dimensional. Sejam x_1, x_2, x_3, x_4 as coordenadas de um ponto do espaço-tempo, onde $x_4 = ict = ix_o$. Uma transformação de Lorentz é uma transformação linear e ortogonal:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \tag{15}$$

$$a_{\mu\lambda} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu} \ . \tag{16}$$

Os elementos a_{k4} e a_{4k} (onde $k = 1,2,3$) da matriz $A = (a_{\mu\nu})$ são imaginários puros, os demais são reais. Resulta de (16) que:

$$(\text{Det. } A)^2 = 1, \ \text{Det. } A = \pm 1 \ .$$

Uma transformação de Lorentz chama-se <u>própria</u> se: 1) Det. $A = +1$; 2) $a_{44} > 0$.

Das transformações próprias estão, portanto, excluidas as reflexões:

a) reflexão espacial;

b) reflexão do tempo;

c) reflexão espacio-temporal.

Uma interpretação física das transformações próprias de Lorentz é obtida mediante a noção de cône de luz de um ponto.

Resulta da definição (15), (16) da transformação de Lorentz, que esta deixa invariante a forma quadrática $x_\mu^2 = \vec{x}^2 - c^2t^2$. O lugar geométrico dos pontos para os quais:

$$x_\mu^2 = 0 \tag{17}$$

é o <u>cône de luz</u> da origem, e é obviamente invariante. O cône divide o espaço-tempo em três regiões: a região I , dentro do cône (contendo o eixo dos tempos) para a qual:

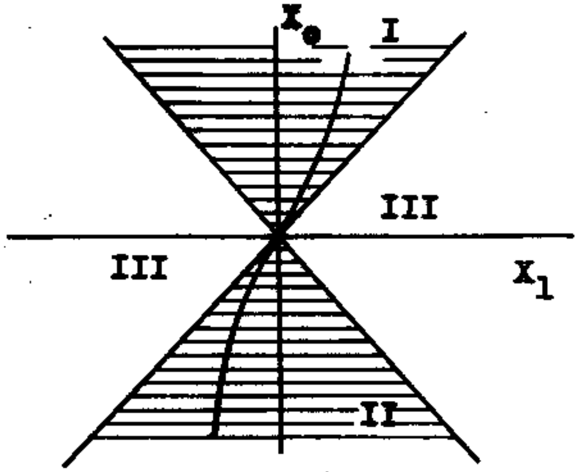


Fig. 1

$$x_\mu^2 < 0 \ , \quad x_0 > 0 \tag{18}$$

é o semi-cône do futuro; a região II, dentro do cône, tal que:

$$x_\mu^2 < 0 \ , \quad x_0 < 0 \tag{19}$$

é o semi-cône do passado; a região III, fóra do cône, para a qual:

$$x_\mu^2 > 0 \ . \tag{20}$$

Uma transformação de Lorentz geral deixa invariante a região III e a região interna ao cône. Mas pode, evidentemente, transformar I em II ou vice-versa. Uma transformação de Lorentz própria transforma I em I e II em II; não muda o futuro no passado ou vice-versa; por assim dizer, deixa invariante a lei de causalidade.

Um ponto $P(x_1,x_2,x_3,x_4)$ sôbre o cône, isto é, satisfazendo a (17), representa a passagem pelo ponto do espaço tri-dimensional (x_1,x_2,x_3) no instante $t = \frac{x_4}{ic}$, de um sinal luminoso que foi emitido da origem (isto é, da origem tri-dimensional no instante inicial) (pois (17) é a equação de uma superfície esférica de raios ct , no espaço ordinário). Podemos exprimir isto dizendo que os pontos sôbre o cône são atingíveis da origem por sinais luminosos. De (18), vê-se fàcilmente que um ponto qualquer dentro da região I é atingível da origem por processos físicos que se propaguem com velocidade $v < c$. Em particular, o movimento de um ponto material pode ser representado por uma tragetória passando pela origem, contida dentro do cône e dirigida de II para I.

Finalmente, os pontos da região III, fóra do cône, não podem ser atingidos da origem por nenhuma ação física.

Um ponto da região III chama-se um ponto de tipo espaço (space-like point); um ponto da região I ou II chama-se ponto de tipo tempo (time-like point). Uma <u>superfície</u> é denominada de <u>tipo espaço</u> quando para dois quaisquer de seus pontos se tem:

$$(x_\mu - y_\mu)^2 > 0 \tag{21}$$

E de tipo tempo quando:

$$(x_\mu - y_\mu)^2 < 0 \tag{22}$$

Definição análoga se aplica a linhas e, em particular a vetores. E claro, que êstes são conceitos relativisticamente invariantes. Uma particular superfície de tipo espaço, que não é relativisticamente invariante, é umplano perpendicular ao eixo dos tempos.

Todas estas noções são correntemente usadas na eletrodinâmica quântica.

Superemos conhecida do leitor a análise tensorial no espaço-tempo e em particular que:

a) o gradiente de uma função escalar u (invariante) é um quadri-vetor:

$$\frac{\partial u}{\partial x_\lambda} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \frac{\partial u}{\partial x_4}\right) ;$$

b) a divergência de um quadri-vetor é um invariante:

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots = \text{inv.} \quad ;$$

c) por consequência, a divergência do gradiente é um operador invariante em relação às transformações de Lorentz:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2_\lambda} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \text{inv.} \; ;$$

d) o retacional de um quadri-vetor é um tensor antissimétrico de 2a. ordem:

$$t_{\mu\nu} = \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu} = - t_{\nu\mu} \quad ;$$

e) o elemento de volume quadri-dimensional é um invariante:

$$dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_4 = \text{inv.}$$

5 - Forma covariante da eletrodinâmica de Maxwell.

A invariância relativista (ou covariância) da eletrodinâmica clássica é posta em evidência usando-se o formalismo quadri-dimensional.

Façamos:

$$j_4 = ic\rho$$

a equação (1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{23}$$

Que $j_\mu = (j_1, j_2, j_3, j_4)$ se transforma como um quadri-vetor em relação às transformações de Lorentz, resulta dos dois seguintes fatos:

1) a carga elétrica é um invariante, o que é admitido com base nas medidas experimentais; daí a da igualdade $dq = \rho \; dx_1 \, dx_2 \, dx_3$ resulta que ρ , logo j_4 , se transforma como dx_4 , isto é, como a 4a. componente de um quadri-vetor;

2) sendo $\vec{v}$ a velocidade de um elemento de carga, podemos escrever:

$$j_k = \rho v_k$$

ou

$$j_k = j_4 \frac{\partial x_k}{\partial x_4}$$

o que mostra que j_k se transforma como a componente k de um vetor.

Façamos agora:

$$A_4 = i\phi$$

as equações (8) e (9) se resumem nas seguintes:

$$\Box A_\mu = -\frac{1}{c} j_\mu \tag{24}$$

Que A_μ é um quadri-vetor, resulta do caráter invariante do operador $\Box$ e do caráter vetorial de j_μ .

A condição suplementar (10) assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda} = 0 \tag{25}$$

que é uma equação invariante. Esta condição é compatível com a equação (24), em virtude da equação da continuidade (23).

As equações (6) e (7) são sintetizadas nas seguintes:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad , \tag{26}$$

desde que definamos:

$$F_{12} = -F_{21} = H_3, \quad F_{31} = -F_{13} = H_2 \ ,$$

$$F_{23} = -F_{32} = H_1, \ iF_{k4} = -iF_{4k} = Ek \ ,$$

$$k = 1,2,3.$$

O caráter tensorial do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ resulta do caráter vetorial de A_μ e do operador gradiente.

As equações de Maxwell (2), (3), (4), (5) são sintetizadas em dois grupos. As equações não-homogêneas (2) e (5) tomam a forma:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c}\, j_\mu \ ; \tag{27}$$

as equações homogêneas (3) e (4), a forma

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0 \ , \quad \mu, \nu, \lambda = 1,2,3,4 \tag{28}$$

As transformações de calibre são definidas por funções escalares Λ , tais que:

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \ ; \ \Box \Lambda = 0 \tag{29}$$

É evidente, que as transformações (29) deixam as equações (24), (25), (26), (27) e, portanto, (28) e (29), invariantes.

Concluimos, assim, que a eletrodinâmica de Maxwell é relativìsticamente invariante e invariante em calibre.

PARTE B. INTEGRAÇÃO DOS POTENCIAIS

6 - Teorema de Green generalizado.

Afim de conhecer o campo eletromagnético produzido por uma dada distribuição de cargas j_μ , devemos integrar a equação (24) e substituir em (26) a solução obtida. É desta integração que trataremos nesta Parte B. Começaremos dando uma generalização trivial, ao espaço de quatro dimensões, do bem conhecido teorema de Green.

Seja σ uma superfície de tipo espaço. A sua normal em um ponto x é definida por um quadri-vetor unitário n , de tipo tempo, cujas componentes dependem do ponto e que satisfazem à relação:

$$n_\mu^2 = -1 \quad (30)$$

Em particular, se a superfície fôr um plano perpendicular ao eixo dos tempos, n é um vetor constante de componentes (0,0,0,i). O elemento de área da superfície σ é definido por um quadri-vetor, com a direção e o sentido de n (portanto, de tipo tempo), e cujas componentes são:

$$d\sigma = \left(dx_2\, dx_3\, dx_o,\ dx_3\, dx_1\, dx_o,\ dx_1\, dx_2\, dx_o,\ \frac{dx_1\, dx_2 dx_3}{i} \right) \quad (31)$$

O fluxo de um quadri-vetor $f_\lambda\,(x)$ através de σ é definido pela integral de superfície:

$$\int_\sigma f_\lambda \; d\sigma_\lambda \quad (32)$$

No caso particular em que tomarmos para σ um plano perpendicular ao eixo dos tempos, as componentes de $d\sigma$ são:

$$\left\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{i}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\right\} \quad , \tag{33}$$

de modo que, fazendo $f_4 = if_o$, o fluxo se reduz a

$$\int f_o\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \ .$$

Vemos que a integral (32) é a generalização covariante da integral, extendida ao espaço ordinário, da 4a. componente de um quadrivetor.

Representemos por w a região do espaço-tempo compreendida entre duas superfícies de tipo espaço, σ_1 e σ_2 , e chamemos:

$$dw = dx_o\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \ . \tag{34}$$

O teorema de Gauss, da divergência, é fàcilmente generalizado ao espaço-tempo e tem a seguinte forma:

$$\int_w \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\lambda}\ dw = -\int_{\sigma_1} f_\mu\, d\sigma_\mu + \int_{\sigma_2} f_\mu\, d\sigma_\mu \tag{35}$$

desde que f_μ se anule sôbre superfícies de tipo tempo no infinito. Muitas vezes indicaremos uma integração na região w pelo símbolo:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dw \tag{36}$$

para indicar que ela se extende ao espaço-tempo compreendido entre as superfícies σ_1 e σ_2 (σ_1 precedento σ_2 no tempo). Em particular, se σ_1 corta o eixo dos tempos no infinito passado, temos:

$$\int_{-\infty}^{\sigma} dw \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\lambda} = \int_\sigma f_\mu\, d\sigma_\mu \tag{37}$$

desde que f_μ se anule no infinito.

Para brevidade, escreveremos também (35) da seguinte forma:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\lambda}\, dw = \int_{\sigma_1+\sigma_2} f_\mu\, d\sigma_\mu \tag{35}$$

Aplicando agora esta fórmula ao vetor:

$$f_\lambda = u \frac{\partial v}{\partial x_\lambda}$$

obtemos:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_\lambda} \frac{\partial v}{\partial x_\lambda} + u \Box v \right) dw = \int_{\sigma_1+\sigma_2} u \frac{\partial v}{\partial x_\lambda}\, d\sigma_\lambda \,. \tag{38}$$

Trocando u com v e subtraindo de (38) a relação obtida, teremos:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (u \Box v - v \Box u)\, dw = \int_{\sigma_1+\sigma_2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_\lambda} - v \frac{\partial u}{\partial x_\lambda}\right) d\sigma_\lambda \tag{39}$$

que é a fórmula de Green. Pode-se verificar fàcilmente que, se tomarmos para σ_1 e σ_2 dois planos perpendiculares ao eixo x_o, (39) é idênticamente satisfeita. Se, além desta escolha para σ_1 e σ_2, supusermos que u e v não dependem de x_o, (39) coincide com a fórmula usual de Green para o espaço de três dimensões.

7 - <u>Integração da equação homogênea dos potenciais. Função de Jordan-Pauli</u>.

O campo eletromagnético no vácuo (também chamado campo de radiação) satisfaz à equação homogênea

$$\Box A_\mu = 0 \,. \tag{40}$$

Mediante uma aplicação do teorema de Green, (39), vamos mostrar que o campo de radiação é univocamente determinado em todo ponto do espaço-tempo se, sôbre uma superfície de tipo espaço, forem dados A_μ e sua derivada normal (problema de Cauchy). Para isso, precisamos de introduzir uma função invariante $D(x)$, definida pelas seguintes condições:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } \Box D(x) = 0 \text{ ;} \\ \text{b) } \quad D(x) = 0 \text{ para todo ponto tal que } x_\mu^2 > 0 \text{ ;} \\ \text{c) } \displaystyle\int_\sigma \frac{\partial D}{\partial x_\mu}\, d\sigma_\mu = 1 \text{ , } \sigma \text{ sendo superfície de tipo espaço que contém a origem} \end{array}\right\} \quad (41)$$

Esta função é de grande importância na eletrodinâmica quântica, onde foi introduzida por Jordan e Pauli. Tal importância está assinalada na teoria clássica pelo fato de, como dissemos acima, a função D reduzir a determinação do campo de radiação no espaço-tempo a um problema de valores no contôrno. A condição (b) especifíca que $D(x)$ se anula fóra do cône de luz da origem. No parágrafo 13 construiremos explícitamente a fórma da função $D(x)$, mostrando que ela é singular sôbre o cône de luz da origem.

Consideremos agora, a fórmula (39), tomando σ_1 no infinito passado, e façamos $u = D(x)$, $v = A_\mu(x)$. Temos:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\sigma} \left[D(x-x')\, \Box'\, A_\mu(x') - A_\mu(x')\, \Box'\, D(x-x') \right] dw' = \\ &= \int_\sigma \left[D(x-x')\, \frac{\partial}{\partial x'_\nu}\, A_\mu(x') - A_\mu(x')\, \frac{\partial}{\partial x'_\nu}\, D(x-x') \right] d\sigma'_\nu \end{aligned} \quad (42)$$

onde x é um ponto fixo do espaço-tempo e σ é uma superfície de tipo espaço no futuro de x. Como $D(x-x')$ é singular sôbre o cône luz de x, devemos excluir êste cône da região de integração. Isto pode ser feito considerando duas superfícies de tipo es paço, σ_1 e σ_2, que coincidem exceto na vizinhança do ponto x, que é por elas circundado (fig. 2); em seguida, ladeando o cône de ambos os lados por uma superfície, e excluindo a região que contém

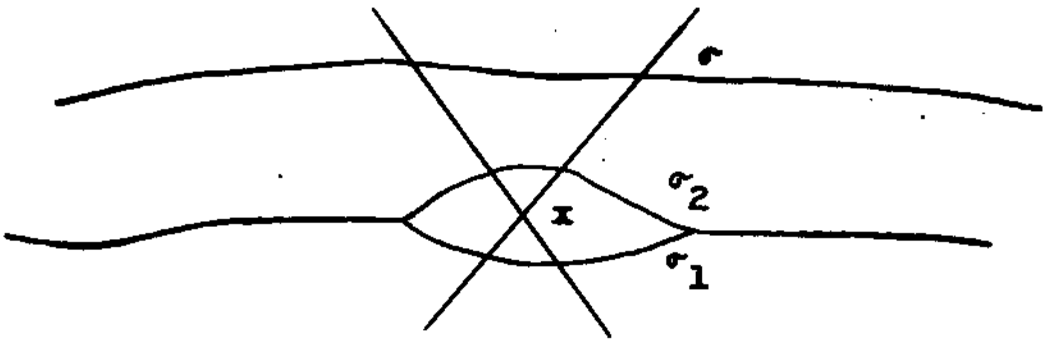


Fig. 2

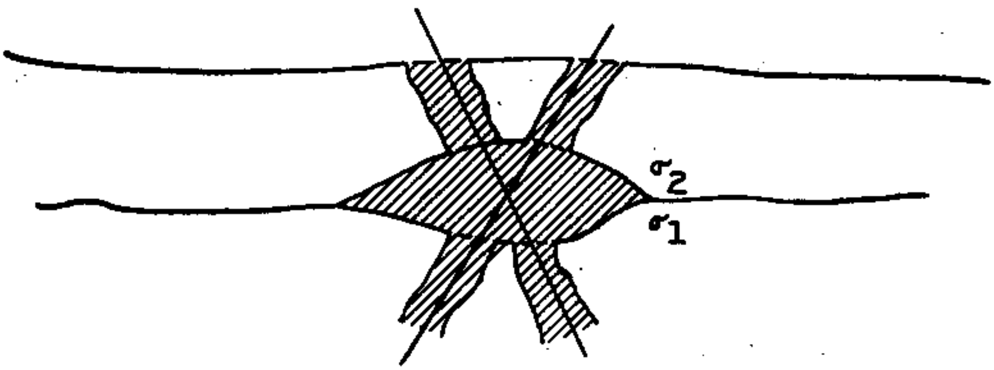


Fig. 3

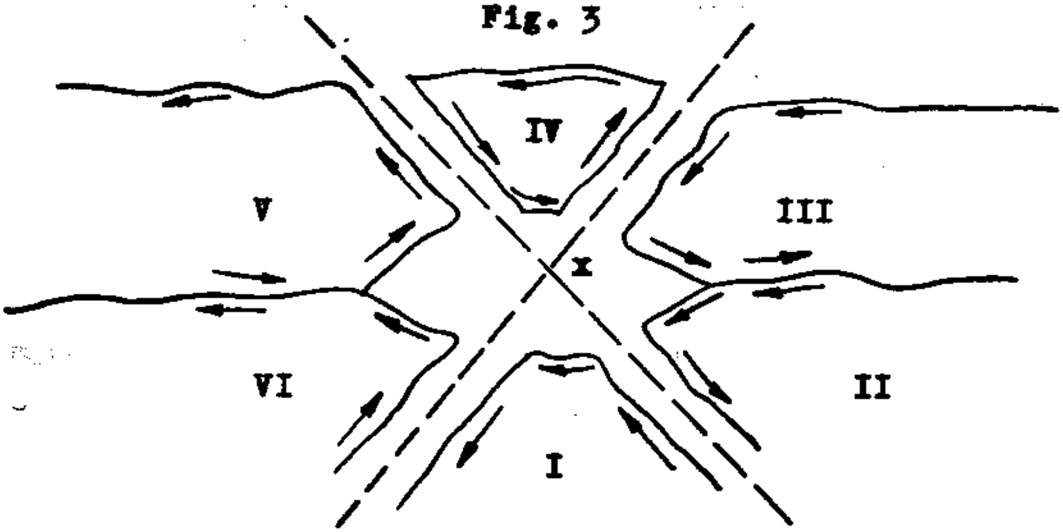


Fig. 4

o cône do domínio de integração (região marcada na fig. 3). A integração no 1º membro de (42) se extenderá as regiões I, II, III, IV, V, VI (fig. 4) e, no 2º membro, às correspondentes superfícies de contôrno. Como A_μ e D satisfazem às equações (40) e (41,a), respectivamente, o 1º membro se anula. Quando fizermos as superfícies laterais que rodeiam o cône tenderem para êste, as integrais de superfície correspondentes se cancelam no limite. Ficaremos assim reduzidos a

$$\int_\sigma \left[D(x-x') \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\nu} - A_\mu(x') \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\nu}\right] d\sigma'_\nu -$$

$$- \int_{\sigma_1+\sigma_2} \left[D(x-x') \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\nu} - A_\mu(x') \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\nu}\right] d\sigma'_\nu = 0$$

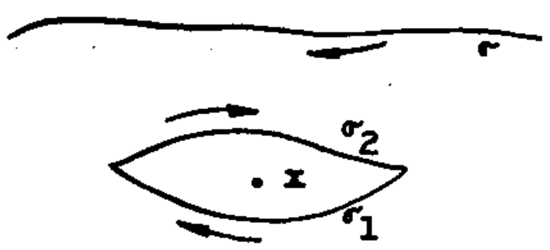


Fig. 5

onde $\sigma_1 + \sigma_2$ é a superfície fechada que envolve x (fig.5). Fazendo, finalmente σ_1 e σ_2 tenderem para uma superfície de tipo espaço, passando por x , arbitràriamente pequena, teremos:

$$\lim \int_{\sigma_1+\sigma_2} D(x-x') \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\nu} d\sigma'_\nu =$$

$= 0$ porque a função D se anula nêsse limite. E:

$$\lim \int_{\sigma_1+\sigma_2} A_\mu(x') \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\nu} d\sigma'_\nu = A_\mu(x)$$

em virtude de (41,c).

Portanto, obtemos, finalmente:

$$A_\mu(x) = \int_\sigma \left[D(x-x') \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\nu} - A_\mu(x') \frac{\partial}{\partial x'_\nu} D(x-x') \right] d\sigma'_\nu \quad (43)$$

Esta fórmula mostra que $A_\mu(x)$ é conhecido em qualquer ponto do espaço-tempo desde que sejam dados $A_\mu(x')$ e $\frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\nu} n'_\nu$ sôbre uma superfície de tipo espaço.

Uma integral de superfície do tipo

$$\int_\sigma f_\nu\ (x,x')\ d\sigma'_\nu$$

é, em geral, não somente uma função ordinária do ponto x, mas também depende da superfície de integração σ, isto é, é um funcional de σ:

$$F[x;\sigma] = \int_\sigma f_\nu(x,x')\ d\sigma'_\nu \quad .$$

Vamos mostrar agora que no caso particular da integral (43), ela não depende de σ; isto é, o campo $A_\mu(x)$ determinado por (43) só depende do ponto x e não da superfície de tipo espaço.

8 - Derivada funcional de um funcional de superfície.

Seja $F[\sigma]$ um funcional de superfície de tipo espaço. Seja σ' uma superfície do campo de definição de F, que difere de σ apenas numa vizinhança de um ponto y que é por elas envolvido (fig. 6).

Fig. 6

Chamemos Δw o volume quadri-dimensional da região delimitada por σ e σ'. A derivada funcional de $F[\sigma]$ no ponto y é definida pelo limite do quociente entre a variação de F correspondente a σ e σ', e o volume Δw, quando êste tende a zero:

$$\frac{\delta F[\sigma]}{\delta\sigma(y)} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{F[\sigma'] - F[\sigma]}{\Delta w}. \tag{44}$$

Uma aplicação do teorema de Gauss (35), permite-nos encontrar uma expressão simples para a derivada funcional de funcionais do tipo:

$$F[\sigma] = \int_\sigma f_\mu \, d\sigma_\mu . \tag{45}$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[\sigma]}{\delta\sigma(x)} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta w} \left(\int_{\sigma'} - \int_\sigma \right) f_\lambda (x') \, d\sigma'_\lambda = \\ &= \lim \frac{1}{\Delta w} \int_{\Delta w} \frac{\partial f_\lambda(x')}{\partial x'_\lambda} \, dw = \frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial x_\lambda}. \end{aligned} \tag{46}$$

9 - <u>A integral (43) não depende de σ</u>.

Mediante (46), podemos escrever para a derivada funcional de (43):

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta\sigma(y)} \int_\sigma \left[D(x-x') \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\nu} - A_\mu(x') \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\nu} \right] d\sigma'_\nu = \\ &= \frac{\partial}{\partial y_\nu} \left[D(x-y) \frac{\partial A_\mu(y)}{\partial y_\nu} - A_\mu(y) \frac{\partial D(x-y)}{\partial y_\nu} \right] = 0 \end{aligned}$$

em virtude de (40) e (41,a).

Portanto, (43), é independente da superfície de integração. Êste resultado era antecipadamente esperado, pois na presente eletrodinâmica, um campo eletromagnético pode ser calculado num ponto x do espaço-tempo (campo localizável num ponto) e não depende de nenhum outro elemento geométrico.

Podemos, agora, escolher como superfície de integração em (43), uma superfície de tipo espaço que passe pelo ponto x. Nêste caso, em virtude de (41,b), tem-se:

$$A_\mu(x) = \int_\sigma A_\mu(x') \frac{\partial}{\partial x'_\nu} D(x'-x) d\sigma'_\nu \ . \qquad (47)$$

Esta fórmula, juntamente com (41,c), nos mostra que podemos considerar $\frac{\partial D(x)}{\partial x_\mu}$ como uma generalização covariante da função $\delta(\vec{x})$ de Dirac.

