ISSN 0101 - 9236

CBPF-MO-003/86

# NOTIONS DE RELATIVITÉ GÉNÉRALE

par

J. Leite Lopes

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

e

Centre de Recherches Nucléaires
Université de Strasbourg
Strasbourg - France

Ces notes ont été organisées par Robert Blind, mon ancien élève à l'Université de Strasbourg, basées sur mon cours sur la théorie relativiste de la gravitation-une introduction élémentaire. Il s'y est appliqué avec dédication et efficacité. Je le remercie pour ses efforts et j'espère que ces notes seront utiles aux jeunes étudiants.

TABLE DES MATIÈRES

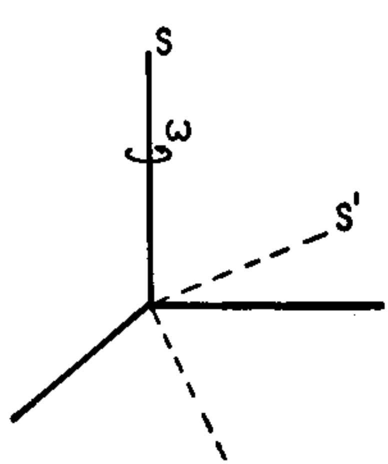
# 1. PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

## 1.1 Espace absolu de Newton

Considérons une particule classique de masse m, elle obéit à la loi de Newton:

$$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}}$$

Cette loi est valable seulement dans certains référentiels dont les axes sont dirigés vers des étoiles fixes, les systèmes d'inertie. Considérons un système S où la loi de Newton est valable, et un système S' en rotation autour de l'axe z de S avec une vitesse angulaire constante $\omega$:



On a: $$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t$$
$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t$$
$$z' = z$$

ou: $$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$
$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$

la loi de Newton devient:

$$\boxed{\begin{aligned} m(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x') &= F'_x \\ m(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' + \omega^2 y') &= F'_y \\ m\ddot{z}' &= F'_z \end{aligned}}$$

où:

$$F'_x = F_x\cos\omega t + F_y\sin\omega t$$

$$F'_y = -F_x\sin\omega t + F_y\cos\omega t$$

$$F'_z = F_z$$

On voit qu'il y a des forces nouvelles qui apparaissent: centrifuge (proportionnelle à $x'$) et de Coriolis (proportionnelle à $\dot{x}'$).

Newton a dit que ce sont des forces fictives qui étaient dûes au référentiel S' mais qui n'étaient pas dûes aux propriétés intrinsèques de la particule, d'où l'introduction d'un *espace absolu* où la force s'écrit sons la loi de Newton.

Le principe de la relativité restreinte dit que toutes les lois physiques ont la même forme si on passe d'un système d'inertie à un autre animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport au premier. L'espace absolu n'a donc plus l'importance que lui attribuait Newton: l'ensemble de tous les systèmes précédents serait l'espace absolu de Newton.

Avant Einstein on ne pouvait considérer S et S' comme équivalents pour décrire les lois de la nature car S' n'est pas animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à S (S' n'est pas un système de référence inertiel). Cela choquait Einstein; de même que Newton, Einstein considérait comme artificiel le privilège donné à l'ensemble des systèmes d'inertie. Il s'agit de savoir ce qui nous empêche de considérer tous les systèmes comme équivalents.

## 1.2 Identité masse grave-masse inerte

A l'époque où Einstein faisait ses recherches, on connaissait un résultat expérimental très important: l'identité entre masses inertielle et gravitationnelle,

$$m_i = m_g$$

D'aprés Newton:

$$\vec{F} = m_i \ddot{\vec{x}} \quad ;$$

si on considère la même particule mise dans un champ homogène et uniforme de gravitation:

$$\vec{P} = m_g \vec{g} \quad .$$

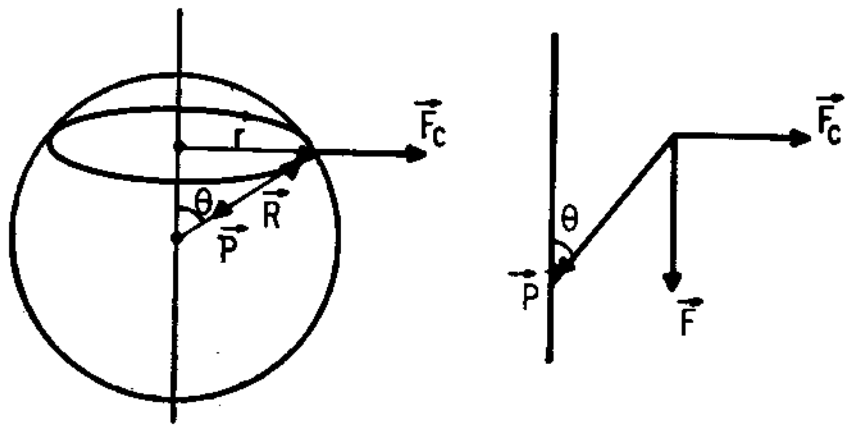
Il n'y a aucune raison pour que $m_i = m_g$. Grâce à l'expérience d'Eötvös on sait que $m_i = m_g$; cette expérience a été répétée par Dicke avec une grande précision.

Donnons le principe de l'expérience d'Eötvös: considérons un corps de masse gravitationnelle $m_g$ à la surface de la Terre, son poids est:

$$\vec{P} = - G \frac{m_g M}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} \quad ,$$

M et R étant la masse et le rayon de la Terre; comme la Terre est en mouvement sur elle même on a une force centrifuge

$$\vec{F}_c = m_i \omega^2 \vec{r}$$



La force totale appliquée au corps est:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_c$$

$$= -m_g\vec{g} + m_i\omega^2\vec{r},$$

où:

$$\vec{g} = G\,\frac{M}{R^2}\cdot\frac{\vec{R}}{R} \quad ,$$

Comme: $$r = R\sin\theta \quad ,$$

$$\vec{F} = -m_g\vec{g} + m_i\omega^2\,\frac{\vec{r}}{r}\,R\sin\theta \quad ,$$

soit:

$$\vec{F} = m_g\left(-\vec{g} + \frac{m_i}{m_g}\,\omega^2\,\frac{\vec{r}}{r}\,R\sin\theta\right)$$

On peut considérer deux corps de matières différentes mais de même masse grave: $m_g = m'_g$. On aura alors $\vec{F} = \vec{F}'$, c'est à dire que $\vec{F}$ ne dépendra pas du corps considéré, si $m_i = m'_i$, ou:

$$\frac{m_i}{m_g} = \frac{m'i}{m'_g} = \alpha$$

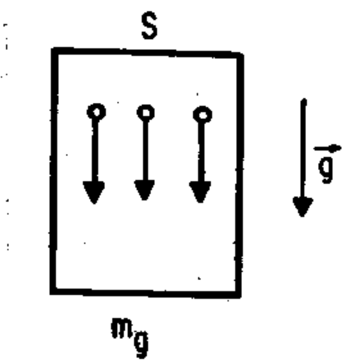
Expérimentalement on trouve:

$$\frac{m_i}{m_y} = \alpha = 1 \quad .$$

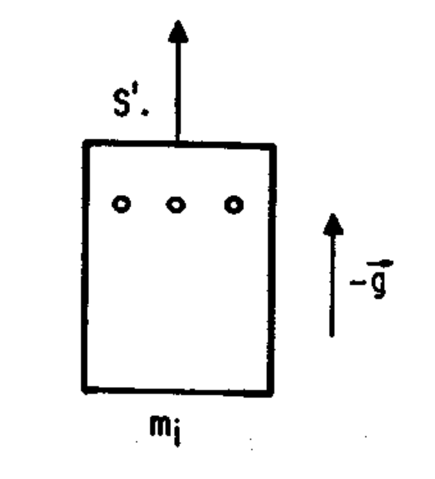
## 1.3 Principe d'équivalence

Pour expliquer cette égalité ($m_i = m_g$), Einstein a imaginé l'expérience idéale suivante:

considérons un système S dans lequel règne un champ de gravitation uniforme $\vec{g}$. Alors d'après Galilée, toutes les particules tombent avec la même accélérature $\vec{g}$, leur caractéristique est la masse grave $m_g$. Ici on est en présence d'un système inertiel avec un champ de gravitation uniforme.




Einstein élimine alors ce champ de la façon suivante: il remplace le système S par un système S' qui est accéléré uniformément avec une accélération $-\vec{g}$ par rapport aux étoiles fixes: les corps ont un mouvement relatif, leur caractéristique est la masse inerte $m_i$ et ce système est expérimentalement équivalent à S.

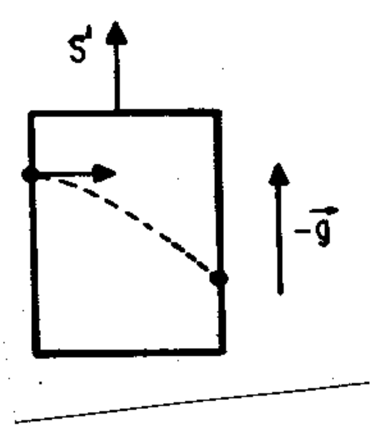


La mécanique dans S' est équivalente à la mécanique dans S grâce à l'égalité $m_i = m_g$.

Einstein postule le principe d'équivalence:

il est impossible par une expérience physique quelconque de trouver un critère de distinction entre S' et S.

Une conséquence immediate du principe d'équivalence est la déflection de la lumière par un champ gravitationnel:




a) Il y a deux pas qui ont été faits:

1) $m_i = m_g$

2) équivalence entre un système en accélération et un système d'inertie avec force gravitationnelle pour tout phénomène physique et pas seulement mécanique.

Toute forme d'énergie est affectée par un champ de gravitation, d'où déflection de la lumière.

Mais ce qui précède est plus général.

A partir de ce principe d'équivalence, Einstein a fait un autre pas. Les forces centrifuge et de Coriolis ne sont pas fictives mais sont des forces de gravitation: de même qu'on peut éliminer ces forces en passant de S' à S (voir début du chapitre), Einstein a éliminé la gravitation en passant de S à S'. On peut donc éliminer des champs de gravitation.

Il y a équivalence complète du champ gravitationnel et la force provenant d'un système accéléré.

D'après le principe de Mach l'inertie des corps provient de l'interaction de ces corps avec la matière lointaine de l'univers (matière distribuée dans tout l'univers); l'espace vide n'existe pas, l'espace existe en fonction de la matière.

L'accélération de l'ascenseur S' par rapport à des étoiles fixes est la même chose que l'ascenseur fixe et les étoiles accélérées qui produisent un champ de gravitation.

Considérons une particule chargée au repos; par rapport à un système inertiel elle produit un champ de force électrostatique. Un satellite en translation rectiligne uniforme voit la charge en mouvement ce qui est équivalent à la production des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, alors que pour la charge au repos $\vec{B} = \vec{0}$.

Ce champ $\vec{B}$ provient du fait du changement de référentiel; on n'a pas de changement des équations de Maxwell.

Ainsi le passage de S à S' produit un champ additionnel (de même que $\vec{B}$) qui est le champ d'accélération (équivalent au champ de gravitation) et c'est l'accélération des étoiles qui produit ce champ.

## 1.4 Postulat fondamental de la relativité générale

Le principe d'équivalence est un principe approché car il est valable si le champ de gravitation est homogène. Le princi pe d'équivalence est valable pour un champ de gravitation homogène dans une petite région de l'espace (dans l'expérience de l'anscenseur par exemple). Comment construire la théorie de la relativité générale qui est liée au champ de gravitation inévitable quand on a un système accéléré?

Dans un système S inertiel:

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu$$

$$= \left(dx^0\right)^2 - \left(d\vec{x}\right)^2 \ ,$$

c'est la métrique de Lorentz; quand on passe à un système S' en rotation uniforme:

$$\vec{x} = e^{i\omega t}\vec{x}' \ ,$$

on calcule $d\vec{x}$ et on le remplace dans $ds^2$, d'où $ds^2$ du système S':

$$ds^2 = \left[1 - \frac{\omega^2}{c^2}\left(x'^2 - y'^2\right)\right]\left(dx^0\right)^2 - \left(d\vec{x}'\right)^2$$

$$- 2\,\frac{\omega}{c}\left(x'dy' - y'd\mu'\right)dx^0 \ ,$$

on a $dx^0$ car il n'y a pas de changement de temps. Tandis que dans S:

$$ds^2 = \dot{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \ ,$$

avec:
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},$$

dans S':

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \text{ (en omettant les ')};$$

par rapport à S' qui est tournant on a une métrique qui a changé.

La métrique de l'espace physique est définie par $g_{\mu\nu}(x)$.

Le changement de S en S' donne des forces fictives; Einstein dit que ces forces sont réelles et forment un champ de gravitation et le changement de S en S' se traduit géométriquement par un changement de métrique. Einstein postule:

le champ de gravitation est décrit par $g_{\mu\nu}(x)$

c'est le postulat fondamental et la relativité générale est équivalente à la théorie relativiste de la gravitation. $g_{\mu\nu}(x)$ est un tenseur symétrique du deuxième ordre.

La variable $g_{\mu\nu}(x)$ détermine la structure géométrique de l'espace physique, la géométrie de l'espace physique détermine la gravitation.

La théorie n'est pas linéaire mais le champ gravitationnel est linéaire en première approximation et si on le quantifie on trouve que les gravitons ont un spin 2.

# 2 ÉQUATION DU MOUVEMENT D'UNE PARTICULE MATÉRIELLE SOUS L'ACTION D'UN CHAMP DE GRAVITATION.

## 2.1 Équation du mouvement

Nous admettons ici le principe de variation:

$$\delta \int ds = 0 \quad ,$$

suit:

$$\delta \int \left[g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}\right]^{1/2} ds = 0 \quad .$$

Calculons

$$\delta \int L\left(x^\alpha, \dot{x}^\alpha\right) ds \quad , \text{ où : } \quad x^\alpha = x^\alpha(s)$$

$$\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$$

$$\delta \int L\left(x^\alpha, \dot{x}^\alpha\right) ds = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta \dot{x}^\alpha\right) ds$$

$$= \int \left(\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) \delta x^\alpha ds \quad ;$$

$$\delta \int L\left(x^\alpha, \dot{x}^\alpha\right) ds = 0 \ ,$$

nous donne des équations du mouvement de la forme

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0 \ .$$

Ici:

$$L(x^\alpha,\dot{x}^\alpha) = \left[g_{\mu\nu}(x)\ \frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\nu}{ds}\right]^{1/2} \quad .$$

En relativité restreinte l'équation du mouvement était:

$$\frac{d}{ds}\ \frac{dx^\mu}{ds} = 0 \quad ;$$

ici:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}(x)\ \frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\nu}{ds}\right]^{-1/2} \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha}\ \frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\nu}{ds} \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \left[g_{\mu\nu}(x)\ \frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\nu}{ds}\right]^{-1/2} \frac{\partial x^\mu}{ds}\ g_{\alpha\mu}(x) \quad ,$$

d'où:

$$\frac{d}{ds}\left[g_{\alpha\mu}(x)\ \frac{\partial x^\mu}{ds}\left(g_{\mu\nu}(x)\ \frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\nu}{ds}\right)^{-1/2}\right] \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{\partial g\mu\nu(x)}{\partial x^\alpha}\ \frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\nu}{ds}\left[g_{\mu\nu}(x)\ \frac{dx^\mu}{ds}\ \frac{dx^\nu}{ds}\right]^{-1/2}$$

Si $g_{\mu\nu}$ est une constante l'espace est plan; si $g_{\mu\nu}$ est fonction du point d'univers x, l'espace possède une courbure.

L'équation finale qu'on obtient est:

$$\frac{d}{ds}\left[g_{\alpha\mu}(x)\ \frac{dx^\mu}{ds}\right] = \frac{1}{2}\ \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha}.\frac{dx^\mu}{ds}.\frac{dx^\nu}{ds} \tag{2}$$

Pour obtenir cette équation, introduisons une nouvelle variable telle que:

$$d\lambda = \left[ g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right]^{1/2} ds,$$

$$\frac{d}{d\lambda} = \left[ g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right]^{-1/2} \frac{d}{ds} \; ;$$

introduisons cela dans l'équation (1), on obtient:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[ g_{\alpha\mu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad ,$$

on voit que cette équation et (2) ont même forme.

Considérons alors l'intégrale d'action:

$$S_1 = \int \left[ g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right]^{1/2} ds,$$

invariante par rapport à un changement continu du paramètre s, au lieu de s considérons $\lambda$:

$$s \longrightarrow \lambda = f(s) \; ,$$

$$d\lambda = f'(s) ds \quad ,$$

alors:

$$S_1 = \int \left[ g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda \quad ;$$

pourquoi cette remarque? parce qu'il y a une autre action:

$$S_2 = \int g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\,ds \quad ,$$

en faisant le même changement de paramètre:

$$S_2 = \int g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,f'(s)d\lambda \quad .$$

Le principe variationnel:

$$\delta S_1 = 0 \quad ,$$

nous donne :

$$\frac{d}{d\lambda}\left[g_{\alpha\mu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\delta x^\alpha}\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda}\;;$$

$$\delta S_2 = 0$$

nous donne une équation de la même forme, mais $S_2$ n'est pas invariant par rapport à la transformation:

$$s \longrightarrow \lambda = f(s) \quad ;$$

on a:

$$L_1 = \left[g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]^{1/2} \quad ,$$

et:

$$L_2 = g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = L_1^2 \quad ,$$

dont l'équation de Lagrange est:

$$\frac{\partial L_2}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0 \quad ;$$

on a deux actions différentes et si on admet le principe variationnel on obtient la même forme pour l'équation du mouvement. $S_2$ est invariante pour:

$$\lambda = s + \varepsilon \quad ;$$

ici la loi de la conservation est la conservation de l'énergie. Pour $S_1$ on obtiendra des identités et pas de loi de conservation. Toute grandeur de symétrie d'une fonction de Lagrange a un paramètre, alors cette grandeur de symétrie donne lieu à une loi de conservation.

Si on a une fonction $(S_1)$ on aura une identité.

Considérons l'équation du mouvement:

$$\frac{d}{ds}\left[g_{\alpha\mu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha}\,\frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{dx^\nu}{ds} \quad ,$$

$\dfrac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\alpha}$ peut être considéré comme le gradient d'un potentiel, on introduit le *symbole de Christoffel*:

$$\boxed{\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}\,g^{\mu\lambda}(x)\left[\frac{\partial g_{\alpha\lambda}(x)}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\lambda}\right]}$$

$$g_{\alpha\mu}(x)\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\delta x^\lambda}\,\frac{dx^\lambda}{ds}\,\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\,\frac{dx^\mu}{ds}\,\frac{dx^\nu}{ds} \quad ,$$

$$g_{\alpha\mu}(x)\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{dx^\lambda}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} \quad ,$$

$\lambda$ est un indice muet, remplaçons-le par $\nu$:

$$g_{\alpha\mu}(x)\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - 2\,\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} \quad ,$$

on sait que: $g_{\alpha\mu}(x)g^{\mu\beta}(x) = \delta^\beta_\alpha$

$$\frac{d^2x^\beta}{ds^2} = \frac{1}{2}\,g^{\beta\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu}\right)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \quad ,$$

en comparant le deuxième membre à la définition du symbole de Christoffel, l'équation du mouvement sera:

$$\boxed{\frac{d^2x^\beta}{ds^2} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0} \quad ,$$

c'est l'équation de la géodésique dans l'espace de Riemann. Cette équation peut prendre la forme d'une équation du type de Newton:

$$m_o\,\frac{d^2x^\beta}{ds^2} = F^\beta(x) \quad ,$$

avec: $$F^\beta(x) = -\,m_o\,\Gamma^\beta_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}$$

On obtient une équation du mouvement à partir d'une équation relative à la géométrie de l'espace de Riemann.

