

Monografias de Física
III

R. P. Feynman

FÍSICA NUCLEAR TEÓRICA

Notas redigidas por George Rawitscher

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
BIBLIOTECA

1954

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

PREFÁCIO.

Estas notas apresentam o curso de física nuclear teórica que foi oferecido, neste Centro, em 1953, pelo Professor Richard P. Feynman. Motivos de força maior impediram seu aparecimento mais cedo. Redigidas por George Rawitscher e revistas por Paulo Emidio Barbosa, Adel Silvoira e Alfredo M. de Oliveira, são de grande interesse para os nossos estudantes de Física.

Terceiro volume de uma Série de obras didáticas, representam estas notas um esforço dêste Centro no sentido de contribuir para que, aos poucos, se enriqueça a literatura, em língua portuguesa, de textos científicos de real valor.

O autor é um dos mais brilhantes teóricos atuais e esteve no Brasil várias vezes, demonstrando um raro e genuíno interesse pelos nossos problemas de educação científica. Possa êste trabalho contribuir para o crescimento, em qualidade e quantidade, do nosso grupo de físicos, e terão sido certamente atingidos os objetivos do autor e dêste Centro.

J. Leite Lopes
Editor

Í N D I C E

CAPÍTULO I

NOCÕES PRELIMINARES

		Página
I, 1	Introdução - - - - -	1
I, 2	Modelos nucleares - - - - -	2
I, 3	Fôrças p-p e n-n - - - - -	5
I, 4	Níveis excitados - - - - -	8

CAPÍTULO II

ESPALHAMENTO DE RESSONÂNCIA

II, 1	Generalidades - - - - -	11
II, 2	Desintegração alfa - - - - -	12
II, 3	Espalhamento da partícula alfa - - - - -	15
II, 4	Estudo da equação de Schroendiger - - - - -	16
II, 5	Determinação das defasagens δ_1 , - - - - -	21
II, 6	Desintegração do núcleo composto em função do tempo - - - - -	29
II, 7	Aperfeiçoamento do modelo do núcleo - - - - -	37
II, 8	Um exemplo: a absorção de neutrons lentos por núcleos - - - - -	40
II, 9	Máxima eliminação das restrições sobre o potencial nuclear - - - - -	44
II,10	Secção de choque para reações nucleares em função da energia - - - - -	46
II,11	Relações gerais entre secções de choque - - - - -	49

CAPÍTULO III

TEORIA DA DESINTEGRAÇÃO BETA

		Página
III, 1	Introdução à teoria - - - - -	56
III, 2	Exemplo com um elemento de matriz simples - -	59
III, 3	A vida média T - - - - -	66
III, 4	A questão da forma do elemento de matriz - - -	68
III, 5	Espectros proibidos - - - - -	78

CAPÍTULO IV

ESTRUTURA NUCLEAR

IV, 1	Modêlo das camadas - - - - -	84
IV, 2	Descrição dos núcleos - - - - -	89
IV, 3	Desintegração beta e modêlo das camadas - - -	98

APÊNDICES

I	Relação entre o espalhamento e mudança de fase -	112
II	Secção de choque e princípio do balanço detalha do - - - - -	118
III	Espalhamento para a frente - - - - -	123
IV	Emissão eletromagnética do núcleo: esboço do cál culo teórico - - - - -	127

CAPÍTULO I

NOÇÕES PRELIMINARES

I, 1. Introdução

Não existe uma teoria geral satisfatória dos fenômenos nucleares. Por isso torna-se difícil enumerar todos os princípios e hipóteses usados na teoria que atualmente fazemos dos núcleos. Pode-se no entanto dizer que eles se enquadram, grosso modo, em duas classes: princípios fundamentais e modelos. Os princípios fundamentais empregados são:

- a. Princípios de Mecânica Quântica (especialmente não relativística, para nucleons).
- b. Princípios de Eletrodinâmica.
- c. Admissão de leis especiais de interação entre elétrons, neutrinos e neutrinos para descrever a desintegração beta.

Empregam-se estes princípios sob forma suficientemente geral de modo que as previsões teóricas resultantes não são muito detalhadas e se aplicam bem aos conhecimentos experimentais.

Assim, por exemplo, de a resulta que os núcleos devem existir em estados estacionários de energia bem definida; as leis de combinação de momento angular (sua conservação), a lei da paridade, etc., devem ser satisfeitas.

O fato de não se utilizarem os métodos da Mecânica Quântica em grande detalhe, e de a teoria nuclear ser incompleta, não significa que há um limite nas regiões nucleares abaixo do qual a Mecânica Quântica não seja mais válida. A situação é diferente da que se apresentava na física clássica de 1900, onde certos teoremas gerais (como o da equipartição da energia), eram contrários à ex-

periência. De fato, não temos certeza hoje de nenhum fenômeno que se mostre contrário a qualquer dos princípios da Mecânica Quântica.

Emprega-se h para obter informações sobre o caráter dos raios gama emitidos, a probabilidade de sua conversão interna, para estimar a energia eletrostática do núcleo e para descrever todas as interações entre elétrons e núcleos, e fótons e núcleos, com exceção da desintegração beta. A teoria da desintegração beta será discutida amplamente mais tarde.

Como um exemplo de a e h combinados, citamos o estudo da emissão de partículas alfa do núcleo. A relação entre a vida média e a energia de emissão é compreendida pelo estudo da penetração quântica da partícula alfa através da barreira de potencial coulombiana do núcleo.

I, 2. Modelos Nucleares

O modelo usado na descrição dos núcleos está constantemente em evolução. Suas características principais são as seguintes:

- 1) Os núcleos são constituídos de prótons e nêutrons, ambas partículas de spin 1/2 (chamados indistintamente nucleons), que obedecem portanto à estatística de Fermi. Os nucleons são ligados por forças, e é a respeito destas que existem as maiores incertezas.

Esta imagem, suportada pelos resultados experimentais enumerados abaixo, leva à idéia do modelo nuclear da gota líquida. Esta permite explicar até certo ponto as energias de ligação, as condições de fissão e a estabilidade dos núcleos em geral.

Os fatos experimentais são enumerados a seguir. A energia de ligação dos núcleos é proporcional, em primeira aproximação, ao número de nucleons neles contidos. Também o volume é proporcional a A. A razão disto não está clara ainda. O raio nuclear vale:

$$r = r_0 \cdot A^{1/3}, \text{ com } r_0 = 1,40 \cdot 10^{-13} \text{ cm,}$$

valor este obtido experimentalmente. Este número pode também

ser aproximado, dentro dos erros experimentais na determinação de r_0 , por

$$r_0 = \frac{e^2}{2M_e c^2} = \frac{\hbar}{M_\pi c}$$

onde c é a velocidade da luz, M_e e M_π as massas do elétron e do meson π , respectivamente.

A força entre dois prótons (p - p) pode ser admitida como igual à força entre nêutrons (n - n). A evidência experimental é obtida a partir dos núcleos especulares (mirror nuclei). Estes diferem somente em um nucleon, que para um deles é próton e para o outro nêutron. Verifica-se então que a diferença de energia de ligação é somente devida (dentro de uns 0,3 MeV) à diferença das repulsões eletrostáticas nos dois núcleos. Esta força parece ser de curto alcance, isto é, sua ação é limitada a distâncias da ordem de r_0 .

Há também evidência, embora menos forte, de que, quando um próton e um nêutron estão em estado anti-simétrico, interagem com força igual à força p - p (ou n-n).

Convém notar que a hipótese de serem os núcleos formados apenas de prótons e nêutrons não é a única possível, nada impedindo por exemplo, que os mesons também estejam contidos no núcleo. Tal hipótese, porém, não faremos.

2) Modêlo do núcleo composto (Bohr).

Este modêlo é baseado na idéia de que quando dois nucleos reagem, passam por um estado intermediário formando um núcleo composto. Muito provavelmente este modêlo não introduz nenhuma hipótese nova, podendo ser obtido como uma consequência do modêlo 1, e do princípio a. Em todo caso, é muito útil para prever o comportamento dos núcleos quando reagem entre si e leva a interessantes previsões quanto às seções de choque para espalhamento dos núcleos, ressonâncias quando eles reagem, estados excitados dos núcleos finais e energias dos produtos finais.

O modêlo permite também prever, por exemplo, que qual-^{quais par}

~~quer~~ que sejam as partículas iniciais da reação, o resultado é sempre o mesmo desde que o núcleo intermediário composto seja o mesmo.

3) Modelo das camadas.

O modelo das camadas permite explicar um grande número de regularidades de propriedades dos núcleos em função do número de prótons e neutrons constituintes. Admite-se que os nucleons são dispostos em camadas e sua distribuição é expressa por uma série de leis e regras empíricas (como por exemplo, a existência de forças de acoplamento bastante fortes entre spin e órbita). Mais tarde discutiremos o modelo mais amplamente.

A variação característica das propriedades, dependente do fato do número de prótons e neutrons ser par ou impar, provavelmente é uma consequência da hipótese expressa em 1: o princípio de Pauli permite somente a dois fermions terem a mesma função de onda espacial.

Estudos do deuteron e dos espalhamentos n-p e p-p deveriam levar a um melhor conhecimento das forças entre pares de nucleons, mas os resultados destes estudos ainda não permitem uma compreensão quantitativamente correta dos núcleos mais pesados (com exceção talvez de H^3 , He^3 e He^4). Este assunto pertence ao ramo da física nuclear teórica. Já o discutimos em parte no curso sobre mesons, e por falta de tempo, não o trataremos aqui.

Convém notar também que a teoria mesônica das forças nucleares não permite até agora nenhuma previsão de valor em física nuclear.

Resumindo, verificamos que entre os diversos ramos da física nuclear há os seguintes:

1. Teoria da energia de ligação
2. Teoria dos núcleos H^3 , He^3 e He^4
3. Teoria da emissão alfa
4. Teoria da emissão gama
5. Teoria do núcleo composto
6. Modelo das camadas
7. Teoria da desintegração beta

Destas, discutiremos no decorrer do curso somente as três últimas.

1, 3. Forças p-p e n-n.

É interessante ver por meio de alguns exemplos, a evidência experimental sobre a igualdade das forças p-p e n-n (a menos da repulsão de coulomb) a partir da comparação de pares de núcleos especulares.

Em primeiro lugar nota-se que a diferença da energia de ligação de dois núcleos especulares praticamente só provém da repulsão eletrostática de um proton com os outros protons do resto do núcleo, e da diferença de massa entre neutron e proton. A diminuição da energia de ligação devido à repulsão eletrostática, num núcleo de carga Z e número de massa A é:*

$$\frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)e^2}{r_0 A^{1/3}} = 0,613 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \text{ (MeV)}$$

onde se supõe que os Z protons estão distribuídos uniformemente através de todo o volume do núcleo (de raio $1,40 \cdot 10^{-13} \cdot A^{1/3}$ cm).

Tomando a diferença para os dois núcleos, e subtraindo ainda a diferença de massa do neutron e proton, obtem-se em MeV:

$$(\Delta E_{\text{lig}})_{\text{calc.}} = 0,613 \frac{2Z}{A^{1/3}} - 0,784$$

que representa a diferença de ligação do proton e do neutron do resto do núcleo. Como esta difere muito pouco da diferença experimental da energia de ligação dos dois núcleos, conclui-se que as forças p-p e n-n são praticamente iguais.

Vamos tomar alguns exemplos. Os dados necessários encontram-se no artigo de Hornyak et al., "Energy Levels of Light Nuclei"***

* Veja Halliday, "Introductory Nuclear Physics", pg. 284

***Rev. Mod. Phys. 22, 291 (1950).

Núcleos	$(\Delta E_{\text{lig}})_{\text{exp}}$	$(\Delta E_{\text{lig}})_{\text{calc.}}$	Diferença
${}^7_3\text{Li}$ ${}^7_{11}\text{B}$	0,87 MeV	1,14 MeV	0,27 MeV
${}^{11}_6\text{C}$ ${}^{11}_5\text{B}$	1,96	1,98	0,02
${}^{13}_7\text{N}$ ${}^{13}_6\text{C}$	2,20	2,34	0,14
${}^{17}_8\text{O}$ ${}^{17}_9\text{F}$	2,8	3,03	0,23
${}^{19}_{10}\text{Ne}$ ${}^{19}_9\text{F}$	3,06	3,35	0,29

Exemplos em que a diferença de carga é dois:

$${}^8_3\text{Li} \text{ e } {}^8_5\text{B} : (\Delta E)_{\text{exp.}} = 2,0 \pm 0,5 \text{ MeV } (\Delta E)_{\text{calc.}} = 2,7 \text{ MeV}$$

Para ${}^{14}_6\text{C} - {}^{14}_8\text{O}$ e ${}^{10}_4\text{B} - {}^{10}_6\text{C}$ a concordância em cada caso é melhor que 0,05 MeV.

Em segundo lugar, o que vem fortalecer muito a hipótese da igualdade das forças n-n, p-p, é que os núcleos especulares não somente têm os estados fundamentais diferindo apenas em energia devido à repulsão de coulomb, mas também apresentam uma notável correspondência entre seus níveis excitados, cujas energias também diferem daquele mesmo valor.

Tomemos como exemplo ${}^{11}_6\text{C}$ e ${}^{11}_5\text{B}$. O ${}^{11}_6\text{C}$ tem mais protons que o ${}^{11}_5\text{B}$ e tem uma energia de ligação menor de 1,96 MeV. Os seus níveis excitados que estão a 2,0; 4,5; 6,7; 9,7; 10,1 MeV acima do fundamental apresentam todos aproximadamente a mesma diferença de energia de ligação que as de níveis excitados do ${}^{11}_5\text{B}$, que estão respectivamente a 2,14; 4,46; 5,03; 6,75; 6,80; 7,30; 8,75; 8,92; 9,19; 9,29, etc. do fundamental* (Fig. I, 1).

Outro exemplo bem estudado que apresenta uma correspondência dos níveis excitados, é o do par ${}^7_3\text{Li}$ e ${}^7_4\text{Be}$. Os níveis excitados

* Rev. Mod. Phys. 22, 321 (1950).

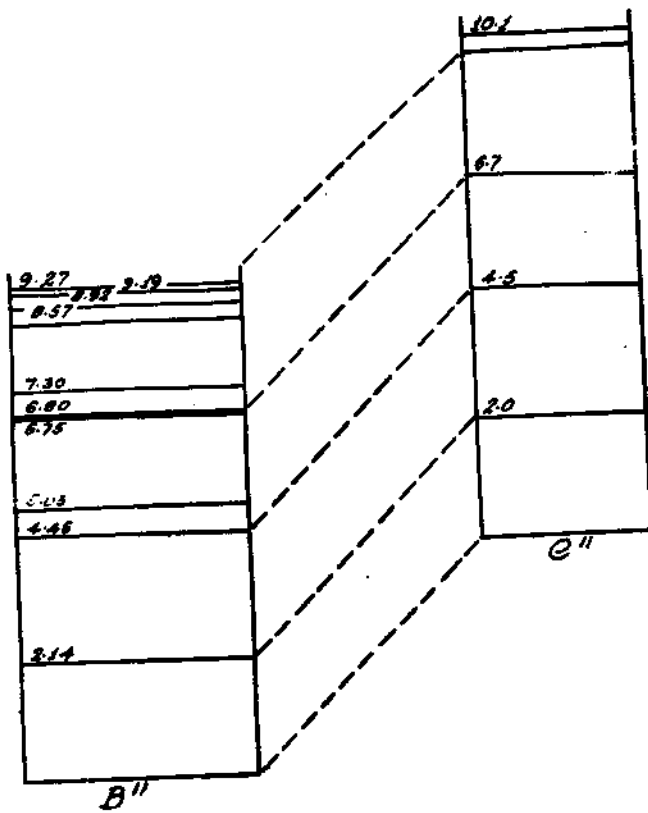


Fig. I,1

Níveis de energia do B11 e do C11 ilustrando a correspondência das diferenças de energia dos níveis excitados.

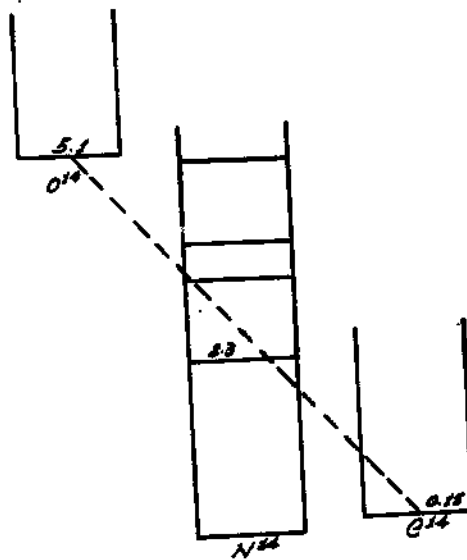


Fig. I,2

Níveis de energia O14 e C14. O primeiro nível excitado do N14 serve como estado intermediário para a desintegração do O14 por emissão β^+ , facilitando-a, enquanto que é extremamente improvável que o C14 decaia no N14, por emissão β^- devido ao fato de este nível muito mais baixo.

do Li^7 estão a 0,478; 7,38; etc., acima do fundamental. Os níveis excitados do Be^7 estão a 0,43; 7,02; etc., acima do fundamental.

Poder-se-ia procurar entre os níveis excitados dos núcleos leves a evidência experimental da igualdade das forças p-p e n-p (quando êsses estão em estado orbital e spin anti-simétrico), mas não se encontra, por falta de dados, suficiente número de exemplos convincentes.

Consideremos por exemplo $^8\text{O}^{14}$, $^7\text{N}^{14}$ e $^6\text{C}^{14}$. Os dois nucleons adicionais ao grupo de 6 protons e 6 neutrons, comuns aos três núcleos são: 2 neutrons para o C, 1 proton e 1 neutron para o N e dois protons para o O. É de se esperar que a energia de ligação do O seja menor que a do C somente por causa do efeito eletrostático, visto que as forças n-n e p-p são iguais. Isto de fato se verifica. Mas no N não é preciso que os dois nucleons (p-n) estejam no mesmo estado em que estão nos outros dois casos (anti-simétrico) (Princípio de Pauli para fermions do mesmo tipo), de modo que a energia de ligação do N pode ser diferente da prevista pelo efeito eletrostático. De fato, a energia de ligação do N é maior que a dos outros dois; pode-se pois supor que aqueles seus dois nucleons estão num estado simétrico, no qual estão muito mais ligados.

Supondo (teóricamente) um estado (excitado) em que os dois nucleons estejam em estados anti-simétricos, e supondo ainda que neste caso a força p-n é igual à força p-p, pode-se calcular qual deve ser a energia de ligação dêste estado comparando-o ao C e ao O e levando em conta a energia de repulsão eletrostática. Encontra-se um valor que muito se aproxima da energia do primeiro estado excitado do N, o que nos leva a suspeitar fortemente de que êste estado excitado é aquele em que proton e neutron estão em estados anti-simétricos e que neste estado a força de interação é a mesma que a de p-p e n-n.

É interessante notar também que o $^8\text{O}^{14}$ decai em $^7\text{N}^{14}$ por emissão β^+ , com vida média de 76 segundos, enquanto que a desintegração β^- do $^6\text{C}^{14}$ tem uma vida média extremamente mais longa: 5.700 anos.

Desconhece-se o motivo de ser tão longa a vida média do $^7\text{C}^{14}$. Mas se supuzermos que naquele estado excitado do N o p e o n estão num estado anti-simétrico, então um dos motivos seria o seguinte:

aquele estado serviria como intermediário para a desintegração do O, facilitando-a, em quanto que não serviria para o C pois este se encontra em um nível de energia mais baixo. (Fig. I,2).

1,4. Níveis Excitados

Medem-se as posições dos níveis excitados de um núcleo, bombardeando um núcleo de massa atômica inferior com o proton, neutron ou deuteron de modo a se obter, como estado composto desta reação, o núcleo cujos níveis excitados se quer estudar. Um processo consiste em determinar a curva da secção de choque desta reação em função, por exemplo, da energia da partícula bombardeadora incidente, e determinar a posição dos máximos, que correspondem à energias em que há ressonância com os níveis excitados do núcleo intermediário.

Outro processo consiste em obter o núcleo em questão como estado final de alguma reação com núcleos vizinhos. Como a desintegração do núcleo intermediário se pode dar para os diversos níveis excitados do núcleo final em estudo, pode-se determinar a posição dos mesmos a partir das energias cinéticas das partículas emergentes.

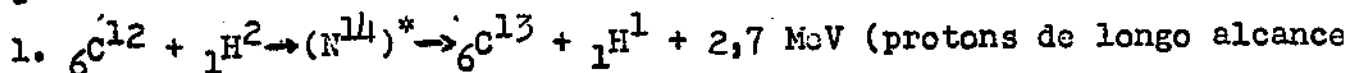
Um bom exemplo é a determinação dos níveis excitados do ${}^7\text{N}^{14}$. No segundo dos processos acima descritos enquadram-se:

- 1) O espalhamento inelástico de protons em N^{14} .
- 2) A desintegração do O^{14} num dos níveis excitados do N^{14} .
- 3) O bombardeio de C^{13} com deuteron, formando N^{15} que decai em N^{14} com emissão de um neutron.

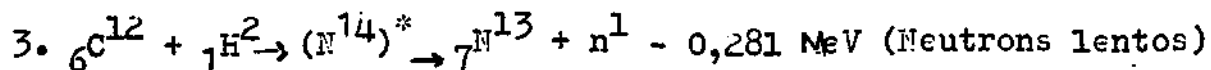
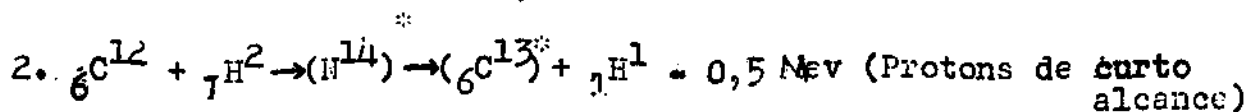
O bombardeio de O^{16} com deuteron, formando um estado intermediário que decai no N^{14} por emissão alfa.

Entre os exemplos do primeiro processo citado acima, está o bombardeio de C^{12} com deuterons; passamos a descrever esta reação com mais detalhe.*

Os deuterons são acelerados por acelerador Van de Graaff sendo sua energia acuradamente conhecida. O núcleo composto $(\text{N}^{14})^*$ dá origem às três seguintes reações:



* Veja Bonner et al., Phys. Rev. 75, 1401, 1949.



A intensidade da reação 1 pode ser obtida medindo-se a intensidade dos protons de longo alcance produzidos. Como a soma das massas $\text{C}^{12} + \text{H}^2$ é maior que a soma $\text{C}^{13} + \text{H}^1$ ela não apresenta limiar de energia para o deuteron abaixo da qual a reação não se processaria. A energia do proton é 2,68 MeV mais a energia cinética do deuteron incidente (no sistema do centro de massa).

A reação 2 porém só começa para energias do deuteron maiores que 0,5 MeV. Ela pode ser medida pela intensidade dos raios gama devidos à transição do C^* ao C. São monocromáticos, de energia 3,1 MeV.

Para a reação 3, em vez de se medir os neutrons produzidos, pode-se medir a quantidade do ${}_{7}\text{N}^{13}$ formado, pela sua positron atividade (decai em C^{13} com 10 minutos de vida média, aproximadamente).

As curvas das intensidades das partículas produzidas nas diversas reações 1,2 e 3, em função da energia do deuteron incidente, apresentam máximos de ressonância com os níveis excitados do ${}_{7}\text{N}^{14}$, cuja posição determina a energia dos mesmos.

Reunimos num gráfico a intensidade dos neutrons, protons e ftons gama em função da energia do deuteron incidente. (Fig. I,3)... A correspondência entre os máximos nestas curvas mostra que o estado intermediário foi sempre o mesmo, o que fortalece a ideia do modelo do núcleo composto. Faltam os máximos em algumas das curvas em relação às outras em virtude de proibição das transições correspondentes.

Convem lembrar ainda que, para o espalhamento de um núcleo por outro, a secção de choque é devida à interferência de dois processos: espalhamento simples e espalhamento de ressonância, que se dá pela formação do núcleo composto perto dos estados excitados do mesmo.

Assim as posições dos máximos das curvas não coincidem exatamente com as posições (isto é, energias) dos níveis excitados.

do ${}^7\text{N}^{14}$. No capítulo II veremos como se determina a forma da curva da secção de choque de um destes processos em função da energia, perto das ressonâncias, e como a partir destes se determina a energia e o momento angular da onda da partícula incidente para cada ressonância particular.

Há muitas outras possibilidades para a determinação dos níveis excitados do N^{14} , como por exemplo, a determinação das energias de desintegrações β de um núcleo vizinho a um dos estados do N^{14} , e subsequente estudo da emissão de raios gama para estados menos excitados do N^{14} . Para um gráfico completo dos estados do N^{14} , que contém todas as reações e processos empregados, veja o artigo de Hornyak et al, já citado.

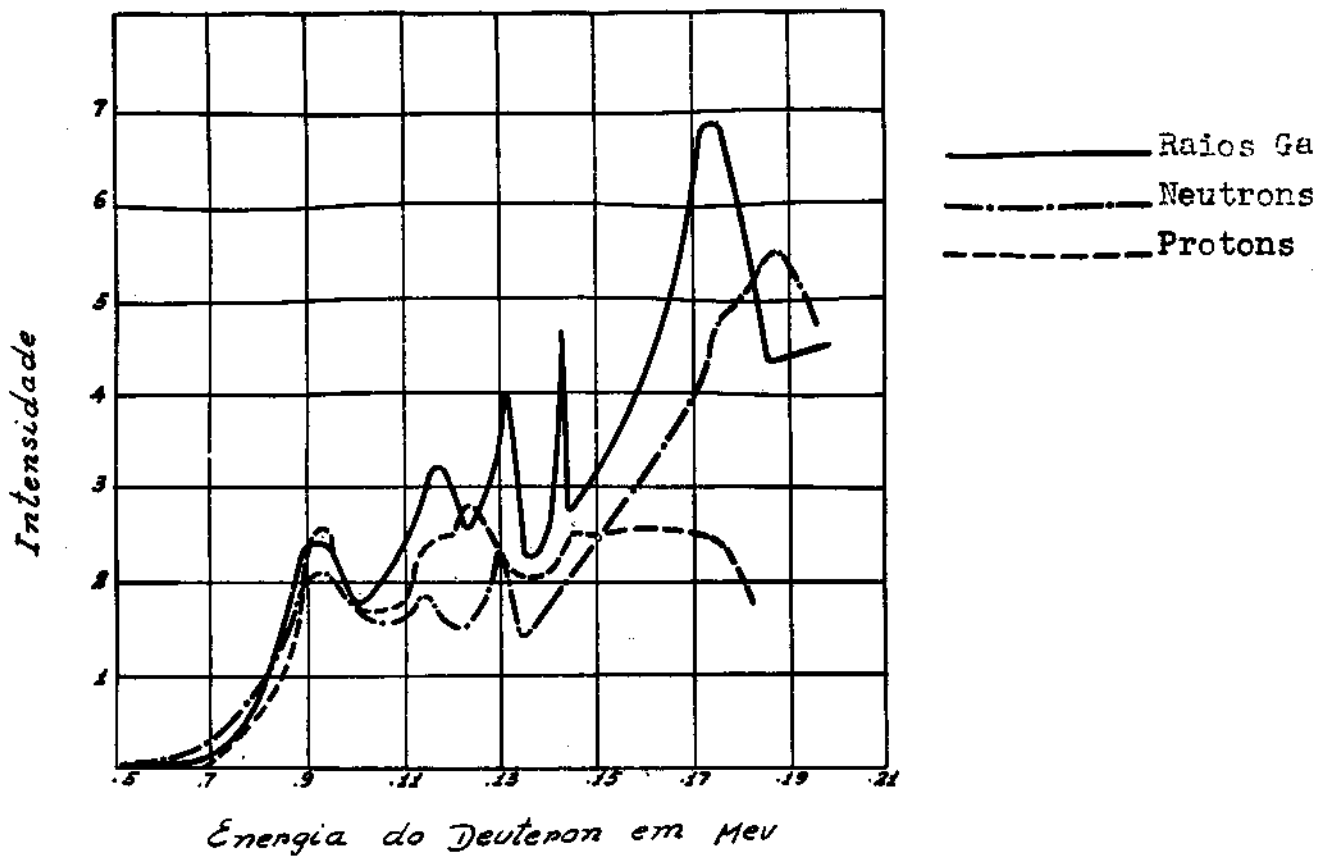


Fig. I, 3

Curvas de excitação para emissão de raios γ , neutrons e protons. Observe a correspondência entre os maximos nessas curvas, mostrando que o estado intermediário foi sempre o mesmo. Esse resultado está em plena concordância com o modelo do nucleo composto.

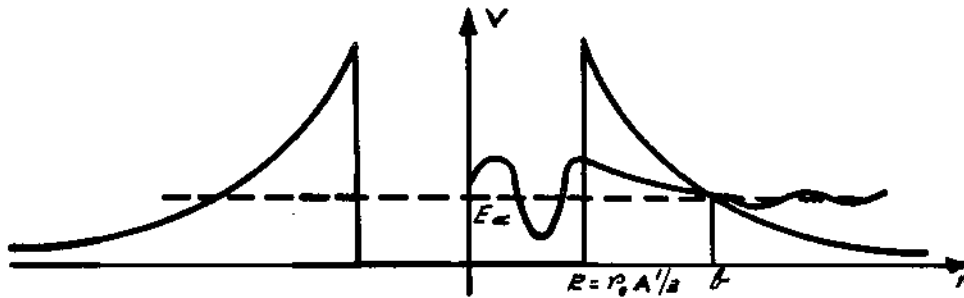


Fig. II, 1

Espalhamento de partículas alfa por um potencial nuclear. A grandes distâncias a interação é coulombiana; a curtas distâncias predominam as forças nucleares. No "interior" do nucleo o potencial é suposto constante; a função de onda da partícula é sensivelmente estacionária.

CAPÍTULO II

ESPALHAMENTO DE RESSONÂNCIA

II, 1. Generalidades:

O estudo do espalhamento de ressonância fornece um exemplo da aplicação da Mecânica Quântica aos modelos nucleares.

Neste caso admite-se a ideia do núcleo composto, que se forma como estado intermediário na reação de duas partículas. Este núcleo composto, apesar de não ser estável, possui estados bastante bem definidos, e de vida média longa comparada com o tempo de passagem de um nucleon através de um núcleo (que é da ordem do tamanho do núcleo/velocidade do nucleon = $10^{-13}/10^9 = 10^{-22}$ segundos). Todos os núcleos possuem estados deste tipo, chamados excitados. Pelo princípio de indeterminação, quanto maior a vida média do estado, tanto melhor a sua energia se encontra definida.

Sempre que a energia cinética relativa das partículas que vão reagir for tal que a energia do núcleo composto formado se encontre nas vizinhanças da energia de um destes estados excitados, é de se esperar que as partículas em reação mostrem especial afinidade. Este é realmente o caso. Revela-se por exemplo, pelo fato de que, perto destas energias, a secção de choque de espalhamento de uma das partículas por outra é especialmente grande ou pequena, variando fortemente em função da energia da partícula incidente de maneira perfeitamente concordante com o cálculo que vamos apresentar (Fig. II, 15).

No cálculo não se faz praticamente uso de qualquer conhecimento sobre o núcleo, com exceção da hipótese de que o potencial do núcleo composto, pelo qual se introduz a força de interação entre as partículas em reação, apresente a forma de um poço. Fazendo-se de-

pois uso da Mecânica quântica, calculam-se as energias da partícula incidente para as quais a sua função de onda tenha amplitude muito grande no interior do poço de potencial. Mostra-se mais tarde que os resultados são bastante independentes da forma do poço de potencial admitido, o que significa que o estudo das reações de ressonância não contribui grandemente para o conhecimento teórico das forças nucleares.

Somente para se ter uma ideia do valor físico deste método vamos esboçar primeiro a teoria da desintegração alfa.

II, 2. Desintegração alfa.

Compreende-se este processo como a "perfuração" quântico da barreira de potencial coulombiano pela função de onda da partícula alfa de dentro do núcleo para o exterior.

Para isso imaginemos o processo contrário: por exemplo uma partícula alfa que se desloca em direção a um núcleo de ${}_{90}\text{Th}^{234}$, pelo qual vai ser capturada, formando ${}_{92}\text{U}^{238}$. Para penetrar nas regiões de atração nuclear, isto é, dentro do núcleo, ela teria que vencer primeiro todas as repulsões eletrostáticas, e para isso exigiria energias superiores a

$$2e \frac{Ze}{r} = 2 \frac{Z}{A^{1/3}} \frac{e^2}{r_0} = 2 \frac{Z}{A^{1/3}} \times 1.02 \text{ MeV} = 29.3 \text{ MeV}$$

Ora, energias tão altas nunca entram em jogo nas desintegrações alfa. A partícula alfa é emitida com energia sempre menor que 10 MeV e no caso presente com 4,2 MeV. Isto mostra que o referido "perfuração" quântica deve existir a desempenhar papel preponderante neste fenômeno.

O método de cálculo é então o seguinte: procura-se uma forma razoável para a barreira de potencial que exprime as forças entre núcleo e partícula alfa, e calcula-se depois a perfuração realizada pela função de onda da partícula alfa de dentro para fora do núcleo. A relação entre as amplitudes fora e dentro permite obter a probabilidade de emissão da partícula alfa, e portanto a vida média de desintegração.

As forças coulombianas são de muito maior alcance que as nucleares (estas últimas não bem conhecidas), de modo que a largura da

barreira de potencial que descreve o núcleo, (é essencialmente a largura que determina a perfuração) deve ser quasi totalmente devida às forças coulombianas. Podemos então, para êste estudo, descrever as forças nucleares pelo potencial representado na Fig. II, 1.

Dentro do núcleo, isto é, para $r < R = r_0 A^{1/3}$ o potencial é representado por um poço quadrado de altura $2 Ze^2/r_0 A^{1/3}$ representando as forças puramente nucleares, e fora desta região pelo potencial coulombiano $2 Ze^2/r$.

A partícula alfa, dentro do núcleo, não está num estado estacionario, de energia perfeitamente definida, pois ela, depois de um certo tempo, escapa do mesmo. Sua função de onda, porém, é constituída, em maior parte, pela contribuição do estado estacionário no qual a partícula alfa pode ficar mais tempo dentro do núcleo. É êste estado estacionário que estudaremos a seguir.

É claro que êsse estado não é qualquer, mas corresponde àquela energia em que a relação das amplitudes fora e dentro é a menor possível. No caso do espalhamento de partícula alfa voltaremos a encontrar êstes estados nas ressonâncias. Dentro do poço a função de onda tem amplitude grande, atravessa a barreira com queda exponencial e emerge do outro lado com carater oscilatório e amplitude muito pequena. Esta última é a amplitude da probabilidade de encontrar a partícula alfa fora do núcleo.

A relação do quadrado das amplitudes fora e dentro do núcleo, a , também chamada transparência da barreira, é dada por*

$$a \approx \exp. -2 \int_R^b \sqrt{2M(V-E)} \frac{dr}{\hbar} \quad (II, 1)$$

em que E e M são a energia e a massa da partícula alfa; R e b estão indicados na Fig. II, 1 e V é dado por

$$V = 2 \frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2}$$

* Veja Fermi, Nuclear Physics, The University of Chicago Press, Pg. 57.

O segundo termo de V representa a energia potencial da força centrífuga e é devida ao momento angular orbital $\hbar l$ da partícula.

Uma imagem grosseira que relaciona a com a vida média de desintegração é a seguinte: a partícula alfa se move dentro do núcleo como se fôsse livre com certa velocidade média v_{in} ; as forças nucleares só se manifestam nos bordos do núcleo, que agem como paredes que fazem a partícula alfa voltar para o interior do mesmo, cada vez que se choca contra elas. Depois de um número suficientemente grande de tentativas há uma em que a partícula alfa consegue atravessar a parede e escapar, em virtude da amplitude da função de onda não ser nula no exterior.

Este número de tentativas é proporcional à relação do quadrado das amplitudes dentro e fora, isto é, a $1/a$ pois a função de onda pode ser interpretada como representando um fluxo de partículas que passa do interior para o exterior e $1/a$ é o número de partículas que deve haver dentro para que haja uma fora.

O tempo da desintegração, ou vida média τ , é dado pelo intervalo de tempo entre dois choques consecutivos da partícula alfa sobre a parede (raio do núcleo r_A dividido pela velocidade v_{in} da partícula alfa no interior do núcleo) vezes o número de tentativas para poder escapar:

$$\tau = C \frac{r_A}{v_{in}} \cdot \frac{1}{a} \quad (\text{II}, 2)$$

A constante de proporcionalidade C dá uma idéia da imperfeição deste modelo, ou seja do efeito das forças nucleares sobre a função de onda no interior do núcleo.

A influência das forças nucleares sobre a probabilidade do vazamento da partícula alfa através da barreira é muito pequena em relação às coulombianas, a ponto de podermos, sem grande erro, ser substituídas pelo poço de potencial no interior do núcleo. Isto se torna plausível se lembrarmos que o vazamento é condicionado pela largura da barreira. Como as forças puramente nucleares são de muito menor alcance que as coulombianas, são estas últimas, especialmente para o caso da partícula alfa de carga $2e$, que contribuem para a maior parte da barreira de potencial. Em outros termos, a transparência a é muito sensível à variação do raio do núcleo, como se pode mostrar a partir da

sua expressão acima mencionada. Isto é, uma pequena variação do raio pode compensar uma grande variação das forças nucleares, o que mostra que a influência destas últimas é pequena.

