

CBPF-MO-004/85  
INTRODUÇÃO AO ESTUDO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO  
EM TEORIA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA DOS CAMPOS †

por

Juan Alberto Mignaco e Itzhak Roditi\*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq  
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150  
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

† Versão ampliada das aulas ministradas por J.A. Mignaco na III Escola de Verão de Partículas e Campos, "Jorge André Swieca", São Paulo, Fevereiro 1985.

\*Atualmente no Département de Physique Théorique,  
U. de Genève, Genebra, Suíça

ERRATA

Página	Local	Onde se lê	Leia-se
11	Eq. (3.9)	pq	pq̇
20	Eqs. (3.28b) e (3.28c) membro da direita	$Z_3$ $Z_1$	$Z_3$ $Z_1$
21	Eqs. (3.31a,b,c,) Eq. (3.31c)	$\Gamma_R$ $S_\mu$	$\tilde{\Gamma}_R$ $S_\mu$
23	Eq. (3.36)	$\Gamma(n)$	$\tilde{\Gamma}(n)$
29	Última linha, 1º parágrafo Penúltima linha antes da Eq. (3.45)	QCD $\beta, \lambda^*$	CDQ $\beta, \lambda_1^*$
31	$\beta(\lambda)$	$1420,69 \frac{\lambda^4}{(2\pi)^1}$	$1420,69 \frac{\lambda^6}{(2\pi)^{10}}$
34	ii) O esquema MOM	MOM	MOM <sup>(7)</sup>
35	Eq. (4.5)	3c'ã"	3c'â
40	14 <sup>a</sup> linha do texto	sistemas	esquemas
45	Eq. (5.13)	$\Gamma(n), \Gamma_0(n)$	$\tilde{\Gamma}(n), \tilde{\Gamma}_0(n)$
47	Última linha	5.20	(5.20)
55	Eq. (6.23b) Última tabela	$r_{cc}$ $\sigma$	$r_{cc}^\alpha$ $\alpha$
58	Ref. 1) 2 <sup>a</sup> linha acima de <u>UA2</u> :	55 GeV/c <sup>2</sup>  CERN SPS	95 GeV/c <sup>2</sup>  CERN SPS

Página	Local	Onde se lê	Leia-se
60	1 <sup>a</sup> linha abaixo de 8)	skagerstam",	Skagerstam,"
61	Ref. 12), 2 <sup>a</sup> linha	quantentheories	quantentheorie
64	Ref. 32), 2 <sup>a</sup> linha Ref. 39), 3 <sup>a</sup> linha	magnetischm  Hanni	magnetischen  Hänni

## 1 PRELIMINARES

A teoria quântica dos campos aparece como candidata natural a descrição da física das partículas elementares. Em particular, a teoria eletrofraca recebeu ultimamente um crédito enorme com a descoberta dos mésons  $W^\pm$  e  $Z^{(1)}$ ; e do lado das interações eletromagnéticas, a precisão obtida na descrição quantitativa dos fenômenos<sup>(2)</sup> é quase insuperável em qualquer domínio da ciência.

A cromodinâmica quântica (CDQ)<sup>(3)</sup>, por sua vez, parece se encontrar perto de fornecer uma descrição para os processos em que intervêm hadrons.

A característica comum de todas as teorias citadas acima é que são renormalizáveis. No espaço-tempo de quatro dimensões, a renormalizabilidade pode ser traduzida como o fato da constante de acoplamento entre fermions (quarks e léptons) e bósons de gauge ser adimensional. Esta propriedade caracteriza também outras teorias que não possuem invariância de gauge local, como por exemplo o modelo "de Yukawa"<sup>(4)</sup> que envolve campos com spin 0 e 1/2.

A renormalização de uma teoria significa que os seus parâmetros numéricos podem se transformar sem que isso signifique uma mudança nos valores das quantidades físicas que essa teoria permite calcular. Essa liberdade na reparametrização que só caracteriza as teorias renormalizáveis é expressa pelo "grupo de renormalização".<sup>(5)</sup>

De propósito não falamos ainda em expansão perturbativa, mesmo para enfatizar que a renormalizabilidade é sinônimo de

invariância da física de uma teoria perante reparametrizações. Isto se reflete na expansão perturbativa, na equivalência entre os resultados físicos, independentemente do procedimento de *regularização* das integrais mal definidas que se encontram no cálculo perturbativo. De fato, regularizações diferentes produzem resultados diferentes para quantidades físicas, mas veremos que precisamente o "grupo de renormalização" permite não só explicar as diferenças mas também aprimorar os resultados. (6)

Não há nenhuma contradição no exposto acima. O cálculo exato de uma quantidade física é independente da parametrização de uma teoria, mas a expansão perturbativa não. Esta peculiaridade é que suscitou uma renovação do estudo e compreensão do "grupo de renormalização" nos últimos seis anos. (7)

A compreensão do problema suscitado pela invariância perante o "grupo de renormalização" é na atualidade muito importante para o correto limite do contínuo no estudo das teorias na rede (8).

Nestas aulas tentaremos expor uma visão do problema em caráter introdutório apontando, no sentido de ilustrar, os aspectos mais gerais do "grupo" e sua caracterização mais global. As linhas básicas se encontram na tese de doutoramento de Itzhak Roditi (9) que contém algumas contribuições e durante a realização da qual aprimoramos o nosso entendimento sobre a questão.

O material necessário para acompanhar estas aulas se encontra nas notas do curso do Prof. H. Fleming na Primeira Escola de Verão Jorge André Swieca, em 1981, aonde se faz inclusive uma introdução ao "grupo de renormalização" restrita à

invariância de escala. Uma análise parecida no caso da CDQ se encontra no curso de Ronald Shellard, na Segunda Escola Jorge André Swieca (1983).

Vamos iniciar por um histórico curto da matéria, para depois fazer um resumo das expressões e quantidades de interesse para o tratamento da teoria de campos. A seguir, desenvolveremos uma primeira aproximação, introduzindo o conceito de reparametrização. Logo introduziremos a conhecida equação do "grupo" para mudanças de escala, e ilustraremos algumas de suas consequências físicas no comportamento assintótico.

A seguir, voltaremos a reexaminar a questão do ponto de vista da teoria de perturbações. Mostraremos o aparecimento de parâmetros do grupo e sua mudança, e introduziremos o conceito de "esquema de renormalização" mais quantitativamente.

Passaremos, a seguir, a examinar nas linhas do Stevenson<sup>(6)</sup> a caracterização do grupo e desenvolveremos a idéia de "aprimoramento" dos resultados perturbativos, com algumas aplicações.

Para concluir, teceremos algumas considerações sobre diferentes problemas: qual é a provável origem da invariância perante o grupo, o significado físico da escala  $\Lambda$  em CDQ, o sentido da convergência da série perturbativa, etc.

## 2 HISTÓRICO

Chegar ao entendimento das propriedades do grupo de renormalização sempre esteve ligado ao cálculo em teoria de perturbações.

Em 1930, Oppenheimer e Waller<sup>(10)</sup> apresentaram evidências da divergência no cálculo perturbativo até 2ª ordem da energia própria do elétron. As divergências ultravioletas continuaram dando praga aos cálculos em teoria dos campos quântica relativística até que Stueckelberg, Bethe, Schwinger, Tomonaga, Feynman e Dyson<sup>(11)</sup> mostraram que na eletrodinâmica elas podiam ser absorvidas na redefinição dos parâmetros dos quais viesse a depender a teoria, no caso, a carga do elétron e as massas do elétron e do fóton, e na definição dos estados assintóticos. Ainda mais, que esse processo podia ser conduzido consistentemente a todas as ordens em teoria de perturbações. Na formalização dessa propriedade contribuíram posteriormente Bogoliubov e Parasiuk, Hepp e Zimmermann.<sup>(12)</sup>

Stueckelberg e Petermann<sup>(5)</sup> em 1953 se deram conta da existência de transformações gerais para as quais puderam escrever equações de Lie. Em 1954 Gell-Mann e Low<sup>(13)</sup> estudaram o caso particular do subconjunto dessas transformações que correspondia as transformações de escala ou dilatações, e encontraram uma equação diferencial:

$$\left[ X \frac{\partial}{\partial X} + M \frac{\partial}{\partial M} - \psi(\alpha_\mu, M) \frac{\partial}{\partial \alpha_\mu} \right] D(X, M, \alpha_\mu) = 0 \quad (2.1)$$

em que

-5-

$$D\left(\frac{q^2}{\mu_1^2}, \frac{m^2}{\mu_1^2}, \alpha_{\mu_1}\right) = D\left(\frac{q^2}{\mu_2^2}, \frac{m^2}{\mu_2^2}, \alpha_{\mu_2}\right) = \alpha \, d\left(\frac{q^2}{m^2}, \alpha\right),$$

é uma "carga invariante" relacionada com o propagador do fóton

$$D_{F_{\mu\nu}}(q) = -\frac{i}{q^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) d\left(\frac{q^2}{m^2}, \alpha\right) - i\xi \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2)^2},$$

e as constantes ou os parâmetros em (2.1) são:

$m$  : massa do elétron ;

$\mu_k$  ( $k=1,2$ ): valor de uma quantidade de referência, com dimensão de massa, na qual é definida a constante de acoplamento,  $\alpha_{\mu_k}$  :

$$D\left(1, \frac{m^2}{\mu_k^2}, \alpha_{\mu_k}\right) = \alpha_{\mu_k} ;$$

$\xi$ : parâmetro que fixa o gauge.

As transformações que intervêm são as dilatações:

$$\mu_1 \longrightarrow e^t \mu_1 = \mu_2 \quad (t \in \mathbb{R})$$

Por último,

$$\psi(\alpha_\mu, M) = \left[ \frac{\partial D(e^t q^2, M, \alpha_\mu)}{\partial e^t} \right]_{t=0}$$

é a função de Gell-Mann e Low. Com ajuda da equação (2.1) estudaram-se as propriedades assintóticas da teoria.

No fim da década de 1960, as propriedades sob transformação conforme e, em especial, dilatações, estavam sob estudo em relação à propriedade de "escala" nas amplitudes que se ob-



tinham aplicando a álgebra de correntes para escrever regras de soma. Os então espantosos resultados nos experimentos de espalhamento anelástico profundo (DIS: deep inelastic scattering) de elétrons por prótons em SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) mostravam o aparecimento muito cedo da simetria perante dilatações. Esses estudos levaram à obtenção da equação de Callan-Symanzik<sup>(14)</sup>, cuja versão para uma teoria com interação  $\lambda\phi^4$  é:

$$\left[ m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + \beta(t) \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + N\gamma_R(t) \right] G_R^{(N)}(q; \lambda_R, m_R) = -i\delta_R(t) G_R^{(N)}(\Delta; q; \lambda_R, m_R) \quad (2.2)$$

Aqui  $m_R$  é a massa renormalizada da teoria,  $N$  o número de linhas externas da função de Green conexa  $G_R^{(N)}(q; \lambda_R, m_R)$ , em que  $q$  designa aos  $N-1$  quadriimpulsos independentes, e  $G_R^{(N)}(\Delta; q; \lambda_R, m_R)$  no membro da direita, é o resultado de incluir uma inserção  $-i\Delta\phi^2$  na função de Green à esquerda, ou seja, de mudar o termo de massa no lagrangeano para testar como muda por sua vez a transformação sob dilatações parametrizadas, como antes, por  $t$ .

A função  $\gamma(t)$  recebe o nome de "dimensão anômala" por razões que veremos depois, e a função  $\beta$  (que pode-se mostrar que é parente próximo da função de Gell-Mann e Low) é muito importante neste jogo: ela determina, por exemplo, que a CDQ seja "assintoticamente livre"<sup>(15)</sup>, o que permitiu dar resposta teórica à invariância encontrada em SLAC no espalhamento profundo. A função  $\delta(t)$  não merece nenhuma consideração especial.

Os anos do início da década de 1970 testemunharam muita mo

-7-

vimentação em torno da invariância por dilatações ou invariância de escala. O papel da invariância mais global perante transformações do "grupo de renormalização" só foi relevante quando os cálculos perturbativos em ordens maiores<sup>(7)</sup> mostraram nos finais dessa década a sensibilidade do resultado à escolha do método de regularização e a fixação dos parâmetros da teoria, no caso a CDQ. Daí por diante se deu um processo de lenta assimilação do significado do grupo de renormalização, apesar da existência de trabalho de Stevenson<sup>(6)</sup>, Petemann<sup>(16)</sup>, e outros<sup>(17)</sup> em que o problema é analisado com maior rigor.

A caracterização do grupo de renormalização não é unívoca, e isto leva a escrever equações que generalizam as de Gell-Mann e Low e Callan e Symanzik e lembram as que originalmente foram escritas pelos pioneiros<sup>(5)</sup>, mas hoje em dia se compreende melhor o significado dos diferentes parâmetros que o "grupo" permite introduzir.

### 3 ALGUMAS DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES ELEMENTARES

Vamos tomar como protótipo, por enquanto, a teoria de campo escalar com autointeração cujo lagrangeano clássico é:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (3.1)$$

Estamos supondo que estamos num espaço de Minkowski cuja assinatura é  $(1, -1, -1, -1)$ , ou, simplesmente, aonde para uma partícula livre de massa  $M$ , o quadriimpulso satisfaz  $p^2 = M^2$ . Também, como sempre, tomamos as unidades "naturais", i.e.,  $\hbar = c = 1$  e isto permite esconder, neste lagrangeano (3.1) que o termo de massa levaria um coeficiente  $(m^2 c^2 / \hbar^2)$ .