Il faut trouver sous quelle condition l'équation de la géodésique coïncide avec l'équation de Newton.

## 2.2 Condition de coïncidence avec l'équation de Newton

Soit $\phi(x)$ le potentiel gravitationnel de Newton:

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = - \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} .$$

Soit

$$g_{\mu\nu}(x) = \mathring{g}_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(x) ,$$

avec:

$$\mathring{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

le champ de gravitation est déterminé par $\varepsilon\gamma_{\mu\nu}(x)$, $\varepsilon$ étant un paramètre très petit et $\gamma_{\mu\nu}(x)$ étant fini; nous avons alors un champ de gravitation faible.

Nons négligerons $\varepsilon^2$ et $\beta^2$ $\left(\text{où } \beta = \frac{v}{c}\right)$ et $\varepsilon\beta$ ainsi que les termes d'ordre supérieur.

Alors:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (d\vec{x})^2 + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad ;$$

nous admettons que $\gamma_{\mu\nu}$ est indépendant du temps et nul à l'infini:

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(\vec{x}),$$

$$\gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} 0 \quad .$$

$\phi(x)$ a la forme $\frac{1}{r}$ et s'annule à une distance infinie de la source et est statique.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \simeq c^2 - v^2 + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} \quad ,$$

$$\simeq c^2\left[1 - \beta^2 + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0}\right] \quad ,$$

$$\boxed{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \simeq c^2\left[1 + \varepsilon\gamma_{00}(x)\right]} \quad ;$$

on a négligé les termes:

$$\varepsilon\gamma_{ik}\frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^k}{dx^0} \sim \varepsilon\beta^2 \quad ,$$

$$\varepsilon\gamma_{0k}\frac{dx^0}{dx^0}\frac{dx^k}{dx^0} \sim \varepsilon\beta.$$

Regardons quels sont les termes de $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)$ qui sont à conserver dans l'équation:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad ,$$

on trouve que les seuls termes non négligeables sont:

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{oo}\,\frac{1}{1+\varepsilon\gamma_{oo}} = 0 \quad ,$$

en calculant $\Gamma^\alpha_{oo}$ on trouve:

$$\boxed{\Gamma^i_{oo} = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{2\gamma_{oo}}{\partial x_i} \; ; \; \Gamma^o_{oo} = 0} \; ;$$

dans cette approximation l'équation sera:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\,\varepsilon\,\frac{\delta\gamma_{oo}}{\delta x_i} \quad ,$$

comparons-là avec l'équation de Newton:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \quad ,$$

on voit que:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{c^2}{2}\,\varepsilon\,\gamma_{oo}(\vec{x}) \quad ,$$

par conséquent:

$$\boxed{g_{oo}(x) = 1 + \varepsilon\gamma_{oo}(\vec{x}) = 1 + \frac{2\phi(\vec{x})}{c^2}}$$

où $\phi(\vec{x})$ est le potentiel de Newton; les autres composantes sont négligeables.

L'équation de la géodésique, dans l'approximation d'une champ faible et d'une particule animée d'une vitesse non relativiste, donne l'équation de Newton. L'équation de la géodésique est postulée être l'équation d'une particule dans un champ de gravitation.

Insistons sur le fait que c'est la structure de l'espace de Riemann qui donne lieu au phénomène que l'on appelle gravitation.

## 2.3 Note

Revenons sur la remarque faite au paragraphe 2.1. On a

$S_1 = \int \left[ g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right]^{1/2} ds$ invariante pour la transformation $s \to \lambda = f(s)$

$S_2 = \int \left[ g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right] ds$ invariante pour la transformation $s \to \lambda = s + \varepsilon$

Considérons alors l'action $S_2$ et la transformation $s \to \lambda = s + \varepsilon$. L'invariance nous donne:

$$\int \left[ g_{\mu\nu}\big(x\ (s)\big) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right] ds = \int g_{\mu\nu}\big(x(s+\varepsilon)\big) \left[\frac{d}{ds}\, x^\mu(s+\varepsilon)\right] \left[\frac{d}{ds}\, x^\nu(s+\varepsilon)\right] ds .$$

on: $$\int g_{\mu\nu}\big(x(s) + \varepsilon\dot{x}(s)\big) \frac{d}{ds}\left[x^\mu(s) + \varepsilon\dot{x}^\mu(s)\right] \frac{d}{ds}\left[x^\nu(s) + \varepsilon\dot{x}^\nu(s)\right] ds$$

$$= \int \left[ g_{\mu\nu}\big(x(s)\big) + \varepsilon \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\lambda \right] \frac{d}{ds}\left[x^\mu(s) + \varepsilon\dot{x}^\mu(s)\right] \frac{d}{ds}\left[x^\nu(s) + \varepsilon\dot{x}^\nu(s)\right] ds$$

$$= \int g_{\mu\nu}\big(x\ (s)\big) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}\, ds + \varepsilon \int g_{\mu\nu}\big(x\ (s)\big) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{d\dot{x}^\nu}{ds}\, ds$$

$$+ \varepsilon \int g_{\mu\nu}\big(x(s)\big) \frac{d\dot{x}^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}\, ds + \varepsilon \int \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}\, ds$$

pour qu'il y ait invariance il faut que les termes en $\varepsilon$ s'annulent, soit:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left[g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right] = 0} \quad ,$$

c'est la loi de conservation de l'énergie pour une particule libre:

$$\frac{d}{ds}\left(p^{\mu}p_{\mu}\right) = 0 \quad ,$$

soit:

$$\boxed{p^{\mu}p_{\mu} = m_o^2}$$

Considérons alors l'action $S_1$. Nous avons vu que:

$$d\lambda = \left[g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right]^{1/2} ds \quad ,$$

tel que l'équation du mouvement s'écrive:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[g_{\alpha\mu}(x)\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}$$

On a:

$$\frac{d}{d\lambda} = \left[g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right]^{-1/2}\frac{d}{ds} \quad ,$$

d'où:

$$\frac{d}{ds}\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} = \frac{d}{ds}\left[\left(g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\right)^{-1/2}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\right]$$

$$= \left[g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]^{-1/2}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}}{\left(g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)^{3/2}}\frac{dx^\alpha}{ds} \quad ,$$

cette équation doit être identique à:

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{dx^\alpha}{ds} = \left[g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]^{-1/2}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} \quad ,$$

d'où:

$$g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} \equiv 0 \quad ,$$

ou:

$$g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\left[\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+\frac{1}{2}g^{\nu\alpha}(x)\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\right] \equiv 0$$

d'où:

$$\boxed{g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\left[\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+\Gamma^\nu_{\lambda\beta}(x)\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\right] \equiv 0}$$ c'est une identité

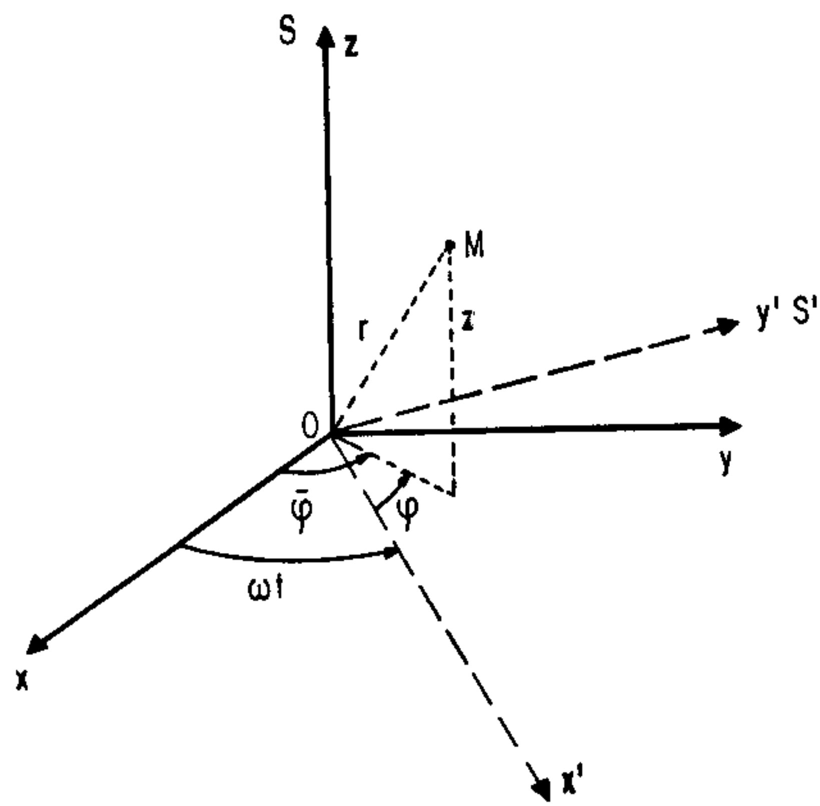
avec:

$$g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{1}{2}g^{\nu\alpha}(x)\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}-g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{1}{2}g^{\nu\alpha}(x)\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0$$

## 3 GÉOMÉTRIE D'UN SYSTÈME EN MOUVEMENT DE ROTATION PAR RAPPORT À UN SYSTÈME INERTIEL

a) Considérons un système inertiel S, et les coordonnées de relativité restreinte $x_o, x_1, x_2, x_3$.

Dans S on sait mesurer les intervalles de temps et d'espace. Nous voulons l'expression de ces quantités dans un système S'. animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe $0_z$.




Dans S l'intervalle élémentaire est:

$$ds^2 = dx^{\mu}dx_{\mu} = (dx^0)^2 - (d\vec{x})^2 = c^2dt^2 - (d\vec{x})^2$$

Introduisons les coordonnés cylindriques:

$$x = r\cos\bar{\phi} \quad , \quad y = r\sin\bar{\phi} \quad , \quad z = z \quad ;$$

d'où:

$$dx = -r\sin\bar{\phi}\, d\bar{\phi} + dr\cos\bar{\phi} \ , dy = r\cos\bar{\phi}\, d\bar{\phi} + dr\sin\bar{\phi} \ ,$$

$$(d\vec{x})^2 = (-r\sin\bar{\phi}\, d\bar{\phi} + dr\cos\bar{\phi})^2 + (r\cos\bar{\phi}\, d\bar{\phi} + dr\sin\bar{\phi})^2 + (dz)^2$$

$$= r^2(d\bar{\phi})^2 + (dr)^2 + (dz)^2 \quad ,$$

et:

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\phi^2 + dz^2) \quad ;$$

introduisons l'angle

$$\phi = \bar{\phi} - \omega t$$

$$d\bar{\phi} = d\phi + \omega dt \quad ,$$

car $\omega = c^{\underline{te}}$ (S'est animé d'un mouvement de rotation uniforme); alors:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\phi + \omega dt)^2 - dz^2$$

$$= c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\phi^2 + 2\omega r^2 d\phi dt + \omega^2 r^2 dt^2 + dz^2)$$

$$= (c^2 - \omega^2 r^2)dt^2 - (dr^2 + r^2 d\phi^2 + 2\omega r^2 d\phi dt + dz^2) \quad ,$$

$$\boxed{ds^2 = (c^2 - \omega^2 r^2)dt^2 - (dr^2 + r^2 d\phi^2 + 2\omega r^2 d\phi dt + dz^2)} \quad ,$$

ceci est l'expression de l'intervalle élémentaire en fonction des coordonnées du système tournant.

On a $ds^2$ de la forme:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad ,$$

cette expression doit définir la géométrie dans ce système; Einstein a montré que ce n'est pas une géométrie euclidienne, et ceci à partir de cet exemple simple.

Quand on a une expression du type:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad ,$$

on définit un *intervalle de temps propre*:

$$d\tau = \frac{ds}{c} \quad , \quad dx^k = 0$$

si $dx^k = 0$:

$$ds^2 = g_{00}(x)(dx^0)^2 \quad ,$$

et:

$$\boxed{d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}(x)}\,dx^0}$$

c'est l'intervalle de temps propre en relativité générale.

En relativité on a toujours:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (d\vec{x})^2 \quad ;$$

si on choisit un système tel que:

$$(d\vec{x})^2 = 0 \quad ,$$

c'est à dire que les deux évènements ont lieu en un même endroit, comme $ds^2$ est invariant, dans cette représentation on aura un temps invariant.

Ici nous faisons l'extension de cette notion: $dx^k = 0$ et on définit le temps propre; ici $d\tau$ dépend du point $x$ par l'intermédiaire de $g_{00}(x)$.

Dans le cas de notre disque tournant:

$$dr = d\phi = dz = 0$$

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^{1/2} dt \quad .$$

$dt$ est l'intervalle de temps mesuré par un observateur dans le système S. $d\tau$ est l'intervalle de temps mesuré par un observateur dans le système S' c'est à dire sur le disque tournant.

Cette expression est naturelle; en effet à une distance r du centre du disque tournant $v = \omega r$, et $d\tau$ n'est donc rien d'autre que:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\; dt,$$

en relativité restreinte c'est la dilatation du temps:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \quad ;$$

le même phénomène apparait ici, pour le système en mouvement de rotation uniforme:

$$\frac{ds}{c} = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^{1/2} dt$$

Pour mesurer des longueurs il faut faire des mesures simultanées. En relativité restreinte on fait $dt = 0$ dans $ds^2$ et ce qui reste sera le carré de la longueur cherchée; ceci n'est pas correct ici, car on a le terme croisé $d\phi\ dt$ dans l'expression de $ds^2$. On fait alors la transformation:

$$dt' = dt - \frac{\omega r^2}{c^2 - \omega^2 r^2}\, d\phi \quad ,$$

pour éliminer le terme croisé:

$$(dt')^2 = dt^2 + \left(\frac{\omega r^2}{c^2 - \omega^2 r^2}\right)^2 d\phi^2 - 2\,\frac{\omega r^2}{c^2 - \omega^2 r^2}\, d\phi dt \quad ,$$

d'où:

$$(c^2-\omega^2r^2)dt^2 = (c^2-\omega^2r^2)dt'^2 - \frac{\omega^2r^4}{c^2-\omega^2r^2}\,d\phi^2 + 2\omega r^2d\phi dt$$

et:

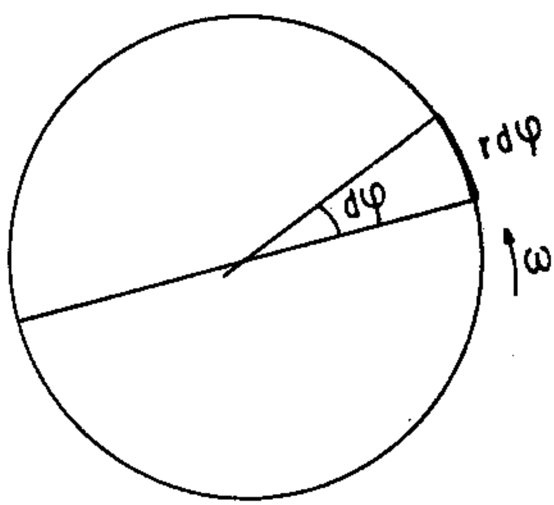
$$ds^2 = \left(c^2-\omega^2r^2\right)dt'^2 - \frac{\omega^2r^4}{c^2-\omega^2r^2}\,d\phi^2 + 2\omega r^2d\phi dt$$

$$- dr^2 - r^2d\phi^2 - 2\omega r^2d\phi dt - dz^2$$

$$= \left(c^2-\omega^2r^2\right)dt'^2 - \left(\frac{\omega^2r^4}{c^2-\omega^2r^2} + r^2\right)d\phi^2 - dr^2 - dz^2$$

$$= \left(c^2-w^2r^2\right)dt'^2 - \left(\frac{c^2r^2}{c^2-\omega^2r^2}\,d\phi^2 + dr^2 + dz^2\right)$$

Prenons des points pour lesquels dt' = 0, on aura alors deux mesures simultanées.



L'observateur veut mesurer le *diamètre*. Le rayon est perpendiculaire au mouvement de rotation, ce qui veut dire qu'on fait des mesures le long du rayon du type dr; l'observateur sur le disque mesure aussi dr.

Si on veut mesurer la *circonférence*, on peut considérer un système inertiel attaché à un point et animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $v = \omega r$. Si on mesure l'arc dans le système inertiel on trouve $rd\phi$, mais pour l'observateur sur le disque:

$$\frac{rd\phi}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} = d\ell_o \quad ,$$

en posant:

$$rd\phi = d\ell$$

$$d\ell = \sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}\; d\ell_o \quad ,$$

résultat bien connu en relativité restreinte.

Einstein prend alors un observateur au repos dans le disque, qui va mesurer la longueur de la circonférence de ce disque; il va trouver:

$$\frac{2\pi r}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \quad ;$$

la longueur du diamètre sera 2r car ici la règle est perpendiculaire au mouvement de rotation et il n'y aura pas de contraction; d'où:

$$\frac{2\pi r}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{2r} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > \pi$$

*la geométrie est non euclidienne.*

Il faut noter que les décompositions spatio-temporelles $d\phi$, $dr$, $dz$, $dt'$ *ont une signification purement locale.*

3.1 <u>Équations du mouvement</u>

Considérons l'expression de l'intervalle élémentaire en fonction des coordonnées du système tournant:

$$ds^2 = (c^2-\omega^2 r^2)dt^2 - (dr^2+r^2 d\phi^2+2\omega r^2 d\phi dt+dz^2),$$

et l'action (du type $S_2$, invariante sous la transformation $s\to s+\varepsilon$):

$$S = \int\left\{(c^2-\omega^2 r^2)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left[\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + 2\omega r^2\frac{d\phi}{ds}\frac{dt}{ds} + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]\right\}ds$$

L'équation de Lagrange pour la variable r est:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot r} \quad , \quad \dot r = \frac{dr}{ds}$$

ou:

$$-\ 2r\omega^2\dot t^2 - 2r\dot\phi^2 - 4\omega r\dot\phi\dot t = -\ 2\ddot r \quad ,$$

ou:

$$\boxed{\ddot{r} = r\omega^2\dot{t}^2 + r\dot{\phi}^2 + 2\omega r\dot{\phi}\dot{t}} \tag{1}$$

Pour la variable z:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad ,$$

ce qui nous donne:

$$\boxed{\ddot{z} = 0} \tag{2}$$

Pour la variable $\phi$:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad ,$$

ou:

$$0 = \frac{d}{ds}(r^2\dot{\phi} + \omega r^2\dot{t}) \quad ,$$

d'oũ:

$$\boxed{r^2\dot{\phi} + \omega r^2\dot{t} = C^{te}} \tag{3}$$

Pour la variable t:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \quad ,$$

ou:

$$0 = \frac{d}{ds}\left[(c^2-\omega^2r^2)\dot{t} - \omega r^2\dot{\phi}\right]$$

d'où:

$$\boxed{(c^2-\omega^2r^2)\dot{t} - \omega r^2\dot{\phi} = C^{te}} \tag{4}$$

Multiplions alors (3) par $\omega$:

$$\omega r^2\dot{\phi} + \omega^2r^2\dot{t} = C^{\underline{te}} \quad ,$$

additionnons alors membre à membre l'équation (4), on obtient:

$$\boxed{c^2\dot{t} = C^{\underline{te}} \quad ,}$$

en convenant de choisir pour cette dernière $C^{\underline{te}}$ la valeur c, on aura:

$$c^2\dot{t} = c \quad ,$$

$$\boxed{\dot{t} = \frac{1}{c}} \tag{5}$$

Dans le système en rotation, considérons un mouvement momentané radial pour lequel: $\dot{\phi} = 0$ (6)

en mettant (5) et (6) dans (1):

$$\ddot{r} = \frac{r\omega^2}{c^2}$$

mais dans le système repéré par $\bar{\phi}$ (système S'), $d\tau = \frac{ds}{c}$ , d'où:

$$\boxed{\frac{d^2r}{d\tau^2} = r\omega^2}$$

c'est l'accélération centrifuge.