II, 3. Espalhamento de partículas alfa

Passamos ao estudo do espalhamento de partículas alfa, em função da energia, tendo em vista principalmente o espalhamento de ressonância, que se dá quando a energia da partícula é próxima à de um nível excitado do núcleo composto. A comparação com a experiência encontra-se em II, 5 e II, 8.

A situação é bastante complicada. Nós a estudaremos utilizando o modelo muito simplificado de uma partícula alfa movendo-se dentro de um poço de potencial especial que representa o núcleo (composto) de tal modo que o valor do potencial dentro do núcleo é igual ao seu valor para grandes distâncias, isto é, igual a zero. Veremos mais tarde que o resultado é praticamente independente destas hipóteses simplificadoras. De fato, e isto será apenas mencionado aqui, existe uma teoria muito mais geral, com um número mínimo de hipóteses, que leva ao mesmo resultado.

Procuraremos estudar o comportamento da função de onda da partícula alfa incidente em face da barreira de potencial do núcleo composto formado.

Preliminarmente estudaremos as funções de onda estacionárias associadas ao potencial que descreve o núcleo, para depois desenvolvermos nas mesmas a função de onda da partícula alfa, dependente do tempo. O motivo de procurarmos primeiro as ondas estacionárias associadas ao potencial difusor, isto é, as ondas que descrevem partículas de energia definida E , momento angular hl , cujas partes radiais $\Psi_l(r)$ satisfazem à equação

$$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 (r\Psi_l)}{\partial r^2} + \left[E - U - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \Psi_l = 0 \quad (\text{II,3})$$

e têm as formas assintóticas (a grandes distâncias) do tipo

$$C_1 \sin \left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l \right), \quad (\text{II,3a})$$

é que a secção de choque de espalhamento $\sigma(\theta)$ aparece como uma função das fases δ_1 do tipo

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \left| \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[e^{2i\delta_1} \right] P_l(\cos \theta) \right|^2 \quad (\text{II},4)$$

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_1 \quad (\text{II},5)$$

Nestas expressões θ é o ângulo de deflexão da partícula, $P_l(\cos \theta)$ são polinômios de Legendre e k é o número de ondas associadas à partícula incidente (de energia E e massa m) tal que $k^2 = E \cdot 2m/\hbar^2$

Um estudo detalhado das relações entre secção de choque e atrasos δ_1 encontra-se no Apêndice I, no fim destas notas.

II, 4. Estudo da Equação de Schroedinger

Nosso método de cálculo será o seguinte: decomposemos o potencial do núcleo em barreiras separadas, e estudaremos o efeito individual das barreiras sobre as ondas incidente, transmitida e refletida; depois, com esse conhecimento, estudaremos as soluções estacionárias da equação de Schroedinger associadas ao potencial nuclear, e finalmente, consideraremos a função de onda da partícula alfa dependente do tempo e a decomposemos nas funções de onda estacionárias do sistema, o que nos possibilitará estudar o comportamento perto das ressonâncias.

Para o estudo do potencial, vamos supor inicialmente que o potencial no interior do núcleo seja zero. Eliminaremos esta restrição em II, 7. Podemos então decompô-lo em duas barreiras do tipo representado na Fig.II,2. Para regiões muito afastadas de ambos os lados desta barreira, o seu potencial será nulo e as soluções da equação de Schroedinger correspondente serão, nestas regiões, superposições de ondas planas, cuja forma mais geral, é:

$$\alpha e^{-ikx + \delta_1} + \beta e^{ikx + \delta_2} \quad (\text{II},6)$$

A menos de um fator complexo arbitrário, a solução mais geral à direita da barreira será então, para regiões afastadas, do tipo

$$e^{-ikx} + \rho e^{ikx+i\delta_2} \quad (\text{II, 6a})$$

Se tivermos uma onda plana de amplitude 1 incidente, por exemplo, pela direita $\psi_{in} = e^{-ikx}$ poderemos compreender o efeito da barreira como sendo a emissão para a direita de uma outra onda, $\psi_r = \rho e^{i(kx+\delta_2)}$, que chamaremos de refletida, a qual, sobrepondo-se à incidente, produz a onda total à direita da barreira. Do lado esquerdo a onda mais geral terá a forma assintótica

$$t e^{-ikx+i\delta_3} \quad (\text{II, 6b})$$

(Não é preciso pôr mais uma onda do tipo $t' e^{+ikx+i\delta_3}$ à esquerda pois, as novas constantes assim introduzidas (t' e δ_3) ficam indeterminadas, e podem ser tomadas como zero). A barreira tem pois, como efeito, produzir uma onda refletida e uma transmitida.

Podemos encontrar um "plano aparente de reflexão pela direita" do qual a onda refletida parece ser oriunda (assintoticamente), e na posição do qual as expressões assintóticas das ondas incidente e refletida estão em oposição de fase. (Esta diferença de fase de π , que acarreta o sinal negativo de ρ é introduzida por razões de conveniência para o que se segue). Chamando a a coordenada deste plano, devemos ter:

$$\psi_r = -\rho_D e^{ik(x-a)-ika} \quad \text{com } \rho_D \text{ real}$$

pois então

$$\psi_r(a) = -\rho e^{-ika}$$

$$\psi_{in}(a) = e^{-ika}$$

e a onda refletida vale $-\rho e^{ik(x-a)}$ vezes o valor que a onda incidente tem neste plano. O valor de a fica pois determinado, a menos de um múltiplo inteiro de π :

$$2ka = \delta_2$$

Se a onda incidente vier pela esquerda, vemos análogamente, que o efeito da barreira é produzir uma onda refletida para a direita e uma transmitida para a esquerda. Haverá um plano aparente de reflexão pela

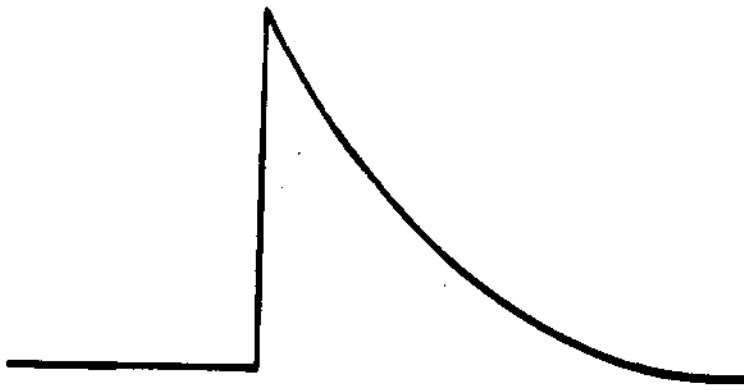


Fig. II,2

Tipo de barreira de potencial na qual o potencial nuclear pode ser decomposto. (Veja Fig. II,1)

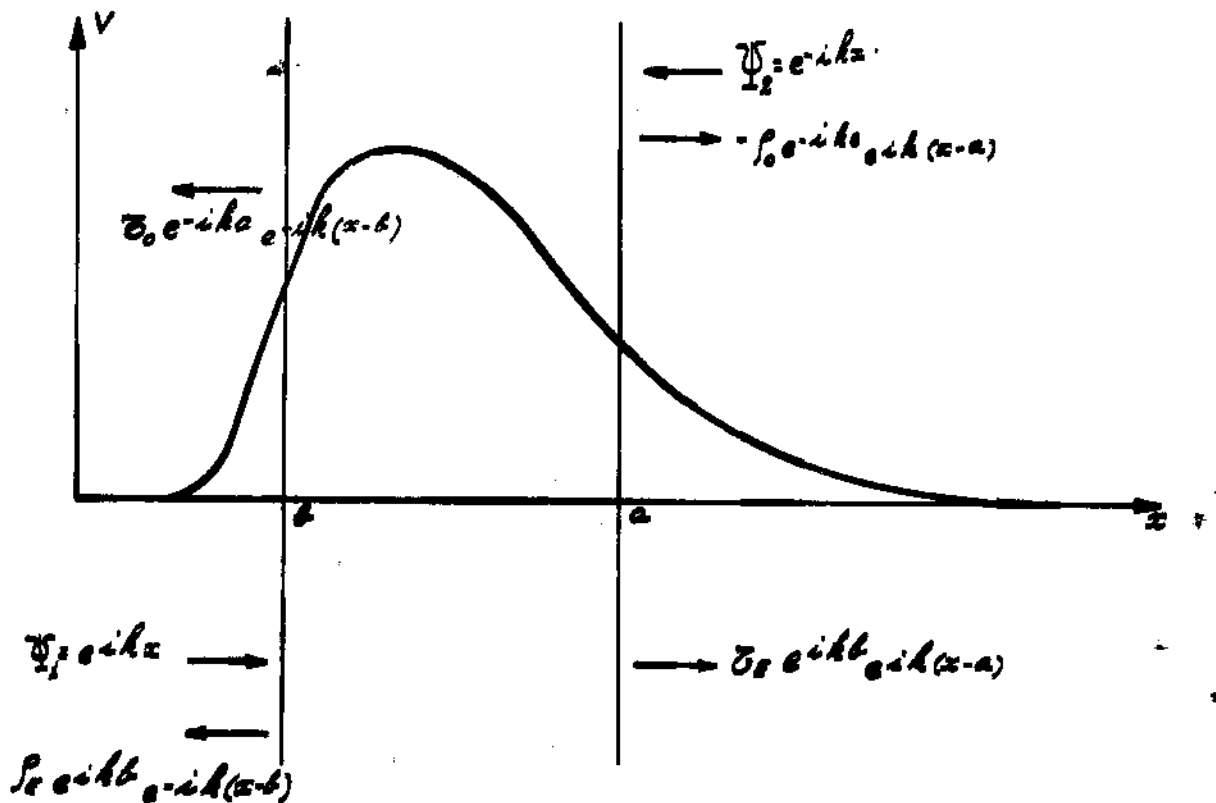


Fig. II,3

Reflexão e transmissão de ondas através de uma barreira de potencial que tende a zero a a esquerda. T_D, T_A, R_D, R_A são os coeficientes de transmissão e reflexão, respectivamente, a direita e a esquerda. As ondas incidentes são Ψ_1 e Ψ_2 .

esquerda, cuja posição chamaremos de \underline{b} . O coeficiente de reflexão será ρ_E .

Vamos agora definir os coeficientes de transmissão para depois enunciarmos com mais facilidade uma propriedade muito importante de que gozam as barreiras, e que nos servirá para prosseguir o estudo. A onda transmitida para a esquerda (a incidente é pela direita), isto é,

$$\psi_t = t e^{-ikx + i\omega t}$$

poderá ser medida a partir do plano aparente da esquerda:

$$\psi_t = \tau_D e^{-ika} \cdot e^{-ik(x-b)}$$

Este τ assim definido é um número complexo cuja fase indica de quanto se atrasa a fase da onda transmitida na posição do plano de reflexão da esquerda (em \underline{b}) em relação à fase da onda incidente, mas esta, tomada na posição do plano de reflexão à direita. É como se a onda incidente pulasse, sem mudança de fase, do plano de reflexão da direita para o da esquerda, de onde continua com mudança de amplitude e alteração de fase dados por τ_D .

Analogamente, podemos definir τ_E para a onda transmitida da esquerda para a direita. τ_E deve ser tal que

$$\psi_t = \tau_E e^{+ikb} \cdot e^{ik(x-a)}$$

Uma vez definidos os coeficientes de transmissão e reflexão $\rho_D, \rho_E, \tau_D, \tau_E$ e os planos aparentes de reflexão mostraremos a seguinte propriedade válida para barreiras de forma arbitrária e que caíam a zero de ambos os lados (Fig. II, 3).

$$\rho_D = \rho_E = \rho \quad (\text{número real}) \quad (\text{II, 7})$$

$$\begin{aligned} \tau_D &= i\rho \\ \tau_E &= i\rho^* \end{aligned} \quad (\text{II, 8})$$

$$1 = \rho^2 + |\tau|^2 \quad (\text{II, 9})$$

Isto significa que a barreira, pelo menos quanto ao comportamento assintótico da função de onda, pode ser caracterizada pelo conhecimento dos números reais a , b , ρ e pelo número complexo s .

A demonstração baseia-se no princípio da conservação do número de partículas, não sendo necessário entrar em cálculos detalhados das soluções para tipos particulares de barreiras.

Seja a função de onda, por exemplo

$$\psi_D = e^{ikx} + r e^{-ikx}$$

a qual pode ser interpretada como representando um fluxo de uma partícula por unidade de volume vindo da esquerda para a direita e de $|r|^2$ partículas por unidade de volume refletidas da direita para a esquerda. O número de partículas transmitidas mais o número de refletidas deve ser igual ao número de incidentes. Logo, obtemos diretamente

$$\begin{aligned} 1 &= |\tilde{C}_E|^2 + \rho_E^2 \\ 1 &= |\tilde{C}_D|^2 + \rho_D^2 \end{aligned} \tag{II,9a}$$

Para provar a relação entre os \tilde{C} vamos lembrar que qualquer combinação linear das duas soluções particulares originadas, respectivamente, por uma onda unitária incidente pela esquerda (indicada por ψ_1 na Fig. II,3) e outra pela direita (ψ_2) também deve ser uma solução da equação de Schroedinger para a qual também podemos aplicar o princípio da conservação dos fluxos de partículas que ela representa. Sendo a combinação linear

$$\alpha \psi_1 + \beta \psi_2$$

os fluxos incidentes dos dois lados são proporcionais e

$$|\beta|^2 = |\alpha \tilde{C}_D e^{-ik(a-b)} - \rho_E e^{2ika}|^2$$

e

$$|\alpha \rho_D e^{-2ika} - \beta \tilde{C}_E e^{ik(b-a)}|^2 = |\alpha|^2$$

(o que pode ser também verificado utilizando a expressão para a corrente de densidade de probabilidade

$$\frac{\hbar}{2iH} \left\{ \psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \psi^* \right\} \quad).$$

A igualdade desses fluxos acarreta:

$$\begin{aligned} |\beta|^2 - |\alpha|^2 |\tau_D|^2 - |\beta|^2 \rho_E^2 + \alpha \tau_D e^{-ik(a+b)} \beta^* \rho_E + \alpha^* \tau_D^* e^{ik(a+b)} \beta \rho_E = \\ = -|\alpha|^2 + |\alpha|^2 \rho_D^2 + |\beta|^2 \tau_E^2 - \alpha \rho_D e^{-ik(a+b)} \beta^* \tau_E^* + \alpha^* \rho_D^* e^{ik(a+b)} \beta \tau_E \end{aligned}$$

Os três primeiros termos se cancelam em virtude de (II,9a), de modo que ficamos com a relação

$$\begin{aligned} \alpha \beta^* (\rho_D \tau_E^* + \rho_E \tau_D) e^{-ik(a+b)} + \\ + \alpha^* \beta (\rho_D^* \tau_E + \rho_E^* \tau_D) e^{ik(a+b)} = 0 \end{aligned}$$

Como α e β são arbitrários e independentes, esta identidade só pode ser satisfeita se os termos entre parêntesis forem identicamente nulos, isto é,

$$\frac{\tau_E^*}{\rho_E} = -\frac{\tau_D}{\rho_D} \quad (\text{II,10})$$

Segue-se que

$$\frac{|\tau_E|^2 + |\rho_E|^2}{|\rho_E|^2} = \frac{|\tau_D|^2 + |\rho_D|^2}{|\rho_D|^2}$$

e em virtude de (II, 9a):

$$\rho_D = \rho_E$$

Esta relação aplicada em (II,10) mostra que

$$\tau_E^* = -\tau_D$$

isto é, que

$$\begin{aligned} \tau_D &= i s \\ \tau_E &= i s^* \end{aligned} \quad (\text{II,8a})$$

II, 5. Determinação das Defasagens δ_1

Vamos aplicar agora o resultado do parágrafo anterior ao estudo do espalhamento de partículas alfa por núcleos, obtendo as defasagens δ_1 em função das constantes que caracterizam a barreira de potencial do núcleo, isto é, sem resolver rigorosamente a equação de Schroedinger correspondente.*

Será plausível supor o potencial nuclear esfericamente simétrico e tal que, perto da origem (onde está o núcleo, fonte do potencial), caia a um valor constante (zero por exemplo). Mais tarde veremos as alterações que ocorrem se este valor for negativo. Como as forças nucleares são de curto alcance, o potencial subirá rapidamente para depois cair aproximadamente como $1/r$, em virtude de forças coulombianas de longo alcance entre núcleo e partícula alfa. A região muito afastada do núcleo, onde mesmo o potencial coulombiano é desprezível, chamaremos externa. Sem conhecermos a forma exata desta barreira de potencial, vamos substituí-la por suas constantes equivalentes (posições dos planos de reflexão, e valores de η e s , que portanto não são exatamente conhecidas) e calcular a partir das mesmas as soluções estacionárias de forma assintótica

$$\text{sen} \left(kr - \frac{1}{2} \pi + \delta_1 \right).$$

Supondo depois que a variação daquelas constantes com a energia da partícula incidente é lenta, poderemos, para $|s|$ pequeno, calcular a variação de δ_1 e portanto da secção de choque, em função da energia perto das ressonâncias.

Vamos agora mostrar como se calculam as soluções estacionárias correspondentes a um determinado momento angular $\hbar l$, tendo em vista aquela parcela da função de onda total que descreve este momento angular. (Veja Apêndice I, equação (AI, 3)). Deixaremos de lado

* Compare com os trabalhos seguintes:

G. Breit e E. Wigner, Phys. Rev. 49, 519 (1936)

H. Bethe e G. Placzek, Phys. Rev. 51, 450 (1937)

H. Feshbach, D. C. Peaslee, V. F. Weisskopf: Phys. Rev. 71, 175 (1947)

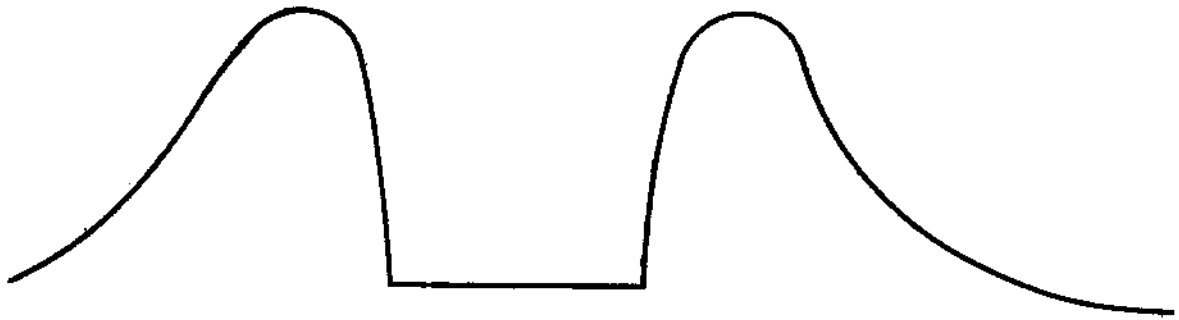


Fig. II,1

Esquema de potencial para as forças nucleares. Para $r < r_0 A^{1/3}$ as forças nucleares predominam; fora dessa região prevalecem as interações de tipo coulombiano.

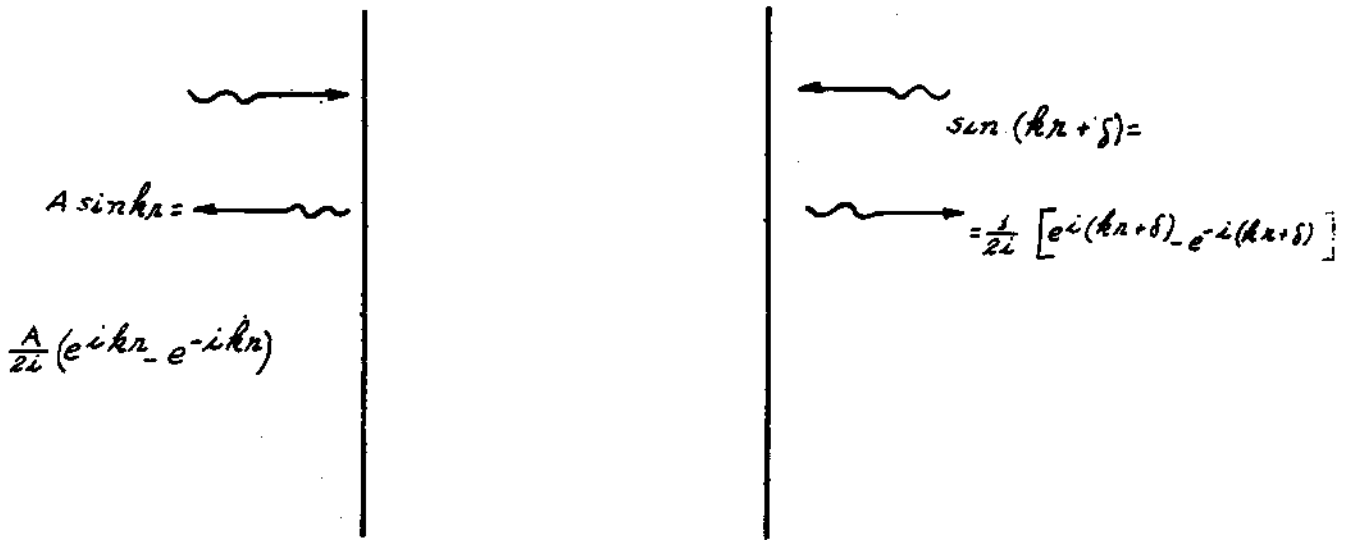


Fig. II,5

"Planos aparentes de reflexão" em substituição da barreira de potencial da Fig. II,4. A solução na região externa é obtida pela superposição de uma onda incidente e outra emergente.

a parte angular da solução que, como foi visto, não nos interessa para este cálculo:

Nós aqui executaremos o cálculo para o caso particular $l=0$. Nos outros casos ($l \neq 0$) o potencial terá que ser acrescido de $\hbar^2 l(l+1)/r^2$ o que altera as posições dos planos aparentes de reflexão \underline{a} e \underline{b} , e faz a onda no interior do núcleo não ser mais senoidal. Vamos substituir o potencial nuclear pelos seus dois planos aparentes de reflexão \underline{b} e \underline{a} (Fig. II, 5). Procuraremos para a região externa a solução estacionária (assintótica) do tipo $\sin(kr + \delta)$. Dentro do núcleo a função $\psi(r)$ deve ser do tipo $A_k \sin kr$ pois aí o potencial é constante e além disso, $r \cdot \psi(r)$ deve ser limitado para $r = 0$. As soluções podem ser compreendidas como combinação linear apropriada da função produzida por uma onda unitária incidente pela direita e outra pela esquerda da barreira.

Convém lembrar que a onda no interior do poço, se as barreiras são instantes e espessas (transmitividade s pequena), se assemelha bastante à onda estacionária que haveria no poço se suas paredes fossem infinitamente altas e espessas. Esta última não é qualquer mas só existe para certas energias, e portanto frequências ν_0 bem definidas. À medida que a frequência da onda no exterior se aproxima das frequências características, ν_0 , do interior do núcleo, apesar da pequena transparência da barreira, a onda consegue penetrar no seu interior e excitar a amplitude de onda a valores bem grandes. Estas são então as chamadas ressonâncias. (O fenômeno é bem semelhante ao caso do exemplo de um pêndulo fracamente acoplado e portanto quasi livre a um movimento vibratório exterior. A fraqueza do acoplamento corresponde a opacidade (s pequeno) da barreira).

Para efetuarmos o cálculo, vamos fazer a combinação linear das funções ψ_1 e ψ_2 indicadas na Fig. II, 3

$$\alpha \psi_1 + \beta \psi_2$$

e determinar α e β de tal modo que as ondas resultantes sejam da forma senoidal desejada dentro e fora do núcleo. Obtemos para a região interna

$$(\alpha \sin e^{ik(b-a)} - \beta \psi e^{2ikb}) e^{-ikx} + \beta e^{ikx}$$

e para externa

$$\alpha e^{-ikx} + (\beta is^* e^{ik(b-a)} - \rho e^{-2ika}) e^{ikx}$$

de modo que basta tomar

$$\alpha = -\frac{1}{2i} e^{-i\delta} \quad e \quad \beta = \frac{A}{2i}$$

Lembrando que o coeficiente de e^{-ikx} dentro do poço de potencial deve ser $-\beta$, obtemos a equação

$$is \cdot e^{-i(ka+\delta)} + A \rho e^{ikb} = A e^{-ikb} \quad (II,11)$$

O coeficiente de e^{ikx} fora do poço deve ser $-\alpha$ de modo que obtemos

$$A \cdot is^* \cdot e^{ikb} + \rho e^{-i(ka+\delta)} = e^{i(ka+\delta)} \quad (II,12)$$

De (II,12) vemos que se a transmitividade s fôr zero, $ka+\delta$ deve ser zero (neste caso a onda fora é sen $k(x-a)$, isto é, a barreira reflete totalmente) de modo que

$$\delta' = ka + \delta$$

mede o desvio em relação à reflexão total| de (II,11) resulta:

$$A = \frac{isc^{-i\delta}}{e^{-ikb} - \rho e^{ikb}} \quad (II,11a)$$

De (II,12) resulta

$$A = \frac{1}{is^*} (e^{i\delta'} - \rho e^{-i\delta'}) e^{-ikb} \quad (II,12a)$$

e de (II,11) e (II,12)

$$e^{2i\delta'} - \rho = \frac{ss^*}{\rho - e^{-2ikb}} = is^* A e^{ikb} e^{i\delta'} \quad (II,13)$$

O nosso objetivo é determinar as energias de ressonância o o comportamento da seção de choque perto delas, isto é, determinar a variação de A e de δ em função de k (energia da partícula incidente).

Tomemos primeiro o caso em que a barreira é praticamente opaca, isto é, s praticamente 0, ρ praticamente 1. Observando (II, 11a) e (II, 13), vemos que, neste caso, os denominadores se tornam praticamente nulos para $kb = n\pi$. Estas são as energias de ressonância, para as quais o valor da amplitude no interior do núcleo, A , se torna muito grande e δ' varia muito rapidamente. Convém lembrar que os valores de b , a , ρ , s variam lentamente com a energia, de modo que a relação

$$kb = n\pi$$

determina as posições das energias de ressonância de maneira mais complicada do que normalmente parece.

Para analisar o comportamento perto das energias de ressonância, escrevamos:

$$k = k_n + \Delta k,$$

e façamos as seguintes aproximações. Substituamos

$$\rho \text{ por } 1 - \frac{1}{2} |s|^2$$

$$e^{-2ikb} = e^{-2i\Delta kb} \text{ por } 1 - 2i\Delta kb$$

$$e^{2i\delta'} - 1 \text{ por } \frac{|s|^2}{\gamma \frac{1}{2} |s|^2 - \gamma + 2i\Delta kb}$$

Lembrando que $k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$

$$2k_{res} (k_{res} - k) = \frac{2i\Gamma}{\hbar^2} (E_{res} - E)$$

fazendo

$$\Gamma = |s|^2 \cdot \frac{k_{res} \hbar^2}{2\mu b} \quad (\text{II, 14})$$

obtemos a expressão

$$e^{2i\delta'} - 1 = \frac{-i\Gamma}{(E - E_{res}) + i(\Gamma/2)} \quad (\text{II, 15})$$

válida dentro das aproximações citadas, das quais a mais significativa é que \underline{s} seja bem pequeno.

Analisando esta expressão vemos que, para valores da energia afastados da ressonância, $e^{2i\delta'} - 1$ é muito pequeno, da ordem de

$$\frac{|s|^2}{b\Delta k} = \frac{\Gamma}{\Delta E}$$

À medida que nos aproximamos da ressonância, $|e^{2i\delta'} - 1|$ cresce rapidamente até π para depois decrescer novamente, de modo que $2\delta'$ varia rapidamente de 0 a $-\pi$ e a 2π novamente.

De (II,12) segue-se também que:

$$A|s|^* e^{i(\delta' + kb)} = \frac{|s|^2}{2} + e^{2i\delta'} - 1$$

Vemos pois que A cresce de um valor da ordem de $|s|$ (para energias longe da ressonância) até $2/|s|$ na ressonância, de modo que perto da ressonância obtemos

$$|s|A = 2 \operatorname{sen} \delta' \quad (\text{II,16})$$

Usando (II,15) obtemos

$$\operatorname{sen} \delta' = \frac{\Gamma/2}{\sqrt{(E-E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}}$$

Esta relação permite determinar graficamente o ângulo δ' (Fig. II,6).

Obtemos graficamente a posição do vetor representativo de $e^{2i\delta'}$ no plano complexo da seguinte maneira (Fig. II,7). Desenhamos no plano complexo o círculo unitário. Traçamos uma reta do ponto (1,0) ao ponto $1 - \Gamma/2 + i(E-E_r)$. Sua intersecção com o círculo unitário determina a extremidade do raio vetor de $e^{2i\delta'}$ procurado, (B-O). Se tivéssemos escolhido em A (ponto de coordenadas (1,0)) a origem das coordenadas, o raio vetor B-A representaria o número $e^{2i\delta'} - 1$.

Convém lembrar que a secção de choque é dada em função de δ , e não de δ' e

$$\delta = \delta' - ka = \delta' + \delta_0$$



Fig. II,6

Determinação gráfica dos des-
 A relação $\text{sen } \delta' = \frac{\Gamma/2}{\sqrt{(E-E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}}$
 e a construção acima.

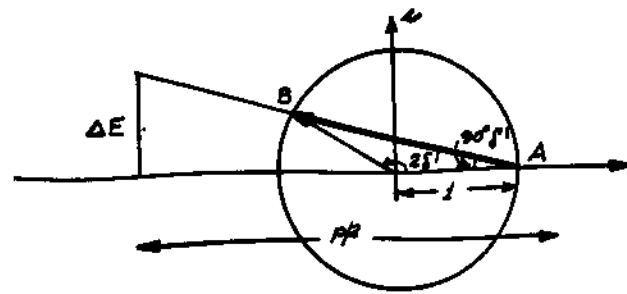


Fig. II,7

Determinação de $e^{2i\delta'}$. No plano
 complexo lança-se o círculo unitário de
 centro na origem. A interseção da reta
 que liga os pontos $[1,0]$ e $[-(1-\Gamma/2), (E-$
 $\text{com o círculo determina a extremidade d$
 vetor $e^{2i\delta'}$. De fato, decorre da constr
 ção que $B-O = -\cos 2\delta' + i \text{sen } 2\delta'$, ou s
 ja $B-O = e^{2i\delta'}$.

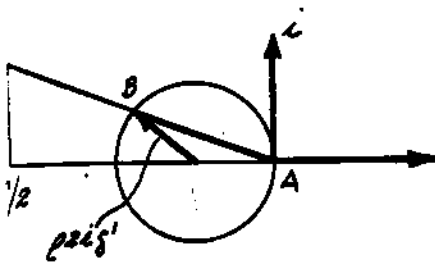


Fig. II,8

Determinação gráfica de $e^{2i\delta'} - 1$
 O vetor B-A representa $e^{2i\delta'} - 1$.

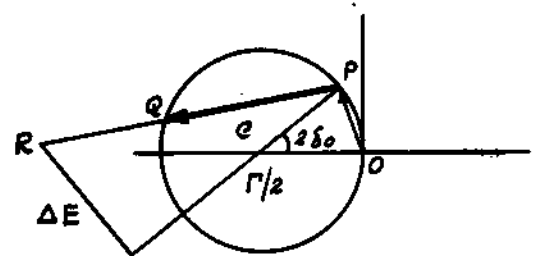


Fig. II,9

Determinação gráfica de $e^{2i\delta} - 1 +$
 $+(e^{2i\delta'} - 1)e^{2i\delta_0}$. Traça-se arbitráriamen
 mas com a extremidade P sobre o círculo
 unitário, o vetor $P-O$, o qual representa
 o termo $e^{2i\delta} - 1$. Após isso repete-se o
 cedimento da Fig. II,8, para obter $e^{2i\delta_0}$
 mas agora o eixo que, naquela construção
 em horizontal, deverá estar inclinado d
 um ângulo $2\delta_0$ para dar conta do fator
 $e^{2i\delta_0}$. O vetor $Q-O$ representa gráficamente
 a expressão indicada.

onde δ' varia muito mais depressa com a energia que δ_0 .

Pondo

$$e^{2i\delta} - 1 = e^{2i\delta_0} - 1 + (e^{2i\delta'} - 1) e^{2i\delta_0} \quad (\text{II},17)$$

$$= e^{2i\delta_0} - 1 - \frac{1\Gamma}{E - E_{\text{res}} + i\Gamma/2} e^{2i\delta_0} \quad (\text{II},17a)$$

Conseguimos decompor a função de onda espalhada em duas partes, uma devida ao espalhamento pelo potencial ($e^{2i\delta_0} - 1$) e outra devida ao espalhamento de ressonância.

Note-se que δ foi obtido estudando o comportamento de ondas estacionárias senoidais em face da barreira. Perto da ressonância sua variação é devida quasi exclusivamente à variação de δ' , δ_0 permanecendo praticamente constante, pois:

$$e^{+2i\delta_0} = e^{+2ika} = e^{+2ik(a-b)} \cdot e^{+2ikb},$$

de modo que, perto da ressonância, temos:

$$e^{+2i\delta_0} = e^{+2ik(a-b)} e^{+2i\Delta ka}$$

e a variação de $2\delta_0$ é dada pela variação de

$$2\Delta ka = \frac{\Delta E}{\Gamma} \cdot \frac{b}{a} |s|^2$$

quando $\Delta E/\Gamma$ varia de algumas unidades (por exemplo de -5 a +5) $2\delta'$ varia praticamente de 0 a 2π ; (Fig. II,7) em quanto que a variação de δ_0 é somente $10|s|^2 \cdot \frac{b}{a}$ que é muito pequena visto que $b \ll a$ e $|s|^2 \ll 1$.

Vamos representar agora, gráficamente, no plano complexo, o segundo membro de (II,17) para visualizar melhor a variação de

$$e^{2i\delta} - 1$$

com a energia. Desenhemos primeiro o vetor $e^{2i\delta_0} - 1$. Seja êle P-O. (O valor de δ_0 não é dado pela nossa teoria; por isso a posição que escolhemos para P no círculo de raio 1 e centro em -1,0 foi arbitrária). Para somar-lhe o termo $(e^{2i\delta'} - 1) e^{2i\delta_0}$ (formula (II,17)) repetimos o processo do triângulo com os catetos ΔE e $\Gamma/2$, exposto

acima, desenhado a partir do ponto P como origem. O eixo, porém, não deve ser horizontal, mas inclinado de um ângulo $2\delta_0$ para levar em conta o fator $e^{2i\delta_0}$, de modo que o círculo unitário necessário para a construção de $e^{2i\delta_0} - 1$, já inicialmente desenhado.

Em resumo:

PO representa a amplitude do espalhamento de potencial
QP representa a amplitude do espalhamento de ressonância
QO representa a amplitude do espalhamento total
PS = $\sqrt{2}$, RS = $\Delta E = E - E_{res}$

A variação de $Q = 0$ com a energia é a seguinte: como estamos perto da ressonância, a posição de P pode ser considerada fixa; inicialmente Q coincide com P, (ΔE é negativo e muito grande) e move-se lentamente sobre o círculo no sentido dos ponteiros do relógio nos entornos $\sqrt{2}$ de E_{res} ; Q súbitamente, move-se muito depressa, e percorre quasi a metade da circunferência; e finalmente quando $\Delta E \rightarrow \infty$, Q , lentamente, retorna a P. O ponto P pode estar em qualquer posição do círculo, conforme o valor de $k(b-a)$. Se estiver acima de O, a secção de choque em função da energia primeiro diminui ao valor mínimo (seria zero se desprezassemos as contribuições dos outros momentos angulares), para depois atingir o máximo (que não coincide com a energia de ressonância) e diminuir depois novamente. Se P estiver abaixo de O, $\sigma(E)$ primeiro aumenta, etc. A largura do máximo vale, aproximadamente, $\sqrt{2}$, pois os pontos em que $\sigma(E) = 1/2 \sigma_{max}$ correspondem aproximadamente aos valores de $2\delta' = 45^\circ$, isto é, em que $(\Delta E) = \sqrt{2}$.

O raciocínio acima se aplica para obter a contribuição da onda que descreve um determinado momento angular.

Para se obter a secção de choque completa, devem-se levar em conta as ondas correspondentes a todos os outros momentos angulares, cujas energias de ressonâncias devem estar suficientemente separadas umas das outras ($\gg \sqrt{2}$) para que a análise acima se aplique à forma de cada máximo separadamente.