Em (47), usamos uma propriedade da função $D(x)$, a saber:

$$D(-x) = -D(x) \qquad (48)$$

cuja demonstração é a seguinte: a integral

$$I = \int_\sigma [D(x-x') \frac{\partial}{\partial x_\mu} D(x-x'') - D(x-x'') \frac{\partial}{\partial x_\mu} D(x-x')] \, d\sigma_\mu$$

não depende de σ, como se pode verificar calculando $\frac{\delta I}{\delta\sigma(y)}$ e usando o teorema de Gauss e a equação (41,a). Tomando, então, para σ uma superfície de tipo espaço que passe por x', tem-se:

$$I = - \int_\sigma D(x-x'') \frac{\partial D(x-x')}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = - D(x'-x'') \ .$$

Tomando outra superfície de tipo espaço contendo x'', virá:

$$I = \int_\sigma D(x-x') \frac{\partial D(x-x'')}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = D(x''-x')$$

Comparando estas duas relações, obtem-se (48).

10 - Integração da equação não-homogênea dos potenciais. Funções de Green (definição).

Passemos agora ao estudo da integração da equação:

$$\Box A_\mu = -\frac{1}{c}\, j_\mu \tag{24}$$

O problema consiste em encontrar uma solução da equação (24), satisfazendo a certas condições iniciais impostas sôbre $A_\mu(x)$ e $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} n_\nu$ em uma dada superfície de tipo espaço. Veremos que a especificação das condições iniciais é necessária para determinar univocamente o tipo de solução que se deseja em um dado problema físico. A integração da equação (24) é imediata se conhecermos a sua função de Green; esta é definida como uma solução da equação:

$$\Box \bar{D}\,(x) = -\delta(x) \tag{49}$$

onde $\delta(x)$ é a função de Dirac para o espaço-tempo:

$$\delta(x) = \delta(x_0)\ \delta(x_1)\ \delta(x_2)\ \delta(x_3)\ .$$

Conhecendo a função de Green $\bar{D}(x)$, obtém-se uma solução de (24) pela fórmula:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{c}\int \bar{D}(x-x')\ j_\mu(x')dw'\ . \tag{50}$$

De fato, tem-se:

$$\Box A_\mu(x) = \frac{1}{c}\int \Box\bar{D}(x-x')\ j_\mu(x')dw' =$$

$$= -\frac{1}{c}\int \delta(x-x')\ j_\mu(x')dw' = -\frac{1}{c}\ j_\mu(x)\ .$$

A especificação das condições iniciais determina a escolha da função de Green do problema. Para maior generalidade, estudaremos aqui a determinação da função de Green $\bar{\Delta}(x)$, definida pela equação:

$$(\square - K^2) \bar{\Delta} (x) = - \delta(x) \tag{51}$$

onde K é uma constante. $\bar{\Delta}(x)$ é a função de Green da equação:

$$(\square - K^2) \; A_\mu(x) = - \frac{1}{c} \, j_\mu(x) \tag{52}$$

e obtemos $\bar{D}(x)$ fazendo $K = 0$ em $\bar{\Delta}(x)$. Correspondentemente, a função $\Delta(x)$, definida por:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & (\square - K^2) \Delta (x) = 0 \; , \\ \text{b)} & \Delta (x) = 0 \text{ para } x_\mu^2 > 0 \; , \\ \text{c)} & \int_\sigma \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_\mu} \, d\sigma_\mu = 1 \; , \; \sigma \text{ contendo a origem} \end{array}\right\} \tag{53}$$

generaliza a função de Jordan-Pauli definida por (41).

Estas funções $\Delta(x)$ e $\bar{\Delta}(x)$, com $K \neq 0$, são importantes na teoria do campo mesônico e na teoria quântica do electron.

Vamos, nêste parágrafo, determinar a forma das funções $\bar{\Delta}(x)$ e $\Delta(x)$. Um estudo sistemático dessas funções foi feito por Schönberg e a sua representação covariante foi dada por Schwinger.

Começaremos mostrando que a função $\bar{\Delta}(x)$ está ligada por uma relação simples a $\Delta(x)$. Seja ε_μ um vetor de tipo tempo arbitrário com $\varepsilon_o > 0$. Seja x um ponto de tipo tempo. Definiremos a função <u>sinal (x_o)</u> pelas condições:

$$\varepsilon(x) \equiv \text{sinal } (x_o) = \begin{cases} +1 \text{ para } x_o > 0 \\ -1 \text{ para } x_o < 0 \end{cases} \; . \tag{54}$$

Podemos representá-la de maneira invariante assim:

$$\varepsilon(x) = -\frac{\varepsilon_\mu \quad x_\mu}{|\varepsilon_\mu x_\mu|} \tag{55}$$

onde x é de tipo tempo.

Vamos mostrar que a relação entre $\bar{\Delta}(x)$ e $\Delta(x)$ é a seguinte:

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{2}\,\Delta(x)\,\varepsilon(x)\ . \tag{56}$$

para isso, devemos mostrar que $\bar{\Delta}(x)$ satisfaz à equação (51). Vemos, de (56) e (53), que fóra da origem se tem:

$$(\Box - K^2)\,\bar{\Delta}\,(x) = 0\ ,\ x_\mu \neq 0\ ,$$

uma vez que só quando atravessamos a origem por dentro do cône é a função $\varepsilon(x)$ descontínua.

Para vêr a que equação satisfaz $\bar{\Delta}(x)$ numa região que contém a origem, consideremos duas superfícies de tipo espaço σ_1 e σ_2, respectivamente no passado e no futuro da origem, e seja Δw a região do espaço-tempo compreendida entre ambas.

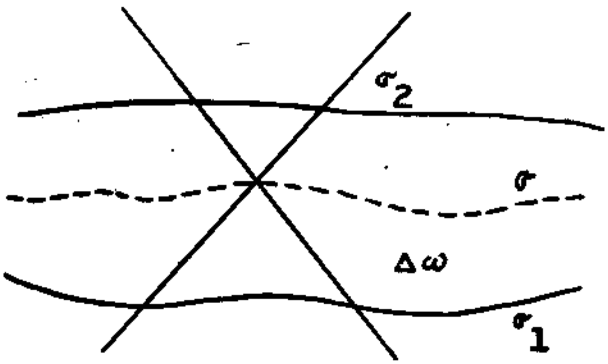


Fig. 7

$$\lim_{\Delta x \to 0} \int_{\Delta w} (\Box - K^2)\bar{\Delta}(x)\,dw =$$

$$= \lim_{\sigma_2,\sigma_1 \to \sigma} \left[\int_{\sigma_2} - \int_{\sigma_1}\right] \frac{\partial\bar{\Delta}}{\partial x_\mu}\,d\sigma_\mu\ ,$$

o limite sendo tomado para σ_1 e σ_2 tendendo a uma superfície de tipo espaço σ passando pela origem.

Levando em conta (56), (54) e (53,c) vem:

$$\lim \int_{\Delta w} (\Box - K^2)\bar{\Delta}(x)\,dw = -\int_\sigma \frac{\partial\Delta(x)}{\partial x_\mu}\,d\sigma_\mu = -1\ ;$$

por conseguinte:

$$(\Box - K^2)\,\bar{\Delta}(x) = -\,\delta(x)\ ,$$

o que estabelece (56).

A limitação imposta em (56), a saber, que x é um ponto de tipo tempo (como o exige a definição invariante (55) de $\varepsilon(x)$, não restringe a generalidade de (56), porquanto para um ponto de tipo espaço, $\bar{\Delta}(x)$ anula-se com $\Delta(x)$:

$$\bar{\Delta}(x) = 0\ ,\quad x_\mu^2 > 0\ . \tag{57}$$

Esta propriedade (57) e (53,b), das funções Δ e $\bar{\Delta}$ anularem-se fóra do cône de luz da origem, define o que se chama <u>caráter de propagação</u> da equação hiperbólica (52) (em particular, para $K = 0$, da equação (24)).

11 - <u>Integração da equação não-homogênea dos potenciais(continuação) Representação das funções de Green.</u>

Consideremos a equação (51):

$$(\Box - K^2)\,\bar{\Delta}(x) = -\,\delta(x)\ . \tag{51}$$

Seja:

$$(dk) = dk_o\ dk_1\ dk_2\ dk_3$$

a representemos $\bar{\Delta}(x)$ e $\delta(x)$ por integrais de Fourier:

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \bar{\Delta}(k)\, e^{ik_\mu x_\mu}(dk)\ , \tag{57}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik_\mu x_\mu}(dk)\ . \tag{58}$$

De (57) resulta:

$$(\Box - K^2)\,\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int (k_\lambda^2 + K^2)\bar{\Delta}(k)\; e^{ik_\mu x_\mu}(dk) \quad (59)$$

Levando (59) e (58) em (51) obtem-se:

$$\bar{\Delta}(k) = \frac{1}{k_\lambda^2 + K^2} \; .$$

Portanto:

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \;\; VP \int \frac{e^{ik_\nu x_\nu}}{k_\lambda^2 + K^2}(dk) \qquad (60)$$

onde VP significa que devemos tomar o valor principal da integral

Consideremos agora a integral

$$I(\varepsilon;\tau) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{ia\tau}\,\frac{a}{|a|}\,da$$

Temos:

$$I(\varepsilon;\tau) = \frac{2}{i\tau}\left[\cos\tau\varepsilon - 1\right]$$

Vemos que podemos representar a função $\frac{1}{\tau}$ como o valor principal da integral

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{i}{2} \;\; VP\; I\,(\infty\,;\tau) \qquad (61)$$

Fazendo, em (61),

$$\tau = k_\lambda^2 + K^2$$

vem:

$$\frac{1}{k_\lambda^2 + K^2} = -\frac{i}{2} \;\; VP\; I\,(\infty\,;\, k_\lambda^2 + K^2) \; . \qquad (62)$$

Levando (62) em (60):

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{i}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{|a|}\,da \quad e^{i(ak_\mu^2 + k_\mu x_\mu)}\,e^{iaK^2}\;(dk) \; . \; (63)$$

A identidade:

$$a(k_\mu + \frac{x_\mu}{2a})^2 = a\,k_\mu^2 + \frac{x_\mu^2}{4a} + k_\mu x_\mu$$

permite-nos escrever:

$$a\ k_\mu^2 + k_\mu x_\mu = a\ K_\mu^2 - \frac{x_u^2}{4a}$$

onde

$$K_\mu \equiv k_\mu + \frac{x_\mu}{2a} \quad .$$

Portanto:

$$\int e^{i(a\ k_\mu^2 + k_\mu x_\mu)} (dk) = e^{-\frac{1}{4a}\ x_\mu^2} \int e^{iaK_\mu^2} (dK) =$$

$$= i\,\frac{\pi^2}{a|a|}\ e^{-i\,\frac{x_\mu^2}{4a}} \tag{64}$$

A substituição de (64) em (63) dá:

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(aK^2 - \frac{x_\mu^2}{4a})}\ \frac{da}{a^2} \ .$$

Fazendo

$$\alpha = \frac{1}{4a} \ ,$$

tem-se:

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{K^2}{4\alpha} - \alpha x_\mu^2)}\ d\alpha \tag{65}$$

ou:

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{K^2}{4\alpha} - \alpha\ x_\mu^2 \right)\ d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\ \frac{\partial}{\partial\lambda} \int_0^{\infty} \operatorname{sen}\left(\lambda\alpha + \frac{K^2}{4\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha} \tag{66}$$

onde:

$$\lambda = -\ x_\mu^2 \ . \tag{67}$$

Finalmente, pondo:

$$\alpha = \frac{K}{2|\lambda|^{1/2}}\ e^y$$

vem:

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen} \left[\frac{K\,|\lambda|^{1/2}}{2} \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} e^{y} + e^{-y}\right)\right] dy$$

ou

$$\bar{\Delta}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi^2} \dfrac{\partial}{\partial\lambda} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen} \left[K\lambda^{1/2} \cosh y\right] dy, \text{ para } \lambda > 0 , \\ -\dfrac{1}{4\pi^2} \dfrac{\partial}{\partial\lambda} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen} \left[K\lambda^{1/2} \operatorname{senh} y\right] dy, \text{ para } \lambda < 0 . \end{cases} \tag{68}$$

Agora:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\text{sen } K\lambda^{1/2} \cosh y]\, dy = 2 \int_{0}^{\infty} \text{sen}\left[K\lambda^{1/2} \cosh y\right] dy =$$

$$= 2 \int_{1}^{\infty} \frac{\text{sen}(K\lambda^{1/2}\, v)}{(v^2 - 1)^{1/2}}\, dv \tag{69}$$

onde fizemos: $v = \cosh y \equiv \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$.

Mas a última integral é igual a π vezes a função de Bessel J_o do argumento $K\lambda^{1/2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}\left[K\, \lambda^{1/2} \cosh y\right] dy = \pi J_o(K\, \lambda^{1/2}), \text{ para } \lambda > 0 \tag{70}$$

Como $\operatorname{senh} y$ é impar em y , vê-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}\left[K\, \lambda^{1/2} \operatorname{senh} y\right] dy = 0 \tag{71}$$

Portanto, (70) e (71) dão a (68) a forma:

$$\bar{\Delta}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial\lambda} J_o(K\, \lambda^{1/2}), \text{ para } \lambda > 0 , \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , \text{ para } \lambda < 0 . \end{cases} \tag{72}$$

ou notando que:

$$\frac{d\, J_o(x)}{dx} = -\, J_1(x)$$

podemos escrever:

$$\bar{\Delta}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8\pi} K \frac{J_1(K\lambda^{1/2})}{1/2}, & \text{para } \lambda > 0 , \\ 0 & \text{para } \lambda < 0 . \end{cases} \qquad (72)$$

Finalmente, observemos que quando $\lambda \to 0$, $J_o(K\lambda^{1/2}) \longrightarrow 1$; portanto, (72) nos mostra que quando passamos por $\lambda = 0$, $\bar{\Delta}(x)$ passa por uma singularidade do tipo: $\frac{1}{4\pi}\ \delta(\lambda)$. Observemos ainda que:

$$J_1(K\ \lambda^{1/2}) = \text{Re } H_1^{(1)}\ (K\ \lambda^{1/2}), \text{ para } \lambda > 0 ,$$

$$0 = \text{Re } H_1^{(1)}\ (K\ \lambda^{1/2}), \text{ para } \lambda < 0 .$$

Obtemos, assim, a forma da função $\bar{\Delta}(x)$, a saber:

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{4\pi}\ \delta(x_\mu^2) - \frac{K^2}{8\pi} \text{Re } \frac{H_1^{(1)}\ (K\ \lambda^{1/2})}{k\ \lambda^{1/2}} . \qquad (73)$$

Fazendo, nesta fórmula:

$$K = 0$$

obtemos a função $\bar{D}(x)$:

$$\bar{D}(x) = \frac{1}{4\pi}\ \delta(x_\mu^2) . \qquad (74)$$

As fórmulas (73) e (74) dão-nos a representação das funções de Green das equações (52) e (24), respectivamente.

12 – Integração da equação não-homogênea dos potenciais (continuação). Potenciais retardado, avançado e ligado e funções de Green correspondentes.

Sabe-se que o potencial num ponto do espaço tri-dimensional $\vec{x}$ e num instante x_o , devido a cargas que emitiram sinais eletromagnéticos no passado (relativo a x_o), é o chamado <u>potencial retardado</u> e tem como expressão:

$$A_\mu^{ret}\ (\vec{x},x_o) = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{j_\mu(\vec{x}',x_o-|\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\ d^3x'. \quad (75)$$

Uma expressão simétrica a esta, no tempo, é o chamado <u>potencial avançado</u>:

$$A_\mu^{av}\ (\vec{x},x_o) = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{j_\mu(x',x_o+|\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\ d^3x'. \quad (76)$$

Ambos os potenciais (75) e (76) são soluções da equação (24). Entretanto, nos problemas de eletrodinâmica clássica usa-se apenas o potencial retardado, cuja interpretação física é imediata. A interpretação do potencial avançado (76) entra em choque com a lei de causalidade: êste potencial seria a soma das contribuições trazidas ao ponto $\vec{x}$ no instante x_o por sinais eletromagnéticos emitidos por cargas em todo o espaço e no futuro (relativo a x_o). Veremos no capítulo II, que êste potencial avançado é importante na teoria clássica do electron, como foi assinalado por Dirac em 1938.

Nêste parágrafo, vamos mostrar que a escolha entre (75) e (76) é fixada pelas condições iniciais do problema. Mostraremos que (75) e (76) resultam de funções de Green da equação (24), apropriadas, e, ao mesmo tempo, daremos a forma manifestamente covariante dêsses potenciais. Vamos definir o <u>potencial ligado</u> pela relação:

$$A^{lig.}(x) = \frac{1}{2}\left[A_\mu^{ret}(x) + A_\mu^{av}\ (x)\right] \quad (77)$$

Começaremos mostrando que a função de Green (74) corresponde à solução (77) para a equação (24). De fato, temos, segundo (50) e (74):

$$A_\mu(x) = \frac{1}{c}\int \bar{D}(x-x')\ j_\mu(x')dw' = \tag{78}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\ \frac{1}{c}\int \delta\left[(x_\mu - x'_\mu)^2\right]\ j_\mu(x')dw' \ .$$

Por outro lado, pela definição da função δ, temos (sendo $g'(x) > 0$):

$$\int f(x)\ \delta\left[g(x)\right] dx = \int \frac{f(x)}{g'(x)}\ \delta\left[g(x)\right] dg(x) =$$
$$= \left\{\frac{f(x)}{g'(x)}\right\}_{g(x)\,=\,0} \tag{79}$$

no último membro está indicado que devemos substituir x por uma das raizes de $g(x)$; a integração em (79) é extendida a um intervalo que contenha uma dessas raizes.

O argumento da função δ em (78) é $(x_\mu - x'_\mu)^2$ que se anula para:

$$(\vec{x} - \vec{x}')^2 = (x_o - x'_o)^2 \ ,$$

isto é, para:

$$x'_o = x_o - |\vec{x} - \vec{x}'| \ , \tag{80}$$

$$x'_o = x_o + |\vec{x} - \vec{x}'| \ . \tag{81}$$

Efetuando a integração sôbre x'_o em (78), teremos segundo (79), (80) e (81):

$$A_\mu(x) = \frac{1}{4\pi c}\int dx'_1\ dx'_2\ dx'_3\left[\int_{-\infty}^{x_o} + \int_{x_o}^{\infty}\right] dx'_o\ \delta\left\{(x_\mu - x'_\mu)^2\right\} j_\mu(x') =$$

$$= \frac{1}{4\pi c}\int dx'_1\ dx'_2\ dx'_3\ \left\{\left[\frac{j_\mu(\vec{x}', x'_o)}{2|x_o - x'_o|}\right]_{x'_o = x_o - |\vec{x}-\vec{x}'|} + \right.$$

$$+ \left[\frac{j_\mu(\vec{x}',x_0')}{2|x_0-x'_0|}\right]_{x_0' = x_0+|\vec{x}-\vec{x}'|} \Bigg\} . \tag{82}$$

Por conseguinte, vemos que:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2}\left[A_\mu^{ret.}(x) + A_\mu^{av}(x)\right] \equiv A_\mu^{lig}(x) ,$$

o que prova que a função de Green (74) determina o potencial ligado (77) como solução da equação (24).

Agora, é fácil de vêr, considerando o membro intermediário em (82), qual a condição inicial, que devemos impôr sôbre $A_\mu(x)$ para obtermos como solução o potencial retardado: devemos exigir que $A_\mu(x, -\infty) = 0$. Para o potencial avançado, a condição é: $A(x, +\infty) = 0$. A condição é expressa de maneira covariante exigindo que A_μ se anule sôbre uma superfície de tipo espaço no infinito passado (futuro, para o avançado).

A função de Green que determina o potencial retardado é a seguinte:

$$\bar{D}_{ret}(x) = \bar{D}(x)\,[1 + \varepsilon\,(x)] \tag{83}$$

onde (x) está definida em (54) e (55).

A função de Green para o potencial avançado é:

$$\bar{D}_{av}(x) = D(x)\,[1 - \varepsilon(x)] . \tag{84}$$

A verificação é imediata.

Fica, assim, verificado também que (75) e (76) são relativisticamente invariantes, com as seguintes formas alternativas, respectivamente:

$$A_\mu^{ret}(x) = \frac{1}{c}\int \bar{D}_{ret}(x-x')\ j_\mu(x')dw' \ , \tag{85}$$

$$A_\mu^{av}(x) = \frac{1}{c}\int \bar{D}_{av}(x-x')\ j_\mu(x')dw' \ . \tag{86}$$

O leitor poderá mostrar, sem dificuldade, que (83) e (84) satisfazem às seguintes equações:

$$\Box \bar{D}_{ret}(x) = -\ \delta(x)\ [1 + \varepsilon(x)]\ ,$$

$$\Box \bar{D}_{av}(x) = -\ \delta(x)\ [1 - \varepsilon(x)]\ ,$$

notando que:

$$\bar{D}(x) = \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x_\mu} = 0$$

(pois $\varepsilon^2(x) = 1$).

Destas relações e de (85) e (86), poderá concluir que se tem efetivamente:

$$\Box A_\mu^{ret}(x) = -\frac{1}{c}\ j_\mu(x);\ \frac{\partial A_\mu^{ret}}{\partial x_\mu} = 0\ .$$

$$\Box A_\mu^{av}(x) = -\frac{1}{c}\ j_\mu(x);\ \frac{\partial A_\mu^{av}}{\partial x_\mu} = 0\ .$$

13 - Representação da função de Jordan-Pauli.

A função de Jordan-Pauli $D(x)$ é a função $\Delta(x)$ para $K = 0$.

Segundo (76):

$$\Delta(x) = -\ 2\ \bar{\Delta}(x)\ \varepsilon(x)\ . \tag{87}$$

Uma representação integral de $\varepsilon(x)$ é obtida por inversão de (61):

$$\frac{a}{|a|} = -\frac{i}{\pi}\ \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\ a\tau}\ \frac{d\tau}{\tau}$$

que dá:

$$\varepsilon(x) = -\frac{\varepsilon_\mu x_\mu}{|\varepsilon_\mu x_\mu|} = \frac{i}{\pi}\, \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varepsilon_\mu x_\mu \tau} \frac{d\tau}{\tau} . \tag{88}$$

Substituindo (88) e (63) em (87), vem:

$$\Delta(x) = -\frac{2}{(2\pi)^5} \int (dk) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{|a|}\, da \ \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \times$$

$$\times\, e^{i(k_\mu x_\mu + \varepsilon_\mu \tau x_\mu)}\, e^{i(k_\mu^2 + K^2)a} \tag{89}$$

Substituindo em (89) k_μ por $k_\mu - \varepsilon_\mu \tau$, obtem-se

$$\Delta(x) = -\frac{2}{(2\pi)^5} \int (dk) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{|a|}\, da \ \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \times$$

$$\times\, e^{-2ia\varepsilon_\mu k_\mu \tau}\, e^{ia\varepsilon_\mu^2 \tau^2}\, e^{ik_\lambda x_\lambda}\, e^{ia(k_\lambda^2 + K^2)} .$$

Como $\Delta(x)$ é independente de ε_μ , podemos fazer $\varepsilon_\mu^2 \longrightarrow 0$. Notando que:

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ia\varepsilon_\mu k_\mu \tau} \frac{d\tau}{\tau} = i\pi \frac{a}{|a|}\, \varepsilon(k)$$

vem, finalmente:

$$\Delta(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik_\lambda x_\lambda}\, \delta(k_\lambda^2 + K^2)\ \varepsilon(k)(dk) . \tag{90}$$

É a representação de Fourier da função $\Delta(x)$. A forma habitual é obtida de (90) efetuando a integração sôbre k_o . Tem-se:

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k\, e^{i\vec{k}.\vec{x}} \left[\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty} \right] e^{-ik_o x_o} \times$$

$$\times\ \delta(k_\lambda^2 + K^2)\ \varepsilon(k)\ dk_o =$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k\, e^{i\vec{k}.\vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-ik_o x_o} - e^{ik_o x_o}) \times$$

$$\times\ \delta(k_\lambda^2 + K^2)\ dk_o\ .$$

Portanto:

$$\Delta(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}.\vec{x}}\ \frac{\text{sen}\ k_o x_o}{k_o}\ d^3k \qquad (91)$$

onde:

$$k_o = +\ (\vec{k}^2 + K^2)^{1/2}\ . \qquad (92)$$

Fazendo $K = 0$ em (90) e (91) obtem-se $D(x)$. Em particular, para esta função tem-se ainda a expressão:

$$D(x) = \frac{1}{4\pi r}\left[\delta(r + x_o) - \delta(r - x_o)\right] \qquad (93)$$

onde:

$$r \equiv |\vec{x}|\ .$$

(93) póde ser obtida de (91) por integração sôbre os ângulos polares no espaço $\vec{k}$ e notando que, segundo (92), $k_o = |\vec{k}|$. Esta fórmula mostra que a função D é singular sôbre o cône de luz, anulando-se, de resto, fora e dentro do cône. Isto corresponde ao fato de que esta função está associada ao campo de radiação, cujas ondas só se propagam com a velocidade da luz. Além das expressões equivalentes, (90) e (91), da função $\Delta(x)$, podemos obter uma outra, que nos ensina sôbre os pontos em que esta função é singular ou nula.