Dispondo do lagrangeano clássico, a passagem ao regime quântico procede via integração de trajetórias e define-se o funcional gerador da teoria, em termos de uma variável clássica  $J(x)$ , que corresponde a amplitude de transição vácuo-vácuo entre estados nos remotos futuro e passado:

$$Z\{J\} = \langle \Omega_+ | \Omega_- \rangle_J \quad (3.2)$$

$$Z\{J\} = \frac{1}{Z\{0\}} \int \mathcal{D}\{\phi\} \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + J\phi) \right] \quad (3.3)$$

Supõe-se que  $J$  é uma função suave que tende rapidamente a zero fora de uma região finita do espaço-tempo.

Aqui, a informação quântica está contida na resposta de um sistema sob a ação de  $J$ , e essa resposta é expressa em termos das funções de Green, que fazem as vezes de uma suscepti-

bilidade.

$$G_{\text{disc}}(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x^n)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x^1)} Z\{J\} \Big|_{J=0} \quad (3.4)$$

A operação de passagem à teoria de perturbações se dá via uma identidade da teoria de integrais funcionais com expressões gaussianas ou de Fresnel:

$$\begin{aligned} Z\{J\} &= N \int \mathcal{D}\{\phi\} \exp \left[ i \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{i\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right) \right] \\ &= N \exp \left[ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] \int \mathcal{D}\{\phi\} \exp \left[ i \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right) \right] \end{aligned}$$

Mas esta última sabemos calcular:

$$= N \exp \left[ -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \left( \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^4u d^4v J(u) \Delta_F(u-v) J(v) \right] \quad (3.5)$$

e

$$i\Delta_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik^1 x} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.6)$$

é a função de Green causal (de Feynman) da equação de Klein-Gordon.

É fácil convencer-se que (3.4) no tratamento perturbativo contém partes desconexas. Por exemplo, na função de 4 pontos:

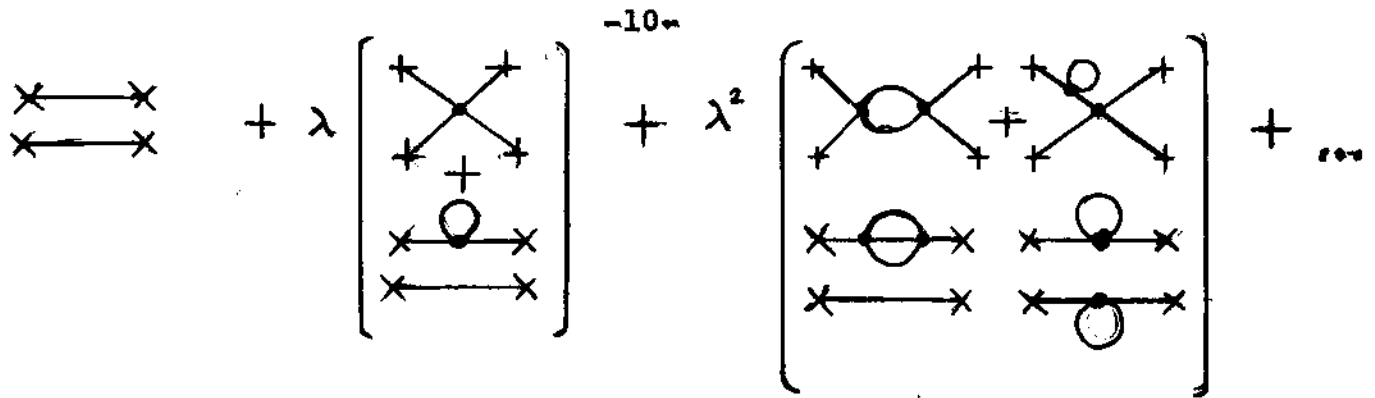


Fig. 1

A notação é: — propagador da partícula ligada ao campo  $\phi$  com massa  $m$  (por enquanto)

• vértice de interação entre campos  $\phi$

x ponto de cálculo da função (uma coordenada que vai nos argumentos em (3.4))

Daqui, surge a utilidade de definir um funcional gerador para as partes conexas:

$$Z\{J\} = \exp \left[ \underline{W}\{J\} \right] \quad (3.7)$$

De novo, para as funções de Green conexas, define-se:

$$G(x^1, \dots, x^n) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x^n)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x^1)} W\{J\} \Big|_{J=0} \quad (3.8)$$

e perturbativamente a função de quatro pontos será:

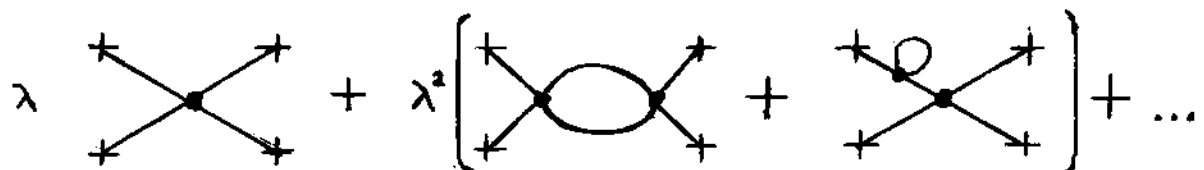


Fig. 2

A adoção da "ordem normal" na formulação canônica habitual é equivalente à subtração de diagramas com inserções nas linhas:

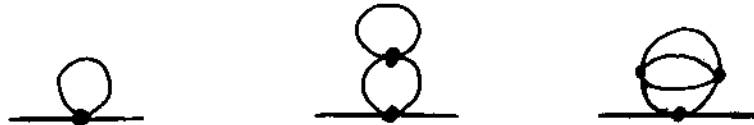


Fig. 3

Note-se ainda que existe a possibilidade de diagramas com uma repetição geométrica. Por exemplo:

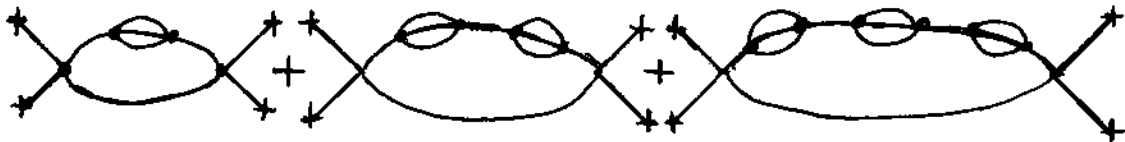


Fig. 4

Para tomar conta desse fato, e de outros mais, é bom introduzir um novo funcional gerador, desta vez dependendo de um campo dito "clássico", mediante a generalização funcional da transformação de Legendre na mecânica:

$$L \longrightarrow H \equiv pq - L \quad (3.9)$$

Assim, define-se o funcional gerador das funções de vértice

$$\Gamma\{A\} = - \int d^4x J(x)A(x) + W\{J\} \quad , \quad (3.10)$$

com as propriedades

$$A(x) = \frac{\delta W\{J\}}{\delta J(x)} \quad , \quad (3.11a)$$

$$\frac{\delta \Gamma\{A\}}{\delta A(x)} = - J(x) \quad . \quad (3.11b)$$

As funções de vértice irredutíveis a uma partícula (IIP) são os coeficientes da série funcional em potências de  $A$ :

$$\Gamma^{(n)}(x^1, \dots, x^n) = \frac{\delta}{\delta A(x^1)} \dots \frac{\delta}{\delta A(x^n)} \Gamma\{A\} \Big|_{A=0} \quad (3.12)$$

Com ajuda das equações (3.10) - (3.12) é possível construir os  $\Gamma^{(n)}$  em termos das  $G(x^1, \dots, x^n)$  e  $G^{\pm 1}(x, y)$ . Por exemplo,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x^1, x^2) &= \int d^4x' d^4y' G^{-1}(x^1, x') G(x', y') G^{-1}(y', x^2) \\ &= -G^{-1}(x^1, x^2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aqui terminam os nossos apertos formais, por enquanto<sup>(18)</sup>. Para o cálculo destas expressões é útil passar o espaço das quadriimpulsões, isto é, fazer as transformações de Fourier correspondentes.

Os observáveis físicos serão expressões em termos de elementos de matriz entre "estados assintóticos" do operador "matriz  $S$ ". Para passar das funções de Green definidas acima (Eq. (3.4)), escreve-se uma "fórmula de redução"<sup>(18,19)</sup>. Não daremos sua expressão formal, mas as etapas da passagem são:

- i) Regue-se a transformação de Fourier da função de Green correspondente a um processo envolvendo os estados assintóticos ( $n$  = soma dos estados "iniciais" e "finais").
- ii) Multiplique-se as linhas "externas" (terminais) da função de Green pela inversa do propagador "livre";
- iii) Tome-se para os quadriimpulsos ao quadrado das linhas externas o valor correspondente a "camada de massa" do respectivo estado assintótico;
- iv) Fixe-se os valores dos impulsos das linhas externas nos valo-

res físicos de interesse, compatíveis com as leis cinemáticas de conservação;

- v) Projete-se com as funções de onda "iniciais" e "finais" os estados assintóticos em estudo.

A aparelhagem para o cálculo em termos perturbativos resume-se nas "regras de Feynman" que apresentam os diferentes textos (3-5, 18-20).

Com os elementos de matriz  $S$  assim calculados obtém-se seções de choque e taxas de desintegração e vidas médias. Estas são as quantidades que devem ser comparadas com as resultantes dos experimentos que se realizam na vida real (como nesta escola Anna Maria E. Endler e Carlos Garcia nos mostraram) e são essas comparações que testemunham sobre a capacidade de uma teoria para representar a Natureza.

O único problema é que o receituário dado até aqui não é completo.

Na hora de calcular, por exemplo, a função de Green de quatro pontos perturbativamente, o primeiro diagrama na Figura 2 é simples, mas o segundo dá uma contribuição divergente. Isto é, o cálculo acaba numa expressão da forma (com o lagrangeano (3.1)):

$$(-i\lambda)(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \left( \prod_{n=1}^4 \frac{1}{k_n^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \cdot \left\{ i\lambda \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k'^2 - m^2 + i\epsilon)} \cdot \frac{1}{[(k' - k_3 - k_4)^2 - m^2 + i\epsilon]} \right\} \quad (3.14)$$

e o integrando da expressão entre chaves vai, no limite  $k' \rightarrow \infty$  como  $k'^{-4}$ , e temos então uma expressão assintótica



$$\frac{d^4 k'}{k'^4}$$

ou uma divergência logarítmica. Em termos formais, a integral (3.14) é uma operação mal definida. Os procedimentos para lhe dar um sentido matemático formal são chamados de *regularização*. Desse procedimentos podemos citar:

i) A introdução de um corte no espaço dos impulsos;

ii) A introdução de um contratermo no lagrangeano (3.1).

A *teoria da renormalização* permitiu estabelecer que os problemas de definição das integrais, como em (3.14), podiam ser resolvidos no final do cálculo de quantidades físicas sem que aí fossem relevantes. Ou, em outros termos, a introdução de cortes no espaço dos impulsos ou de contratermos no lagrangeano não influi na conta final de uma quantidade física (suposta calculada exatamente).

Vamos retomar o problema. Para o tratamento das integrais mal definidas que aparecem no cálculo perturbativo, é mais conveniente trabalhar com as funções de vértices. Para a teoria em questão (Eq. (3.1)) encontra-se a seguinte relação entre o número de anéis  $A$  (loops), as linhas internas de um diagrama  $I$  e os vértices  $V$  em  $\Gamma^{(n)}$ :

$$A = I - V + 1 \quad (3.15)$$

A "contagem de potências" consiste em avaliar o número de anéis, ou seja, de integrais sobre quadriimpulsos  $d^4 k'$ , e o número de linhas internas, obtendo-se assim o "grau de divergência" de um diagrama:

$$D_{\Gamma} = 4A - 2I \quad (3.16)$$

Como o número de linhas externas e o de vértices e linhas internas está determinado:

$$n = 4V - 2I \quad , \quad (3.17)$$

O resultado é que a "divergência"  $D_{\Gamma}$  *independe da ordem perturbativa* e depende só do tipo de função de vértice

$$D_{\Gamma} = 4 - n \quad (3.18)$$

Pela simetria da teoria (Eq. (3.1)), as funções de vértice possíveis têm  $n = 2, 4, 6, \dots$ . Então só as de  $n = 2$  e  $4$  vão apresentar divergências quadrática ( $D_{\Gamma} = 2$ ) e logarítmica ( $D_{\Gamma} = 0$ ) respectivamente.