A secção de choque diferencial para um certo ângulo fixo é dada pelo quadrado de uma amplitude que contém as contribuições de todos os momentos angulares ($l = 0, 1, 2, \dots$). Quando estamos perto de ressonância devida a um destes (l_0), podemos reunir as contribuições devidas aos outros em um ponto T do plano complexo usado na obtenção

gráfica de $e^{2i\delta} l_{c-1}$ e somar a OT a amplitude Q_0 devida a l_c . A posição de T não varia muito no intervalo de energia em que se dá aquela ressonância. Como a amplitude total é QT o comportamento de $\sigma(E)$ depende naturalmente da posição de T em relação ao círculo em que representamos graficamente a amplitude devida à onda com o momento l_c . Esta pode ser qualquer; T pode cair, por exemplo, justamente no centro deste círculo. Então não se observa ressonância naquele entorno de energia, pois:

$$|OT| = |OC| = \text{const.} = 1$$

Para a comparação com a experiência veja, por exemplo, o espalhamento de neutrons (e referências) apresentado em II,8. Verifica-se que, perto das ressonâncias a teoria está em perfeita concordância com as curvas experimentais da secção de choque em função da energia. Quando os picos de ressonância estão bem mais afastados que as suas meias larguras, a fórmula aqui deduzida (veja final desta secção) se torna especialmente útil e aplicável.

Outro exemplo encontra-se no trabalho de L. J. Koester,* em que é estudada a curva da secção de choque do espalhamento de protons de energia entre 0,4 e 3,95 MeV em Mg^{24} para determinar as energias e momentos angulares dos níveis excitados do núcleo composto Al^{25} . Nesse estudo é feito uso de gráficos semelhantes aos por nós expostos para obter a forma da curva perto da ressonância, e aí também se encontram referências a outros estudos deste tipo.

Para se determinar qual o momento angular correspondente a cada um dos picos de ressonância que estão numa dada curva de $\sigma(E)$ (isto é qual o momento angular daquela contribuição à função de onda que gerou aquele pico), há vários processos.

Um deles consiste em determinar como varia a forma do pico da secção de choque diferencial quando varia o ângulo de espalhamento. Isto corresponde a acompanhar os acontecimentos no círculo da Fig.II,9) "vistos" das diversas posições do ponto T definido acima. (T representa no plano complexo todas as contribuições à secção de choque diferencial dadas pela fórmula (II,4) com exceção daquela que produz a ressonância em questão). Esta análise permite determinar o momento

*Phys. Rev. 85, 643 (1954)

angular em questão.

Outra maneira é tomar a curva da secção de choque total, e medir no pico em questão a oscilação total da mesma. Esta deve ser igual a $4\pi k^2(2l+1)$ (veja fórmula I, 5) pois o fator em δ_1 tem a variação total igual a um.

Note-se que quando se trata de espalhamento de partículas com spin diferente de zero (proton por exemplo) a análise é mais complicada e o resultado* difere do nosso por um fator dependente dos spins dos núcleos inicial, intermediário, e da partícula incidente. Deixando de lado este fator, a secção de choque total para espalhamento elastico vale

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{res} (2l+1) \left[\frac{\Gamma_1(res)}{E - E_{res} + i\Gamma_1/2} + P_{csp} \right]^2$$

onde Γ_1 são as meias larguras de cada pico de ressonância correspondente a cada momento angular $\hbar l$ (veremos que \hbar/Γ_1 dá a vida média do núcleo composto correspondente), E_{res} as energias de ressonância correspondentes, P_{csp} a contribuição chamada "espalhamento de potencial" que é independente das ressonâncias; $(\hbar^2/2I) k^2$ a energia da partícula incidente. A soma sobre res se encarrega de levar em conta ("efeito de cauda") as ressonâncias vizinhas.

II, 6. Desintegração do Núcleo Composto em Função do Tempo

Vamos supor que para $t = 0$ todas as partículas se encontrem dentro da barreira de potencial do núcleo composto. Como o núcleo composto assim formado não é estável, a partícula alfa, por exemplo, que vai ser emitida não pode estar em um estado estacionário de energia bem definida, isto é, a partícula pode ser emitida com várias energias. Sua função de onda, contida inicialmente no núcleo, e que depois se expande para fora do mesmo, deve ser uma superposição de estados correspondentes a diversas energias.

Veremos que o fenômeno está fortemente relacionado aos estados estacionários associados à barreira do núcleo composto, estudados acima, e portanto também às propriedades do espalhamento. A energia mais provável da emissão da partícula é igual à energia de ressonância

* Veja por exemplo V. F. Weisskopf et al, Phys. Rev. 71, 145 (1947)

de espalhamento; a vida média do estado intermediário é \hbar dividido pelo meia largura do pico da ressonância.

Para obter a função de onda $\Psi(t,r)$ da partícula em função do tempo, e provar as propriedades descritas acima, vamos desenvolver $\Psi(t,r)$ nas funções de onda estacionárias da barreira de potencial. Estas são soluções estacionárias da equação de Schroedinger que tem como potencial a barreira do núcleo composto; a grandes distâncias são da forma $A \sin(kr + \delta_1)$, com os δ_1 determinados em II,5. Lembrando que, se $\Psi_k(r)$ é o conjunto completo destas soluções estacionárias, correspondentes, cada uma, à energia $\frac{\hbar^2 k^2}{2M}$, uma solução particular dependente do tempo é dada por

$$c \Psi_k(r) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

e uma solução geral, a nossa $\Psi(r,t)$ por exemplo, pode ser obtida como combinação linear das mesmas:

$$\Psi(r,t) = \int g(k) e^{-\frac{i \hbar k^2}{2M} t} \Psi_k(r) dk$$

Como as ondas estacionárias perto da energia de ressonância têm praticamente a mesma forma dentro do núcleo - proporcionais a uma certa função $f(r)$ - e só diferem grandemente umas das outras na região externa, em razão da grande variação de δ , podemos, de acordo com os cálculos de II,5 escolher as soluções estacionárias, $\Psi_k(r)$, da seguinte forma

$$\Psi_k = \sqrt{\frac{2}{b}} A_k f(r) \quad \text{para } r < b \quad (\text{dentro})$$

Ψ_k = forma não especificada para $b < r <$ distância em que as forças coulombianas já são desprezíveis.

$$\Psi_k = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin(kr + \delta) \quad \text{para } r \text{ muito grande} \quad (\text{longe})$$

onde b é a coordenada do plano interno de reflexão e onde A_k são as constantes já anteriormente determinadas para soluções estacionárias.

Ψ_k para $r < b$, assim como longe das ressonâncias foi tomada como

proporcional a $f(r)$ pois veremos que todas as contribuições importantes à função de onda vêm dos estados estacionários perto da energia de ressonância. No caso de $l = 0$, lembramos que $f(r)$ é senoidal: $\text{sen}(kr)$.

O raciocínio que se segue é feito individualmente para cada parcela da função de onda correspondente a cada momento angular (a função de onda total deve ser considerada desenvolvida, como antes em série de polinômios de Legendre, $P_l(\cos \theta)$, dos quais só estudamos aqui os coeficientes, funções do raio). $\psi(r)$ representa r vezes a dependência radial desta parcela, cujo momento angular l supomos fixo e não mais explicitamente mencionado. Veremos que a partícula é emitida com uma função de onda que se assemelha muito a de um estado estacionário de ressonância. Para este só a parcela correspondente a um determinado momento angular é grande, de modo que poderemos desprezar aqui as contribuições dos outros momentos angulares à função de onda da nossa partícula em questão, o que faremos no que se segue.

Vamos determinar agora os coeficientes $g(k)$ do desenvolvimento, impondo a condição de que, para $t = 0$, todas as partículas estejam dentro da barreira, isto é, que $\psi(r, 0) = 0$ para a região externa. Como perto da ressonância os estados estacionários são aproximadamente proporcionais a $f(r)$, podemos procurar a solução $\psi(r, t)$ que para $t = 0$, dentro do núcleo, seja justamente igual a $\sqrt{2/b} f(r)$.

Portanto impomos:

$$\psi(r, 0) = \sqrt{\frac{2}{b}} f(r) \quad (\text{dentro do núcleo})$$

$$\psi(r, 0) = 0 \quad (\text{fora do núcleo})$$

Vemos pois que

$$A_k^2 \left(\frac{b}{\pi}\right)^2 = |g(k)|^2$$

representa a probabilidade da energia (da partícula alfa, por exemplo, primeiro quando está dentro do núcleo e depois quando está fora) estar entre k e $k + dk$, e do estado ser do tipo estacionário ψ_k . Lembrando o valor de A_k (veja equação (II,16))

$$A_k = \frac{2}{|s|} \quad \text{sen } \delta' = \frac{1}{|s|} \frac{\Gamma}{\sqrt{(E - E_{\text{res}})^2 + (\Gamma/2)^2}}$$

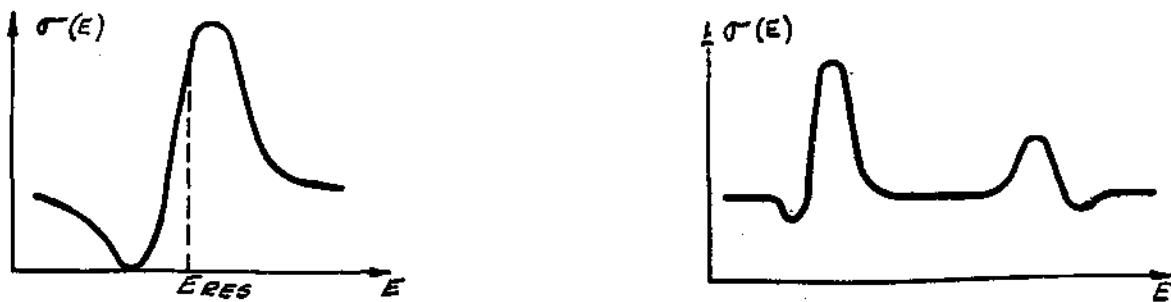


Fig. II,10

Comportamento da seção de choque perto das ressonâncias.

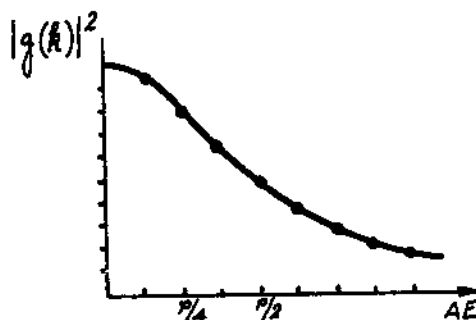


Fig. II,11

Ilustrando o forte máximo de meia largura Γ que $g(k)^2$ apresenta perto da ressonâncias $g(k)^2$ é a probabilidade de que a partícula (α , por exemplo) esteja com energia entre k e $k + dk$.

vemos que

$$|g(k)|^2 = \left(\frac{2b}{\pi|s|}\right)^2 \frac{(\Gamma/2)^2}{(E-E_{res})^2 + (\Gamma/2)^2}$$

apresenta um forte máximo de meia largura Γ , perto da ressonância (Fig. II,11).

Isto mostra que a partícula é emitida do núcleo com uma energia contida num entôrno (de largura Γ) de uma energia de ressonância, estudada na seção anterior, e que sua função de onda, considerada como superposição dos estados estacionários associados à barreira que representa o núcleo, tem como contribuição principal aquele estado de ressonância, e que, quanto menor, for a meia largura da curva de ressonância, menos importante é a contribuição dos estados estacionários vizinhos, afastados da ressonância.

Vamos procurar agora a forma de $\psi(r,t)$ na região exterior ao núcleo:

$$\psi(r,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{b}} \operatorname{sen}(kr + \delta) \frac{b}{\pi} A_k e^{-i \frac{Et}{\hbar}} dk.$$

Substituindo nesta expressão os valores de:

$$A_k = \frac{1}{i|s|} (e^{i\delta'} - e^{-i\delta'}),$$

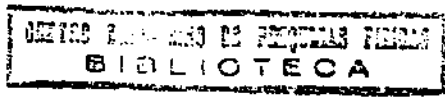
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(kr + \delta) &= \frac{1}{2i} (e^{ikr+\delta} - e^{-ikr-\delta}) \\ &= \frac{1}{2i} [e^{ik(r-a) + i\delta'} - e^{-ik(r-a) - i\delta'}], \end{aligned}$$

obtemos:

$$\psi(r,t) = -\frac{\sqrt{2b}}{2\pi|s|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \left\{ e^{ik(r-a)} (e^{2i\delta'} - 1) - e^{-ik(r-a)} (e^{-2i\delta'} - 1) \right\} dk$$

A equação (II,15)

$$e^{2i\delta'} - 1 = \frac{-i\Gamma}{E-E_0 + i\Gamma/2}$$



$$e^{-2i\delta} - 1 = \frac{i \Gamma}{E - E_c - i\Gamma/2}$$

Vemos assim que são os termos perto da ressonância, E_c , que fornecem a maior contribuição à integral. Podemos então pôr $|s|$ como constante fora da integral e aproximar k pela expressão válida perto da ressonância:

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2ME} \approx \frac{1}{\hbar} \sqrt{2ME_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E_0} \right)$$

onde $E = E_{res.} = Mv_0/2$, sendo v_0 a velocidade da partícula emitida. Tomando agora a nova variável $X = \Delta E$, obtemos:

$$E = E_c + X$$

$$k = k_c + X/(\hbar v_0)$$

e a integral fica:

$$\varphi = \frac{1\sqrt{2b}}{2\pi |s|} \int_{-k_0\hbar v_0 = -2E_c}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(E_c+X)t} e^{i(k_c + \frac{X}{\hbar v_0})(r-a)} \frac{\Gamma}{X + i\Gamma/2} \frac{dX}{\hbar v_0} +$$

$$+ \int_{-k_0\hbar v_0}^c e^{\frac{i}{\hbar}(E_c+X)t} e^{-i(k_c + \frac{X}{\hbar v_0})(r-a)} \frac{\Gamma}{-X + i\Gamma/2} \frac{dX}{\hbar v_0}$$

Note-se que este desenvolvimento só vale para distâncias grandes, pois, só para estas, φ_k tem a forma senoidal descrita.

Representando por I a primeira parte desta integral, obtemos:

$$I = \frac{1\sqrt{2b}}{2\pi |s| v_0} \frac{\Gamma}{\hbar} e^{ik_c(r-a) - i\frac{E_c}{\hbar}t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{iX}{\hbar}(\frac{r-a}{v_0} - t)} \frac{dX}{X + i\Gamma/2} \quad (II, 18)$$

Suspondo E_c não muito pequeno, extendemos o limite inferior da integral a $-\infty$. Calculamos a integral no plano complexo, pelo método dos

resíduos. Para $\frac{(r-a)}{v_0}/t > 0$ notamos que, para X contido no plano complexo superior ($\text{Im}(X) > 0$), a exponencial do integrando apresenta uma parte real negativa. Isto mostra que, se fecharmos o caminho de integração de $-\infty + R$ na reta real por um caminho semi-circular no plano complexo superior, a contribuição à integral devida a êste último tende a zero à medida que seu raio aumenta, e o que sobra é a integral procurada sobre a reta real de $-\infty$ a $+\infty$. Mas pelo teorema dos resíduos, a integral de uma função analítica $f(Z)$ sôbre um contôrno fechado no campo complexo vale $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos que existem nos seus pólos contidos dentro do contôrno. Se Z_0 for um pólo simples de $f(Z)$, o seu resíduo em A_0 é dado por $\lim_{Z \rightarrow Z_0} f(Z) \cdot (Z - Z_0)$.

A nossa função (o integrando de (II, 18)) apresenta um pólo simples para $X = -i\sqrt{Z}$, que, estando no plano complexo inferior está fora do contôrno de integração, de modo que o valor da integral é zero, para $t > (r-a)/v_0$. Para $t < (r-a)/v_0$, o contôrno de integração deve ser fechado no plano complexo inferior, de modo que o resultado é:

$$I = 2\pi i \lim_{Z \rightarrow -i\sqrt{Z}} (Z + i\sqrt{Z})f(Z) = \frac{-\sqrt{2b}}{|s|v_0} \frac{\Gamma}{h} e^{\frac{i}{h}E_c t + ik_c(r-a)} \cdot e^{\frac{\Gamma}{2h}(t - \frac{r-a}{v_0})}$$

A segunda parte da integral se anula sempre, pois seu integrando

$$\left[\exp -\frac{i}{h} X \left(t + \frac{r-a}{v_0} \right) \right] / (-X + i\sqrt{Z})$$

tem o pólo no plano complexo superior, no qual o contôrno nunca pode ser fechado pois t sendo sempre maior que zero, a exponencial tem uma contribuição real positiva para $\text{Im}(X) > 0$.

Obtemos, portanto, para a expressão final:

$$\mathcal{P}(r,t) \begin{cases} = \frac{-\sqrt{2b}}{|s|v_0} \frac{\Gamma}{h} e^{\frac{i}{h}E_c t + ik_c(r-a)} e^{-\frac{\Gamma}{2h}(t - \frac{r-a}{v_0})} & \text{para } t > \frac{r-a}{v_0} \\ = 0 & \text{para } t < \frac{r-a}{v_0} \end{cases} \quad \text{(II, 19)}$$

Esta é justamente a função de onda esperada. (parte radial vezes

r) para uma partícula emitida de uma fonte com velocidade v_0 para $t = 0$, a intensidade desta fonte decaiindo como $e^{-\Gamma t}$ pois;

- 1) para $r > v_c t + a$, isto é, na região que não pode ter sido ainda alcançada pela partícula que foi emitida em $t = 0$ de $r = a$ com a velocidade v_c , a função de onda ψ se anula;
- 2) para $r < v_c t + a$, o quadrado da amplitude da onda

$$|\psi(R)|^2 = \frac{|\varphi(r)|^2}{r^2} = \frac{2b}{|s|^2 v_c^2} \left(\frac{\Gamma}{\hbar}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} \left(t - \frac{r-a}{v_c}\right)}$$

exprime o fato que a intensidade da fonte decai exponencialmente com o tempo, pois além do fator $1/r^2$, necessário para a diluição correta do fluxo das partículas à medida que estas se afastam da fonte, há o fator

$$e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} \left(t - \frac{r-a}{v_c}\right)}$$

que a faz cair exponencialmente, com a meia vida \hbar/Γ , em cada ponto.

à medida que nós nos afastamos da fonte encontramos partículas que foram emitidas num tempo anterior, $t - (r-a)/v_c$; seu fluxo portanto só pode estar diminuindo de um valor correspondente à intensidade da fonte naquele tempo, e fica assim clara a ocorrência do fator $t - (r-a)/v_c$ na exponencial, em vez de t somente.

- 3) A parte oscilante da função de onda:

$$e^{+ik_0(r-a) - i\frac{E_c}{\hbar}t}$$

corresponde, como se esperava, a uma partícula livre de energia

$$E_c = \hbar v_0^2 / 2$$

e momento

$$\hbar k_c = \sqrt{2mE_c} = \hbar v_0$$

- 4) Para melhor perceber o caráter de desintegração da fonte, vamos interpretar ψ como descrevendo partículas emitidas num determinado instante por um grande número de núcleos compostos, independentes, colocados na origem. $\psi^* \psi$ exprime a densidade

especial destas partículas; o seu fluxo (numero de partículas que atravessam a unidade de superficie por unidade de tempo), tendo em vista que da equação (I,14) resulta $\Gamma/h = v_c |s|^2 / 2b$, é dado por:

$$v_c \Psi^* \Psi = \frac{\Gamma}{h} \frac{1}{r^2} e^{-\frac{\Gamma}{h} (t - \frac{r-a}{v_c})}$$

Decorre daí que o número de partículas que atravessam a superfície circular πr^2 entre t , $t+dt$ vale

$$\pi \frac{\Gamma}{h} e^{-\frac{\Gamma}{h} (t - \frac{r-a}{v_c})} dt$$

integrando esta expressão desde $(t - (r-a)/v_c)$ até $T + t - (r-a)/v_c$ para obter o número total N de partículas que emergiram durante este intervalo para fora desta esfera, obtemos:

$$N = \pi (1 - e^{-\frac{\Gamma}{h} T})$$

Esta expressão mostra claramente que a fonte se desintegra com vida média Γ/h (Nota: Em algum lugar, talvez na normalização foi cometido um erro de valor π . Em vez de π deveria haver o fator 1 pois, conforme a nossa normalização de $\Psi(r,0)$ feita na pag.31, 1 é o n.º de partículas inicialmente no núcleo).

O fator $e^{-\Gamma t/2h}$, além de $e^{-iE_0 t/h}$, na dependência do tempo, mostra que a função de onda Ψ não é monocromática, de estado energético bem definido, mas que é a superposição de várias frequências ω com distribuição espectral

$$\int (e^{-\frac{iE_0 t}{h} - \frac{\Gamma}{2h} t}) e^{i \omega t} dt = \frac{1}{E_0/h - \omega + i\Gamma/2h}$$

o que novamente mostra que só as frequências próximas à de ressonância são importantes.

É claro que Ψ deve ser obtido por superposição de várias ondas monocromáticas, para que se possa anular fora de um certo raio (finito para t finito).

II, 7. Aperfeiçoamentos no modelo do núcleo

O resultado dos nossos cálculos sobre desintegração alfa e sobre o espalhamento das partículas alfa por núcleos, baseado essencialmente no estudo da penetração da função de onda da partícula alfa através da barreira de potencial que representa o núcleo composto, não depende muito, como verificamos, das forças puramente nucleares, e portanto, da forma do potencial que admitimos existir no interior do núcleo, desde que essas forças sejam de curto alcance e desde que formem um poço atrativo.

Tomamos então, no cálculo anterior, o potencial no interior do núcleo como sendo constante, e igual a zero; vamos ver agora quais são as possíveis modificações nos resultados se alterarmos esta forma no interior do núcleo.

Nesta seção tomaremos o potencial no interior constante, mas negativo, e coulombiano no exterior do núcleo, como de costume. Na próxima seção tomaremos um poço de potencial de forma arbitrária.

Consideremos o seguinte potencial (Fig. II, 12): constante, negativo igual a $-E_1$ no interior do núcleo ($r < R$); coulombiano no exterior ($r > R$). Seja E a energia (cínctica) da partícula incidente. Como o potencial é constante no interior do núcleo o número de ondas da partícula será constante, digamos K , no interior, mas diferente do número de ondas k a grandes distâncias. K e k satisfazem às relações

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2M} = E + E_{1ig}; \quad \frac{\hbar^2 K^2}{2M} = E$$

Para o cálculo das funções de onda estacionárias associadas a este potencial, tomamos como base os processos usados em II, 4 e II, 5.

Voltando às considerações da seção II, 4, sobre a equivalência de qualquer barreira a seus dois planos de reflexão a e b e a um número complexo s , podemos refazer o raciocínio ali exposto, não esquecendo de alterar o número de onda, k , para o valor maior, K , das ondas planas no interior do poço. Lembrando a existência de gradiente na expressão da corrente, devemos alterar a equação que exprime a conservação do número de partículas (igualdade dos fluxos de ambos lados da barreira):

$$1 = |\rho_D|^2 + \frac{K}{k} |\tau_D|^2 ; \quad 1 = |\rho_E|^2 + \frac{k}{K} |\tau_E|^2$$

A ocorrência de k e K é plausível pois o fluxo de partículas, isto é, o número de partículas que atravessa a unidade de superfície por unidade de tempo, é proporcional ao produto da velocidade pela sua densidade.

Nota-se também que o fator exponencial dos coeficientes de transmissão deve ser o valor da função incidente na posição do outro plano de reflexão, cujo número de ondas é diferente do da onda finalmente transmitida.

Refazendo o cálculo citado, não esquecendo os fatores K e k que multiplicam as correntes, à esquerda e a direita da barreira, respectivamente, obtemos, em vez (II, 10)

$$\sqrt{\frac{K}{k}} \tau_D^* / \sqrt{\frac{k}{K}} \tau_E = -1 ; \quad \rho_E^2 = \rho_D^2 = \rho^2$$

isto é,

$$\tau_D = \sqrt{\frac{k}{K}} is$$

$$\tau_E = \sqrt{\frac{K}{k}} is^*$$

$$1 = \rho^2 + ss^*$$

O cálculo subsequente das fases δ_1 das ondas estacionárias que assintoticamente se comportam como

$$\text{sen} (kr + \delta_1)$$

(uma para cada parcela da função de onda correspondente a cada momento angular $\hbar l$) difere do cálculo feito em II, 5 pelo seguinte: dentro do núcleo as funções têm o número de onda K , em vez de k , e deve-se substituir:

$$s \quad \text{por} \quad \sqrt{k/K} s$$

$$s^* \quad \text{por} \quad \sqrt{K/k} s^*$$

$$k \quad \text{por} \quad K \text{ no interior do poço.}$$

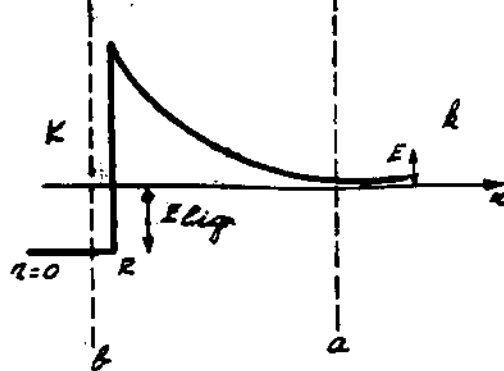


Fig. II,12

Poço de potencial. O potencial no exterior do núcleo é coulombiano e constante e negativo no interior.

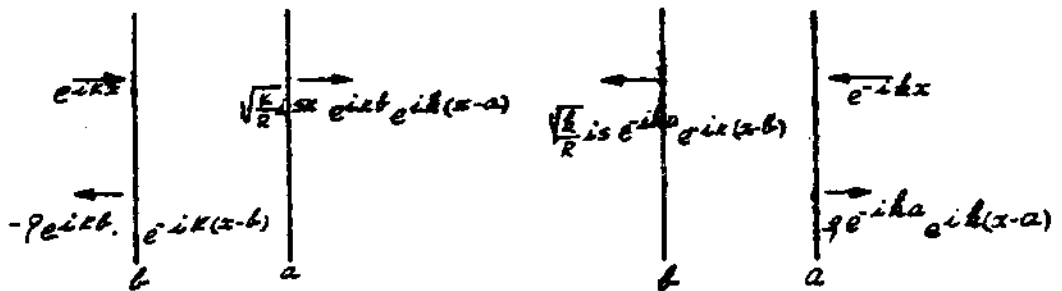


Fig. II,13

Reflexão e transmissão de ondas através de uma barreira de potencial do tipo desenhado na Fig. II,13. a e b são os planos aparentes de reflexão.

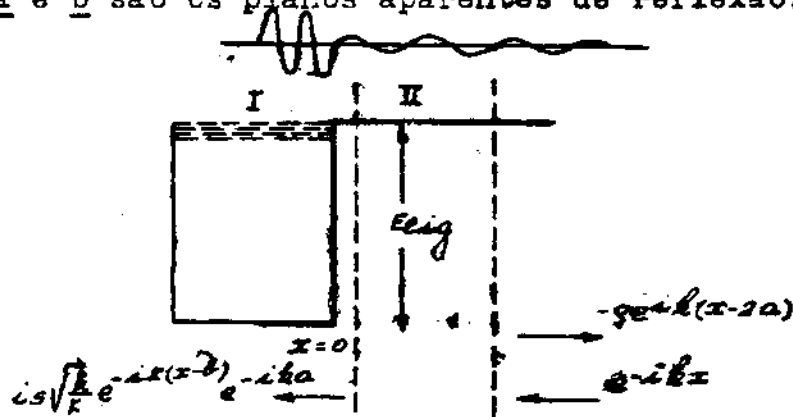


Fig. II,14

Barreira de potencial para o estudo da absorção de neutrons lentos por núcleos. A origem do sistema de coordenado é tomado no ponto onde o potencial sofre a descontinuidade. Foi desprezada a parte coulombiana do potencial. A profundidade da barreira é a energia de ligação máxima dos neutrons no núcleo, ou seja, aproximadamente 8 MeV.

Efetutando o cálculo, obtemos em vez de (II, 13) e (II, 15)

$$e^{2i\delta'} - \rho = \frac{ss^*}{\rho - e^{-2ikb}} = 1 \sqrt{\frac{K}{k}} s^* A e^{ikb} e^{i\delta'}$$

com

$$\delta' = \delta + ka$$

Dá-se a ressonância para valores de energia, E_0 , que correspondem a $K_0 b = n\pi$, se ss^* for pequeno.

Lembrando que

$$K = K_0 + \Delta K = K_0 + \frac{2M}{\hbar^2} \cdot \frac{\Delta E}{K_0},$$

encontramos, perto da ressonância

$$e^{2i\delta'} - 1 = \frac{-i\Gamma}{E - E_0 + i\Gamma/2} \quad (\text{II, 20})$$

$$A s^* \sqrt{\frac{K}{k}} e^{ikb} = 2 \sin \delta' = \frac{\Gamma}{(E - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

com

$$\Gamma = \frac{ss^*}{\frac{2M}{\hbar^2} \frac{b}{K_0}}$$

Concluimos que as alterações, em relação ao caso anterior em que dentro e fora o potencial tinha o mesmo valor, são as seguintes:

1. As posições das energias de ressonância são deslocadas para valores mais baixos, pois, aproximadamente, se tem:

$$k_0^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \frac{2M}{\hbar^2} E_{\text{lig}}$$

2. Os estados estacionários dentro do poço, cujos K_s forneçam menor que E_{lig} não poderão mais ser excitados pelo exterior

$\frac{\hbar^2}{2M} K^2$
pois

$$K^2 \hbar^2 / 2M = E + E_{\text{lig}}$$

3. A forma do gráfico da secção de choque em função da energia é a mesma (perto da ressonância) que no caso anterior. A largura Γ agora é dada por:

$$\Gamma = \frac{ss^*}{2Mb/h} K_0$$

que, praticamente, é a mesma que no caso anterior $(ss^* / \frac{2M}{h} k)k_0$, pois k_0 e k_0 do caso anterior são determinados pela mesma condição ($k_0 b = n\pi$) (supondo naturalmente que s e b praticamente não variam com a energia).

Vamos ilustrar estes resultados aplicando o cálculo à absorção de neutrons lentos por núcleos, fatos êsses experimentalmente bem conhecidos.

II, 8. Um exemplo: a absorção de neutrons lentos por núcleos

As curvas da secção de choque de absorção de neutrons lentos, com energias desde alguns eutron - volts até algumas dezenas, em função da energia, são bem estudadas. Por exemplo, num artigo de H. Goldsmith, Ibsen e Feld*, encontram-se estas curvas experimentais para uma série de elementos, das quais a da Pt se encontra reproduzida na Fig. II, 15).

A grande quantidade dos máximos e mínimos destas curvas mostra que em geral os núcleos apresentam muitos níveis excitados, distantes uns dos outros de, geralmente, menos que 5-10 eV, o que é notavel tendo em vista a grandeza das energias de ligação do neutron ao núcleo (em estado fundamental) que é da ordem de 5-7 MeV. Isto indica que há um grande número de configurações possíveis para acomodação do neutron a tais energias (acima do fundamental), cujas energias diferem muito pouco umas das outras.

O exemplo de neutrons se presta bem para a comparação das fórmulas desenvolvidas acima, pois podemos supor, para efeito de cálculo, uma barreira bem simples, do tipo escada, sem a parte coulombiana (estamos desprezando o efeito de spin do neutron).

* Rev. Mod. Phys. 19, 283 (1947)

Veja tambem D. K. Adair Rev. Mod. Phys. 22, 249 (1950)

Vamos colocar a origem do sistema de coordenadas na posição da discontinuidade do potencial. Chamemos de I a região $x < 0$, e seja E_1 a profundidade do desnível. Ela representa a maior energia de ligação possível do neutron ao núcleo composto e é usualmente, da ordem de 8 MeV (Fig. II, 14).

As funções de onda são:

$$\psi_I = is \sqrt{\frac{k}{K}} e^{iK(x-b)} e^{-ika}$$

$$\psi_{II} = e^{-ikx} + \rho e^{ik(x-2a)}$$

Impomos que:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi_I}{\partial x}(0) = \frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}(0).$$

Logo:

$$is \sqrt{\frac{k}{K}} e^{iKb-ika} = 1 + \rho e^{-ik2a}$$

$$i \frac{K}{k} s \sqrt{\frac{k}{K}} e^{iKb-ika} = -i + \rho e^{-ik2a}$$

Somando e subtraindo obtem-se:

$$2 = is \left(\sqrt{\frac{K}{k}} + \sqrt{\frac{k}{K}} \right) e^{iKb-ika} \tag{II,21}$$

$$2\rho = is \left(\sqrt{\frac{K}{k}} - \sqrt{\frac{k}{K}} \right) e^{iKb + ika}$$

Repetindo o raciocínio para uma onda unitária incidente pela esquerda obtem-se:

$$2 = is^* \left(\sqrt{\frac{K}{k}} + \sqrt{\frac{k}{K}} \right) e^{iKb-ika} \tag{II,22}$$

$$2\rho = -is^* \left(\sqrt{\frac{K}{k}} - \sqrt{\frac{k}{K}} \right) e^{-iKb-ika}$$

Por comparação das duas primeiras equações (II,21) e (II,22) verifica-se que s é real. Pelo fato de que ρ deve ser real e positivo (por definição) obtemos então de (II,21) (ou de (II,22) que:

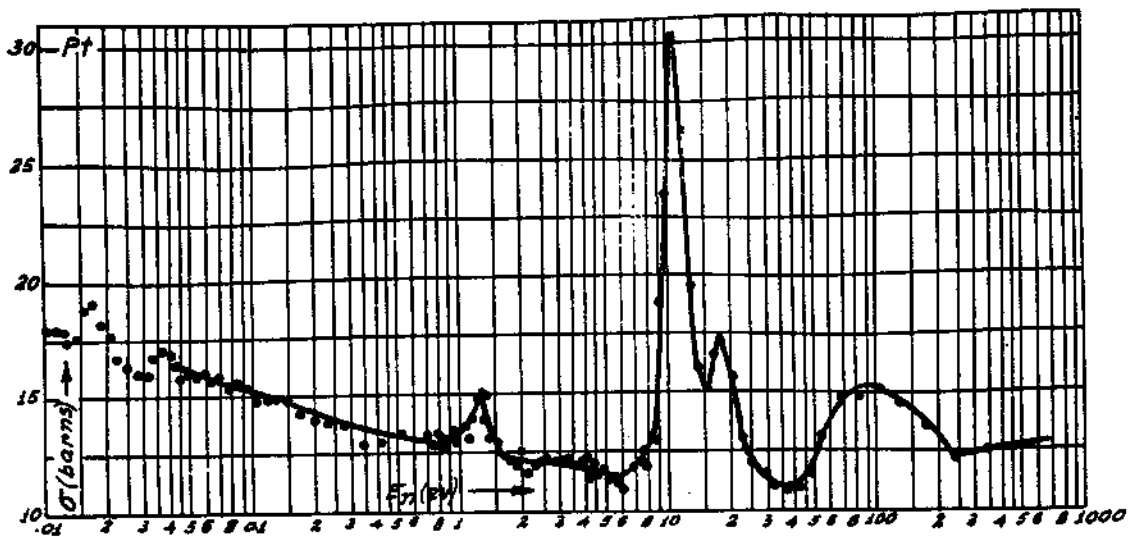


Fig. II,15

Seção de choque total para absorção de neutrons, em Pt. A seção de choque é a medida em barns ($1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$).

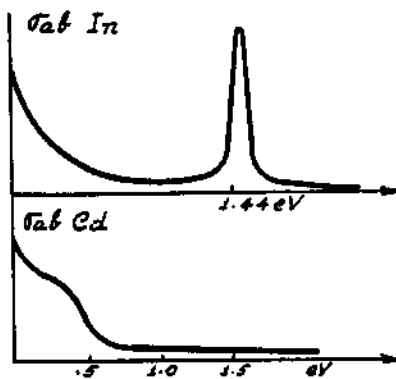


Fig. II,16

Seção de choque para absorção de neutrons em Indio e Cádmi. O Cádmi absorve fortemente os neutrons termicos; o Indio absorve fortemente os neutrons de energia nas vizinhanças de 1.44 eV.

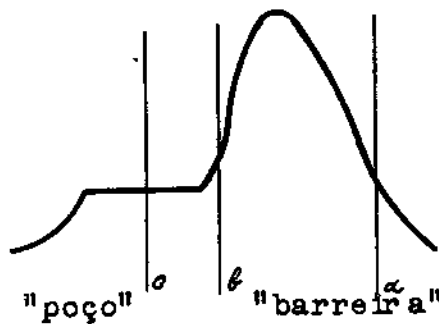


Fig. II,17

Decomposição de uma barreira de potencial em duas regiões, "poço" e "barreira", ligado pela região entre b e c onde o po-

$$s = \frac{c}{\sqrt{\frac{K}{k}} + \sqrt{\frac{k}{K}}} \quad e \quad p = \frac{\sqrt{\frac{K}{k}} - \sqrt{\frac{k}{K}}}{\sqrt{\frac{K}{k}} + \sqrt{\frac{k}{K}}}$$

e que, a menos de múltiplos inteiros de π :

$$ka - Kb = \pi/2$$

$$ka + Kb = -\pi/2$$

As duas últimas relações mostram que podemos escolher para ka e Kb os seguintes valores (a menos de múltiplos semi-inteiros de π):

$$ka = 0$$

(II,23)

$$Kb = -\pi/2$$

Isto é, o plano aparente de reflexão à direita é fixo, e se encontra no lugar da discontinuidade do potencial, em quanto que o plano aparente de reflexão à esquerda (b) está à esquerda desta discontinuidade, a uma distância $\pi/2K$ que depende da energia da partícula.