On obtient l'accélération de Coriolis en différentiant (3) en introduisant (5) et en prenant $\dot{\phi} = 0$ instantanément:

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} + \frac{2\omega\dot{r}}{c} = 0 \quad ,$$

ainsi:

$$r\ddot{\phi} + \frac{2\omega\dot{r}}{c} = 0$$

ou:

$$\boxed{r\,\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\,2\omega\,\frac{dr}{d\tau}}$$

## 3.2 Résultats

### 3.2.1 Recherches d'équation relativistes du champ gravitationnel.

Le point de départ d'une théorie relativiste de la gravitation est la recherche d'équations covariantes qui généralisent l'équation de Poisson pour le champ gravitationnel de Newton $V(\vec{x})$:

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = 4\pi G\rho_m(\vec{x}) \quad .$$

G est la constante de couplage gravitationnelle, $\rho_m(\vec{x})$ la densité de masse, source de V.

Cette équation peut être regardée comme la limite statique de l'équation:

$$\Box V(x) = -4\pi G\rho_m(x)$$

où $\Box$ est le d'Alembertien et $x = (\dot{x},\vec{x})$. Cependant, à la différence de la charge électrique, la masse n'est pas invariante dans la transformation de Lorentz et ainsi, $\rho_m(x)$ ne peut être considérée comme la composante d'un 4-vecteur. En vue de l'équivalence entre masse et énergie nous voyons à partir des équations:

$$P^\lambda = g^{\lambda\beta}\int d^3x T^0_\beta \quad ,$$

et:

$$P^0 = \bar{H} = \int H d^3x \quad ,$$

que la densité de masse est la composante 00 du tenseur énergie impulsion. Le problème est réduit à trouver, à partir de simples arguments, un tenseur $B_{\mu\nu}$ qui peut être fonction du champ gravitationnel et de ses dérivées première et seconde, et de l'égaler à $fT_{\mu\nu}$:

$$B_{\mu\nu}(x) = -fT_{\mu\nu}(x)$$

où f est une constante de couplage. Cette équation doit se ramener à

$$\Box V(x) = -4\pi G\rho_m(x)$$

dans l'approximation du champ faible.

La théorie de la gravitation d'Einstein identifie ce champ avec la métrique de la géométrie spatio-temporelle de Riemann. Dans cette construction Einstein était guidé intuitivement par deux principes:

- le principe d'équivalence,
- le postulat de la covariance des lois naturelles (pas seulement sous le groupe de transformations de Poincaré mais) sous les transformations continues des coordonnées une à une:

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x, x^1, x^2, x^3) \qquad \mu = 0,1,2,3$$

avec des dérivées premières continues $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}$ et un Jacobien non nul.

Si $R_{\mu\nu}(x)$ est le tenseur de courbure de Riemann et $R(x) = g^{\mu\nu}(x)R_{\mu\nu}(x)$ la courbure invariante, l'équation d'Einstein pour le champ de gravitation sera:

$$\boxed{R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)R(x) = -KT_{\mu\nu}(x)}$$

3.2.2 Déplacement vers le range des raies spectrales: << ~~red-shift~~ >>

*Prédiction:* la lumière émise par un atome dans le soleil avec une fréquence $\nu_s$ arrive sur la terre avec une fréquence $\nu_T < \nu_s$, c'est le << red-shift >>.

Appelons $\phi_s$ le champ de gravitation à la surface du soleil. On a vu que l'intervalle de temps propre est:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}(x)}\ dx^0 = \sqrt{g_{00}(x)}\ dt \quad ;$$

dans l'approximation du champ faible on aura sur le soleil:

$$d\tau_s = \left(1 + \frac{2\phi_s}{c^2}\right)^{1/2} dt \quad ,$$

sur la terre:

$$d\tau_T = \left(1 + \frac{2\phi_T}{c^2}\right)^{1/2} dt$$

pour le même dt dans les deux intervalles. (Rappel: en relativité restreinte $d\tau = \frac{ds}{c} = dt$). Supposons que n ondes de fréquence $\nu_s$ soient émises pendant $\Delta\tau_s$ secondes de temps propre par un atome du soleil:

$$n = \nu_s \Delta\tau_s \qquad \text{(la période étant } \frac{\Delta\tau_s}{n}\text{)};$$

sur terre nous recevons le même nombre d'onde:

$$n = \nu_T \Delta\tau_T \quad ,$$

d'où:

$$\nu_s \Delta\tau_s = \nu_T \Delta\tau_T$$

soit:

$$\boxed{\nu_T = \nu_s \frac{\Delta\tau_s}{\Delta\tau_T}}$$

Prenons un même intervalle de temps coordonné, $\Delta t$, pour l'émission et la réception des n ondes, ainsi:

$$\frac{\Delta\tau_s}{\Delta\tau_T} = \left(\frac{1 + 2\phi_s/c^2}{1 + 2\phi_T/c^2}\right)^{1/2} ,$$

d'oũ:

$$\nu_T = \nu_s \frac{\Delta\tau_s}{\Delta\tau_T} = \nu_s \frac{\left(1 + \frac{2\phi_s}{c^2}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{2\phi_T}{c^2}\right)^{1/2}}$$

Le soleil est comme un grand potentiel négatif par rapport à la terre, ainsi:

$$\nu_T < \nu_s \quad ;$$

$$\nu_T \cong \nu_s \cdot \frac{1 + \phi_s/c^2}{1 + \phi_T/c^2} \quad ,$$

d'oũ:

$$\boxed{\frac{\nu_T - \nu_s}{\nu_s} \cong \frac{\phi_s - \phi_T}{c^2}}$$

ceci veut dire que le champ de gravitation change la fréquence du photon;

or:

$$|\phi_s| > |\phi_T| \quad , \quad \text{et} \quad \phi_s < 0 \quad ,$$

alors:

$$\boxed{\begin{array}{c} \nu_T < \nu_s \\ \\ \Delta\nu = \nu_T - \nu_s < 0 \end{array}}$$

On peut voir de la terre que les atomes vibrent plus lentement dans le soleil que pour un observateur sur le soleil.

*Dérivation du << red-shift >> en utilisant le principe d'équivalence.*

Considérons un système en rotation avec une vitesse angulaire constante $\omega$. La vitesse linéaire d'un point situé à une distance r du centre est $v = \omega r$ et le potentiel centrifuge est:

$$\phi_{cent} = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2,$$

ainsi dans un système en rotation:

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^{1/2} dt = \left(1 + \frac{2\phi_{cent}}{c^2}\right)^{1/2} dt.$$

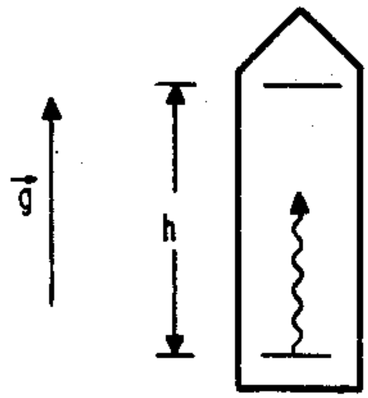
Avec le principe d'équivalence, il y a équivalence avec le potentiel de gravitation $\phi$.

Sur terre considérons une fusée animée d'une accélération g dans un espace libre. Le temps mis par la lumière pour aller de l'émetteur au récepteur est approximativement de:

$$t = \frac{h}{c} \qquad \left(\text{exactement: } \frac{h}{c} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{c^2}.\frac{1}{c}\right)$$

Pendant cet intervalle de temps, le récepteur accroit sa vitesse de:

$$gt = g\frac{h}{c}$$




Le déplacement Doppler correspondant est:

$$\frac{\Delta v}{c} = \frac{hg}{c^2} \quad ,$$

et: $\frac{\Delta \nu}{\nu} = -\frac{\Delta v}{c} = -\frac{hg}{c^2} = \frac{\Delta \phi}{c^2}$ , - hg est le changement de potentiel ($E_p = mgh$)

Alors le << red-shift >> ne dépend pas de l'équation d'Einstein pour le champ de gravitation.

*Dérivation du << red-shift>> à partir de l'équivalence masse-énergie.*

La masse effective du photon est:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad ;$$

l'énergie totale du photon à un point où le potentiel de gravitation est $\phi$ est:

$$mc^2 + m\phi = h\nu + m\phi \quad ;$$

en venant du soleil sur la terre:

$$h\nu_s + m\phi_s = h\nu_T + m\phi_T \qquad \text{(on suppose } m_s = m_T\text{)}$$

d'oũ:

$$h(\nu_T - \nu_s) = m(\phi_s - \phi_T) \quad ,$$

en prenant

$$m = \frac{h\nu_s}{c^2} \quad ,$$

$$h(\nu_T - \nu_s) = \frac{h\nu_s}{c^2}\,(\phi_s - \phi_T)$$

d'oũ:

$$\boxed{\frac{\nu_T - \nu_s}{\nu_s} = \frac{\phi_s - \phi_T}{c^2}}$$

$\phi_s - \phi_T < 0$, d'oũ:

$\nu_T < \nu_s$: on a un déplacement vers le rouge car la fréquence diminue.

Le test expérimental donne des difficultés par la présence d'effets non gravitationnels ã la surface du soleil tels que l'effet Doppler dans les gaz ã haute température , les champs électromagnétiques intenses, les hautes pressions, etc.....

En utilisant l'effet Mössbauer dans un tube vertical de 74 pieds, le décalage prédit est de $- 4{,}92.10^{-15}$ et le résultat expérimental de $(-5{,}13 \pm 0{,}51).10^{-15}$.

Il existe une théorie relativiste scalaire qui donne d'autres équations pour le champ de gravitation que celles d'Einstein, mais l'effet décrit ici subsiste dans cette théorie car ce phénomène repose sur la relation liant la masse et l'énergie

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

qui est un résultat de relativité restreinte.

Le << red-shift >> ne constitue pas une preuve pour les équations du champ de gravitation d'Einstein.

Nous avons vu que:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu \quad ,$$

dans l'approximation du champ faible:

$$g_{\mu\nu}(x) = \dot{g}_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(x) \quad ,$$

en négligeant les termes en $\varepsilon^2$, $\varepsilon\beta$, $\beta^2$ et d'ordre supérieur:

$$g_{oo}(x) = 1 + \varepsilon\gamma_{oo}(\vec{x}) = 1 + \frac{2\phi(\vec{x})}{c^2} \quad ,$$

avec:

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(\vec{x}) \xrightarrow[|\vec{x}| \to \infty]{} 0 \quad ,$$

$$g_{ik}(x) = \dot{g}_{ik} \quad ; \quad g_{o\mu}(x) = \dot{g}_{o\mu} = 0 \quad (\mu \neq 0) \quad ;$$

dans cette approximation:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^0)^2 - (d\vec{x})^2$$

$$ds^2 = (dx^0)^2\left[\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) - \frac{v^2}{c^2}\right] \quad ,$$

$$ds = dx^0\sqrt{\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) - \frac{v^2}{c^2}}$$

Pour une horloge immobile dans le système de référence:

$$ds = dx^0\sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}} \quad ,$$

le temps propre dépend du potentiel gravitationnel où se trouve l'horloge.

Dans un système en rotation, à une distance r du centre: $\phi = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$, d'où:

$$ds = dx^0\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$$

Un observateur dans un système d'inertie (fixe) dira qu'il n'y a pas de potentiel gravitationnel mais l'horloge est en rotation avec une vitesse: $v = r\omega$; dans

$$ds = dx^0\sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}$$

Un observateur dans le système en rotation dira que l'horloge est immobile si $v = 0$ mais il y a un champ gravitationnel au point r, $\phi = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$

## 4 NOTIONS D'ANALYSE TENSORIELLE DANS L'ESPACE DE RIEMANN

Nous devons considérer tous les systèmes pour tous les mouvements pour décrire les lois de la nature.

Si on a un système de coordonnés arbitraire x, on peut définir un nouveau x'; en général: $x'^{\mu} = f^{\mu}(x)$.

En relativité générale, on doit considérer des transformations de ce type, où $f^{\mu}$ est quelconque avec des conditions de régularité mathématique qu'on admet ici: Jacobien différent de 0, tel que la transformation soit réversible; dérivées continues.

Considérons:

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x) \quad ; \quad x^{\mu} = h^{\mu}(x')$$

d'où:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\, dx^{\nu} \quad ; \quad dx^{\mu} = \frac{\partial h^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\, dx'^{\nu}$$

$$\equiv \alpha^{\mu}_{\nu}(x)\, dx^{\nu} \quad ; \quad = \beta^{\mu}{}_{\nu}(x')\, dx'^{\nu}$$

on a:

$$\alpha^{\mu}{}_{\lambda}(x)\, \beta^{\lambda}{}_{\nu}(x') = \frac{\partial f^{\mu}(x)}{\partial x^{\lambda}}\, \frac{\partial h^{\lambda}(x')}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\mu}(x)}{\partial x^{\lambda}}\, \frac{\partial x^{\lambda}(x')}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

Comment allons nous définir les vecteurs et les tenseurs dans l'espace de Riemann?

4.1 Vecteurs

Partons du fait que:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}(x)}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} \quad ;$$

alors étant donnée un fonction $A^{\alpha}(x)$, elle constitue un vecteur dans cet espace si la transformation de cette fonction obéit à la règle:

$$\boxed{A'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}(x)}$$

c'est la transformation d'un *vecteur contravariant*.

On voit qu'on ne peut avoir une algèbre vectorielle qu'en un point donné.

En relativité spéciale:

$$u'^{\alpha}(x') = \ell^{\alpha}{}_{\nu} u^{\nu}(x) \quad ,$$

où $\ell^{\alpha}{}_{\nu}$ est la matrice des transformations de Lorentz

$\ell^{\alpha}{}_{\nu}$ comporte 6 paramètres pour une transformation de Lorentz, $a^{\alpha}+\ell^{\alpha}{}_{\nu}$ comporte 10 paramètres pour une transformation de Poincaré; considérons un deuxième vecteur:

$$v'^{\alpha}(y') = \ell^{\alpha}{}_{\nu} v^{\nu}(y) \quad ,$$

on peut alors définir la somme de deux vecteurs qui est encore un vecteur:

$$u'^{\alpha}(x') + v'^{\alpha}(y') = \ell^{\alpha}{}_{\nu}\left[u^{\nu}(x) + v^{\nu}(y)\right]$$

Ici ce n'est plus le cas; considérons un deuxième vecteur:

$$B'^{\mu}(y') = \frac{\partial y'^{\mu}}{\partial y^{\alpha}}\, B^{\alpha}(y) \quad ,$$

on voit que:

$$A'^{\mu}(x') + B'^{\mu}(y') \neq \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\left[A^{\alpha}(x) + B^{\alpha}(y)\right] \quad ;$$

donc si on a deux vecteurs chacun en un point donné, on ne peut pas les combiner car les transformations dépendent des points.

Considérons une fonction invariante:

$$F'(x') = F(x) \quad ,$$

$$dF'(x') = \frac{\partial F'(x')}{\partial x'^{\lambda}}\, dx'^{\lambda} \quad ,$$

$$= \frac{\partial F(x)}{\partial x^{\lambda}}\, dx^{\lambda} \quad ,$$

d'où:

$$\frac{\partial F'(x')}{\partial x'^{\lambda}}\,\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\, dx^{\alpha} = \frac{\partial F(x)}{\partial x^{\alpha}}\, dx^{\alpha} \quad ,$$

d'où la loi de *transformation du gradient*:

$$\boxed{\frac{\partial F'(x')}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial F(x)}{\partial x^{\beta}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}}}$$

La définition d'un *vecteur covariant* sera:

$$\boxed{B'_\mu(x') = B_\beta(x)\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}}$$

4.2 Tenseurs

Considérons un produit $A^\mu(x)B^\nu(x)$ et regardons comment ce produit se transforme; ce produit donne lieu à un tenseur du deuxième ordre:

$$T'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}(x) \quad ,$$

pour un tenseur covariant:

$$S'_{\mu\nu}(x') = S_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \quad ;$$

considérons maintenant la transformation d'un tenseur mixte:

$$\boxed{T'^{\mu'\nu'\cdots}_{\alpha'\beta'\cdots}(x') = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^\nu}\cdots T^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\cdots}(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}}\cdots}$$

on voit d'un côté de $T^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\cdots}(x)$ la transformation des indices contravariantes et de l'autre les indices covariants.

Considérons le tenseur métrique covariant $g_{\mu\nu}(x)$ et définissons:

$$g = \hat{d\bar{e}t}g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} g_{oo} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} ,$$

si $\Delta_{\mu\nu}$ est le dêterminant mineur correspondant à l'élément $g_{\mu\nu}$, on a:

$$g = \sum_{\lambda} g_{\mu\lambda}\, \Delta_{\mu\lambda} \quad ,$$

et:

$$\sum_{\lambda} g_{\mu\lambda}\Delta_{\nu\lambda} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu \quad ;$$

on peut dêfinir un nouveau tenseur contravariant:

$$\boxed{g^{\mu\nu}(x) = \frac{\Delta_{\mu\nu}(x)}{g} \quad ,}$$

pourquoi est-ce qu'on définit ce tenseur? parce que:

$$\boxed{g^{\mu\lambda}(x)g_{\lambda\nu}(x) = \frac{\Delta_{\mu\lambda}g_{\lambda\nu}}{g} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \quad ,}$$

il suffit donc d'admettre que le tenseur $g_{\mu\nu}(x)$ soit covariant pour avoir le tenseur contravariant; on peut montrer que $g_{\alpha\beta}(x)$ est un tenseur ainsi que $g^{\alpha\beta}(x)$, ils satisfont donc aux règles de transformation écrites précédemment.