De (87) e (72'), vemos que (notando que $\lambda = -x_\mu^2 = x_o^2 - \vec{x}^2$):

$$\Delta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\ \dfrac{K}{(-x_\mu^2)^{1/2}}\ J_1\left[K(-x_\mu^2)^{1/2}\right]\ \varepsilon(x), & \text{para}\ \ x_\mu^2 < 0\ , \\[2ex] 0\ , & \text{para}\ \ x_\mu^2 > 0 \end{cases}$$

ou, notando a definição de $\varepsilon(x)$:

$$\Delta(x) \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{K}{(-x_\mu^2)^{1/2}} J_1 \left[K(-x_\mu^2)^{1/2}\right], \; x_\mu^2 < 0, \; x_o > |\vec{x}| , \\ 0, \;\; x_\mu^2 > 0 , \\ - \frac{1}{4\pi} \frac{K}{(-x_\mu^2)^{1/2}} J_1 \left[K(-x_\mu^2)^{1/2}\right], \; x_\mu^2 < 0, \; x_o < |\vec{x}| . \end{cases}$$

As relações (94) nos mostram: 1) que $\Delta(x)$ tem, no cône de luz, uma singularidade do mesmo tipo de (93) (como é evidente de (87) e (73)); 2) que $\Delta(x)$ se anula fora do cône de luz (o que corresponde ao fato de que ela está associada a um campo que não se propaga com velocidade maior que a da luz, como o exige a teoria da relatividade); 3) que, ao contrário da função $D(x)$, ela não se anula dentro do cône (e isto corresponde ao fato de que o campo pode emitir sinais com velocidade menor que a da luz).

Finalmente, vê-se da fórmula (91) que se tem:

$$\left(\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_o} \right)_{x_o = o} = \delta(\vec{x})$$

o que confirma o que dissemos em seguida a fórmula (47).

14 - O potencial irradiado e o potencial de Wentzel.

Encontramos, até aqui, estudando a integração das equações dos potenciais, quatro tipos de campo (ou potenciais), de significação física distinta: o campo de radiação, ou campo no vácuo, dado pela fórmula (43), e que satisfaz às equações:

$$\Box A_\mu = 0 ; \tag{95}$$

o campo retardado, o campo avançado e o campo ligado, dados respectivamente pelas fórmulas (75), (76) e (77) (ou (85), (86) e (77)), e que satisfazem às equações:

$$\square A_\mu = -\frac{1}{c}\ j_\mu\ ;\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0\ . \tag{96}$$

Podemos definir um outro campo, o campo irradiado, como a semi-diferença entre o potencial retardado e o avançado:

$$A_\mu^{rad}(x) = \frac{1}{2}\left[A_\mu^{ret}(x) - A_\mu^{av}(x)\right], \tag{97}$$

o qual, evidentemente, satisfaz as equações (95). Comporta-se, pois, como um campo de ondas no vácuo mas interage com as cargas, como é manifesto na ocorrência de j_μ na sua expressão integral:

$$A_\mu^{rad}(x) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{D}(x-x')\ \varepsilon(x-x')\, j_\mu(x')dw' =$$

$$= -\frac{1}{2\ c}\int_{-\infty}^{\infty} D(x-x')\ j_\mu(x')dw'\ .$$

O campo irradiado é, portanto, de tipo distinto dos campos retardado, avançado e ligado.

Finalmente, vamos definir o potencial de Wentzel. A integração na fórmula dos campos vistos anteriormente é extendida a todo o espaço-tempo. O campo de Wentzel é o seguinte:

$$A_\mu^W[x;\sigma] = -\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\sigma} D(x-x')\ j_\mu(x')dw' \tag{99}$$

em que a integração quadri-dimensional é estendida do infinito passado a uma dada superfície de tipo espaço. Depende, pois, em geral de σ :

$$\frac{\delta^* A_\mu^W[x;\sigma]}{\delta\sigma(y)} = -\frac{1}{2c}\ D(x-y)\, j_\mu(y)$$

e só se tem:

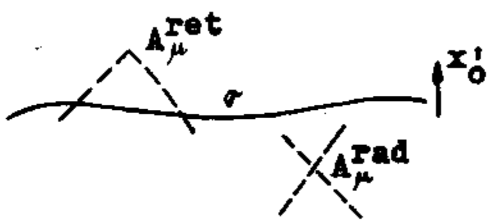
$$\frac{\delta A^W_\mu[x;\sigma]}{\delta\sigma(z)} = 0 \quad \text{se} \quad (x_\mu - z_\mu)^2 > 0 .$$

Resulta de (99) que A^W_μ satisfaz às seguintes equações:

$$\Box A^W = 0 \; ; \; \frac{\partial A^W_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2c} \int_\sigma D(x-x')j_\mu(x')d\sigma'_\mu . \qquad (100)$$

É ainda consequência de (99) que o valor de A^W_μ dependa da posição de x relativa à superficie σ. Se x estiver entre o infinito passado e σ tem-se:

$$A^W_\mu[x;\sigma] = A^{rad}_\mu(x;\sigma), \text{ para } -\infty < x_o < y_o(\sigma) .$$



Se x estiver no futuro de σ, ter-se-á:

$$A^W_\mu[x;\sigma] = A^{ret}_\mu(x;\sigma) ,$$

para $x_o > y_o(\sigma)$.

O campo irradiado e o campo de Wentzel foram introduzidos por Wentzel e Dirac na teoria clássica do eletron. Mas são conceitos, como vemos, independentes da estrutura discreta das cargas e podem ser logo introduzidos na eletrodinâmica das distribuições contínuas de cargas. O campo de Wentzel não é, entretanto, um campo de Maxwell, nêste sentido que não obedece às equações (96) ou (95), mas sim as equações (100).

PARTE C. PRINCÍPIO VARIACIONAL E FORMALISMO HAMILTONIANO

15 - Recordação do formalismo na mecânica dos pontos materiais.

As equações de movimento de um sistema de pontos materiais podem ser deduzidas, como é bem conhecido, do princípio variacional:

$$\delta \int L(q_i(t), \dot{q}_i(t)\, dt = 0 \qquad (101)$$

em que L é a função lagrangeana, que depende das coordenadas $q_i(t)$, de $\dot{q}_i(t) \equiv \frac{dq_i}{dt}$ e que, para um sistema conservativo, não depende explìcitamente do tempo.

A variação em (101) é tal que deixa fixos os extremos do caminho de integração e nessas condições (101) é equivalente às equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0; \quad i = 1,2,\ldots,n\ . \qquad (102)$$

Para os sistemas conservativos, a lagrangeana é a diferença entre a energia cinética e a energia potencial:

$$L = T - V \qquad (103)$$

e as equações (102 são as equações de movimento do sistema.

O leitor poderá verificar que estas equações são covariantes em relação a transformações arbitrárias das coordenadas q_i (o tempo permanecendo invariante), em particular, a transformações ortogonais das coordenadas de espaço (rotações ordinárias), desde que a função L seja invariante relativamente a tais transformações.

As equações (102) constituem um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem (nas derivadas de q_i em relação ao tempo) e sua integração, sob condições iniciais dadas, determina a trajetória do sistema, isto é, as funções $q_i(t)$. A introdução do formalismo hamiltoniano consiste, essencialmente, na substituição dêste sistema de n equações de segunda ordem por outro de $2n$ equações de primeira ordem. Define-se o momento p_i canônicamente conjugado à coordenada q_i por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ ; \quad i = 1, \dots, n. \tag{104}$$

Mediante estas n equações (104), exprimem-se os $\dot{q}_i$ em função dos p_i . A função hamiltoniana é então definida pela seguinte relação:

$$H = p_i \, \dot{q}_i - L \tag{105}$$

onde os $\dot{q}_i$ são substituidos pelas soluções de (104). Nessas condições, o sistema passa a ser determinado pela função $H(q,p)$ e as equações de movimento assumem a forma:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ ; \quad \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{106}$$

que são as <u>equações canônicas de Hamilton</u>.

Estas podem ainda ser expressas em uma outra forma, simples, elegante e de importância para a passagem à mecânica quântica.

Sejam $F(q,p)$ e $G(q,p)$ duas funções das variáveis canônicas; chama-se <u>parêntese de Poisson</u> de F e G a expressão:

$$[F,G] = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{107}$$

estando subentendida a soma sôbre os índices repetidos.

Se F não depende explicitamente do tempo, tem-se:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\,\dot{p}_i$$

ou, graças a (106) e (107):

$$\frac{dF}{dt} = [F,\ H]\ . \tag{108}$$

Em particular, fazendo F igual a q_i e sucessivamente a p_i, obtemos de (108):

$$\dot{q}_i = [q_i, H]\ ;\quad \dot{p}_i = [p_i, H]\ , \tag{109}$$

que é a nova forma das equações canônicas. São as seguintes as propriedades do parêntese de Poisson, de vácil verificação:

$$[F\ ,\ G] = -[G\ ,\ F]\ ;$$
$$[F,\ c_1G_1 + c_2G_2] = c_1\,[F,G_1] + c_2\,[F,G_2]\ ,$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Em particular:

$$\left.\begin{aligned} &[F\ ,\ c] = 0\ ;\\ &[c_1F_1 + c_2F_2,\ G] = c_1\,[F_1,G] + c_2\,[F_2,G]\ ;\\ &[F_1F_2,\ G] = F_1\,[F_2,G] + [F_1,G]\,F_2\ ;\\ &[F,G_1G_2] = G_1[F,G_2] + [F,G_1]\,G_2\ ; \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

$$[F_1,\ [F_2,F_3]] + [F_3,[F_1,F_2]] + [F_2,[F_3,F_1]] = 0 \tag{111}$$

Se F é uma integral das equações canônicas, isto é, se:

$$\frac{dF(q,p)}{dt} = 0$$

resulta de (108) que:

$$[F, H] = 0 \; .$$

Em particular, a hamiltoniana $H(q,p)$ é uma integral das equações de movimento. Resulta ainda de (111) que se F_1 e F_2 forem duas integrais de (106), $[F_1, F_2]$ também será uma integral de (106).

Segundo (107), são os seguintes os parênteses de Poisson das variáveis canônicas:

$$[q_i, q_j] = 0 \; ; \quad [p_i, p_j] = 0 \; ; \qquad (112)$$
$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} \; .$$

O leitor poderá verificar sem dificuldade que se admitirmos as relações fundamentais (112) e as propriedades (110) e (111) do parêntese de Poisson, poderemos deduzir a fórmula (107), admitindo que F e G são desenvolvíveis em série de potências nos q e p . Podemos, portanto, dizer que os <u>parênteses de Poisson</u> (112), <u>juntamente com a função hamiltoniana, determinam as equações de movimento da mecânica</u>.

De particular importância para a integração das equações (106) é o grupo das transformações canônicas. Uma transformação canônica é uma transformação das variáveis q_i , p_i em novas, Q_i , P_i :

$$Q_i = Q_i(q,p) \; ,$$
$$P_i = P_i(q,p) \; , \qquad (113)$$

de jacobiano diferente de zero, em relação à qual as equações canônicas são invariantes. Isto é, se $K(Q,P) = H(p,q)$ é a hamiltoniana expressa nas novas variáveis, a transformação canônica

(113) muda as equações (106) nas seguintes:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \; ; \; \dot{P}_i = - \frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad . \tag{114}$$

A condição necessária e suficiente para que uma transformação seja canônica é que deixe invariante o parêntese de Poisson de duas funções quaisquer das variáveis dinâmicas.

Para demonstrar êste teorema de maneira direta, é conveniente introduzir uma nova notação. Chamemos x o ponto $(q_1,\dots q_n,\ p_1 \dots p_n)$ do espaço de fase, isto é, façamos:

$$x_1 = q_1, \dots, x_n = q_n,\ x_{n+1} = p_1, \dots, x_{2n} = p_n \tag{115}$$

Introduzamos a seguinte matriz de $2n$ linhas e $2n$ colunas:

$$i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} n \text{ linhas} \\ \\ n \text{ linhas} \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \text{ colunas} & \quad n \text{ colunas} \end{matrix} \end{array} \tag{116}$$

Esta matriz transforma o vetor:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_n} \,,\ \frac{\partial F}{\partial p_1} \,, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_n} \right) \tag{117}$$

no seguinte:

$$i\sigma_2 \ \frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_n} \,, - \frac{\partial F}{\partial q_1} \,, \dots, - \frac{\partial F}{\partial q_n} \right) \tag{118}$$

Portanto, o parêntese de Poisson (107) é o produto escalar de $\frac{\partial F}{\partial x}$ com $i\sigma_2 \frac{\partial F}{\partial x}$:

$$[F,G] - \frac{\partial F}{\partial x_k}\, i\sigma_2 \ \frac{\partial G}{\partial x_k} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x} \,,\ i\sigma_2 \frac{\partial G}{\partial x} \right) \tag{119}$$

e as equações canônicas (106) se escrevem:

$$\frac{dx}{dt} = i\sigma_2 \frac{\partial H}{\partial x} . \tag{120}$$

Resulta de (113), por diferenciação, que:

$$\begin{aligned} dQ_i &= \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} dp_k , \\ dP_i &= \frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P_i}{\partial p_k} dp_k . \end{aligned} \tag{121}$$

Chamando X o transformado por (113) do ponto x (115):

$$X = X(x) \tag{122}$$

e designando com S a matriz de elementos $\frac{\partial X_i}{\partial x_k}$, podemos escrever (121) assim:

$$dX = S\ dx . \tag{123}$$

Como (114) tem agora a forma:

$$\frac{dX}{dt} = i\sigma_2 \frac{\partial K}{\partial X} \tag{124}$$

resulta de (120), (123) e (124) que:

$$i\sigma_2 \frac{\partial K}{\partial X} = i\ S\sigma_2 \frac{\partial H}{\partial x}$$

ou, notando que $\sigma_2^2 = I$, onde I é a matriz unidade:

$$\frac{\partial K}{\partial X} = \sigma_2\ S\sigma_2 \frac{\partial H}{\partial x} . \tag{125}$$

Por conseguinte, se a transformação (122) é canônica, a transformação S nas diferenciais das variáveis dinâmicas induz a transformação $\sigma_2 S\sigma_2$ entre $\frac{\partial H}{\partial x}$ e $\frac{\partial K}{\partial X}$. Seja, agora, F(x) uma função invariante em relação à transformação canônica, isto é:

$$F(X) = F(x) .$$

Nessas condições, sabemos que $\frac{\partial \overline{F}}{\partial X}$ se transforma de maneira contragradiente à dX, isto é, de:

$$\left(\frac{\partial \overline{F}(X)}{\partial X} , dX \right) = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x} dx \right) \tag{126}$$

e de:

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial X} = T \frac{\partial F}{\partial x} \tag{127}$$

resulta:

$$T'S = I \tag{128}$$

onde T' é a matriz transposta de T.

A condição necessária do teorema é provada notando que a transformação $\sigma_2 S \sigma_2$ (125) deixa invariante o parêntese de Poisson de $\frac{\partial F}{\partial x}$ com $\frac{\partial H}{\partial x}$:

$$\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial X} , i\sigma_2 \frac{\partial K}{\partial X} \right) = \left(T \frac{\partial F}{\partial x} , iS\sigma_2 \frac{\partial H}{\partial x} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x} , iT'S\sigma_2 \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} , i\sigma_2 \frac{\partial H}{\partial x} \right) .$$

A suficiência do teorema é imediata, pois se:

$$\left(\frac{\partial \overline{F}}{\partial X} , i\sigma_2 \frac{\partial K}{\partial X} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} , i\sigma_2 \frac{\partial H}{\partial x} \right)$$

resulta de (127), (128) e de:

$$\frac{\partial K}{\partial X} = U \frac{\partial H}{\partial x}$$

que:

$$U = \sigma_2 S \sigma_2$$

o que estabelece (125) e, em consequência, (124).

É corolário da invariância do parêntese de Poisson em relação às transformações canônicas que as relações fundamentais (112) permanecem invariantes:

$$\left[Q_i,Q_j\right] = 0 \; ; \quad \left[P_i,P_j\right] = 0 \; ; \qquad (112)'$$
$$\left[Q_i,P_j\right] = \delta_{ij} \; ,$$

as derivações em (112)' sendo tomadas em relação a q_i, p_i (em relação a Q,P, (112)' são triviais).

Uma propriedade importante das transformações canônicas (113) é que a diferença:

$$P_i dQ_i - p_i dq_i$$

é uma diferencial exata:

$$P_i dQ_i - p_i dq_i = dW \qquad (129)$$

em que W é função de $2n$ das variáveis p, q, P, Q.

Esta propriedade pode ser demonstrada da seguinte maneira. Seja δX um incremento de X independente de dX e consideremos as duas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} A &= (X,\ i\sigma_2\ \delta X) = Q_\lambda\ \delta P_\lambda - P_\lambda\ \delta Q_\lambda\ , \\ a &= (x,\ i\sigma_2\ \delta x) = q_\lambda\ \delta p_\lambda - p_\lambda\ \delta q_\lambda\ . \end{aligned} \qquad (130)$$

Em virtude da invariância do parêntese de Poisson, temos:

$$\left[A,\ K\right] = \left[a,\ H\right]$$

ou, segundo (119):

$$\left(\frac{\partial A}{\partial X},\ i\sigma_2\ \frac{\partial K}{\partial X} \right) = \left(\frac{\partial a}{\partial x},\ i\sigma_2\ \frac{\partial H}{\partial x} \right)$$

donde, em virtude de (125):

$$\frac{\partial A}{\partial X} = T\ \frac{\partial a}{\partial x}$$

isto é (veja (130)):

$$i\sigma_2\delta X = T\ i\sigma_2\delta x\ . \qquad (131)$$

Por conseguinte, graças a (123), (128) e (131):

$$(dX, i\sigma_2 \, \delta X) = (dx, i\sigma_2 \, \delta x)$$

ou:

$$dQ_\nu \, \delta P_\nu - dP_\nu \, \delta Q_\nu = dq_\nu \, \delta p_\nu - dp_\nu \, \delta q_\nu \qquad (132)$$

que exprime a propriedade (129). De fato, (132) significa que:

$$\left\{\left(\frac{\partial Q_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial P_\nu}{\partial x_k} - \frac{\partial q_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial Q_\nu}{\partial x_k} - \frac{\partial p_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial q_\nu}{\partial x_k} \right)\right\} dx_i \, \delta x_k = 0$$

ou, dada a arbitrariedade dos incrementos dx_i , δx_i :

$$\frac{\partial Q_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial P_\nu}{\partial x_k} - \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_k} = \frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial Q_\nu}{\partial x_k} - \frac{\partial p_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial q_\nu}{\partial x_k} \; . \qquad (133)$$

Mas de (129) resulta

$$P_\nu \frac{\partial Q_\nu}{\partial x_k} - p_\nu \frac{\partial q_\nu}{\partial x_k} = \frac{\partial W}{\partial x_k} \qquad (134)$$

donde:

$$\frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial Q_\nu}{\partial x_k} - \frac{\partial p_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial q_\nu}{\partial x_k} + P_\nu \frac{\partial^2 Q_\nu}{\partial x_i \partial x_k} - p_\nu \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 W}{x_i \partial x_k} \qquad (135)$$

Trocando, em (135), i com k e igualando o resultado a (135), obtem-se (133).

A importância das transformações canônicas reside essencialmente na possibilidade que nos oferecem de reduzir o problema da integração das equações canônicas (106) ao de uma única equação em derivadas parciais (mais a resolução de $2n$ equações algébricas). Bastará para tanto impormos que a hamiltoniana seja igual a uma das novas variáveis dinâmicas, Q_1 , digamos:

$$K(Q_i \, , P_i) = Q_1 \; . \qquad (136)$$

De (114) resulta, então, que:

$$\dot{Q}_i = 0 \ ; \ \dot{P}_i = \delta_{1i} \ ; \ i = 1,2,\ldots,n \tag{137}$$

isto é, $Q_1,\ldots Q_n$, $P_2,\ldots P_n$ são $2n - 1$ constantes e $P_1 = a - t$, onde a é outra constante.

Como

$$K(Q,P) = H(q,p) \tag{138}$$

e como, segundo (129):

$$P_i = \frac{\partial W(Q,q)}{\partial Q_i} \ ; \ p_i = \frac{\partial W(Q,q)}{\partial q_i} \tag{139}$$

a relação (136) é uma equação em derivadas parciais na função incógnita W :

$$H\left(q_i, -\frac{\partial W(q,Q)}{\partial q_i}\right) = Q_1 \tag{140}$$

onde os Q_i são n constantes. A equação (140) é a equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo e Q_1 é a constante da energia.

Encontrada uma integral completa desta equação - isto é, uma solução $W(q,Q)$ dependendo de n constantes Q, a solução $q(t)$, $p(t)$ do problema é dada implicitamente por (139), dependendo das $2n$ constantes de integração $Q_1,\ldots Q_n$, $P_2,\ldots P_n, a$.

16 - Recordação do formalismo hamiltoniano na mecânica dos pontos materiais. (Continuação).

No parágrafo anterior, foi apresentado sucintamente o formalismo da mecânica dos pontos materiais, na hipótese de que o tempo não ocorre explicitamente nas funções das variáveis dinâmicas, em particular na lagrangeana e hamiltoniana.

Ao caso mais geral em que tais funções dependem explicitamente de t, a teoria pode ser extendida de maneira simples e elegante introduzindo-se um novo parâmetro θ em função do qual podemos exprimir as variáveis de posição e o tempo:

$$q_i = q_i(\theta) \; ; \quad t = t(\theta) \; ; \; i = 1,2,\ldots n \; . \qquad (141)$$

Indicando com um ponto sôbre uma letra a derivada em relação a t e com um acento a derivada em relação a θ, poderemos escrever o princípio variacional:

$$\delta \int L(q_i(t), \, \dot{q}_i(t) \, , \, t) \, dt = 0 \qquad (142)$$

sob a seguinte forma:

$$\delta \int L(q_i(\theta), \frac{q'_i(\theta)}{t'(\theta)} \, , \, t(\theta)) \, t'(\theta) \, d\theta = 0 \; . \qquad (143)$$

Chamando:

$$\mathcal{L}(q_i(\theta), \, t(\theta), \, q_i'(\theta), \, t'(\theta)) \equiv L(q_i(\theta), \frac{q_i'(\theta)}{t'(\theta)}, t(\theta)) t'(\theta) \qquad (144)$$

e fazendo:

$$t(\theta) = a_{n+1}(\theta); \; t'(\theta) = q'_{n+1}(\theta) \qquad (145)$$

(143) torna-se:

$$\delta \int \mathcal{L}(q_\mu(\theta), \, q_\mu'(\theta)) \, d\theta = 0 \qquad (146)$$

onde o índice μ vai de 1 a n+1 .

A equação (146) é do mesmo tipo da equação (101) e, por conseguinte, se a variação em (146) deixa fixos os limites da integração, as equações de movimento são as equações de Euler--Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mu} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mu'} = 0 \; ; \; \mu = 1,\ldots,n+1 \; .$$

O momento canônicamente conjugado a coordenada q_μ é, analogamente a (104):

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_\mu} \; ; \quad \mu = 1, \ldots, n+1 \tag{147}$$

o que significa, tendo em vista (141), (144) e (145):

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \; ; \; i = 1,2,\ldots n \; , \tag{148}$$

$$p_{n+1} = L(q_i, \dot{q}_i, t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \; . \tag{149}$$

Resolvendo as n equações (148) em relação aos $\dot{q}_i$ e substituindo êstes em (149), obtemos:

$$\mathcal{H}(q_\mu, p_\mu) \equiv p_{n+1} + H(q_i, p_i, t) = 0 \tag{150}$$

onde H é definido como em (105).