Podemos aplicar agora este resultado ao estudo da ressonância do poço de potencial para neutrons.

Voltando novamente ao sistema de coordenadas em que o núcleo está na origem, e chamando r_A o raio do poço, temos:

$$a = r_A$$

$$b = r_A - \pi/2K$$

Note-se que, para este modelo de potencial, o espalhamento dos neutrons não contém o termo do espalhamento de potencial, pois em consequência de (II,23) vemos que

$$e^{2i\delta} - 1 = e^{2i(\delta' - ka)} - 1 = e^{2i\delta'} - 1.$$

Com auxilio de (II,20) obtemos:

$$e^{2i\delta} - 1 = \frac{ss^*}{p_- e^{-2iK(r_A - \pi/2K)}} = \frac{ss^*}{p_+ e^{-2iKr_A}}$$

As ressonâncias dão-se para $Kr_A = -\pi/2 + n\pi$, $n = 1, 2, \dots$ e as meia:

larguras Γ são dadas por
$$\Gamma = \frac{ss^*}{2M} K_0$$

Para o caso de neutrons lentos incidindo sobre o núcleo, a energia cinética E , da ordem de eletrón-volts, é bem menor que a energia de ligação E_{lig} , da ordem de 5-8 MeV, de modo que podemos desprezar $\sqrt{k/K}$ diante de $\sqrt{K/k}$. Neste caso $s = 2\sqrt{k/K}$ varia aproximadamente como

$\propto \sqrt{\frac{E}{E_{lig}}}$ e a largura $\Gamma = (4/\frac{2M}{h^2}) b) k$ varia como \sqrt{E} . As curvas experimentais confirmam perfeitamente estas previsões*. A largura Γ varia realmente como $\sqrt{E_0}$ **. Reproduzimos aqui*** a curva da seção de choque total para absorção de neutrons em Pt, para se ter uma idéia do andamento da curva (Fig. II, 15). A escala das energias é logarítmica.

Para se ter uma idéia dos valores numéricos, citamos que a seção de choque para absorção de neutrons, por exemplo, na reação (n, γ) em In se eleva a 27 000 barns (1 barn = 10^{-24} cm²) no pico de ressonância, que se encontra a 1.44 eV. A largura Γ vale 0.042 eV, o espaçamento dos níveis de ressonância é da ordem de 2 a 10 eV.

Observa-se que, para energias muito pequenas, $\sigma(E)$ cai como $1/v$; a razão é que, para velocidades suficientemente baixas a probabilidade de reação por segundo (número de transições/seg), que é proporcional a $v \cdot \sigma$ (veja Apêndice II), torna-se independente da velocidade, de modo que σ cresce como $1/v$ quando $v \rightarrow 0$.

Como aplicação, vamos ver como se pode medir a intensidade de neutrons de energia 1.4 eV, contidos em um feixe de neutrons de energias variáveis desde neutrons térmicos (1/20 eV) até neutrons de 1,6 eV, por exemplo. Envolve-se uma folha de índio com chapa de cádmio, e coloca-se este "sanduiche" dentro do fluxo de neutrons dos quais se quer medir o número dos que têm energia na vizinhança de 1.4 eV. O cádmio absorve fortemente os neutrons térmicos, de modo que até ao índio só chegam os neutrons de energia acima de 0.5 eV. Dêstes o índio absorve fortemente só os neutrons de 1.4 eV, pois ali se localiza

* Um exemplo se encontra em Tittiman, Sheer, Phys. Rev. 83, 753 (1951)
 ** Feshbach, Peaslee, Weisskopf, Phys. Rev. 71, 150 (1947)
 *** Goldsmith, Ibsen, Feld, Rev. Mod. Phys. 19, 283 (1947)

o primeiro (e forte) máximo de ressonância para absorção. Por absorção de neutrons o indio torna-se β ativo, com vida média de 54 minutos: ($\text{In}^{115} + n \rightarrow \text{In}^{116} \rightarrow \text{Sn}^{116} + \bar{e} + \nu + \gamma$), de modo que a sua atividade fornece uma medida do número de neutrons de energia 1.4 eV.

II, 9. Máxima eliminação das restrições sobre o potencial nuclear

Vimos, a partir do estudo de alguns modelos particularmente simples do potencial nuclear, que o fato importante para a existência de ressonâncias é que o núcleo apresente algum poço de potencial dentro do qual as partículas possam existir em determinados estados estacionários. Nestes estados as partículas podem ser tanto mais independentes do exterior, logo tanto mais estacionários, quanto mais impenetrável for a barreira que separa o poço do exterior do núcleo. Neste caso as amplitudes destes estados só podem ser excitados a valores muito grandes pela função de onda no exterior quando a frequência desta está muito próxima das frequências estacionárias que existem no poço de potencial, e teremos então ressonâncias muito estreitas.

A expressão matemática desse fato, dada pela relação entre fase e energia da onda externa perto da ressonância

$$e^{2i\delta} - 1 = \frac{-i\Gamma}{E - E_{\text{res}} + i\Gamma/2} \quad (\text{II}, 20)$$

e que sabemos ser experimentalmente válida, deve ser deduzível, qualquer que seja a forma do poço de potencial nuclear, e se envolver grandezas dependentes da forma do poço, estas devem ser de tipo muito geral.

Vamos, nesta seção, supor o potencial dentro do núcleo de forma arbitrária, mas apresentando uma região atrativa em forma de poço. No exterior, longe do alcance das forças puramente nucleares, o potencial é, como de costume, coulombiano para partículas carregadas.

O nosso objetivo é procurar até que ponto a forma do potencial influi na obtenção da expressão (II,20), que traduz a existência experimental da ressonância.

Podemos fazer esta dedução dividindo a barreira de potencial arbitrariamente em duas partes: "poço" e "barreira" e supondo que as

duas estejam ligadas por uma região perto de c (Fig. II, 17) em que o potencial é constante (depois podemos fazer esta região tender a zero), nessa região a função de onda deve ser senoidal, de número de onda K bem definido. Substituindo a "barreira" por seus dois planos a e b de reflexão aparente (também desconhecidos), podemos agora calcular a função de onda $\Psi(x)$ no plano C , somente a partir da função de onda externa, que, assintoticamente, supomos ser da forma:

$$\text{sen}(kr + \delta)$$

É claro que desta forma Ψ fica determinada na região c , qualquer que seja a forma do poço à esquerda de c , depois podemos determinar os δ para os quais há ressonância. Denotando com s e ρ a transmissão e a reflexão da barreira, e definindo $f(E, C)$ por

$$\text{tg} [f(E, C)] = iK \left(\Psi / \frac{d\Psi}{dx} \right)_{x=c}$$

obtemos, fazendo este cálculo nos moldes de II,5

$$e^{2i\delta'} - \rho = \frac{ss^*}{\rho - e^{-2i[K(b-c) + f(E, C)]}}$$

(δ' como antes é $\delta + ka$).

Vemos portanto que a grandeza do tipo geral que traduz, para efeito de ressonância, todas as propriedades do "poço" interno (para uma dada "barreira", naturalmente) é:

$$\theta = K(b-c) + f(E, C)$$

É interessante notar que o elemento de ligação entre o interior do poço e o exterior é o quociente da função de onda pela derivada da mesma.

Chagamos portanto a todos os resultados obtidos para o caso particular do seção anterior, substituindo Kb pelo nosso θ , sem ganhar porém nenhum novo conhecimento do núcleo.

Outro resultado de natureza geral é que Γ , a meia largura dos máximos de ressonância, pode ser estimada em termos do espaçamento das energias de ressonância, pois, em vista da fórmula acima,

$$\Gamma = \frac{1/2 ss^*}{\frac{\partial \theta}{\partial E}}$$

As ressonâncias ocorrem para $\theta = n\pi$, de modo que, para níveis de ressonância bem acima do fundamental (n grande) a relação

$$\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{E_n - E_{n-1}} = \frac{\pi}{\Delta n E}$$

deve se aproximar muito de $\frac{\partial \theta}{\partial E}$, de modo que $\Gamma = \frac{ss^*}{2\pi} \Delta n E$

Estas relações são, porém, de natureza demasiadamente geral, pelo que, da maneira que foram deduzidas, não permitem tirar conclusões muito definidas a respeito da estrutura nuclear interna. Compare também com artigos de Weisskopf*.

II, 10. Secção de choque para reações nucleares em função da energia

O núcleo composto que se forma por absorção da partícula incidente nem sempre reemite a mesma partícula ao desintegrar-se. Pode, em geral, escolher para reemissão, uma de uma série de partículas de natureza diferente, (por exemplo, próton, neutron, partícula alfa ou foton gama) e diz-se então que há reação nuclear.

Todos êstes processos de emissão entram em competição no núcleo composto, e as probabilidades de emissão (ou as secções de choque para as diversas reações) podem ser deduzidas de modo semelhante ao caso de espalhamento (elástico) exposto nas secções anteriores. Em vez de fazermos uma dedução rigorosa das expressões (II, 24) e (II, 25) as quais se chega** para a secção de choque de uma particular reação, mostremos a plausibilidade do resultado por um raciocínio intuitivo aproximado.

Ora, se em vez da partícula incidente podem emergir outras, concluimos que as funções de onda dessas outras partículas também devem

* Phys. Rev. 57, 472 (1940) e 71, 145 (1947)

** Veja por exemplo, Breit e Wigner, Phys. Rev. 49, 519, (1936)
Compare também com Fermi, Nuclear Physics, Chicago University Press
Revised edition, pag. 152.

ser excitadas no interior do núcleo composto pela função de onda incidente, e atravessando suas barreiras respectivas, devem aparecer fora do núcleo.

Perto da ressonância da partícula incidente, a amplitude da sua função de onda dentro do núcleo atinge valores bem altos; o que limita o crescimento desta amplitude para valores ainda mais altos é o fato de que a função de onda pode atravessar novamente a barreira para fora do núcleo. Esta travessia funciona como o atrito na analogia mecânica. Este "atrito" no caso de espalhamento simples, é dado por $\Gamma/2$ como mostra a fórmula da amplitude A_1 dada em II, 6, quando comparada com a fórmula correspondente de um sistema mecânico em ressonância. No caso de reações nucleares, em que a função de onda da partícula incidente, no interior do núcleo, pode extravazar também, através das funções de onda das outras partículas nas quais se pode transformar, o "atrito" para a função de onda incidente será dado por $\Gamma_T/2$:

$$\frac{1}{2} \Gamma_T = \frac{1}{2} (\Gamma_p + \Gamma_n + \Gamma_\alpha + \Gamma_y)$$

onde Γ_i ($i = p, n, \alpha$ ou y) é o inverso da vida média do núcleo composto se ele se desintegra pela emissão da partícula i sómente.

Seja o proton a partícula incidente. No caso de puro espalhamento, na seção de choque diferencial aparece o fator

$$\frac{1 \Gamma_p}{\Delta E + i \Gamma/2}$$

que pode ser escrito como (veja II,13)

$$A \cdot i s^* e^{-iKb} e^{i\delta}$$

onde A é a amplitude da onda sencidal estacionária no interior do núcleo. Isto é, a contribuição à onda emergente que descreve a seção de choque é dada pelo produto da amplitude da onda no interior do núcleo, A , pelo coeficiente de passagem através da barreira, s (transparencia). Lembrando as expressões:

$$|s| = \frac{\sqrt{2Mc}}{\sqrt{\hbar^2 K}} \sqrt{\Gamma_p}$$

$$A = \frac{\Gamma_p / |s|}{\Delta E + i\Gamma/2} = \frac{\sqrt{\Gamma_p}}{\Delta E + i\Gamma/2} \sqrt{\frac{\hbar^2 K_c}{2Mc}}$$

o fator em questão fica, a menos das fases,

$$\sqrt{\Gamma_p} \cdot \frac{\sqrt{\Gamma}}{\Delta E + i\Gamma/2}$$

No caso da possibilidade de emissão das outras partículas, a amplitude da função de onda do próton (partícula incidente) no interior do núcleo será agora (desprezando o fator $\sqrt{\hbar^2 K/2Mc}$)

$$\frac{\sqrt{\Gamma_p}}{E - E_{res} + \frac{i}{2}\Gamma_T},$$

onde E é a energia da partícula incidente e $\Gamma_T = \Gamma_\alpha + \Gamma_p + \dots$; os coeficientes de transmissão s_i de cada uma das outras partículas que podem ser emitidas são dados por $\sqrt{\Gamma_i}$ (a menos do inverso do fator desprezado) de modo que a seção de choque diferencial para absorção de próton e emissão da partícula i (p, α, γ ou n) deve ser proporcional a

$$\frac{\sqrt{\Gamma_i} \cdot \sqrt{\Gamma_p}}{E - E_{res} - \frac{i}{2}\Gamma_T} \quad (\text{II, } 20b)$$

Um cálculo mais geral confirma esta previsão e mostra que a seção de choque para absorção de próton, e emissão, digamos, de neutrón é dado por:

$$\sigma(p \rightarrow n) = 4\pi \lambda \lambda_p \frac{\Gamma_n \Gamma_p}{(E - E_{res})^2 + (\Gamma_T/2)^2} \quad (\text{II, } 24)$$

onde λ_p é o número de ondas do proton correspondente à energia de ressonância E_{rcs} , e λ o seu número de ondas verdadeiro (correspondente a E), o spin das partículas não tendo sido levado em conta.

Para Γ_T pequeno, λ naturalmente é quase igual a λ_p , o que mostra que, neste caso (II, 24) coincide com a fórmula que teríamos obtido inserindo o nosso resultado (II, 20b) na expressão da seção de choque em função das fases δ (formula (II, 5). No caso em que há vários níveis j suficientemente próximos contribuindo para a seção de choque total, esta é dada por

$$\sigma(p \rightarrow n) = 4\pi \lambda \lambda_p \sum_j \left| \frac{\sqrt{\Gamma_{jn}} \sqrt{\Gamma_{jp}}}{E - E_j + i\Gamma_j/2} \right|^2 \quad (\text{II, 25})$$

pois a amplitude da função de onda espalhada é obtida como a superposição das amplitudes das funções de onda parciais, espalhadas por cada um dos níveis de ressonância. Para uma comparação com a experiência veja Fermi.*

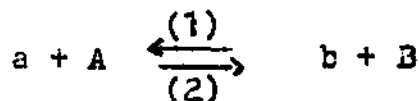
Tôdos as fórmulas aqui citadas referem-se ao caso em que as partículas não têm spin. A fórmula geral, para partículas com spin, é deduzida de maneira semelhante à nossa, com a diferença que aparecem fatores mas complicados para as distribuições angulares, provenientes da somação sobre os estados inicial e final de spin das partículas e do núcleo.

II, 11. Relações gerais entre seções de choque

Para finalizar este capítulo, vamos apresentar algumas relações quite uteis que, porém, nada têm a ver com os fenômenos de ressonância expostos nas seções anteriores.

1) Reversibilidade**

Consideremos uma reação nuclear que se possa processar nos dois sentidos:



Se o sentido fôr aquele indicado por (1), \underline{a} e \underline{b} representam respectivamente a partícula incidente e a emergente (por exemplo meson π e proton), e A e B os núcleos nos estados inicial e final da reação.

Se as partículas em reação têm spin e momento bem definidos nos estados inicial e final, a relação entre as secções de choque nas dois sentidos é:

$$\frac{\sigma_{A \rightarrow B}}{\lambda_a^2} = \frac{\sigma_{B \rightarrow A}}{\lambda_b^2} \quad (\text{II, 26})$$

onde λ_a é o comprimento de onda da partícula \underline{a} incidente, no sistema do centro de gravidade e λ_b é o comprimento de onda da partícula emergente, ou da partícula incidente no caso da reação inversa (2).

A razão desta propriedade é que a hamiltoniana de interação sempre deve ser hermitiana. Neste caso o módulo do seu elemento de matriz nas duas direções (1) e (2) é o mesmo. Iás, como mostraremos abaixo, cada um dos membros de (II, 26) é proporcional ao quadrado do módulo dêste elemento de matriz, e seus membros devem portanto ser iguais.

É um resultado geral de Mecânica Quântica que o número de transições por segundo de \underline{a} (com momento dado, p_a) a \underline{b} (com momento entre p_b , $p_b + dp_b$), no ângulo sólido compreendido entre Ω e $\Omega + d\Omega$, é dado por:

$$\frac{2\pi}{\hbar} |H'_{AB}|^2 \frac{p_b^2 d\Omega dp_b}{dE_b}$$

onde (H'_{AB}) é o elemento de matriz da hamiltoniana entre os estados \underline{a} e \underline{b} . A fração representa o número de estados finais, por intervalo de energia E_b , que a partícula \underline{b} (de spin fixo) pode assumir. Por outro lado, o número de transições por segundo, de $A \rightarrow B$, em que a partícula inicial tem velocidade V_a , é dado por:

$$\sigma_{AB} \cdot V_a,$$

pois $V_a dt$ representa o número de partículas \underline{a} incidentes por unidade de superfície sobre o núcleo, se sua densidade espacial fôr 1, e $\sigma_{A \rightarrow B}$

a fração dessas que entram na reação nuclear. Igualando estas duas expressões, e lembrando que:

$$dE_b = p_b \cdot dp_b / m_b = v_b dp_b,$$

obtemos:

$$\frac{2\pi}{h} \frac{1}{\Omega} |H'_{AB}|^2 = \frac{v_b v_a \sigma_{A \rightarrow B}}{p_b^2}$$

Repetindo o raciocínio para o caso inverso e lembrando que:

$$|H_{AB}|^2 = |H_{BA}|^2$$

obtemos a relação (II, 26) acima.

No caso de feixes não polarizados, tôdas as orientações dos spins das partículas iniciais são possíveis, darão sua contribuição à reação, e cada uma delas poderá produzir uma qualquer das diversas orientações possíveis do estado final.

Experimentalmente mede-se, neste caso, uma secção de choque média, que é a soma das diversas secções de choque para spins fixos, sôbre todos os spins possíveis do estado final, e média destas sôbre tôdas as direções (são $(2I_A + 1)(2I_a + 1)$) do estado inicial, isto é:

$$\bar{\sigma}_{AB} = \frac{1}{\text{N. de estados iniciais (A)}} \cdot \sum_{A \rightarrow B} \sigma_{A \rightarrow B} = \frac{1}{(2I_A + 1)(2I_a + 1)} \sum \sigma_{A \rightarrow B}$$

A soma é sôbre todos os estados de spins determinados de $A + a$ e $B + b$ possíveis; I_A e I_a são os spins do núcleo e partícula iniciais. Temos pois

$$\sum \sigma_{A \rightarrow B} = \bar{\sigma}_{AB} (2I_A + 1)(2I_a + 1)$$

As, no primeiro membro, temos secções de choque para direções de spins fixos. A elas podemos aplicar a relação (II, 26) acima deduzida, e somar para tôdas as possibilidades de spin. Obtemos desta forma:

$$\frac{1}{\lambda_a^2} \sum \sigma_{AB} = \frac{1}{\lambda_b^2} \sum \sigma_{BA} ,$$

isto é,

$$(2I_a + 1) (2I_A + 1) \frac{\bar{\sigma}_{AB}}{\lambda_a^2} = (2I_b + 1) (2I_B + 1) \frac{\bar{\sigma}_{BA}}{\lambda_b^2}. \quad (\text{II}, 2)$$

2) Espalhamento para a frente

No caso em que, além de espalhamento, possam ocorrer também reações nucleares (a partícula emergente é diferente da partícula incidente), há uma relação entre a secção de choque total para todos os processos, σ_T , e a secção de choque diferencial do espalhamento, tomado na direção em que não há deflexão (espalhamento para a frente) $\sigma_{\text{esp}}(0)$, que é a seguinte:

$$\sigma_T = 4\pi\lambda^2 \text{sen}^2 \eta (\sigma_{\text{esp}}(0)/\lambda^2)^{1/2}, \quad (\text{II}, 28)$$

onde λ é o comprimento de onda da partícula incidente e η é a fase da função de onda espalhada elasticamente. Esta relação também é válida se só o espalhamento fôr permitido (então temos $\sigma_T = \int \sigma_{\text{esp}}(\theta) d \cos \theta$).

A razão é a seguinte: Quando um feixe de determinadas partículas - vamos chamá-las de p_1 - incide sobre um alvo espalhador, esse feixe emerge do outro lado (na mesma direção) com a intensidade diminuída pela perda das partículas que, sofrendo um dos diversos processos nucleares possíveis, se transformam em outras partículas, ou se desviam em todas as direções.

O número de partículas que sofreram um dos processos nucleares possíveis, é dado em função da secção de choque total, de modo que a diminuição de intensidade do feixe das partículas p_1 emergentes na direção "para a frente" (que depende de $\sigma_{\text{esp}}(0)$) deve estar relacionada com σ_T . Do ponto de vista da superposição de ondas associadas às partículas p_1 pela Mecânica Quântica, esta queda de intensidade deve ser uma consequência de um decréscimo de amplitude da onda, devido à interferência do feixe inicial com as ondas espalhadas para a frente pelo alvo. Consequentemente a amplitude da onda espalhada para a frente está relacionada com a secção de choque total, relação essa que vamos procurar no que se segue.

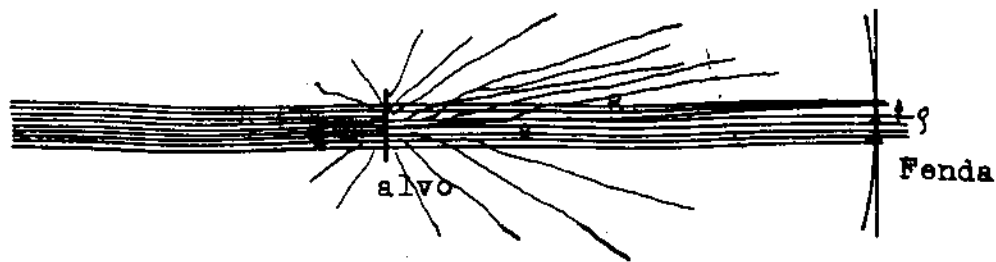


Fig. II,18

Um feixe de partículas incide sobre um alvo, A; as partículas que ultrapassam são coletadas numa fenda F a grande distância do alvo, sobre o eixo de feixe incidente. O número de partículas que aí chegam, por segundo, pode então ser medido.

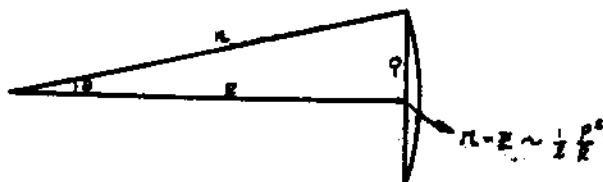


Fig. II,19

Ilustrando o cálculo de $r-R$ que aparece como uma fase no cálculo do fluxo de partículas que são espalhadas pelo alvo sob um ângulo θ atingem a fenda a uma distância ρ do centro.

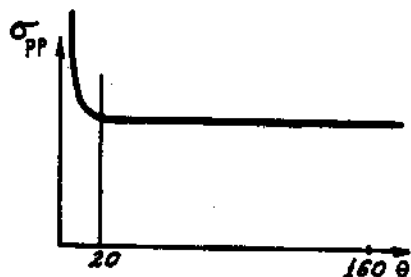


Fig. II,20

Comportamento da seção de choque diferencial para o espalhamento elástico de protons. Observe que para pequenos ângulos σ atinge valores muito acima da média.

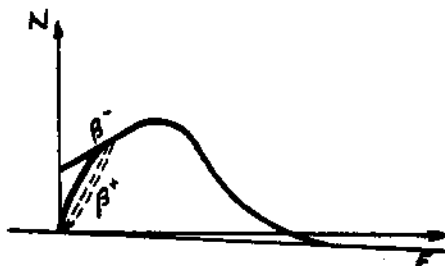


Fig. III,1

Espectro dos eletrons na desintegração β^- . Os eletrons apresentam-se com todos os valores possíveis de energia em-

A função de onda final das partículas incidentes é *

$$\Psi_{p_1} = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Suponhamos que temos um feixe de partículas p_1 , incidente sobre um alvo, e que podemos medir o número das partículas que penetram por segundo numa pequena fenda coletora colocada a grande distância do alvo, sobre o eixo do feixe incidente, de tal modo que, se retirarmos o alvo, a fenda é atingida em cheio pelo feixe, e poderemos medir a intensidade inicial do mesmo Fig. II, 18.

Seja Ψ a função de onda que descreve as partículas p_1 (a densidade espacial delas será dada por $\Psi^* \Psi$). Queremos calcular o número das que, por unidade de tempo, penetram numa abertura colocada a uma distância grande do alvo, na direção do feixe incidente. Este é dado por

$$v \Psi^* \Psi = v \left| e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \right|^2 = v \left| 1 + \frac{f(\theta)}{r} e^{ik(r-z)} \right|^2,$$

integrada sobre a área do orifício. A perda de intensidade do feixe vale portanto:

$$\sigma_T = \int_0^{\epsilon} 2\pi \rho d\rho \left[1 - \left| 1 + \frac{f(\theta)}{R} e^{ik \frac{\rho^2}{2R}} \right|^2 \right],$$

pois, se $R = z$ é a distância fixa da fonte ao centro da fenda, e ρ a distância deste centro, no plano da fenda, ao ponto de incidência de uma partícula que deixa o alvo numa direção θ em relação à direção incidente, obtemos aproximadamente Fig. II, 19.

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2} \approx R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R^2} \right)$$

O raio da abertura foi tomado como ϵ , onde ϵ é um número suficientemente pequeno para que a área da abertura seja menor que a área da secção transversal do feixe. Desta forma a abertura recebe preferivelmente as partículas do feixe que não foram desviadas.

* No Apêndice III encontra-se uma análise mais detalhada

Efetuando o quadrado indicado na integral, obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \int_0^{\epsilon R} 2\pi\rho \frac{d\rho}{R} (f^* e^{-ik\frac{\rho^2}{2R}} + f e^{ik\frac{\rho^2}{2R}}) + \int_0^{\epsilon R} 2\pi \frac{\rho}{R^2} d\rho |f|^2 \\ &= \frac{2\pi}{ik} f^* (1 - e^{-ik\frac{\epsilon^2 R}{2}}) - \frac{2\pi}{ik} f (1 - e^{+ik\frac{\epsilon^2 R}{2}}) + \pi \epsilon^2 |f(0)|^2 \end{aligned}$$

Os dois primeiros termos representam a interferência entre a onda plana incidente e a onda difundida. Sua influência é muito maior que a do termo $\pi \epsilon^2 |f(0)|^2$ (para ϵ pequeno), que representa a parte espalhada para dentro do orifício, se não tivéssemos interferência. Esta seria por exemplo toda a contribuição se estivessemos a um ângulo diferente, "fora" do feixe incidente. De ordem ϵ^2 também seriam as contribuições semelhantes das partículas de natureza diferente da incidente, formadas por reações nucleares (não levadas em conta neste cálculo) e que poderão ser todas desprezadas (ou levadas em conta nas experiências mais precisas).

A parte exponencial dos dois primeiros termos é uma função oscilante do diâmetro do orifício, cuja média é zero, de modo que pode ser desprezada. Resta:

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k} \left(\frac{f^* - f}{2i} \right).$$

A expressão entre parentesis é a parte imaginária de $f(0)$, que também pode ser escrita como:

$$|f(0)| \operatorname{sen} \eta.$$

onde

$$f(0) = f(0) e^{-i\eta}$$

Lembrando agora que $|f(0)| = \sqrt{\sigma_{\text{csp}}(0)}$, e que $1/k = \lambda$

resulta a relação (II, 28) que queríamos demonstrar.

A experiência mostra que $\operatorname{sen} \eta$ deve ser positivo para altas energias. Como $|\operatorname{sen} \eta| < 1$, vemos que

$$\sigma_{\text{csp}}(0) \gg \lambda^2 \left(\frac{\sigma_T}{4\pi\lambda^2} \right)^2$$

o que torna compreensível que a secção de choque diferencial de espalhamento elástico de protons cresça a valores muito acima da média para θ aproximando-se de zero. Fig. II, 20.

CAPITULO III

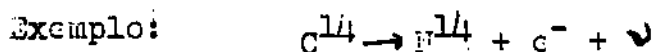
Teoria da Desintegração Beta

III, 1. Introdução à teoria

A teoria da desintegração beta à que se chegou atualmente está em ótimo acôrdo com a experiência no que se refere à forma do espectro dos eletrons emitidos. Quanto à vida média, há uma série de dificuldades (discrepâncias com a experiência) provavelmente devidas ao fato de que o seu cálculo envolve um conhecimento mais detalhado das propriedades do núcleo, que ainda não possuímos. Uma comparação com a experiência aparece de forma especialmente clara e sistemática quando utilizamos o modelo nuclear das camadas (de Maxel, Jensen, Sness e H. G. Mayer) para ordenação dos dados experimentais. Porisso deixaremos esta comparação para depois do estudo do modelo das camadas (Cap. IV).

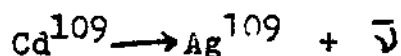
Os três processos compreendidos na teoria da desintegração beta são:

- a) A emissão de um eletron do núcleo de carga Ze , o núcleo resultante tendo a carga $(Z+1)e$;



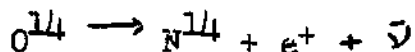
- b) Captura K| Um eletron da camada interior, K, em tôrno do núcleo, é absorvido pelo mesmo, passando êste a ter uma carga $(Z-1)e$. Reconhecê-se a ocorrência dêste processo pela radiação X característica da órbita K do novo elemento, consequente à captura K.

Exemplo:



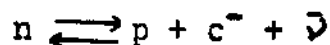
- c) Emissão de positron

Exemplo:



Frequentemente a captura K e emissão de positron são processos simultaneos e competitivos. Este é o caso de O^{14} , por exemplo, que também pode se transformar em N^{14} por captura K.

Êstes três processos são, para efeito de cálculo, reconduzidos às formas equivalentes da reação.



onde $n, p, e, \bar{\nu}$ são respectivamente o neutron, o proton, o eletron e o anti-neutrino. (Usa-se o anti-neutrino em vez do neutrino para obter maior simetria nos cálculos. (Físicamente os dois têm as mesmas propriedades).

Supõe-se que cada uma destas partículas tem spin $\frac{1}{2}$ e sua função de onda, apesar de geralmente desconhecida, satisfaz a uma equação relativística do tipo da equação de Dirac. Como esta admite também estados de energia negativa, cada um dos processos a), b), c) é apenas transformação de neutron em proton entre estados inicial e final diferentes.

A emissão de eletron representa-se por:



isto é, o neutron absorve um neutrino que já existia préviamente, imperceptível num estado de energia negativa, deixa o "furo" do neutrino que se comporta como uma partícula em estado de energia positiva, chamada anti-neutrino, e se transforma em proton e eletron.

A captura K é exatamente o inverso desta reação. No estado inicial há um eletron e um proton. Êste absorve o eletron e se transforma em neutron e emite um neutrino, em estado de energia positiva.

Na emissão de positron, o estado inicial é de um proton e de um eletron em estado de energia negativa (imperceptível). Êste é absorvido pelo proton. O seu "furo" no estado final é o positron.

A desintegração do neutron não se pode dar nas duas partículas observáveis: eletron e proton, somente, pois então, por conservação de

momento e energia, os eletrons emitidos seriam monoenergéticos (porque o neutron e o proton estão em estados de energia definidos dentro do núcleo). Observa-se porém que os eletrons apresentam tôdas as energias desde 0 até E_{\max} , sendo o seu espetro dado, aproximadamente, pela curva da Fig. III, 1.

Esta é uma das razões para se supor a emissão de uma terceira partícula, não diretamente observável, neutra, de massa inferior a 20 massas eletrônicas, spin $\frac{1}{2}$ (Fermion) e que leva consigo o momento e energia excedentes.

Para uma discussão mais detalhada veja Fermi.*

Todos os três processos a, b, e c, foram reconduzidos ao caso da desintegração do neutron em proton (e vice versa); êste porém, ainda não tem explicação teórica, e deve ser aceito como processo fundamental "directo."

O nosso objetivo é calcular a forma do espetro dos eletrons de desintegração de um núcleo β -instável, e a sua vida média. Usamos o processo conhecido da teoria das perturbações para calcular a probabilidade de transição (número de transições por segundo) de um estado inicial ao final.

Probabilidade de transição = $\frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 \cdot \text{densidade de estados finais}$ (III, 7)

onde H_{fi} é o elemento de matriz da hamiltoniana de interação das quatro partículas, calculado entre o estado inicial e final. Basta usar a perturbação até a primeira ordem, pois, o processo é muito lento.**

A forma dêste elemento de matriz pode apenas ser "adivinhada" atualmente. Deve, porém, ter as seguintes propriedades:

- a) ser relativisticamente invariante;
- b) só permitir processos que conservem energia e momento;
- c) ser simétrica ("ida" e "volta" devem ter a mesma probabilidade);
- d) naturalmente, estar de acôrdo com a experiência.

Verificou-se que há mais de uma possibilidade de escolha para

* Nuclear Physics, edição revista (University of Chicago Press) pag. 84 e referências ali citadas.

** Fermi (Zits. f. Physik 88, 161 (1934) foi o primeiro a empregar esta pldcia para fazer um teoria da desintegração.

o operador da interação cujos elementos de matriz satisfazem as tres primeiras restrições acima mencionadas, e que são até hoje igualmente satisfatórias (ou insatisfatórias) experimentalmente.

III, 2. Exemplo com um elemento de matriz simples

Vamos elucidar o método de cálculo da desintegração beta, tomando para a hamiltoniana de interação um exemplo bem simples. Depois (pag. 71) investigaremos quais os possíveis operadores de interação, e seus elementos de matriz que sejam relativisticamente invariantes e mais satisfatórios experimentalmente.

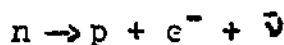
Ponhamos para H_{fi} a seguinte expressão simples (a título de estudo preliminar):

$$H_{fi} = G \int \Psi_p(\mathbf{r}) \Psi_{e^-}(\mathbf{r}) \Psi_\nu(\mathbf{r}) \Psi_n(\mathbf{r}) d^3r$$

Na integral, $\Psi_p, \Psi_{e^-}, \Psi_\nu, \Psi_n$, representam as funções de onda das quatro partículas. Elas são tomadas tôdas no mesmo ponto do espaço, o que exprime o fato de que a interação é de contato " (a criação e absorção das partículas se dá no mesmo ponto do espaço).

Note-se que aparece Ψ_ν no integrando, em vez de Ψ_ν^* , pois, consideramos o neutrino no estado inicial, e o seu "furo" (veja pag. 57) no final, de acôrdo com o uso geral. A constante de interação G tem dimensões de $\text{erg} \cdot \text{cm}^3$, pois H_{fi} é uma energia, e $\Psi \Psi^*$ é o inverso de um volume ($\Psi^* \Psi d^3v = 1$). Seu valor naturalmente depende das hipóteses sobre a natureza da interação, mas sua ordem de grandeza é, para tôdas elas de $10^{-49} \text{ erg cm}^3$.

Como exemplo, consideremos o caso da desintegração do neutron livre:



Como primeira aproximação vamos desprezar a interação coulombiana existente entre eletrôn e proton. Então podemos tomar ondas planas para as funções Ψ das quatro partículas. Obtemos:

$$H_{fi} = G \int (e^{i\vec{p}_p \cdot \vec{r}} \cdot e^{i\vec{p}_{e^-} \cdot \vec{r}})^* e^{i\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}} e^{i\vec{p}_n \cdot \vec{r}} d^3r.$$

Os p são os momentos, e r a posição das quatro partículas. *

Como as energias envolvidas nesta reação são da ordem de alguns MeV, estamos na região relativística das partículas leves, pelo menos. Isto é, deveriam aparecer funções de onda a quatro componentes e os operadores do tipo spin ($\vec{\sigma}, \alpha^k, \beta$ da equação de Dirac) etc. Deixaremos para depois a consideração destes detalhes.

Vamos considerar agora a desintegração de um neutrão contido no interior de um núcleo. Então podemos tomar ondas planas só para o neutrino e o elétron (desprezando ainda a interação coulombiana do elétron com o núcleo):

$$\begin{aligned} \psi_\nu &= c e^{ip_\nu \cdot \vec{x}} = c e^{-ip_\nu \cdot \vec{x}} \\ \psi_{e1} &= c e^{ip_{e1} \cdot \vec{x}} \end{aligned}$$

As funções de onda das partículas pesadas (protons e neutrons) contidas no núcleo não são mais ondas planas, naturalmente. Representê-mo-las por:

$U(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots)$ = função de onda das partículas pesadas antes da desintegração;

$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots)$ = função de onda das partículas pesadas depois da desintegração;

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ representam as três coordenadas espaciais das partículas pesadas 1, 2, ..., N, contidas no núcleo.