A análise final do problema de renormalização vai mais longe do que estes comentários introdutórios, e se encontra já em muitos textos como o de Jauch e Rohrlich<sup>(20)</sup> para a eletrodinâmica quântica ou o Itzykson e Zuber<sup>(18)</sup> em termos gerais. Tanto para ilustrar um tipo de problema, a função de 6 pontos deveria ser convergente ( $D_{\Gamma} = -2$ ). Mas este diagrama

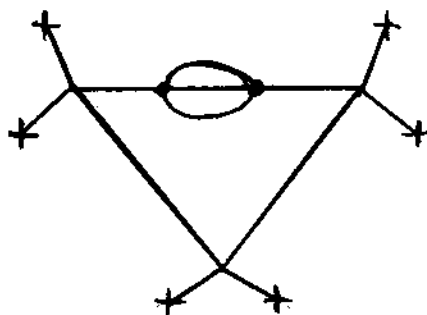


Fig. 5

tem uma contribuição divergente. Claramente, porém, trata-se da inclusão de uma correção sobre uma função de dois pontos, e a definição da função de dois pontos deve permitir a ambigüidade se resolver.

Sem mais, vamos declarar que o problema de definição das expressões perturbativas pode se entender de modo completamente análogo em termos de duas linguagens (ou três, ou N, se fosse o caso). Na linguagem dos contratermos, teremos expressões bem definidas substituindo o lagrangeano (3.1) pelo lagrangeano:

$$\mathcal{L}_R(\phi_R, \partial_\mu \phi_R) = \frac{1}{2} Z_3 (\partial_\mu \phi_R) (\partial^\mu \phi_R) - \frac{1}{2} (m_R^2 - \delta m^2) \phi_R^2 - \frac{g}{4!} Z_1 \lambda_R \phi_R^4 \quad (3.19)$$

Voltamos à expressão anterior se

$$\phi = Z_3^{1/2} \phi_R \quad (3.20a)$$

$$m^2 = Z_3^{-1} (m_R^2 - \delta m^2) \quad (3.20b)$$

$$\lambda = Z_3^{-2} Z_1^{-1} \lambda_R \quad (3.20c)$$

Os fatores  $Z_1$  e  $Z_3$  são números adimensionais, cujo valor depende das convenções utilizadas na regularização das integrais mal definidas, e podem ter partes formalmente infinitas (que a renormalização faz desaparecer). Por exemplo, se os contratermos foram calculados por subtração em (3.14) da integral

$$\int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k'^2 - \mu_0^2)^2}$$

com  $\mu_0$  um parâmetro com dimensões de massa ou se foram calculados por regularização dimensional, <sup>(21)</sup> com a subtração do polo da integral em  $d=4$ , diferentes serão os valores dos termos finitos de  $Z_1$  e  $Z_3$ . Na própria regularização dimensional, esse fato se exprime na impossibilidade de determinar uma constante proporcional ao resíduo no polo.

Analogamente, para o parâmetro  $\delta m^2$ , que tem dimensão de  $(\text{massa})^2$ , dependendo da escolha de um método de regularização da  $\Gamma^{(2)}$  teremos diferentes valores.

Na linguagem dos contratermos, a relação entre a teoria original (3.1), que por hábito chamaremos de "nua" (o "vestido" sendo a correta inclusão das correções radiativas) e a teoria renormalizada ("vestida") se reflete, nas funções de Green e nas funções de vértice LLP:

$$\tilde{G}_R(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda_R, m_R) = Z_3^{-n/2} \tilde{G}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda, m) \quad (3.21a)$$

$$\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda_R, m_R) = Z_3^{n/2} \tilde{\Gamma}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda, m) \quad (3.21b)$$

O til denota a transformação de Fourier. A invariância Lorentz perante translações impõe a dependência em  $n-1$  dos quadri-impulsos.

Uma característica das equações (3.20) e (3.21) é que não dependem da ordem perturbativa e também, a que mais nos interessa, que a transformação é uma multiplicação nos campos e na constante de acoplamento, bem como nas funções de Green.

A outra linguagem que é interessante considerar é a da fixação dos parâmetros da teoria. Ela se baseia no fato que a teoria

não pode calcular aquilo que intervem na própria definição. Então, para entendermos a massa e a normalização de função de onda, por exemplo, são apropriadas as seguintes considerações: se as partículas associadas ao campo  $\phi$  são estáveis (i.e., podem ser descritas por estados assintóticos) e se sua massa é  $M$ , então a função de dois pontos, na vizinhança de  $M^2$ , deve ser da forma:

$$\tilde{G}(p) \Big|_{p^2 \approx M^2} \approx \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (3.22a)$$

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \Big|_{p^2 \approx M^2} \approx p^2 - M^2 \quad (3.22b)$$

Então, fixa-se que

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p^2 = M^2) = 0 \quad (3.23a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}^{(2)}}{\partial p^2} \Big|_{p^2 = M^2} = 1 \quad (3.23a)$$

Estas condições, aplicadas ~~orden~~ a ordem perturbativamente, de finem um conjunto de contratermos. Note-se que as regras de Feynman e as prescrições (3.22) e (3.23), (3.24) (3.23b) são suficientes aos efeitos de definir a teoria, sem a necessidade de associar um lagrangeano. Para completar esse conjunto, podemos dar um valor à função de 4 pontos para valores determinados dos seus argumentos. Por exemplo:

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3) \left| \begin{array}{l} p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = M^2 \\ (p_1 + p_2)^2 = (p_1 - p_3)^2 = \frac{4M^2}{3} \end{array} \right. = \lambda_R \quad (3.24)$$

Mas é claro que a imposição destas condições é completamente arbitrária. Qualquer outro conjunto de igual número de condições faz o serviço. Por exemplo:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p^2 = \Lambda^2) = \sum_1 \quad (3.25a)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Gamma}^{(2)}}{\partial p^2} \right|_{p^2 = \Lambda^2} = \sum_2 \quad (3.25b)$$

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3) \left|_{p_1^2 = \Lambda^2} = E \quad (3.25c)$$

Os contratermos, neste caso, vão ser diferentes. Cada conjunto de condições, que é equivalente a um conjunto de contratermos, recebe o nome de *prescrição de renormalização*. Dados dois conjuntos,  $R'$  e  $R''$ , teremos, pelas (3.20):

$$Z_{3R'}^{1/2} \phi_{R'} = Z_{3R''}^{1/2} \phi_{R''} \quad (3.26a)$$

$$Z_{3R'}^{-1} (m_{R'} - \delta m_{R'}) = Z_{3R''}^{-1} (m_{R''} - \delta m_{R''}) \quad (3.26b)$$

$$Z_{3R'}^{-2} Z_{1R'}^{-1} \lambda_{R'} = Z_{3R''}^{-2} Z_{1R''}^{-1} \lambda_{R''} \quad (3.26c)$$

Daqui, segue-se que

$$\phi_{R''} = Z_3^{-1/2}(R'', R') \phi_{R'} \quad (3.27a)$$

$$m_{R''}^2 = Z_3(R'', R') m_{R'}^2 + \delta(R'', R') \quad (3.27b)$$

$$\lambda_{R''} = Z_3^2(R'', R') Z_1^{-1}(R'', R') \lambda_{R'} \quad (3.27c)$$

onde

$$Z_3(R'', R') = \frac{Z_3(R'')}{Z_3(R')} \quad , \quad (3.28a)$$

$$Z_1(R'', R') = \frac{Z_1(R'')}{Z_1(R')} \quad , \quad (3.28b)$$

$$\delta(R'', R') = \delta m_{R''}^2 - Z_3(R'', R') \delta m_{R'}^2 \quad , \quad (3.28c)$$

são agora quantidades bem definidas, e são *finitas* para qualquer esquema de regularização.

As letras  $R, R', R''$  caracterizam cada uma qualitativamente um conjunto de expressões como as (3.23) e (3.24). Uma particularidade destas expressões é o papel de destaque de um parâmetro com dimensões de massa.

As quantidades  $Z_k$  ( $k=1,3$ ) satisfazem as seguintes propriedades por construção

$$Z(R, R) = 1 \quad (3.29a)$$

$$Z(R, R') = (Z(R', R))^{-1} \quad (3.29b)$$

$$Z(R'', R) = Z(R'', R') Z(R', R) \quad (3.29c)$$

o que sugere que estamos na presença de um grupo, mas não é bem

assim, o produto

$$Z(R, R') Z(R'', R''') \quad (3.30)$$

não está definido.

As transformações (3.27) se conhecem como "transformações do grupo de renormalização". Subconjuntos dessas transformações podem formar grupo; um exemplo é o das transformações ligadas a transformações de escala, i.e., a multiplicar os impulsos (ou dividir os comprimentos) por um fator.

Fique claro, porém, que a generalidade das transformações (3.27) é bem maior; qualquer receita de renormalização ou formalização das reparametrizações da teoria cai nelas.

Vamos agora obter a chamada "equação do grupo de renormalização", versões da qual já exibimos na seção anterior. Vamos para isto parametrizar a prescrição de renormalização por um parâmetro  $\mu$ . Isto conseguimos, por exemplo, com as seguintes escolhas:

$$\Gamma_R^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2} = \mu^2 - m^2 \quad (3.31a)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p^2) \Big|_{p^2=\mu^2} = 1 \quad (3.31b)$$

$$\Gamma_R^{(4)} \Big|_{s_\mu} = -\lambda, \quad S_\mu = p_i p_j = (4\delta_{ij} - 1) \frac{\mu^2}{3} \quad (3.31c)$$

Para uma mudança de  $\mu \rightarrow \mu'$  teremos

$$\tilde{\Gamma}_R^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m_R, \lambda_R, \mu) = Z_3^{n/2}(\mu, \mu') \tilde{\Gamma}_{R'}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m_R, \lambda_R, \mu') \quad (3.32)$$



Escrevendo  $\mu' = e^t \mu$

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m_R, \lambda_R, \mu) = Z_3^{n/2}(t) \Gamma_{R'}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, Z_m^{-1}(t) m_R, Z_1^{-1}(t) Z_3^{-2}(t) \lambda_R, \mu e^t) \quad (3.33)$$

Note-se que temos suposto uma renormalização multiplicativa também para o parâmetro de massa; prescrições de renormalização independentes da massa podem levar a esse resultado, e foram propostas por Weinberg e 't Hooft<sup>(22)</sup>. Expandindo em potências de  $t$ , e levando em conta que

$$\frac{\partial}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu}$$

chega-se a

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda_R) \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \gamma_m(\lambda_R) m_R \frac{\partial}{\partial m_R} - n \gamma(\lambda_R) \right] \Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda_R, m_R, \mu) = 0 \quad (3.34)$$

aonde:

$$\beta(\lambda) = 2\lambda \left. \frac{\partial}{\partial t} \ln Z_3 \right|_{t=0} - \lambda \left. \frac{\partial}{\partial t} \ln Z_1 \right|_{t=0} \quad (3.35a)$$

$$\gamma_m(\lambda) = - \left. \frac{\partial}{\partial t} \ln Z_m \right|_{t=0} \quad (3.35b)$$

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial}{\partial t} \ln Z_3 \right|_{t=0} \quad (3.35c)$$

Estas quantidades são claramente nulas na ordem mais baixa da teoria de perturbações (árvore). Elas refletem o efeito dos anéis no propagador ( $Z_3$ ) e na função de quatro pontos ( $Z_1$ ). O fato de termos tirado o subíndice R nas Eqs. (3.35) não nos deve fazer esquecer que estamos num caso renormalizado segundo (3.31).

A equação do "grupo de renormalização" (3.34) linear e em derivadas parciais se resolve pelo método das características <sup>(23)</sup>:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{d\lambda}{\beta(\lambda)} = \frac{dm}{m\gamma_m(\lambda)} = \frac{d\Gamma^{(n)}}{n\gamma(\lambda)\Gamma^{(n)}} \quad (3.36)$$

Integrando para  $\lambda$

$$\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \beta(\lambda) \quad \longrightarrow \quad \ln \mu = t = \int_{\lambda(0)}^{\bar{\lambda}(t)} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} \quad (3.37)$$

devemos impor a condição inicial:

$$\bar{\lambda}(0) = \lambda \quad . \quad (3.37a)$$

A nova quantidade  $\bar{\lambda}(t)$  recebe o nome de constante de acoplamento efetiva, e vem definida pela equação (3.37). Como a princípio a variação de  $t$  é no intervalo  $[-\infty, \infty]$ , a integral no membro direito de (3.37) deve divergir seja num ou outro "valor". Uma maneira de atingir este resultado seria se o intervalo de integração crescesse também com  $t$ . A princípio, não há porque excluir esta possibilidade que não oferece muito interesse.