As equações canônicas de Hamilton são, agora, as seguintes:

$$q'_\mu + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} \; ; \; p'_\mu = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\mu} \; , \; \mu = 1, \ldots, n+1 \tag{151}$$

que são equivalentes a:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; ; \; p_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \; ; \; i=1,\ldots n \; ; \tag{152}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \; .$$

Podemos formalmente definir o parêntese de Poisson dependente do tempo pela relação:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_\mu} \frac{\partial G}{\partial p_\mu} - \frac{\partial F}{\partial p_\mu} \frac{\partial G}{\partial q_\mu} \; .$$

Convencionando que $F(q_\mu, p_\mu)$ não depende de p_{n+1} (o que se obtem substituindo-se esta variável por $-H$ em F, segundo (150)):

$$F(q_\mu, p_\mu) = F(q_i, p_i, t); \ \frac{\partial F}{\partial p_{n+1}} = 0$$

exceto no caso da função $\mathcal{H}$, para a qual se tem:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{n+1}} = 1$$

vemos que:

$$\{F, \mathcal{H}\} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} .$$

Podemos, portanto, escrever:

$$\frac{dF}{d\theta} = \{F, \mathcal{H}\} \tag{153}$$

que é equivalente a

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H] . \tag{154}$$

As equações (151) ou (152) são, então, sistetizadas nas seguintes:

$$q'_\mu = \{q_\mu, \mathcal{H}\}; \quad p'_\mu = \{p_\mu, \mathcal{H}\} \tag{151'}$$

desde que se observe que:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_{n+1}} = 0 \ ; \ \frac{\partial p_i}{\partial p_{n+1}} = 0; \ i=1, \ldots, n .$$

Uma transformação canônica é agora definida pelas funções:

$$\begin{aligned} Q_\nu &= Q_\nu (q_\mu, p_\mu) , \\ P_\nu &= P_\nu (q_\mu, p_\mu) , \\ \nu &= 1, \ldots, n+1 \end{aligned} \tag{155}$$

que conservam as equações canônicas:

$$Q'_\mu = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_\mu} , \quad P'_\mu = - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_\mu} \ ; \ \mu=1, \ldots n+1 , \tag{156}$$

onde $\mathcal{K}$ é a transformada de $\mathcal{H}$ definida por:

$$\mathcal{K} = P_{n+1} + K(Q_i, Q_{n+1}, P_i) = 0 \ . \qquad (157)$$

Anàlogamente a (129), (155) é tal que

$$P_\nu \, d\, Q_\nu - dq_\nu = - \, dU(q_\mu, Q_\mu) \quad . \qquad (158)$$

Se, em particular, (155) deixar invariante o tempo:

$$Q_{n+1} = q_{n+1} = t$$

(158) dá:

$$(P_i \; dQ_i - Kdt - p_i dq_i + Hdt = -d\; U\;)$$

de onde resulta:

$$p_i = \frac{\partial U(q,Q,t)}{\partial q_i} \; ; \; P_i = \frac{\partial U(q,Q,t)}{\partial Q_i} \; ; \qquad (159)$$

$$K = H + \frac{\partial U}{\partial t} \ .$$

A redução da integração das equações canônicas à pesquisa da integral completa de uma equação em derivadas parciais é feita, no presente caso, impondo-se que a nova hamiltoniana K seja identicamente nula. Isto significa procurar uma função U que satisfaça à equação de Hamilton-Jacobi:

$$H(q_i, \frac{\partial U}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \ ,$$

$$\dot{Q}_i = 0 \quad ; \quad \dot{P}_i = 0 \quad . \qquad (160)$$

As novas variáveis Q_i, P_i, serão, nessas condições, constantes e a solução do problema é dada pelas duas primeiras relações (159), $U(q,Q)$ sendo uma integral completa de (160).

É, pois, evidente que toda integral completa da equação de Hamilton-Jacobi representa (ou gera) uma transformação canônica das variáveis do sistema q,p às variáveis de equilíbrio

Q,P .

Uma importante integral completa da equação (160) é a ação (ou função principal de Hamilton):

$$(S = \int_{\theta_o}^{\theta_1} \mathcal{L}\, d\,\theta) . \tag{161}$$

Para mostrar que S é solução de (160) basta variar (161):

$$\delta S = \int_{\theta_o}^{\theta_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_\lambda} \delta q'_\lambda \right] d\theta \tag{162}$$

e tomar para $q_\mu(\theta)$ a função que torna S extremal, o que transforma, graças as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mu} - \frac{d}{d\,\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_\mu} = 0 \quad ,$$

(162) em:

$$\delta S = \int_{\theta_o}^{\theta_1} \frac{d}{d\,\theta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_\mu} \delta\, q_\mu \right) d\theta \; .$$

Tendo em vista (147) e chamando p_μ , q_μ as variáveis canônicas para $\theta = \theta_1$, P_μ , Q_μ para $\theta = \theta_o$, vem:

$$\delta S\;(q,Q) = p_\lambda\, \delta q_\lambda - P_\lambda\, \delta Q_\lambda \; . \tag{163}$$

A comparação de (163) com (158) mostra que:

$$S = U$$

e, segundo (159) (supondo $Q_{n+1} = q_{n+1} = t$):

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \equiv p_i(t_1) \;\; ; \;\; P_i = - \frac{\partial S}{\partial Q_i} \equiv p_i(t_o)$$

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad .$$

Além disso, escrevendo (161) na forma equivalente:

$$\left(S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i(t),\ \dot{q}_i(t),\ t)dt\right),$$

obtemos, conservando t_0 fixo e t_1 variável:

$$\frac{d\,S}{d\,t_1} = \frac{\partial S}{\partial t_1} + \frac{\partial S}{\partial q_i}\ \frac{dq_i}{dt_1} = \frac{\partial S}{\partial t_1} + p_i\,\dot{q}_i\ .$$

Mas:

$$\frac{d\,S}{dt_1} = L(q_i(t_1)\ ,\ \dot{q}_i(t_1), t_1)\ ;$$

$$H(t_1) = p_i\dot{q}_i - L(t_1)\ ,$$

portanto:

$$\frac{\partial S}{\partial t_1} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\ ,\ t_1) = 0\ . \qquad (164)$$

S é, pois, a particular integral completa da equação de Hamilton-Jacobi que transforma as variáveis dinâmicas do valor q_i, p_i correspondente a $t = t_1$ ao valor inicial Q_i, P_i .

17 - <u>Representação de Hamilton-Heisenberg e representação de Hamilton-Schrödinger na mecânica clássica. Representação da interação</u>.

Finalmente, introduziremos a seguinte nomenclatura: quando resolvemos o problema dinâmico integrando as equações (152), e, portanto, quando as variáveis dinâmicas dependem do tempo e satisfazem a essas equações, diremos que se analisa o problema na <u>representação de Hamilton-Heisenberg</u>; quando resolvemos o problema integrando a equação de Hamilton-Jacobi (160) e, portanto, as variáveis dinâmicas Q_i, P_i , do sistema não dependem de t , diremos que se estuda o problema na <u>representação de</u>

Hamilton-Schrödinger . A transformação canônica U que reduz uma representação à outra mostra que ambas são equivalentes.

Além dessas, podemos definir uma representação mixta, isto é, uma representação em que as variáveis dinâmicas Q_i, P_i dependem de t e em que se tem uma equação de Hamilton-Jacobi a integrar.

Se a hamiltoniana puder ser escrita

$$H = H_o + V$$

em que H_o é a parte que descreve o sistema isolado e V é a energia potencial, a representação mixta pode ser obtida impondo que a hamiltoniana transformada, K, (por uma transformação canônica) seja igual a H_o. Dêsse modo, as equações são:

$$\begin{gathered} V(q_i, \frac{\partial U}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \\ \dot{Q}_i = \frac{\partial H_o}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = - \frac{\partial H_o}{\partial Q_i} \end{gathered} \tag{165}$$

e definem o que chamaremos a representação da interação.

18 - Formalismo hamiltoniano da eletrodinâmica de Maxwell.

Um sistema de pontos materiais com n graus de liberdade é descrito por n funções do tempo, $q_i(t)$. Um campo eletromagnético é definido por uma função $A_\mu(\vec{x},t)$ (com quatro componentes) que, além de depender do tempo, depende das três coordenadas de um ponto do espaço ordinário. Se pensarmos essas coordenadas como índices da função A_μ :

$$(A_\mu \, , \, x_1, \, x_2, \, x_3^{(t)})$$

poderemos considerar o campo eletromagnético como um sistema mecânico com uma infinidade contínua de graus de liberdade (no caso de um campo encerrado numa região de volume finito, a infinidade contínua é redutível a uma infinidade enumerável). E, de fato, o formalismo canônico da mecânica ordinária pode ser generalizado para o tratamento de tais sistemas.

Com o campo $A_\mu(\vec{x},t)$ e suas derivadas primeiras em relação às coordenadas de espaço e de tempo, formemos uma função L de modo que seja invariante em relação ao grupo de Lorentz. Isto é obtido mediante convenientes contrações dos índices μ e ν em A_μ e $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$:

$$L = L(A_\mu(\vec{x},t), \frac{\partial A_\mu(\vec{x},t)}{\partial x_\nu}) \tag{166}$$

(vemos logo que L só pode ser função dos invariantes A_μ^2 e $(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu})^2$. Mas como consideramos as coordenadas espaciais x_1, x_2, x_3 como índices do campo, devemos somar L sôbre êsses índices para termos a função $\bar{L}$ que corresponda à que figura em (101):

$$\bar{L} = \int L \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \tag{167}$$

de modo que o princípio variacional da eletrodinâmica é:

$$\delta \int \bar{L} \, dt = 0 \tag{168}$$

ou, graças a (167):

$$\delta \int L \, dw = 0 \, . \tag{169}$$

As equações do campo são as equações de Euler-Lagrange, obtidas tomando a variação em (169) de modo que a variação do campo δA_μ se anule na fronteira da região de integração.

Tem-se:

$$\delta \int L \, dw = \int \delta \, L \, dw = \int \left[\frac{\partial L}{\partial A_\mu} \, \delta A_\mu + \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu})} \, \delta (\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}) \right] dw =$$

$$= \int \left[\frac{\partial L}{\partial A_\mu} \, \delta A_\mu + \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu})} \, \frac{\partial}{\partial x_\nu} \, \delta A_\mu \right] dw$$

o que dá, após uma integração por partes:

$$\delta \int L \, dw = \int \left[\frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \, \frac{L}{\partial (\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu})} \right] \delta A_\mu \, dw \, .$$

A equação (169) é, pois, equivalente às equações:

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \, \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu})} = 0 \, . \tag{170}$$

A densidade de lagrangeaná do campo eletromagnético no vácuo é:

$$L_o = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)^2 \tag{171}$$

para o qual (170) dá:

$$\Box A_\mu = 0 \, . \tag{40}$$

A esta equação é necessário impôr-se, para um campo de Maxwell, a condição suplementar de Lorentz:

$$\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \right)$$

que não decorre de (170).

Uma forma alternada para L_e é a seguinte:

$$L_o = - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\Sigma \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \right)^2 \, , \tag{172}$$

para a qual (170) dá lugar a (40). Tanto neste caso quanto no anterior a condição de Lorentz é postulada suplementarmente afim de que (40) seja equivalente às equações de Maxwell:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 .$$

(172) é equivalente a (171) desde que o campo se anule no contôrno de integração. As equações (170) são obviamente covariantes se L fôr relativisticamente invariante. Estas equações podem ser escritas sob uma outra forma, que as assemelha às equações (102). Segundo (166) e (167), $\bar{L}$ é um funcional de A_μ e $\mathring{A}_\mu$:

$$\bar{L} = \bar{L}\,[A_\mu, \mathring{A}_\mu] .$$

Define-se a derivada funcional de $\bar{L}$ em relação a A_μ pela fórmula:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial A_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_\mu}{\partial \mathring{x}_i}} \tag{173}$$

onde no 2º membro, L é a densidade de lagrangeana e i vai de 1 a 3. E também:

$$\frac{\delta \bar{L}}{\partial \mathring{A}_\mu} = \frac{\partial L}{\partial \mathring{A}_\mu} ; \quad \mathring{A}_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial t} \tag{174}$$

de modo que (170) se escreve:

$$\frac{\delta \bar{L}}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \bar{L}}{\delta \mathring{A}_\mu} = 0 . \tag{175}$$

A desvantagem destas equações é destruir a aparência covariante das equações (170).

O momento canônicamente conjugado a A_μ é definido, anàlogamente a (104), por:

$$\Pi_\mu(x) = \frac{\partial L}{\partial \mathring{A}_\mu(x)} ; \quad x = (\vec{x}, t) \tag{176}$$

e a densidade de hamiltoniana H por:

$$H = \Pi_\mu(x)\,\dot{A}_\mu(x) - L \qquad (177)$$

sendo:

$$\bar{H} = \int H \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \qquad (178)$$

$\dot{A}_\mu$ é expresso em função Π_μ, A_μ e $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_i}$ em (176) e substituido em (177):

$$H = H(A_\mu, \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}, \Pi_\mu) \; ; \; \bar{H} = \bar{H}\,[A_\mu, \Pi_\mu] \,.$$

Considerando as coordenadas espaciais x_i como índices contínuos do campo, podemos definir a variação $\delta\bar{H}$ do funcional $\bar{H}$ pela relação:

$$\delta\bar{H} = \int \left(\frac{\delta\bar{H}}{\delta A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\delta\bar{H}}{\delta \Pi_\mu} \delta \Pi_\mu \right) d^3x \qquad (179)$$

que generaliza a diferencial de uma função ordinária:

$$d\varphi = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i \,. \qquad (180)$$

De (177) e (178) resulta também que:

$$\delta\bar{H} = \int \left[\Pi_\mu \delta\dot{A}_\mu + \dot{A}_\mu \delta\Pi_\mu - \frac{\partial L}{\partial A_\mu} \delta A_\mu - \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\mu} \delta \dot{A}_\mu + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_\mu}{\partial x_k}} \delta A_\mu \right] d^3x =$$

$$= \text{(veja (176) e (170))} = \int \left[\dot{A}_\mu \delta\Pi_\mu - \dot{\Pi}_\mu \delta A_\mu \right] d^3x \quad . \qquad (181)$$

Comparando (179) com (181) obtém-se:

$$\dot{A}_\mu^{(x)} = \frac{\delta\bar{H}}{\delta\Pi_\mu(x)} \; ; \; \dot{\Pi}_\mu^{(x)} = - \frac{\delta\bar{H}}{\delta A_\mu(x)} \qquad (182)$$

que são as equações canônicas do campo eletromagnético.

Assim, o formalismo canônico nos faz passar do funcional $\bar{L}\,[A_\mu, \dot{A}_\mu]$ ao funcional $\bar{H}[A_\mu, \Pi_\mu]$ e das quatro equações de 2a. ordem (175) às oito equação de 1a. ordem (182).

O parêntese de Poisson de dois funcionais $F[A_\mu,\pi_\mu]$ e $G[A_\mu,\pi_\mu]$ é definido pela expressão:

$$[F,G] = \int\left\{\frac{\delta F}{\delta A_\mu(\vec{x},t)}\ \frac{\delta G}{\delta \pi_U(\vec{x},t)} - \frac{\delta F}{\delta \pi_\mu(\vec{x},t)}\ \frac{\delta G}{\delta A_\mu(\vec{x},t)}\right\} d^3x \quad (183)$$

construída por analogia com (173). Observemos que da identidade:

$$A_\mu(\vec{x},t) = \int A_\lambda\ (\vec{y},t)\ \delta_\lambda\mu\delta(\vec{y}-\vec{x})d^3y$$

e de (173), resulta:

$$\frac{\delta A_\mu(\vec{x},t)}{\delta A_\lambda(\vec{y},t)} = \delta(\vec{y}-\vec{x})\delta_\lambda\mu\ ; \quad (184)$$

e como A_μ e π_μ no mesmo instante, são variáveis independentes: $\frac{\delta A_\mu(\vec{x},t)}{\delta \pi_\lambda(\vec{y},t)} = 0$ obtemos:

$$[A_\mu(x),\ \bar{H}[x]] = \int \frac{\delta A_\mu(\vec{x},t)}{\delta A_\lambda(\vec{y},t)}\ \frac{\delta \bar{H}[y]}{\delta \pi_\lambda(\vec{y},t)}\ d^3y = \frac{\delta \bar{H}[x]}{\delta \pi_\mu(x)}$$

Obs.: $\bar{H}[x] = \bar{H}[A_\lambda(x),\ \pi_\lambda(x)]$.

Por conseguinte, as equações canônicas (182) podem ser escritas assim:

$$\mathring{A}_\mu(x) = [A_\mu(x),\ \bar{H}]\ ;\ \ \mathring{\pi}_\mu(x) = [\pi_\mu(x),\ \bar{H}]\ . \quad (185)$$

Os parênteses de Poisson das variáveis canônicas do campo são òbviamente os seguintes:

$$[A_\mu(\vec{x},t),\ \ A_\lambda(\vec{y},t)] = 0\ ,$$
$$[\pi_\mu(\vec{x},t),\ \ \pi_\lambda(\vec{y},t)] = 0\ ,$$
$$[A_\mu(\vec{x},t),\ \ \pi_\lambda(\vec{y},t)] = \delta\mu_\lambda\delta(\vec{x}-\vec{y})\ .$$

As equações (185) e (186) descrevem o campo na representação de Hamilton-Heisenberg. Para passarmos à representação de Hamilton-

-Schrödinger, efetuamos uma transformação canônica, de modo que $a_\mu(\vec{x},t)$ e $\mathcal{P}_\mu(\vec{x},t)$ designem as novas variáveis canônicas do campo; assim, (por analogia com (158)), tem-se:

$$\int \left\{ \mathcal{P}_\mu(\vec{x},t)\,\delta a_\mu(\vec{x},t) - \Pi_\mu(\vec{x},t)\,\delta A_\mu(\vec{x},t) \right\} d^3x - \bar{K}\,dt + \bar{H}\,dt = -\delta\bar{U} =$$
$$= -\int \left\{ \frac{\delta\bar{U}}{\delta A_\mu(\vec{x},t)}\,\delta A_\mu(\vec{x},t) + \frac{\delta\bar{U}}{\delta a_\mu(\vec{x},t)}\,\delta a_\mu(\vec{x},t) \right\} d^3x - \frac{\partial\bar{U}}{\partial t}\,dt\,. \tag{187}$$

Daí tiramos:

$$\Pi_\mu(\vec{x},t) = \frac{\delta\bar{U}}{\delta A_\mu(\vec{x},t)}\,;\quad \mathcal{P}_\mu(\vec{x},t) = -\frac{\delta\bar{U}}{\delta a_\mu(\vec{x},t)}\,;\quad \bar{K} = \bar{H} + \frac{\partial\bar{U}}{\partial t} \tag{188}$$

sendo:

$$\dot{a}_\mu(x) = [a_\mu(x), \bar{K}]\,;\quad \dot{\mathcal{P}}_\mu(x) = [\mathcal{P}_\mu(x), \bar{K}]\,.$$

Na representação de Hamilton-Schrödinger o campo é, pois, descrito por funções independentes do tempo:

$$\dot{a}_\mu = 0\,.\quad \dot{\mathcal{P}}_\mu = 0 \tag{189}$$

e pela equação de Hamilton-Jacobi:

$$\bar{H}\left[A_\mu\,, \frac{\delta\bar{U}}{\delta A_\mu}\right] + \frac{\partial\bar{U}}{\partial t} = 0\,. \tag{190}$$

19 - <u>Formalismo hamiltoniano da eletrodinâmica de Maxwell.(Continuação). Campo de interação com uma distribuição contínua de cargas: teoria de Mie</u>.

O expôsto no parágrafo anterior vale não sòmente para um campo livre, cuja densidade de lagrangeana é (171) ou (172), mas também para um campo em interação com uma distribuição contínua de cargas. Nêste caso, a densidade de lagrangeana é a soma de três termos: um, L_o, representa o campo eletromagnético livre, (171) outro representa a distribuição de cargas livres, L_m, e o terceiro é a densidade da lagrangeana de interação entre o campo e as cargas, L_{int}:

$$L = L_o + L_m + L_{int} \quad . \qquad (191)$$

Para uma distribuição contínua de cargas, as equações de movimento podem ser obtidas do princípio variacional, seguindo-se a concepção de Mie. A distribuição de cargas é assemelhada a um fluído contínuo, que dividimos em elementos infinitesimais; a cada elemento atribuimos uma massa (positiva) invariante (massa de repouso), dm_o, e uma carga dq, invariante. A evolução dêste elemento é dada por uma linha de universo, ou melhor, um tubo de universo arbitrariamente delgado. O tempo próprio elementar $d\tau$ é definido pela relação:

$$d\tau^2 = -dx_\mu^2 \qquad (192)$$

que é invariante. Finalmente, definimos uma densidade de massa invariante, μ_o, da distribuição de cargas, pela igualdade:

$$dm_o \, d\tau = \mu_o \, dw \, . \qquad (193)$$

Tomamos $-\mu_o c^2$ como sendo L_m. Temos, para a ação correspondente a L_m:

$$\int L_m \, dw = -\int \mu_o c^2 \, dw = -\int c^2 \, dm_o \, d\tau \qquad (194)$$

ou segundo (192):

$$\int L_m \, dw = i \int c^2 \, dm_o \left(\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} \right)^{1/2} d\tau \, . \qquad (195)$$

O princípio variacional é:

$$\delta \int L \, dw = 0 \tag{196}$$

em que L é dado por (191), sendo:

$$L_e = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)^2 \; ; \quad L_m = -\mu_o c^2 = i\mu_o c^2 \left[\frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}\right]^{1/2} ;$$

$$L_{int} = \frac{1}{2} \; j_\mu(x) \, A_\mu(x) \; ; \tag{197}$$

$j_\mu(x)$ é a densidade de corrente elétrica. Variando, em (196), o Campo A_μ, obtemos, graças a (197):

$$\Box A_\mu = -\frac{1}{c} \, j_\mu \, .$$

Variando, em (196), as linhas de universo do fluído de cargas, obtemos:

$$-\delta\int \mu_o c^2 \, dw + \delta\int \frac{1}{c} \, j_\mu \, A_\mu \, dw = 0 \, . \tag{198}$$

Introduzindo a densidade invariante de cargas ρ_o tal que

$$dq \, d\tau = \rho_o \, dw \; ; \quad j_\mu = c \, \rho_o \, \frac{dx_\mu}{d\tau} \tag{199}$$

vem, para (198), tendo em vista (195):

$$ic^2 \, \delta\int dm_o \left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)^{1/2} d\tau + \delta\int \rho_o \frac{dx_\mu}{d\tau} A_\mu \, dw = 0$$

ou, por (199): $ic^2\delta\int dm_o\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)^{+1/2} d\tau + \delta\int dq \frac{dx_\mu}{d\tau} A_\mu \, d\tau = 0$

isto é: $ic^2 \, \delta\int dm_o \left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)^{-1/2} \frac{dx_\mu}{d\tau} \, \delta\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) d\tau +$

$$+ \int dq \left[\delta\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) A_\mu + \frac{dx_\mu}{d\tau} \, \delta \, A_\mu\right] d\tau = 0 \, .$$

Integração por partes dá lugar a (considerando também (192)):

$$-c^2\int dm_o \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)\delta x_\mu d\tau + \int dq\left(\delta A_\mu \frac{dx_\mu}{d\tau} - \delta x_\mu \frac{dA_\mu}{d\tau}\right) d\tau =$$

$$= -c^2\int dm_o \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)\delta x_\mu d\tau + \int dq\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\delta x_\nu \frac{dx_\mu}{d\tau} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\delta x_\mu \frac{dx_\nu}{d\tau}\right) d\tau \; =$$

$$= \int \mu_o c^2 \ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)\delta x_\mu dw + \frac{1}{c}\int F\nu\mu j_\mu \delta x_\nu dw = 0 \ .$$

Por conseguinte, devemos ter:

$$\mu_o c^2 \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right) = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} \ j^\nu \tag{200}$$

que é a equação de movimento dos elementos do fluído de cargas de Mie.

Para obtermos a hamiltoniana, devemos calcular dois momentos, um Π_μ conjugado ao campo, dado por (176), o outro, conjugado à coordenada do elemento de carga e definido por:

$$p_\mu = \frac{L}{\partial\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)} \ . \tag{201}$$

Temos, segundo (191) e (197):

$$\Pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \mathring{A}_\mu} = \frac{1}{c^2} \mathring{A}_\mu \quad ; \tag{202}$$

$$p_\mu = \frac{1}{c} \ \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)} = i\mu_o c \ \frac{\frac{dx_\mu}{d\tau}}{\left\{\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)^2\right\}^{1/2}} + \rho_o A_\mu =$$

$$= \mu_o c \ \frac{dx_\mu}{d\tau} + \rho_o \ A_\mu \ . \tag{203}$$

Por conseguinte:

$$H = p_\mu \ c \ \frac{dx_\mu}{d\tau} + \Pi_\lambda \mathring{A}_\lambda - L = \frac{1}{2}\left\{c^2 \Pi_\mu^2 + \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)^2\right\} + \\ + \frac{1}{\mu_o}\left(p_\mu - \rho_o A_\mu\right)^2 - i\left\{\left(p_\mu - \rho_o A_\mu\right)^2\right\}^{1/2}. \tag{204}$$

As equações canônicas (182) dão:

$$\mathring{A}_\mu = c^2 \Pi_\mu \ ; \ \dot{\Pi}_\mu = \frac{\rho_o}{\mu_o}\left(p_\mu - \rho_o A_\mu\right) + \vec{\nabla}^2 A_\mu = j_\mu + \vec{\nabla}^2 A_\mu \ , \tag{205}$$

isto é:

$$\Box A_\mu = -\frac{1}{c} j_\mu \quad .$$

As equações canônicas para as cargas são:

$$\begin{aligned} c\frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} &= \frac{2(p_\mu-\rho_o A_\mu)}{\mu_o} - i\frac{p_\mu-\rho_o A_\mu}{\left[(p_\lambda+\rho_o A_\lambda)^2\right]^{1/2}} = \\ &= \frac{p_\mu-\rho_o A_\mu}{\mu_o} \; ; \; c\frac{dp_\mu}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial y_\mu} = \frac{\rho_o}{\mu_o}(p_\lambda-\rho_o A_\lambda)\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} = \\ &= \frac{1}{c} j_\lambda \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} \end{aligned} \qquad (206)$$

que equivalem a (200).