Então podemos escrever para o elemento de matriz:

$$H_{fi} = G \sum_k \int V^*(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots) e^{-i(\vec{p}_{e1} + \vec{p}_j) \cdot \vec{x}} U(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots) d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, \dots, d\vec{x}_N$$

* Nota: A conservação do momento, por exemplo, fica garantida, pois a integral só é diferente de zero quando

$$\vec{p}_n = (\vec{p}_e + \vec{p}_p + \vec{p}_{e1}) = 0$$

A conservação da energia decorre da própria maneira de obtenção da probabilidade de transição por unidade de tempo, em que os estados finais têm a energia contada num intervalo contínuo, (veja por exemplo Heitler "The Quantum Theory of Radiation", Oxford University Press, 2ª edição, pag. 89) pois, na integral sobre todos os estados finais dos elementos de matriz de todas as transições, só contribuem aquelas em que a conservação da energia está praticamente satisfeita.

A somação estende-se sobre todos os nucleons k que são neutrons no estado inicial, pois não se sabe qual deles vai sofrer a desintegração beta antes de prosseguirmos com o cálculo de ρ_E , vamos examinar de mais perto o elemento da matriz H_{fi} . Note-se que a exponencial, nos casos comuns, vale aproximadamente 1, pois, como mostraremos mais adiante, para energias cinéticas usuais dos eletrons emitidos (2MeV)

$$1/\hbar (\vec{p}_{c1} + \vec{p}_\nu) \cdot \vec{x} \lesssim 1/10 ;$$

consequentemente H_{fi} pode ser escrito como soma de termos decrescente do tipo:

$$\int V^* U d^3x, \int V^* \frac{1}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{x}) U d^3x, \int V^* \frac{1}{\hbar^2} (\vec{p} \cdot \vec{x})^2 U d^3x, \dots$$

que provêm do desenvolvimento em série de potências da exponencial.

Cada termo permite atribuir propriedades bastante diferentes à função inicial e final do núcleo. Por exemplo, para o primeiro ser diferente de zero, V e U devem ter a mesma paridade e como o núcleo está em estado de momento angular bem definido, V deve representar o mesmo momento angular que U . Para o segundo termo ser diferente de zero, como o integrando contém o fator \vec{x} , pode-se mostrar que V e U devem ter paridades diferentes, e seus momentos angulares podem diferir de 1, 0 ou -1. Como em geral os núcleos estão em estados (inicial e final) bem definidos de paridade e momento angular total (spin), compreende-se que o primeiro termo, ou o segundo, etc, podem ser nulos (ou desprezíveis). Além disso, uma vez determinadas as "regras de seleção" (mudança de paridade e spin) associadas a cada termo, o valor de cada termo é dado aproximadamente por uma potência de $p/\hbar \cdot r_A \sim 1/10$, vezes o mesmo número

$$M = G \int V^* U d^3x,$$

igualmente desconhecido para todos êles, e vezes um termo que depende fortemente dos momentos $(\vec{p}_{c1} + \vec{p}_\nu)$, com exceção do primeiro. Isto se refletirá, como veremos, na forma do espectro emitido e na vida média da transição.

* Para o esboço da prova destas propriedades, veja (II, 3).

Se, por exemplo, o primeiro termo se anula, mas não o segundo (a transição chama-se então primeiro-proibida), espera-se que $|H_{fi}|^2$ seja aproximadamente 1/100 vezes menor do que se o primeiro termo não se anulasse (seria a transição permitida).

$$\text{Falta mostrar que } \vec{p} \cdot \vec{x} / \hbar \leq 1/10$$

Como na integral as funções V e U se anulam fora do núcleo, basta considerar distâncias \vec{x} da ordem do raio nuclear, r_A .

Vamos supor que um núcleo do número atômico $A = 100$ emita um elétron e um neutrino com energia de $\leq 2 \text{ MeV}$ cada um (é o usual) e calculamos o valor de $\vec{p} \cdot \vec{x} / \hbar$ correspondente.

$$E_{el} \sim 2 \text{ MeV} \sim E_\nu$$

$$\therefore cp_{el} \sim 2 \text{ MeV} \sim cp_\nu \sim 4m_e c^2$$

$$\lambda = \hbar/p \sim \hbar/4 m_e c \sim \frac{137}{4} \frac{e^2}{m_e c^2} \sim 50 r_{el} \sim 60 r_0 \sim 10 r_A$$

Fizemos uso da relação

$$r_A = r_0 \cdot A^{1/3}, \text{ com } r_0 = 1,40 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad \frac{e^2}{2m_e c^2},$$

isto é:

$$\vec{p} \cdot \vec{x} / \hbar = r/\lambda \text{ não excede, aproximadamente, } 1/10.$$

Resumindo a análise do elemento de matriz, vemos que são possíveis transições de diversos tipos com regras de seleção diferentes e vidas médias diferentes (estas são proporcionais a $|H_{fi}|^2$, como veremos). Por regras de seleção entendem-se as mudanças de momento angular total, ΔI , e de paridade do núcleo inicial e final. Indica-se a mudança de paridade com um "Sim" se houve mudança, e com "Não" no caso contrário. Por exemplo, para transições permitidas, temos as chamadas regras de seleção de Fermi.

$$\text{permitidas: } \Delta I = 0 \quad \text{"Não"},$$

$$\text{primeiro - proibidas: } \Delta I = 1, -1, 0 \quad \text{"Sim"}.$$

Para obtermos a expressão completa para a probabilidade de transição (III, 1) precisamos ainda da expressão para a densidade ρ_E dos estados finais, isto é, do número de estados finais por unidade de energia total final. Como energia e momento das partículas pesadas, no estado inicial e final, são fixos (despreza-se o recuo do núcleo), trata-se somente de saber o número de maneiras em que a energia total final (fixa) se pode distribuir entre as energias do eletrón e do neutrino.

Para isso podemos considerar o eletrón e o neutrino como livres e independentes. O número de estados em que cada um pode estar quando seu momento está contido no ângulo sólido $\Omega, \Omega + d\Omega$, e módulo $p, p + dp$, vale.

$$\frac{p^2 dp d\Omega}{(2\pi \hbar)^3}$$

de modo que:

$$\rho_E = \frac{p_{e1}^2 dp_{e1} d\Omega_{e1}}{(2\pi \hbar)^3} \cdot \frac{p_\nu^2 dp_\nu d\Omega_\nu}{(2\pi \hbar)^3} \cdot \frac{1}{dE}$$

onde E é energia dos dois juntos e vale

$$E = p_\nu \cdot c + E_{e1}$$

onde E_{e1} é a energia do eletrón, igual a $c\sqrt{m_e^2 c^2 + p_{e1}^2}$. Como desejamos obter a forma do espectro em termos da energia do eletrón, calculamos ρ_E para cada valor de p_{e1} fixo e para a energia E no entorno da energia E_0 liberada na reação (corresponde à conservação da energia).

$$\text{Prob. trans./seg.} = \frac{G^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |M|^2 p_{e1}^2 dp_{e1} p_\nu^2 \frac{d\Omega_\nu}{4\pi} \frac{d\Omega_{e1}}{4\pi}$$

(Os efeitos coulombianos foram desprezados nesta expressão). Se $|H_{fi}|^2$ for independente de p_{e1}, p_ν (transição permitida, por exemplo), podemos integrar sobre os ângulos sólidos ($d\Omega_\nu/4\pi$ dá o valor 1). O

número de eletrons emitidos por segundo com energia (em unidades de $m_e c^2$) entre ϵ e $\epsilon + d\epsilon$, é proporcional a:

$$p_{\nu}^{\epsilon} p_{el}^{\epsilon} dp_{el} = (\epsilon_0 - \epsilon)^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} \epsilon d\epsilon \quad (\text{III}, 2)$$

onde ϵ_0 é a energia liberada na reação e ϵ é a energia do eletron. Este é, pois, o espectro teóricamente esperado para transições permitidas. O seu gráfico se assemelha muito ao experimentalmente obtido, apresentado na figura III, 1.

A comparação com o espectro experimental é porém mais fácil por meio de um gráfico deuzido deste, o chamado "gráfico de Kurie", como veremos, depois de levar em conta a atração eletrostática entre eletron e núcleo. Convém notar que na expressão (III, 2) desprezamos a massa m_{ν} do neutrino, ao escrevermos p_{ν}^{ϵ} em função de ϵ e ϵ_0 . Com $m_{\nu} = 0$ a expressão seria:

$$p_{\nu}^{\epsilon} p_{el}^{\epsilon} dp_{el} = [(\epsilon_0 - \epsilon)^2 - (\frac{m_{\nu}}{m_e})^2] \cdot \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} d\epsilon$$

Para ϵ perto de ϵ_0 este efeito se faz sentir na forma da curva teórica caindo $n(\epsilon)$ para zero mais rapidamente e antes que para o caso $m_{\nu} = 0$. Examinando a forma dos espectros experimentais perto da energia máxima, verifica-se que $m_{\nu} < 1\text{KeV}$.*

Vamos agora levar em conta as forças elétricas, isto é, a não planidade da função de onda do eletron perto do núcleo, por meio de um fator de correção $F(Z, \epsilon)$. Este exprime o quadrado da média, sobre o núcleo, da amplitude daquela função de onda do eletron, que, assintoticamente, é onda plana representando uma partícula de energia ϵ e momento p . O seu cálculo envolve a teoria relativística de Dirac. A sua expressão é:**

$$F(Z, \epsilon) = \frac{4(2pR)^{2s-2} e^{\pi\alpha Z \epsilon/p}}{|\Gamma(2s+1)|^2} \frac{|\Gamma(s + i\alpha Z \epsilon/p)|^2}{2}$$

* C. nu. Rev. Mod. Phys. 22, 390 (1950)

** F. Feenberg e G. Trigg, Rev. Mod. Phys. 22, 399 (1950)

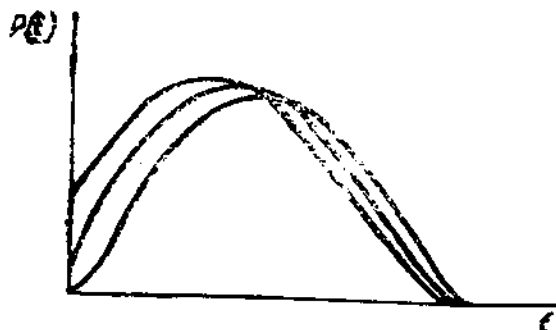


Fig. III,2

Probabilidade de transição permitida, por segundo, em que um elétron é emitido com energia entre ϵ e $\epsilon + \Delta\epsilon$, em unidade de $m_0 c^2$. Compare com a curva experimental da Fig. III,1.

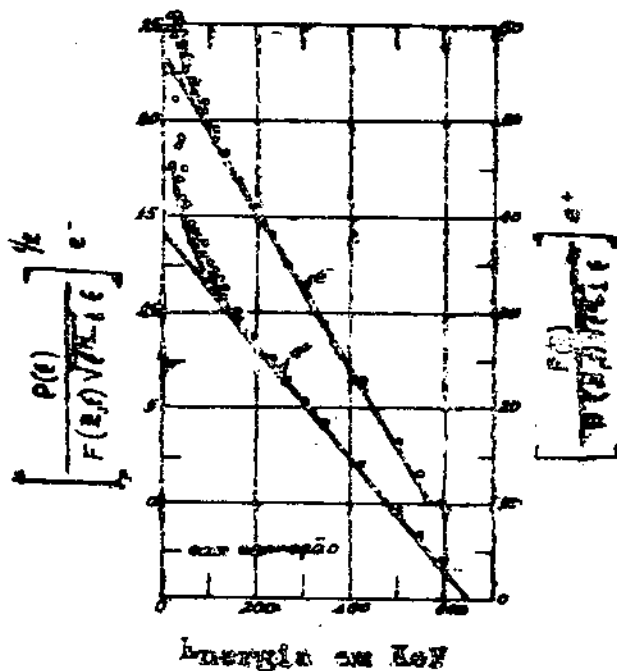


Fig. III,3

Gráfico de Kurie para Cu^{64} (espectro $\beta^+ \beta^-$).

onde Z é o número de carga do núcleo final. Z deve ser tomado positivo para emissão μ^- e negativo para emissão μ^+ ,

ϵ é a energia do eletrón em unidades $m_e c^2$

p é o momento do eletrón em unidades $m_e c$

R é o raio nuclear em unidades de $\hbar/m_e c$

$$s = (1 - \alpha^2 Z^2)^{1/2}, \alpha \approx 1/137$$

Γ é a função gama usual

Por exemplo:

$$Z = 14$$

$$\alpha Z \approx 0,1, \quad s \approx 1 - \frac{1}{200}, \quad \omega = \epsilon \approx \frac{1}{100}$$

$(Z p R)^{1/100}$ é uma função muito pouco sensível do raio do núcleo, de modo que não precisamos conhecê-lo com precisão para determinarmos o espectro.

A expressão final para as probabilidades de transição do tipo "permitted", por segundo, $P(\epsilon) d\epsilon$, em que o eletrón é emitido com energias entre $m_e c^2(\epsilon, \epsilon + d\epsilon)$ é, pois,

$$P(\epsilon) d\epsilon = \frac{G^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |M|^2 \cdot F(Z, \epsilon) (\epsilon_0 - \epsilon)^s \sqrt{\epsilon^2 - 1} \epsilon d\epsilon \quad (\text{III}, 3)$$

Dela obtemos a forma do espectro e a vida média; o espectro está visualizado no gráfico da Fig. III, 2.

O "gráfico de Kurie" é mais útil para perceber o desvio da curva teórica em relação aos pontos experimentais, e para determinar ϵ_0 . Em ordenadas tomam-se os valores da expressão

$$\left[\frac{P(\epsilon)}{F(Z, \epsilon) \sqrt{\epsilon^2 - 1} \cdot \epsilon} \right]^{1/s}$$

e em abscissas a energia ϵ do eletrón.

Para espectros permitidos, o resultado deve ser uma reta, segundo (III, 3). Experimentalmente encontram-se muitos casos de espectros só se desviam da reta no lado das baixas energias, como mostra o exemplo do Cu^{64} * (Fig. III, 3). Estes desvios parecem ser consequência das dificuldades experimentais para medir os eletrons de baixa energia. Os eletrons depois de emitidos são retardados dentro do próprio filme da substância p-ativa, de modo que o número de eletrons lentos é maior do que teóricamente se espera. À medida que a espessura da fonte diminui, os desvios se restringem para regiões de energia cada vez mais baixa.

III, 3. A vida média T

O seu inverso é a probabilidade total de transição por unidade de tempo, isto é, a integral de probabilidade de transição por segundo sobre todas as energias dos eletrons emitidos:

$$1/T = \int_0^{\epsilon_0} P(\epsilon) d\epsilon = \left[\frac{G^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |M|^2 \right] \int_0^{\epsilon_0} F(Z, \epsilon) (\epsilon_0 - \epsilon)^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} \epsilon d\epsilon$$

isto é, $1/T = k f(Z)$ onde

$$k = \frac{G^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |M|^2 \quad (\text{III, 4})$$

O valor da integral do segundo membro

$$f(Z) = \int_0^{\epsilon_0} F(Z, \epsilon) (\epsilon_0 - \epsilon)^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} \epsilon d\epsilon$$

pode ser obtido (numéricamente) pois, $F(Z, \epsilon)$ é função da energia conhecida (teóricamente) e ϵ_0 a energia máxima dos eletrons emitidos, determinável experimentalmente pelo gráfico de Kurie.

Não se comparam os valores experimentais da vida média diretamente com as previsões teóricas, pois eles dependem fortemente da energia liberada na reação (variam aproximadamente, como se pode verificar por inspeção da expressão de $f(Z)$, como ϵ^5).

* C. Wu, Rev. Mod. Phys. 22, 390 (1950)

elucidativo usar para termo de comparação entre os núcleos uma quantidade que não contém a parte da dependência da energia teóricamente prevista, e que conseqüentemente, traz luz sobre a parte ainda não calculável, que é o elemento de matriz do operador de interação (ainda não completamente conhecido) entre os estados do núcleo (também não conhecidos). Trata-se do produto fT que, segundo (III, 4), a menos de constantes, coincide com o inverso de $|M|^2$.

No capítulo IV, 3, faremos um exame dos valores de fT experimentalmente conhecidos.

No caso da captura-K, o eletrón está na órbita K (capturas de camadas mais altas, como L, etc., são desprezíveis). A sua função de onda é agora a da órbita K. A sua energia é uma só, bem definida (a da órbita), de modo que os neutrinos emitidos são monocromáticos. Não há portanto espectro.

O elemento de matriz da transição é dado por.

$$M = G \int v^* \Psi_{el} e^{i\vec{p}_\nu \cdot \vec{r}} U d v \approx \Psi_{el}(0) \cdot M$$

onde $\Psi_{el}(0)$ representa a média da função de onda da órbita K sobre a região do núcleo. Calcula-se $\Psi_{el}(0)$, empregando a teoria de Dirac do eletrón, a fórmula:

$$\text{Probabilidade de captura K/seg} = \frac{2\pi}{\hbar} G^2 |M|^2 |\Psi_{el}(0)|^2 \frac{p_\nu^2 dp_\nu \cdot 4\pi \frac{d\Omega}{4\pi}}{(2\pi\hbar)^3 dE_\nu}$$

dá diretamente, o inverso da vida média. Ela pode ser escrita sob a mesma forma que a expressão do inverso da vida média para a emissão β da página anterior, tomando, porém, para f a função*:

$$f_K = 2\pi (\alpha Z)^{2s+1} (2R)^{2s-2} \frac{1+s}{(2s+1)} (W_0+s)^2,$$

onde W_0 = energia inicial - energia final do núcleo, em unidades de $m_e c^2$ e R, S, α e Γ têm mesmos significados que em II, 10. Aqui também, a grandeza interessante para a comparação experimental é $f_K T$. No

* Veja Feenberg e Trigg, Rev. Mod. Phys. 22, pag. 405 (1950)

caso em que captura K e emissão de eletrôn positivo ocorram simultâne mente, o que frequentemente acontece, toma-se para comparação

$$(f_K + f_+) T$$

III, 4. A questão da forma do elemento de matriz

Provisòriamente, tomamos em III, 2 para H_{fi} a expressão:

$$H_{fi} = G \int \Psi_p^* \Psi_{el}^* \Psi_\nu \Psi_n d^3 x$$

Há muitos exemplos experimentais em boa concordância com as previsões decorrentes daquele elemento matriz, no caso de transições permitidas: regras de seleção de Fermi ($\Delta I = 0$, "nãõ") e forma do espetro (reta no gráfico de Kurie). Este sucesso sugere que a forma correta para o elemento de matriz talvez seja uma generalização do exemplo de III, 2. Uma possibilidade seria inserir operadores conveni tes agindo sôbre as funções de onda contidas em H_{fi} daquele exemplo. Formalmente:

$$H_{fi} = \int \Psi_p^* G \left\{ (O^L \Psi_\nu \Psi_{el}^*) O^H Q + (O^L \Psi_\nu \Psi_{el}) Q^* O^{H*} \right\} \Psi_n d^3 x$$

onde O^L e O^H são operadores a determinar que agem sôbre as funções de onda das partículas leves (el, ν) e pesadas (p, n) respectivamente. No nosso exemplo anterior, $O^L = O^H = 1$. Para exprimir que, na emis são β^- , o neutron passa a proton no estado final, foi inserido o oper dor Q que transforma neutron em proton (com a mesma função de onda na coordenadas e spin) e proton em "zero". Para poder exprimir a trans formação inversa, isto é, a emissão β^+ ou captura K, é necessário adicionar um segundo termo, contendo o hermitiano conjugado de Q, Q^* . Este transforma proton em neutron e neutron em "nada". Este termo adicional pode ser o hermitiano conjugado do primeiro, de modo que toda a hamiltoniana de interação torna-se hermitiana ($H^* = H$).

Vimos também no nosso exemplo, que para uma hamiltoniana inde pendente da energia das partículas leves (transição permitida), a forma do espetro provém essencialmente da distribuição estatística da

energia liberada na reação entre os estados livres do elétron e neutrino, isto é, a forma do espectro não traz muita luz sobre a forma que deve ter o operador de interação no caso das transições permitidas. Se as regras de seleção e a forma dos espectros proibidos nos poderão dar alguma pista a respeito da hamiltoniana de interação.

Vamos examinar algumas possibilidades para os operadores O^L e O^H .

- 1) $O^L \sim \text{grad}_L$, isto é, operador do tipo gradiente agindo sobre as funções de onda das partículas leves. Esta possibilidade não é permitida experimentalmente, pois ele muda a forma do espectro por um fator extra, E (energia do elétron), além de alterar a dependência da onda média da energia máxima, (w_0) , de w_0^5 a w_0^7 , o que, experimentalmente (por exemplo, nos espectros permitidos), fora de dúvida, não é o caso. (Esta é a chamada teoria de Konopinski-Uhlenbeck).
- 2) O^L envolve matrizes do spin.

Esta hipótese é provavelmente correta. Neste caso a hamiltoniana de interação permite regras de seleção diferentes que a do nosso exemplo $O^L = O^H = 1$.

Há desintegrações, das quais a forma do espectro e o valor de fT correspondem à transição permitida, e que, no entanto, apresentam regras de seleção diferentes das de Fermi ($\Delta I = 0$, não) resultantes do nosso exemplo $O^L = O^H = 1$. São as regras de seleção de Gamow-Teller: $\Delta I = \pm 1$, "Não".

Um exemplo é o caso de $H_e^6 \rightarrow L_1^6 + \beta^- + \nu$, cujo valor de fT é 10^2 a 10^3 segundos e em que $\Delta I = 1$ (Supõe-se que o I do H_e^6 é nulo como é de costume em todos os núcleos do tipo par-par. O valor experimental do spin do L_1 é 1). Isto mostra que, mesmo para as transições permitidas, a hamiltoniana de interação deve poder envolver vetores axiais ou tensores, por exemplo, pois estes, como veremos mais adiante, permitem $|\Delta I| = 1$.

Uma possibilidade seria por exemplo:

$$H_{fi} = (\Psi_p^* \vec{\sigma}_n) \cdot (\Psi_{e1}^* \vec{\sigma} \Psi_j) d^3 v$$

onde $(\Psi_p^* \vec{\sigma} \Psi_n) \cdot (\Psi_{e1}^* \vec{\sigma} \Psi_j)$ representa:

$$(\Psi_p^* \vec{\sigma}_1 \Psi_n) \cdot (\Psi_{e1}^* \sigma_1 \Psi_j) + (\Psi_p^* \sigma_2 \Psi_n) \cdot (\Psi_{e1}^* \sigma_2 \Psi_j) + (\Psi_p^* \sigma_3 \Psi_n) \cdot (\Psi_{e1}^* \sigma_3 \Psi_j)$$

Sempre que aparecer um produto de parêntesis desse tipo, com operadores vetoriais (ou com índices $\mu \dots$) entre duas funções de onda em cada, sustende-se por esta expressão a soma dos produtos dos parentesis calculados para cada uma das componentes do vetor (ou índices da matriz).

As funções de onda das partículas, no caso relativístico, são "spinóres" a quatro componentes, isto é, são quatro funções que se transformam de maneira determinada numa mudança de coordenadas. Elas exprimem a situação de spin da partícula correspondente (por exemplo se tôdas, menos a primeira componente, se anulam, a componente σ_3 vale + 1). Os operadores de spin agem "misturando" as diferentes componentes (trocam a primeira pela segunda, por exemplo, etc). Estes operadores podem ser obtidos a partir das matrizes a quatro linhas e quatro colunas de Dirac, γ^μ , $\mu = 1, 2, 3, 4$.

No caso não relativístico, o número de componentes das funções se reduz a dois. Os operadores obtêm-se então a partir das matrizes de duas linhas e duas colunas de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Para a definição e propriedades d'estes operadores (por exemplo,

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = i\sigma_3$; $\alpha_i \alpha_j = \delta_{ij} = i\sigma_k$, k, j, i , sendo permutações cíclicas de 1, 2, 3; $\delta_\mu \delta_\nu - \delta_\nu \delta_\mu = 0$, etc.) veja por exemplo o artigo de Pauli sobre mecânica quântica, no Handbuch der Physik.*

De conformidade com o uso geral da teoria dos spinóres de Dirac usaremos em vez de Ψ^* , o chamado spinor a quatro componentes adjunto de Ψ :

$$\bar{\Psi} = \Psi^* \gamma_4$$

* Handbuch der Physik, Vol 24, 1ª parte, 2ª edição, pag. 220.

Vamos procurar as combinações invariantes, relativísticas, entre as funções de onda das partículas leves e das pesadas, que contêm operadores de spin. Para isso se pode mostrar que os números (não spinores) abaixo discriminados, são caracterizados matematicamente da seguinte maneira:

$\Psi^\dagger \Psi$ é um escalar.

$\Psi^\dagger \gamma^\mu \Psi$, $\mu = 1, 2, 3, 4$, são as componentes de um quadri-vetor;

$i \Psi^\dagger \gamma^\mu \gamma^\nu \Psi$, $\mu \neq \nu$, são as componentes de um quadri-tensor anti-simétrico,

$\Psi^\dagger \gamma^5 \gamma^\mu \Psi$, são as componentes de um quadri-vetor axial (pseudo-vetor),

$\Psi^\dagger \gamma^5 \Psi$ é um pseudo-escalar

Dai conclui-se que as possibilidades para o elemento de matriz, que satisfazem aos requisitos de invariância relativística, são os seguintes:

Escalar	S.....(1) (1)
Vetorial	V.....(γ_μ) (γ_μ)
Tensorial	T..... $\frac{1}{2}$ ($\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu$) . ($\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu$)
Ps. vetor	PV.... ($\gamma_5 \gamma_\mu$) ($\gamma_5 \gamma_\mu$)
Ps. Escalar	PS.... (γ_5) (γ_5)

(Os operadores nos parêntesis realmente devem estar entre duas funções de onda Ψ^\dagger e Ψ , os das pesadas no 1^o e os das leves no 2^o , e a integral sôbre o volume deve ser feita).

Escrevendo as funções de onda no núcleo no estado inicial como U e V, a do eletrôn como ψ e a do neutrino como φ , os cinco elementos de matriz na forma tri-dimensional (apropriada para posterior aproximação não relativística ficam:

S	$(V^\dagger_\beta U) (\psi^\dagger_\beta \varphi)$
V	$(V^\dagger U) (\psi^\dagger \varphi) - (V^\dagger \vec{\alpha} U) (\psi^\dagger \vec{\alpha} \varphi)$
T	$(V^\dagger_\beta \vec{\sigma} U) (\psi^\dagger_\beta \vec{\sigma} \varphi) - (V^\dagger_\beta \vec{\alpha} U) (\psi^\dagger_\beta \vec{\alpha} \varphi)$
PV	$(V^\dagger \vec{\sigma} U) (\psi^\dagger \vec{\sigma} \varphi) - (V^\dagger \gamma^5 U) (\psi^\dagger \gamma^5 \varphi)$
PS	$(V^\dagger_\beta \gamma^5 U) (\psi^\dagger_\beta \gamma^5 \varphi)$,

com $\vec{\alpha}$ e β dados por: $\gamma_1 = \beta \alpha_1, \gamma_2 = \beta \alpha_2, \gamma_3 = \beta \alpha_3, \gamma_4 = \beta$.

Há ainda uma outra possibilidade. O neutrino tem função de onda pseudo-escalar, e no seu elemento de matriz deve ser inserido um fator γ^5 extra. Nenhum caso destes, porém, pode ser combinado com algum dos casos anteriores. Deixaremos de considerar esta possibilidade. Qualquer combinação linear entre estas cinco interações também é permitida e fornece novas possibilidades.

Como as partículas pesadas estão na região não relativística, precisamos das aproximações não relativísticas das expressões acima. As funções de onda do neutron e do proton se reduzem então a spinores de duas componentes, e os operadores de spin, a matrizes de duas linhas e duas colunas (funções dos operadores σ de Pauli). Chamando de v e M a velocidade e a massa do neutron (1) e proton (2), e p_1 e p_2 os operadores (\hbar/i) grad.₁, (\hbar/i) grad.₂, que agem sobre as suas funções de onda, as expressões não relativísticas dos operadores de spin, corretas até a ordem v/c do termo principal (por exemplo $\beta = 1 +$ termos de ordem $(v/c)^2$), são as seguintes:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ \beta &= 1 \\ \vec{\alpha} &= (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / 2Mc + i \vec{\sigma} \wedge (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) / 2Mc \\ \beta \vec{\sigma} &= \vec{\sigma} \\ \beta \vec{\sigma} &= \vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / 2Mc + i \vec{\sigma} \wedge (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / 2Mc \\ \vec{\sigma}_1 &= \vec{\sigma} \\ \gamma^5 &= \vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / 2Mc \\ \beta \gamma^5 &= \vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) / 2Mc \end{aligned}$$

Nota-se que, para o caso da desintegração beta,

$$(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) / 2M = (\vec{p}_{e1} + \vec{p}_\nu) / 2M \approx m/M$$

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / 2M \approx (v/c)_{\text{nucleons}}$$

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) / 2M = (\hbar \vec{k} - \hbar \vec{R}) / \hbar \approx E/R / \hbar$$

onde E é a energia liberada na reação.

$(v/c)_{\text{nucleons}}$ é em geral da ordem de 1/10 (pois $(v/c)^2 = mv^2/Mc^2 = \frac{2E_{\text{cin}}}{Mc^2} = 40/931$), isto é, da ordem do primeiro termo do desenvolvimento da exponencial e $(1/\hbar) \vec{Q} \cdot \vec{R}$ onde $\vec{Q} = \vec{p}_{e1} + \vec{p}_\nu = p_u - \vec{p}_p$. Os termos desta ordem, provenientes das transições permitidas, produzem, pois, efeitos de mesma intensidade que os já proibidos, e são por isso chamados "proibidos relativisticamente". Além disso, como eles contêm o momento do elétron e do neutrino, produzem um espectro diferente do permitido. A parte do elemento de matriz que envolve $\vec{Q} \cdot \vec{R}$, proveniente do desenvolvimento da exponencial, é chamada "gradiente-primeiro-proibido".

Reunimos numa tabela as contribuições: permitida, relativístico-primeiro-proibidas (2ª coluna) e gradiente-primeiro-proibidas (3ª coluna) para as cinco possibilidades dos elementos de matriz (na última coluna usou-se $\vec{Q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{p}_{e1} + \vec{p}_\nu$)

	Permitidas	relativístico-primeiro-proibidas	Gradiente-primeiro-proibidas
S	$(V^* 1 U) (\Psi^* 1 \Psi)$	0	$(V^* 1 \vec{Q} \cdot \vec{R} U) (\Psi^* \Psi)$
V	$(V^* 1 U) (\Psi^* 1 \Psi)$	$(V^* \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2Mc} U) (\Psi^* \vec{\alpha} \Psi)$	$(V^* 1 \vec{Q} \cdot \vec{R} U) (\Psi^* \Psi)$
T	$(V^* \vec{\sigma} U) (\Psi^* \vec{\sigma} \Psi)$	$(V^* \vec{\sigma} \wedge \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{2Mc} U) (\Psi^* \vec{\alpha} \Psi)$	$(V^* i \vec{\sigma} \cdot (\vec{Q} \cdot \vec{R}) U) (\Psi^* \vec{\sigma} \Psi)$
PV	$(V^* \vec{\sigma} U) (\Psi^* \vec{\sigma} \Psi)$	$V^* \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{2Mc} U (\Psi^* \gamma_5 \Psi)$	$(V^* i \vec{\sigma} \cdot (\vec{Q} \cdot \vec{R}) U) (\Psi^* \vec{\sigma} \Psi)$
PS	0	0 em ordem v/c em ordem v/M $\frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)}{2Mc} (\Psi^* \beta \gamma_5 \Psi)$	

Note-se que $(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/2Mc$ e $(\vec{Q} \cdot \vec{R})/\hbar$ são da mesma ordem de grandeza, pois

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)/2Mc = (\vec{h}\vec{K} - \vec{h}\vec{H})/\hbar = E \cdot \vec{R}/\hbar c \sim |Q| R/\hbar, \text{ pois } c|Q| \sim E$$

relativístico-primeiro-proibidas e gradiente-primeiro-proibi-

das se podem, pois, combinar de uma forma que depende do tamanho relativo dos elementos de matriz correspondentes, isto é, do núcleo e contribuir simultaneamente para as transições primeira-proibidas. Também produzem as mesmas regras de seleção. Cada um produz um espectro de forma diferente, de modo que a forma do espectro final não é a única, mas depende de como os dois aparecem combinados.

Calculando-se, com estes elementos de matriz, a distribuição angular do elétron (ângulo do elétron em relação ao neutrino = θ), obtém-se para o caso das transições permitidas:

S	$1 - \cos \theta$
V	$1 + \cos \theta$
T	$1 + (\cos \theta) / 3$
PV	$1 - (\cos \theta) / 3$

A média sobre todas as direções do espaço é a mesma para todos eles, isto é, 1.

Vamos examinar agora as regras de seleção produzidas pelos operadores de spin, isto é, as relações que devem haver entre a paridade e o momento angular total do núcleo, nos estados inicial e final, para que o elemento de matriz do operador em questão, entre os referidos estados, seja diferente de zero, e invariante por alguma mudança de coordenadas.

Paridade e momento angular são propriedades que caracterizam um sistema quântico isolado, pois elas se conservam. Se procuramos a função de onda num novo sistema de coordenadas obtida por inversão espacial do antigo, isto é, $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$, então verifica-se que a nova função de onda só pode diferir da primitiva por um sinal *. Se este for positivo, a paridade (intrínseca) é chamada par, caso contrário ímpar. Um vetor axial é um exemplo de uma grandeza par (é do tipo $A \wedge B$). Por exemplo, momento angular orbital e intrínseco $\vec{\sigma}$; na passagem de sistema levógiro, para dextrógiro sua direção no espaço se inverte, mas o sinal de suas componentes permanece o

* Veja por exemplo R. Feynman, "fenômenos nucleares e mesônicos a altas energias" apostilha e curso dado no C.B.P.R. no 2º semestre de 1951, pag.6.

mesmo. Se a hamiltoniana de interação contiver um operador par, seu elemento de matriz só será diferente de zero entre dois estados de mesma paridade.

Regras de Seleção produzidas por alguns dos operadores:

- a) β age como um escalar, e, como este, produz transições: $\Delta I = 0$, "Não"
- b) χ_5 é pseudo escalar (muda de sinal por inversão espacial). Produz transições $\Delta I = 0$, "Sim"
- c) $\vec{\sigma}$ é par mas produz uma superposição das funções de onda. Sob sua ação resulta $\Delta I = 0, \pm 1$ "Não", e as transições $\Delta I = 0$ proibidas. Esta é a chamada regra de seleção de Gamow-Teller (G.T.):

$$\Delta I = 0, \pm 1 \quad \text{"Não"}$$

$0 \rightarrow 0$ proibida

$\vec{\alpha}$ e \vec{r} são vetores polares. Eles contribuem para as transições proibidas, como veremos, com as regras de seleção:

$$\Delta I = 0, \pm 1 \quad \text{"Sim"}$$

$0 \rightarrow 0$ proibida

Vetores (exemplo: $\vec{\sigma}, \vec{\alpha}, \vec{r}$) produzem $\Delta I = 0, \pm 1$, como vamos mostrar para o caso de \vec{r} . O elemento de matriz de \vec{r} entre duas funções de onda de momentos angulares orbitais definidos l e l' , de componentes na direção de eixo dos z , m e m' , é

$$\vec{M} = \int \Psi_f^* \vec{r} \Psi_i d^3 v$$

onde, em coordenadas polares, Ψ_f e Ψ_i têm a dependência angular do tipo:

$$P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

onde $P_l^m(\cos \theta)$ são polinômios de Legendre. As componentes de \vec{r} , por exemplo $(\vec{r})_z = r \cos \theta = P_1(\cos \theta)$, também são polinômios de Legendre. É uma propriedade matemática dos polinômios de Legendre que, para que

a integral sobre os ângulos não seja nula, é necessário que $m = m'$, $l' = l \pm 1$, ou l , o que fornece a regra de seleção do ΔI desejada. Pode-se lembrar esta propriedade notando que \vec{r} , assim como qualquer outro operador vetorial, se comporta, na integral sobre os ângulos, como uma partícula de spin 1, que, somada ao momento angular do estado inicial, dá os possíveis momentos angulares do estado final. Quando, por exemplo, o momento angular do estado inicial é zero, o do final só pode ter um valor, que é 1.

A análise da mudança de paridade (total) da função inicial para a final é independente da variação do momento angular. No nosso exemplo, como \vec{r} é uma função das coordenadas, de paridade total = = paridade orbital = ímpar, para que o elemento de matriz não mude de sinal por uma inversão espacial do sistema de coordenadas (x em $-x$, y em $-y$, z em $-z$), é necessário que o estado final tenha paridade total diferente da do estado inicial.

Portanto as regras de seleção para este elemento de matriz são: $\Delta I = \pm 1, 0$, ($0 \rightarrow 0$ proibida) "Sim".

As regras de seleção para os diferentes casos encontram-se reunidas na Tabela I.

TABELA I

	Permitidas	Primeiro-proibidas
S S V	$\Delta I = 0$ "Não" (permi)	$\Delta I = \pm 1, 0$ "Sim" $0 \rightarrow 0$ proibida
T PV	$\Delta I = \pm 1, 0$ "Não" $0 \rightarrow 0$ proibida (Gamow-Teller)	$\Delta I = \pm 2, \pm 1, 0$ "sim" $0 \rightarrow 0$ $1/2 \rightarrow 1/2$ proibida $1 \leftrightarrow 0$

ΔI é a variação do momento angular total do núcleo depois da emissão β . "Não" ou "Sim" respectivamente, significam que a paridade do

núcleo não se alterou, ou se alterou.