Montrons que:

$$ds^2 = ds'^2 \quad ,$$

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu}(x')dx'^{\mu}dx'^{\nu} = g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}dx^{\lambda}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\eta}}dx^{\eta}$$

$$= g_{\lambda\eta}(x)dx^{\lambda}dx^{\eta} = ds^2 \quad .$$

4.3 Norme d'un vecteur

En un point donné, la norme d'un vecteur sera définie par:

$$A'^{\mu}(x')A'_{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}(x)A_{\lambda}(x)\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} = A^{\nu}(x)A_{\lambda}(x)\delta^{\lambda}{}_{\nu}$$

$$= A^{\nu}(x)A_{\nu}(x) \quad .$$

C'est une expression invariante, car en général le produit scalaire est invariant:

$$A'^{\mu}(x')B'_{\mu}(x') = A^{\nu}(x)B_{\nu}(x) = g^{\nu\lambda}(x)A_{\nu}(x)B_{\lambda}(x)$$

$$= g_{\nu\lambda}(x)A^{\nu}(x)B^{\lambda}(x) \quad .$$

a) Supposons que nous ayons un tenseur $T^{\mu\nu}(x)$ quelconque au point $(x)$, on peut définir:

$$T^{\mu}_{\lambda}(x) = T^{\mu\nu}(x)g_{\nu\lambda}(x) \quad ,$$

on peut aussi écrire:

$$T_{\lambda}{}^{\mu}(x) = g_{\lambda\nu}(x)T^{\nu\mu}(x) = T^{\nu\mu}(x)g_{\nu\lambda}(x) \quad .$$

On sait que:

$$T'^{\mu}{}_{\lambda}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} T^{\alpha}{}_{\beta}(x) \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} T^{\alpha\eta}(x) g_{\eta\beta}(x) \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}$$

$$T'^{\mu}_{\lambda}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} T_{\beta}{}^{\alpha}(x) \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} g_{\eta\beta}(x) T^{\eta\alpha}(x) \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}$$

en général:

$$T^{\alpha}{}_{\beta}(x) \neq T_{\beta}{}^{\alpha}(x) \quad \text{si} \quad T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu} \quad .$$

Supposons:

$$T^{\mu\nu}(x) = T^{\nu\mu}(x) \quad ,$$

or:

$$T_{\nu}{}^{\lambda}(x) = g_{\nu\mu}(x) T^{\mu\lambda}(x) \quad ,$$

$$T^{\lambda}{}_{\nu}(x) = T^{\lambda\mu}(x) g_{\mu\nu}(x)$$

$$= T^{\mu\lambda}(x) g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x) T^{\mu\lambda}(x) = T_{\nu}{}^{\lambda}(x) \quad .$$

Donc:

$$\text{si} \quad \boxed{\begin{array}{l} T^{\mu\nu}(x) = T^{\nu\mu}(x) \\[2em] \text{alors:} \quad T_{\lambda}{}^{\nu}(x) = T^{\nu}{}_{\lambda}(x) = T^{\nu}_{\lambda}(x) \end{array}} \quad ,$$

la propriété de symétrie est conservée dans la transformation:

$$T'^{\mu\nu}(x') = T'^{\nu\mu}(x') \quad .$$

De même, si:

$$T^{\mu\nu}(x) = - T^{\nu\mu}(x) \quad ,$$

alors:

$$T_{\lambda}{}^{\nu}(x) = - T^{\nu}{}_{\lambda}(x)$$

L'algèbre des tenseurs est définie seulement en un point.

On ne peut faire la somme de tenseurs pris en différents points, leur somme n'est pas un tenseur.

## 4.4 Définition de quelques grandeurs

### 4.4.1 Tenseur de la métrique transformée

Considérons:

$$\alpha^{\mu}{}_{\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad , \quad \beta^{\mu}{}_{\nu}(x') = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \quad ,$$

alors:

$$\alpha^{\mu}{}_{\nu}(x)\,\beta^{\nu}{}_{\lambda}(x') = \delta^{\mu}{}_{\lambda} \quad ,$$

d'où:

$$\det\alpha.\det\beta = 1$$

Le tenseur de la métrique transformée est:

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\alpha\beta}(x)\ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\ \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \quad ,$$

nous avons:

$$g' = g(\det\beta)^2 = \frac{g}{(\det\alpha)^2} \quad ,$$

donc:

$$\boxed{g' = \frac{g}{(\det\alpha)^2}}$$

quelques fois on prend $\sqrt{-g'}$ pour avoir un nombre réel:

$$\sqrt{-g'} = \frac{\sqrt{-g}}{|\det\alpha|}$$

Pour l'espace avec une métrique de Lorentz, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ où $\eta_{oo} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1$, $\eta_{\mu\nu} = 0$ pour $\eta \neq \nu$; le determinant $\eta$ de $\eta_{\mu\nu}$ est $-1$. Nous imposons donc qu'on ait $-g(x) > 0$ partout. Par la loi de transformation de $\sqrt{-g}$ nous voyons que la valeur absolue du jacobien $|\det\alpha|$ doit apparaitre dans la dernière équation.

4.4.2 Pseudo tenseur

$$P^{\mu'\nu'\cdots}_{\alpha'\beta'\cdots}(x') = \frac{\text{dêt}\alpha}{|\text{dêt}\alpha|}\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\cdots P^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\cdots}(x)\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\cdots$$

$\frac{\text{dêt}\alpha}{|\text{dêt}\alpha|}$ nous donne le signe de dêt $\alpha$; si + 1 la quantité $P^{\mu'\nu'\cdots}_{\alpha'\beta'\cdots}$ se transforme comme un tenseur, si - 1 comme un pseudo-tenseur. Introduisons:

$$\delta'_{\alpha'\beta'\gamma'\eta'}(x') = \text{dêt}\alpha\ \delta_{\alpha\beta\gamma\eta}(x)\ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\eta'}}$$

où $\delta_{\alpha\beta\gamma\eta}(x)$ coïncide avec la quantité $\delta$ de Lévi-Civita:

$$\delta_{1230}(x) = 1 = -\delta_{2130}(x) \quad , \quad \text{etc.}$$

On définit:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}(x) = \sqrt{-g}\ \delta_{\alpha\beta\gamma\eta}(x) \quad ,$$

la loi de transformation est:

$$\boxed{\varepsilon'_{\alpha'\beta'\gamma'\eta'}(x') = \frac{\text{dêt}\alpha}{|\text{dêt}\alpha|}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}(x)\ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}}\cdots\frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\eta'}}}$$

$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}(x)$ est le pseudo-tenseur complètement antisymétrique d'ordre 4 de Lévi-Civita.

Considérons alors le tenseur antisymétrique:

$$F^{\mu\nu}(x) = -F^{\nu\mu}(x) \quad ,$$

on peut alors définir son dual:

$$*F_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\delta_{\alpha\beta\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$$

$*F_{\alpha\beta}(x)$ est le tenseur dual de $F^{\mu\nu}(x)$; on a le facteur $\frac{1}{2}$ car:

$$*F_{03}(x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{0312}F^{12}(x) + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{0321}F^{21}(x)$$

$$= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{0312}F^{12}(x) + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{0312}F^{12}(x) = \varepsilon_{0312}F^{12}(x)$$

Ainsi:

$$*F_{12}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\delta_{1230}F^{30}(x) \equiv \sqrt{-g}\;F^{30}(x) = -\sqrt{-g}\;F^{03}$$

$$*F_{23}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\delta_{2310}F^{10}(x) \equiv \sqrt{-g}\;F^{10}(x) = -\sqrt{-g}\;F^{01}$$

$$*F_{31}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\;\delta_{3120}F^{20}(x) \equiv \sqrt{-g}\;F^{20}(x) = -\sqrt{-g}\;F^{02}$$

$$*F_{10} \equiv \sqrt{-g}\;F^{23}\;;\; *F_{20} = \sqrt{-g}\;F^{31};\; *F_{30} = \sqrt{-g}\;F^{12}$$

Par exemple le dual du champ électrique ou magnétique est le champ magnétique ou électrique respectivement. Le champ électrique $\vec{E}$ est un vecteur polaire et le champ magnétique $\vec{B}$ un vecteur axial.

a) Soient deux vecteurs $A^{\mu}(x)$ et $B^{\nu}(x)$ formons:

$$S^{\mu\nu}(x) = A^{\mu}B^{\nu} - A^{\nu}B^{\mu}\;,$$

qui définit un parallélogramme dont l'aire est:

$$A = \frac{1}{2} S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \quad ;$$

on a:

$$*S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \delta_{\alpha\beta\mu\nu} S^{\mu\nu} \quad ,$$

d'où:

$$*S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\ \delta_{\alpha\beta\mu\nu} (A^{\mu}B^{\nu} - A^{\nu}B^{\mu})(A^{\alpha}B^{\beta} - A^{\beta}B^{\alpha}) \quad ,$$

en développant on trouve:

$$*S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

Etant donnés 3 vecteurs $A^{\mu}, B^{\nu}, C^{\lambda}$ ils définissent un parallélépipède avec:

$$V^{\mu\nu\lambda} = \begin{vmatrix} A^{\mu} & B^{\mu} & C^{\mu} \\ A^{\nu} & B^{\nu} & C^{\nu} \\ A^{\lambda} & B^{\lambda} & C^{\lambda} \end{vmatrix}$$

définissons:

$$V_{\alpha} = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} V^{\beta\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{3!} \delta_{\alpha\beta\mu\nu} V^{\beta\mu\nu}$$

$$= \sqrt{-g}\ \delta_{\alpha\beta\mu\nu} A^{\beta} B^{\mu} C^{\nu}$$

le volume est:

$$V^2 = - V_\alpha V^\alpha$$

Etant donnés 4 vecteurs ils définissent:

$$\sum^{\alpha\beta\lambda\eta} = \begin{vmatrix} A^\alpha & B^\alpha & C^\alpha & D^\alpha \\ A^\beta & B^\beta & C^\beta & D^\beta \\ A^\lambda & B^\lambda & C^\lambda & D^\lambda \\ A^\eta & B^\eta & C^\eta & D^\eta \end{vmatrix}$$

Considérons le déterminant qui est le dual de $\sum^{\alpha\beta\lambda\eta}$:

$$\sum = \frac{1}{4!}\, \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\eta} \sum^{\alpha\beta\lambda\eta} = \frac{\sqrt{-g}}{4!}\, \delta_{\alpha\beta\lambda\eta} \sum^{\alpha\beta\lambda\eta}$$

$$= \sqrt{-g}\; \delta_{\alpha\beta\lambda\eta}\, A^\alpha B^\beta C^\lambda D^\eta \qquad ,$$

ou:

$$\sum = \sqrt{-g} \begin{vmatrix} A^1 & B^1 & C^1 & D^1 \\ A^2 & B^2 & C^2 & D^2 \\ A^3 & B^3 & C^3 & D^3 \\ A^0 & B^0 & C^0 & D^0 \end{vmatrix}$$

$\sum$ est un pseudo-scalaire.

$\sum$ se transforme suivant:

$$\sum{}'(x') = \frac{\sqrt{-g'}}{4!}\delta_{\alpha'\beta'\gamma'\eta'}\sum{}^{\alpha'\beta'\gamma'\eta'} = \sqrt{-g'(x')}\,\delta_{\alpha'\beta'\gamma'\eta'}(x')A'^{\alpha'}B'^{\beta'}C'^{\gamma'}D'^{\eta'}$$

$$= \frac{\sqrt{-g(x)}}{|\text{dêt}\alpha|}\,\text{dêt}\alpha\,\delta_{abcd}\,\frac{\partial x^a}{\partial x'^{\alpha'}}\,\frac{\partial x^b}{\partial x'^{\beta'}}\,\frac{\partial x^c}{\partial x'^{\gamma'}}\,\frac{\partial x^d}{\partial x'^{\eta'}}\,\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^m}\,\frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^n}$$

$$\frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^p}\,\frac{\partial x'^{\eta'}}{\partial x^q}\,A^mB^nC^pD^q = \frac{\sqrt{-g}}{|\text{dêt}\alpha|}\,\text{dêt}\alpha\;\delta_{mnpq}\;A^mB^nC^pD^q$$

$$= \frac{\text{dêt}\alpha}{|\text{dêt}\alpha|}\sum(x)$$

donc:

$$\sum{}'(x') = \frac{\text{dêt}\alpha}{|\text{dêt}\alpha|}\sum(x) \quad ;$$

l'élement de volume dans cet espace est:

$$d\sum = \sqrt{-g}\;dx^0dx^1dx^2dx^3 \quad ,$$

et c'est un pseudo-scalaire.

## 4.5 Déplacement parallèle

Il s'agit de savoir comment passer d'un point à un autre. Supposons qu'on ait un vecteur en un point x; il se transforme d'une certaine façon, en un autre point il se transforme d'une autre manière de telle façon qu'on ne puisse pas faire la somme des deux vecteurs pris en des points différents.

On a la transformarion:

$$F'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} F^{\alpha}(x) \quad ,$$

nous voulons:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} F'^{\mu}(x') = H'^{\mu}{}_{\lambda}(x') \quad .$$

Dans un espace plan:

$$F'^{\mu}(x') = \ell^{\mu}{}_{\alpha} F^{\alpha}(x) \quad ,$$

et:

$$\frac{\partial F'^{\mu}(x')}{\partial x'^{\lambda}} = \ell^{\mu}{}_{\alpha} \frac{\partial F^{\alpha}(x)}{\partial x'^{\lambda}} \quad ,$$

car $\ell^{\mu}{}_{\alpha}$ est constant;

ici:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} F'^{\mu}(x') = \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}}\left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} F^{\alpha}(x)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\eta}}\left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} F^{\alpha}(x)\right] \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\lambda}}$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\lambda}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\eta}\partial x^{\alpha}} F^{\alpha}(x) \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\lambda}} \;;$$

on a vu que la transformation d'un tenseur est:

$$T'^{\mu}{}_{\lambda}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} T^{\alpha}{}_{\nu}(x) \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\lambda}} ,$$

revenons à:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} F'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} H^{\alpha}{}_{\eta}(x) \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\lambda}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\eta}\partial x^{\alpha}} F^{\alpha}(x) \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\lambda}} ,$$

$\frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} F'^{\mu}(x')$ n'est donc pas un tenseur, car cette quantité ne se transforme pas comme $T'^{\mu}{}_{\lambda}(x')$; c'est le terme

$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\eta}\partial x^{\alpha}} F^{\alpha}(x) \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\lambda}}$ qui empêche que $H'^{\mu}{}_{\lambda}(x')$

soit un tenseur.

Donc, pour que la dérivée $\frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} F'^{\mu}(x')$ soit un tenseur, il faut que le terme avec la dérivée seconde s'annule:

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\eta}\partial x^{\alpha}} = 0 ,$$

c'est le cas pour:

$$x'^{\mu} = \ell^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} .$$

Considérons maintenant un scalaire $\phi(x)$, et on veut $\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \phi(x)$; on introduit le *déplacement parallèle.*

Considérons le champ $F^{\mu}(x)$; sa valeur on point $x + dx$ est:

$$\boxed{F^{\mu}(x+dx) = F^{\mu}(x) + \frac{\partial F^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\, dx^{\alpha}} \quad ,$$

introduisons alors:

$$\boxed{\bar{F}^{\mu}(x+dx) = F^{\mu}(x) + \delta F^{\mu}(x)}$$

$\delta F^{\mu}(x)$ *est le déplacement parallèle de* $F$.

On a:

$$\delta\left[F^{\alpha}(x)G_{\alpha}(x)\right] = 0 \quad ,$$

c'est la même chose que de dire que:

$$\delta\phi(x) = 0 \quad .$$

Définition:

$$\boxed{\delta F^{\mu}(x) = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x)F^{\alpha}(x)dx^{\beta}} \quad ,$$

où $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x)$ *est le symbole de Christoffel;* on peut montrer que $\Gamma$ peut être choisi symétrique par rapport aux indices $\alpha$ et $\beta$:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x) = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}(x)$$

avec:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}\, g^{\mu\lambda}(x)\left[\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right]$$

On a:

$$\Gamma_{\mu,\alpha\beta}(x) = g_{\mu\nu}(x)\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(x) = \Gamma_{\mu,\beta\alpha}(x) \quad ;$$

$$\Gamma_{\nu,\alpha\beta}(x) = g_{\nu\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\, g_{\nu\mu}g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) \quad ,$$

et:

$$\Gamma_{\alpha,\nu\beta}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right) \quad ,$$

alors:

$$\Gamma_{\nu,\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha,\nu\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} \quad ,$$

ou:

$$\boxed{\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} - g_{\nu\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} = 0}$$

## 4.6 <u>Dérivée covariante</u>

Considérons les deux expressions:

$$F^{\mu}(x+dx) = F^{\mu}(x) + \frac{\partial F^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}dx^{\lambda} \quad ,$$

$$\bar{F}^{\mu}(x+dx) = F^{\mu}(x) - \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}F^{\alpha}dx^{\lambda} \quad ,$$

nous pouvous alors faire la différence entre ces deux quantités, car ce sont des vecteurs pris au même point:

$$F^{\mu}(x+dx) - \bar{F}^{\mu}(x+dx) = \left(\frac{\partial F^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}F^{\alpha}_{(x)}\right) dx^{\lambda}$$

$$= F^{\mu}_{;\lambda}(x)dx^{\lambda}$$

$$= D_{\lambda}F^{\mu}(x)dx^{\lambda} \quad ,$$

$dx^{\lambda}$ est un vecteur,

$\frac{\partial F^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}F^{\alpha}(x)$ est un tenseur, c'est la *dérivée covariante* du vecteur $F^{\mu}$ par rapport à $\nu$.

$$\boxed{D_{\lambda}F^{\mu}(x) = F^{\mu}_{;\lambda}(x) = \frac{\partial F^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}(x)F^{\alpha}(x) \quad ,}$$

on néglige le terme de degré 2.

La loi de transformation des $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x)$ est:

$$\boxed{\Gamma'^{\mu}_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda}_{\eta\epsilon}(x) \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial x'^{\beta}} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\eta}\partial x^{\epsilon}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial x'^{\beta}}}$$

$\Gamma'^{\mu}_{\alpha\beta}(x')$ n'est pas un tenseur; la dérivée covariante d'un vecteur est un tenseur, car le terme comportant une dérivée seconde dans $\Gamma'^{\mu}_{\alpha\beta}(x')$ s'élimine avec le même terme qui est dans la transformée de $\frac{\partial F^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}$. Nous développerons cela au paragraphe VI .

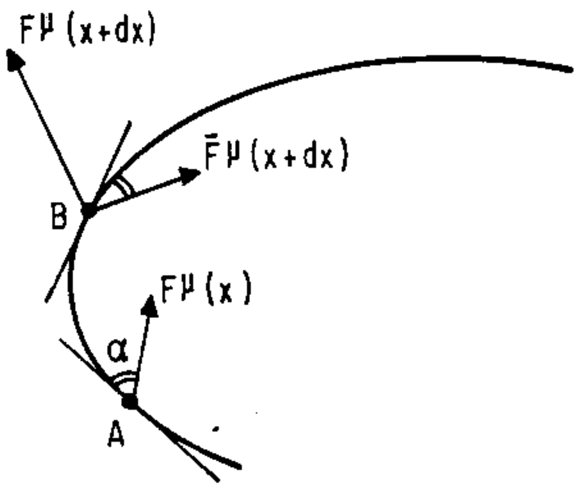
4.7 Remarque

Weyl ne considère pas les symboles de Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x)$ comme symétriques par rapport aux indices $\alpha$ et $\beta$, on obtient alors une géométrie plus générale que celle de Riemann.