A outra possibilidade, bem mais atraente, é a da integral esbarrar num "ponto fixo" do grupo de renormalização, isto é,

num zero da função  $\beta$ . Da análise do comportamento na vizinhança de ponto fixo seguem-se propriedades assintóticas da teoria. Sejam os pontos fixos  $\lambda_i^*$ . Se  $t$  atinge o  $\infty$  quando  $\beta(\lambda_i^*) = 0$ , vamos supor que um dos pontos seja a origem. Dois comportamentos são possíveis, e em linhas gerais poderiam originar as figuras que seguem:

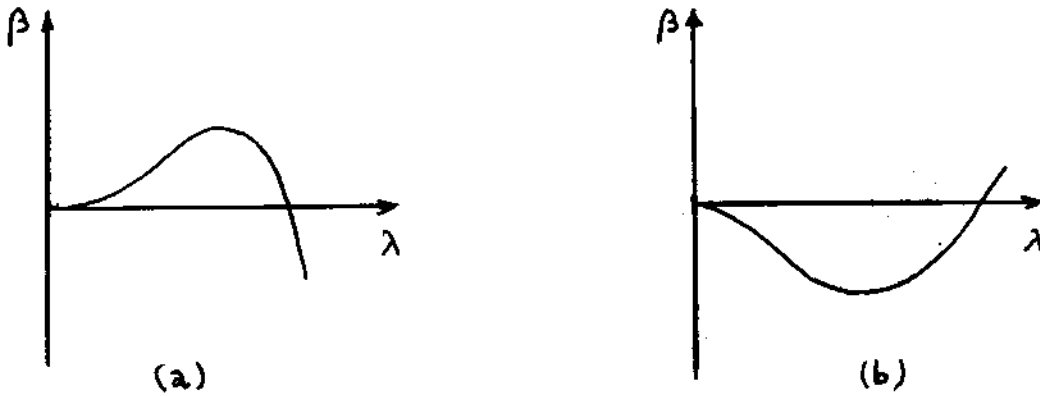


Fig. 6

Os casos possíveis são:

$\lambda(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda_i^*$  : então  $\lambda_i^*$  é um ponto fixo ultravioleta  
(dilatações nos impulsos)

$\lambda(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  :  $0 = \lambda_i^*$  é ponto fixo infravermelho.

Se  $\beta$  tem a forma da figura 6a), de

$$\frac{d\lambda}{dt} = \beta(\lambda(t)) \quad , \quad (3.38)$$

o ponto fixo ultravioleta é diferente de zero. Para um aumento de  $t$  há um aumento de  $\lambda$ .

Se o caso da teoria em questão é o da figura b), então para um aumento de  $t$  corresponde um decréscimo de  $\lambda$ , e no limite

$$\bar{\lambda}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{++} 0 \quad (3.39)$$

que é o caso da "liberdade assintótica". Isto é, a interação é mais fraca com o aumento da energia (ou o crescimento do ponto de renormalização). É claro que esta propriedade não depende dos valores dos parâmetros, e sim das características particulares da teoria. Nesse ponto, é bom esclarecer que a teoria  $\lambda\phi^4$  descrita pelo lagrangeano (3.1) corresponde a figura 6a), ou seja, ela não apresenta liberdade assintótica.

Só as teorias de gauge não abelianas podem apresentar a característica da liberdade assintótica.<sup>(24)</sup> Como já devem ter ouvido muitas vezes a afirmação de que a CDQ é assintoticamente livre, o que se quer dizer está contido na figura 6b).

Aliás esta é uma diferença muito importante entre a EDQ (eletrodinâmica quântica) e a CDQ. Na eletrodinâmica, uma nuvem de pares virtuais diminui o valor da carga quando vista de longe, i.e., com pequenas transferências de impulso. Ao contrário, o aumento da energia dissipa as nuvens de pares virtuais e aumenta o valor da carga "vista" por um projétil carregado. Na CDQ, o efeito das "nuvens" de gluons e pares quark-antiquark é mais forte para grandes distâncias; para pequenas distâncias se encontram objetos isolados que interagem mais fracamente.

A pergunta que cabe é: a função  $\beta$  é universal para uma dada teoria? Claramente, não. A função  $\beta$  provém de quantidades que dependem da prescrição de renormalização, uma expansão perturbativa da função determina seu primeiro, e sob certas condições, o segundo coeficiente.

Outra pergunta pertinente poderia ser: a função  $\beta$ , além de determinar o andamento assintótico das amplitudes, apresenta algum conteúdo físico? Esta pergunta motiva muito trabalho na CDQ na rede. Se o potencial na CDQ fosse:

$$V(r) = \frac{g^2(r)}{r},$$

como na CDQ se supõe que o potencial é "confinante" em grandes distâncias, se imaginarmos que o potencial é linear,

$$V(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0(r)$$

isto quer dizer que

$$g(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0(r)$$

ou

$$g(q) \xrightarrow{q \rightarrow 0} 0(1/q)$$

e, por sua vez,

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \beta(g) \xrightarrow{q \rightarrow 0} -g \quad \text{pois}$$

$$\frac{1}{q} = \exp(-\ln q), \quad \frac{\partial e^{-\ln q}}{\partial \ln \mu} \approx \frac{\partial e^{-\ln q}}{\partial \ln q} = -e^{-\ln q} = -\frac{1}{q}$$

O quadro pode ser descrito pelo seguinte par de gráficos, admitindo que na CDQ a "liberdade assintótica" convive com o confinamento:

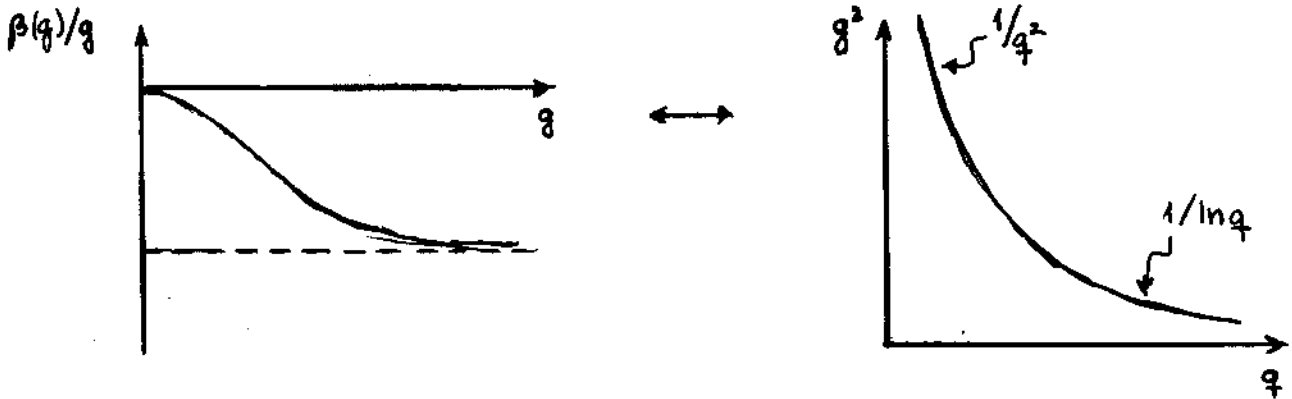


Fig. 7

Outras possibilidades viriam indicar a existência de mais do que uma "fase" (no sentido mecânico-estatístico) na teoria, como por exemplo seria o caso da figura 6b).

O argumento que acabamos de expor deve-se a C. Llewellyn-Smith<sup>(25)</sup> mas há dois reparos: o primeiro, formal, é que da tabela de transformações de Fourier do Gel'fand e Shilov<sup>(26)</sup>, em três dimensões a transformada do  $r$  é  $q^{-4}$ , e  $\beta \sim -q^{-4} \underset{q \rightarrow 0}{\sim} -g$  (como antes); o segundo, mais substancial, é que  $\beta$  como dissemos depende do esquema de renormalização e poderemos mostrar um  $\beta$  perfeitamente admissível mas que não se comporta como no gráfico 7a).

Vamos continuar com a exploração do conteúdo das equações para as características (3.36). Vamos nos ocupar de  $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, m, \lambda, \mu)$ . A dimensão de uma função de vértice tira-se da definição. O funcional  $\Gamma\{A\}$  em (3.10) é adimensional, e a sua expansão em potências

$$\Gamma\{A\} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x^1 \dots d^4x^n \Gamma^{(n)}(x^1, \dots, x^n) A(x^1) \dots A(x^n)$$

indica que

$$\left[ \Gamma^{(n)}(x^1, \dots, x^n) \right] = M^{3n}$$

com  $M$  um símbolo da dimensão de massa. Na transformação de Fourier

$$\Gamma^{(n)}(x^1, \dots, x^n) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} e^{i \sum_{k=1}^n p_k x^k} \tilde{\Gamma}(p_1, \dots, p_n)$$

a invariância perante translações subtrai uma função  $\delta^4(p_1 + \dots + p_n)$ , e então

$$\left[ \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda, m, \mu) \right] = M^{4-n} \tag{3.40}$$

Daqui, se multiplicarmos os quadriimpulsos por uma certa quantidade  $e^t$ , as propriedades dimensionais dizem que:

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(e^t p_1, \dots, e^t p_{n-1}, \lambda, m, \mu) = e^{t(4-n)} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda, m e^{-t}, \mu e^{-t}) \tag{3.41}$$

As equações (3.36) dão:

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda, m, \mu)}{\partial \lambda \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda, m, \mu)} = + \frac{n \gamma(\lambda)}{\beta(\lambda)}$$

ou

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \mu e^t) = \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \bar{\lambda}(0), \bar{m}(0), \mu(0)) e^{+n \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t)} \frac{\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda'} \tag{3.42}$$

Combinando esta última equação com a (3.41):

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(e^t p_1, \dots, e^t p_{n-1}, \lambda, m, \mu) = e^{t(4-n)} e^{-n \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t)} \frac{\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda'} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t) e^{-t}, \mu) \tag{3.43}$$

Note-se que  $\mu$  é o original em (3.43). Isto significa que o acréscimo dos impulsos diminui  $\mu$  em  $e^{-t}$ , e depois o restituimos ao valor original mudando com ajuda de (3.42), o que leva à  $m$  e  $\lambda$  a tomarem os seus valores efetivos correspondentes a um acréscimo de  $t$ . Por isto podemos falar em "liberdade assintótica" se os quadriimpulsos aumentam, no caso descrito pela figura 6b) ou 7a), temos uma situação parecida com, no valor original dos quadriimpulsos, diminuir o  $\lambda$ . Esta é a base para aplicações perturbativas na QCD.

Por último, vamos discutir o problema da massa. Do sistema (3.36), por integração.

$$\bar{m}(t) = m \exp \left\{ \int_0^t \gamma_m(\bar{\lambda}(t')) dt' \right\} = m \exp \left\{ \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t)} d\lambda' \frac{\gamma_m(\lambda')}{\beta(\lambda')} \right\} \quad (3.44)$$

Quando os quadriimpulsos são aumentados como se ve na (3.43), a situação da massa é a de mudar para  $\bar{m}(t)e^{-t}$ . Se quando  $t \rightarrow \infty$  atingimos um zero de  $\beta$ ,  $\lambda^*$ , então  $\bar{\lambda}(t) \rightarrow \lambda_i^*$  e  $\gamma_m(\bar{\lambda}(t')) \rightarrow \gamma_m(\lambda_i^*)$ . A quantidade

$$\bar{m}(t)e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} m \exp \left[ -t + \gamma_m(\lambda_i^*) t \right] \quad (3.45)$$

Assintoticamente, então, as massas podem ser negligenciadas na teoria se  $\gamma_m(\lambda_i^*) < 1$ . Isto é equivalente ao requerimento que o termo de massa no lagrangeano.

$$m^2 \phi^2 \quad \text{em} \quad \lambda \phi^4$$

$$m \bar{\psi} \psi \quad \text{em} \quad \text{EDQ, CDQ}$$



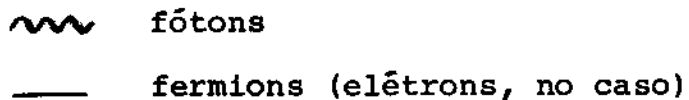
seja verdadeiramente "mole" ou em outros termos, que sua dimensão sejam menor do que 4. Nesse caso, o comportamento assintótico virá controlado pelo ponto fixo para uma teoria sem massa:

$$\Gamma^{(n)}(e^t p_1, \dots, e^t p_{n-1}, \lambda, m, \mu) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \exp\left[t(4-n-n\gamma(\lambda_i^*))\right] \cdot \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, \lambda_i^*, 0, \mu) \quad (3.46)$$

É claro que nas teorias com "liberdade assintótica"  $\lambda_i^* = 0$ , e também  $\gamma_m(0) = 0$ . Na EDQ, temos, perturbativamente <sup>(27)</sup>

$$\beta(\alpha) = \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - \frac{121}{144}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + O(\alpha^5)$$

O cálculo perturbativo se fez com o estudo do propagador do fóton, que é quem permite a determinação da constante  $Z_3$  de renormalização de função de onda (ver eq. (3.35.a)). Se representarmos



os diagramas são:

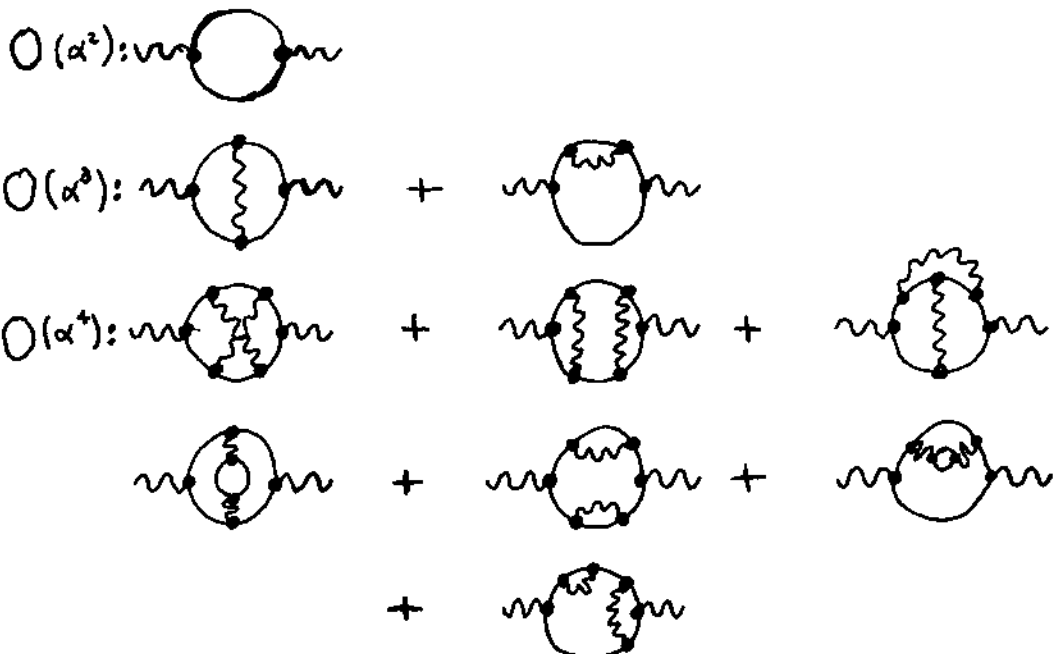


Fig. 8

-31-

Até 2ª ordem, o zero de  $\beta$  se dá em

$$\frac{\alpha^*}{\pi} = -\frac{4}{3}$$

e não há ponto fixo sobre o eixo positivo de  $\alpha$ . No entanto, perturbativamente

$$\gamma_m(\alpha) = \frac{3}{4\pi} \alpha + O(\alpha^2)$$

e a suposição de que as massas podem se desprezar no regime de altas energias é plausível.