A seguinte análise física nos permite compreender a razão das regras de seleção para os diferentes tipos de transição. Baseia-se no fato de que, por conservação do momento angular total o momento angular levando pelo elétron e pelo neutrino corresponde à variação do momento angular ΔI do núcleo.

Como os comprimentos de onda do elétron e do neutrino são bem maiores que as dimensões r_A do núcleo, o momento angular orbital do elétron em relação ao do neutrino pode ser tomado igual a zero. Mas a soma dos momentos angulares orbitais do neutrino e do elétron, em relação ao do núcleo pode ser: zero (transições permitidas), um (primeiro-proibições), dois (segundo-proibições) etc.

A paridade do estado do elétron e neutrino é dada pelo momento angular orbital. Se l é par, a paridade é par e então o núcleo não pode mudar a paridade, se l é ímpar, o núcleo tem que mudar a paridade.

As regras Gamow-Teller correspondem spin total = 1 e às regras de Fermi os casos de spins anti-paralelos (spin total nulo). Por exemplo, no caso das transições permitidas (momento orbital nulo) e regra Gamow-Teller (spin total = 1) o elétron e o neutrino devem ter um momento angular total = 1. Consequentemente, $\vec{\Delta} I = 1$, e o spin do núcleo pode variar de 1, -1, 0 (este último caso acontecendo quando o spin nuclear só varia em direção). No caso em que o spin do núcleo inicial é zero, o spin final não pode ser zero porque $\Delta I =$ Estes resultados estão resumidos na Tabela II.

TABELA II

Transição	Momento angular orbital $l + \nu$	Spins $s_1 + s_2$	Momento ang. total $l + \nu$	Mudança de paridade do Núcleo	Regras de seleção do Núcleo	
Permitidas	$l = 0$	$\uparrow\downarrow$	0	"Não"	$\Delta I = 0$	
	$l = 0$	$\uparrow\uparrow$	1	"Não"	$\Delta I = 1, 0, -1$ $0 \rightarrow 0$ proibidas	
Primeiro proib.	$l = 1$	$\uparrow\downarrow$	1	"Sim"	$\Delta I = 1, 0, -1$ $0 \rightarrow 0$ proibidas	
	$l = 1$	$\uparrow\uparrow$	2	"Sim"	$\Delta I = \pm 2, \pm 1, 0$ $0 \rightarrow 0$ $1 \rightarrow 0$ $1/2 \rightarrow 1/2$	
			1	"Sim"		$\Delta I = \pm 1, 0$ $0 \rightarrow 0$ proibidas
			0	"Sim"		$\Delta I = 0$
Segundo proib.	$l = 2$	$\uparrow\downarrow$	2	"Não"	$\Delta I = \pm 2, \pm 1, 0$ $0 \rightarrow 0$ $1 \rightarrow 0$ $1/2 \rightarrow 1/2$	
	$l = 2$	$\uparrow\uparrow$	3, 2, 1	"Não"		$\Delta I = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$ $0 \rightarrow 0$ Proib.

III, 5 Espectros proibidos

Reconhecem-se pelas regras de seleção, pela forma do espectro e pelo valor de fT da vida média correspondente, que deve ser maior que 10^3 .

De (III, 4) resulta que fT é inversamente proporcional ao quadrado do elemento de matriz. Como se espera, teoricamente, que este diminua de um fator 100 cada vez que aumentamos o grau de proibição de um, esperamos que fT para as transições 1^o proibidas seja

100 vezes maior que o das permitidas, etc. Tomando o elemento de matriz M daquela fórmula como igual a um para as transições permitidas, obtém-se para constante de interação G um valor da ordem de 10^{-49} ergs cm^3 , e para fT um valor da ordem de 1000. Espera-se pois, para as primeiro-proibidas, um valor $10^5 - 10^6$. Os valores experimentais começam em 10^6 mas podem ser muito maiores, como veremos em IV, 4, onde são tabulados os valores de fT conhecidos. Além disso eles ficam agrupados de certa maneira ainda não explicada até hoje.

A forma do espectro não é única, em geral. Depende das combinações lineares e portanto das interferências dos diferentes elementos de matriz que permitem estas transições, mas cujos espectros são diferentes. Por exemplo, a transição primeiro-proibida $\Delta I = 1$, "sim" pode ser obtida pela interação vetorial da parte que contém o operador α (independente praticamente de \vec{p}_{e1} e \vec{p}_ν) e cujo espectro é o mesmo que o das transições permitidas, ou pode ser obtida pelo elemento de matriz que contém $\vec{Q} \cdot \vec{R}$, cujo espectro é bem diferente, pois $\vec{Q} = \vec{p}_{e1} + \vec{p}_\nu$ depende dos momentos do elétron e neutrino. A proporção com que as duas aparecem misturadas depende das propriedades do núcleo, e não pode ser prevista teoricamente, e, conseqüentemente, também a forma do espectro.

Há casos, porém, de espectros proibidos de forma univocamente determinada (teoricamente). São os casos das regras de seleção Gamow-Teller (T ou PV) em que a variação do momento angular do núcleo, ΔI , é uma unidade maior que o grau de proibição F , por exemplo: primeiro-proibida, $\Delta I = 2$, "Sim", pois então, a variação de momento angular orbital é de r ($r = 1$ no exemplo); os spins do elétron e neutrino são paralelos ao momento orbital. A variação de momento angular total levada pelo elétron e neutrino é portanto a máxima. Os elementos de matriz relativístico-proibidos (veja pg. 73) não contribuem, portanto, a transição sendo devida a alguma parte de $O_p (\sigma) (\vec{Q} \cdot \vec{R})^r$. Vamos mostrar que o elemento de matriz que pode contribuir é um só, e vamos determiná-lo.

O raciocínio é o seguinte: vamos escolher a direção de eixo dos z na direção da variação $\Delta I = r + 1$ do momento angular total da função de onda nucleônica (ou elétron mais neutrino). Em coordena-

das polares $(r, \theta), \varphi$; $x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi \dots$) a dependência de φ da função de onda que tem componente do momento angular m na direção do eixo dos z é, como se sabe, $e^{im\varphi}$.

A dependência do elemento de matriz em φ será, portanto,

$$\int e^{-im'\varphi} Op(\varphi) e^{im\varphi} d\varphi$$

onde $m-m'$ é a variação da componente, na direção do eixo dos z , do momento angular entre os estados inicial e final do núcleo, a qual deve ser igual a $r + 1$. Queremos determinar a forma do operador Op que consegue operar esta transição. Sua dependência em φ deve ser $\exp[-i(m-m')\varphi] = \exp i(r+1)\varphi$, para que o elemento de matriz não seja nulo. Lembramos que, se v_x e v_y são as componentes na direção de x e y de qualquer vetor, sempre se pode escrever:

$$v_x + iv_y = |v| e^{i\varphi}.$$

Como o momento angular intrínseco varia de uma unidade, a forma do operador de spin deve ser

$$\sigma_x + i\sigma_y.$$

Lembrando que $(\vec{Q} \cdot \vec{R})^F$ pode ser escrito sob a forma:

$$(\vec{Q} \cdot \vec{R})^F = \left[Q_z \cdot z + \frac{1}{2} (Q_x - iQ_y) (x + iy) + 1/2 (Q_x + iQ_y) (x - iy) \right]^F,$$

para que a variação no momento angular orbital, componente z , seja a máxima (igual a F), só a parte

$$(Q_x - iQ_y) (x + iy) = -(Q_x - iQ_y) \cdot \rho \cdot e^{i\varphi}$$

pode contribuir no desenvolvimento de $(\vec{Q} \cdot \vec{R})^F$, para que o resultado dependa de φ como $\exp(i\varphi)$. Conhecemos, pois, a forma do elemento de matriz:

$$\begin{aligned} & \int \psi_f^* (\sigma_x + i\sigma_y) (Q_x - iQ_y)^F (x + iy)^F \psi_i d^3 v = \\ & = (Q_x - iQ_y)^F \int \psi_f^* (\sigma_x + i\sigma_y) (x + iy)^F \psi_i d^3 v, \end{aligned}$$

onde a integral representa uma constante, independente do momento Q , e que, portanto, não interessa para obter a forma do espectro. O quadrado do elemento de matriz vale, pois:

$$M^2 = \text{cmte.} (Q_x - iQ_y)^F (Q_x + iQ_y)^F = \text{cmte.} (|Q| \sin \theta)^{2F},$$

obtida com o auxílio de

$$Q_x \pm iQ_y = Q \sin \theta e^{\pm i\psi},$$

em que θ é a direção, em relação ao eixo dos z , do vetor $\vec{p}_\nu + \vec{p}_{e1}$. Como esta é arbitrária, tiramos a média do elemento de matriz sobre todas as suas direções, e obtemos, a menos de constantes,

$$|Q|^{2F} = [(\vec{p}_\nu + \vec{p}_{e1})^2]^F = [p_\nu^2 + p_{e1}^2 + 2p_{e1} p_\nu \cos \phi]^F.$$

ϕ agora é o ângulo entre as direções de emergência do eletrón e do neutrino. Como queremos o espectro na energia do eletrón, só importa o módulo dos momentos do eletrón e neutrino, de modo que devemos tirar a média sobre todas as direções relativas dos dois, para obtermos a expressão final do elemento de matriz.

Lembrando que a média sobre θ de qualquer função $f(\theta)$ é dada por

$$\bar{f} = \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta \, d\theta \cdot \left(\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right)^{-1}$$

obtemos:

$$\overline{\cos \theta} = 0, \quad \overline{\cos^2 \theta} = 1/3, \quad \overline{\cos^4 \theta} = 1/5, \text{ etc.}$$

As expressões para alguns D_F são, portanto, as seguintes:

$$D_1 = p_{e1}^2 + p_\nu^2 = (\epsilon^2 - 1) + (\epsilon_0 - \epsilon)^2 \quad (I = 2, \text{ "sim"})$$

$$D_2 = p_{e1}^4 + \frac{10}{3} p_{e1}^2 p_\nu^2 + p_\nu^4 \quad (I = 3, \text{ "não"})$$

$$D_3 = p_{e1}^6 + 7 p_{e1}^4 p_\nu^2 + 7 p_{e1}^2 p_\nu^4 + p_\nu^6 \quad (I = 4, \text{ "sim"})$$

D_F são os fatores por que devem ser multiplicados os espectros permitidos para se obter a forma do espectro único proibido F , correspondente à transição $\Delta I = F + 1$. ϵ e ϵ_0 representam, em unidades de

$m_e c^2$, a energia e a energia máxima do elétron emitido.

Note. que a forma do elemento de matriz:

$$(Q_x - i Q_y)^n$$

para esta transição poderia ter sido "adivinhada" logo de início, lembrando que o momento angular orbital do conjunto elétron mais neutrino (em relação ao núcleo) é igual à variação do momento angular orbital do núcleo, isto é, r . Mas calculando no espaço dos momentos, a função de onda deste conjunto deve ter a dependência $(Q_x - iQ_y)^n$, se a componente na direção de z do momento angular orbital deve ser r , (mesmo motivo por que era $x + iy$ no caso anterior).

Estas previsões estão de acordo com muitos resultados experimentais. Por exemplo: K^{40} , $\Delta I = 4$, o espectro é dado por D_3

B^{10} , $\Delta I = 3$; o espectro é dado por D_2 (segundo-proibida) e ainda 11 outros casos* para os quais ΔI parece ser 2, e cujos espectros são do tipo D_1 . Segundo o modelo das camadas, estes 11 casos devem ter mudança angular orbital de 1, e mudança de paridade. Isto indica que as regras de seleção para estes 11 casos seriam G-T, primeiro-proibidas, e a interação, ou tensorial ou vetor axial.

Vamos apontar algumas dificuldades, por exemplo o Cl^{36} apresenta um espectro do tipo D_2 , mas a transição é $\Delta I = 2$, (segundo-proibida). Não se encontrou até agora uma combinação linear das diferentes interações possíveis que dê a forma do espectro do Cl^{36} . São necessários outros casos de espectro não único para se obter melhor idéia da combinação linear necessária.

O sucesso de teoria da desintegração β é, até agora, devido somente aos fatores estatísticos (tipo densidade de estados por intervalo de energia) e não dá nenhuma informação sobre o mecanismo da desintegração.

Há casos de núcleos do tipo par-ímpar que decaem nos seus núcleos especulares ímpar-par, apresentando transição super-permitida. Os seus valores de fT têm logaritmos compreendidos entre 3.3 e 3.6 (há uns 20 deles). Por que as desintegrações entre os não especu-

* C. Wu. Rev. Mod. Phys. 22, 395

lars têm $\log_{10} fT$ da ordem de 5, isto é, diferem dos outros por um fator da ordem de 10^2 . Ou seja, por que os elementos de matriz são menores por um fator que varia entre 10 e 15? É o caso de $H^3 \rightarrow H_e^3$, por exemplo. A transição é $\Delta I = 0$, "Sim", permitida. Uma possível razão é que nas transições dos núcleos não especulares as funções de onda inicial e final não se superpõem tão bem como no caso das transições de núcleos especulares.

O único caso de transição não especular que é super-permitida é o do $H_e^6 \rightarrow L_1^6$. Ai $\log fT \approx 2.71$. O spin de L_1^6 é 1, o do H_e^6 muito provavelmente é zero. Os prováveis estados dos protons e neutrons nestes núcleos podem ser representados no esquema da fig. III,4. Em ambos os núcleos, os dois "primeiros" protons e os dois "primeiros" neutrons devem estar no estado S. No H_e as duas partículas restantes são neutrons, em estado p, spins opostos. No Li elas são neutron e proton, de spins paralelos. Por que o valor de fT para H_e^6 , que é 590, é tão baixo comparado com o do neutron (ao se desintegrar em proton) que é 1000 (ordem das transições super-permitidas)? Será que as funções de onda das duas partículas em que diferem os núcleos de H_e e L_1 se superpõem melhor que as de neutron e proton na desintegração do neutron livre? O problema é pôr sua forma matemática, as diferenças entre os núcleos, para explicar as diferenças entre os elementos de matriz.

CAPITULO IV

Estrutura Nuclear

IV, 1. Modelo das Camadas

Os núcleos apresentam certas periodicidades nas energias de ligação, momentos magnéticos e spins. Por exemplo, os núcleos contendo 2, 8, 20 (28) 50, 82, 126, (números mágicos) neutrons ou protons, apresentam energia de ligação especialmente forte, e, nas vizinhanças destes números, ocorrem também pronunciadas irregularidades de spins. O fato de que estas propriedades dos núcleos se repetem à medida que o número de protons e neutrons aumenta, leva à ideia de que os nucleons se associam de maneira periódica na construção do núcleo, isto é, que formam camadas.

Já houve várias tentativas de fazer um modelo do núcleo baseado nesta ideia. Consistem em atribuir empiricamente certas propriedades aos nucleons expressas sob forma de leis ou regras a que as propriedades que daí resultem (spin, momento magnético, paridade, estados excitados, diferença de energia de ligação com os núcleos vizinhos, etc.), estejam de acôrdo com a experiência.

Temos por objetivo neste capítulo, expor o modelo das camadas de M. G. Mayer^{**}. Primeiro daremos as regras (que são empíricas), e, no parágrafo seguinte, faremos a comparação com a experiência.

A ideia do modelo das camadas é a seguinte; supõe-se que a cada nucleon no núcleo podem ser atribuídas estados bem definidos.

*Haxel, Jensen, Suesen, Suess, Phys. Rev. 75, 1766(1949)

** M. G. Mayer, Phys. Rev. 78, 16, (1950)

As energias, momentos angulares, etc., destes estados são prescritos por regras que daremos a seguir (regras 1). O núcleo é construído então pela adição sucessiva dos nucleons, cada um ocupando o seu estado previsto pelas regras dadas.

Os estados que o nucleon a ser adicionado pode assumir, são os de uma partícula isolada dentro de um poço de potencial, cuja forma está entre a de um poço de potencial quadrado e a de um oscilador harmônico tridimensional isotrópico, com acoplamento, entre spin e órbita, especial. À medida que o número de partículas já existentes no núcleo vai aumentando, os estados deste poço, em que a partícula adicional pode cair, são os estados cada vez mais excitados do mesmo. Em parte, devido à separação (quanto à energia) dos estados em consequência do forte acoplamento spin-órbita (da ordem de 2 meV para A médio), os níveis se agrupam em regiões de energias mais ou menos separadas e, sempre que todos os estados de uma região estão cheios, uma camada se fecha e outra começa.

Depois de dadas as regras sobre as órbitas ou estados dos nucleos individuais contidos na "última" camada (ainda não fechada), dão-se as regras (regra 2) sobre a maneira com que estas órbitas se devem acoplar e produzir as propriedades do núcleo todo.

Parece, pois, que cada nucleon dentro do núcleo ocupa um dos estados daquele poço de potencial, os quais, consequentemente, são chamados "órbitas das partículas individuais" (single particle orbits). O agrupamento destes níveis em camadas explica, portanto, a existência das variações periódicas acima enumeradas, em função do número de massa A.

Regras

As posições dos estados estacionários (isto é, suas energias) obtêm-se a partir dos níveis de um poço quadrado de potencial, modificados pelo acoplamento forte que se supõe existir entre o spin e a órbita deste estado (regra 1a) e que para números quânticos elevados torna irreconhecíveis as posições dos níveis originais do poço.

A tabela III contém os estados estacionários em ordem crescente de energia. Na primeira coluna são dados os níveis do poço quadrado de potencial: 1, 2.... representam o número de vezes que determinada órbita já apareceu: s, p, d, f, denotam os momentos angulares orbitais, respectivamente 0, 1, 2, 3.... Os índices $\frac{1}{2}$ 3/2, 5/2... são os valores do momento angular total ($j = s + l$) do estado individual. Os momentos angulares intrínseco, orbital e total do núcleo são denotados pelas letras maiúsculas S, L, I...

Na segunda coluna aparecem os níveis, levando-se em conta a separação adicional devida ao acoplamento spin-órbita (s,l) (introduzido empiricamente). As regras são as seguintes:

- 1a) A ordem, quanto a energia das órbitas das partículas individuais, é a dos níveis de um poço de potencial quadrado, com forte acoplamento spin-órbita, dando origem a doubletes invertidos.
- 1b) Para dado l , o nível $j = l + \frac{1}{2}$ tem invariavelmente energia mais baixa (energia de ligação maior) e será preenchido antes que o nível $l - \frac{1}{2}$.
- 1c) É possível, e acontece frequentemente, que níveis orbitais vizinhos (energéticamente) do poço de potencial se intersectem depois de modificados pelo acoplamento adicional spin-órbita. Por exemplo, d e s do poço de potencial já são próximos. Com o adicional acoplamento spin-órbita, $d_{5/2}$ pode aparecer com energia, menor (mais baixo, ou, mais fortemente ligado) que $s_{1/2}$. De modo que para êstes, indicados na tabela por retângulos, a ordem nem sempre é aquela indicada na tabela.

TABELA III

Poço quadrado	Poço quadrado com acoplamento spin-órbita	Número de estados	Número de estados por camada	Número total de estados
1s	1s _{1/2}	2	2	2
1p	1p _{3/2}	4	6	8
	1p _{1/2}	2		
1d	1d _{5/2}	6	12	20
	1d _{3/2}	4		
2s	2s _{1/2}	2		
1f	1f _{7/2}	8	8	28
	1f _{5/2}	6	22	50
2p	2p _{3/2}	4		
	2p _{1/2}	2		
1g	1g _{9/2}	10		
	1g _{7/2}	8	32	82
2d	2d _{5/2}	6		
3s	2d _{3/2}	4		
	3s _{1/2}	2		
1h	1h _{11/2}	12		
	1h _{9/2}	10	44	126
2f	2f _{7/2}	8		
	2f _{5/2}	6		
3p	3p _{3/2}	4		
	3p _{1/2}	2	14	126
	1i _{13/2}	14		
1i	1i _{11/2}	12		

- 2) Número par de nucleons idênticos na mesma órbita j sempre se acoplam de tal maneira a darem $J = 0$ (spin total zero) e momento magnético total nulo.
- 3) Número impar de nucleons idênticos na mesma órbita j se acoplam de maneira que $J = j$, e momento magnético total igual ao momento magnético de uma única partícula neste estado.
- 4) Para um dado núcleo, a energia de associação em pares de nucleons na mesma órbita é maior para órbitas com maior j .

Estas regras são muito bem obedecidas pelos núcleos. Há somente 2 a 3 exceções.

Existe certa justificação teórica para alguns das regras. A razão para a regra 1a é desconhecida. A razão para a regra 2 é a superposição de onda: quando dois j se somam, êles não podem estar perfeitamente alinhados, segundo o modelo vetorial (spins opostos podem); as suas funções de onda não podem, pois superpor-se tão bem quanto no caso de spins (j) opostos (a superposição está ligada ao alinhamento dos j). A regra 3 torna-se desta forma compreensível, pois, entre o número impar dos nucleons, um número par se associa dando $J = 0$, sobrando o último, cujo spin e momento magnético determinam os do núcleo todo. A regra 4 também fica razoável pois quanto maior o momento angular orbital, tanto mais bem definida no espaço fica a função de onda correspondente, de modo que a superposição de duas delas pode melhorar.

Vamos fazer uma comparação experimental com os núcleos no próximo parágrafo. Como resultado de 2, todos os núcleos do tipo "par-par" têm spin e momento magnético zero. Êste lado tem sido sempre confirmado, até agora. Os núcleos dêsse tipo dão evidência do modelo das camadas. O momento magnético pode ser obtido experimentalmente por vários processos*: desvio direto de feixes atômicos ou moleculares num campo magnético (tipo experiência de Stern-Gerlach); método da indução nuclear num campo magnético, medida pela ressonância com um campo fraco transversal, oscilante; ou ainda, aproximadamente, pela estrutura hiperfina, e alternância da intensidade do espectro de faixas

* Fermi, Nuclear Physics, University of Chicago Press, 2^o ed. Pg. 12

da molécula diatômica correspondente.

Pode-se deduzir a paridade, e portanto o momento angular orbital a partir das linhas de Schmidt*. Elas representam o valor teórico do momento magnético em função do momento angular J . Para cada J há dois valores de momento magnético: um para o caso em que o spin é paralelo ao momento orbital, $l = J - 1/2$ e o outro para $l = J + 1/2$ (spin antiparalelo a l). Os valores experimentais caem de fato perto destas duas linhas, de modo que o l e portanto a paridade, ficam determinados com razoável segurança.

A desintegração beta permite confirmar os valores do momento angular total e paridade dos núcleos, pois como vimos, as regras de seleção, que podem ser conhecidas estudando-se o caráter da desintegração, dependem do momento angular e paridade dos núcleos inicial e final. Em IV, 3 estudaremos a contribuição das desintegrações beta ao conhecimento da estrutura nuclear.

IV, 2. Descrição dos Núcleos

Vamos determinar o estado, para cada núcleo, segundo as regras do Modelo das Camadas, e comparar os valores do spin, assim obtidos, com a experiência. Não trataremos dos núcleos "par par" pois seus spins e momentos magnéticos são nulos.

Núcleos Par-Ímpar

Entre parêntesis seguindo-se ao símbolo do elemento, indicaremos o estado da "última" partícula, cujo spin e momento magnético devem ser o de todo o núcleo.

Números de nucleons de 1 a 19

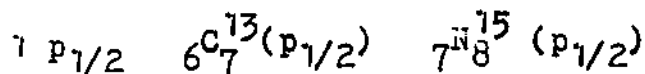
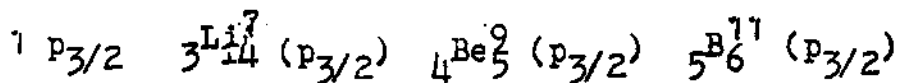
De ${}^1_1\text{H}^1$ a ${}^{16}_8\text{O}^{16}$ a sequência dos níveis: $s_{1/2}$, $p_{3/2}$, $p_{1/2}$, é verificada. Por exemplo:

${}^1_1\text{H}^1 (s_{1/2})$

${}^2_1\text{H}^2 (s_{1/2})$

${}^3_2\text{He}^3 (s_{1/2})$

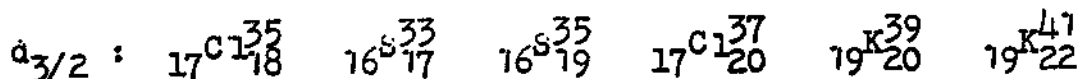
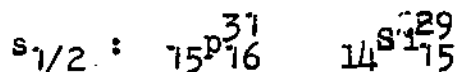
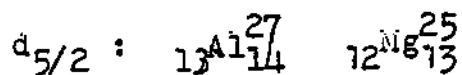
* Zeits f. Phys. 106, 558 (1937)



A primeira discrepância aparece para 9F_{10}^{19} . Seu estado deveria ser $d_{5/2}$, mas é $s_{1/2}$. Outra séria discrepância é a do 11Na_{12}^{23} . Seus 3 últimos protons deveriam estar em $(d_{5/2})^3$, spin total $5/2$; ou $2 d_{5/2}$, $1 s_{1/2}$; $(d_{5/2})^2$, $s_{1/2}$, spin $1/2$. No entanto, experimentalmente, seu spin é $3/2$. O estado parece ser $p_{3/2}$.

A ordem dos níveis depois parece ser: $d_{5/2} \quad s_{1/2} \quad d_{3/2}$.

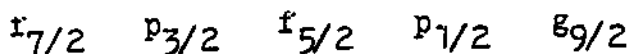
Por exemplo:



Números de 21 a 50

Os próximos 8 passos são de spin $7/2$, com exceção do 25Mn_{30}^{55} , cujo spin é $5/2$, e para o qual se espera $(f_{7/2})^5$. Sómente os casos com Z impar foram medidos.

Depois de Z ou N = 28, a camada $17/2$ está completa, e de fato, não aparece mais o spin $7/2$. A ordem seguinte dos níveis (experimental) parece ser:



Os $p_{3/2}$ e $f_{5/2}$ se misturam, ou cruzam. Suas energias parecem ser bem próximas. Há incerteza na medida dos spins para estes núcleos (29 a 38). São todos de spin $3/2$ com exceção do 37Rb_{28}^{65} e 30Zn_{37}^{67} que têm spin $5/2$. Note-se que entre estes (29-37, $p_{3/2}, f_{5/2}$) há mais de 4

núcleos com spin $3/2$. Segundo a regra 4 isto pode ser explicado supondo que o estado do último nucleon impar é preferivelmente $p_{3/2}$, mas se se acrescentar outro, os dois vão em $f_{5/2}$ de modo que o seguinte impar pode ir novamente em $p_{3/2}$.

De 39 a 50 há competição entre $p_{1/2}$ e $g_{9/2}$. Outros spins diferentes destes não ocorrem. Nesta região aparecem muitos isômeros (formas excitadas do mesmo núcleo com vida média longa).

A sequência das órbitas para número impar de neutrons ou de protons, até 47, tem obedecido à mesma ordem quer para protons quer para neutrons. Depois ela se altera. Por exemplo Ag^{107} está num estado $p_{1/2}$, enquanto que ${}^{83}_{47}Kr$ é $g_{9/2}$.

Números de 51 a 82

Não aparecem spins $9/2$ como era de se esperar. O spin $11/2$ não aparece nos estados fundamentais (apesar do $h_{11/2}$ ser próximo aos anteriores $g_{7/2}$ a $s_{1/2}$) provavelmente devido à regra 4. Nos isômeros, porém, ele aparece frequentemente.

Para protons a ordem é:

$$g_{7/2} \quad d_{5/2} \quad d_{3/2} \quad s_{1/2}$$

Primeiro os $g_{7/2}$ ou $d_{5/2}$ são preenchidos alternadamente. O spin $3/2$ do ${}^{56}Ba$ não constitui discrepância. Depois, irregularidades parecem existir, provenientes, talvez, da ocorrência de $g_{11/2}$ que, substituindo pares das antigas camadas de $7/2$ ou $5/2$ já formadas, permite que estes apareçam de novo. O fim novamente é regular, com spins $3/2$ e $1/2$

Para neutrons, a ordem dos níveis é:

$$d_{5/2}, \quad g_{7/2}, \quad s_{1/2}, \quad d_{3/2}, \quad h_{11/2}$$

A situação não é muito clara.

Números de 83 a 126

Não há dados suficientes. Começa com $9/2$ e termina com $1/2$ como esperado.

Incluimos um quadro dos elementos até o Pt ordenados pelo

número ascendente de protons e agrupados em linhas para elucidar o preenchimento das camadas. O número em baixo de alguns elementos indica o spin medido do isótopo de número par de neutrons. Cada segundo núcleo sendo do tipo par-ímpar tem spin zero, mas foi incluído para maior clareza. O quadro é útil para mostrar a mistura que há no preenchimento dos níveis de energias vizinhas (como por exemplo os níveis $p_{3/2}$ e $r_{5/2}$), para mostrar a ocorrência da regra 4 e para localizar as exceções. (Tabela IV)

Isômeros

São núcleos excitados instáveis, com vida média muito longa, seus spins diferindo grandemente dos do núcleo estável (o que explica sua longa vida). Foram encontradas "ilhas" de isômeros, o que está de acordo com o modelo das camadas, quando órbitas energéticas vizinhas, mas de spins bem distintos, podem competir. Por exemplo, na região Z ou N = 39 a 50, as órbitas $g_{9/2}$ e $p_{1/2}$ fôr o estado fundamental de um núcleo par-ímpar contido nesta região, então existirá um estado excitado $g_{9/2}$ dêste núcleo, de energia muito próxima à do fundamental.

Foram encontrados 26 isômeros nesta região. Antes dela não deveriam aparecer isômeros. O único inesperado é o ${}_{35}\text{As}^{77}$ (${}_{20}\text{Ca}^{49}$ e ${}_{22}\text{Ti}^{51}$ que segundo Segré parecem ser isômeros, não o são segundo Goldhaber). Para a região de 63 a 81 há nova série de isômeros. Alí de fato espera-se competição entre $h_{11/2}$ e $s_{1/2}$. De 51 a 62 não há isômeros, como era de se esperar.

Os isômeros fornecem um forte teste do modelo das camadas, não somente quanto à região da tabela dos isótopos em que seu aparecimento é previsto, mas também quanto à natureza do raio gama emitido na ocasião da transição do isômero ao estado fundamental.* Se, por exemplo, a transição é do estado $g_{9/2}$ a $p_{1/2}$, há uma mudança de paridade, e de spin de 4. Isto corresponde a radiação de 2^4 pólo magnético, de ordem de múltiplo, $\Lambda = 5$, como mostra a tabela V.

E 1 e M 1 indicam dipólo elétrico e magnético, E 2 e M 2 o quadripólo, E 3 e M 3 octopólo, etc.

* Compare com Goldhaber e A. W. Sunyar. Phys. Rev. 83, 906 (1951)

TABELA V

	E1	M1	E2	M2	E3	M3	E4	M4	E5
ΔI	1	1	2	2	3	3	4	4	5
Mudança de paridade	sim	não	não	sim	sim	não	não	sim	sim
ordem do múltipolo (Λ)	1	2		3		4		5	

ΔI na tabela V representa o momento angular total levado pela luz. Este é dado pela variação vetorial (em direção e módulo, possivelmente) do momento angular do núcleo. Como a transição é tanto mais rápida (mais provável) quanto menor ΔI , para uma dada transição nuclear, a emissão mais provável é aquela cujo ΔI é mínimo, isto é, igual à diferença dos módulos dos momentos angulares totais do núcleo, antes e depois da transição.

Para transições elétricas, a vida média, em segundos, vale:

$$(\bar{G}_\gamma)_{\text{elétr.}, \Delta I} = \frac{\Delta I [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\Delta I + 1)]^2}{2(\Delta I + 1)} \cdot \frac{1}{\rho 2\Delta I} \left(\frac{137}{W}\right)^{2\Delta I + 1} \frac{\hbar}{m_e c^2} \quad (\text{IV, 1})$$

onde:

W = energia do raio γ em unidades $m_e c^2$ (0,51 MeV).

ρ = $R_A / (e^2 / mc^2)$ é o raio do núcleo em unidades do raio clássico do elétron ($2,82 \cdot 10^{-13}$ cm).

ΔI = variação do momento angular total do núcleo;

$$\hbar / m_e c^2 = 1,37 \cdot 10^{-27} \text{ seg,}$$

m_e é a massa do elétron.

Lembrando que $137/\lambda = \lambda/R_A$, onde λ é o comprimento de onda da radiação emitida, temos:

$$(\overline{G}_\gamma)_{\text{electr. } \Delta I} = \frac{1}{2(\Delta I + 1)} [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\Delta I + 1)]^2 \left(\frac{\lambda}{R_A}\right)^{2\Delta I} \cdot \frac{137}{W} \frac{h}{mc^2}$$

$$(\overline{G}_\gamma)_{\Delta I+1} \sim (\lambda/R_A)^2 (\overline{G}_\gamma)_{\Delta I},$$

isto é, quando a ordem de multipólo da radiação cresce de 1, a vida média aumenta (a radiação é menos provável) de um fator $(\lambda/R_A)^2$. Idêntica relação vale para aumento da ordem de multipólo magnético.

Usualmente ($A = 125$, $E = 1$ MeV) $\lambda = 25 \cdot R_A$, de modo que o fator vale 600. Para transições magnéticas:

$$(\overline{G}_\gamma)_{\text{magn. } \Delta I} = (\overline{G}_\gamma)_{\text{electr. } \Delta I} \cdot (Mc \cdot R_A/h)^2 \quad (2)$$

onde M é a massa do nucleon (proton ou neutron).

No apêndice IV, encontra-se em esboço a maneira de se obter a tabela V a vida média, e a maneira de distinguir experimentalmente as diferentes ordens de multipólo elétrico e magnético.

Goldhaber e Sunyar* fizeram uma classificação dos isômeros e os gruparam em duas classes: aquelas que aparecem sistematicamente em grande número justamente antes dos números mágicos, e aqueles que aparecem não relacionados aos números mágicos, especialmente entre os núcleos ímpar-ímpar, e ocasionalmente entre os outros.

Grupos sistemáticos M4 (Radiação de 2⁴-pólo magnético: $\Delta I = 4$, "sim")

Abaixo de 50, proveniente da competição $g_{9/2} - p_{7/2}$

Abaixo de 82 provenientes da competição $h_{11/2} - d_{3/2}$. As transições são sempre seguidas de radiação M1 quando o estado fundamental é $s_{1/2}$.

Abaixo de 126, provêm da competição $i_{13/2}$. As transições são seguidas de radiação M2, quando o estado fundamental é $p_{1/2}$.

A vida média é dada experimentalmente, por

$$\overline{G}_\gamma = C (2I_1 + 1) / A^2 E^9,$$

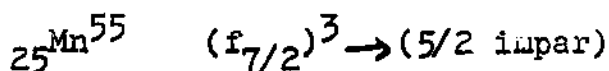
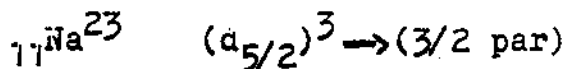
* Obra citada

onde C é uma constante igual a 10^4 segundos $\pm 30\%$ e I_1 é o spin do núcleo inicial. Esta expressão coincide com a fórmula (IV, 7) se introduzirmos na mesma o fator $(2I_1 + 1)$.

Grupos sistemáticos E3 (Radiação de octópolo elétrico $\Delta I = 3$, "não")

São de dois tipos: transições tipo $h_{7/2} \leftrightarrow d_{5/2}$ e $i_{13/2} \leftrightarrow f_{7/2}$ perfeitamente de acordo com o modelo das camadas, e transições do tipo $p_{1/2} \leftrightarrow (7/2 \text{ par})$. Este (7/2 par) deveria ser o estado de um nucleon numa orbita $g_{7/2}$ e se todas as leis do modelo de M.G. Mayer fossem obedecidas, e além disso, para poder formar isômeros deveria ser da mesma energia aproximadamente que $p_{1/2}$, isto é, da energia do $g_{9/2}$, o que contradiz a hipótese da interação forte entre spin e órbita. Sugere-se então que a lei 3 não seja obedecida neste caso, 3, 5 ou 7 órbitas $g_{9/2}$ podendo-se combinar para formar o estado de energia baixa com spin 7/2.

Isto provavelmente também ocorre nos casos de:



De acordo com esta sugestão está o fato de que não se encontram estados (7 par) no começo ou no fim da camada das órbitas $g_{9/2}$.

Os elementos de matriz dos núcleos para as transições elétricas variam muito mais que os 30% do caso das transições magnéticas.

Alguns elementos de matriz, para transições E2, têm quadrados maiores que 1. Trata-se talvez de um fenômeno de cooperação em que tomam parte mais de um nucleon.

O fato, inicialmente surpreendente, de que a transição de um neutron pode ocasionar radiação eletromagnética explica-se pelo "recuo" do resto da camada que é carregada. De fato, observam-se probabilidades de emissão de múltiplos elétricos mais baixos para número impar de neutrons do que para número impar de protons. Este fato é, por exemplo, uma boa evidência em favor do modelo das camadas.