Na representação de Hamilton-Heisenberg, os parênteses de Poisson fundamentais da teoria são:

$$\left.\begin{aligned} \left[A_\mu(\overline{x},t),\, A_\nu(\overline{y},t)\right] &= \left[\Pi_\mu(\overline{x},t),\, \Pi_\nu(\overline{y},t)\right] = 0 \; ; \\ \left[A_\mu(\overline{x},t),\, \Pi_\nu(\overline{y},t)\right] &= \delta_{\mu\nu}\delta(\overline{x}-\overline{y}) \; ; \end{aligned}\right| \qquad (186)$$

para as variáveis do campo, e:

$$\begin{aligned} [x_\mu, x_\nu] = [p_\mu, p_\nu] &= 0 \; ; \\ [x_\mu(\tau),\, p_\nu(\tau)] &= \delta_{\mu\nu} \; ; \end{aligned}$$

para as variáveis de um elemento de carga. Observemos que, nesta teoria, usamos dois tempos: o tempo t do campo e tempo próprio τ dos elementos de carga.

20 - Parêntese de Poisson covariante de um campo livre.

Os parênteses de Poisson (186) referem-se a duas variáveis do campo eletromagnético tomadas em dois pontos do espaço tri-dimensional correspondentes ao mesmo instante; isto é, em dois pontos de um plano perpendicular ao eixo dos t no espaço--tempo. Portanto, êsses parênteses de Poisson especificam um particular sistema de referência.

<u>Para um campo livre</u>, isto é, que obedece à equação (40), podemos construir um parêntese de Poisson covariante, relativo às variáveis do campo tomadas em dois pontos quaisquer do espaço-tempo. Temos, segundo a definição (183):

$$\begin{aligned}&[A_\mu(\vec{x},t),\ A_\nu(\vec{x}',t')] = \\ &= \int\left[\frac{\delta A_\mu(\vec{x},t)}{\delta A_\lambda(\vec{y},t)}\ \frac{\delta A_\nu(\vec{x}',t')}{\delta \pi_\lambda(\vec{y},t)} - \frac{\delta A_\mu(\vec{x},t)}{\delta \pi_\lambda(\vec{y},t)}\,\frac{\delta A_\nu(\vec{x}',t')}{\delta A_\lambda(\vec{y},t)}\right]d^3y\ .\end{aligned} \tag{207}$$

Mas, no mesmo instante t, A_μ e π_μ são variáveis independentes:

$$\frac{\delta A_\mu(\vec{x},t)}{\delta \pi_\lambda(\vec{y},t)} = 0\ , \tag{208}$$

logo,

$$[A_\mu(\vec{x},t),\ A_\nu(\vec{x}',t')] = \int\frac{\delta A_\mu(\vec{x},t)}{\delta A_\lambda(\vec{y},t)}\,\frac{\delta A_\nu(\vec{x}',t')}{\delta \pi_\lambda(\vec{y},t)}d^3y\ . \tag{209}$$

Desenvolvamos $A_\nu(\vec{x}',t')$ em série de Taylor em torno do instante t:

$$\begin{aligned}A_\nu(\vec{x}',t') &= A_\nu(\vec{x}',t)+(t'-t)\left(\frac{\partial A_\nu(\vec{x}',t')}{\partial t'}\right)_{t'=t} + \\ &+ \frac{1}{2!}(t'-t)^2\left(\frac{\partial^2 A_\nu(\vec{x}',t')}{\partial t'^2}\right)_{t'=t} + \frac{1}{3!}(t'-t)^3\left(\frac{\partial^3 A}{\partial t'^3}\right)_{t'=t} + \dots\end{aligned} \tag{210}$$

Tendo em vista que, segundo (202) e (40):

$$\left(\frac{\partial A_\nu(\vec{x}',t')}{\partial t'}\right)_{t'=t} = c^2\pi_\nu(\vec{x}',t)\ ,$$

$$\left(\frac{\partial^2 A_\nu(\vec{x}',t')}{\partial t'^2}\right)_{t'=t} = c^2\, \vec{\nabla}'^2\, A_\nu(\vec{x}',t) \ ,$$

e notando (184), obtem-se para (209), por substituição de (210):

$$[A_\mu(\vec{x},t),\ A_\nu(\vec{x}',t')] = \int \delta\mu\lambda\delta(\vec{x}-\vec{y}) \left\{ \frac{\delta A_\nu(\vec{x}',t)}{\delta \pi_\lambda(\vec{y},t)} + \right.$$

$$+ (t'-t)c^2 \frac{\delta \pi_\nu(\vec{x}',t)}{\delta \pi_\lambda(\vec{y},t)} + \frac{1}{2!}\ c^2(t'-t)^2\, \nabla'^2 \cdot$$

$$\left. \cdot \frac{\delta A_\nu(\vec{x}',t)}{\delta \pi_\lambda(\vec{y},t)} + \frac{1}{3!}\ c^4(t'-t)^3\, \nabla'^2\ \frac{\delta \pi_\nu(\vec{x}',t)}{\delta \pi_\lambda(\vec{y},t)} + \dots \right\} d^3y$$

isto é, de (208):

$$\begin{aligned} [A_\mu(\vec{x},t),\ A\ (\vec{x}',t')] &= \int \delta\mu\lambda\delta(\vec{x}-\vec{y}) \left\{ (t'-t)c^2 \delta_{\nu\lambda}\delta(\vec{x}'-\vec{y}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3!}\ c^4(t'-t)^3\ \delta_{\nu\lambda}\ \vec{\nabla}'^2\ \delta(\vec{x}'-\vec{y}) + \dots \right\} = \\ &= c^2\ \delta_{\mu\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (t'-t)^{2n+1} \left[c^2\, \vec{\nabla}'^2\right]^n\ \delta(\vec{x}'-\vec{x}). \end{aligned} \tag{211}$$

Substituindo no 2º membro de (211), $\delta(\vec{x}'-\vec{x})$ pela sua integral de Fourier:

$$\delta(\vec{x}'-\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})}\ d^3k$$

notando que,

$$(\vec{\nabla}'^2)^n\ \delta(\vec{x}'-\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (-\vec{k}^2)^n\ e^{i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})} d^3k \ ,$$

vem:

$$[A_\mu(\vec{x},t),\ A_\nu(\vec{x}',t')] = c^2\delta\mu\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\ (t'-t)^{2n+1}\ \times$$

$$\times\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int (-1)^n\ \frac{(ck_o)^{2n+1}}{ck_o}\ e^{i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})}\ d^3k$$

$$\text{onde} \quad k_o = \left[\vec{k}^2\right]^{1/2} .$$

Mas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[(t'-t)\ ck_o\right]^{2n+1} = \operatorname{sen}\left[k_o(x_o'-x_o)\right]$$

portanto:

$$\left[A_\mu(\vec{x},t),\ A_\nu(\vec{x}',t')\right] = c^2\ \delta\mu_\nu \frac{1}{(2\pi)^3} \times$$

$$\times \int e^{i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})} \frac{\operatorname{sen}[k_o(x_o'-x_o)]}{ck_o}\, d^3k .$$

Comparando o 2º membro desta fórmula com (91), obtemos:

$$\left[A_\mu(\vec{x},t),\ A_\nu(\vec{x}',t')\right] = -c\delta\mu_\nu\ D(\vec{x}'-\vec{x},\ t'-t)$$

isto é:

$$\left[A_\mu(x),\ A_\nu(x')\right] = c\delta\mu_\nu\ D(x-x') \tag{212}$$

em que D é a função de Jordan-Pauli.

A relação (212) é o parêntese de Poisson covariante das variáveis do campo eletromagnético. A dedução dessa fórmula faz uso da equação (40) e, portanto, ela só é válida para um campo livre ou para uma representação em que o campo obedeça à equação (40), comportando-se como um campo livre (campo irradiado (97), campo de Wentzel (99)).

PARTE D

FORMA COVARIANTE DO FORMALISMO HAMILTONIANO DA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL

21 - Tensor energia-momentum e hamiltoniana invariante.

A eletrodinâmica de Maxwell é uma teoria covariante. O formalismo hamiltoniano, apresentado no parágrafo 18, tem a vantagem de edificá-la sôbre bases análogas às da mecânica, mas sofre da desvantagem de destruir a aparência covariante da teoria, dando um papel privilegiado ao tempo.

Êste inconveniente pode ser remediado substituindo-se as derivadas em relação ao tempo por derivadas na direção normal a uma superfície de tipo espaço num ponto e as integrações sôbre o espaço ordinário por integração sôbre tais superfícies. No que segue, especializaremos essas superfícies a planos (covariantes) no espaço-tempo. Assim, para um dado plano σ a normal é constante em todos os seus pontos. Para superfícies mais gerais, o formalismo apresenta complicações provenientes da variação de n_μ com o ponto de σ e perde a analogia com o formalismo hamiltoniano usual.

Consideremos o princípio variacional (169):

$$\delta \int L \, dw = 0 \, . \tag{169}$$

O elemento de volume quadri-dimensional dw num ponto x pode ser escrito:

$$dw = d\sigma_\mu \, \delta x_\mu \tag{213}$$

em que $d\sigma_\mu$ é o elemento de área de uma superfície σ de tipo espaço, passando por x e δx_μ é um deslocamento normal a esta superfície nêste ponto.

Sendo n_μ a normal a σ em x :

$$n_\lambda^2 = -1 ,$$

podemos pôr:

$$d\sigma_\mu = n_\mu \, d\sigma \tag{214}$$

donde:

$$d\sigma = -n_\mu \, d\sigma_\mu \; ; \quad d\sigma^2 > 0 . \tag{215}$$

Por conseguinte, segundo (213) e (214):

$$dw = d\sigma \, n_\mu \, \delta x_\mu . \tag{216}$$

Podemos, ainda, escrever:

$$n_\mu \, \delta x_\mu = - \delta \tau . \tag{217}$$

Se interpretarmos τ como o tempo próprio, n_μ será:

$$n_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} . \tag{218}$$

De (216) e (217) resulta:

$$dw = - d\sigma \delta \tau . \tag{219}$$

A natural generalização da funcional (167) é agora a seguinte:

$$\bar{L} = - \int L \, d\sigma , \tag{220}$$

de modo que o princípio variacional (169) toma a forma, graças a (219) e (220):

$$\delta \int \bar{L} \delta \tau = 0 \tag{221}$$

que generaliza a equação (198).

A derivada funcional de $\bar{L}$ em relação a A_μ , generalização da fórmula (173), pode ser definida assim:

$$\frac{\delta\bar{L}}{\delta A_\mu} = \frac{\delta L}{\delta A_\mu} - \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + n_\alpha n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}\right)} \ . \tag{222}$$

Definindo ainda:

$$\frac{\delta\bar{L}}{\delta\left(\frac{dA_\mu}{d\tau}\right)} = -n_\alpha \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}\right)} \tag{223}$$

e:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\delta\bar{L}}{\delta\left(\frac{dA_\mu}{d\tau}\right)} = -n_\alpha n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}\right)} \ , \tag{224}$$

as equações de Euler-Lagrange (170) serão equivalentes às seguintes:

$$\frac{\delta\bar{L}}{\delta A_\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\delta\bar{L}}{\delta\left(\frac{dA_\mu}{d\tau}\right)} = 0 \ . \tag{225}$$

O momento canônicamente conjugado a $A_\mu(x)$ é:

$$\pi_\mu(x) = -\frac{n_\alpha}{c} \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}\right)} = \frac{1}{c} \frac{\delta\bar{L}}{\delta\left(\frac{dA_\mu}{d\tau}\right)} \tag{226}$$

que se reduz a (176) quando no ponto x a superfície se reduz a um plano perpendicular ao eixo dos t .

Se introduzirmos a grandeza:

$$\pi_{\mu\alpha} = \frac{1}{i\,c} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}} \tag{227}$$

vemos que:

$$\pi_\mu = -i\, \pi_{\mu\alpha} n_\alpha \ . \tag{228}$$

De importância na teoria dos campos é o tensor energia-momentum:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu})} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} - L\,\delta\mu\nu \tag{229}$$

que satisfaz a equação da continuidade:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \tag{230}$$

como consequência das equações de Euler-Lagrange (170).

Comparando (229) com (177), vemos que:

$$H = T_{44} \quad ; \tag{231}$$

de (230) e (231) resulta, então, que icT_{k4} é uma densidade de corrente de energia (vetor de Poynting). Para o formalismo manifestamente covariante, devemos substituir (177), que é a componente 4-4 de um tensor, por uma função invariante, que se reduza a (177) no caso particular em que as superfícies de tipo espaço forem planos normais ao eixo dos tempos.

Definiremos, pois:

$$\mathcal{H} = -n_\mu T_{\mu\lambda}\, n_\lambda = -n_\mu \frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\mu})} n_\lambda \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\lambda} - L \;. \tag{232}$$

Se introduzirmos o vetor energia-momentum pela relação:

$$P_\lambda = -n_\mu\, T_{\mu\lambda} \quad , \tag{233}$$

teremos ainda:

$$\mathcal{H} = n_\lambda\, P_\lambda \quad ; \tag{234}$$

$\mathcal{H}$ num ponto x é a projeção sôbre a normal a uma dada superfície de tipo espaço, nêsse ponto, do vetor energia-momentum.

A hamiltoniana total $\overline{\mathcal{H}}$, que generaliza (178), é:

$$\overline{\mathcal{H}} = - \int_\sigma \mathcal{H}\, d\sigma \qquad (235)$$

a integração sendo estendida sôbre uma superfície de tipo espaço previamente fixada. Do mesmo modo, o vetor energia-momentum total é, de (233):

$$\overline{P}_\lambda = - \int_\sigma P_\lambda\, d\sigma = \int n_\mu\, T_{\mu\lambda}\, d\sigma$$

ou, à vista de (214):

$$\overline{P}_\lambda = \int_\sigma d\sigma_\mu\, T_{\mu\lambda} \qquad (236)$$

que se reduz, quando σ é um plano normal ao eixo dos tempos, à expressão usual:

$$- i \int T_{4\lambda}\, d^3x \; .$$

A equação de conservação da energia (230) exprime o fato que $\overline{P}_\lambda$ não depende da superfície σ da integração. Pois, segundo (46) e (236):

$$\frac{\delta \overline{P}_\lambda}{\delta\sigma(x)} = \frac{\partial T_{\mu\lambda}}{\partial x_\mu}$$

e de (230) resulta que:

$$\frac{\delta \overline{P}_\lambda}{\delta\sigma(x)} = 0 \quad .$$

22 - Equações canônicas.

A densidade de lagrangeana é uma função de A_μ e $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$:

$$L = L\left(A_\mu,\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)$$

que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$L = L\,(A_\mu,\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + n_\nu n_\lambda\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda},\ n_\alpha \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}) \quad . \tag{237}$$

Assim, para o campo livre a função:

$$L = -\frac{1}{2}\,(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu})^2$$

é idêntica a:

$$L = -\frac{1}{2}\left\{(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}) + n_\nu n_\alpha \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha})^2 - (n_\alpha \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha})^2\right\} \tag{238}$$

e é de imediata verificação que (225) e (238) dão:

$$\Box A_\mu = 0 .$$

De (226) e (232) eliminamos $n_\alpha \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}$ (exceto se ocorre na combinação $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + n_\nu n_\alpha \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}$) e nêste sentido, a densidade de hamiltoniana é a seguinte função:

$$\mathcal{H} = e\pi_\mu\ n_\lambda\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} - L \equiv \mathcal{H}\,(A_\mu\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + n_\nu n_\alpha \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha},\ \pi_\mu) \ . \tag{239}$$

Resulta de (220) e (237), de um lado, e de (235) e (239), de outro lado, que $\bar{L}$ e $\bar{\mathcal{H}}$ são, respectivamente, os seguintes funcionais:

$$\bar{L} = \bar{L}\ \left[A_\mu,\ n_\lambda \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}\right] = \bar{L}\ \left[A_\mu, \frac{dA_\mu}{d\tau}\right]; \tag{240}$$

$$\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}[A_\mu,\ \pi_\mu] \ . \tag{241}$$

Agora, a variação de $\bar{\mathcal{H}}$, que generaliza a fórmula (179) é:

$$\delta\,\bar{\mathcal{H}} = -\int\left[\frac{\delta\bar{\mathcal{H}}}{\delta A_\mu}\,\delta A_\mu + \frac{\delta\bar{\mathcal{H}}}{\delta\pi_\mu}\,\delta\pi_\mu\right] d\sigma \quad . \tag{242}$$

Por outro lado, de (235) e (239) vem:

$$\delta\,\overline{\mathcal{H}} = -\int\left[\Pi_\mu\delta\left(cn_\lambda\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}\right) + cn_\lambda\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}\delta\Pi_\mu\right]d\sigma - \delta\bar{L} =$$

$$\text{(por (240))}\qquad = -\int\left[\Pi_\mu\delta\left(cn_\lambda\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}\right) + cn_\lambda\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}\delta\Pi_\mu\right]d\sigma\; + \tag{243}$$

$$+\int\left[\frac{\delta L}{\delta A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\delta L}{\delta\left(\frac{dA_\mu}{d\tau}\right)}\delta\left(\frac{dA_\mu}{d\tau}\right)\right]d\sigma\;.$$

Se notarmos que:

$$\frac{dA_\mu}{d\tau} = n_\lambda\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}\;,$$

os termos em $\delta(\frac{dA_\mu}{d\tau})$ cancelam-se em (243), graças a (226). Levando em conta (225) e em seguida (226), obtem-se para (243):

$$\delta\,\overline{\mathcal{H}} = -\int\left[(\delta\Pi_\mu)\left(cn_\lambda\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}\right) - cn_\lambda\frac{\partial\Pi_\mu}{\partial x_\lambda}\delta A_\mu\right]d\sigma\;. \tag{244}$$

Comparação de (244) com (242) dá-nos finalmente as equações canônicas:

$$cn_\lambda\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} = \frac{\delta\overline{\mathcal{H}}}{\delta\Pi_\mu}\;;\quad cn_\lambda\frac{\partial\Pi_\mu}{\partial x_\lambda} = -\frac{\delta\overline{\mathcal{H}}}{\delta A_\mu}\;. \tag{245}$$

Estas podem também ser escritas assim:

$$c\frac{dA_\mu}{d\tau} = \frac{\delta\overline{\mathcal{H}}}{\delta\Pi_\mu}\;;\quad c\frac{d\Pi_\mu}{d\tau} = -\frac{\delta\overline{\mathcal{H}}}{\delta A_\mu}\;. \tag{245'}$$

Uma outra forma elegante das equações canônicas é obtida se introduzirmos os seguintes funcionais de superfície para o campo:

$$A_\mu[\sigma] = -\int_\sigma A_\mu(x)\,d\sigma\;;$$

$$\Pi_\mu[\sigma] = -\int_\sigma \Pi_\mu(x)\,d\sigma\;. \tag{246}$$

Notando (215) e aplicando a fórmula (46) a (246), obtemos para (245):

$$c\,\frac{\delta A_\mu[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \frac{\delta\overline{\mathcal{H}}}{\delta\pi_\mu(x)} \quad ; \quad c\,\frac{\delta\pi_\mu[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = -\,\frac{\delta\overline{\mathcal{H}}}{\delta A_\mu(x)}\,. \tag{247}$$

É um cálculo simples verificar que a densidade de lagrangeana (238) do campo eletromagnético livre conduz à seguinte hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left\{ c^2\pi_\mu^2 + \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + n_\nu n_\alpha \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}\right)^2 \right\}. \tag{248}$$

As equações (245) são, nêste caso (lembrando-se a definição (222) da derivada funcional):

$$c n_\lambda \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} = c^2\pi_\mu \quad ;$$

$$c n_\lambda \frac{\partial \pi_\mu}{\partial x_\lambda} = \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + n_\alpha n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^2 A_\mu$$

que conduzem a:

$$\Box A_\mu = 0$$

após a eliminação de π_μ, desde que as superfícies σ consideradas sejam planos (de tipo espaço).

23 - Equações canônicas e parênteses de Poisson.

O parêntese de Poisson (183) é generalizado à seguinte expressão covariante:

$$[F,G] = -\int_\sigma \left\{ \frac{\delta F}{\delta A_\mu(x)}\,\frac{\delta G}{\delta \pi_\mu(x)} - \frac{\delta F}{\delta \pi_\mu(x)}\,\frac{\delta G}{\delta A_\mu(x)} \right\} d\sigma\,. \tag{249}$$

Tomemos $A_\mu(x)$ para F e $\overline{\mathcal{H}}$, para G. Da fórmula (47) $(\sigma(y)$

sendo um plano de tipo espaço que passa por x):

$$A_\mu(x) = \int_{\sigma(y)} A_\lambda(y)\delta_{\lambda\mu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} D(y-x)d\sigma(y) = \int_{\sigma(y)} A_\lambda(y)\delta_{\lambda\mu}\, n_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu} D(y-x)d\sigma(y) \tag{250}$$

resulta (notando a definição (220) para o funcional (222)):

$$\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta A_\lambda(y)} = - \delta\lambda\mu\; n_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu} D(y-x) . \tag{251}$$

Considerando $A_\mu(x)$ e $\pi_\mu(y)$ como variáveis independentes, desde que y esteja fora do cône de luz de x :

$$\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta \pi_\mu(y)} = 0 , \quad (x_\mu - y_\mu)^2 > 0 \tag{252}$$

obtemos para $[A_\mu(x), \overline{\mathcal{H}}]$:

$$[A_\mu(x), \overline{\mathcal{H}}] = \int_\sigma \frac{\delta \overline{\mathcal{H}}}{\delta \pi_\mu(y)} n_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu} D(y-x)\, d\sigma(y) = \frac{\delta \overline{\mathcal{H}}}{\delta \pi_\mu(x)} .$$

Por conseguinte, as equações canônicas (245) tomam o aspecto:

$$e n_\lambda \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\lambda} = [A_\mu(x), \overline{\mathcal{H}}] \;;\quad e n_\lambda \frac{\partial \pi_\mu(x)}{\partial x_\lambda} = [\pi_\mu(x), \overline{\mathcal{H}}] \tag{253}$$

com expressão análoga para (245)'.

Na representação de Hamilton-Heisenberg, os parênteses de Poisson fundamentais das variáveis do campo referem-se a estas variáveis, tomadas em pontos que estão fora do cône de luz, um do outro (generalização covariante de pontos simultâneos).

São os seguintes:

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = 0 \;, \quad (x_\mu - y_\mu)^2 > 0 \quad ;$$

$$[\pi_\mu(x), \pi_\nu(y)] = 0 \;, \quad (x_\mu - y_\mu)^2 > 0 \quad ; \tag{254}$$

$$\int_\sigma [A_\mu(x), \pi_\nu(y)] \, d\sigma(y) = -\delta\mu\nu \; ; \tag{255}$$

σ sendo uma superfície de tipo espaço que passa pelo ponto x.
De (255) decorre, por intermédio de (228):

$$\int_\sigma [A_\mu(x), \frac{\partial A_\nu(y)}{\partial y_\alpha}] \, d\sigma_\alpha(y) = -c\delta\mu_\nu \; . \tag{256}$$

Tem-se ainda:

$$\int_\sigma [\pi_\mu(y), \frac{\partial A_\nu}{\partial x\alpha}] f_\alpha(y) \, d\sigma(y) =$$
$$= \delta\mu_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + n_\alpha n_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) f_\alpha(x) \tag{257}$$

sendo $f_\alpha(x)$ uma função arbitrária. Vê-se que se:

$$f_\alpha(x) = n_\alpha \; f(x) \quad ,$$

$$\int_\alpha [\pi_\mu(y), \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\alpha}] \, n_\alpha \; f(y) \, d\sigma(y) = 0 \quad ,$$

consistentemente com a segunda fórmula (254). Estas relações são naturalmente obtidas de (249).

As equações canônicas (253) podem ser ainda postas sob uma forma elegante e sugestiva. Resulta de (247) e (253) que:

$$c \frac{\delta A_\mu[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = [A_\mu(x), \bar{\mathcal{H}}] \; ; \; c \frac{\delta \pi_\mu[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = [\pi_\mu(x), \bar{\mathcal{H}}] . \tag{258}$$

Mas, em virtude de (235):

$$c \frac{\delta A_\mu[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \int_\sigma [A_\mu(x), \bar{\bar{\bar{\mathcal{H}}}}(y)] \, d\sigma(y)$$

e em consequência da simetria dos parênteses de Poisson (254)-(257):

$$\int_\sigma [A_\mu(x), \mathcal{H}(y)]\, d\sigma(y) = \int_\sigma [A_\mu(y), \mathcal{H}(x)]\, d\sigma(y) = [A_\mu[\sigma], \mathcal{H}(x)] \ .$$

Portanto, obtem-se para (258):

$$c\,\frac{\delta A_\mu[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \left[A_\mu[\sigma] \ , \mathcal{H}\,[A_\mu(x), \ldots] \right] \ ;$$

$$c\,\frac{\delta \Pi_\mu[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \left[\Pi_\mu[\sigma] \ , \mathcal{H}\,[A_\mu(x), \ldots] \right] \ . \tag{259}$$

Os parênteses de Poisson (254)-(257) e as equações canônicas descrevem o campo eletromagnético na representação de Hamilton-Heisenberg.