Na teoria  $\lambda\phi^4$  (28), na regularização  $\overline{MS}$ :

$$\beta(\lambda) = \frac{3}{2} \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} - \frac{17}{6} \frac{\lambda^3}{(4\pi)^4} + 16,27 \frac{\lambda^4}{(4\pi)^6} - 135,80 \frac{\lambda^5}{(4\pi)^8} + 1420,69 \frac{\lambda^6}{(4\pi)^{10}}$$

com as duas primeiras ordens

$$\lambda_{UV}^* = \frac{9}{17}$$

$E_0$ , na ordem mais baixa,

$$\lambda_m(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda$$

de onde

$$\gamma_m(\lambda^*) = \frac{9}{34} < 1$$

e, de novo, até essa ordem parece plausível desprezar as mas sas.

Lembremos que para chegar até estas conclusões, a hipótese de que é possível renormalizar as massas multiplicativamente, o que é válido em esquemas de renormalização independentes das massas, é utilizada. (22)

Se as massas não podem ser esquecidas assintoticamente, se elas aparecem como parâmetros para caracterizar a teoria, o tratamento do grupo de renormalização complica-se sensivelmente, sem que se possa concluir muito mais do que no caso sem massa, ou até tornando o problema simplesmente inabordável. O problema da inclusão das massas num tratamento geral é ainda mais complicado. (29)

A massa física iria aparecer em  $\beta$  e  $\gamma$  para obter a equação de Gell-Mann e Low análoga à (3.34), e além do mais, para obter a equação de Callan-Symanzik (2.2) é preciso estudar a variação com a massa física da função de vértice, o que introduz  $m \frac{\partial}{\partial m}$  no lugar de  $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$  e gera o termo em  $\delta(t)$ .

#### 4 GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO E MUDANÇAS DE PRESCRIÇÃO

A partir daqui vamos considerar os aspectos relevantes às propriedades de renormalização mais gerais, além das correspondentes a mudanças de escala.

A maneira de fazer este estudo precisa da expansão perturbativa. Ainda mais, não qualquer uma mas a que tenha as propriedades da CDQ. Por isso, a massa não é um parâmetro relevante.

Agora vamos considerar os diferentes esquemas de regularização existentes no mercado.

i) O corte no espaço das quadriimpulsões. Se introduz nas integrais mal definidas um corte no valor das energias, por exemplo, ou na esfera  $p^2 = \Lambda^2$ . A consequência é a perda de localidade, entra em jogo um comprimento  $1/\Lambda$ , que no final do cálculo das quantidades "físicas" é liberado para decrescer indefinidamente.

ii) Pauli-Villars, ou dos reguladores. Se introduz um lagrangeano de campos auxiliares com métrica tal que as divergências são canceladas. No final dos cálculos, a massa dos campos auxiliares se deixa ir para o infinito.

iii) Regularização dimensional. Nesta, o parâmetro importante é o número  $d$  de dimensões do espaço-tempo continuado no espaço euclidiano. As integrais mal definidas são dotadas de um sentido quando o parâmetro  $d$  assume valores analíticos à esquerda da origem no plano complexo. Feitos os cálculos na região de analiticidade, são prolongados à região de interesse. A conclusão é que as integrais mal definidas a

presentam polos para  $d = 2, 4, 6, \dots$ . A integral se define então como a parte finita no pólo. Dão-se duas versões deste procedimento.

- i) MS: que é original acima descrito
- ii)  $\overline{MS}$ : é igual ao anterior subtraindo dele  $\ln 4\pi - \gamma_E$ , onde  $\gamma_E$  é a constante de Euler-Catalan-Mascheroni.

Os esquemas de renormalização têm a ver com os esquemas de regularização. Dentre os mais populares, assinalamos:

- i) O esquema de renormalização na camada de massa. Por ele entendemos as condições impostas sobre o pólo da função de Green de dois pontos (ou melhor, a sua transformada de Fourier), como por exemplo as equações (3.23), e sobre elementos de matriz  $S$ , como a (3.24).
- ii) O esquema MOM, no qual os cálculos de quantidades físicas definem as constantes ou parâmetros do problema nos valores dos quadriimpulsos correspondentes à experiência. A filosofia por trás desta escolha é de que desse modo as correções radiativas são pequenas.

No caso da CDQ, teremos num dado esquema

$$\beta(g^2) = -b_0 g^4 - b_1 g^6 - b_2 g^8 - \dots \quad (4.1)$$

Embora a escolha dos sinais seja esquisita, compreenderemos a sua razão a seguir.

Uma mudança de esquema traz uma reformulação da definição da constante de acoplamento. Teremos, assim:

$$g^2 = g'^2 + a'g'^4 + c'g'^6 + d'g'^8 + \dots \quad (4.2)$$

Outra mudança de esquema estaria dada por

$$g^2 = g'^2 + a''g'^4 + c''g'^6 + d''g'^8 + \dots \quad (4.3)$$

Note-se que, a nível de árvore, isto é, de diagramas sem correções radiativas, todas as escolhas de esquema devem coincidir. Podemos também passar do esquema com  $g'^2$  ao esquema com  $g''^2$ :

$$g'^2 = g''^2 + \hat{a}g''^4 + \hat{c}g''^6 + \hat{d}g''^8 + \dots \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) em (4.2), e comparando com (4.3), obtemos

$$a'' = a' + \hat{a}$$

$$c'' = c' + 2a'\hat{a} + \hat{c}$$

$$d'' = d' + 3c'\hat{a} + a'\hat{a}^2 + 2a'\hat{c} + \hat{d} \quad (4.5)$$

.....

A transformação do primeiro coeficiente é aditiva, e a seguir mostraremos que ele está ligado as transformações de escala (que formam grupo). A transformação dos restantes coeficientes não é linear nos coeficientes das ordens mais baixas, mas é aditiva nos coeficientes da mesma ordem. As equações (4.5) caracterizam as propriedades de transformação do "grupo de renormalização", e já dá para ver que a lei de composição das transformações é complicada.

Como se refletem estas transformações na função  $\beta$  de Callan-Symanzik? Substituindo (4.2) em (4.1), teremos então, no membro da esquerda.

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial g^2}{\partial \mu} = \beta(g^2) = & -b'_0 g'^4 - b'_1 g'^6 - b'_2 g'^8 - b'_3 g'^{10} - \dots \\ & + 2a' g'^2 (-2b'_0 g'^4 - b'_1 g'^6 - b'_2 g'^8 \dots) \\ & + 3c' g'^4 (-b'_0 g'^4 - b'_1 g'^6 - b'_2 g'^8 \dots) \\ & + 4d' g'^6 (-b'_0 g'^4 \dots) \end{aligned}$$

O membro de direita em (4.1) dá

$$\begin{aligned} & -b_0 (g'^2 + a' g'^4 + c' g'^6 + \dots)^2 \\ & -b_1 (g'^2 + a' g'^4 + c' g'^6 + \dots)^3 \\ & -b_2 (g'^2 + a' g'^4 + \dots) \\ & -b_3 (g'^2 + \dots)^5 \end{aligned}$$

Igualando potências, ordem a ordem,

$$g'^4: \quad b'_0 = b_0 \quad (4.6a)$$

$$g'^6: \quad b'_1 + 2a'b'_0 = b_1 + 2a'b_0$$

$$\implies b'_1 = b_1 \quad (4.6b)$$

Note-se: Os dois primeiros coeficientes da função  $\beta$  resultam in dependentes do esquema de renormalização.

$$g^{18}: \quad b_2' = b_2 + b_1 a' + b_0 (a'^2 - c') \quad (4.6c)$$

$$g^{110}: \quad b_3' = b_3 + 2b_2 a' + b_1 a'^2 + 2b_0 (2a'c' - d' - a'^3) \quad (4.6d)$$

Podemos voltar a extrair as leis de transformação (4.5).

Por exemplo:

$$b_2'' = b_2 + b_1 a'' + b_0 (a''^2 - c'') \quad (4.7a)$$

$$b_2'' = b_2' + b_1 \hat{a} + b_0 (\hat{a}^2 - \hat{c})$$

$$= b_2 + b_1 a' + b_0 (a'^2 - c') + b_1 \hat{a} + b_0 (\hat{a}^2 - \hat{c})$$

$$= b_2 + b_1 (a' + \hat{a}) + b_0 (a'^2 - c' + \hat{a}^2 - \hat{c}) \quad (4.7b)$$

comparando

$$a'' = a' + \hat{a} \quad (4.8)$$

e introduzindo no coeficiente de  $b_0$ :

$$a''^2 - 2a'\hat{a} - c' - \hat{c} = a''^2 - (c' + \hat{c} + 2a'\hat{a}) = a''^2 - c''$$

Por um procedimento análogo ao que levou as equações (4.6) pode-se mostrar que o primeiro termo da expansão pertur-



bativa de  $\gamma_m(t)$  e  $\gamma(t)$  é também invariante. Se as massas aparecerem como parâmetros importantes, a invariância dos coeficientes perturbativos não é mais válida.

Os coeficientes perturbativos de  $\beta$  são, para CDQ:

$$b_0 = \frac{2}{(4\pi)^2} \left( 11 - \frac{2}{3} N_s \right) \quad , \quad (4.9a)$$

$N_s$  é o número de sabores, e

$$b_1 = \frac{2}{(4\pi)^4} \left( 102 - \frac{38}{3} N_s \right) \quad . \quad (4.9b)$$

A escolha de um esquema de renormalização, ou seja do conjunto de parâmetros que determina  $b_2, b_3, \dots$ , se traduz na adição do conjunto de valores dos coeficientes em (4.5).

Se usarmos a equação que determina  $g^2(t)$  na ordem mais baixa

$$\frac{\partial g^2}{\partial t} = - b_0 g^4$$

a solução é:

$$g^2(t) = \frac{g^2(\Lambda)}{1 + \frac{1}{2} b_0 g^2(\Lambda) \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)} \quad (4.10)$$

ou:

$$\frac{1}{g^2(\mu^2)} - \frac{1}{g^2(\Lambda^2)} = \frac{1}{2} b_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right) \quad (4.11)$$

Note-se que:

$$\frac{1}{g^2(\mu^2)} - \frac{1}{2} b_0 \ln(\mu^2) = \frac{1}{g^2(\Lambda^2)} - \frac{1}{2} \ln(\Lambda^2)$$

o que sugere a invariância de

$$\Lambda = \Lambda e^{-\frac{1}{b_0 g^2(\Lambda)}} = \mu^2 e^{-\frac{1}{b_0 g^2(\mu^2)}} \quad (4.12)$$

Se para  $\Lambda_i$  e  $\Lambda_j$

$$g_i^2 = g_j^2 + a_{ij} g_j^4 \quad (4.13)$$

então

$$\Lambda_i e^{-\frac{1}{b_0} \frac{1}{g_i^2}} = \Lambda_j e^{-\frac{1}{b_0} \frac{1}{g_j^2}} \quad (4.14)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_i}{\Lambda_j} &= e^{\frac{1}{b_0} \left( \frac{1}{g_i^2} - \frac{1}{g_j^2} \right)} = e^{\frac{1}{b_0} \frac{1}{(g_j^2)^2} [g_j^2 - g_i^2] [1 - a_{ij} g_j^2]} \\ &= e^{-\frac{1}{b_0} \frac{1}{(g_j^2)^2} [(g_j^2)^2 a_{ij} + \dots] [1 - a_{ij} g_j^2]} \\ &= e^{-\frac{a_{ij}}{b_0} + O(g^2)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Note-se que uma dilatação em qualquer dos dois argumentos leva a uma lei do tipo da encontrada em (4.5) para o coeficiente  $a$ .