On postule alors que la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle:

$$D_{\beta} g_{\alpha\nu} = 0 \quad .$$

On peut donner une image du déplacement parallèle:




au point B on peut faire la différence:

$$F^{\mu}(x+dx) - \bar{F}^{\mu}(x+dx) = D_{\lambda}F^{\mu}(x)\,dx^{\lambda}$$

## 5 CHAMP VECTORIEL CONSTANT DANS L'ESPACE

a) Considérons un vecteur $A^{\mu}(x)$ et voyons s'il est possible de définir un champ vectoriel constant dans l'espace de Riemann. Soit $A^{\mu}(x) \equiv (dx^0, 0, 0, 0)$ et supposons que $dx^0$ *soit constant partout dans l'espace*. Alors, la longueur de $A^{\mu}$ sera $g_{00}(x)(dx^0)^2$ au point x et $g_{00}(y)(dx^0)^2$ au point y, donc pour que cette longueur soit la même, on doit avoir $g_{00}(x) = g_{00}(y)$. De même, pour un vecteur $A^{\mu}(x) \equiv (0,\ldots,dx^{\mu}\ldots,0)$ on devrait avoir $g_{\mu\mu}(x)$ constant et pour le vecteur $A^{\mu}(x) + A^{\nu}(x)$ on devrait avoir $g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}$ constant, donc $g_{\mu\nu}(x)$.

Par conséquent, *pour définir un champ vectoriel constant dans un espace à travers la constance de ses composantes, un doit être capable de trouver dans cet espace un système de coordonnées où tous les $g_{\mu\nu}$ soient constants dans tout l'espace. Un tel espace est un espace pseudo-euclidien.*

On verra que cette définition de vecteur constant n'est pas invariante par rapport aux changements de systèmes de coordonnées. Soit $A^{\mu}$ constant dans un système de coordonnées (x). Dans un autre système (x') on aura:

$$A'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}(x) \quad ,$$

donc $A'^{\mu}(x')$ n'est pas constant, puisque $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ est en général une fonction de x. Une telle définition de vecteur constant est valable seulement pour $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = C^{\underline{te}}$, donc $x'^{\mu} = \ell^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu}$, c'est le cas d'un espace pseudo-euclidien.

b) Soit $A^{\mu}$ constant dans le système (x); nous avons vu que:

$$A'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}(x) \quad , \quad \text{soit:} \quad A^{\nu}(x) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} A'^{\alpha}(x')$$

Voyons comment changent les composantes $A'^{\mu}(x')$ le long d'une courbe paramétrisée par u:x(u). Nous avons, puisque $A^{\nu}(x)$ est constant:

$$\frac{dA'^{\mu}}{du} = \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{du} A^{\nu}(x) \quad ;$$

exprimons maintenant $\frac{dA'^{\mu}}{du}$ en fonction de $A'^{\mu}$. On a

$$\frac{dA'^{\mu}}{du} = \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\eta}} \frac{dx'^{\eta}}{du} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} A'^{\alpha} \quad ,$$

donc:

$$\boxed{\frac{dA'^{\mu}(x')}{du} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \eta\alpha \end{matrix} \right\}' \frac{dx'^{\eta}}{du} A'^{\alpha}(x') \quad ,}$$

où:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \eta\alpha \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \quad .$$

Donc, si les $A^{\mu}$ sont constantes dans un système de coordonnées particulier (x), dans un système de coordonnées arbitraire, les composantes $A'^{\mu}(x')$ doivent varier le long d'une courbe quelconque d'après la loi ci-dessus.

On généralise cette formule, et on met:

$$\boxed{\delta A^{\mu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \eta\alpha \end{matrix} \right\} dx^{\eta} A^{\alpha} \quad ,}$$

cette équation traduit le déplacement parallèle de $A^{\mu}(x)$ en $A^{\mu} + \delta A^{\mu}$ au point x + dx:

$$\bar{A}^{\mu}(x+dx) = A^{\mu}(x) + \delta A^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \eta\alpha \end{matrix} \right\} dx^{\eta} A^{\alpha}$$

c'est la *loi d'affinité*.

$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \eta\alpha \end{matrix} \right\}$ est le symbole de connection affine ou d'affinité, un symbole particulier est le symbole de Chistoffel.

c) Exigeons que cette loi soit covariante, donc que $\bar{A}^{\mu}$ soit encore un vecteur.

Cela veut dire que:

$$\bar{A}'^{\mu}(x'+dx') = \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)_{x+dx} \bar{A}^{\nu}(x+dx) \quad ,$$

soit:

$$A'^{\mu}(x') + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \eta\alpha \end{matrix} \right\}' dx'^{\eta} A'^{\alpha}(x') = \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)_{x+dx} \left[ A^{\nu}(x) + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\beta \end{matrix} \right\} dx^{\lambda} A^{\beta} \right],$$

on a:

$$\left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)_{x+dx} = \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)_{x} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\beta}} dy^{\beta} \quad ,$$

par conséquent:

$$A'^{\mu}(x') + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \eta\alpha \end{matrix} \right\}' dx'^{\eta} A'^{\alpha}(x') = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)_x A^{\nu}(x) + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\beta}} A^{\nu}(x)\, dx^{\beta}$$
$$+ \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\beta \end{matrix} \right\} dx^{\lambda} A^{\beta} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)_x$$

donc:

$$\boxed{\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \eta\alpha \end{matrix} \right\}' dx'^{\eta} A'^{\alpha}(x') = \left[ \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\beta \end{matrix} \right\} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \pm \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\lambda}} \right] dx^{\lambda} A^{\beta}(x)}$$

Or, de:

$$A'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}(x) \quad ,$$

on tire:

$$A^{\nu}(x) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu}(x') \quad ,$$

par conséquent:

$$dx^{\lambda} A^{\beta}(x) = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{a}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{b}} dx'^{a} A'^{b}(x') \quad ,$$

donc:

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \eta\alpha \end{matrix} \right\}' dx'^{\eta} A'^{\alpha}(x') = \left[ \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\beta \end{matrix} \right\} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \right] dx'^{\eta} A'^{\alpha}(x')$$

par conséquent:

$$\boxed{\left\{\begin{matrix}\mu\\ \eta\alpha\end{matrix}\right\}'(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\left\{\begin{matrix}\nu\\ \lambda\beta\end{matrix}\right\}(x)\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\eta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\eta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}}$$

Les coefficients de connection affine se transforment comme ci-dessus pour que la loi:

$$\delta A^{\mu} = \left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} dx^{\alpha} A^{\beta}$$

soit covariante.

Il n'est pas nécessaire que $\left\{\begin{matrix}\mu\\ \eta\alpha\end{matrix}\right\} \neq \left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\eta\end{matrix}\right\}$ ; pour le symbole de Christoffel on a l'égalité, c'est un cas particulier.

. Si $\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} \neq \left\{\begin{matrix}\mu\\ \beta\alpha\end{matrix}\right\}$ *dans un certain système de référence, alors cela sera vrai pour toute transformation de coordonnées.*

Supposons que pour une certaine transformation des coordonnés on ait pû trouver que $\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mu\\ \beta\alpha\end{matrix}\right\}$ . Alors, d'après ce qui précède:

$$\begin{aligned}\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\eta\end{matrix}\right\}' &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\left\{\begin{matrix}\nu\\ \lambda\beta\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\left\{\begin{matrix}\nu\\ \beta\lambda\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}}\\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\left\{\begin{matrix}\nu\\ \lambda\beta\end{matrix}\right\}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\eta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\eta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\end{aligned}$$

$= \left\{\begin{matrix}\mu\\ \eta\alpha\end{matrix}\right\}'$ pour tout autre système de coordonnées, ce que contredit l'hypothèse.

.Si $\begin{Bmatrix}\mu \\ \alpha\beta\end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix}\mu \\ \beta\alpha\end{Bmatrix}$ dans un certain système de coordonnées, alors il est impossible de trouver un système de coordonnées où tous les coefficients $\begin{Bmatrix}\mu \\ \alpha\beta\end{Bmatrix} = 0$ en un certain point.

En effet si cela était vrai, alors en ce point on aurait $\begin{Bmatrix}\mu \\ \eta\alpha\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mu \\ \alpha\eta\end{Bmatrix}$ puisqu'on aurait seulement le terme inhomogène, qui est symétrique:

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}}$$

$$= \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\eta}} .$$

Si les coefficients de connection ne sont pas symétriques, on n'aura pas la relativité générale d'Einstein. Dans des théories unitaires de la gravitation et de l'électromagnétisme, on aura des symboles $\begin{Bmatrix}\mu \\ \eta\alpha\end{Bmatrix}$ non symétriques.

d) <u>Théorème: la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un certain système de coordonnées où les composants d'un vecteur ne changent pas par un déplacement parallèle infinitésimal est que:</u>

$$\begin{Bmatrix}\mu \\ \alpha\beta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mu \\ \beta\alpha\end{Bmatrix} .$$

C'est la même chose que de dire: la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse définir un système de coordonnées où $\begin{Bmatrix}\mu \\ \alpha\beta\end{Bmatrix} = 0$ est que: $\begin{Bmatrix}\mu \\ \alpha\beta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mu \\ \beta\alpha\end{Bmatrix}$ .

Si ce symbole est un tenseur et si on est capable de trouver un système de coordonnées où ce symbole est nul, il le sera toujours.

Comme ce n'est pas un tenseur, il peut être nul dans un certain système et différent de 0 dans un autre.

*Signification physique*: on a déduit l'équation de la géodésique de l'espace de Riemann (qu'on a postulé être l'équation du mouvement d'une particule libre) de:

$$\delta \int ds = 0 \quad ,$$

avec:

$$ds = \left[ g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right]^{1/2} ds \quad ,$$

alors:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \quad .$$

Quand le symbole { } est symétrique, on le note $\Gamma$.

Le théorème dit que si { } est symétrique, alors il est possible de définir un système de coordonnées où ce symbole est nul en un point donné.

En ce point là on élimine la gravitation. Ceci caractérise l'espace de Riemann: en chaque point il est possible de définir un système de coordonnées tel que les $\Gamma$ soient nuls en ce point.

Supposons que dans un certain système de coordonnées $\tilde{x}$, les composants d'un vecteur $\tilde{A}^\mu$ ne changent pas par déplacement parallèle à partir d'un point 0. Alors:

$$\delta\tilde{A}^{\mu} \equiv \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} d\tilde{x}^{\alpha}\tilde{A}^{\beta} = 0 \quad ;$$

le produit $d\tilde{x}^{\alpha}\tilde{A}^{\beta}$ est arbitraire autour du point $\tilde{x}$, donc on doit avoir:

$$\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} (\tilde{x}) = 0 \quad .$$

Mais alors $\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\}$ sera symétrique dans tout autre système de co-ordonnées puisque dans $(\tilde{x})$ le terme inhomogène est symétrique, donc:

$$\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\}' = \left\{ {\mu \atop \beta\alpha} \right\}' \quad .$$

Montrons que la condition est suffisante. Choisissons le point O comme origine du système de coordonnées, et cherchons un système de coordonnées particulier $\tilde{x}$ au moyen de:

$$\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}\, \alpha^{\mu}_{\lambda\nu} x^{\lambda} x^{\nu} \; ; \left(\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right)_{x=0} = \delta^{\mu}{}_{\lambda} \quad ;$$

alors la transformation des coefficients $\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\}$ est:

$$\left\{ {\tilde{\mu} \atop \alpha\beta} \right\} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \left\{ {\nu \atop \lambda\eta} \right\} \delta^{\lambda}{}_{\alpha} \delta^{\eta}{}_{\beta} + \frac{1}{2} \left(\alpha^{\mu}_{\lambda\eta} + \alpha^{\mu}_{\eta\lambda}\right) \delta^{\lambda}{}_{\alpha} \delta^{\eta}{}_{\beta} \quad ,$$

donc:

$$\left\{ {\tilde{\mu} \atop \alpha\beta} \right\} = \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} + \frac{1}{2} \left(\alpha^{\mu}_{\delta\beta} + \alpha^{\mu}_{\beta\alpha}\right) \quad ,$$

avec l'hypothèse que: $\begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mu \\ \beta\alpha \end{Bmatrix}$, nous pouvons choisir $\alpha^{\mu}_{\lambda\nu}$ tel que:

$$\frac{1}{2}\left(\alpha^{\mu}_{\lambda\nu} + \alpha^{\mu}_{\nu\lambda}\right) = - \begin{Bmatrix} \mu \\ \lambda\nu \end{Bmatrix} ,$$

donc:

$$\delta\tilde{A}^{\mu} = 0 \quad .$$

On note les coefficients de connection affine symétriques:

$$\begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} = - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \quad ,$$

où $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ est le symbole de Christoffel; il est alors possible de choisir un système de coordonnées où les coefficients de connexion sont nuls en ce point. Ce système est le système géodésique.

Dans l'espace de Riemann, il est toujours possible de choisir un système en chaque point qui soit géodésique c'est à dire pour lequel le symbole de Christoffel soit nul en ce point.

On ne peut pas faire cette annulation de $\Gamma$ pour tout l'espace, on le fait localement.

Physiquement: le champ de gravitation est général mais il n'est pas uniforme; dans une région infinitésimale il l'est, et alors on peut prendre un ascenseur en chute libre: on aura éliminé la gravitation. Si le champ est homogène partout, on aura un champ pseudo euclidien et non plus de Riemann. On peut obtenir l'expression des symboles de Christoffel si on introuduit les propriétés métriques.

e) Jusqu'ici aucune propriété métrique n'a été utilisée. Maintenant nous imposerons la propriété métrique que le produit scalaire de deux vecteurs soit invariant par rapport au déplacement parallèle.

Alors:

$$\delta\left[g_{\mu\nu}(x)A^{\mu}(x)B^{\nu}(x)\right] = 0 \quad ,$$

cela veut dire qu'on prend une courbe paramétrisée par u et on impose:

$$\frac{d}{du}\left[g_{\mu\nu}(x)A^{\mu}(x)B^{\nu}(x)\right] = 0 \quad ,$$

soit:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{dx^{\lambda}}{du}A^{\mu}B^{\nu} + g_{\mu\nu}\frac{dA^{\mu}}{du}B^{\nu} + g_{\mu\nu}A^{\mu}\frac{dB^{\nu}}{du} = 0 \quad ;$$

or, nous savons que:

$$\frac{dA^{\mu}}{du} = \begin{Bmatrix}\mu\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}\frac{dx^{\alpha}}{du}A^{\beta} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{du}A^{\beta} \quad ,$$

donc:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \lambda\mu\end{Bmatrix}g_{\alpha\nu} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \lambda\nu\end{Bmatrix}g_{\mu\alpha} = 0 \quad ,$$

par conséquent:

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\lambda\end{Bmatrix} g_{\alpha\mu} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\mu\end{Bmatrix} g_{\lambda\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} g_{\alpha\lambda} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\lambda\end{Bmatrix} g_{\alpha\nu} = 0 \quad ,$$

additionnons membre à membre:

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + 2\begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\mu\end{Bmatrix} g_{\alpha\lambda} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\lambda\end{Bmatrix} g_{\alpha\mu} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\lambda\end{Bmatrix} g_{\alpha\nu} = 0$$

soustrayons la première:

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + 2\begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\mu\end{Bmatrix} g_{\alpha\lambda} = 0$$

donc:

$$\boxed{\Gamma^\alpha_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\lambda}\right)}$$

La loi de transformation de $\Gamma$ est:

$$\boxed{\Gamma'^{\alpha'}_{\nu'\mu'}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\,\Gamma^\alpha_{\nu\mu}(x)\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} - \frac{\partial^2 x'^{\alpha'}}{\partial x^\eta \partial x^\varepsilon}\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^{\nu'}}\frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^{\mu'}}}$$

seul le premier terme donne le caractère tensoriel.

# 6 DÉRIVÉE COVARIANTE ON DÉRIVÉE ABSOLUE

## 6.1 Dérivée covariante d'un vecteur contravariant

Considérons un 4-vecteur $F^\mu$ au point x + dx, par définition;

$$F^\mu(x+dx) = F^\mu(x) + \frac{\partial F^\mu}{\partial x^\nu}\, dx^\nu \quad ,$$

$F^\mu$ au point x + dx n'a pas un caractère vectoriel, l'expression n'est pas covariante.

Un vecteur obéit à:

$$F'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\, F^\nu(x) \quad ,$$

$$F'^\mu(x'+dx') = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right)_{x+dx} F^\nu(x+dx) \quad ;$$

on introduit le vecteur déplacé par le déplacement parallèle:

$$\bar{F}'^\mu(x+dx) = F^\mu(x) + \delta F^\mu(x)$$

$$= F^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} dx^\alpha F^\beta(x) \quad ,$$

on peut comparer les deux quantités $F^\mu$ et $\bar{F}^\mu$ au même point, on peut en particulier les soustraire:

$$\underbrace{F^\mu(x+dx) - \bar{F}^\mu(x+dx)}_{\substack{\text{vecteur car on peut}\\ \text{faire l'analyse tensorielle}\\ \text{en chaque point}}} = \underbrace{\left(\frac{\partial F^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\beta}F^\beta\right)}_{\text{tenseur}} \underbrace{dx^\nu}_{\text{4-vecteur}}$$

$$\boxed{D_\nu F^\mu \equiv F^\mu{}_{;\nu}(x) \quad \frac{\partial F^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\beta}F^\beta(x)}$$

## 6.2 Dérivée covariante d'un vecteur covariant

Pour définir $D_\nu G_\mu(x)$, on a:

$$\delta\left[F^\alpha(x)G_\alpha(x)\right] = 0 \quad ,$$

alors:

$$(\delta F^\alpha)G_\alpha + F^\alpha(\delta G_\alpha) = 0 \quad ,$$

soit:

$$F^\alpha \delta G_\alpha - \Gamma^\lambda_{\nu\beta}dx^\nu F^\beta G_\lambda = 0 \quad ,$$

ou:

$$F^\lambda(\delta G_\lambda - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}dx^\nu G_\alpha) = 0 \quad .$$

$$\boxed{\delta G_\lambda = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}dx^\nu G_\alpha}$$

c'est le déplacement parallèle pour un vecteur covariant, cela s'écrit encore:

$$\bar{G}_\lambda(x+dx) - G_\lambda(x) = \Gamma^\alpha_{\nu\lambda}dx^\nu G_\alpha \quad ,$$

or:

$$G_\lambda(x+dx) - G_\lambda(x) = \frac{\partial G_\lambda}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad ,$$

donc:

$$G_\lambda(x+dx) - \bar{G}_\lambda(x+dx) \equiv G_{\lambda;\nu}(x) dx = \left( \frac{\partial G_\lambda}{\partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} G_\alpha \right) dx^\nu$$

soit:

$$\boxed{G_{\mu;\nu}(x) = \frac{\partial G_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} G_\alpha}$$