Discrepâncias do spin:

Núcleos	Estado esperado	Spin esperado	Medido
${}^9\text{F}_{10}^{19}$	$d_{5/2}$	$5/2$	$1/2$
${}^{11}\text{Na}_{12}^{23}$	$(d_{5/2})^3$	$5/2$	} $3/2$
ou	$(d_{5/2})^2 s_{1/2}$	$1/2$	
${}^{25}\text{Mn}_{30}^{55}$	$(f_{7/2})^5$	$7/2$	$5/2$

A discrepância do F^{19} sugere que, para um núcleo pequeno como este, o poço de potencial seja mais íngreme que o de um oscilador, de modo que, neste caso, a órbita do primeiro próton depois da camada dos $p_{1/2}$ seria um estado $s_{1/2}$ e não $d_{5/2}$.

A do ${}^{11}\text{Na}_{12}^{23}$ é séria. Ele se comporta mais como um estado $p_{3/2}$ do que $d_{3/2}$. No entanto é possível que se trate de uma exceção da regra 3: as três órbitas $d_{5/2}$ podem acoplar-se de tal maneira a produzir um momento angular total $J = 3/2$: calculando-se o momento magnético segundo esta hipótese, o resultado (2.8) está muito mais próximo do experimental (2.21) do que o das linhas de Schmidt (3.78 e 0.12). A discrepância do Mn^{55} pode ser interpretada, semelhantemente, como uma quebra da regra 3, fato que parece ocorrer também em outros casos.

Núcleos ímpar-ímpar

Há somente cinco exemplos de núcleos ímpar-ímpar estáveis.

Aqui surge o problema de combinar a órbita de um nêutron com a de um próton para produzir o spin total do núcleo. Mesmo se o próton e o nêutron estiverem no mesmo estado, como ocorre nos quatro primeiros exemplos, o momento angular total, formado pela composição dos dois, não é nulo. A razão não é clara.

Uma confirmação das órbitas previstas pelo modelo das camadas

é obtida acoplando-as (empíricamente) de maneira a resultar o spin experimental, e calculando em seguida o valor do momento magnético correspondente. O resultado está em razoável acôrdo com os valores experimentais, como mostra a tabela VI.

Os seis últimos núcleos, do tipo par-ímpar, foram incluídos afim de se ter uma ideia da concordância para êstes casos mais bem definidos.

IV. 3. Desintegração Beta e Modêlo das Camadas

A desintegração beta permite obter maior conhecimento do núcleo, contribuindo grandemente para a verificação das hipóteses sôbre a estrutura nuclear, e possibilitando um estudo de alguns modêlos de camadas, por exemplo, o de M. G. Mayer, exposto no início dêste capítulo.

Como foi visto no Capítulo III, o caráter da desintegração beta isto é, se é permitida, primeiro proibida, segundo proibida, etc., e que se revela pela forma do espectro emitido e ordem de grandeza do valor de fT , depende das mudanças de momento angular, ΔI , e paridade do núcleo inicial para o final.

Assim, o estudo das desintegrações beta, alia-se de maneira pôderosa ao processo das medidas diretas de momento angular (I) e magnético (μ) e a inferência da paridade pelo processo das linhas de Schmidt (veja parágrafo anterior), para determinar o estado dos núcleos. Obtêm-se, assim, dados suficientes para testar o modêlo das camadas, por exemplo, de M. G. Mayer.

Pode-se também seguir o caminho inverso: atribuir, de início, determinados estados aos núcleos, tomando por base o modêlo das camadas de M. G. Mayer, e verifica-se que a paridade sempre está de acôrdo com o modêlo das camadas. O valor do momento angular em geral não apresenta discrepâncias. Os valores de fT , que, como sabemos do Capítulo III, estão íntimamente ligados à estrutura do núcleo, são as grandezas mais interessantes. Eles revelam que deve haver diferenças de estrutura entre os núcleos que, segundo o modêlo das camadas, deveriam ser semelhantes (isto é, que a hipótese das camadas de M. G. Mayer ainda não fornece um modêlo das estruturas dos núcleos suficientemente detalhado)

TABELA VI

	Neutron	Proton	Spin Experimental	Momento Magnético	
				Experimental	Calculado pelas órbita
${}^6_3\text{Li}$	$p_{3/2}$	$p_{3/2}$	1	0,82	0,63
${}^{10}_5\text{B}$	$(p_{3/2})^3$	$(p_{3/2})^3$	3	1,80	1,88
${}^{14}_7\text{N}$	$p_{1/2}$	$p_{1/2}$	1	0,40	0,37
${}^{22}_{11}\text{Na}$	$(d_{5/2})^3$	$(d_{5/2})^3$	3	1,75	1,73
${}^{40}_{19}\text{K}$	$f_{7/2}$	$(d_{3/2})^3$	4	-1,29	-1,70
${}^7_3\text{Li}$	$(p_{3/2})^2$	$p_{3/2}$	3/2		
${}^9_4\text{Be}$	$(p_{3/2})^3$	$(p_{3/2})$	3/2		
${}^{11}_5\text{B}$	$(p_{3/2})^4$	$(p_{3/2})^3$	3/2	2,689	3,80
${}^{13}_6\text{C}$	$p_{1/2}$	$(p_{3/2})^4$	1/2	0,702	0,64
${}^{15}_7\text{N}$	$p_{1/2}$	$(p_{1/2})^2$	1/2	-0,283	-0,26
${}^{17}_8\text{O}$	$d_{5/2}$	$(p_{1/2})^2$	5/2	-1,893	-1,91

O inverso de fT , a menos de constantes, é igual, segundo a teoria da desintegração beta exposta no Capítulo III, ao quadrado do módulo do elemento de matriz de algum operador calculado entre os estados inicial e final do núcleo que se desintegra:

$$(fT)^{-1} = |M|^2 \cdot \text{constantes} ; M = \int \psi_{\text{fin}}^* O_f \psi_{\text{in}} dV$$

Este operador é do tipo:

$$O_p = 1 \cdot e^{i\vec{Q} \cdot \vec{R}}, \text{ para o caso de Fermi}$$

$$O_p = \vec{\sigma} \cdot e^{i\vec{Q} \cdot \vec{R}}, \text{ para o caso de Gamow-Teller.}$$

ou é uma mistura dos dois. $\vec{Q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{p}_{e1} + \vec{p}_\nu$ é a diferença de momentos do nucleon, antes e depois de sua desintegração. $\vec{Q} \cdot \vec{R}$ é em geral muito pequeno (R não excede à ordem de grandeza do diâmetro do nucleon), de modo que a exponencial é em geral da ordem de 1, e pode ser desenvolvida em potências de $\vec{Q} \cdot \vec{R}$.

Quando o elemento de matriz é nulo, ou muito pequeno para primeiro termo do desenvolvimento (isto é, 1), trata-se de uma transição proibida. A ordem de proibição é dada pela primeira potência de $\vec{Q} \cdot \vec{R}$ do desenvolvimento para a qual o elemento de matriz é não nulo. Ao aumentar-se a ordem de proibição de uma unidade, o elemento de matriz diminui aproximadamente, (veja Capítulo III) de um fator $R/\lambda \sim 1/10$, isto é, espera-se que o logaritmo de fT aumente de 2. Por exemplo, espera-se que o logaritmo de fT para transições primeiro-proibidas seja aproximadamente duas unidades maior que o das transições permitidas, e duas unidades menor que os das segundo-proibidas etc.

Usaremos o seguinte procedimento no que se segue*: faremos uma lista das transições conhecidas, classificadas segundo as regras de seleção, decorrentes dos estados que o modelo das camadas de M. G. Mayer atribui aos estados inicial e final. O fato de que foi usado o modelo das camadas como base para a classificação não significa que foi

* Tomamos por base o artigo de M. G. Mayer, Moszkowski, e L. W. Nordheim, Rev. Mod. Phys. 23, 315 (1951), em que estão contidos todos os dados usados.

admitida a validade do mesmo, e, veremos que ocorrem regularidades e irregularidades nos valores de fT não explicáveis, diretamente, pelo modelo das camadas. Adiante do símbolo de cada elemento, entre parêntesis, está o logaritmo do valor de fT , f calculado como se fosse transição permitida.

I) Núcleos Especulares

São pares de núcleos de mesmo número de massa, A ; num deles o número de prótons excede o de nêutrons por um, no outro, o número de nêutrons excede o de prótons por um. Há pois um nucleon utilizado, (os outros sendo todos pares de próton-nêutron) que para um é nêutron e para o outro, próton. Este nucleon deve ocupar a mesma órbita nos dois casos, segundo o modelo das camadas, de modo que na transição de um nucleon para outro por desintegração beta, devemos ter $\Delta I = 0$, "Não"*, isto é, a transição deve ser permitida. Como as funções de onda do núcleo inicial e final são de mesma órbita, espera-se que o elemento de matriz (do operador τ ou σ envolvido neste caso) seja especialmente grande, pois as funções de onda do nêutron e do próton devem ser bastante semelhantes e superpor-se especialmente bem.

Isto é confirmado pelos valores de fT , cujos logaritmos estão todos contidos entre 3.2 e 3.7, que, comparados com os valores (da ordem de 5) para as transições permitidas normais, são bastantes pequenos, e formam um grupo bem distinto. (Lembremos que o elemento de matriz é proporcional ao inverso de fT ; quanto menor o $\log fT$, tanto maior o elemento de matriz). Estas transições são chamadas "super-permitidas". Este grupo contém pares desde o $n \rightarrow p$, (3); $H^3 \rightarrow He^3(3,04)$; $Be^7 \rightarrow Li^7(3,36)$; $C^{11} \rightarrow B^{11}(3,63)$ etc, até $Sc^{47} \rightarrow Ca^{47}$ (entre parêntesis estão os $\log fT$).

II) Grupo de Wigner:

Quanto ao número de prótons e nêutrons, os núcleos deste grupo são constituídos de n partículas \leftarrow mais dois nucleons. Este dois nucleons têm, individualmente, a mesma órbita, mas o spin total não é necessariamente nulo para o núcleo ímpar-ímpar.

* "Não" ou "Sim" significam, como no Cap. III que não há, ou há mudança de paridade na transição.

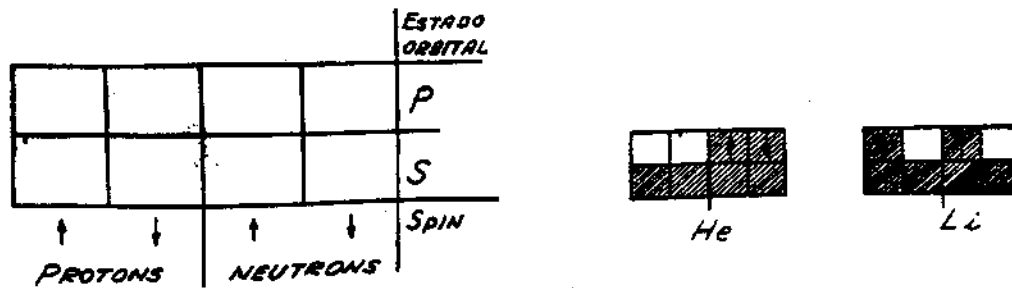


Fig. III, 4

em He^6 e Li^6 . Representação esquemática dos estados dos protons e neutrons

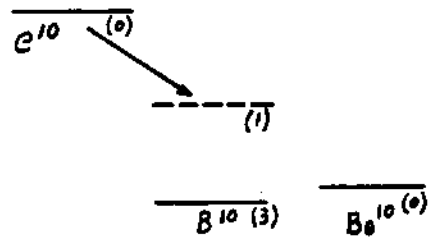


Fig. IV, 1 (a)

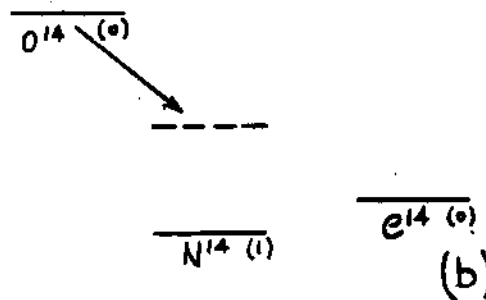


Fig. IV, 1 (b)

(a) Diagrama dos níveis de C^{10} , Be^{10} e B^{10} no estado fundamental. O algarismo entre parentesis a direita do símbolo do elemento representa o spin. O B^{10} apresenta um estado excitado de spin 1 ao qual C^{10} pode decair, mas o mesmo não pode acontecer com o Be^{10} , porquanto a aquele estado é mais alto que o seu. (b) Diagrama dos níveis de O^{14} , N^{14} e C^{14} no estado fundamental. A seta indica a transição do O^{14} a um dos níveis excitados do N^{14} .

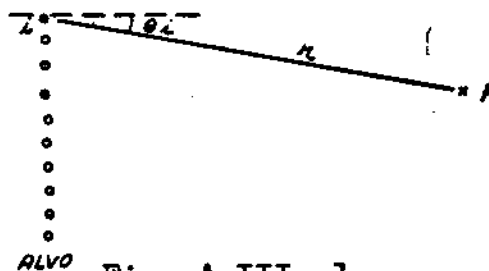


Fig. A III, 1

Ilustrando o comportamento da função de onda das partículas P_1 de um feixe que incide num alvo difusor constituído de i partículas. A função de onda das partículas. A função de onda das partículas espalha-

Incluimos na tabela VII esta órbita, e o valor do spin (momento angular total) do núcleo impar-impar. O spin do par-par é suposto zero. Um asterístico significa que o spin foi medido.

Os valores de log fT estão geralmente entre 3,3 e 5. Notam-se algumas exceções, por exemplo, a transição $He^6 \rightarrow Li^6$, cujo log fT é menor que os do grupo das transições super-permitidas, e a transição $Na^{22} \rightarrow Ne^{22}$ de fT muito alto.

Séria dificuldade ocorre no caso do C^{10} e Be^{10} ; ambos devem ter a mesma configuração e mesmo spin, porém decaem no mesmo núcleo B^{10} com valores de fT diferentes (3,3 e 13,71). Uma possível razão é a seguinte: o estado fundamental do B^{10} tem spin 3, que energeticamente está mais abaixo que o de C^{10} e que o do Be^{10} , o que faz com que as transições não sejam "permitidas".

O B^{10} possui, porém, um estado excitado de spin provavelmente 1, ao qual o C^{10} pode decair (e depois com emissão γ ao fundamental) permitidamente. Como este estado está mais alto que o fundamental do Be^{10} o mesmo não se pode dar com este. Resta inexplicada, porém, a proibição, aparentemente muito forte da transição do C^{14} ao estado fundamental do N^{14} .

Fato semelhante parece ocorrer com as transições do O^{14} e C^{14} ao N^{14} . Não se compreende porque o O^{14} não decai diretamente ao fundamental do N^{14} , e porque a transição $C^{14} \rightarrow N^{14}$ é tão proibida. Convém notar que este é o exemplo de maior discrepância com o modelo das camadas, até hoje encontrado.

De $F^{18} \rightarrow O^{18}$ em diante há emissão de positron em vez de emissão beta, favorecida pela repulsão eletrostática que já se torna importante. A última exceção é a de $Na^{22} \rightarrow Ne^{22}$. Nos três últimos casos ocorrem afastamentos do valor normal esperado (que é da ordem de 3).

Vamos subdividir o resto dos núcleos em A par e A impar.

III) Núcleos com a Impar

Utilizaremos o modelo das camadas para atribuir os estados aos núcleos e para classificá-los em grupos de transições permitidas, primeiro-proibidas etc. Como já foi dito, este procedimento não deve ser tomado como uma prova de que o modelo das camadas seja correto.

TABELA VII

Transição	Órbita	Spin	Log fT
He ⁶ — Li ⁶	p _{3/2}	1*	2,74
C ¹⁰ — B ¹⁰	p _{3/2}	3*	3,3
Be ¹⁰ — B ¹⁰	p _{3/2}	3*	13,7
O ¹⁴ — N ¹⁴	p _{1/2}	1*	3,5
C ¹⁴ — N ¹⁴	p _{1/2}	1*	9,0
F ¹⁸ — O ¹⁸	s _{1/2}	1*	3,6
Na ²² — Ne ²²	d _{3/2}	3*	14,0
Al ²⁶ — Si ²⁶	d _{5/2}	>1	3,3
p ³⁰ — s ³⁰	s _{1/2}	1	5,0
Cl ³⁴ — A ³⁴	d _{3/2}	>1	7,0
K ³⁸ — Ca ³⁸	d _{3/2}	>1	4,8

Talvez seja útil incluir nas tabelas tôdas as transições conhecidas, para contribuir a uma maior divulgação dos dados experimentais. Os dados foram tirados do artigo Moszkowski e Nordheim, já citados (Tabelas VIII, IX).

Na primeira coluna estão a carga, símbolo químico e numero de massa do elemento. Na segunda coluna a órbita do nucleon ímpar inicial e final, segundo o modelo das camadas. Um asterístico significa que os spins foram medidos. Na terceira o logaritmo de fT , f calculado como se a transição fôsse permitida. O sinal + indica que há duas desintegrações possíveis (uma ao estado fundamental, outra ao excitado) de percentagem desconhecida.

Na tabela VIII, nota-se que todos os $\log fT$ estão entre 4.3 e 6.0, isto é, que o grupo está bem definido, e, comparando êstes dados com os da tabela IX, observa-se que esse grupo está muito bem separado do das transições primeiro-proibidas, cujos $\log fT$ se acham compreendidos entre 6.0 e 7.9. Isto mostra que quanto às paridades (e são estas que diferenciam entre transições permitida e primeiro-proibida) o modelo das camadas funciona muito bem.

Os espectros dêste grupo (Tabela X), são teòricamente conhecidos de maneira unívoca (vide pag). A última coluna contém os valores de $\log fT$, f calculado para esta forma do espectro, enquanto que na 3a. coluna, f é calculado como se o espectro tivesse a forma de transição permitida. Nota-se que os valores da última coluna são mais satisfatórios, pois variam menos que os da penúltima. Note-se que o $^{43}\text{Tc } 95$, cujo $\log fT$ (8.6) é o que mais se afasta dos outros, é o único do grupo da Tabela X que decai com emissão de pósitron. O S^{37} é muito leve e decai emitindo radiação de alta energia (4,3 Mev).

As transições da Tabela XII deveriam ser permitidas porém os $\log fT$ não estão (com uma exceção entre 5,5 e 7,0) bem contidos na região dos outros permitidos ($\Delta I = 0, 1$, "Não", $\Delta \pi = 0$), cujos $\log fT$ estão entre 4.8 e 5.8. O uso do modelo das camadas para atribuir os estados aos núcleos, não parece ser, pois, muito satisfatório para êstes. De outro lado êste grupo não é determinado com muita certeza pelo modelo das camadas.

TABELA VIII

10	Ne	23	$d_{5/2} - D_{3/2}^*$	4.9	33	As	77	$P_{3/2} - P_{1/2}$	5.7
11	Na	25	$D_{3/2} - d_{5/2}^*$	5.2	34	Se	73	$P_{1/2} - P_{3/2}$	5.3
16	S	35	$d_{3/2} - d_{3/2}^*$	5.0	34	Se	81	$P_{1/2} - P_{3/2}^*$	4.8
20	Ca	45	$f_{7/2} - f_{7/2}^*$	5.6	34	Se	83	$P_{1/2} - P_{3/2}$	5.2+
21	Sc	43	$f_{7/2} - f_{7/2}$	4.8+	35	Br	75	$P_{3/2} - P_{1/2}$	5.6
21	Sc	47	$f_{7/2} - f_{7/2}$	5.6+	35	Br	77	$P_{3/2} - P_{1/2}$	5.0
21	Sc	49	$f_{7/2} - f_{7/2}$	5.5	35	Br	83	$P_{3/2} - P_{1/2}$	5.3
22	Ti	45	$f_{7/2} - f_{7/2}$	4.7+	35	Br	85	$P_{3/2} - P_{1/2}$	5.1
23	V	47	$f_{7/2} - f_{7/2}$	4.7+	36	Kr	77	$P_{1/2} - P_{3/2}$	5.4+
24	Ca	49	$f_{7/2} - f_{7/2}$	4.5+	40	Zr	89	$P_{1/2} - P_{1/2}^*$	5.8+
25	Mn	51	$F_{5/2} - f_{7/2}$	5.1+	42	Mo	91	$G_{9/2} - G_{9/2}$	5.8+
26	Fe	53	$f_{7/2} - F_{5/2}$	5.0+	45	Rh	105	$G_{9/2} - G_{7/2}$	5.5
27	Co	61	$f_{7/2} - f_{5/2}$	5.2	48	Cd	107	$G_{7/2} - G_{7/2}$	4.9
30	Zn	63	$P_{3/2} - P_{3/2}^*$	5.4	50	Sn	121	$d_{3/2} - d_{5/2}^*$	5.0
31	Ga	73	$P_{3/2} - P_{1/2}$	5.9	52	Te	127	$d_{3/2} - d_{5/2}^*$	5.6
32	Ge	75	$P_{1/2} - P_{3/2}^*$	5.0	55	Cs	127	$d_{5/2} - d_{3/2}$	4.7+
32	Ge	77	$P_{1/2} - P_{3/2}$	4.8+	60	Nd	141	$d_{3/2} - d_{5/2}^*$	5.2
33	As	71	$P_{3/2} - P_{1/2}$	5.1					

Estados nucleares: Transições permitidas, $\Delta I = 0, 1$; "Não" ($\Delta \ell = 0$)

TABELA IX

35	Br	87	$p_{3/2} - d_{5/2}$	7.3	59	Pr	143	$d_{5/2} - f_{7/2}$	7.6
36	Kr	87	$d_{5/2} - p_{3/2}^*$	7.3	60	Nd	147	$f_{7/2} - d_{5/2}^*$	7.0+
37	Rb	87	$p_{3/2} - d_{5/2}$	6.6	61	Pm	147	$d_{5/2} - f_{7/2}$	7.6
46	Pd	111	$s_{1/2} - p_{1/2}$	6.8	62	Sm	151	$f_{7/2} - d_{5/2}^*$	6.9
47	Ag	111	$p_{1/2} - s_{1/2}^*$	7.2	66	Dy	165	$f_{7/2} - g_{7/2}^*$	6.1+
47	Ag	113	$p_{1/2} - s_{1/2}^*$	7.0	67	Er	169	$p_{1/2} - s_{1/2}^*$	6.1
47	Ag	115	$p_{1/2} - s_{1/2}$	6.4	68	Er	171	$f_{5/2} - d_{5/2}$	7.0
48	Cd	115	$s_{1/2} - p_{1/2}$	6.8	71	Lu	177	$g_{7/2} - f_{5/2}$	6.8
48	Cd	117	$s_{1/2} - p_{1/2}$	6.1	72	Hf	181	$p_{1/2} - s_{1/2}$	7.2
49	In	115	$p_{1/2} - s_{1/2}^*$	6.6	74	W	185	$p_{3/2} - d_{5/2}$	7.5
49	In	117	$p_{1/2} - s_{1/2}^*$	6.2	74	W	187	$p_{3/2} - d_{5/2}$	7.8
49	In	119	$p_{1/2} - s_{1/2}^*$	6.2	78	Pt	199	$p_{1/2} - d_{3/2}$	6.3
54	Xe	137	$f_{7/2} - g_{7/2}^*$	6.3	80	Hg	205	$p_{1/2} - s_{1/2}$	5.4
56	Ba	139	$f_{7/2} - g_{7/2}^*$	6.7+	82	Pb	209	$g_{9/2} - h_{9/2}^*$	5.6
57	La	141	$g_{7/2} - f_{7/2}$	7.6	83	Bi	213	$h_{9/2} - g_{9/2}$	6.0
58	Ce	141	$f_{7/2} - d_{5/2}^*$	7.7					

Estados nucleares: Transições primeiro-proibidas $\Delta I=0,1$, "Sim" ($\Delta \ell = 1$).

TABELA X

16	S	37	$f_{7/2}^* - d_{3/2}^*$	7.1	9.1
18	A	41	$f_{7/2}^* - d_{3/2}^*$	8.6	10.1
36	Kr	85	$g_{3/2}^* - f_{5/2}^*$	9.2	9.9
38	Sr	89	$d_{5/2} - p_{1/2}$	8.5	9.7
38	Sr	91	$d_{5/2} - p_{1/2}^*$	8.0	9.7
39	Y	91	$p_{1/2} - d_{5/2}^*$	8.7	9.9
40	Zr	95	$d_{5/2} - p_{1/2}$	9.8	10.7
43	Tc	95	$p_{1/2} - d_{5/2}^*$	8.3	8.6
44	Ru	103	$d_{5/2} - p_{1/2}$	8.5	9.3
50	Sn	123	$h_{11/2} - g_{7/2}^*$	9.1	10.3
51	Sb	123	$g_{7/2} - h_{11/2}$	9.4	10.0
55	Cs	137	$g_{7/2}^* - h_{11/2}$	9.6	10.1
69	Tm	171	$d_{5/2} - p_{1/2}^*$	9.5	10.4

Estados nucleares: Transições primeiro-proibida $\Delta I = 2$, "Sim" ($\Delta \ell = 1$)

TABELA XI

37	Rb	87	$p_{3/2}^* - g_{9/2}^*$	16,5 ($\Delta I=3$, "Sim", terceiro-proibida)
43	Tc	99	$g_{9/2}^* - d_{5/2}$	13,0 ($\Delta I=2$, "Não", segundo-proibida)
49	In	115	$g_{9/2}^* - s_{1/2}^*$	23,2 ($\Delta I=4$, "Não", quarto-proibida)
52	I	129	$g_{7/2}^* - s_{1/2}^*$	13,5 ($\Delta I=3$, "Não", segundo-proibido)
55	Cs	135	$g_{7/2}^* - d_{3/2}^*$	13,1 ($\Delta I=2$, "Não", segundo-proibido)
55	Cs	137	$g_{7/2}^* - d_{3/2}^*$	12,2 ($\Delta I=2$, "Não", segundo-proibido)
75	Re	187	$d_{5/2}^* - h_{9/2}$	17.7 ($\Delta I=2$, "Sim", primeiro-proibido) ($\Delta I=3$)

Estados nucleares: segundo, terceiro, e quarto proibidos. $\Delta I=1$, "Não", $\Delta L = 2$ (ΔL é a variação do momento angular orbital do núcleo).

Esgotamos aqui os núcleos A ímpar de desintegração beta conhecidos. O resultados estão resumidos na tabela XIII, onde são dados os intervalos de variação dos log fT de cada grupo, não levando em consideração os log fT de um ou outro caso muito extremo.

Notemos que entre as permitidas (não considerando o grupo com $\Delta L = 2$, pois este não é definido com muita certeza pelo modelo das camadas e distingue-se das outras permitidas pelo fato de que $\Delta L \neq 0$) há dois grupos: os núcleos especulares, e os outros. Segundo o modelo das camadas, eles não deveriam ser diferentes. As primeiro-proibidas também formam dois grupos bem separados: $\Delta I = 0,1$ e $\Delta I = 2$. A diferença dos log fT entre cada um destes quatro grupos é aproximadamente 2. As permitidas, excluindo novamente o grupo $\Delta L = 2$, são bem separados das primeiro-proibidas. As segundo-proibidas separam-se bem das primeiro-proibidas. A diferença do valor de log fT, aproximadamente 4, é muito grande (dai se explica o número muito pequeno de casos encontrados). Os diversos grupos são muito bem separados, o que mostra que, quanto às paridades, o modelo das camadas parece funcionar muito bem. Mas há também certas discordâncias.

Entre as dificuldades estão as seguintes: 1) a existência de duas transições permitidas diferentes: as dos núcleos especulares e as outras (que segundo o modelo das camadas não deveriam ser diferentes) o que constitui um verdadeiro mistério; 2) o fato de as transições primeiro-proibidas também caírem em dois grupos distintos, em vez de num só. Isto talvez tenha alguma conexão, com o fato de que os dois grupos diferem quanto à variação do momento angular total.

3) Os valores grandes e log fT do grupo $\Delta L = 2$, permitidas não se parecem enquadrar bem no esquema geral.

4) Os núcleos especulares na grande maioria, têm os log fT, demasiadamente próximos. Deveria haver maior diferença de núcleo para núcleo.

5) As dificuldades já apontadas no grupo de Wigner.

Estas dificuldades sugerem que o operador de interação talvez contenha o operador momento angular orbital, (dificuldades 3 e 4) e talvez também a possibilidade de que a desintegração de um neutron

seja alterada pela presença de outros. (Isto se exprimiria pelo fato de que a interação não seria a soma das interações de cada nucleon individualmente, $\sum \sigma_1 \tau_1$, mas um operador mais complicado).

IV. Núcleos com A par

As transições dêste grupo são entre núcleo par-par e ímpar-ímpar. Como o modelo das camadas não fornece regras para atribuir momento angular e paridade aos núcleos ímpar-ímpar (os par-par são de spin zero e paridade par, segundo o modelo das camadas) e como as medidas experimentais dos spins são ainda muito escassas, os resultados das desintegrações beta não são tão significativos para o modelo das camadas quanto no caso dos núcleos par-ímpar. Nordheim*, em seu artigo, procura dar regras para encontrar o spin e paridade dos núcleos ímpar-ímpar, e classifica, segundo estas, as transições dos núcleos em: permitida, primeiro-proibida etc... A separação entre os diversos grupos obtidos é razoavelmente boa, mas a insegurança na atribuição dos estados aos núcleos, devida à falta de dados experimentais, não permite verificar com muita firmeza a validade das regras. Deixamos porisso de transcrever os log ΓT das transições conhecidas dêste grupo. Limitamo-nos a reunir na tabela XIV as transições nas quais o spin dos núcleos ímpar-ímpar é conhecido. Os núcleos que têm sinais + ou - (indicando paridade par ou ímpar) nos spins foram tirados do quadro de Bethe e Butler** e acrescentados aos valores de Nordheim. Foram incluídos os núcleos do grupo de Wigner.

* L. W. Nordheim, Rev. Mod. Phys. **23**, 323, 1951.

** Bethe e Butler, Phys. Rev. **85**, 1045 (L) 1952.

TABELA IV

transição		órbita		spin	log τ_T
		p	n		
He ⁶	³ Li ₃	P _{3/2}	P _{3/2}	1	2,8
Be ¹⁰	⁵ B ₅	P _{3/2}	P _{3/2}	3	13,7
C ¹⁰	⁵ B ₅	P _{3/2}	P _{3/2}	3	3,3
C ¹⁴	⁷ N ₇	P _{1/2}	P _{1/2}	1	9,0
O ¹⁴	⁷ N ₇	P _{1/2}	P _{1/2}	1	3,5
¹¹ Na ₁₁	Ne ²²	D _{3/2}	D _{3/2}	3	14,0
¹⁵ P ₁₇	S ³²	S _{1/2}	d _{3/2}	1+	7,9
¹⁷ Ca ₁₉	A ³⁶	d _{3/2}	d _{3/2}	2+	13,5
¹⁷ Cl ₂₁	A ³⁸	d _{3/2}	f _{7/2}	2-	7,4
¹⁹ K ₂₁	Ca ⁴⁰	d _{3/2}	f _{7/2}	4	17,6
¹⁹ K ₃₂	Ca ⁴²	d _{3/2}	f _{7/2}	2-	8,0
²¹ Sc ₂₅	Ti ⁴⁶	f _{7/2}	f _{7/2}	4+	(10,2)

APENDICE I

RELAÇÃO ENTRE ESPALHAMENTO E MUDANÇA DE FASE

A teoria geral de espalhamento por um potencial encontra-se muito bem descrita por exemplo no livro de Mott e Massey *. Remetemos o leitor a êste livro, pag. 19 e seguintes, para o estudo matematicamente mais completo. A principal conclusão dêsse estudo é que o resultado de um problema de espalhamento de ondas pode ser obtido em termos de certas propriedades (mudança de fase) das soluções do problema mais simples que é dos estados estacionários associados ao mesmo potencial. Deixando de lado todas as complicações provenientes do momento angular intrínseco que o núcleo ou partícula espalhada possa ter, a situação é a seguinte.

Quando uma partícula de energia e momento (kh), bem definidos, incide de uma certa direção (tomamos o eixo dos z do nosso sistema de coordenadas nesta direção) sobre a fonte de potencial (núcleo) pelo qual ela é espalhada, colocada na origem do sistema de coordenadas, a função de onda da partícula que descreve a situação terá a forma assintótica (isto é, longe da origem):

$$\psi \sim e^{ikz} + \frac{1}{r} e^{ikr} f(\theta) \quad (\text{AI. 1})$$

O primeiro termo representa a onda plana incidente, e o segundo as ondas difundidas radialmente em todas as direções. Supomos aqui que o potencial tem simetria esférica, e é conservativo, isto é, que a

* "Theory of Atomic Collisions" Oxford (Sed. ed.)

energia (e portanto o comprimento de onda da partícula), é a mesma antes e depois do espalhamento. É por isto que tomamos o mesmo k nestes dois termos. O fator $1/r$ registra o fato de que a probabilidade de encontrar a partícula espalhada (que é proporcional a $|\Psi|^2$), varia, com a distância do núcleo como $1/r^2$. Finalmente $f(\theta)$ indica que a partícula espalhada não tem igual probabilidade de ser encontrada para todos os ângulos em relação ao eixo z . A probabilidade de ser encontrada para um dado θ é proporcional a $|f(\theta)|^2$ e, de fato, nossa solução mostra que a corrente por unidade de ângulo sólido na direção de θ , por unidade de corrente incidente (que justamente é a seção de choque, σ) é:

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 \quad (\text{AI}, 2)$$

Nosso problema é, pois, estudar o comportamento de $f(\theta)$ como função de θ e da energia. Mas o problema tridimensional (AI, 1) é a solução da equação de onda, de Schroedinger, por exemplo, que contém o potencial do núcleo difusor) é bastante complicado. Sabemos, porém, pelo fato de que o momento angular (e portanto no nosso caso simples, o momento angular orbital) é conservado durante o colisão, que as variáveis angulares podem ser separadas sob forma de polinômios de Legendre $P_l(\cos \theta)$, de modo que cada momento angular l pode ser estudado separadamente.

Assim, para todos os raios a solução exata pode ser escrita como a combinação linear

$$\psi(r, \theta) = \sum_l \psi_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (\text{AI}, 3)$$

de ondas representando cada estado de momento angular $\hbar l$, onde cada parte radial $\psi_l(r)$ deve satisfazer à equação de Schroedinger uni-dimensional:

$$\frac{\hbar}{2M} \frac{d^2(r\psi)}{dr^2} + (E - U - \frac{V_l}{r^2}) (r\psi) = 0, \quad (\text{AI}, 4)$$

onde

$$V_l(r) = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2}$$

pode ser considerado como o potencial correspondente a força centrífuga, e U é o nosso potencial do núcleo.

Como não conhecemos exatamente as forças nucleares, podemos experimentar U como sendo, por exemplo, dentro do núcleo, um poço de potencial quadrado (representando as forças nucleares de curto alcance) ($r < r_A$) e fora do mesmo o potencial coulombiano $Z \cdot z e^2 / r$ ($r > r_A$) (Ze é a carga do núcleo, ze a carga da partícula a ser espalhada). Para esta discussão não precisamos, porém, tomar forma explícita para este potencial, bastando supor que ele cai a zero para grandes distâncias (como $1/r$ ou mais depressa).

Sabemos que $E = k^2 \hbar^2 / 2M$, onde k é o número de ondas por centímetro. Chamando ainda

$$U = \underline{U} \ 2M / \hbar^2, \quad V_1 = \underline{V}_1 \ 2M / \hbar^2 = 1 (1 + 1) / r^2$$

temos

$$\frac{d^2 (r \varphi_1)}{dr^2} + (k^2 - U - V_1) r \varphi_1 = 0 \quad (\text{AI}, 5)$$

Este é um problema simples, estacionário, uni-dimensional. O comportamento assintótico de $r \varphi_1$ deduz-se facilmente, pois a grandes distâncias, tanto U como V caem a zero, de modo que $r \varphi_1$ deve ser uma combinação de $\sin kr$ e $\cos kr$, que escrevemos sob a forma:

$$C \sin (kr - 1 \pi / 2 + \delta_1), \quad (\text{AI}, 6)$$

onde δ_1 é chamado "deslocamento de fase". $1 \pi / 2$ é inserido somente por conveniência, pois mostra-se que com potencial nuclear, U nulo, estando somente o potencial centrífugo V_1 presente, a solução é $\sin (kr + 1 \pi / 2)$, de modo que δ_1 mede o efeito do potencial nuclear: se este for pequeno, δ_1 também o será; C é uma constante arbitrária.

Para cada k (e naturalmente cada l), δ_1 é uma certa quantidade que depende do potencial nuclear U . Não podemos encontrá-lo sem o conhecimento do mesmo. Com nossa falta de conhecimento atual a respeito dos núcleos, seria uma tarefa desaminadora procurar a dependência deste atrasos de fase da energia (não tentaremos portanto,

realmente, resolver (AI,6).

Não obstante, como vimos em II, 5, há muitos casos em que podemos ter um bom conhecimento de muitas propriedades do comportamento de δ_1 como função da energia. E de fato, as previsões assim obtidas mostram-se em boa concordância com a experiência.