Diga-se de passagem, o invariante  $\Lambda$  satisfaz

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \beta(g^2) \frac{\partial}{\partial g^2} \right] \Lambda = 0 \quad (4.16)$$

que é a expressão da invariância perante dilatações. As expressões que satisfazem equações deste tipo recebem o nome de "cargas invariantes". Uma delas, é a quantidade  $D(X,0,\alpha_\mu)$  em (2.1).

A invariante mais geral que podemos pensar é

$$M^2 = \Lambda^2 e^{\int_{\Lambda} g^2(t) \frac{dg'^2}{\beta_{\Lambda}(g'^2)}} \quad (4.17)$$

O sub-índice  $\Lambda$  está aí para lembrar que implicitamente há uma escolha de  $\Lambda$ .

Daqui podemos extrair uma primeira e importante conclusão: mesmo uma teoria sem massas, como é a CDQ, mercê da sua invariância por renormalização, carrega uma quantidade característica com dimensões de massa.

Outra conclusão:

Os esquemas ligados por transformações com  $a = 0$  em (4.5), possuem propriedades de transformação aditivas nos coeficientes  $c$  e  $d$ . Sistemas com  $a = 0$  são sistemas que normalizam  $g^2$  no mesmo ponto  $\Lambda$ .

Vamos agora caracterizar melhor a noção de esquema. Dado um esquema qualquer de regularização, por exemplo o  $\overline{MS}$ , determinar uma escolha de prescrição é dar valores para os coeficientes (4.5). 't Hooft<sup>(30)</sup> percebeu que como os valores dos coeficientes  $b_2, b_3, \dots$ , em  $\beta$  dependem do esquema de renormalização, era possível escolhe-los todos nulos. Teremos assim, com  $a = 0$  que

$$b'_2 = b_2 - b_0 c = 0 \quad \longrightarrow \quad c'_{\overline{MS}} \text{ 't Hooft} = \frac{b_2}{b_0} \overline{MS} \quad (4.18a)$$

-41-

$$b_3' = b_3 - 2b_0 d = 0 \quad \longrightarrow \quad d_{t \text{ Hooft}}^{\overline{MS}} = \frac{b_3}{2b_0} \quad (4.18b)$$

etc.

Assim:

$$\beta_{tH}(g_{tH}^2) = -b_0 g_{tH}^4 - b_1 g_{tH}^6 \quad (4.19)$$

e

$$g_{\overline{MS}}^2 = g_{tH}^2 \left( 1 + \frac{b_2}{b_0} g_{tH}^2 + O(g^6) \right) \quad (4.20)$$

Este esquema difere pouco do  $\overline{MS}$  mas é muito mais fácil para utilizar. Os resultados das quantidades físicas calculadas em altas energias devem coincidir.

Na prescrição de 't Hooft, também a dimensão anômala é dada pelo coeficiente invariante

$$\gamma(g) = d_0 g^2$$

Com esta prescrição, 't Hooft e outros puderam mostrar qual deve ser o domínio de analiticidade na constante de acoplamento das funções de Green da CDQ.

A existência desta prescrição de 't Hooft permite dar algum sentido as contas aproximadas que fizemos na página 31 para conferir a possibilidade de desprezar as massas em algumas teorias.

## 5 CARACTERIZAÇÃO INDEPENDENTE DA "ORIGEM" DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

Voltando às equações (4.6), percebemos que os coeficientes de  $\beta$ ,  $b_i$  ( $i \geq 2$ ) dependem *linearmente* dos coeficientes que controlam a variação de ordem  $g^{2(i+1)}$ . A saber

$$b_2^i = b_2 - b_0 c^i + \dots \quad (4.6c)$$

$$b_3^i = b_3 - 2b_0 d^i + \dots \quad (4.6d)$$

Esta propriedade foi utilizada por Stevenson<sup>(6)</sup> para a caracterização direta de um esquema de renormalização sem fazer referência a um esquema de partida.

Note-se que, das equação acima

$$\frac{\partial g^2}{\partial c^i} = 0(g^6) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial g^2}{\partial d^i} = 0(g^8)$$

Para precisar a construção, vamos recorrer a uma notação melhor. No lugar de  $t$  ou  $\mu$ , vamos tomar como variável

$$\tau = b_0 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \quad (5.2)$$

e no lugar de  $g^2$  vamos utilizar

$$\alpha = \frac{g^2}{4\pi} \quad (5.3)$$

Teremos então

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = -\alpha^2 - \frac{b_1}{b_0} \alpha^3 - \frac{b_2}{b_0} \alpha^4 - \dots \quad (5.4)$$

e chamando:

$$\frac{b_1}{b_0} = c \quad (5.5)$$

$$\frac{b_2}{b_0} = c_2$$

...

$$\frac{b_n}{b_0} = c_n$$

...

teremos

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = -\alpha^2 (1 + c\alpha + c_2\alpha^2 + \dots) = \hat{\beta}(\tau) \quad (5.6)$$

A escolha de  $\tau$  amarra o esquema de renormalização até dois anéis. Isto é equivalente à escolha da identidade no grupo de renormalização, ou seja,

$$Z(R,R) = 1 \quad (5.29a)$$

Deste ponto em diante precisamos novos parâmetros,  $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ , tais que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega_n} = 0(\alpha^{n+1}) \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.7)$$

Stevenson considerou que era possível desenvolver esta equação em série de potências:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega_n} = N_n \alpha^{n+1} \left[ 1 + w_1^n \alpha + w_2^n \alpha^2 + \dots \right] \quad (5.8)$$

Estes coeficientes  $w_k^n$  e  $N^n$  só podem depender de  $\mu$  e  $\tau$  via  $\alpha(\tau)$ , por razões dimensionais. Aliás, devem ser independentes de  $\alpha$ . Aproveitando que as quantidades  $\tau, \omega_2, \omega_3, \dots$  controlam diferentes ordens em  $\alpha$ , neste sentido podemos considerá-las independentes, ou seja, podemos esperar que as derivadas parciais segundas cruzadas comutem

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \omega_n \partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \omega_n} \beta(\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \omega_n} N_n \alpha^{n+1} \left[ 1 + w_1^n \alpha + w_2^n \alpha^2 + \dots \right] \quad (5.9)$$

Igualando potências resulta:

$$\frac{\partial c_2}{\partial \omega_n} = \dots = \frac{\partial c_{n-1}}{\partial \omega_n} = 0 \quad (5.10a)$$

$$\frac{\partial c_n}{\partial \omega_n} = N_n (n-1) \quad (5.10b)$$

$$\frac{\partial c_{n+m}}{\partial \omega_n} = N_n \sum_{k=0}^m (n+m-1-2k) c_k w_{m-k}^n \quad (5.10c)$$

$$m = 1, 2, \dots; \quad c_0 = W_0 \equiv 1$$

Da linearidade dos  $c_n$  com os  $\omega_n$ , (5.10b), se sugere a identificação. Ou seja  $c_n = \omega_n$ , e com isto

$$N_n = \frac{1}{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.11)$$

Os  $\omega_n$  devem ser independentes, ou seja,

$$\frac{\partial c_{n+m}}{\partial \omega_n} = \frac{\partial \omega_{n+m}}{\partial \omega_n} = 0$$

temos

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^m (n+m-1-2k) c_k W_{m-k}^k = 0 \quad m=1,2,\dots \quad (5.12)$$

$$c_0 \equiv 1, c_1 = c, W_0 = 1$$

Uma maneira de incorporar a caracterização do grupo de renormalização assim obtida em maneira formal é a seguinte (que se preferiria não adotar, mas vá). Seja agora a ligação das funções de vértice da teoria renormalizada com a teoria "nua".

$$\Gamma^{(n)}(p, \alpha, \tau, c_k) = Z^{n/2}(\tau, c_k) \Gamma_0^{(n)}(p, \alpha_0) \quad (5.13)$$

Derivando ambos os lados a respeito de  $\alpha$  e  $c$ , teremos

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\alpha_{\text{fixo}}} + \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - n\gamma \right] \Gamma^{(n)}(p, \alpha, \tau, c_k) = 0 \quad (5.14)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial c_k} \Big|_{\alpha_{\text{fixo}}} + \beta_k \frac{\partial}{\partial \alpha} - n\gamma_n \right] \Gamma^{(n)}(p, \alpha, \tau, c_k) = 0 \quad (k \geq 2) \quad (5.14b)$$

Com as definições:

$$\tilde{\beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \quad ; \quad \beta_k = \frac{\partial \alpha}{\partial c_k} \quad (5.15)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \ln Z \quad ; \quad \gamma_k = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_k} \ln Z$$

Qual o resultado destas equações para as quantidades físicas da teoria? Estamos nos referindo, como quantidades físicas,



aos elementos de matriz  $S$ , os pólos dos propagadores da teoria, as quantidades medidas experimentalmente. Elas devem ser independentes da escolha de campos da teoria, de modo que formalmente deveremos ter:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \right]_{\alpha: \text{fixo}} + \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big] R = 0 \quad (5.16a)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial c_k} \right]_{\alpha: \text{fixo}} + \beta_k \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big] R = 0 \quad (5.16b)$$

Suponhamos que a quantidade  $R$  pode ser desenvolvida perturbativamente:

$$R = \alpha^N (1 + r_1 \alpha + r_2 \alpha^2 + \dots) \quad N = \text{inteiro} \quad (5.17)$$

Por exemplo

$$R = \frac{g(e^+e^- + \text{hádron})}{g(e^+e^- + \mu^+\mu^-)} = (3 \sum_j q_j^2) (1 + R) \quad (5.18)$$

em que  $q_j$ : carga de quark de espécie  $j$ , e temos  $N = 1$ .

Inserindo (5.17) em (5.16), temos:

$$\alpha^{N+1} \left( \frac{\partial r_1}{\partial \tau} - N \right) + \alpha^{N+2} \left( \frac{\partial r_2}{\partial \tau} - N c - (N+1)r_1 \right) + \quad (5.19a)$$

$$+ \alpha^{N+3} \left( \frac{\partial r_3}{\partial \tau} - N c_2 - (N+1)r_1 c - (N+2)r_2 \right) + \dots = 0$$

$$\alpha^{N+1} \frac{\partial r_1}{\partial c_2} + \alpha^{N+2} \left( \frac{\partial r_2}{\partial c_2} + N \right) + \alpha^{N+3} \left( \frac{\partial r_3}{\partial c_2} + N c_1^2 + (N+1)r_1 \right) + \dots = 0 \quad (5.19b)$$

$$\alpha^{N+1} \frac{\partial r_1}{\partial c_3} + \alpha^{N+2} \left( \frac{\partial r_2}{\partial c_3} \right) + \alpha^{N+3} \left( \frac{\partial r_3}{\partial c_3} + \frac{N}{2} \right) + \dots = 0 \quad (5.19c)$$

Por consistência perturbativa, recuperamos as equações (5.10a), e devemos ter, aliás,

$$\frac{\partial r_1}{\partial \tau} - N = 0 \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \tau} - Nc - (N+1)r_1 = 0 \quad ; \quad \frac{\partial r_2}{\partial c_2} + N = 0$$

Em geral:

$$\frac{\partial r_k}{\partial \tau} = \sum_{n=0}^{k-1} (N+n)r_n c_{k-n-1} \quad (5.21a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r_k}{\partial c_\ell} &= - \frac{1}{(\ell-1)} \sum_{n=0}^{k-\ell} (N+n)r_n w_{k-\ell-n}^\ell, & k \geq \ell \\ &= 0, & k < \ell \end{aligned} \right\} \quad (5.21b)$$

com

$$c_0 = r_0 = W_0 \equiv 1, \quad c_1 = c$$

As equações (5.20) ou (5.21), por integração, fornecem invariantes do grupo de renormalização,  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k, \dots$ . Estas são as quantidades que contêm a informação da teoria de perturbações, e são invariantes perante mudanças de esquema. Assim, a primeira equação 5.20 nós dá

$$\rho_1 = \tau - \frac{r_1}{N} \quad (5.22)$$

Para obter a segundo invariante, partimos de (5.20) :

$$\frac{\partial r_2}{\partial c_2} + N = 0$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \tau} - Nc - (N+1)r_1 = 0$$

e, após manipulações várias, temos

$$p_2 = r_2 + Nc_2 - \frac{(N+1)}{2N} \left( r_1 + \frac{N}{N+1} c \right)^2 . \quad (5.23)$$

## 6 GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO E OTIMIZAÇÃO DA SÉRIE PERTURBATIVA

Até aqui, temos aparentemente nos ocupado de um problema quase irrelevante: se as quantidades físicas devem ser invariáveis perante o grupo de renormalização, qual é o interesse de estudá-lo? (Além, é claro, das transformações de escala).