## 6.3 Dérivée covariante des tenseurs

Idée générale: on forme un scalaire avec la quantité dont on cherche la dérivée:

$$\delta(T_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta) = 0 \quad ,$$

soit:

$$(\delta T_{\alpha\beta}) A^\alpha B^\beta + T_{\alpha\beta} (\delta A^\alpha) B^\beta + T_{\alpha\beta} A^\alpha (\delta B^\beta) = 0 \quad ,$$

$$A^\alpha B^\beta \delta T_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} dx^\mu A^\nu B^\beta - T_{\alpha\beta} A^\alpha \Gamma^\beta_{\mu\nu} dx^\mu B^\nu = 0 \quad ,$$

d'où:

$$\left( \delta T_{\alpha\beta} - T_{\eta\beta} \Gamma^\eta_{\mu\alpha} dx^\mu - T_{\alpha\eta} \Gamma^\eta_{\mu\beta} dx^\mu \right) A^\alpha B^\beta = 0 \quad ,$$

donc:

$$\delta T_{\alpha\beta} = T_{\eta\beta} \Gamma^\eta_{\mu\alpha} dx^\mu + T_{\alpha\eta} \Gamma^\eta_{\mu\beta} dx^\mu \quad ,$$

ou:

$$\bar{T}_{\alpha\beta}(x+dx) - T_{\alpha\beta}(x) = T_{\eta\beta}\Gamma^{\eta}_{\mu\alpha}dx^{\mu} + T_{\alpha\eta}\Gamma^{\eta}_{\mu\beta}dx^{\mu} \quad ,$$

mais:

$$T_{\alpha\beta}(x+dx) - T_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\, dx^{\mu} \quad ,$$

donc:

$$T_{\alpha\beta}(x+dx) - \bar{T}_{\alpha\beta}(x+dx) \equiv T_{\alpha\beta;\mu}dx^{\mu}$$

$$= \left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\eta}_{\mu\alpha}T_{\eta\beta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\beta}T_{\alpha\eta}\right) dx^{\mu} \quad ,$$

ou:

$$\boxed{T_{\alpha\beta;\mu} = \partial_{\mu}T_{\alpha\beta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\alpha}T_{\eta\beta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\beta}T_{\alpha\eta} \quad ;}$$

il n'y a pas d'opérateur différentiel universel; l'opérateur différentiel nécessaire pour obtenir la dérivée covariante dépend de l'ordre de la quantité â laquelle il s'applique; ainsi par rapport au tenseur covariant du 2e ordre $T_{\alpha\beta}$, on aura la dérivée ordinaire plus deux termes; il y a autant de termes supplémentaires que d'indice, pour le vecteur $F^{\mu}$ il y a un termes supllémentaire seulement:

D'où:

$$g_{\alpha\beta;\lambda} = g_{\alpha\beta,\lambda} - \Gamma^{a}_{\alpha\lambda}g_{a\beta} - \Gamma^{a}_{\beta\lambda}g_{\alpha a} \quad ,$$

non avons vu que:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} - g_{\beta a}\Gamma^{a}_{\alpha\lambda} - g_{\alpha a}\Gamma^{a}_{\beta\lambda} = 0 \quad ,$$

alors:

$$\boxed{g_{\alpha\beta;\lambda}(x) \equiv 0 \quad ,}$$

or:

$$g_{\alpha\beta}(x+dx) - \bar{g}_{\alpha\beta}(x+dx) = g_{\alpha\beta;\lambda}(x)\,dx^{\lambda} \quad ,$$

donc:

$$g_{\alpha\beta}(x+dx) = \bar{g}_{\alpha\beta}(x+dx)$$

On a aussi:

$$\boxed{T^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = \partial_{\mu}T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T^{\lambda\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}T^{\alpha\lambda}}$$

En général:

$$\boxed{\begin{aligned} T^{\mu\nu\ldots}_{\alpha\beta\ldots;\lambda} = \partial_{\lambda}T^{\mu\nu\ldots}_{\alpha\beta\ldots} + \Gamma^{\mu}_{a\lambda}T^{a\nu\ldots}_{\alpha\beta\ldots} + \Gamma^{\nu}_{a\lambda}T^{\mu a\ldots}_{\alpha\beta\ldots} + \ldots \\ - \Gamma^{m}_{\alpha\lambda}T^{\mu\nu\ldots}_{m\beta\ldots} - \Gamma^{m}_{\beta\lambda}T^{\mu\nu\ldots}_{\alpha m\ldots} - \ldots \end{aligned}}$$

les indices a et m parcourent $\mu\nu\ldots$

On peut écrire:

$$F^{\alpha}{}_{;\lambda}(x) = \partial_{\lambda}F^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}F^{\beta} \equiv \mathcal{D}^{\alpha}_{\lambda\beta}F^{\beta} \quad ,$$

où:

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\lambda\beta} = \partial_{\lambda}\delta^{\alpha}{}_{\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} \quad .$$

$$G_{\alpha;\lambda}(x) = \partial_{\lambda}G_{\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda}G_{\beta} \equiv \mathcal{D}^{\beta}_{\alpha\lambda}G_{\beta} \quad ,$$

où:

$$\mathcal{D}^{\beta}_{\alpha\lambda} = \partial_{\lambda}\delta^{\beta}{}_{\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\lambda} \quad .$$

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\lambda}(x) = \partial_{\lambda}T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}T^{\alpha\mu} \equiv \mathcal{D}^{\alpha\beta}_{mn\lambda}T^{mn} \quad ,$$

où:

$$\mathcal{D}^{\alpha\beta}_{mn\lambda} = \partial_{\lambda}\delta^{\alpha}{}_{m}\delta^{\beta}{}_{n} + \Gamma^{\alpha}_{m\lambda}\delta^{\beta}_{n} + \Gamma^{\beta}_{n\lambda}\delta^{\alpha}_{m} \quad .$$

$$T_{\alpha\beta;\lambda}(x) = \partial_{\lambda}T_{\alpha\beta} - \Gamma^{\eta}_{\lambda\alpha}T_{\eta\beta} - \Gamma^{\eta}_{\lambda\beta}T_{\alpha\eta} \equiv \mathcal{D}^{mn}_{\alpha\beta\lambda}T_{mn}$$

où:

$$\mathcal{D}^{mn}_{\alpha\beta\lambda} = \partial_{\lambda}\delta^{m}{}_{\alpha}\delta^{n}{}_{\beta} - \Gamma^{m}_{\alpha\lambda}\delta^{n}{}_{\beta} - \Gamma^{n}_{\beta\lambda}\delta^{m}{}_{\alpha} \quad .$$

## 6.4 Divergence covariante

On a:

$$\boxed{\mathrm{div}_\alpha F^\alpha \equiv F^\alpha{}_{;\alpha} = \left(\partial_\alpha + \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}\right) F^\alpha}$$

La rotation covariante est:

$$G_{\mu;\nu} - G_{\nu;\mu} = G_{\mu,\nu} - G_{\nu,\mu} ,$$

elle coïncide donc avec la rotation ordinaire.

Le principe d'action minimale conduit à l'hamiltonian $H$; dans $H$ il faut faire la correspondance:

$$p^\mu \to p^\mu - eA^\mu \quad ,$$

quand une particule de charge $e$ est en présence d'un champ électromagnétique.

Einstein a interprété les $\Gamma$ comme la force de gravitation agissant sur la particule. Il faut remplacer partout la dérivée ordinaire par la dérivée covariante, car elle contient l'action du champ de gravitation.

Pour Riemann les $\Gamma$ viennent du fait que l'espace est courbe, d'où champ de gravitation (voir chapitres précédents).

Nons allons déterminer $\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}$.

On a:

$$g^{\alpha\beta}{}_{;\lambda} = \partial_\lambda g^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\eta} g^{\eta\beta} + \Gamma^\beta_{\lambda\eta} g^{\alpha\eta} = 0 \quad ,$$

et:

$$g_{\alpha\beta;\lambda} = \partial_\lambda g_{\alpha\beta} - \Gamma^\eta_{\alpha\lambda} g_{\eta\beta} - \Gamma^\eta_{\beta\lambda} g_{\alpha\eta} = 0 \quad ,$$

de la première on obtient:

$$g_{\alpha\beta}\partial_\lambda g^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\eta} g^{\eta\beta} g_{\alpha\beta} + \Gamma^\beta_{\lambda\eta} g^{\alpha\eta} g_{\alpha\beta} = 0 \ ,$$

ou:

$$g_{\alpha\beta}\partial_\lambda g^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} + \Gamma^\beta_{\lambda\beta} = 0 \quad ,$$

soit:

$$\boxed{\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\partial_\lambda g^{\alpha\beta}}$$

Or:

$$g^{\mu\nu}(x) g_{\nu\alpha}(x) = \delta^\mu{}_\alpha \quad ,$$

d'oũ:

$$g^{\mu\nu}(dg_{\nu\alpha}) + (dg^{\mu\nu})_{g\nu\alpha} = 0 \quad ,$$

or:

$$g = \sum g_{\alpha\beta}\Delta^{\alpha\beta} \quad ,$$

d'où:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} = \Delta^{\alpha\beta} = g g^{\alpha\beta} \quad ,$$

et:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} \, dg_{\alpha\beta} = g g^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} = - \, g g_{\alpha\beta} dg^{\alpha\beta} \quad ,$$

d'où:

$$\frac{\partial g}{\partial x^\lambda} = - \, g g \alpha\beta \, \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \quad ,$$

et:

$$\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} = - \frac{1}{2} \, g_{\alpha\beta} \left( - \frac{1}{g g_{\alpha\beta}} \, \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \right)$$

$$= \frac{1}{2g} \, \frac{\partial g}{\partial x^\lambda} \quad ,$$

soit:

$$\boxed{\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \mathrm{Log} \sqrt{-g} \right)} \quad ,$$

et alors:

$$F^\alpha{}_{;\alpha} = \left( \partial_\alpha + \Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\lambda \right) F^\alpha$$

$$= \left( \partial_\alpha + \partial_\alpha \mathrm{Log} \sqrt{-g} \right) F^\alpha$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \, \partial_\alpha \left[ F^\alpha(x) \sqrt{-g} \, \right] \quad ,$$

$$\boxed{F^{\alpha}{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_{\alpha}\left(F^{\alpha}\sqrt{-g}\right)}$$

Le d'Alembertien dans l'espace de Riemann est:

$$\boxed{\Box\,\psi = \left(g^{\alpha\lambda}\partial_{\lambda}\psi\right)_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}\;g^{\alpha\lambda}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^{\lambda}}\right)}$$

## 6.5 Équations de Maxwell en présence d'un champ gravitationnel

Nous avous tous les éléments nécéssaires pour avoir ces équations.

Considérons:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \quad ,$$

on a:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\lambda} = \partial_{\lambda}T^{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}T^{\alpha\mu} \quad ,$$

d'où:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \partial_{\lambda}T^{\alpha\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T^{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}T^{\alpha\mu} \quad ,$$

$$= \partial_{\lambda}T^{\alpha\lambda} + \left(\partial_{\mu}\operatorname{Log}\sqrt{-g}\right)T^{\alpha\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T^{\mu\lambda} \quad ,$$

$$\boxed{T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\;T^{\alpha\mu}\right) + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T^{\mu\lambda}}$$

Supposons le tenseur antisymétrique (cas du tenseur éléctro magnétique); dans ce cas le dernier terme est nul (car $\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}$ est symétrique).

Si:

$$F^{\alpha\lambda} = - F^{\lambda\alpha} \quad ,$$

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_{\lambda}\left(\sqrt{-g}\; F^{\alpha\lambda}\right) \quad .$$

Dans un système géodésique autour d'un point x, les équations de Maxwell sont:

$$\partial_{\lambda}F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{\lambda\mu} + \partial_{\mu}F_{\nu\lambda} = 0 \quad ,$$

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = j^{\mu} \quad ,$$

$j^{\mu}$ est le courant, et: $F^{\mu\nu} = \partial^{\nu}A^{\mu} - \partial^{\mu}A^{\nu}$.

Pour un système général, on doit remplacer les dérivées ordinaires par les dérivées covariantes:

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = j^{\mu} \quad ,$$

avec:

$$F^{\mu\nu} = A^{\mu;\nu} - A^{\nu;\mu} \quad ,$$

ce qui donne:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \;;\; F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\lambda}\right) = j^\mu \quad .$$

Il faut prouver que:

$j^\mu{}_{;\mu} \equiv 0$: loi de conservation du courant.

On a:

$$j^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu\left(j^\mu\sqrt{-g}\right) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}\,F^{\lambda\mu}\right) \equiv 0$$

car $F^{\mu\lambda} = - F^{\lambda\mu}$.

Il y a des problèmes qui se posent en théorie de la relativité générale car la notion d'énergie y est très délicate.

De $j^\mu{}_{;\mu} \equiv 0$ on trouve que la charge est conservée (application du théorème de Gauss):

$$\int d^4x\,\partial_\nu j^\nu = \int_{\sigma_1} j^\nu d\sigma_\nu - \int_{\sigma_2} j^\nu d\sigma_\nu = 0$$

car $\partial_\nu j^\nu = 0$ ,

d'où:
$$\int_{\sigma_1} j^\nu d\sigma_\nu = \int_{\sigma_2} j^\nu d\sigma_\nu \;,$$

ce qui est la même chose que:

$$\int j^0 d^3x = C^{\underline{te}} \quad ,$$

on définit la charge totale qui est constante.

Si on est en présence d'un tenseur $T^{\alpha\beta}$ pour lequel $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \equiv 0$, alors on aura un terme supplémentaire: $\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}T^{\mu\lambda}$.

Revenons à la loi de conservation de la charge:

$$\int_V \sqrt{-g}\; j^{\mu}{}_{;\mu} d^3x = \int_V \frac{\partial}{\partial x^0}\left(\sqrt{-g}\; j^0\right) d^3x = \frac{d}{dx^0}\int_V \sqrt{-g}\; j^0 d^3x = 0$$

ou:

$$\boxed{\frac{d}{dx^0}\int_V \sqrt{-g}\; j^0(x) d^3x = 0} \quad ;$$

V étant une region finie, contenant les charges.

La force gravitationnelle va influencer la densité de charge, dans l'approximation du champ faible on peut calculer facilement cette expression.

# 7 LES ÉQUATIONS D'EINSTEIN DU CHAMP GRAVITATIONNEL

## 7.1 Le tenseur de Riemann

Un espace est plan s'il est possible d'effectuer une transformation des coordonnées de telle façon que le tenseur métrique soit identique au tenseur métrique de Lorentz:

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1 \; ; \; g_{\alpha\beta} = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta$$

partout dans cet espace. Dans cet espace, on peut faire un déplacement parallèle d'un vecteur et obtenir un vecteur constant en tous points. L'opérateur de dérivation ordinaire est alors un vecteur, et deux de ces opérateurs commutent. Dans un espace à courbure non nulle, ces propriétés ne sont pas valables.

Considérons la dérivée covariante d'un vecteur dans un espace courbe, qui est un tenseur $T^{\mu}_{\alpha}$:

$$T^{\mu}_{\alpha}(x) \equiv F^{\mu}{}_{;\alpha}(x) = F^{\mu}{}_{,\alpha}(x) + \Gamma^{\mu}_{\alpha m}(x) F^{m}(x) \quad .$$

Si nous calculons la dérivée covariante de ce tenseur, nous avons:

$$\begin{aligned} F^{\mu}{}_{;\alpha;\lambda} = T^{\mu}_{\alpha;\lambda} &= T^{\mu}_{\alpha,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{a\lambda} T^{a}_{\alpha} - \Gamma^{m}_{\alpha\lambda} T^{\mu}_{m} \\ &= F^{\mu}{}_{,\alpha,\lambda} + \left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\eta}\right)_{,\lambda} F^{\eta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\eta} F^{\eta}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} F^{a}{}_{,\alpha} \\ &\quad - \Gamma^{m}_{\alpha\lambda} F^{\mu}{}_{,m} + \Gamma^{\mu}_{a\lambda} \Gamma^{a}_{\alpha\eta} F^{\eta} - \Gamma^{m}_{\alpha\lambda} \Gamma^{\mu}_{m\eta} F^{\eta} \end{aligned}$$

Echangeons maintenant les indices $\alpha$ et $\lambda$ et faisons la différence des deux expressions obtenues plus haut:

$$F^{\mu}_{;\alpha;\lambda} - F^{\mu}_{;\lambda;\alpha} = \left[\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\eta}\right)_{,\lambda} - \left(\Gamma^{\mu}_{\lambda\eta}\right)_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{a\lambda}\Gamma^{a}_{\alpha\eta} - \Gamma^{\mu}_{a\alpha}\Gamma^{a}_{\lambda\eta}\right]F^{\eta}$$

Dans les conditions des opérateurs introduits antérieurement, nous avons:

$$\left(\mathcal{D}^{\mu m}_{a\alpha\lambda} - \mathcal{D}^{\mu m}_{a\lambda\alpha}\right)\mathcal{D}^{a}_{\eta m} = R^{\mu}_{\eta\alpha\lambda}$$

où:

$$\boxed{R^{\mu}_{\eta\alpha\lambda} = (\Gamma^{\mu}_{\alpha\eta})_{,\lambda} - (\Gamma^{\mu}_{\lambda\eta})_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{a\lambda}\Gamma^{a}_{\alpha\eta} - \Gamma^{\mu}_{a\alpha}\Gamma^{a}_{\lambda\eta}}$$

est le *tenseur de courbure de Riemann.*

L'expression $F^{\mu}_{;\alpha;\lambda} - F^{\mu}_{;\lambda;\alpha} = R^{\mu}_{\eta\alpha\lambda}F^{\eta}$ montre que l'espace de Riemann est courbe. La dérivée seconde ne commute pas et c'est une propriété de l'espace courbe. Un espace plan est tel que par définition:

$$R^{\mu}_{\eta\alpha\lambda}(x) = 0$$

en tout point. Evidemment un espace muni d'une métrique de Lorentz n'a pas de symbole $\Gamma$ et est par conséquent plan.

Donnons la liste des propriétés du tenseur de Riemann:

$$R^{\mu}_{\eta\alpha\lambda} = - R^{\mu}_{\eta\lambda\alpha}$$

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = g_{\mu\eta} R^{\eta}{}_{\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\mu\beta\gamma} = -R_{\mu\alpha\gamma\beta} = R_{\beta\gamma\mu\alpha}$$

$$\boxed{R_{1023} + R_{2031} + R_{3012} = 0}$$

Des $4^4 = 256$ composantes de $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$, seules 20 sont indépendantes en vue de ses propriétés de symétrie (comme R est antisymétrique en $\beta$ et $\gamma$, ces indices, $\mu$ et $\alpha$ étant fixés, donnent 6 composantes au lieu de 16; de même pour les indices $\mu$, $\alpha$ pour $\beta$, $\gamma$ fixés; on aurait donc 36 composantes; la symétrie en ce qui concerne l'échange de $\mu$ $\alpha$ et $\beta$ $\gamma$ réduit celà à 21 - car cela revient à une matrice 6 x 6 symétrique; en plus nous avons la dernière relation encadrée, d'où finalement 20 composantes indépendantes).

## 7.2 Les identités de Bianchi et le tenseur de Ricci-Einstein

Dans un système de coordonnées géodésiques, la dérivée covariante de $R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}$ se réduit à:

$$R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma;\nu} = \left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right)_{,\gamma,\nu} - \left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\right)_{,\beta,\nu} \quad .$$

Par conséquent, dans ce système:

$$\boxed{R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma;\nu} + R^{\mu}_{\alpha\nu\beta;\gamma} + R^{\mu}_{\alpha\gamma\nu;\beta} = 0} \quad .$$

Ce sont les *identités de Bianchi*: puisque le membre de gauche est un tenseur, les composantes disparaissent dans un système géodésique, les relations demeurent valables dans tout système de coordonnées.