24 - Equação de Hamilton-Jacobi covariante.

A passagem à representação de Hamilton-Schrödinger é efetuada por uma transformação canônica. A equação que generaliza (187) é:

$$-\int_\sigma \left\{ \mathcal{P}_\mu(x)\delta a_\mu(x) - \Pi_\mu(x)\delta A_\mu(x) \right\} d\sigma - \frac{\overline{\mathcal{K}}}{c}\, d\tau + \frac{\overline{\mathcal{H}}}{c}\, d\tau =$$

$$= -\delta\overline{U} = \int \left\{ \frac{\delta\overline{U}}{\delta A_\mu(x)}\, \delta A_\mu(x) + \frac{\delta\overline{U}}{\delta a_\mu(x)}\, \delta a_\mu(x) \right\} d\sigma - \frac{\partial\overline{U}}{\partial\tau}\, d\tau$$

donde:

$$\Pi_\mu(x) = \frac{\delta\overline{U}}{\delta A_\mu(x)} \ ; \qquad \mathcal{P}_\mu(x) = -\frac{\delta\overline{U}}{\delta a_\mu(x)} \ ; \tag{260}$$

$$\overline{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{H}} + c\,\frac{\partial\overline{U}}{\partial\tau} \ .$$

A equação de Hamilton-Jacobi é,pois, a seguinte:

$$\overline{\mathcal{H}}\left[A_\mu(x), \frac{\delta\overline{U}}{\delta A_\mu(x)} \right] + c\,\frac{\partial\overline{U}}{\partial\tau} = 0 \ . \tag{261}$$

Se fizermos:

$$\overline{U} = - \int_\sigma U \, d\sigma \quad ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = - \int n_\lambda \frac{\partial U}{\partial x_\lambda} \, d\sigma = - \int \frac{\delta \overline{U}}{\delta \sigma} \, d\sigma$$

(261) assumirá a forma:

$$\mathcal{H}\left[A_\mu(x), \frac{\delta \overline{U}}{\delta A_\mu(x)}\right] + c \, \frac{\delta \overline{U}}{\delta \sigma(x)} = 0 \ , \qquad (262)$$

sendo $\mathcal{H}$ a densidade Hamiltoniana (invariante).

25 - Parêntese de Poisson covariante de um campo livre.

Os parênteses de Poisson (254), (255), (256) e (257) têm forma covariante e valem para um campo livre ou em interação com cargas, na representação de Hamilton-Heisenberg. Mas têm a restrição de que os pontos nos quais as variáveis do campo são tomadas, estão fora do cône de luz, um do outro. Para um campo que obedeça à equação dos campos livres, o parêntese de Poisson (212) vale para dois pontos quaisquer do espaço-tempo. A sua dedução foi apresentada no parágrafo 20 por métodos usuais. Aqui, daremos uma outra dedução da mesma fórmula, usando apenas relações manifestamente covariantes. Dados dois pontos quaisquer x e y, exprimamos $A_\mu(x)$ pela fórmula (43) (pois o campo é, por hipótese, livre), a superfície σ passando pelo ponto y:

$$A_\mu(x) = \int_\sigma \left\{ D(x-x') \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\lambda} - A_\mu(x') \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\lambda} \right\} d\sigma'_\lambda$$

e substituamos esta relação em $[A_\mu(x), A_\nu(y)]$:

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)] = \int_\sigma \left\{ D(x-x')\left[\frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\lambda}, A_\nu(y)\right] - [A_\mu(x'), A_\nu(y)]\frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\lambda} \right\}$$

$$d\sigma'_\lambda \ .$$

Mas como σ contém y :

$$(x'_\mu - y_\mu)^2 > 0$$

logo, segunde (254) $[A_\mu(x'),\ A_\nu(y)] = 0$, donde:

$$[A_\mu(x),\ \widehat{A}\ (y)] = \int_\sigma D(x-x')\left[\frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\lambda},\ A_\nu(y)\right] d\sigma'_\lambda$$

o que dá, graças a (256):

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(y)] = c\delta_{\mu\nu}\ D(x-y)\ . \tag{262}$$

26 - Representação da interação e campo de Wentzel.

O formalismo covariante para um campo em interação com uma distribuição contínua de cargas, na representação de Hamilton--Heisenberg, é simplesmente obtido substituindo, no parágrafo 19, a hamiltoniana do campo por (248). Assim, (204) é substituida por:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left\{c^2\Pi_\mu{}^2 + \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + n_\nu n_\alpha \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}\right)^2\right\} + \frac{1}{\mu_0}(p_\mu - \rho_0\ A_\mu)^2 - \\ - i\left\{(p_\mu - \rho_0 A_\mu)^2\right\}^{1/2} . \tag{263}$$

Nesta representação, como foi dito antes, as variáveis do campo obedecem aos parênteses de Poisson (254) - (257) e não vale a fórmula (212), pois que o campo satisfaz à equação inhomogênea. Podemos, entretanto, usar uma nova representação, a representação da interação, na qual a evolução do campo é determinada pela hamiltoniana da interação, êsse campo obedecendo, porém, à equação do campo livre e a relação (212). Ponhamos, para (263):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_o + \mathcal{H}'$$

onde:

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{\mu_o} (p_\mu - \rho_o A_\mu)^2 - i \left\{ (p_\mu - \rho_o A_\mu)^2 \right\}^{1/2} . \qquad (264)$$

Efetuemos uma transformação canônica definida por (260) e imponhamos sôbre $\overline{U}$ a equação:

$$\overline{\mathcal{H}}_o + c \frac{\partial \overline{U}}{\partial \tau} = 0 . \qquad (265)$$

Então, a nova hamiltoniana será:

$$\overline{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{H}}'$$

e portanto, a equação canônica do campo é:

$$c \frac{d a_\mu(x)}{d\tau} = [a_\mu(x), \mathcal{H}'] .$$

Como (265) é a equação de Hamilton-Jacobi de um campo livre, admitiremos a relação de Poisson (121) para a_μ. Resulta de (212) e de (264) que:

$$c \frac{d a_\mu(x)}{d\tau} = \int_\sigma D(x-x') \, j_\mu(x') \, d\sigma' . \qquad (266)$$

Integrando (266), vem:

$$a_\mu(x) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\tau_o} \int_\sigma D(x-x') \, j_\mu(x') \, d\sigma' \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\sigma_o} D(x-x') \, j_\mu(x') \, dw' \quad ; \qquad (267)$$

(267) é o dôbro do campo de Wentzel definido pela fórmula (99).

Notas e referências relativas ao

C a p í t u l o I

1. A importância de um formalismo manifestamente covariante para a eletrodinâmica foi assinalada por S. Tomonaga, Progr. Theor. Phys. 1, 27 (1946) que o desenvolveu para a teoria quântica. Enviamos o leitor aos trabalhos do notável grupo de físicos japoneses: Koba, Tati e Tomonaga, Progr.Theor.Phys. 2, 101 (1947); Kanesawa e Tomonaga, Prog.Theor.Phys. 3, 1 (1948); Myiamoto, Progr.Theor.Phys. 3, 124 (1948); vêr ainda Schwinger Phys.Rev. 73, 516 (1948); 75, 651, (1949); Dyson, Phys.Rev. 75, 486 e 1736 (1949); Feynman, Phys.Rev. 76, 749 (1949).

2. §§1-6, vêr os textos de eletrodinâmica e de relatividade, por exemplo, Abraham, Theorie der Elektrizitaet, Leipzig (1908); também a edição de Becker; Sommerfeld in Frank - Mises, Differential Gleichungen der Physik, 2º vol.; Heitler, Quantum theory of radiation, Oxford, Pauli, Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften, V, pg. 539, Leipzig (1921); Von Lane, Das Relativitaetsprinzip, Braunschweig (1913).

3. § 10-13, vêr Schonberg, Rev. Un. Mat. Arg., vol.12, pg. 238, 1947; Stueckelberg, Helv.Phys.Acta, II, pg.225 (1938); Schwinger ref. 1.

4. §§15 e 16, vêr Whittaker, Analytical Dynamics 4a.ed., Dover (1944) Frank - V.Mises, Differentialgleichungen der Physik, II, cap.2.

5. §§14, 17-26, vêr Leite Lopes, An.Acad.Brasil.Ci., nº 4 (1950).

CAPITULO II

TEORIA CLÁSSICA DO ELETRON PUNTIFORME

PARTE A - EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA TEORIA

1 - Introdução.

No capítulo precedente, estudamos os fundamentos da eletrodinâmica de Maxwell, segundo a qual o campo eletromagnético interage com distribuições de cargas supostas contínuas. Neste capítulo, estudaremos como é possível construir a eletrodinâmica clássica na hipótese de que tais distribuições não sejam contínuas mas constituidas de corpúsculo - os electrons. Admitiremos, que o electron não tenha estrutura, sendo um corpúsculo puntiforme. Depois de estabelecidas as equações fundamentais da teoria, analisaremos a teoria de Lorentz, apresentando-a sob forma covariante, e a teoria de Wentzel-Dirac. Para um electron puntiforme, a teoria defronta-se com a dificuldade de que o campo retardado por êle produzido, é infinito na sua linha de universo e, por conseguinte, a equação de movimento do electron não pode, a rigor, ser estabelecida de modo a levar em conta a reação da radiação.

Uma equação aproximada é estabelecida na teoria de Lorentz; na teoria de Wentzel-Dirac, obtem-se uma equação rigorosa.

2 - Densidade de corrente e densidade de massa do electron puntiforme.

Um electron puntiforme tem uma carga invariante e constante e e uma massa em repouso m_0. Estas duas grandezas, juntamente com a velocidade da luz no vácuo c, constituem as três constantes universais da teoria clássica do electron. Considerar o electron como puntiforme significa considerar a cada instante uma carga e uma massa em repouso que se anulam em todos os pontos do espaço tri-dimensional, exceto na posição ocupada pelo electron, na qual têm, respectivamente, o valor $\underline{e}$ e m_o. Nessa posição, sendo v a velocidade do electron, a corrente é ev. Embora, para uma tal distribuição de cargas não seja possível definir uma densidade de corrente e uma densidade de massa como funções regulares, é conveniente introduzir êstes conceitos fazendo-se uso da função imprópria de Dirac. Se, no instante t, o electron está no ponto $z(t)$, podemos escrever para a sua densidade de carga e de corrente, respectivamente:

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x},t) &= e\delta(\bar{x}-\bar{z}(t)) \ , \\ \vec{j}(\bar{x},t) &= e\,\vec{v}\,\delta(\bar{x}-\vec{z}(t)) \ ; \ \vec{v} = \frac{d\vec{z}}{dt} \ . \end{aligned} \tag{268}$$

As definições (268) satisfazem às duas condições:

$$\int\rho\, d^3x = e \ ,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \ ,$$

que exprimem o fato de que a carga total no espaço é a do electron, e a sua conservação. As relações (268) podem ser sintetizadas numa única, que torna evidente a sua covariância:

$$j_\mu(x) = c\ e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_\mu}{ds}\,\delta(x-z(s))\,ds \ , \tag{269}$$

em que s é o tempo próprio do electron:

$$dz_\mu^2 = - ds^2 \quad ;$$
$$z_\mu = z_\mu(x) \quad ; \frac{dz_o}{ds} > 0$$

e:

$$\delta(x-z(s)) = \delta(x_o-z_o(s))\ \delta(x_1-z_1(s))\ \delta(x_2-z_2(s))\ \delta(x_3-z_3(s)).$$

Que (269) é equivalente a (268) resulta da aplicação à primeira da fórmula (79), pondo-se $g(x) = x_o - z_o(s)$; obtém-se:

$$j_\mu(x) = c\ e \left[\frac{1}{\frac{dz_o}{ds}} \quad \frac{dz_\mu}{ds}\ \delta(\vec{x}-\vec{z}(s))\right] x_o = z_o(s) =$$
$$= e\ \frac{dz_\mu}{dt}\ \delta(\vec{x}-\vec{z}(t)) \ .$$

Podemos também definir a densidade de massa (de repouso) pela relação:

$$\mu_o = m_o \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-z(s))\ ds \ . \tag{270}$$

3 - <u>Princípio variacional e equações fundamentais da teoria.</u>

Substituindo (269) e (270) em (197) e tendo em vista (220) e (221), vemos que o princípio variacional para um electron em interação com um campo eletromagnético é:

$$\delta \int \overline{L}\ d\tau = 0 \ , \tag{271}$$

$$\overline{L} = \overline{L}_o + \overline{L}_m + \overline{L}_{int} \ , \tag{272}$$

$$\overline{L}_o = \frac{1}{2} \int_\sigma \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)^2 d\sigma \quad ,$$

$$\overline{L}_m = \int_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} m_o\ c^2\ \delta(x-z(s))\ d\sigma\ ds \ , \tag{273}$$

$$\overline{L}_{int} = - e \int_\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_\mu}{ds} A_\mu(x)\delta(x-z(s))\ d\sigma\ ds \ ;$$

ou, notando (219):

$$-\delta \int m_o \, c^2 \, ds - \frac{1}{2} \, \delta \int (\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu})^2 \, dw + e \, \delta \int \frac{dz_\mu}{ds} \, A_\mu(z) \, ds = 0 \quad (274)$$

De (274) resulta, como no parágrafo 19, cap. I, a equação de movimento do electron:

$$m_o c^2 \, \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \, F_{\mu\nu} \, (z) \, \frac{dz_\nu}{ds} \, . \qquad (275)$$

o 2º membro de (275) é a fôrça de Lorentz.

A equação do campo eletromagnético é:

$$\Box A_\mu(x) = - \, e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_\mu}{ds} \, \delta(x-z(s)) \, ds \qquad (276)$$

As equações (275) e (276) são as equações fundamentais da teoria clássica do electron puntiforme.

4 - Potencial retardado de Liénard - Wiechert. Teoria de Lorentz.

Afim de determinar o movimento do electron, isto é, a sua linha de universo, devemos integrar a equação (275) e obter a função $z_\mu(s)$ sob condições iniciais dadas. Para isso, devemos conhecer $F_{\mu\nu}(z)$. Êste campo é, por sua vez, determinado pela solução da equação (276). Vimos, porém, no parágrafo 12, cap.I, que uma tal equação admite várias soluções, precisamente, o potencial retardado, o avançado e o ligado. Na teoria de Lorentz, o potencial retardado é escolhido. Devemos, portanto, nessa teoria, determinar $A_\mu^{ret}(x)$, daí obter $F_{\mu\nu}^{ret}(x)$ e calcular o campo na posição z do electron. A êste campo, poderemos somar um outro,

$F^{ext}_{\mu\nu}(z)$, o campo externo, cujo potencial satisfaz à equação homogênea:

$$\Box A^{ext}_{\mu}(x) = 0 \; .$$

O campo externo é produzido por outros electrons que excluiremos da região em estudo.

Assim, a equação de movimento do electron, de Lorentz é:

$$m_o c^2 \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \left[F^{ret}_{\mu\nu}(z) + F^{ext}_{\mu\nu}(z) \right] \frac{dz_\nu}{ds} . \qquad (277)$$

Como $F^{ret}_{\mu\nu}(z)$ é o campo produzido pelo electron calculado na posição dêste, chamamo-lo a reação da radiação sôbre o electron.

O potencial retardado do electron é obtido, substituindo-se $j_\mu(x)$ por (269) em (85). Tem-se:

$$A^{ret}_{\mu}(x) = e \int dw' \, \bar{D}_{ret}(x-x') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_\mu}{ds} \delta(x'-z(s)) \, ds,$$

ou:

$$A^{ret}_{\mu}(x) = \frac{e}{4\pi} \int dw' \int_{-\infty}^{\infty} ds \; \delta([x-x'_\mu]^2)(1+\varepsilon(x-x')) \times$$

$$\times \; \delta(x'-z(s)) \; \frac{dz_\mu}{ds} =$$

$$= \frac{e}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta([x_\lambda - z_\lambda(s)]^2)(1+\varepsilon(x-z(s)) \frac{dz_\mu}{ds} \; ds \quad . \qquad (278)$$

Como admitimos $\frac{dzo}{ds} > 0$ (vêr relações que seguem (269)), segue-se que $z_o(s)$ é função crescente em s . Quando s cresce de $-\infty$ a $+\infty$, $x_o - z_o(s)$ passa de valores positivos a negativos. Seja s_o o valor de s tal que:

$$x_o = z_o(s_o) \quad ,$$

$$x_o < z_o(s) \; , \quad \text{para} \quad s > s_o \; .$$

Resulta, então da definição (54) de ε que:

$$1 + \varepsilon\,(x-z(s)) = \begin{cases} 2, \text{ para } & s < s_o \\ 0, \text{ para } & s > s_o \end{cases} \; .$$

Logo, (278) assume a forma:

$$A_\mu^{ret}\,(x) = \frac{2e}{4\pi} \int_{-\infty}^{s_o} \delta([x_\lambda - z_\lambda(s)]^2)\, \frac{dz_\mu}{ds}\, ds \; , \quad (279)$$

o que dá, utilizando a fórmula (79):

$$A_\mu^{ret}\,(x) = -\,\frac{e}{4\pi}\left[\frac{\mathring{z}_\mu}{\mathring{z}_\lambda(x_\lambda - z_\lambda)}\right]_{z_o(s)=x_o - |\vec{x}-\vec{z}(s)|} \quad (280)$$

no segundo membro estando indicado que devemos substituir s pelo valor obtido da relação:

$$z_o(s) = x_o - |\vec{x}-\vec{z}(s)| \; ; \quad \mathring{z}_\mu \equiv \frac{dz_\mu}{ds} \; . \quad (281)$$

Esta última define o tempo próprio retardado. (280) é o potencial de Liénard-Wiechert. De (279) resulta:

$$\frac{\partial A_\mu^{ret}}{\partial x_\nu} = \frac{4e}{4\pi} \int_{-\infty}^{s_o} \mathring{z}_\mu (x_\nu - z_\nu)\delta'((x_\lambda - z_\lambda)^2)\; ds$$

onde o acento representa a derivada de δ em relação ao seu argumento, mas:

$$\delta'((x_\lambda - z_\lambda)^2) = \frac{d\delta}{ds}\; \frac{1}{\frac{d\{(x_\lambda - z_\lambda(s))^2\}}{ds}} \; ,$$

logo:

$$\frac{\partial A_\mu^{ret}}{\partial x_\nu} = -\,\frac{2e}{4\pi} \int_{-\infty}^{s_o} \left[\frac{\mathring{z}_\mu (x_\nu - z_\nu)}{\mathring{z}_\lambda (x_\lambda - z_\lambda)}\right] \frac{d}{ds}\;\; \delta([x_\alpha - z_\alpha]^2)\; ds =$$

$$= \frac{2e}{4\pi} \int_{-\infty}^{s_0} \frac{d}{ds} \left[\frac{\mathring{z}_\mu (x_\nu - z_\nu)}{\mathring{z}_\lambda (x_\lambda - z_\lambda)} \right] \delta([x_\alpha - z_\alpha(s)]^2) \; ds \; .$$

Vemos, portanto, que:

$$F^{ret}_{\mu\nu}(x) = \frac{e}{4\pi} \left[\frac{1}{\mathring{z}_\lambda (x_\lambda - z_\lambda)} \; \frac{d}{ds} \; \frac{\mathring{z}_\mu (x_\nu - z_\nu) - \mathring{z}_\nu (x_\mu - z_\mu)}{\mathring{z}_\alpha (x_\alpha - z_\alpha)} \right]_{z_0(s) = x_0 - |\vec{x} - \vec{z}(s)|} \quad (282)$$

5 - Teoria de Lorentz (continuação). Cálculo do campo retardado, na linha de universo do electron.

Devemos agora, mediante (282), calcular $F^{ret}_{\mu\nu}$ na vizinhança da linha de universo do electron. Suponhamos o ponto x nessa vizinhança de modo que, a_μ sendo arbitràriamente pequeno, possamos pôr:

$$x_\mu = z_\mu(s_0) + a_\mu \quad ;$$

$z_\mu(s_0)$ sendo um dado ponto da linha de universo. Podemos admitir que a_μ seja ortogonal à linha de universo no ponto $z_\mu(s_0)$:

$$(a_\mu \, \mathring{z}_\mu)_{s=s_0} = 0 \; . \tag{283}$$

Suponhamos, ainda, que o tempo próprio retardado, definido por (281), e no qual devem ser tomadas as expressões (280) e (282), difira de s_0 por uma quantidade arbitràriamente pequena σ, de mesma ordem que a_μ $(\mu = 1,2,3,4)$:

$$s = s_0 - \sigma \; . \tag{284}$$

Poderemos, então, desenvolver o campo (282) em série de Taylor, em tôrno de s_0 . Temos:

$$x_\mu - z_\mu(s_o-\sigma) = a_\mu + \sigma v_\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \dot{v}_\mu + \frac{1}{6}\sigma^3 \ddot{v}_\mu - \dots$$

$$\dot{z}_\mu(s_o-\sigma) = v_\mu - \sigma\dot{v}_\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \ddot{v}_\mu - \dots , \qquad (285)$$

$$v_\mu = \frac{dz_\mu}{ds_o} \quad , \quad \dot{v}_\mu = \frac{dv_\mu}{ds_o} , \dots$$

Daí, parando em σ^3 e considerando (283) :

$$\dot{z}_\alpha(x_\alpha - z_\alpha) = -\sigma - \sigma(a_\lambda \dot{v}_\lambda) + \frac{1}{2}\sigma^2 (a_\lambda \ddot{v}_\lambda) - \frac{1}{6}\sigma^3 \dot{v}_\lambda{}^2 + \dots$$

em que usamos as relações:

$$v_\lambda^2 = -1$$

isto é:

$$dz_\lambda^2 = -ds^2 \qquad (285')$$

e:

$$v_\mu \dot{v}_\mu = 0$$

$$v_\mu \ddot{v}_\mu + \dot{v}_\mu{}^2 = 0 .$$

Portanto:

$$[\dot{z}_\lambda(x_\lambda - z_\lambda)]^{-1} = -\sigma^{-1}\,[1 + a_\lambda \dot{v}_\lambda]^{-1}[1 + \frac{1}{2}\sigma(a_\lambda \ddot{v}_\lambda) - \frac{1}{6}\sigma^2 \dot{v}_\lambda^2] \qquad (286)$$

Também (285) resulta:

$$\dot{z}_\mu(x_\nu - z_\nu) - \dot{z}_\nu(x_\mu - z_\mu) = v_\mu a_\nu - \sigma\,\dot{v}_\mu a_\nu - \frac{1}{2}\sigma^2\,\dot{v}_\mu v_\nu +$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2\,\ddot{v}_\mu\, a_\nu + \frac{1}{3}\sigma^3\,\dddot{v}_\mu\, v_\nu - [\mu \longrightarrow \nu] \qquad (287)$$

onde o último termo indica que devemos subtrair dos termos anteriores os obtidos pela troca de μ com ν .