Há pelo menos duas razões válidas ao nosso ver. A primeira, de ordem acadêmica: obter uma melhor compreensão; a segunda, de interesse técnico e prático, é a de extrair a melhor informação possível dos resultados da série perturbativa escrita para uma quantidade física qualquer. Seja

$$R^{(n)} = \alpha^N (1 + r_1 \alpha + \dots + r_n \alpha^n) \quad (6.1)$$

o resultado, para a quantidade  $R$ , do cálculo perturbativo; por exemplo, da avaliação de seus diagramas de Feynman com ajuda da regularização  $\overline{MS}$ . O índice  $(n)$  indica que o acoplamento  $\alpha$  está definido por uma função  $\tilde{\beta}$  com  $n$  termos.

$$\frac{\partial \alpha^{(n)}}{\partial \tau} = -\alpha^{(n)2} \left[ 1 + c_1 \alpha^{(n)} + c_2 \alpha^{(n)2} + \dots + c_{n-1} \alpha^{(n)n-1} \right] \quad (6.2)$$

Sejam agora dois esquemas de renormalização, A e B, para os quais se tenham calculado  $\tilde{\beta}$  e  $R$ . A relação entre eles é dada pelas eqs. (4.2), por exemplo:

$$\alpha_A = \alpha_B + a \alpha_B^2 + \dots \quad (6.3)$$

Teremos, então

$$\alpha_A^n = \alpha_B^n + O(\alpha_A^{n+1}) \quad (6.4a)$$

$$R = R_A^{(n)}(\alpha_A) + O(\alpha_A^{N+n}) \quad (6.4b)$$

$$R = R_B^{(n)}(\alpha_B) + O(\alpha_B^{N+n}) \quad (6.4c)$$

Destas equações

$$R_B^{(n)}(\alpha_A) = R_B^{(n)}(\alpha_B) + O(\alpha_A^{N+n}) \quad (6.5)$$

que, simbolicamente, pode ser reescrita como

$$\frac{\partial R^{(n)}}{\partial (ER)} = O(\alpha^{N+n}) \quad (6.6)$$

o que resume que o efeito de mudarmos  $\tau, c_2, \dots, c_{n-1}$  para mudarmos o esquema de renormalização é pelo menos de ordem  $\alpha^{N+n}$

Até que ponto temos uma aproximação para o resultado exato?

É possível obter uma melhor aproximação?

A resposta a estas perguntas é fornecida pelo procedimento de otimização. A proposta de Stevenson<sup>(6)</sup> é que a melhor aproximação resultará naquela que seja menos sensível à mudança de esquema. Graficamente

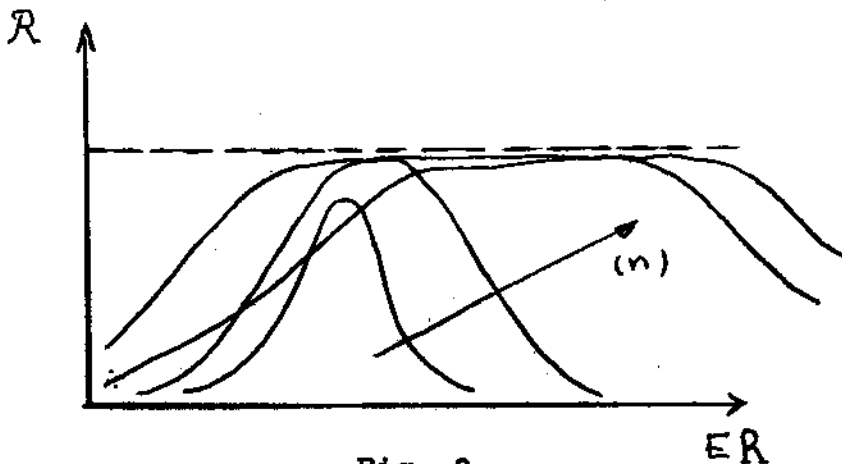


Fig. 9

A idéia de Stevenson é a seguinte. Na representação que fazemos,  $ER$  é uma variedade com dimensão igual à ordem de aproximação. Na medida que aumentamos a ordem perturbativa alcançada, o resultado, se o desenvolvimento perturbativo tem algum sentido, deve ser mais e mais independente da escolha de esquema de renormalização. No limite, é claro, o resultado é independente do esquema. Num dado esquema, ou melhor, numa dada ordem, havia uma região no espaço dos parâmetros  $\tau, c_2, \dots$  que mostre menor sensibilidade à mudança dos parâmetros.

Os critérios possíveis para a escolha dessa região dependem das hipóteses que sejam feitas sobre o resto. Algumas alternativas são, para uma quantidade da forma:

$$R = \alpha^N (1 + r_1 \alpha + \dots)$$

$$\left. \frac{\partial R^{(n)}}{\partial (ER)} \right|_{\tau, c_2, \dots, c_{n-1}} = O(\alpha^{N+n+1}), \quad \overline{PMS}^{(31)} \quad (6.7a)$$

$$\left. \frac{\partial R^{(n)}}{\partial (ER)} \right|_{\tau, c_2, \dots, c_{n-1}} = 0, \quad \overline{PMS}^{(6)} \quad (6.7b)$$

$$\left. \frac{\partial R^{(n)}}{\partial (ER)} \right|_{\tau, c_2, \dots, c_{n-1}} = O(\alpha^{N+n+2}), \quad \overline{EAC}^{(17)}. \quad (6.7c)$$

Vamos trabalhar com o primeiro critério, representado por  $\overline{PMS}$ . Estas iniciais correspondem à Por Menos Serviço, já que a implementação deste critério resulta bem menos trabalhosa do que a do Princípio de Mínima Sensibilidade de PM de Stevenson. O  $\overline{PMS}$  trabalha no quadro perturbativo.

Vamos tratar como exemplo o seguinte:

$$R^{(2)} = \alpha_2^N (1 + r_1 \alpha_2) \quad (6.8)$$

Neste exemplo apenas a variação em  $\tau$  é relevante.

$$\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = N \frac{\alpha_2}{\partial \tau} \alpha_2^{N+1} (1 + r_1 \alpha_2) + \alpha_2^{N+1} \frac{\partial r_1}{\partial \tau} + r_1 \alpha_2^N \frac{\partial \alpha_2}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \tau} = -\alpha_2^2 - c\alpha_2^3$$

Então, substituindo

$$\frac{\partial R^{(2)}}{\partial \tau} = \left(-N + \frac{\partial r_1}{\partial \tau}\right) \alpha_2^{N+1} - \left[Nc + (N+1)r_1\right] \alpha_2^{N+2} - (N+1)r_1 c \alpha_2^{N+3} \quad (6.9)$$

Por consistência com a série perturbativa,

$$\frac{\partial R^{(n)}}{\partial (ER)} = O(\alpha^{N+n}) \quad (6.6)$$

deveremos ter:

$$\frac{\partial r_1}{\partial \tau} - N = 0 \implies \rho_1 = \tau - \frac{r_1}{N} \quad (6.10)$$

Agora, o que fazer com o resto?

PMS (condição 6.7a):

$$Nc + (N+1)r_1 = 0 \implies r_1 = -\frac{N}{N+1} c \quad (6.11)$$

PMS (condição 6.7b):

$$Nc + (N+1)r_1 + (N+1)r_1 c \alpha = 0 \quad (6.12)$$

ou

$$r_1 = - \frac{N}{N+1} \frac{c}{1+\alpha c} \quad (6.12b)$$

O valor de  $\tau$  resultante, permite obter o valor de  $\alpha$ :

$$\tau = \frac{1}{\alpha} + c \ln \frac{c\alpha}{1+c\alpha} \quad (6.13)$$

Temos completada a caracterização do problema.

A diferença entre o nosso  $\overline{\text{PMS}}$  e o PMS de Stevenson é que em ordens subseguintes o PMS demanda resolver mais equações transcendentais, enquanto no  $\overline{\text{PMS}}$  é suficiente resolver a equação para  $\alpha$ , que é transcendente, e o sistema linear (5.21) com os primeiros membros nulos, o que dá um problema algébrico cuja solução é:

$$r_m^{(1)} = \frac{N}{N+m} \frac{n-1-2m}{n-1} \bar{c}_m \quad (m = 1, \dots, n-1) \quad (6.14)$$

No mais, os resultados numéricos dos dois métodos são equivalentes e diferem do resultado perturbativo direto.

Vamos exemplificar com

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-)} = (3 \sum q_j^2) (1 + R_{e^+e^-}) \quad (6.15)$$

$$R_{e^+e^-}^{(2)} = \alpha(1 + r_{e^+e^-} - \alpha) \quad (6.16)$$

Se têm:



$$r_{e^+e^-}^{MS} = \frac{365}{24} - \frac{11}{12} N_s - 2b_0 \left[ \xi(3) - \frac{1}{4} (\ln 4\pi - \gamma) \right] \quad (6.17)$$

$$b_0 = \frac{33-2N_s}{6}$$

$N_s$ : nº de "sabores" de quark

$$b_1 = \frac{153-19N_s}{12}$$

$$\xi(3) = 1,20205 \ 69031$$

$$\gamma_E = 0,577216$$

Teremos

$$\tau = b_0 \ln \left( \frac{Q}{\Lambda_{MS}} \right) + c \ln \left( \frac{2c}{b_0} \right) \quad (6.18)$$

O conhecimento de  $r_{e^+e^-}^{MS}$  nos permite conhecer  $\rho_1$

$$\rho_1^{e^+e^-} = b_0 \ln \left( \frac{Q}{\Lambda_{MS}} \right) + c \ln \left( \frac{2c}{b_0} \right) - r_{e^+e^-}^{MS} \quad (6.19)$$

O  $\overline{PMS}$  nos dá:

$$\tilde{r}_{e^+e^-} = - \frac{N}{N+1} c = - \frac{1}{2} c \quad (6.20)$$

Da (6.10)

$$\rho_1^{e^+e^-} - \frac{1}{2} c = \tilde{\tau} \quad (6.21)$$

e obtemos  $\tilde{\alpha}$  de (6.13):

$$\rho_1^{e^+e^-} - \frac{1}{2} c = \tilde{\tau} = \frac{1}{\tilde{\alpha}} + c \ln \frac{c\tilde{\alpha}^2}{1+c\tilde{\alpha}} \quad (6.22)$$

Os resultados, para  $N_s = 3$ , de  $\overline{\text{PMS}}$  e PMS nesta ordem são <sup>(9)</sup> ( $N_s = 3$ )

	$Q/\Lambda_{\text{MS}} = 50$		$Q/\Lambda_{\text{MS}} = 100$	
	$\alpha$	$R_{e^+e^-}^{(2)}$	$\alpha$	$R_{e^+e^-}^{(2)}$
MS	0,045997	0,058768	0,039785	0,049337
$\overline{\text{PMS}}$	0,070623	0,066189	0,056724	0,053864
PMS	0,070074	0,066193	0,056439	0,053866

Aplicando o mesmo procedimento para  $R_{\bar{c}c}$ , a taxa relativa para a desintegração do charmônio pseudoescalar:

$$\frac{\Gamma(\bar{c}c + \text{hadrons})}{\Gamma(\bar{c}c \rightarrow 2\gamma)} = \frac{2\pi^2}{9e_e^4 \alpha_{\text{ef}}^2} R_{\bar{c}c} \quad (6.23a)$$

$$R_{\bar{c}c}^{(2)} = \alpha^2 (1 + r_{\bar{c}c}^-) \quad (6.23b)$$

$$r_{\bar{c}c}^{\text{MS}} = \frac{61}{2} - \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{13}{8} \pi^2 + b_0 (\ln 4\pi - \gamma_E), \quad (6.23c)$$

$N = 2$ , neste caso. Os resultados são <sup>(9)</sup> (com  $N_s = 4$ )

	$Q/\Lambda_{\text{MS}} = 50$		$Q/\Lambda_{\text{MS}} = 100$	
	$\sigma$	$R_{\bar{c}c}$	$\alpha$	$R_{\bar{c}c}$
MS	0,050278	0,005342	0,043506	0,003716
$\overline{\text{PMS}}$	0,145674	0,018048	0,097301	0,008522
PMS	0,143310	0,018062	0,096583	0,008523

## CONCLUSÃO

Termina aqui este curto percurso pelos domínios do "grupo de renormalização", um conjunto de transformações entre funções de Green (ou de vértice) e parâmetros das teorias renormalizáveis que contém subconjuntos com propriedades grupais.

Examinamos as conseqüências para o caso de dilatações, no tratamento das teorias de campo: liberdade assintótica, dimensões anômalas, são conceitos que decorrem do tratamento com o grupo.

Apresentamos a caracterização mais geral do grupo com ajuda do cálculo perturbativo, e mostramos como essa caracterização permite dar critérios para aprimorar os cálculos perturbativos de quantidades físicas.

Para encerrar, gostaríamos de fazer alguns comentários.

Qual a razão física para a existência dessa liberdade nas teorias renormalizáveis? Ao nosso ver, a razão se encontra no próprio conceito de localidade. Em 1932, Bohr e Rosenfeld<sup>(31)</sup> mostraram que o conceito de campo quântico requeria uma mudança no conceito de localidade. Os campos não podiam ser estritamente locais, em termos modernos eles só podem ser bem definidos como distribuições<sup>(32)</sup>.

$$\phi(x) \rightarrow \phi(f) = \int \phi(x') f(x') dx'$$

com  $f(x)$  uma função de um espaço de Hilbert concentrado no ponto  $x$ . Não há como restringir a escolha dessas funções, além disto. A liberdade na reparametrização traduz esse conteúdo.