Antes de discutirmos este ponto temos que voltar um instante e completar a nossa discussão do problema de três dimensões. Temos que recompor as ondas parciais, e determinar como a nossa $f(\theta)$, original depende dos δ_1 . A forma assintótica (AI, 1) de ψ naturalmente determina como cada uma das ondas parciais ψ_1 se comporta, assintoticamente. Basta para isto desenvolver ψ nas ondas parciais e comparar o resultado com (AI, 3) e (AI;6). ψ pode ser escrita:

$$\psi \sim \sum_1 J_1(kr) P_1(\cos \theta) + \frac{e^{ikr}}{r} \sum_1 a_1 P_1(\cos \theta) \quad (\text{AI,7})$$

onde o primeiro termo provém do desenvolvimento de $e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta}$ em termos de $P_1(\cos \theta)$, e onde tomamos:

$$J_1(kr) = \frac{2}{2+1} \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} P_1(\cos \theta) d\theta \quad (\text{AI,8})$$

para os coeficientes do desenvolvimento.

De (AI, 1) vemos que:

$$f(\theta) = \sum_1 a_1 P_1(\cos \theta), \quad (\text{AI,9})$$

e o problema é o de encontrar a_1 . Mostra-se facilmente que os $J_1(kr)$ (que são uma especie de funções de Bessel de ordem semi-inteira, ou em outras palavras, meramente polinômios em senos e cosenos), têm a forma assintótica:

$$J_1(kr) \sim (2l+1) i^l \frac{1}{kr} \sin(kr - l\pi/2) \quad (\text{AI}, 10)$$

Por comparação de (AI, 3) com (AI, 7) e (AI, 9) vemos que $r\psi_1(r)$ deve ter a forma assintótica:

$$r\psi_1(r) \sim (2l+1) i^l \frac{1}{k} \sin(kr - l\pi/2 + a_1 e^{ikr}) \quad (\text{AI}, 11)$$

Mas esta deve ser a mesma que (AI, 6), a qual, aparentemente, é diferente. Pondo os senos em ambas sob a forma exponencial, (AI, 11) e (AI, 6) ficam, respectivamente:

$$r\psi_1(r) \sim \frac{1}{2ik} (2l+1) i^l \left[e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right] + a_1 e^{ikr};$$

$$r\psi_1(r) \sim \frac{1}{2i} C e^{i(kr - l\pi/2 + \delta_1)} - \frac{C}{2i} e^{-i(kr - l\pi/2 + \delta_1)}$$

de modo que a identidade entre (AI, 6) e (AI, 11) pode ser conseguida se:

$$C = \frac{1}{k} (2l+1) i^l e^{i\delta_1}$$

$$a_1 = \frac{1}{2ik} (2l+1) i^l e^{l\pi/2} (e^{2i\delta_1} - 1) \quad (\text{AI}, 12)$$

Esta é a relação que desejavamos obter, de a_1 em função de δ_1 , de modo que $f(\theta)$, e portanto também a seção de choque, ficam determinados em função de δ_1 .

Resumindo:

$$r(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_1 (2l+1) (e^{2i\delta_1} - 1) P_l(\cos \theta) \quad (\text{AI}, 13)$$

$$\sigma(\theta) = |r(\theta)|^2,$$

e a seção de choque total, integrada sobre todos os ângulos é

$$\sigma_T = \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k^2} \sum_1 (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (\text{AI, 14})$$

Esta última relação é obtida lembrando a ortogonalidade dos $P_l(\cos \theta)$

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq l' \\ 2/(2l+1) & \text{se } l = l' \end{cases}$$

e que $k^2 |a_l|^2$ vale $(2l+1)^2 \sin^2 \delta_l$, como decorre de (AI, 12).

O fato de que, por exemplo, para $l = 0$, a amplitude da função de onda espalhada depende de:

$$1 - e^{+2i\delta_1}$$

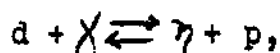
pode ser lembrado da seguinte maneira: o δ_1 foi definido como o deslocamento de fase de uma onda senoidal, $\sin(kr + \delta_1)$, que é a forma assintótica da solução estacionária do problema com potencial e que se anula para $r = 0$. Esta pode ser compreendida como a superposição de uma onda esférica convergente, $e^{i(kr + \delta)}$, e uma divergente $e^{-i(kr + \delta)}$ que têm um atraso de fase relativo, $e^{2i\delta}$. De modo que uma onda esférica incidente de amplitude 1 produz uma emergente de amplitude $e^{2i\delta}$.

Mas mesmo se não houvesse potencial, uma onda unitária incidente produziria uma emergente significando (em três dimensões) que as partículas que incidira, não foram defletadas e se afastam novamente. Nosso espalhamento é portanto medido pelo excesso $e^{2i\delta} - 1$, da onda real, $e^{2i\delta}$, sobre a onda que estaria presente se não houvesse espalhamento.

APENDICE II

SEÇÃO DE CHOQUE E PRINCIPIO DO BALANÇO DETALHADO

Vamos procurar a significação física do principio do balanço detalhado demonstrado matematicamente em II, 11, relação (II, 27) e cuja expressão mais geral encontra-se por exemplo no livro de Bethe*: "consideremos uma caixa contendo protons, neutrons, deuteron e raio γ em equilibrio (isto é, trata-se da reação



que se pode processar nos dois sentidos). Chamemos de 1 o estado formado de deuteron e raio γ , e estado 2 o de neutron e proton. Então, no equilibrio

$$V_1 \sigma_{1 \rightarrow 2} \cdot [\text{n}^\circ \text{ de estados } 1] = V_2 \sigma_{2 \rightarrow 1} [\text{n}^\circ \text{ de estados } 2] \quad \text{" (AII, 1)}$$

(V_1 é a velocidade relativa das duas particulas no estado 1, e V_2 a das particulas no estado 2). Bethe depois afirma que se pode substituir o número de estados pela densidade de estados por unidade de energia:

$$g = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3 dE}$$

onde p é o momento e g o pêso estatístico ($[2 \times \text{spin deuteron} + 1]$ (numero de estados de polarização do foton), no caso 1) do estado, o que leva à expressão por nós deduzida em II, 11.

Vamos partir da definição usual de seção de choque e procurar o significado da expressão (AII, 1)

* "Elementary Nuclear Theory", J. Wiley & Sons, New York, Pag. 61.

Apresentaremos duas circunstâncias físicas diferentes em que temos reação entre duas partículas, e em que a expressão do número de reações / segundo envolve σ . Há portanto duas maneiras diferentes de definir o mesmo σ , que exporemos a seguir. Para facilidade de notação, suponhamos que se trate da reação entre as duas partículas a e A , produzindo b e B no estado final. Suponhamos que a reação se pode processar nos dois sentidos: $a + A \rightleftharpoons b + B$. Consideremos por simplicidade, só os pares de partículas aA e bB cujos momentos relativos estejam respectivamente entre p_a , $p_a + dp_b$, as velocidades correspondentes sendo v_a , v_b .

Chamemos:

N_x = número total de partículas x no sistema, com os momentos indicados;

n_x = número de partículas x por unidade de volume;

x representa a , A , b ou B .

As duas situações físicas são as seguintes:

- 1) Um feixe de partículas a incide sobre um alvo constituído de partículas A . (Figura 31)

Então o número de transições $aA \rightarrow bB$ por unidade de tempo por núcleo A , que serve para definir σ , é dado por *:

$$n^a \text{ trans./seg/A} = n_a v_a \sigma_{AB} \quad (\text{AII}, 2)$$

$n_a v_a$ é o número de partículas incidentes por unidade de superfície, por unidade de tempo. O número de transições por segundo por núcleo A , é dado, pois, pelo produto do número de partículas incidentes por unidade de superfície por segundo, por uma superfície σ . Podemos imaginar σ como a área associada ao núcleo A tal que o número de partículas incidentes que a atingem por segundo dá o número de transformações por segundo.

O número total de reações por segundo, que se dão no alvo todo, é dado por:

* Compare com Fermi, "Nuclear Physics", University of Chicago Press, Revised edition, Pagina 143.

$$n^{\circ} \text{ trans/seg} = N_A \cdot n_a \cdot V_a \sigma_{AB} \quad (\text{AII, 3})$$

onde N_A é o número total de partículas A no alvo que podem entrar na reação, isto é,

$$N_A = d \cdot s \cdot n_A,$$

se s é a área do alvo atingido pelo feixe incidente, d sua espessura, e n_a o número de partículas A por unidade de volume.

Chamando "vol" o volume $d \cdot s$ do alvo atingido, o número de transições por segundo por unidade de volume é dado por:

$$n^{\circ} \text{ trans /seg /vol} = n_A n_a V_a \sigma_{AB} \quad (\text{AII, 4})$$

- 2.) Uma ou mais partículas a se deslocam dentro de um extenso meio formado de partículas A (Figura 32). O número de transições $aA \rightarrow bB$ por unidade de tempo, por partícula a dado por:

$$n^{\circ} \text{ trans /seg /a} = \sigma_{AB} V_a n_A$$

σ_{AB} pode ser interpretado como a área associada à partícula a que, percorrendo a extensão V_a por unidade de tempo, varre um volume $\sigma_{AB} V_a$. O número de transições ocorridas é igual ao número de partículas A encontradas dentro deste volume.

Esta maneira é mais usada, por exemplo, no estudo de raios cósmicos onde se tem partículas primárias atravessando grandes extensões de atmosfera antes de colidirem com uma molécula da mesma. Costuma-se então definir um caminho livre médio, λ , para dada particular reação ($\lambda = 1/\sigma n_A$).

O número total de transições /seg será então:

$$n^{\circ} \text{ trans /seg} = N_a \sigma_{AB} V_a n_A \quad (\text{AII, 5})$$

Se as partículas a e A estiverem contidas numa caixa de volume V , podemos substituir N_a por $n_a V$, e obtemos, para o número de transições por segundo por unidade de volume de caixa, mesma expressão (AII, 4). Isto mostra que as duas maneiras de definir σ são coerentes.

Vamos agora à interpretação da relação (AII, 1). A equa-

ção (AII,4) mostra que o número de transições/seg em cada cm^3 do espaço em que se dá a reação, é proporcional ao número de pares de partículas \underline{a} e \underline{A} que se podem formar em cada cm^3 vezes $\sigma_{AB} V_a$ (o número de pares é $\frac{1}{2} n_a (n_a - 1)$).

A probabilidade de transição por segundo por par aA, por unidade de volume do estado aA ao estado bB é portanto $2\sigma_{AB} V_a$.

Mas o par final bB pode estar em um de muitos estados. Por exemplo se \underline{b} e B têm spins I_b e I_B , há $(2I_b + 1)(2I_B + 1)$ estados diferentes quanto aos spins de \underline{b} e B. Se o sistema está limitado a um certo volume finito, os momentos só podem ter certos valores discretos, de modo que dentro de um intervalo de momento Δp há um certo número finito de estados.

Vamos chamar de I_{aA} e I_{bB} o número de estados possíveis de cada par aA e bB (Figura 33). Então a probabilidade de transição de um dos estados de aA a qualquer um dos estados bB é dada pela probabilidade média de transição daquele estado de aA a um particular dos estados de bB, vezes o número de estados I_{bB} possíveis. Mas êste é proporcional a $\sigma_{AB} V_a$ do modo que a probabilidade de transição média de um particular dos estados de aA a um particular dos estados de bB, P_{AB} , é dada por

$$P_{AB} = \frac{2\sigma_{AB} V_a}{I_{bB}}$$

Se considerarmos agora a reação inversa, a probabilidade média de transição de um particular dos estados de bB e um particular dos estados de aA será dada por P_{BA} :

$$P_{BA} = 2 \frac{\sigma_{BA} V_b}{I_{aA}}$$

Só obtemos a relação (AII,7)

$$\sigma_{AB} V_a I_{aA} = \sigma_{BA} V_b I_{bB}$$

se tivermos

$$P_{AB} = P_{BA}$$

O princípio do balanço detalhado afirma, portanto, que numa reação ($Aa \leftrightarrow Bb$) que se pode dar nos dois sentidos, a probabilidade média de transição de um dos estados possíveis do Aa a um particular dos estados possíveis de Bb é a mesma que no sentido inverso.

APENDICE III

Espalhamento para a frente:

Consideremos um feixe de partículas p_1 de densidade volumétrica unitária, incidente sobre um alvo no qual pode ocorrer espalhamento simples ou reações nucleares em que os p_1 mudem de natureza.

Vamos procurar a expressão para a função de onda das partículas p_1 , Ψ_{p_1} , depois que emergem do alvo, com o fim de obter o número de partículas que penetram numa fenda colimada com alvo e feixe, a grande distância do mesmo. Ψ_{p_1} será dada por:

$$\Psi_{p_1}(P) = e^{ikz} + \sum_i r(\theta_i) \frac{e^{ikr_i}}{r_i}, \quad (\text{AIII}, 1)$$

onde a soma se estende sobre todas as partículas i do alvo difusor, r_i são as distâncias de cada uma das partículas i ao ponto P , θ_i os ângulos correspondentes com a direção do feixe incidente. Se não houvesse alvo, Ψ_{p_1} seria e^{ikz} . O termo com o somatório descreve portanto as contribuições à onda total para os p_1 das ondas parciais, $f(\theta) e^{ikr}/r$, originadas em cada núcleo difusor. Chamado D o número de partículas do alvo por unidade de superfície, o somatório pode ser substituído pela integral $\int D \, dS$

$$\Psi_{p_1}(P) = e^{ikz} + D \int_A f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \, dS \quad (\text{AIII}, 1)$$

onde dS é o elemento de área do alvo e A representa a área do alvo atingida pelo feixe incidente. A intensidade das partículas p_1 emergentes (número por unidade de superfície, por unidade de tempo) é:

$$V \Psi_{p_1}^* \Psi_{p_1} = V \left| 1 + D \int_A f(\theta) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right|^2$$

Se não houvesse alvo difusor, esta seria

$$V \left| e^{ikz} \right|^2 = V.$$

A diferença:

$$V - V \left| 1 + D \int_A f(\theta) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right|^2 \quad (\text{AIII}, 2)$$

exprime o decréscimo de intensidade das partículas p_1 do feixe.

De outro lado, o número de partículas desviadas do feixe, por unidade de tempo, por núcleo difusor do alvo, é dado por

$$\sigma_{\text{tot}} V \left| e^{ikz} \right|^2,$$

de modo que o número de partículas desviadas do feixe por unidade de superfície do alvo, por unidade de tempo, é:

$$D \cdot \sigma_{\text{tot}} \cdot V \quad (\text{AIII}, 3)$$

Mas isto é justamente o decréscimo da intensidade do feixe incidente depois de atravessar o alvo, de modo que podemos igualá-lo à expressão (AIII,2):

$$D \sigma_{\text{tot}} V = V - V \left| 1 + D \int_A f(\theta) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right|^2.$$

Desenvolvendo o quadrado do módulo, e desprezando o termo em

$$\left| \int_A f(\theta) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} dS \right|^2,$$

por conter o fator $1/r^2$, obtemos:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_A f(\theta) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} + f^*(\theta) \frac{e^{-ik(r-z)}}{r} dS$$

A diferença para o cálculo de II, 11) reside no fato

de que aí nós calculamos a função de onda, em um ponto P, das partículas p_1 espalhadas, como contribuição de tôdas as ondas parciais geradas em cada um dos núcleos do alvo. A intensidade daí resultante ainda terá de ser integrada sôbre todos os pontos P da fenda coletora, para obtermos o número total de partículas p_1 que entram na fenda por unidade de tempo. Assim, o decréscimo experimental do número de partículas que penetram na fenda por segundo devido a colocação do alvo difusor é dado por:

$$\int_{\text{fenda}} D \sigma_{\text{tot}} V \cdot dS = \int_{\text{fenda}} dS \int_{\text{alvo}} DV \left[f^*(\theta) \frac{e^{-ik(r-z)}}{r} + f(\theta) \frac{e^{ik(r-z)}}{r} \right] dS$$

Fazendo as mesmas aproximações que em II, 17 (provenientes da grande distância da fenda ao alvo), isto é, substituindo

$$(r-z) \text{ por } \frac{1}{2} \cdot \rho^2/R, \quad 1/r \text{ por } 1/R, \quad \theta \text{ por } 0,$$

onde ρ representa a distância perpendicular à direção de Z entre o ponto do alvo e o ponto P da fenda, e R a distancia entre a fenda e alvo, obtemos, como lá, que a intensidade das partículas no ponto P da fenda é uma função rapidamente oscilante com a posição do ponto. Se o feixe fôr perfeitamente circular, de contôrno bem definido, esta vale, sôbre o eixo do mesmo,

$$D V f^*(0) \frac{2\pi}{ik} \left(1 - e^{-ik \frac{\epsilon^2 R}{2}} \right) - D V f(0) \frac{2\pi}{ik} \left(1 - e^{ik \frac{\epsilon^2 R}{2}} \right)$$

A densidade das partículas no alvo, porém, não é uniforme, os contornos do feixe incidente não são muito bem definidos, nem o feixe é perfeitamente monocromático. Então, como no caso, por exemplo, de uma moeda (as dimensões são grandes comparadas com o comprimento de onda) colocada num feixe de luz que vem de uma fonte não perfeitamente uniforme, a distribuição de luz na região da sombra não oscila violentamente no espaço, mas é uma média sôbre as intensidades de diversas situações idealizadas teóricamente. Um exemplo é dado por um feixe de luz perfeitamente monocromático, de fonte puntiforme, mas um disco variando em tórno de uma posição média, o que é semelhã-

te a impor que o contôrno do disco não seja perfeitamente bem definido. No nosso caso, o contôrno do feixe não é perfeitamente definido, pois supõe-se o alvo maior que o feixe).

Como ainda variamos a posição de P sôbre tôda a área da renda, podemos substituir a intensidade acima calculada pela intensidade média, isto é, tomar as expoenciais como nulas. Obtemos então a expressão deduzida na pag.

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{k} \frac{f^*(0) - f(0)}{2i} = 4\pi \chi^2 \left(\frac{\sigma_{\text{esp}}(0)}{\chi^2} \right)^{1/2} \text{sen } \eta$$

APÊNDICE IV

Emissão eletromagnética do núcleo: Esboço do cálculo teórico*

A base de tôdas as estimativas teóricas é calcular, por meio da teoria das perturbações, a probabilidade P de emissão por segundo de um foton do núcleo:

$$P = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 \rho_E$$

A hamiltoniana de perturbação entre o campo eletromagnético de radiação (caracterizado pelo potencial A dos ftons "transversais") e a partícula carregada dentro do núcleo, é tomada, no caso relativístico, como**

$$H' = -e \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{A}$$

em que $\vec{\alpha}$ representa as 3 conhecidas matrizes de Dirac que operam sobre as 4 componentes do spinor da partícula carregada, relativística. \vec{A} deve ser tomado no ponto em que está a partícula e vale:

$$\vec{A} = \sqrt{\frac{4\pi}{\text{vol}}} \sum_{\vec{k}=-\infty}^{\vec{k}=\infty} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^+) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \vec{e}_{\vec{k}}$$

\vec{k} é o vetor de propagação de cada onda parcial.

$$|\vec{k}| = |\vec{p}|/\hbar = \omega_k/c;$$

* Dedução dos resultados usados nas pags.

** Veja por exemplo, Heitler, The Quantum Theory of Radiation, Oxford, 2ª. ed., pag. 91 e 92.

E_γ é a energia do foton e vale $\hbar\omega_k$;

$a_{\vec{k}}$ é o operador de absorção do foton, cujo vetor de propagação é \vec{k} ;

$a_{\vec{k}}^+$ é o operador de emissão do foton cujo vetor de propagação é \vec{k} ;

$\vec{e}_{\vec{k}}$ é o vetor de polarização do foton cujo vetor de propagação é \vec{k} ;

$$\vec{e}_{\vec{k}} \cdot \vec{e}_{\vec{k}} = 1, \quad \vec{e}_{\vec{k}} \cdot \vec{k} = 0;$$

Vol é o volume de periodicidade. Se forem cubos cujos lados valem L cm, então as três projeções de cada k sobre as arestas dos cubos devem ser múltiplos inteiros de $2\pi/L$, e tôdas as quantidades se repetem periodicamente de cubo em cubo.

O elemento de matriz do operador $a_{\vec{k}}$ entre o estado inicial, em que há $n_{\vec{k}}$ foton de vetor de propagação \vec{k} , e o estado final de $n_{\vec{k}} - 1$ vale:

$$\sqrt{n_{\vec{k}}} e^{-i\omega_k t}$$

O elemento de matriz de $a_{\vec{k}}^+$ entre o estado inicial, em que há $n_{\vec{k}}$ foton de vetor de propagação \vec{k} , e o estado final, de $n_{\vec{k}} + 1$, vale:

$$\sqrt{n_{\vec{k}} + 1} e^{i\omega_k t}$$

O elemento de matriz M vale, no caso em que um foton é emitido na direção \vec{k} , com a polarização $\vec{e}_{\vec{k}}$ (caso relativístico), é:

$$M = -e \sqrt{\frac{\hbar\pi c^2}{Vol}} \frac{\hbar}{2\omega_k} \int_{Vol} \Psi_f^* (\vec{\alpha} \cdot \vec{e}_{\vec{k}}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \Psi_i d^3x$$

onde Ψ_i e Ψ_f são as funções de onda da partícula no núcleo, antes e depois de emissão. A densidade ρ_E de estados finais por unidade de energia final vale:

$$\rho_E = \frac{p^2 dp d\Omega Vol}{(\hbar \cdot 2\pi)^3 dE} = \frac{\omega_k^2 d\Omega}{\hbar(2\pi)^3 c^3} Vol,$$

onde p é o momento do foton emitido ($pc = \hbar\omega = E$) dentro de uma região de volume Vol, e num ângulo sólido $d\Omega$.

Obtemos, portanto, para o inverso da vida média, que é a proba-

bilidade por segundo, P, de foton-emissão:

$$1/\sigma_{\gamma} = P = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar 2\pi c^2}{\omega_k} |M|^2 \frac{\omega_k^2 d\Omega}{\hbar (2\pi)^3 c^3} \quad (\text{A.IV. } \gamma)$$

onde

$$M = e \int \Psi_f^* (\vec{\alpha} \cdot \vec{e}_{\vec{k}}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \Psi_i d^3 x.$$

No caso não relativístico dos nucleons (êctes então são descritos por spinores a duas componentes, que exprimem as direções do spin, e são operados por σ , as matrizes de Pauli)*:

$$M = e \int \Psi_f^* \left(\frac{\vec{p}}{mc} + i\vec{\sigma} \wedge \frac{\vec{k}\hbar}{mc} \right) \vec{e}_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \Psi_i d^3 x.$$

\vec{p} e m são o momento e a massa do nucleon. Para as energias usuais do foton (de γ MeV) a exponencial vale aproximadamente 1, (para distâncias até da ordem do raio nuclear r_A ; para distâncias maiores, os Ψ se anulam) podendo ser desenvolvida em potências de kr_A , que é pequeno. Para um núcleo $A = 125$, $E = \gamma$ MeV, por exemplo, temos:

$$kr_A = \frac{r_A}{\lambda} = A^{1/3} \frac{e^2}{2m_e c^2} \frac{2m_e c^2}{c} = \frac{5}{137} \sim \frac{1}{27}$$

Aqui fizemos uso do fato de que $r_A = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 = 1.40 \cdot 10^{-13}$ cm) coincide com $e^2/m_e c^2$.

Substituindo 1 pelo exponencial, obtem-se as radiações de dipólo. Podem ser eléctrica ou magnética conforme forem produzidas pela primeira ou segunda parte do parêntesis do elemento de matriz. A primeira parte produz as radiações de dipólo, eléctrico, pois*:

$$\frac{e}{mc} \int \Psi_f^* \vec{p} \Psi_i d^3 x = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \Psi_f^* e\vec{x} \Psi_i d^3 x = -i \frac{\omega}{c} \int \Psi_f^* e\vec{x} \Psi_i d^3 x;$$

ela corresponde a um movimento de dipólo eléctrico no interior do núcleo.

A segunda parte do elemento de matriz produz as radiações di-

* Heitler loc. cit. pag. 105.

pólo magnético, pois:

$$i \int \psi_f^* (\vec{k} \cdot \vec{e}_k) \frac{e\hbar}{mc} \sigma \psi_i d^3x = i \omega \int \psi_f^* \mu \vec{\sigma} \psi_i d^3x$$

(onde $\mu = e\hbar/mc$); ela corresponde ao movimento de um dipolo magnético de momento μ no interior do núcleo. A relação entre os elementos de matriz do dipolo magnético e dipolo elétrico vale aproximadamente:

$$\int \psi_f^* \mu \vec{\sigma} \psi_i d^3x / \int \psi_f^* e \vec{x} \psi_i d^3x \sim \frac{e\hbar}{2mc} / e r_A = \frac{\hbar}{mc} / 2r_A.$$

A vida média para radiação de dipolo magnético τ_{magn} excede τ_{el} pois a vida média para radiação de dipolo elétrico por um fator $(\frac{2r_A}{\hbar/mc})^2$

$$(\tau_{\text{magn}})_{AI} = (\tau_{\text{el}})_{AI} \left(\frac{2r_A}{\hbar/mc}\right)^2.$$

Para $A \sim 125$, este fator é da ordem de $5 \cdot 10^3$.

Se o elemento de matriz para dipolo elétrico, por exemplo, se anula (o que é muito comum), então o segundo termo do desenvolvimento da exponencial ($\vec{k} \cdot \vec{x}$) torna-se importante, e teremos então radiação de quadripolo elétrico. Ela tem uma vida média de ordem $(kr_A)^{-2}$ vezes mais longa que a do dipolo, isto é, da ordem de 10^3 vezes mais longa. Da mesma ordem é a relação da vida média da radiação de dipolo elétrico e magnético, de modo que dipolo magnético e quadripolo elétrico têm a vida média da mesma ordem. Diz-se que são da mesma ordem de múltiplos $\Lambda = 2$.

Note-se que a regra de seleção para dipolo elétrico é $\Delta I = 1$, mudança de paridade, pois o \vec{x} no elemento de matriz é uma função assimétrica das coordenadas, o que faz com que os estados inicial e final difiram de paridade espacial, e, além disso, quanto à mudança de momento angular, funciona como uma partícula de spin 1. (Compare com pag. 75

Para a radiação de dipolo magnético, o elemento de matriz é o do operador $\vec{\sigma}$. Este não produz mudança de paridade, mas exige mudança de momento angular $\Delta I = 1$ (pois $\vec{\sigma}$ é um "vetor". Compare com a pag. 75). Podemos justificar assim a tabela V., pag 94.

Note-se que o foton é uma partícula de spin 1. Ela deve levar consigo a variação do momento angular total do núcleo. Esta nunca pode ser menor que 1 para que haja emissão de foton.

Em particular obtemos, utilizando (A IV, 1) a vida média para

radiação de dipólo elétrico:

$$(\gamma/\tau)_{E1} = \left(\frac{\omega k}{c}\right)^3 \frac{1}{4\pi^2} \cdot \left| \int \Psi_f^* \vec{x} e \Psi_i d^3x \right|^2$$

a qual substituindo $\left| \int \Psi_f^* \vec{x} e \Psi_i d^3x \right|^2$ por $r_A^2 e^2$, se reduz, a menos de fatores, à expressão geral (III. 1) da pag. tomada para $\Delta I = 1$. À medida que a ordem aumenta para quadripólo, octopólo etc. aparece o fator adicional:

$$(r_A/\lambda)^2, (r_A/\lambda)^4 \text{ etc.},$$

também de acôrdo com os resultados da pag

Resta ainda descrever a maneira de reconhecer experimentalmente a ordem do múltiplo, e saber se é elétrico ou magnético.

A comparação da vida média da radiação com a estimativa teórica determina a ordem do múltiplo com uma segurança de uma unidade.

A medida do coeficiente de conversão interna permite distinguir entre múltiplo elétrico e magnético, pois é diferente para os dois casos. Conversão interna é o processo em que um dos eletrons atômicos internos da órbita K, ou possivelmente L, é emitido em vez de raio gama. O eletron é monocromático, de energia igual à do raio menos a energia de ligação ao átomo (da órbita K ou L), facilmente distinguível por isso, dos eletrons da desintegração do núcleo pai usualmente também presentes, e de espectro contínuo.

Um exemplo em que se utilizam os eletrons de conversão interna da substância filha (Xe^{137}) para estudar o esquema da desintegração da substância pai (In^{113}), e determinar a ordem de múltiplo da radiação gama da substância filha, é dado por R. E. Bell e R. L. Graham*.

O coeficiente de conversão interna K, α_K , é definido como a relação entre o número de eletrons K emitidos e o número de fons da radiação γ emitida. Ele depende sensivelmente do caráter do múltiplo da radiação. Existem calculos relativísticos de α_K por Rose et al.**

* Phys. Rev. 86, 212 (1952)

** M. E. Rose, et al. Phys. Rev. 83, 79, 1951.

Para uma determinada energia do raio γ , α_K aumenta fortemente (semelhantemente a uma exponencial) com a ordem do multipólo elétrico ou magnético. Para energias altas do raio γ o aumento de α_K não é tão rápido como para energias baixas. Para multipólos magnéticos α_K é mais alto geralmente que para multipólo elétrico de mesma ordem. Para Z baixo e energias baixas, o contrário pode acontecer.

Experimentalmente, mais fácil que obter α_K é comparar o número dos eletrons K com os eletrons L, isto é, medir a relação K/L. Esta também depende de modo muito sensível da natureza do multipólo da radiação emitida. Não existem ainda cálculos relativísticos da mesma, mas existem curvas experimentais de K/L em função de Z^2/E , (onde E é energia do raio γ em KeV para diversos multipólos), de Goldhaber e Sunyar*. K/L diminui à medida que a ordem do multipólo aumenta (para $Z^2/E \sim 10$, K/L ~ 5 para quadrupólo (2^2) elétrico e ~ 1.5 para 2^1 -pólo elétrico); K/L é mais alto para multipólo magnético que para o correspondente elétrico, e diminui à medida que a energia diminui.

Uma maneira simplista de descrever a conversão interna, isto é, o processo da transferência da energia nuclear ao eletron no exterior do núcleo, é dizer que o raio γ é emitido do núcleo e absorvido pelo eletron atômico na órbita K (ou L, etc.). Esta não é uma maneira muito correta, pois há casos de conversão interna em que o raio γ não pode ser emitido (por exemplo quando o spin nuclear é 0, e não pode produzir portanto um foton de spin 1).

Como a interação entre eletrons externos ao núcleo, e a distribuição de cargas internas ao núcleo pode ser descrita por meio de troca de fotons tanto reais como virtuais, pode-se manter a descrição acima da conversão interna, incluindo, porém, a possibilidade da contribuição de "fotons virtuais" ao processo.

*N. Goldhaber e A. W. Sunyar. Phys. Rev. 83, 906 (1951)

I N D I C E A L F A B E T I C O

absorção de neutrons lentos 40, 43

Adair, R. K., 40

atrito de ressonância 47

barreira de potencial:

-coeficientes de transmissão e reflexão 13

-e não sobre a função de onda 14

-equivalência aos planos e coeficientes de transmissão e reflexão 17, 37

-exemplo para a absorção de neutrons lentos 40, 43

Bell, R. G., 131

Botho, H., 21

Breit, G., 21

captura K 56, 65

competição entre a captura K e o α -emissão 57

conversão interna 131

dephasagem

-determinação gráfica 25

-dificuldades 79

-elemento da matriz hamiltoniana de perturbação 58

-e modos das camadas 92

-forma do espectro dos eletrons 63

-gráfico de Kurie 64, 65

-influência das forças coulombianas 64

-paridade de onda 61

-regras de seleção de Fermi 62

-regras de seleção de Gamow-Teller 69, 76, 79

-transições permitidas 62, 65

-transições proibidas 62, 73, 76, 78

-vida média 66

desintegração do núcleo composto como função do tempo 29, 35

Dirac, P. A. M., 57, 60, 64

elemento da matriz na desintegração beta 58, 59

-e oscilla para descrever a desintegração beta 67

-exemplo para a desintegração do neutron livre 59

-exemplo para a desintegração do neutron no núcleo 60

-o regra de seleção 74, 76

-investigação das formas gerais possíveis 68

-investigação de alguns operadores de interação 69

-invariância relativística 71

-no caso de transições proibidas, espectros unívocos 78

emissão beta 56

emissão eletro-magnética do núcleo 92, 127

emissão de eletrons 56

emissão de positrons 56

energia de ligação 2, 4, 5

-negativa na descrição da desintegração beta 57

energia de ressonância 9, 23
equação de Schroedinger 16, 19
espalhamento

- das partículas alfa 15
- de potencial 26
- de ressonância 11, 26, 27
 - comparação com a experiência 28
 - determinação do momento angular envolvido 28
 - para reações nucleares 9, 46, 49
- para frente e reação nuclear 52, 123
- simples 9

espectro dos elétrons na desintegração beta 63, 64
-para transições proibidas 78

Feynberg, E., 64, 67

Feld, B. T., 40

Fermion 50 ;

Feshbach, H., 21

fôrça p-p 5

fôrça n-n 5

fôrça coulombiana e desintegração beta 63

FT na desintegração beta

- definição 67, 100
- núcleos com A ímpar 102
- núcleos com A par 110
- transições super-permitidas 101
- valores experimentais: grupo Wigner 101

funções de onda

- amplitude no interior do núcleo composto 22, 41
- estacionárias, associadas a uma barreira de potencial 37
- incidente, refletida e transmitida em face de uma barreira 17, 37
- na desintegração de núcleo como função do tempo 30, 32
- no caso de reações nucleares 48
- no espalhamento 112
- no espalhamento elástico de ressonância 24, 27

Goldsmith 40

Goldhaber, M., 52, 132

gráfico de Kurie 64, 65

Graham, R. L., 131

Halliday 5

Haxel 56, 84

Heitler 60, 127, 129

Ibsen 40

Interação coulombiana na desintegração beta 64

interferência entre onda incidente e difundida durante o espalhamento 54

Jensen 56, 84

Koester, L. J., 21

Mayer, M. G., 56, 84
Massey 112
mecânica quântica 1
medida de fluxo de neutrons de 1,4 eV 43
modelo de camadas 4, 84
-as regras 86
-comparação com a experiência 89
-e desintegração beta 98
-FT 100
-isômeros 92
-ordem das órbitas núcleo par-ímpar 89
-ordem das órbitas núcleos-ímpar-ímpar 97
modelo da gota líquida 2
modelo de núcleo, aperfeiçoamento, 37
modelo de núcleo composto 3
modelo de potencial nuclear para espalhamento de ressonância 21, 37, 42
modelos nucleares 2
Moszkowski 100, 104
Mott 112
neutrino 56
-influência de sua massa na desintegração beta 64
neutron 2
-absorção de neutron lento 40, 43
níveis excitados do núcleo 8
Nordheim, L. W., 100, 104
núcleo composto 3
-e desintegração em função do tempo 29
-e reações nucleares 46
núcleo com A ímpar 102
núcleo com A par 110
núcleos especulares 101
números de transições por segundo em uma reação 50, 119
números mágicos 84
onda incidente, refletida e transmitida em face de uma barreira de potencial 16
operador de interação na desintegração beta
-aproximação não relativística de alguns operadores 71
-e regras de seleção 74, 76
-estudo de alguns operadores particulares 69
-sua forma para transições proibidas, com espectro unívoco 70
órbita dos nucleons e modelos das camadas 85
paridade na desintegração beta 61
partículas energéticas, intensidade 123
Peaslee, D. C., 21
Placzek, G., 21
potencial das forças nucleares para estudo da ressonância
-com energia de ligação igual a zero 16
-com energia de ligação maior que zero 37
-máxima eliminação das restrições 44
potencial das forças nucleares e modelos das camadas 85
princípios fundamentais 1

princípio de balanço detalhado 49, 118
protons 2
probabilidade de transição entre dois ou mais estados 50, 58, 121
-na desintegração beta 62, 63
probabilidade de foton-omissão 129

radiação eletro-magnética dos núcleos 92, 127
-de dipolo 129
-ordem de multipolo 130
-vida média de emissão 92, 129

raio nuclear 3
-e desintegração alfa 12

reações nucleares 46, 49

regras de seleção na desintegração beta 61, 62
-de Fermi 62
-de Gamow-Teller 71, 76, 79

ressonância
-energias de, 22
-determinação do momento angular correspondente a cada pico de, 28
-meia largura do pico 24, 27, 29, 40, 43, 47
-secção de choque para espalhamento elástico 29
-secção de choque para reações nucleares 46, 49

Rose, M. E., 131

Schmidt, linhas de, 89

secção de choque
-completa, definição da, 27
-definições 119
-de espalhamento 16, 54, 112
-de ressonância, espalhamento elástico 29
-diferencial, obtenção de, 27
-o princípio de balanço detalhado 50, 118
-e relações entre o espalhamento para a frente e reações nucleares 52, 125
-para a absorção de neutrons lentos 40, 44
-reações nucleares 46
-relações gerais 49

Sness 56, 84
Sunyar, A. W., 92, 132

transição permitida na desintegração beta 62, 65
-probabilidade de, 58, 63

Trigg, G., 64, 67

~~vazamento mecânico, quântico~~ 12
vida média na desintegração beta 66

Weisskoff, F. F., 29
Wigner, E., 21
Wigner, E., grupo de, 101
Willey, S., 118
Wu, C., 64, 66