De (286) e (287) resulta:

$$\frac{\dot{z}_\mu(x_\nu - z_\nu) - \dot{z}_\nu(x_\mu - z_\mu)}{\dot{z}_\lambda(x_\lambda - z_\lambda)} = -\left[1 + a_\lambda \dot{v}_\lambda\right]^{-1} \Big\{ \sigma^{-1} v_\mu\, a_\nu - \dot{v}_\mu\, a_\nu -$$

$$(288)$$

$$- \frac{1}{2}\sigma\dot{v}_\mu v_\nu + \frac{1}{2}\sigma\ddot{v}_\mu a_\nu + \frac{1}{3}\sigma^2\ddot{v}_\mu v_\nu + \frac{1}{2} a_\lambda \ddot{v}_\lambda v_\mu a_\nu - \frac{1}{6}\sigma\dot{v}_\lambda^2 v_\mu a_\nu - [\mu \longrightarrow \nu]\Big\} .$$

A derivada em relação a s de (288), pode, segundo (284), ser substituida pela derivada em relação a σ com o sinal trocado:

$$\frac{d}{ds}\,\frac{\dot z_\mu(x_\nu-z_\nu)-\dot z_\nu(x_\mu-z_\mu)}{\dot z_\lambda(x_\lambda-z_\lambda)}=\left[1+a_\lambda\,\dot v_\lambda\right]^{-1}\Big\{-\sigma^{-2}v_\mu a_\nu-\frac{1}{2}\,\dot v_\mu v_\nu+$$

$$+\frac{1}{2}\,\ddot v_\mu\;a_\nu+\frac{2}{3}\,\sigma\ddot v_\mu v_\nu-\frac{1}{6}\,\dot v_\lambda^2\;v_\mu a_\nu-[\mu\longrightarrow\nu]\Big\}.$$

Portanto, vem para (282):

$$F_{\mu\nu}^{ret}\,(x)=\frac{-e}{4\pi}\left[1+a_\lambda\dot v_\lambda\right]^{-2}\Big\{-\sigma^{-3}v_\mu a_\nu-\frac{\sigma^{-1}}{2}\,\dot v_\mu v_\nu-\frac{1}{2}\,\sigma^{-2}a_\lambda\ddot v_\lambda\;v_\mu a_\nu+$$

$$+\frac{1}{2}\,\sigma^{-1}\,\ddot v_\mu a_\nu+\frac{2}{3}\,\ddot v_\mu\;v_\nu-[\mu\longrightarrow\nu]\Big\}. \tag{289}$$

Para determinar o valor de σ, observemos que, segundo (281):

$$(x_\mu-z_\mu(s))^2=0$$

e, portanto, notando a primeira relação (285):

$$a_\lambda^2-\sigma^2-\sigma^2\,(a_\lambda\,\dot v_\lambda)+\frac{1}{3}\,\sigma^3(a_\lambda\,\ddot v_\lambda)-\frac{1}{12}\,\sigma^4\,\dot v_\lambda^2=0\,. \tag{290}$$

Como a_μ é um vetor de tipo espaço (vêr (283)), a_μ^2 é positivo.
Ponhamos:

$$a_\mu^2\;=\;\varepsilon^2$$

onde ε é um número real. Além disso, σ é de mesma ordem que ε, logo, pondo em primeira aproximação $\sigma=\varepsilon$ teremos para (290):

$$\varepsilon^2-\sigma^2-\sigma^2(a_\lambda\,\dot v_\lambda)+\frac{1}{3}\,\varepsilon^3\,(a_\lambda\,\ddot v_\lambda)-\frac{1}{12}\,\varepsilon^4\,\dot v_\lambda^2=0\,,$$

logo:

$$\sigma^2=\left[1+a_\lambda\,\dot v_\lambda\right]^{-1}\left[\varepsilon^2+\frac{1}{3}\,\varepsilon^3(a_\lambda\,\ddot v_\lambda)-\frac{1}{12}\,\varepsilon^4\,\dot v_\lambda^2\right],$$

isto é:

$$\sigma = \varepsilon\left[1+a_\lambda\,\dot{v}_\lambda\right]^{-1/2}\left[1+\frac{1}{6}\,\varepsilon(a_\lambda\,\ddot{v}_\lambda) - \frac{1}{24}\,\varepsilon^2\,\dot{v}_\lambda{}^2\right]. \tag{291}$$

Substituindo (291) em (289), obtem-se:

$$F^{ret}_{\mu\nu}(x) = -\frac{e}{4\pi}\left[1+a_\lambda\dot{v}_\lambda\right]^{-1/2}\Big\{-\varepsilon^{-3}v_\mu a_\nu - \frac{1}{2}\,\varepsilon^{-1}\,\dot{v}_\mu v_\nu\left[1-a_\lambda\dot{v}_\lambda\right] -$$

$$-\frac{1}{8}\,\varepsilon^{-1}\,\dot{v}_\lambda^2\,v_\mu\,a_\nu + \frac{1}{2}\,\varepsilon^{-1}\,\ddot{v}_\mu\,a_\nu + \frac{2}{3}\,\ddot{v}_\mu\,v_\nu - [\mu\rightarrow\nu]\Big\}.$$

Portanto, notando (283) e (285'):

$$F^{ret}_{\mu\nu}(x)v_\nu = \frac{e}{4\pi}\left[1+a_\lambda\dot{v}_\lambda\right]^{-1/2}\Big\{-\frac{1}{2}\,\varepsilon^{-1}\,\dot{v}_\mu\left[1-a_\lambda\dot{v}_\lambda\right] + \frac{2}{3}\,\ddot{v}_\mu\;+$$

$$+\;\varepsilon^{-3}\,a_\mu + \frac{1}{8}\,\varepsilon^{-1}\,\dot{v}_\lambda^2 a_\mu - \frac{1}{2}\,\varepsilon^{-1}\,\dot{v}_\lambda^2 a_\mu - \frac{2}{3}\,\dot{v}_\lambda^2 v_\mu\Big\}. \tag{292}$$

Finalmente, para obter o termo e $F^{ret}_{\mu\nu}(z)\,v_\nu$ do 2º membro de (277), devemos fazer a_μ, logo ε, tender a zero. Vemos que os termos em ε de (292) divergem. Na teoria de Lorentz, esta dificuldade é contornada, fazendo o cálculo de maneira aproximada: 1) admite-se o electron instantâneamente em repouso; 2) admite-se $a_\lambda\,\dot{v}_\lambda \ll 1$; 3) toma-se a média sôbre as direções de a_μ, o que elimina os termos em a_μ.

Sendo, pois:

$$v_k = 0\;,\quad v_4 = i\;;$$

fica-se com a seguinte fôrça, de (292):

$$ei\,F_{k4} \equiv e\,E_k = \frac{e^2}{4\pi}\left\{-\frac{1}{2}\;\frac{1}{c^2}\,\frac{u'_k}{\varepsilon} + \frac{2}{3}\;\frac{1}{c^3}\,u''_k\right\},$$

onde:

$$u_k = \frac{dz_k}{dt}\;,\quad u'_k = \frac{d^2z_k}{dt^2}\;,\quad \text{etc.},$$

e, portanto, com a seguinte equação aproximada:

$$m_o \frac{d^2 z_k}{dt^2} = \frac{e^2}{4\pi}\left\{-\frac{1}{2} \quad \frac{u'_k}{c^2 \varepsilon} + \frac{2}{3} \; \frac{u''_k}{c^3}\right\} + e\, E_k^{ext} \quad .$$

Englobando na massa do electron o termo divergente que ainda permanece:

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{e^2}{4\pi c^2} \quad \frac{u'_k}{\varepsilon} \; ,$$

pois que êle é proporcional à aceleração:

$$m \quad m_o + \frac{1}{2} \;\; \frac{e^2}{4\pi c^2} \; \frac{1}{\varepsilon} \tag{293}$$

obtém-se a equação de Lorentz:

$$m \;\; \frac{d^2 z_k}{dt^2} - \frac{e^2}{6\pi c^3} \; \frac{d^3 z_k}{dt^3} = e\, E_k^{\;ext} \quad . \tag{294}$$

6 - Teoria de Dirac. Campo de radiação do electron.

A equação de Lorentz (294) é satisfatória para situações em que a variação do campo não é muito rápida e a aceleração do electron não é muito grande. Segundo a teoria de Lorentz, a massa do electron pode ser considerada como de natureza electromagnética. Basta, para isso, fazer em (293) $m_o = 0$ e ajustar ε ao valor experimental de m . O 2º termo de (293) é a energia própria do electron resultante de sua interação com a reação da radiação. Para um electron puntiforme, ela é infinita.

Como a equação (294) descreve bem as situações experimentais nas condições acima mencionadas, é natural suspeitar que a equação exata para um electron puntiforme seja do tipo de (294) com apenas as modificações exigidas pela relatividade. Analizando (292) vemos que os termos finitos, ao fazer-se $a_\lambda \longrightarrow 0$ são $\frac{2}{3}\dddot{v}_\mu$ e $-\frac{2}{3}\dot{v}_\lambda^2 v_\mu$, de modo que, se admitirmos que os termos divergentes devem ser omitidos, a equação exata é a seguinte:

$$m_o c^2 \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi}\ddot{v}_\mu + \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi}\dot{v}_\lambda^2 v_\mu = e\, F_{\mu\nu}^{ext}(z)\frac{dz_\nu}{ds} . \quad (295)$$

A equação (295) é a chamada equação de Lorentz-Dirac. Dirac a estabeleceu em sua teoria de 1938, admitindo que o campo que reage sôbre o electron não é o campo retardado mas a semi-diferença entre o retardado e o avançado. De modo que, nesta teoria, a equação de movimento (277) é substituida pela seguinte:

$$m_o c^2 \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e\left\{\frac{1}{2}(F_{\mu\nu}^{ret}(z) - F_{\mu\nu}^{av}(z) + F_{\mu\nu}^{ext}(z)\right\}\frac{dz_\nu}{ds} \quad (296)$$

O leitor poderá verificar, tomando como modêlo o cálculo feito no parágrafo 5, que, de fato, se tem:

$$\frac{1}{2}(F_{\mu\nu}^{ret}(z) - F_{\mu\nu}^{av}(z)) = -\frac{2}{3}\frac{e}{4\pi}(\ddot{v}_\mu v_\nu - \ddot{v}_\nu v_\mu) . \quad (297)$$

A semi-diferença entre o campo retardado e o avançado é admitida como sendo o campo de radiação, precisamente para subtrair os infinitos da teoria, deixando uma reação da radiação do tipo desejado.

7 - Forma hamiltoniana da teoria de Dirac. Processo lambda de Wentzel.

Vimos as equações fundamentais da teoria clássica do electron puntiforme:

$$m_o c^2 \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e\, F_{\mu\nu}(z)\, \frac{dz_\nu}{ds} \qquad (275)$$

para o electron; e:

$$\Box A_\mu(x) = -e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_\mu}{ds}\, \delta(x-z(s))\, ds \qquad (276)$$

para o campo produzido pelo electron. No parágrafo 5, dêste capítulo, viu-se que a solução retardada (e também a avançada e a ligada) diverge na linha de universo do electron de modo que as equações (275) e (276) não têm solução exata. Viu-se, também, no parágrafo 6, que o campo radiado:

$$F^{rad}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,(F^{ret}_{\mu\nu} - F^{av}_{\mu\nu}) \qquad (298)$$

é finito na linha de universo do electron e que Dirac propôs precisamente inserir-se êste campo no 2º membro de (275). Isto, entretanto, significa abandonar a equação (276) como definindo o campo que reage sôbre o electron uma vez que (298) não obedece a esta equação e sim à equação homogênea:

$$\Box A^{rad}_\mu = 0 \; .$$

A forma hamiltoniana da teoria de Dirac pode ser obtida utilizando-se a representação da interação e o campo de Wentzel, introduzidos no parágrafo 26, Cap.I, e aplicando-os a um electron puntiforme.

Antes, estudemos o campo de Wentzel de um electron:

$$e \int_{-\infty}^{s_o} D(x-z(s))\, \frac{dz_\mu}{ds}\, ds \; . \qquad (299)$$

Se o ponto x estiver no interior do semi-cône de luz do futuro de $z(s_o)$:

$$(x)-z(s_o))^2 < 0 \ , \ x_o-z_o(s_o) > 0 \ ,$$

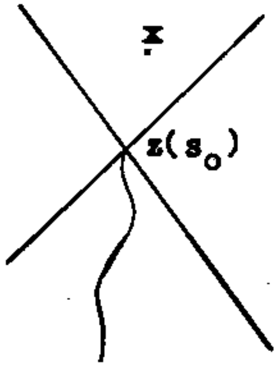


Fig. 1

então, (299) é zero porque $D(x-z(s))$ se anula quando s varia de $-\infty$ a s_o (fig.1). Se o ponto x estiver fora do cone de luz de $z(s_o)$ (fig.2), haverá um ponto da linha de universo que é ligado a x por um sinal luminoso e contribue ao potencial retardado no ponto x . De fato, se tem para (299):

$$-\frac{2e}{4\pi}\int_{-\infty}^{s_o} \delta\left\{(x-z(s))^2\right\}\varepsilon(x-z(s))\,\frac{dz_\mu}{ds}\,ds \qquad (300)$$

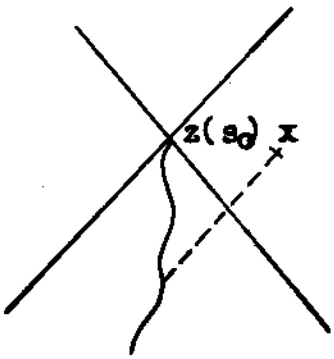


Fig. 2

uma vez que (vêr (87) e (74)):

$$\bar{D} = -\frac{1}{2}D\varepsilon \ , \ \frac{\delta(x^2)}{4\pi} = \bar{D}(x) \ .$$

A parte do domínio de integração de (300) em que ε é -1 não contribui à integral. Obtem-se, assim:

$$-\frac{2e}{4\pi}\int_{-\infty}^{s_o} \delta\left\{(x-z(s)))^2\right\}\frac{dz_\mu}{ds} =$$

$$= \frac{e}{4\pi}\,\frac{\frac{dz_\mu}{ds}}{\frac{dz_\nu}{ds}(x-z_\nu)}\Bigg|_{(x_\lambda-z_\lambda(s))^2 = 0 \ , \ x_o-z_o(s) > 0} \ ,$$

que é o potencial retardado no ponto x . Se, finalmente o ponto x estiver situado no interior do semi-cône do passado de $z(s_o)$ (fig.3), o leitor poderá mostrar sem dificuldade que (299) é igual à diferença entre o potencial retardado e o avançado.

Resumindo, vemos que a determinação do campo de Wentzel do electron depende da posição do ponto x em relação ao cône de luz de $z(s_o)$:

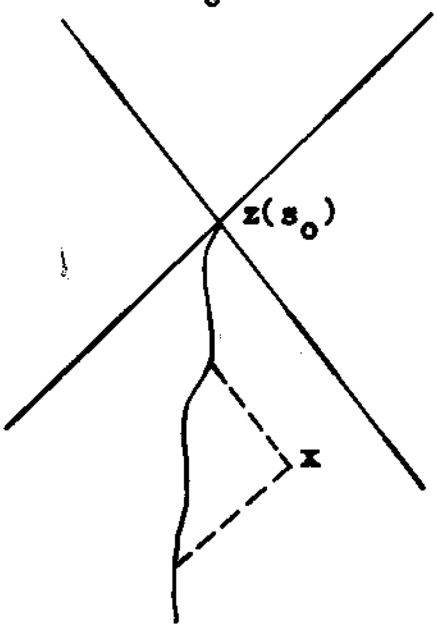


Fig. 3

$$\int_{-\infty}^{s_o} (x-z(s)) \frac{dz_\mu}{ds} ds = 0 \qquad (301)$$

se:

$(x_\lambda - z_\lambda(s_o))^2 < 0$, $x_o - z_o(s_o) > 0$;

$$\int_{-\infty}^{s_o} D(x-z(s)) \frac{dz_\mu}{ds} ds = A_\mu^{ret}(x) \qquad (302)$$

se:

$(x_\lambda - z_\lambda(s))^2 > 0$,

$$\int_{-\infty}^{s_o} D(x-z(s)) \frac{dz_\mu}{ds} ds = A_\mu^{ret}(x) - A_\mu^{av}(x) \qquad (303)$$

se

$$(x_\lambda - z_\lambda(s_o))^2 < 0 , \quad x_o - z_o(s) < 0 .$$

Isto posto, voltemos ao nosso problema. Na representação da interação, a hamiltoniana de cada electron é:

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{m_o}(p_\lambda - \frac{e}{c} A_\lambda(z))^2 - i \left\{ (p_\lambda - \frac{e}{c} A_\lambda(z))^2 \right\}^{1/2} , \qquad (303')$$

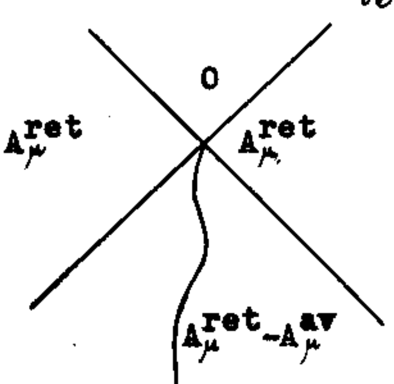


Fig. 4

onde A_μ é tomado na posição z do eletron e as equações de movimento são:

$$c\, \dot{z} = [z_\mu, \mathcal{H}'] , \quad c\, \dot{p}_\mu = [p_\mu, \mathcal{H}'] ,$$

ou

$$c\, \dot{z}_\mu = \frac{1}{m_o} (p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu(z)) , \qquad (304)$$

$$c\dot{p}_\mu = \frac{e}{m_o c}\left\{p_\lambda - \frac{e}{c} A_\lambda (z)\right\} \frac{\partial A_\lambda}{\partial z_\mu}$$

para o electron; e:

$$c \dot{A}_\mu = [A_\mu(x) \ , \mathcal{H}\,']$$

ou

$$\dot{A}_\mu(x) = e \ \dot{z}_\mu \ D(x-z) \ ,$$

$$A_\mu(x) = e \int_{-\infty}^{s_o} \dot{z}_\mu(s) \ D(x-z(s)) \ ds, \qquad (305)$$

para o campo.

Vemos que na representação da interação a equação de movimento do electron é

$$m_o c^2 \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \ F_{\mu\nu}(z) \frac{dz_\nu}{ds} \qquad (306)$$

como decorre de (304), e que no 2º membro de (306) devemos inserir o campo, na posição do electron, que deriva de (305) é multivalente sôbre a linha de universo de electron, e que ao fazer-se x tender para $z(s_o)$, o limite de $A_\mu(x)$ depende do caminho seguido pelo ponto. Afim de que o limite $F_{\mu\nu}(z)$ seja igual a (298), devemos portanto, impôr (ver (301) e (303)) que o ponto x tenda para $z(s_o)$ pelo interior do cone dêste último ponto e que se tome a média dos limites obtidos quando x tende a $z(s_o)$ pelo semi-cone do passado e pelo semi-cone do futuro. Matemàticamente, esta imposição é obtida do seguinte modo: considera-se um quadri-vetor λ de tipo tempo:

$$\lambda_\mu^2 < 0$$

e se modifica o parêntese de Poisson do campo livre no seguinte:

$$[A_\mu(x), \ A_\nu(x')] = \frac{1}{2} \ c \ \delta\mu\nu \left\{D(x-x'+\lambda)+D(x-x'-\lambda)\right\} \ . \qquad (307)$$

Com esta hipótese, o campo (305) é substituido pelo seguinte:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2}\, e \int_{-\infty}^{s_o} z_\mu(x) \left\{ D(x-z(s)+\lambda) + D(x-z(s)-\lambda) \right\} ds \; . \qquad (305')$$

Como λ é de tipo tempo, vê-se que ao tender x para $z(s_o)$, o argumento da função D permanece sempre dentro do cone de $z(s_o)$ e portanto:

$$\lim_{x \to z(s_o)} A_\mu(x) = \frac{1}{2} \left\{ A_\mu^{ret}\, (z(s_o)-\lambda) - A_\mu^{av}\, (z(s_o)-\lambda) \right\} .$$

Portanto, as equações de movimento do electron são as de Dirac no limite $\lambda = 0$. No problema de vários electrons, as equações fundamentais da teoria são:

$$m_{oi} c^2 \; \frac{d^2 z_{\mu i}}{ds_i^2} = e_i \, F_{\mu\nu}(z_i) \, \frac{dz_{\nu i}}{ds_i} \; ,$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \; , \qquad (308)$$

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_i e_i \int_{-\infty}^{s_{io}} \frac{dz_{\mu i}}{ds_i} \left\{ d(x-z_i+\lambda) + \right.$$

$$\left. + D(x-z_i-\lambda) \right\} ds_i + A_\mu^{ext}\, (x) \; .$$

No limite, o campo vale:

$$\lim_{\substack{x \to z_i \\ \lambda \to 0}} A_\mu(x) = \sum_{j \neq i} A_{\mu_j}^{ret}\, (z_i) + \frac{1}{2} \left(A_{\mu_i}^{ret}\, (z_i) - \right. \qquad (309)$$

$$\left. - A_{\mu_i}^{a\nu}\, (z_i) \right) + A_\mu^{ext}\, (z_i) \; .$$

O campo obedece as equações:

$$\Box A_\mu(x) = 0 \; , \qquad (310)$$

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda} = -\frac{1}{2} \sum_i e_i \left\{ D(x-z_i+\lambda) + D(x-z_i-\lambda) \right\} \; ;$$

$$\Box A_\mu^{ext} = 0 \ , \quad \frac{\partial A_\mu^{ext}}{\partial x_\mu} = 0 \ .$$

Observemos, finalmente, que as equações acima devem ser compatíveis, o que é preenchido, se as hamiltonianas de dois electrons quaisquer, tiverem parêntese de Poisson nulo:

$$\left[\bar{\mathcal{H}}'_i \ , \ \bar{\mathcal{H}}'_j \right] = 0 \ . \tag{311}$$

De fato, as equações de movimento são obtidas (veja (304) e (305)) para uma variável dinâmica α , assim:

$$\frac{d\alpha}{ds_i} = \left[\alpha \ , \bar{\mathcal{H}}'_i \right] .$$

Deve-se ter:

$$\frac{d^2\alpha}{ds_i \, ds_j} = \frac{d^2\alpha}{ds_j \, ds_i} \ ,$$

o que dá:

$$\left[\left[\alpha \ , \bar{\mathcal{H}}'_j \right] , \mathcal{H}'_i \right] = \left[\left[\alpha \ , \bar{\mathcal{H}}'_i \right] , \bar{\mathcal{H}}'_j \right] . \tag{312}$$

Mas, (vêr (111), Cap. I):

$$\left[\left[\alpha , \bar{\mathcal{H}}'_j \right] , \bar{\mathcal{H}}'_i \right] + \left[\left[\bar{\mathcal{H}}'_i \ , \ \alpha \right] , \bar{\mathcal{H}}'_j \right] + \left[\left[\bar{\mathcal{H}}'_j \ , \bar{\mathcal{H}}'_i \right] , \ \alpha \right] = 0 \ ,$$

portanto, graças a (312):

$$\left[\left[\bar{\mathcal{H}}'_j \ , \bar{\mathcal{H}}'_i \right] , \ \alpha \right] = 0 \ .$$

Isto, para qualquer variável dinâmica α , acarreta:

$$\left[\bar{\mathcal{H}}'_j \ , \bar{\mathcal{H}}'_i \right] = \text{constante.}$$

Em particular, (303') satisfaz a (311) contanto que:

$$(z_i(s_i) - z_j(s_j) \pm \lambda)^2 > 0 \ ,$$

isto é, desde que cada electron esteja fora do cone de luz do outro e permaneça assim quando deslocado de $\pm \lambda$.

8 - <u>Significação física dos termos da equação de Lorentz-Dirac.</u>

Segundo (296) e (297), as equações de movimento de um electron são:

$$m_o c^2 \, \dot{v}_\mu = \left\{ - \frac{2}{3} \, \frac{e^2}{4\pi} \, (\ddot{v}_\mu \, v_\nu - \ddot{v}_\nu \, v_\mu) + e \, F^{ext}_{\mu\nu}(z) \right\} v_\nu$$

Notando (285') tem-se:

$$m_o c^2 \, \dot{v}_\mu = \frac{2}{3} \, \frac{e^2}{4\pi} \, \ddot{v}_\mu - \frac{2}{3} \, \frac{e^2}{4\pi} (\dot{v}_\lambda)^2 v_\mu + e \, F^{ext}_{\mu\nu}(z) \, v_\nu \, .$$

Ponhamos:

$$\frac{e^2}{4\pi} = \varepsilon^2$$

obtemos, finalmente:

$$m_o c^2 \, \dot{v}_\mu - \frac{2}{3} \, \varepsilon^2 \, \ddot{v}_\mu + \frac{2}{3} \, \varepsilon^2 \, \dot{v}_\lambda^2 \, v_\mu = e \, F^{ext}_{\mu\nu} \, (z) \, v_\nu \, . \quad (313)$$

São as equações de Lorentz-Dirac.

Examinemos o significado físico dessas equações. Tomemos a equação correspondente a $\mu = 4$:

$$m_o c^2 \, \dot{v}_4 - \frac{2}{3} \, \varepsilon^2 \, \ddot{v}_4 + \frac{2}{3} \, \varepsilon^2 \, \dot{v}^2 v_4 = e \, F^{ext}_{4k} \, v_\nu \, . \qquad (314)$$

Sabemos que:

$$v_4 = \frac{dz_4}{ds} = i \, \frac{dz_o}{ds} = i \, \frac{dz_o}{dz_o \sqrt{1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2}}} \, ,$$

onde $\vec{u} = \frac{d\vec{z}}{dt}$.

Fazendo:

$$v_4 = i v_o \, ,$$

$$v_o = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2}} \, ,$$

portanto:

$$m_o c^2 \, \dot{v}_o = \frac{d}{ds} \, \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \vec{u}^2/c^2}} \, , \qquad (315)$$

o 1º termo de (314) representa o incremento, por unidade de tempo (próprio), da energia cinética do electron. O 2º termo de (314), a menos do fator i , vale:

$$- \frac{2}{3} \varepsilon^2 \ \frac{d}{ds} \mathring{v}_o = \frac{d}{ds} \left(- \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^2}{c^3} \frac{\bar{u} \cdot \frac{d\bar{u}}{dt}}{(1- \frac{u^2}{c^2})^2} \right) \tag{316}$$

e é positivo ou negativo segundo a energia cinética diminua ou aumente; o termo dentro do parêntese é a chamada energia de aceleração ou nergia de Schott.