O segundo ponto que nos interessa analisar é o da interpretação do parâmetro  $\Lambda$ , introduzido em (4,10) como uma escala "natural" na teoria renormalizável (ou suas correspondentes quantidades (4.12) e (4.17)<sup>(34)</sup>). A rigor,  $\Lambda$  caracteriza só a mais baixa escolha perturbativa de um esquema de renormalização. Muda o esquema, e muda  $\Lambda$ , e talvez até melhora, perturbativamente, o acordo com a experiência. Hoje se fala até no modelo de Glashow-Weinberg-Salam<sup>(35)</sup> da escolha de  $\Lambda$ , uma pergunta cuja resposta deve ter o sentido da análise aqui efetuada.

Por último, é interessante notar que a liberdade por reparametrização pode ainda ser útil num sentido mais profundo. Stevenson<sup>(36)</sup> fez a conjectura que a convergência da série perturbativa, para a CDQ, em última instância, poderia decorrer de uma apropriada combinação do cálculo perturbativo com mudanças de esquema, ou seja, para cada ordem haveria um esquema que daria a melhor aproximação, e esse esquema mudaria ordem a ordem. A série dentro de um esquema fixo poderia ser divergente ou assintótica; se a conjectura de Stevenson fosse efetiva na teoria, esse tipo de comportamento foge as noções matemáticas habituais, e é uma novidade interessante no contexto da Física.

## REFERÊNCIAS

Vamos ser muito generosos com as referências, com o propósito de fornecer muita informação, em especial para os estudantes mais ou menos iniciantes no domínio da teoria quântica de campos. As vezes, incluímos comentários nas referências para reforçar a sua importância.

1) Os experimentos originais UA1 e UA2 registraram seus resultados em:

UA1:

Para o  $W^+$ : "Experimental observation of isolated large transverse energy electrons with associated missing energy at  $\sqrt{s} = 540$  GeV", Phys. Letters 122B (1983) pág. 503.

Para o  $Z^0$ : "Experimental observation of leptons pairs of invariant mass around 55 GeV/c<sup>2</sup> at the CERN SPS collider", Phys. Letters 126B (1983) pág. 398.

UA2:

Na mesma ordem, para o  $W^+$ : "Observation of single isolated electrons of high transverse momentum in events with missing transverse energy at the CERN  $\bar{p}p$  collider", Phys. Letters 122B (1983) pág. 476.

Para o  $Z^0$ : "Evidence for  $Z^0 \rightarrow e^+e^-$  at the CERN  $\bar{p}p$  collider", Phys. Letters 129B (1983) pág. 130.

2) Uma revisão relativamente recente dos resultados experimentais e sua comparação com os cálculos em Eletrodinâmica Quântica (EDQ) é a que se encontra no livro editado por G. Graff, E. Klempt e G. Werth: "Present status and aims of quantum electrodynamics", simpósio realizado em Mainz em 1980, Lecture Notes in Physics 143, Springer-Verlag (1981).

- 3) Uma introdução ótima para teorias de gauge em geral é o livro do Prof. José Leite Lopes: "Gauge Field Theories: an Introduction", Pergamon Press, Oxford (1981).  
Para a cromodinâmica quântica (CDQ) em especial, uma resenha ainda valiosa é a de W. Marciano e H. Pagels. "Quantum chromodynamics", Physics Reports 36 (1978), págs. 137-276
- 4) O livros mais antigos de teoria de campos se ocupavam bastante do "modelo de Yukawa", isto é, a teoria dos campos com interação pseudoescalar entre férmions (então os núcleons) e mésons pseudoescalares (os mésons  $\pi$ ), que na ordem mais baixa da teoria de perturbações reproduziam, no limite não relativístico, o potencial "de Yukawa" entre núcleons. Veja-se por exemplo: S.S. Schweber, "An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory", Harper and Row, Publishers, New York (1961). A versão deste modelo com simetria "quiral", o modelo  $\sigma$ , está tratado em textos como por exemplo de teoria renormalizável com quebra espontânea de simetria. Veja-se, por exemplo:  
C. Itzykson e J.B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill Inc, New York (1981).
- 5) Os primeiros a estudar o "grupo de renormalização" foram E.C.G. Stueckelberg e A. Petermann, "La normalisation des constantes dans la théorie des quanta", Helvetica Physica Acta, 26 (1953) 499-520. Um estudo básico do problema, que se faz difícil de ler, é o capítulo VIII do livro de N.N. Bogoliubov e D.V. Shirkov. "Introduction to the theory of quantized fields", Interscience Publishers Ltd., New York (1959).
- 6) O artigo moderno mais importante para a compreensão do "grupo de renormalização" é  
P.M. Stevenson "Optimized perturbation theory", Phys. Rev. D23 (1981) 2916. Ele se encontra na base de vários desenvolvimentos.
- 7) O interesse no problema foi estimulado pelos trabalhos de Celmaster: W. Celmaster e R.J. Gonçalves, "Renormalization prescription dependence of the quantum-chromodynamic coupling constant", Phys. Rev. D20 (1979) 1420 e

"Quantum-chromodynamics perturbation expansions in a coupling constant renormalized by momentum-space subtraction", Phys. Rev. Letters 42 (1979) 1435.

8) Veja-se, por exemplo, recentemente

J.R. Klauder, C.B. Lang, P.S. Salomonson e B.S. Skagerstam", Universality of the continuum limit of lattice quantum theories", Zeitschrift für Physik C26 (1984) 149, e as referências dadas.

9) Itzhak Roditi, "O grupo de renormalização: transformações de escala e mudanças de esquema. Sua utilidade na teoria quântica de campos", tese de doutoramento apresentada no CBPF (1983).

10) J.R. Oppenheimer, "Note on the theory of the interaction of field and matter", Phys. Rev. 35 (1930) 461-477.

Oppenheimer foi chamado de "pai da bomba atômica" nos Estados Unidos, pelo seu trabalho como coordenador do grupo de cientistas que interveio na sua fabricação entre 1942 e 1945.

I. Waller, "Bemerkungen über die Rolle der Eigenenergie des Elektrons in der Quantentheorie der Strahlung", Zeitschrift für Physik 62 (1930) 673

I. Waller, como os físicos da época, fez contribuições em vários domínios, o fator de correção no estudo de diagramas de raios x leva seu nome junto a P. Debye.

Estes dois artigos resultaram numa divergência "quadrática" para a massa eletromagnética do elétron, por não incluírem corretamente as contribuições dos "buracos" na teoria de Dirac; na verdade, a divergência é "logaritmica".

11) Uma coleção significativa de artigos refletindo a evolução das idéias nos tempos heróicos se encontra no livro editado por Julian Schwinger:

"Quantum Electrodynamics", Dover Press, New York (1958).

Nele, porém, se omitem algumas contribuições importantes, como as seguintes:

E.C.G. Stueckelberg e D. Rivier, Phys. Rev. 74 (1948) pág. 218 e pág. 986.

T. Tati e S. Tomonaga, Progr. Theoretical Physics 3 (1948) 391

H. Takeda, Y. Miyamoto e S. Tomonaga, Progress of Theoretical Physics 4 (1948) 47 e 121.

Schwinger, Tomonaga e Feynman receberam o Premio Nobel em 1965 pelas suas contribuições neste período.

- 12) N.N. Bogoliubov e O.S. Parasiuk, "Über die multiplikation der kausal funktionen in der quantentheories der Felder". Acta Mathematica 97 (1957) 227. Também N.N. Bogoliubov e D.V. Shirkov no livro deles (ref. 5)

K. Hepp, "Proof of the Bogoliubov-Parasiuk theorem on renormalization", Comm. Math. Physics 2 (1966) 301

K. Hepp, "Théorie de la renormalisation", Springer-Verlag, New York (1970)

W. Zimmermann, "Composite Operators in the Perturbation Theory of Renormalizable Interactions", Annals of Physics 77 (1973) 536-569

W. Zimmermann, "Normal Products and the Short Distance Expansion in the Perturbation Theory of Renormalizable Interactions" Annals of Physics 77 (1973) 570-601

- 13) M. Gell-Mann e F.E. Low, "Quantum electrodynamics at small distances", Phys. Rev. 95 (1954) 1300

Este artigo introduziu o conceito de "carga invariante perante renormalizações", reaproveitado em recente artigo de Grunberg (segundo artigo da referência 17)

- 14) C.G. Callan; "Broken scale invariance in scalar field theory", Phys.



Rev. D2 (1970) 1541.

K. Symanzik, "Small distance behaviour in field theory and power counting", Communications in Mathematical Physics 18(1970) 227.

As idéias contida nestes trabalhos parecem ter sua origem em Sidney Coleman, a julgar pela leitura da literatura, que na época se ocupava do problema da invariância de escala.

- 15) H.D. Politzer, "Reliable perturbative results for strong interactions", Phys. Rev. Letters 30 (1973) 1348.

H.D. Politzer, "Asymptotic freedom: an approach to strong interactions", Phys. Rep. 14 (1974) 129.

D.J. Gross e F. Wilczek, "Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories", Phys. Rev. Letters 30 (1973) 1343

D.J. Gross e F. Wilczek, "Asymptotically free gauge theories. I", Phys. Rev. D8 (1973) 3633.

A liberdade assintótica já tinha sido exposta por G. 't Hooft, antes destes trabalhos, num encontro em Marselha em 1972.

- 16) A. Petermann, "Two theorems on approximation methods in perturbative field theory", Phys. Lett. 110B (1982) 237.

A. Petermann, "Renormalization group and the deep structure of the proton", Phys. Reports 53 (1979) 157.

Neste último artigo, antes do Stevenson<sup>(6)</sup>, Petermann apresenta uma versão atualizada do seu trabalho com Stueckelberg<sup>(5)</sup>. No primeiro, ele aproveita os desenvolvimentos de Stevenson.

- 17) G. Grunberg, "Renormalization group improved QCD" Phys. Lett. 95B (1980) 70.

G. Grunberg, "Renormalization-scheme-invariant QCD and QED: the method of effective charges", Phys. Rev. D29 (1984) 2315.

- 18) C. Itzykson e J.B. Zuber, referência (4) apresentam, uma exposição completa e moderna.
- 19) K. Nishijima, "Fields and Particles", W.A. Benjamin, New York (1974).
- 20) J.M. Jauch e F. Rohrlich, "Theory of Photons and Electrons", Springer-Verlag, New York (1976).
- 21) C.G. Bollini e J.J. Giambiagi, "Dimensional renormalization: the number of dimensions as a regularizing parameter", Nuovo Cim. 128 (1972) 20  
G.'t Hooft e M. Veltman, "Regularization and renormalization of gauge fields", Nucl. Physics B44 (1972) 189.
- 22) G.'t Hooft, "Dimensional regularization and the renormalization group", Nucl. Phys. B61 (1973) 455
- 23) S. Weinberg, "New approach to the renormalization group" Phys. Rev. D8 (1973) 3497.
- 24) I.N. Sneddon, "Elements of Partial Differential Equations", McGraw-Hill Book Co., New York (1957).
- 25) A demonstração se encontra em S. Coleman e D.J. Gross; "Price of asymptotic freedom", Phys. Rev. Lett. 31 (1973) 851.
- 26) C.H. Llewellyn-Smith, na sua contribuição em "Proceedings of the 1980 CERN school of physics", relatório amarelo 81-04, CERN, Genebra (1981).
- 27) I.M. Gel'fand e G.E. Shilov, "Les distributions", Dunod, Paris (1962).
- 28) E. de Rafael e J.L. Rosner, "Short distance behaviour of quantum electrodynamics and the Callan-Symanzik equation for the photon propagator", Annals of Phys. 82 (1979) 369.
- 29) K.G. Chetyrkin, S.G. Gorishny, S.A. Larine e F.V. Tkachov,

- "Five loop renormalization group calculations in the  $g\phi^4$  theory",  
Phys. Lett. 132B (1983) 351
- 29) Veja-se por exemplo, H.D. Politzer, "Stevenson's optimized perturbation theory applied to factorization and mass scheme dependence", Nucl. Phys. B194 (1982) 493.
- 30) G. 't Hooft, "Can we make sense out of QCD?", em "The why's of subnuclear physics", Erice 1977, A. Zichichi, editor, Plenum Press, New York (1979).
- 31) J.A. Mignaco e I. Roditi, "A simpler version of PMS application to perturbation theory", Phys. Lett. 126B (1983) 481  
Um procedimento análogo ao nosso foi desenvolvido independentemente por J.C. Wrigley, "An alternative implementation of the "principle of minimal sensitivity", Phys. Rev. D27 (1983) 1965.
- 32) N. Bohr e L. Rosenfeld, "Zur frage der Messbarkeit der elektromagnetischen feldgrößen", Kgl. Danske Vid Sels., Math. fys. Medd. 12 (1933)
- 33) J. Glimm e A. Jaffe, "Quantum physics: a functional integral point of view", New York, Springer-Verlag (1981)
- 34) Veja-se, por exemplo, Y. Iwasaki e S. Sakai "The  $\Lambda$  parameter for improved lattice gauge actions", Nucl. Phys. B248 (1984) 441
- 35) Um exemplo é a contribuição de Willian J. Marciano, "Electroweak interaction parameters", em Fourth Topical Workshop on Proton-Antiproton Collider Physics, Proceedings editados por H. Hanni e J. Schacher, CERN 54-09 (1984) pág. 165
- 36) Paul M. Stevenson, "Optimization and the ultimate convergence of QCD perturbation theory", Nucl. Phys. B231 (1984) 65.