O 3º termo de (314) vale:

$$\frac{2}{3} \varepsilon^2 \ (\dot{v})^2 v_o \tag{317}$$

e é <u>sempre positivo</u>, pois v_o é positivo e

$$(\dot{v})^2 > 0 \ ,$$

$\dot{v}_\mu$ sendo um vetor de tipo espaço ($v_\mu \dot{v}_\mu = 0$). Corresponde, pois, sempre a uma emissão de energia (por unidade de tempo próprio) pelo electron e representa pròpriamente o efeito da reação da radiação sôbre o corpúsculo (efeito amortecedor) (perda de Larmor).

Assim, o trabalho realizado na unidade de tempo próprio pela força externa é distribuido, parte na energia cinética e na energia de aceleração do corpúsculo e parte na energia emitida por êste sob forma de radiação (por unidade de tempo). Os dois primeiros termos de (314) são diferenciais exatas da energia cinética e da energia de aceleração, respectivamente, que podem ser consideradas como energias intrínsecas do electron. A energia de aceleração podendo ser positiva ou negativa corresponde a uma troca reversível de energia com o campo; a perda de Larmor, sempre positiva, corresponde sempre a uma emissão (irreversível) de energia pelo electron.

PARTE B. APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE LORENTZ-DIRAC

9. Electron livre.

Retomemos a equação (313), na qual $F^{ext}_{\mu\nu} = 0$:

$$m_o c^2 \mathring{v}_\mu - \frac{2}{3} \varepsilon^2 \overset{\circ\circ}{v}_\mu + \frac{2}{3} \varepsilon^2 \mathring{v}^2 v_\mu = 0$$

e façamos:

$$a = \frac{3m_o c^2}{2\varepsilon^2} \; ;$$

obtemos:

$$a\dot{v}_\mu - \overset{\circ\circ}{v}_\mu = \mathring{v}^2 v_\mu = 0 \; . \qquad (318)$$

As equações de Lorentz-Dirac são de 3a. ordem em $\frac{dz_\mu}{ds}$, portanto para determinar sua solução, devemos dar como condições de contôrno não sòmente a posição e a velocidade do electron mas, ainda, a sua aceleração, para um escolhido instante de tempo próprio. Essas condições de contôrno determinam as constantes de que depende a solução geral da equação (313), fixando a natureza do movimento do corpúsculo. Consideremos a equação (318) de um electron livre. A solução geral para v_μ é

$$v_\mu = A_\mu \exp(C\, e^{as}) + B_\mu \exp(-C\, e^{as}) \qquad (319)$$

onde A_μ , B_μ , C são constantes tais que:

$$A^2_\mu = B^2_\mu = 0 \; ; \; A_\mu B_\mu = - \frac{1}{2} \; ,$$

afim de que (319) satisfaça à relação:

$$v_\lambda^2 = -1 \, .$$

O movimento representado por (319) tem as seguintes propriedades: 1) é um movimento plano; 2) a velocidade do electron aumenta com o tempo e tende para a velocidade da luz:

$$v_\mu = \frac{dz_\mu}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \frac{dz_\mu}{dz_o} \; ; \quad \vec{u} = \frac{d\vec{z}}{dt} \quad ;$$

$$v_\mu \longrightarrow \infty \Rightarrow u \longrightarrow c \, .$$

Portanto, o electron, num tal movimento, vai perdendo energia por irradiação e aumentando rapidamente a sua velocidade. Esta solução, chamada solução de fuga ("run-away solution") ou auto-aceleradora, não corresponde evidentemente, à realidade física.

A solução que devemos obter é a da velocidade constante:

$$v_\mu = D_\mu \, ,$$

sendo:

$$D_\mu^2 = -1 \, .$$

Imponhamos a seguinte condição de contôrno:

$$\ddot{v}_\mu - \dot{v}^2 v_\mu \longrightarrow 0 \qquad (321)$$

quando:

$$s \longrightarrow \infty \, .$$

De (319) e (321) resulta:

$$v_\mu = B_\mu \exp(-C\, e^{as}) \, .$$

Finalmente, de (320) resulta:

$$C = 0 \, .$$

Assim, selecionamos a solução física de (318) impondo a esta equação a condição (321). É fácil de vêr nêste exemplo, que (321) é equivalente a:

$$\mathring{v}_\mu \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad s \longrightarrow \infty \ .$$

O significado físico da condição (321), que foi proposta por Eliezer e Mailvaganam, é que, no curso do tempo, a perda de energia por irradiação deve ser compensada pela energia de aceleração. Esta condição foi denominada pelos seus autores princípio do balanço do campo.

10. <u>Electron submetido a uma fôrça instantânea</u>.

Vamos examinar noutro exemplo simples os resultados inesperados a que a equação de Lorentz-Dirac conduz, quando não se impõe uma condição extra do tipo de (321). É o problema de um electron inicialmente em repouso que, num dado instante, sofre a ação de uma fôrça, a qual cessa imediatamente depois (uma onda eletromagnética passando pela posição do corpúsculo). Supondo a duração da fôrça infinitamente curta (sôbre o electron) e desprezando a fôrça magnética, poderemos pôr:

$$E_1 = iF_{14} = k\ \delta(t) \ ; \ E_2 = E_3 = 0 \ ;$$
$$F_{ik} = 0 \ , \ I \ , \ k = 1,2,3$$

(onda polarizada na direção do eixo x_1). Como desprezámos o campo magnético da onda, o movimento do electron estará no plano x_1, x_4 do espaço-tempo. A equação (313) se escreve

$$a\mathring{v}_1 - \ddot{v}_1 - \mathring{v}^2 v_1 = K\ \delta(t)\ v_o \qquad (322)$$

onde:

$$K = \frac{3ke}{2\varepsilon 2} \ .$$

Podemos admitir, para simpliqidade, que a constante k seja pequena de modo à velocidade do electron ser pequena comparada com a da luz e podermos desprezar os efeitos relativistas no movimento.

Assim, nessa aproximação, a equação (322) vai na seguinte:

$$\frac{a}{c}\,\frac{dv_1}{dt} - \frac{1}{c^2}\,\frac{d^2v_1}{dt^2} = K\,\delta(t)\ .$$

Para $t \neq 0$, temos:

$$\frac{a}{c}\,\frac{dv_1}{dt} - \frac{1}{c^2}\,\frac{d^2v_1}{dt^2} = 0\ .$$

A solução geral desta equação é:

$$v_1 = b_1 e^{act} + b_2\ .$$

Como o electron estava em repouso antes da ação da fôrça, devemos ter

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = 0 \quad \text{para} \quad t = -\infty \\ \text{o que fixa } b_2 : \qquad b_2 = 0\ . \end{array}\right\} \qquad (323)$$

No instante $t = 0$, o electron adquire uma aceleração instantânea K e para $t > 0$ volta a ter velocidade constante.

Como, de (323), $b_2 = 0$, temos:

$$v_1 = b_1 e^{act}\ .$$

Portanto:

$$\frac{dv_1}{dt} = acb_1 e^{act}$$

e:

$$\left(\frac{dv_1}{dt}\right)_0 = acb_1 = K\ ,$$

logo:

$$b_1 = \frac{K}{ac}\ .$$

Finalmente, a velocidade deve ser contínua para $t = 0$, o que dá a solução:

$$v_1 = \frac{K}{a\,c}\, e^{act} \,, \quad t<0$$
$$v_1 = \frac{K}{a\,c} \,, \qquad t>0 \,. \tag{324}$$

Dirac interpreta êste movimento assim: em bôa aproximação, o electron está em repouso para valores negativos e grandes de t , mas à medida que t tende a zero, êle adquire uma velocidade a aceleração (de acôrdo com (324)) tais que no instante $t = 0$ êle possúe o valor exato da aceleração a ser cancelado pelo efeito da fôrça instantânea, de modo que, depois de $t = 0$ o electron continua a mover-se com velocidade constante. Surge aqui uma contradição com as idéias de causalidade.

O electron parece ter conhecimento prévio de que uma fôrça instantânea vai atuar sôbre êle no futuro e começa a acelerar-se para contrabalançar o efeito da fôrça quando ela chegar. Assim, antes de qualquer fôrça, o electron, apezar de livre, estará irradiando energia. Poder-se-ia, então, dizer que, se se desistir de fazer a fôrça atuar no instante $t = 0$, o electron terá irradiado, embora livre. Entretanto, como a solução da equação já é obtida impondo-se condições no passado e no futuro, é evidente que uma dessas condições não pode ser alterada sem que se altere de maneira essencial o problema. A solução obtida para o problema tal como resolvido. O comportamento do electron no curso do tempo já foi fixado pelas condições de contôrno. E, então, pode-se argumentar que, antes de $t = 0$, o movimento acelerado desvia-se muito pouco do uniforme para poder ser observado.

APÊNDICE

INVERSÃO DO TEMPO

1. Introdução - O princípio da relatividade é, provàvelmente, o mais importante dos princípios de invariância da teoria dos campos, em particular da eletrodinâmica. Sob forma intuitiva, a invariância relativista exige que as leis da natureza deva ser independentes da posição e da velocidade do observador. Matematicamente, as leis físicas devem ser invariantes em relação às transformações do grupo não-homogêneo de Lorentz:

$$x'_\mu = a_\mu + a_{\mu\nu} x_\nu .$$

O princípio de Einstein se refere às transformações de Lorentz próprias:

$$\det |a_{\mu\nu}| = +1$$

e ortocrônicas:

$$a_{44} > 0 .$$

Uma extensão do grupo é obtida incluindo-se as reflexões espaciais (em relação a um número ímpar de eixos espaciais):

$$x'_i = - x_i \; ; \; x'_4 = x_4 \; ; \; i = 1, 2, 3$$

e a inversão do tempo:

$$x'_i = x_i \; ; \; x'_4 = -x_4 \; ; \; i = 1, 2, 3 .$$

Só a experiência poderá indicar se as leis físicas são ou não invariantes em relação a estas transformações impróprias.

Aqui, estudaremos as condições sob as quais as equações da mecânica, da eletrodinâmica e da teoria clássica do eletron são invariantes em relação à inversão do tempo. A análise do efeito da reflexão espacial sôbre as mesmas equações poderá ser feita com facilidade pelo leitor.

INVERSÃO DO TEMPO NA MECÂNICA

2. Invariância das equações de movimento. - Sejam q_k, $k = 1,2,\ldots n$, as coordenadas de um sistema de partículas, $f_k\ (q_1,q_2\ldots q_n)$ a fôrça que atua sôbre a k-ésima partícula. As equações de movimento são:

$$m_k\ \ddot{q}_k\ (t) = f_k\ (q_1(t),\ q_2(t),\ldots q_n(t))\ .$$

Definimos a órbita invertida no tempo pelas funções $q_k'(t')$ tais que:

$$q_k'\ (t') = q_k(t)$$

onde:

$$t' = -t\ .$$

Temos ainda:

$$q_k'(t) = q_k(-t)\ .$$

A velocidade, evidentemente, muda de sinal quando o tempo é invertido:

$$\dot{q}_k'\ (t') \equiv \frac{dq_k'\ (t')}{dt'} = \frac{dq_k\ (t)}{dt}\ \frac{dt}{dt'} = -\ \dot{q}_k(t)\ ,$$

enquanto que a aceleração não muda:

$$\ddot{q}_k'(t') = \ddot{q}_k(t)\ .$$

Se as fôrças f_k dependerem apenas das coordenadas, como admitimos acima, elas não mudam por inversão do tempo:

$$f_k'(q_1'(t'),\ \ldots\ q_n'(t')) = f_k(q_1(t),\ \ldots\ q_n(t))$$

de modo que as equações de movimento são invariantes em relação a esta transformação:

$$m_k \, \ddot{q}'_k \, (t') = f'_k \, (q'_1(t') \, \ldots \, q'_n(t')) \; .$$

Em geral, as fôrças podem depender das velocidades:

$$f'_k \, (q'_k(t'), \, \dot{q}'_k \, (t')) = f_k \, (q_k(t), \, - \, \dot{q}_k(t))$$

e neste caso as equações de movimento serão invariantes sòmente quando f_k fôr função par de $\dot{q}_k \, (t)$ (contendo, por exemplo, apenas potências pares da velocidade):

$$f_k \, (q_k(t), \, - \, \dot{q}_k(t)) = f_k \, (q_k(t), \, \dot{q}_k(t)) \; .$$

3. Invariância das equações canônicas - A lagrangeana:

$$L'(q'_k(t'), \, \dot{q}'_k(t')) = L(q_k(t), \, - \, \dot{q}_k(t))$$

será invariante na inversão do tempo se, ela também fôr função par em $\dot{q}_k(t)$, isto é, se:

$$L(q_k(t), \, - \, \dot{q}_k(t)) = L(q_k(t), \, \dot{q}_k(t)) \; .$$

Nesta hipótese, o momento conjugado $p_k(t)$ muda de sinal:

$$p'_k(t') = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k(t')} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j(t)} \, \frac{\partial \dot{q}_j(t)}{\partial \dot{q}_k(t')} = - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = - \, p_k(t)$$

Portanto, a hamiltoniana:

$$H'(q'_k(t'), \, p'_k(t')) = \sum_i p'_i(t') \, \dot{q}_i(t') - L'(q'_k(t'), \, \dot{q}'_k(t'))$$

obedecerá a mesma condição de invariância da lagrangeana:

$$H'(q'_k(t'), \, p'_k(t')) = H(q_k(t), \, p_k(t))$$

se:

$$L(q_k(t), \, - \, \dot{q}_k(t)) = L(q_k(t), \, \dot{q}_k(t)) \; .$$

As equações canônicas:

$$\mathring{q}_k(t) = \frac{\partial H}{\partial p_k} \; , \; \mathring{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

são certamente invariantes, nessas condições.

4. <u>A inversão do tempo é uma transformação anti-canônica</u>.

O parêntese de Poisson:

$$[F,G] = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial qi} \frac{\partial G}{\partial pi} - \frac{\partial F}{\partial pi} \frac{\partial G}{\partial qi} \right)$$

onde $F = F(q_k(t), p_k(t))$, $G = G(q_k(t), p_k(t))$, se transforma quando q e p se transformam:

$$q'_k(t') = q'_k(q_1(t), \dots q_n(t), p_1(t), \dots p_n(t), t) \; ,$$

$$p'_k(t') = p'_k(q_1(t), \dots q_n(t), p_1(t), \dots p_n(t), t) \; ,$$

$$t' = t'(q_1(t), \dots q_n(t), p_1(t), \dots p_n(t), t) \; .$$

Teremos de considerar as duas seguintes expressões:

$$[F',G']_{q',p'} = \sum_i \left(\frac{\partial F'}{\partial q'i} \frac{\partial G'}{\partial p'i} - \frac{\partial F'}{\partial p'i} \frac{\partial G'}{\partial q'i} \right)$$

e:

$$[F',G']_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial F'}{\partial qi} \frac{\partial G}{\partial pi} - \frac{\partial F'}{\partial pi} \frac{\partial G'}{\partial qi} \right) .$$

O cálculo direto nos conduz à seguinte relação:

$$[F',G']_{q,p} = \sum_{r,s} \left(\frac{\partial F'}{\partial q'r} \frac{\partial G'}{\partial p's} - \frac{\partial F'}{\partial p's} \frac{\partial G'}{\partial q'r} \right) [q'r, p's]_{q,p} \; +$$

$$+ \sum_{r,s} \left(\frac{\partial F'}{\partial q'r} \frac{\partial G'}{\partial p's} - \frac{\partial F'}{\partial p's} \frac{\partial G'}{\partial q'r} \right) [q'r, q's]_{q,p} + \sum_{r,s} \left(\frac{\partial F'}{\partial p'r} \frac{\partial G'}{\partial p's} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial F'}{\partial p's} \frac{\partial G'}{\partial p'r} \right) [p'r, p's]_{q,p} \; .$$

Se a transformação $q, p, t \longrightarrow q', p', t'$ fôr tal que:

$$[q'r, q's]_{q,p} = 0 \;,\; [p'_r \,,\, p'_s]_{q,p} = 0 \;,$$

$$[q'_r \,,\, p'_s] = \eta\, \delta_{rs} \;,$$

teremos:

$$[F', G']_{q,p} = \eta\, [F', G']_{q',p'} \;.$$

Quando a transformação é canônica $\eta = 1$. No caso da inversão do tempo $\eta = -1$. Esta não é, pois, uma transformação canônica. A mudança de sinal do parêntese de Poisson pode ser traduzida dizendo que a inversão do tempo é uma transformação anti-canônica. As últimas fórmulas são obtidas estudando-se a transformação:

$$q'_k(t') = q_k(t) \;,$$
$$t' = \eta_t \;,$$

que dá lugar a:

$$\mathring{q}'(t') = \eta^{-1}\, \mathring{q}(t) \;,$$
$$\ddot{q}'(t') = \eta^{-2}\, \ddot{q}(t) \;,$$
$$p'_k(t') = \eta_{pk}\,(t) \;.$$

A condição de invariância da hamiltoniana mais simples:

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

impõe que seja:

$$\eta^2 = 1$$

o que mostra que $\eta = \pm 1$. O caso $\eta = -1$ é a inversão do tempo.

5. <u>Inversão do tempo na eletrodinâmica clássica</u>. - Na eletrodinâmica clássica, a inversão do tempo deixa as equações de Maxwell

invariantes se o campo se transformar da seguinte maneira:

$$x_i' = x_i \ , \quad t' = -t \ ,$$

$$\rho'(\vec{x}', t') = \rho(\vec{x}, t)$$

conduzem, pela equação da continuidade:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

a:

$$\vec{j}'(\vec{x}', t') = -\vec{j}(\vec{x}, t) \ .$$

Então: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$ será invariante se:

$$\vec{E}'(\vec{x}', t') = \vec{E}(\vec{x}, t) \ .$$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}$ será invariante se:

$$\vec{H}'(\vec{x}', t') = -\vec{H}(\vec{x}, t) \ .$$

E de:

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \ ,$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ ,$$

se obtém:

$$\vec{A}'(\vec{x}', t') = -\vec{A}(\vec{x}, t) \ ,$$

$$\phi'(\vec{x}', t') = \phi(\vec{x}, t) \ .$$

Observe que $\rho'(\vec{x}', t') = \rho(\vec{x}, t)$ é uma hipótese independente da transformação $t' = -t$. Se admitirmos que $\rho'(\vec{x}', t') = -\rho(\vec{x}, t)$ (isto é, que a transformação é a inversão do tempo acompanhada da mudança de sinal das cargas) as grandezas acima se transformam com o sinal trocado.

6. <u>Inversão do tempo na teoria do electron de Lorentz</u> - Como vimos

no §3 do capítulo II, as equações de movimento da teoria de Lorentz são (tomando a velocidade da luz c igual à unidade de velocidades) (vêr equações (275) e (276)):

$$m_o \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e\, F_{\mu\nu} \frac{dz_\nu}{ds}$$

$$\Box A_\mu(x) = -\, e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_\mu}{ds}\, \delta(x-z(s))ds \;.$$

Como a energia de um electron livre é $m_o \frac{dt}{ds}$, é natural impôr-se que a inversão do tempo conserve esta energia positiva. Isto exige uma inversão de tempo próprio:

$$t' = -t \;, \quad s' = -s \;, \quad (m_o > 0)$$

Na teoria de Lorentz, a solução da equação do campo a ser posta na equação do electron é a solução retardada:

$$A_\mu^{ret}(x) = \int \bar{D}^{ret}(x-x'')\; j_\mu(x'')\; dw''$$

(vêr equação (50)). Esta expressão é também igual a:

$$A_\mu^{ret}(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j_\mu(\vec{x}'', x_o - |\vec{x}-\vec{x}''|)}{|\vec{x} - \vec{x}''|}\, d^3x''$$

(vêr equação (75)). Qual é o transformado dêste potencial por inversão do tempo?

Temos:

$$A_\mu^{ret'}(x') = \frac{1}{4\pi} \int \frac{j'_\mu(\vec{x}'', x'_o - |\vec{x}'-\vec{x}''|)}{|\vec{x} - \vec{x}''|}\, d^3x''$$

onde

$$x'_o = -\,x_o \;,\; x'_i = x_i \;,\; i = 1,2,3$$

Mas, então, como vimos no parágrafo anterior:

$$\vec{j}'\,(\vec{x}', t') = -\vec{j}\,(\vec{x}, t) \;,$$

$$\rho'(\vec{x}', t') = \rho(\vec{x}, t) \; .$$

No nosso caso:

$$\vec{j}'(\vec{x}'', x_0' - |\vec{x}'-\vec{x}''|) = - \vec{j}(\vec{x}'', x_0+|\vec{x}-\vec{x}''|) \; ,$$

$$\rho'(\vec{x}'', x_0' - |\vec{x}'-\vec{x}''|) = - \rho)\vec{x}'', x_0+|\vec{x}-\vec{x}''|)$$

e isto nos dá:

$$\vec{A}^{ret'}(x') = -\vec{A}^{av}(x) \; ,$$

$$A_0^{ret'}(x') = A_0^{ret}(x) \; .$$

Estas relações resultam também de:

$$D^{ret'}(\vec{x}'-\vec{x}'', x_0'-x_0'') = D^{av}(\vec{x}-\vec{x}'', x_0+x_0'')$$

onde

$$\vec{x}' = \vec{x} \; , \; x_0' = - x_0 \; .$$

Portanto, por inversão do tempo que conserva positiva a energia de um electron livre:

$$e' = e, \; s' = -s, \; x_0' = -x_0, \; \vec{x}' = \vec{x} \; , \; m_0' = m_0 > 0 \; ,$$

as equações de Lorentz:

$$m_0 \frac{d^2 z_\mu}{ds} = e \left[F_{\mu\nu}^{ret}(z) + F_{\mu\nu}^{ret}(z)\right] \frac{dz_\nu}{ds} \; ,$$

$$\Box A_\mu^{ret}(x) = - e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_\mu}{ds} \delta(x-z(s)) \, ds \; ,$$

se transforma nas seguintes:

$$m_0 \frac{d^2 z_\mu}{ds} = e \left[F_{\mu\nu}^{av}(z) + F_{\mu\nu}^{ext}(z)\right] \frac{dz_\mu}{ds} \; ,$$

$$\Box A_\mu^{av} = - e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz_\mu}{ds} \delta(x-z(s)) \, ds \; .$$

A teoria não é invariante em relação à transformação considerada.

7. <u>Inversão do tempo na teoria do electron de Dirac. Condições de invariância</u>. - Na teoria de Dirac-Lorentz, as equações são:

$$m_o \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \left[\frac{1}{2} \left(F_{\mu\nu}^{ret}(z) - F_{\mu\nu}^{av}(z)\right) + F_{\mu\nu}^{ext} \right] \frac{dz_\nu}{ds} .$$

Estas também não são invariantes na inversão do tempo, pois se transformam em:

$$m_o \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \left[- \frac{1}{2} \left(F_{\mu\nu}^{ret}(z) - F_{\mu\nu}^{av}(z)\right) + F_{\mu\nu}^{ext} \right] \frac{dz_\nu}{ds}$$

para:

$$t' = -t \ , \ s' = -s \ .$$

Êste fato também pode ser visto com a equação (313) que se transforma na seguinte:

$$m_o \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} + \frac{2}{3} \varepsilon^2 \ddot{v}_\mu - \frac{2}{3} \varepsilon^2 (\dot{v}_\lambda)^2 v_\mu = e \ F_{\mu\nu}^{ext}(z) \frac{dz_\nu}{ds} .$$

Admitimos, nestas considerações, que o campo externo se transforme como um campo ordinário, isto é,

$$F_{ik}^{ext} \longrightarrow - F_{ik}^{ext} \ , \quad F_{io}^{ext} \longrightarrow F_{io}^{ext} \ .$$

Observe que o campo externo obedece às equações sem densidade de carga e corrente, o que nos dá liberdade de admitir esta transformação ou a de sinal oposto.

O leitor verificará, porém, que as equações de Dirac-Lorentz são invariantes para a seguinte transformação:

$$t' = -t \ , \ s' = -s, \ e' = -e, \ m_o' = -m_o$$

A inversão da massa (juntamente com a do tempo e a do tempo próprio) significa que mudamos a energia do electron livre, de positiva em negativa. A invariância obtida com a transformação indicada da massa, carga, tempo e tempo próprio indica que a eletrodinâmica de electrons com energia positiva, carga negativa e evoluindo para o futuro é a mesma que a de electrons com energia negativa, carga positiva e evoluindo para o passado.

Esta é uma imagem que evoca a interpretação quântica do pósitron dada por Feynman e Stuckelberg.