On peut former par contraction du tenseur de Riemann un tenseur du deuxième ordre:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$$

C'est le seul tenseur qui puisse être construit à partir du tenseur de Riemann puisque:

$$R^{\alpha}_{\alpha\mu\nu} = g^{\beta\lambda}R_{\beta\lambda\mu\nu} = g^{\lambda\beta}R_{\lambda\beta\mu\nu} = - g^{\beta\lambda}R_{\beta\lambda\mu\nu} = 0$$

et:

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} = - R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = - R_{\mu\nu} \quad .$$

La forme explicite de $R_{\mu\nu}$ est:

$$R_{\mu\nu} = (\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu})_{,\nu} - (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{a\nu}\Gamma^{a}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{a\alpha}\Gamma^{a}_{\mu\nu}$$

et on voit qu'il est symétrique:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad .$$

La *courbure scalaire* est définie comme la contraction de $R^{\mu}_{\nu}$:

$$\boxed{R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}$$

Le tenseur de Ricci-Einstein, $G^{\mu}_{\alpha}$, est le tenseur dont la divergence covariante est nulle:

$$G^{\mu}_{\alpha;\mu} = 0 \quad .$$

Des identités de Bianchi nous obtenons:

$$R^{\mu\alpha}_{\beta\gamma;\nu} + R^{\mu\alpha}_{\nu\beta;\gamma} + R^{\mu\alpha}_{\gamma\nu;\beta} = 0$$

et la contraction des indices $\mu$ et $\beta$ donne:

$$R^{\mu\alpha}_{\mu\gamma;\nu} + R^{\mu\alpha}_{\nu\mu;\gamma} + R^{\mu\alpha}_{\gamma\nu;\mu} = 0 \quad .$$

Maintenant, par la définition $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$ et les propriétés de symétrie $R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} = - R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = - R_{\mu\nu}$, on a par contraction de $\alpha$ et $\gamma$:

$$R_{;\nu} - R^{\alpha}_{\nu;\alpha} - R^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \quad ,$$

c'est:

$$R_{;\nu} = 2R^{\alpha}_{\nu;\alpha}$$

Le tenseur d'Einstein-Ricci, qui satisfait l'équation $G^{\mu}_{\alpha;\mu} = 0$ est par conséquent:

$$G^{\alpha}_{\beta} = R^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}\,\delta^{\alpha}_{\beta}R$$

ou:

$$\boxed{G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}R}$$

## 7.3 Les équations d'Einstein du champ gravitationnel

On voit, par les définitions:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}R \quad ,$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad ,$$

$$R_{\mu\nu} = (\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu})_{,\nu} - (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{a\nu}\Gamma^{a}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{a\alpha}\Gamma^{a}_{\mu\nu} \quad ,$$

et l'expression:

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}\,g^{\nu\lambda}(x)\left(\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right) ,$$

que $G_{\alpha\beta}$ contient, à coté de combinaisons non linéaires de $g_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu,\lambda}$ des dérivés secondes du tenseur métrique (ou du champ potentiel gravitationnel) $g_{\mu\nu}(x)$ (linéairement). Si le tenseur énergie-impulsion de la matière, $T_{\mu\nu}$, doit obéir à l'équation covariante qui généralise l'équation $\frac{\partial N^{\lambda}{}_{[\beta]}}{\partial x^{\lambda}} = 0$ ($N^{\lambda}{}_{[\beta]}$ étant le tenseur de Noether) dans un espace riemannien:

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \quad ,$$

alors, vu la relation $G^{\mu}_{\alpha;\mu} = 0$, il est plausible de postuler que les équations du champ gravitationnel sont de la forme:

$$\boxed{G^{\alpha}_{\beta} = - KT^{\alpha}_{\beta}}$$

où K est une constante de couplage. C'était le postulat proposé par Einstein en 1915 après plusieurs années de tentatives de découvrir les équations relativistes qui peuvent être regardées comme une généralisation de l'équation de Poisson:

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = 4\pi G \rho_m(\vec{x}) \quad .$$

Dans le cas particulier d'un champ gravitationnel faible et indépendant du temps (c'est à dire différant de très peu du tenseur métrique de Lorentz) l'identification avec l'équation de Poisson est réalisée si on pose:

$$K = \frac{8\pi G}{C^2} \quad .$$

Or:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \quad ,$$

d'où:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = - KT_{\mu\nu}}$$

$R_{\mu\nu}$ contient des dérivées du tenseur métrique d'ordre 2 au maximum.

Si on admet l'équivalence matière-énergie, la matière crée un champ de gravitation qui doit créer de l'énergie pour s'entretenir, on arrive essentiallement à ces équations.

$R_{\mu\nu}$ est un tenseur qui est associé à une propriété de l'espace.

Historiquement, Einstein a d'abord donné comme équations:

$$R_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu} \quad ,$$

car $R_{\mu\nu}$ est le seul tenseur qui contient des dérivées d'ordre 2(au maximum) et d'ordre 1 du tenseur métrique et ce tenseur lui-même.

Si l'équation précédente est valable dans tout l'espace, si on fixe un événement x et si on choisit un système de Lorentz, $T_{\mu\nu}$ est conservé autour de cet événement:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

(c'est l'extension de $\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0$ en relativité restreinte).

Il faut dans que les équations du champ gravitationnel soient telles que:

$$T^{\nu\mu}_{;\nu} = 0 \quad ;$$

or $R^{\mu\nu}_{;\nu} \neq 0$ et l'équation

$$R_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu}$$

n'est pas la bonne.

Le tenseur $T_{\mu\nu}$ d'énergie-impulsion contient toutes les contributions de toute la matière et de tous les champs sauf le champ gravitationnel. Les équations de ces champs tiennent cependant compte du champ gravitationnel dans les opérateurs différentiels.

Il faut montrer que dans l'approximation du champ faible on retrouve l'équation de Poisson.

Considérons l'équation d'Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}R = -\, KT_{\mu\nu}$$

et multiplions là par $g^{\mu\nu}$ et sommons:

$$R - 2R = -\, KT \quad ,$$

soit:

$$R = KT \quad ,$$

où T est la trace de $T_{\mu\nu}$:

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \quad ;$$

d'où:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}KT = - KT_{\mu\nu}$$

soit:

$$\boxed{R_{\mu\nu} = - K(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}T)}$$

c'est une forme équivalente de:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = - KT_{\mu\nu} .$$

C'est l'équation en présence de la source du champ de gravitation, $T_{\mu\nu}$.

Si $T_{\mu\nu} = 0$, on a un *espace sans source* et l'équation sera:

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0}$$

Dans le cas où la source est un champ électromagnétique de radiation (en absence de charges) le tenseur énergie-impulsion est:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu m}F^{m}{}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu}F_{mn}F^{mn} \quad ,$$

il est déterminé par les équations:

$$\left(\sqrt{-g}\ F^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0$$

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\nu\lambda,\mu} = 0 \quad ; \quad F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad ;$$

la trace de ce tenseur est nulle:

$$T \equiv T^{\mu}{}_{\mu} = 0 \quad .$$

Donc, les équations de la gravitation pour le champ électromagnétique sont:

$$\boxed{R_{\mu\nu} = - KT_{\mu\nu}}$$

ces équations ne sont valables que pour le champ électromagnétique.

Supposons:

$$T_{\mu\nu} = \rho\mu_{\mu}\mu_{\nu} \quad ,$$

où ρ est la densité de matière et u la 4-vitesse.

On veut:

$$u^{\mu} = \delta^{\mu}{}_{o} \quad ,$$

$$T_{oo} = \rho \quad , \quad Tok = 0 \quad , \quad Tjk = 0 \quad .$$

On a un fluide de matière avec une densité ρ au repos, d'où:

$$T = \rho \quad .$$

Considérons l'approximation du bhamp faible:

$$g^{\mu\nu}(x) = \overset{0}{g}{}^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}(x) \quad ,$$

on a:

$$\boxed{R_{oo} = -K\left(\rho - \frac{1}{2}\,\overset{0}{g}_{oo}\rho\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\,K\rho \quad ,$$

$$R_{ok} = 0 \quad ,$$

$$R_{jk} = \frac{1}{2}\,K\;\overset{0}{g}_{jk}\rho \quad ,$$

mais:

$$g_{oo}(x) = 1 + \frac{2\phi(\vec{x})}{c^2} \quad ,$$

et:

$$R_{oo} = -\frac{\nabla^2\phi(x)}{c^2} + \ldots$$

d'où:

$$-\frac{\nabla^2\phi}{c^2} = -\frac{1}{2}\,K\rho$$

ou:

$$\nabla^2\phi = \frac{c^2}{2}\,K\rho \quad ,$$

en comparant avec: $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ , on voit que:

$$\boxed{K = \frac{8\pi}{c^2} G}$$

Avec l'approximation du champ faible on retrouve donc l'équation de Poisson.

## 8 LA SOLUTION DE SCHWARZSCHILD

Les équations d'Einstein du champ de gravitation sont:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = - KT_{\mu\nu}} \quad ;$$

il y a d'autres équations possibles qui sont intéressantes pour la cosmologie:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = - KT_{\mu\nu}}$$

où $\Lambda$ est la constante cosmologique (elle est proportionnelle à l'inverse du carré du rayon de l'univers).

La première équation a été établie par Einstein qui voulait que la divergence covariante du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ soit nulle:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad ;$$

et alors:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}R)_{;\nu} = 0 \quad .$$

Si on additionne alors le terme $\Lambda g_{\mu\nu}$ l'égalité sera encore vraie, car:

$$g^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0 \quad ,$$

ceci peut d'aillueurs être pris comme définition de la dérivée covariante.

$R_{\mu\nu}$ possède des dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$ par rapport à $x$, $\Lambda$ devient donc l'inverse du carré d'une longueur cette longueur étant en relation avec le rayon de l'univers.

On a montré que dans l'hypothèse du champ faible:

$$K = \frac{8\pi}{c^2} G \quad .$$

## 8.1 Forme du $ds^2$ dans le cas de symétrie sphérique

Considérons la solution de Schwarzschild qui est la suivante: il y a une source (par exemple le soleil) qui produit un champ de gravitation; on veut les solutions en dehors de la source où $T_{\mu\nu} = 0$ ($R = 0$ dans ce cas) en un point de l'espace temps, d'où:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad ;$$

il faut résoudre:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

ou:

$$(\Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu})_{,\mu} - (\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\eta\alpha}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu} = 0 \quad .$$

*La solution de Schwarzschild est indépendante du temps,* à *symétrie sphérique* et *telle que:*

$$g_{\mu\nu}(x) \xrightarrow[r\to\infty]{} \overset{a}{g}_{\mu\nu}(\text{Lorentz}) \quad ,$$

c'est à dire *qu'à l'infini l'espace-temps est plan;* il s'agit de chercher les $g_{\mu\nu}(x)$, (on s'éloigne à l'infini à partir de la source).

On a:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad ,$$

en coordonnées sphériques:

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - (Bdr^2 + Cr^2d\theta^2 + Dr^2\sin^2\theta d\phi^2)$$

$$+ adrd\theta + bd\theta d\phi + cdrd\phi + g_{ok}dx^0dx^k$$

car:
$$x_1 = r\cos\phi\sin\theta$$

$$x_2 = r\sin\phi\sin\theta$$

$$x_3 = r\cos\theta$$

A,B,C,D, a,b,c, et $g_{ok}$ étant des coeffiecients à trouver.

Appelons $ds^{2\infty}$ le $ds^2$ à l'infini:

$$ds^{2\infty} = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2) \quad .$$

Si $ds^2$ est indépendant de t, $ds^2$ ne change pas si:

$$dx^0 \to - dx^0 \quad ,$$

c'est à dire si on fait une inversion du temps; d'où:

$$g_{0k} = 0 \quad ,$$

sinon le $ds^2$ change.

Introduisons maintenant la symétrie sphérique (que nous admettons): $ds^2$ est invariant dans la transformation:

$$d\phi \to - d\phi$$

et (ou):

$$d\theta \to - d\theta \quad ;$$

d'où:

$$a dr d\theta = 0$$

$$b d\theta d\phi = 0$$

$$c dr d\theta = 0 \quad ,$$

et:

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - (Bdr^2 + Cr^2d\theta^2 + Dr^2\sin^2\theta d\phi^2) \quad ,$$

A,B,C,D sont fonctions de r seulement.

Maintenant, considérons un déplacement de $\varepsilon = rd\theta$ au pôle nord ($\theta = 0$) ce qui correspond à $ds^2 = -C\varepsilon^2$, et un déplacement de $\varepsilon = rd\phi$ à l'équateur ($\theta = \frac{\pi}{2}$) ce qui correspond à $ds^2 = -D\varepsilon^2$; on veut que $ds^2$ soit invariant (symétrie sphérique) d'où:

$$C = D$$

Et:

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - Bdr^2 - C(r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2)$$

Montrons maintenant qu'on peut choisir un système de coordonnées où $C(r) = 1$.

Introduisons une distance définie par:

$$\bar{r} = \sqrt{C(r)}\, r \quad ,$$

d'où:

$$Cr^2 = \bar{r}^2$$

et: $$2C(r)rdr + r^2C'(r)dr = 2\bar{r}d\bar{r} \quad ,$$

ou: $$2C(r)rdr\left[1 + \frac{r}{2C(r)}C'(r)\right] = 2\bar{r}d\bar{r} \quad ,$$

$$C^2(r)r^2(dr)^2\left[1 + \frac{r}{2C(r)}C'(r)\right]^2 = \bar{r}^2(d\bar{r})^2 \quad ,$$

divisons par: $Cr^2 = \bar{r}^2$:

$$C(r)(dr)^2 \left[1 + \frac{r}{2C(r)} C'(r)\right]^2 = (d\bar{r})^2 \quad ,$$

d'où:

$$B(dr)^2 = \frac{B}{C}\left[1 + \frac{r}{2C} C'\right]^{-2} (d\bar{r})^2 \equiv \bar{B}(d\bar{r})^2$$

et:

$$ds^2 = Ac^2dt^2 - \bar{B}(d\bar{r})^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad ,$$

c'est comme si $C(r) = 1$.

$$\boxed{ds^2 = Ac^2dt^2 - Bdr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)} \quad ,$$

il s'agit de trouver A et B et alors on a la solution de Schwarzschild.

## 8.2 Solution de Schwarzschild

En général:

$$A(r) = e^{\nu(r)} \quad .$$

$$B(r) = e^{\lambda(r)} \quad ,$$

or:

$$ds^2 \xrightarrow[r\to\infty]{} ds^2_\infty \quad ,$$

d'où:

$$A(r) \quad \text{et} \quad B(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 1 \quad ,$$

soit: $$\lambda(r) \quad \text{et} \quad \nu(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad .$$

Alors:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

On réduira $e^{\nu(r)}$ et $e^{\lambda(r)}$ en résolvant, dans le cas particulier considéré, les équations de la gravitation relatives au cas extérieur:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

ou:

$$\left(\Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu}\right)_{,\mu} - \left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\eta\alpha}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu} = 0 \quad .$$

On a à calculer 40 symboles de Christoffel; nous allons utiliser un artifice:
prenons l'équation d'une géodésique:

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\eta}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\eta} = 0 \quad , \quad \text{avec:} \quad \dot{x}^{\eta} = \frac{dx^{\eta}}{ds}$$

ces équations contiennent tous les symboles de Christoffel. Si nous connaissons ces équations, nous pouvons faire une identification de ces symboles. Le principe variationnel pour la géodésique est:

$$\delta\int\left[e^{\nu(r)}(\dot{x}^0)^2 - (e^{\lambda(r)}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\right]ds = 0$$

ou:

$$\delta\int\mathcal{L}ds = 0 \quad .$$

Les équations de Lagrange sont:

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \quad .$$

Pour $x^\alpha \equiv x^0$, on obtient:

$$\frac{d}{ds}(2e^\nu\ddot{x}) = 0 \quad ,$$

soit:

$$\ddot{x}^0 + \nu'\dot{r}\dot{x}^0 = 0 \quad .$$

(où ' est la dérivée par rapport à r et . par rapport à s)

Comparons alors avec:

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{\beta\eta}\dot{x}^\beta\dot{x}^\eta = 0 \quad ,$$

où:

$$x^1 \equiv r \quad , \quad x^2 \equiv \theta \quad , \quad x^3 \equiv \phi \quad ,$$

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{00}(\dot{x}^0)^2 + \Gamma^0_{01}\dot{x}^0\dot{x}^1 + \Gamma^0_{10}\dot{x}^1\dot{x}^0 +$$

$$2\Gamma^0_{20}\dot{x}^2\dot{x}^0 + 2\Gamma^0_{30}\dot{x}^3\dot{x}^0 + 2\Gamma^0_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0 \quad ,$$

en faisant la comparaison :

$$\boxed{\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\,\nu'}$$

les autres $\Gamma$ sont nuls car $\lambda$ et $\nu$ ne dépendent pas de $\theta$ et $\phi$.

Pour $x^\alpha \equiv x^1$, on obtient à partir du principe variationnel:

$$\ddot{r} + \frac{1}{2}\,\lambda'\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,\nu' e^{\nu-\lambda}(\dot{x}^0)^2 - e^{-\lambda} r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 e^{-\lambda} = 0 \quad ,$$

on compare avec l'équation:

$$\ddot{x}^1 + \Gamma^1_{\beta\eta}\dot{x}^\beta\dot{x}^\eta = 0 \quad ,$$

on obtient:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\,\nu' e^{\nu-\lambda} & , & \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\,\lambda' \\ \Gamma^1_{22} = -e^{-\lambda} r & , & \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda} \end{array}}$$

Pour $x^\alpha \equiv x^2 = \theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\,\dot{\theta}\dot{r} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0 \quad ,$$

$$\ddot{x}^2 + \Gamma^2_{\beta\eta}\dot{x}^\beta\dot{x}^\eta = 0$$

d'où:

$$\boxed{\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta}$$

Pour $x^\alpha \equiv x^3 = \phi$:

$$\ddot{\phi} + 2\,\mathrm{cotg}\,\theta.\dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} = 0 \quad ,$$

$$\ddot{x}^3 + \Gamma^3_{\beta\eta}\dot{x}^\beta\dot{x}^\eta = 0$$

d'où:

$$\boxed{\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \mathrm{cotg}\,\theta \quad , \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}}$$

On sait que:

$$\Gamma^\alpha_{m\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^m}\,\mathrm{Log}\sqrt{-g} \quad ,$$

l'équation:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

s'écrit alors:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\,\mathrm{Log}\sqrt{-g} - (\Gamma^\alpha_{\mu\nu})_{,\alpha} + \Gamma^\beta_{\eta\mu}\Gamma^\eta_{\beta\nu} - \Gamma^\eta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\eta}\,\mathrm{Log}\sqrt{-g} = 0}$$

De:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$= g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad ,$$

on peut écrire:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

avec:

$$g = ||g|| = -r^4 \sin^2\theta e^{\nu(r)+\lambda(r)}$$

$$\boxed{\mathrm{Log}\sqrt{-g} = \frac{\nu+\lambda}{2} + 2\,\mathrm{Log}\, r + \mathrm{Log}|\sin\theta|}$$

Considérons l'équation:

$$R_{oo} = 0 \quad ,$$

soit:

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\mathrm{Log}\sqrt{-g} - (\Gamma^{\alpha}_{oo})_{,\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\eta o}\Gamma^{\eta}_{\beta o} - \Gamma^{\eta}_{oo}\frac{\partial}{\partial x^{\eta}}\mathrm{Log}\sqrt{-g} = 0$$

comme seuls $\Gamma^1_{oo}$ et $\Gamma^0_{10}$ sont à considérer et que g est indépendant de $x^0$:

$$R_{oo} = -(\Gamma^1_{oo})_{,1} + 2\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{oo} - \Gamma^1_{oo}\frac{\partial}{\partial x^1}\mathrm{Log}\sqrt{-g}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\nu' e^{\nu-\lambda}\right)' + \frac{1}{2}\nu'^2 e^{\nu-\lambda} - \frac{1}{2}\left(\nu' e^{\nu-\lambda}\right)\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) = 0$$

ou:

$$-\frac{1}{2}\nu'' e^{\nu-\lambda} - \frac{1}{2}\nu'^2 e^{\nu-\lambda} + \frac{1}{2}\nu'\lambda' e^{\nu-\lambda} + \frac{1}{2}\nu'^2 e^{\nu-\lambda} - \frac{1}{4}\nu'^2 e^{\nu-\lambda}$$

$$-\frac{1}{4}\nu'\lambda' e^{\nu-\lambda} - \frac{\nu' e^{\nu-\lambda}}{r} = 0$$

ou:

$$\boxed{\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r} = 0}$$

De même: $R_{11} = 0$ ,

donne:

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2}\operatorname{Log}\sqrt{-g} - (\Gamma^{\alpha}_{11})_{,\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\tau 1}\Gamma^{\tau}_{\beta 1} - \Gamma^{\tau}_{11}(\operatorname{Log}\sqrt{-g})_{,\tau} = 0$$

ou:

$$(\operatorname{Log}\sqrt{-g})_{,1,1} - (\Gamma^{1}_{11})_{,1} + \Gamma^{0}_{10}\Gamma^{0}_{10} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma_{11} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{2}_{21}$$

$$+ \Gamma^{3}_{31}\Gamma^{3}_{31} - \Gamma^{1}_{11}(\operatorname{Log}\sqrt{-g})_{,1} = 0$$

soit:

$$\frac{\nu''+\lambda''}{2} - \frac{2}{r^2} - \frac{1}{2}\lambda'' + \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{4}\lambda'^2 + \frac{2}{r^2} - \frac{1}{2}\lambda'\left(\frac{\lambda'+\nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) = 0$$

ce qui se rẽduit ã:

$$\boxed{\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} = 0}$$

On a donc deux équations du deuxième ordre pour $\nu(r)$ et $\lambda(r)$; en les soustrayant, on obtient:

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad ,$$

d'où:

$$\boxed{\lambda + \nu = C^{\underline{te}}}$$

La condition asymptotique $g_{\mu\nu}(x) \xrightarrow[r\to\infty]{} \overset{0}{g}_{\mu\nu}$ donne $\lambda(r)$ et $\nu(r) \to 0$; d'où:

$$\lambda + \nu = 0$$

soit: $$\boxed{\lambda = -\nu}$$

Substituons cela dans:

$$\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \quad ,$$

d'où: $$-\lambda'' + \lambda'^2 - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \quad ,$$

ou: $$\lambda'' - \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r} = 0 \quad ,$$

ou: $$(re^{-\lambda})'' = 0$$

soit:

$$(re^{-\lambda})' = C^{\underline{te}} \quad .$$

Pour calculer cette constante, considérons:

$$R_{22} = (\mathrm{Log}\sqrt{-g})_{,2,2} - (\Gamma^{\alpha}_{22})_{,\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\tau 2}\Gamma^{\tau}_{\beta 2} - \Gamma^{\tau}_{22}(\mathrm{Log}\sqrt{-g})_{,\tau} = 0$$

ou:

$$(\mathrm{Log}\sqrt{-g})_{,2,2} - (\Gamma^{1}_{22})_{,1} + \Gamma^{1}_{22}\Gamma^{2}_{21} + \Gamma^{2}_{21}\Gamma^{1}_{22} + \Gamma^{3}_{23}\Gamma^{3}_{23}$$

$$- \Gamma^{1}_{22}(\mathrm{Log}\sqrt{-g})_{,1} = 0 \quad ,$$

soit:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big(\mathrm{Log}(\sin\theta)\Big) + (e^{-\lambda}r)' + 2\Big(-e^{-\lambda}\Big) + \mathrm{cotg}^2\theta +$$

$$+ e^{-\lambda}r\left(\frac{\lambda'+\nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) = 0 \quad .$$

Comme $\nu' + \lambda' = 0$, on a:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big(\mathrm{Log}(\sin\theta)\Big) + \mathrm{cotg}^2\theta = -\Big(re^{-\lambda}\Big)' \quad ,$$

mais:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big(\mathrm{Log}(\sin\theta)\Big) + \mathrm{cotg}^2\theta = -\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = -1 \quad .$$

soit:

$$(e^{-\lambda}r)' = 1 \quad ,$$

en intégrant:

$$re^{-\lambda} = r - 2\ell \quad ,$$

où $-2\ell$ est la constante d'intégration.

Par conséquent:

$$\boxed{e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2\ell}{r}}$$

$R_{33} = 0$ est compatible avec ceci. Les composantes $R_{\mu\nu}$ non diagonales sont identiquement nulles.

Finalement la *solution de Schwarzschild* est:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\ell}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Elle satisfait la condition asymptotique.

Il y a une singularité pour $r = 2\ell$: le terme en $dr^2$ devient infini.

Ce n'est pas une singularité de la métrique, mais du système de coordonnées; en changeant de système de coordonnées on peut l'éliminer.

*Détermination de $\ell$*

Considérons l'approximation de Newton pour un champ faible:

$$g_{oo}(\vec{x}) \cong 1 + \frac{2\phi(\vec{x})}{c^2} \quad ,$$

$\phi(\vec{x})$ étant le potentiel;

$$\phi = -G\frac{M}{r} \quad ,$$

où M est la masse de la source qui crée le champ et G la constante de la gravitation:

$$\boxed{G = 6,67.10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-2}}$$

d'où:

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{rc^2} \quad ,$$

comparons avec $g_{00}$ de Schwarzschild:

$$1 - \frac{2GM}{rc^2} = 1 - \frac{2\ell}{r}$$

car $\ell$ est valable pour tous les champs donc faibles en particulier.

On a:

$$\boxed{\ell = \frac{GM}{c^2}}$$

Le rayon de Schwarzschild est:

$$\boxed{r_s = 2\ell = \frac{2GM}{c^2}} \quad ;$$

pour un corps macroscopique, ce rayon est à l'intérieur du corps, ainsi pour le soleil:

$$r_s < r_0 \quad ,$$

cette singularité de Schwarzschild est à l'intérieur du corps où les équations relatives à l'espace libre ne sont plus valables.

Signification physique de $r_s$

Il est possible de déduire le rayon de Schawrzchild de la mécanique non relativiste.

Dans cette mécanique, un corps en mouvement a une énergie:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - G \frac{mM}{r} \quad ,$$

où M est la source du champ;

sa vitesse de libération est donnée par:

$$\frac{1}{2} mv^2 = G \frac{mM}{r}$$

soit: $$v_\ell^2 = \frac{2GM}{r}$$

$v_\ell$ = 11,2 km/s sur la terre.

Le rayon de Schwarzschild est la distance du centre de la source à l'objet animé d'une vitesse de libération égale à celle de la lumière.

## 8.3 Solution de Schawrzschild dans le cas où les équations d'Einstein relatives au vide comportent un terme cosmologique.

ON se propose de chercher la solution de l'équation:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

avec les mêmes hypothèses que précédemment.

Alors:

$$R - 2R + 4\Lambda = 0 \quad ,$$

ou:

$$R = 4\Lambda$$

en remplaçant dans l'équation initiale:

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

ou:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad .$$

En se reportant à ce qui précède:

$$R_{oo} = \Lambda g_{oo} \quad ,$$

est:

$$-e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right] = e^{\nu}\Lambda \quad ,$$

ou:

$$\boxed{\nu'' + \frac{1}{2}\,\nu'(\nu'-\lambda') + \frac{2}{r}\,\nu' = -\,2e^{\lambda}\Lambda}$$

$$R_{k\ell} = \Lambda g_{k\ell} \qquad \text{est:}$$

$$\left[\frac{1}{2}\,\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}\,\nu'(\nu'-\lambda')\right]\frac{xkx\ell}{r^2} + \left[-\,\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}(\nu'-\lambda')\right)\right] x$$

$$\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right) = \Lambda\left[-\,\delta_{k\ell} + (1-e^{\lambda})\,\frac{xkx\ell}{r^2}\right]$$

pour $k \neq \ell$:

$$\frac{1}{2}\,\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}\,\nu'(\nu'-\lambda') + \frac{1}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{r2} - \frac{e^{-\lambda}}{2r}\,\nu' + \frac{e^{-\lambda}}{2r}\,\lambda' = \Lambda(1-e^{\lambda})$$

pour $k = \ell$:

$$\frac{1}{2}\,\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}\,\nu'(\nu'-\lambda') - \frac{2}{r^2} + \frac{2e^{-\lambda}}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r}\,\nu' + \frac{e^{-\lambda}}{r}\,\lambda' = \Lambda(-2-e^{\lambda})$$

on voit que:

$$\boxed{\nu'' - \frac{2\lambda'}{r} + \frac{1}{2}\,\nu'(\nu'-\lambda') = -\,2\Lambda e^{\lambda}}$$

Ces deux équations encadrées nous donnent:

$$\nu' + \lambda' = 0 \quad ,$$

soit:

$$\nu + \lambda = C^{\underline{te}} = \text{Log } k \quad ;$$

mais à l'infini $R_{\mu\nu} \neq 0$, on n'a pas la solution de Lorentz.

$$\lambda = \text{Log } k - \nu$$

Remplaçons $\lambda = \text{Log } k - \nu$ dans la première des deux équations encadrées, d'où:

$$\nu'' + \frac{1}{2}(\nu')(\nu') - \frac{1}{2}\nu'(\text{Log } k - \nu)' + \frac{2}{r}\nu' = -2e^{\text{Log}k-\nu}\Lambda$$

$$\nu'' + \nu'^2 + \frac{2}{r}\nu' = -2ke^{-\nu}\Lambda$$

ou:

$$e^{\nu}\nu'' + e^{\nu}\nu'^2 + \frac{2}{r}\nu' e^{\nu} = -2k\Lambda \quad ,$$

or:

$$(e^{\nu})' = e^{\nu}\nu' \quad ; \quad (e^{\nu})'' = e^{\nu}\nu'' + \nu'^2 e^{\nu} \quad ,$$

d'où:

$$(e^{\nu})'' + \frac{2}{r}(e^{\nu})' = -2k\Lambda$$

ou:

$$\frac{1}{r}(re^{\nu})'' = -2k\Lambda \quad ,$$

ainsi:

$$(re^{\nu})' = -k\Lambda r^2 + B$$

$$\boxed{re^{\nu} = \alpha + \beta r - k\Lambda \frac{r^3}{3}}$$

Reconsidérons les deux équations pour $k = \ell$ et $k \neq \ell$; en soustrayant la deuxième de la première:

$$\frac{3}{r^2} - \frac{3}{r^2}\, e^{-\lambda} - \frac{3}{2}\, e^{-\lambda}\, \frac{\nu'}{r} + \frac{3}{2}\, \frac{e^{-\lambda}}{r}\, \lambda' = 3\Lambda$$

ou:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'-\nu'}{2r} - \frac{1}{r^2}\right) = \Lambda - \frac{1}{r^2} \quad ,$$

or: $\lambda' = -\nu'$, d'où:

$$-\, e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = \Lambda - \frac{1}{r^2}$$

ou:

$$e^{-\lambda}(\nu' r+1) = 1 - \Lambda r^2$$

or:

$$(e^{-\lambda} r)' = e^{-\lambda} - \lambda' e^{-\lambda} r = e^{-\lambda}(\nu' r + 1)$$

ou:

$$(e^{-\lambda} r)' = -\; 1 - \Lambda r^2$$

mais:

$$\lambda = \mathrm{Log}\, k - \nu \quad ,$$

d'où:

$$e^{-\lambda} = e^{\mathrm{Log}\frac{1}{k}}\, e^{\nu} = \frac{1}{k}\, e^{\nu} \quad ,$$

alors:

$$(e^{\nu}r)' = k(1 - \Lambda r^2)$$

Comparons alors avec:

$$(e^{\nu}r)' = - k\Lambda r^2 + \beta \quad ,$$

d'oũ:

$$k = \beta \quad .$$

de:

$$re^{\nu} = \alpha + \beta r - k\Lambda \frac{r^3}{3} \quad , \quad \text{et} \quad k = \beta \quad ,$$

on obtient:

$$e^{\nu} = k \left(1 + \frac{\alpha}{kr} - \Lambda \frac{r^2}{3}\right) \quad ,$$

et:

$$\lambda = \mathrm{Log}\, k - \nu$$

$$e^{-\lambda} = e^{\mathrm{Log}\frac{1}{k}} e^{\nu} = \frac{1}{k} e^{\nu}$$

$$e^{-\nu} = 1 + \frac{\alpha}{kr} - \Lambda \frac{r^2}{3}$$

Ainsi:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$= k\left(1 + \frac{\alpha}{kr} - \Lambda\frac{r^2}{3}\right)c^2dt^2 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{kr} - \Lambda\frac{r^2}{3}}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

En choisissant une unité de temps telle que:

$$dt' = k\,dt \quad , \quad \text{ou} \quad k = 1 \quad ,$$

on obtient:

$$e^{\nu} = 1 + \frac{\alpha}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} = e^{-\lambda} \quad ,$$

et:

$$\boxed{ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3}\right)c^2dt^2 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3}}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}$$

où si $\alpha = -2\ell$ on obtient la solution Schwarzschild pour $\Lambda = 0$.

Dans l'approximation du potentiel de Newton:

$$g_{oo} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad ,$$

alors:

$$1 + \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{2\ell}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} \quad ,$$

soit:

$$\phi = -\frac{\ell c^2}{r} - \frac{\Lambda c^2}{6} r^2 = -G\frac{M}{r} - \frac{1}{6}\Lambda c^2 r^2 \quad ;$$

$\Lambda$ doit donc être de la forme:

$$\Lambda \; \alpha \; \frac{1}{R^2}$$

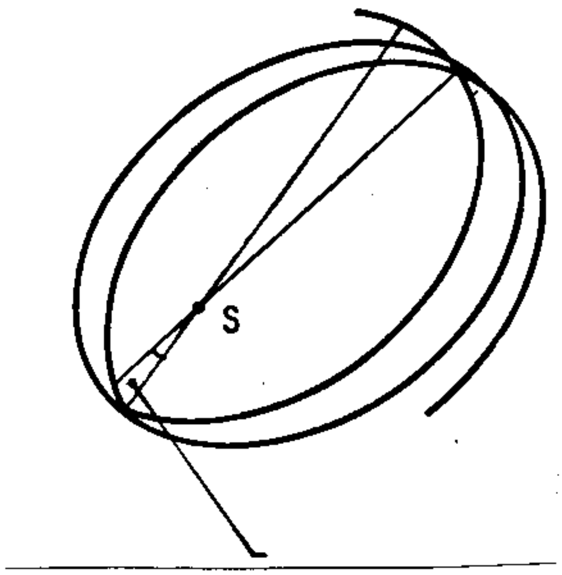
où $R$ est le rayon de l'univers.

# 9 PROBLÈME RELATIVISTE GÉNÉRAL DE KÉPLER

## 9.1 Avance du périhélie de Mercure

Étudions maintenant le mouvement d'une particule test dans un champ de Schwarzschild: le mouvement d'une planête dans le champ de gravitation du soleil.

Dans la théorie de Newton, l'orbite est fermée car la loi est en $\frac{1}{r^2}$. Si la loi est en $\frac{1}{r^{2+\delta}}$, il y a un déplacement du périhélie de l'ordre de $\delta$. La prédiction du déplacement du périhélie de mercure par la théorie de Newton diffère de l'observation par 43" d'arc par siècle.




### 9.1.1 Orbite d'une planète autour du soleil: équations du mouvement.

Nous utilisons le principe variationnel:

$$\delta \int ds = 0 \quad ;$$

puisqu'il y a symétrie sphérique et que la planète est au dehors du soleil, on peut utiliser la solution de Schwarzschild, d'où:

$$\delta \int \left[ \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2\right) \right] ds = 0$$

où . indique la dérivée par rapport à s.

Les équations de Lagrange nous donnent pour les variables $\theta$, $\phi$, t:

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

avec: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = - 2\Lambda^2 \dot{\theta}$ , d'où: $\frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = - 2r^2 \ddot{\theta} - 4r\dot{\theta}\dot{r}$

et: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = - 2r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 ,$$

d'où: $$\boxed{\frac{d}{ds}(r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2} ;$$

et: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = - 2r^2 \sin^2\theta \dot{\phi} ,$$

d'où; $$\boxed{\frac{d}{ds}(r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}) = 0}$$

et: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = 2 \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right) c^2 \dot{t}$$

d'où:

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2\ell}{r}\right) \dot{t}\right] = 0}$$

Un élément de ligne d'univers est:

$$\boxed{1 = \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right) c^2\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)}$$

pour une certaine valeur initiale s, prenons $\theta=\pi/2$ et $\dot{\theta} = 0$ (le mouvement est donc dans le plan équatorial); l'équation en $\theta$ est du deuxième ordre, il faut donc deux conditions initiales et alors on détermine de façon unique $\theta$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ *satisfait à l'équation.*

*Le mouvement du corps qui se fait dans l'espace de Schwarzschild est plan.*

Considérons la deuxième équation:

$$\frac{d}{ds}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0 \quad ,$$

comme $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{d}{ds}(r^2\dot{\phi}) = 0 \quad ,$$

d'où:

$$\boxed{r^2\dot{\phi}^2 = C^{\underline{te}} = h}$$

Considérons l'équation:

$$\frac{d}{ds}\left[\left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)\dot{t}\right] = 0 \quad ,$$

intégrons-la:

$$\boxed{\left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)\dot{t} = C^{\underline{te}} = k} \quad ;$$

remplaçons alors $\theta, \dot{\theta}, r^2\dot{\phi}\left(1-\frac{2\ell}{r}\right)\dot{t}$ dans l'élément de ligne par leurs valeurs:

$$1 = \left(1-\frac{2\ell}{r}\right)^{-1} c^2k^2 - \left(1-\frac{2\ell}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - \frac{k^2}{r^2}$$

Considérons alors r comme une fonction de $\phi$, alors:

$$r' \equiv \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} \quad , \quad \text{d'où:} \quad \dot{r} = r'\dot{\phi} = r'\,\frac{k}{r^2} \quad ;$$

ainsi:

$$\left(1-\frac{2\ell}{r}\right) = c^2k^2 - \frac{k^2}{r^4}r'^2 - \frac{k^2}{r^2}\left(1-\frac{2\ell}{r}\right) \quad ,$$

introduisons: $r = \dfrac{1}{u}$ ,

$$r' = -\frac{u'}{u^2} \quad ,$$

ce qui donne:

$$(1-2\ell u) = c^2k^2 - h^2u'^2 - hu^2(1-2\ell u) \quad ,$$

ou:

$$u'^2 = \frac{c^2k^2-1}{k^2} + \frac{2\ell}{k^2}u - u^2 + 2\ell u^3 \quad ,$$

en différenciant:

$$2u'u'' = \frac{2\ell}{h^2}u' - 2uu' + 6\ell u^2 u' \quad ,$$

ou:

$$\boxed{u'\left(u'' - \frac{\ell}{h^2} + u - 3\ell u^2\right) = 0} \; .$$

La première solution possible est:

$$\boxed{u' = 0} \quad ,$$

d'où, comme $r = \frac{1}{u}$ ,:

$$r = C^{\underline{te}} \quad ,$$

le mouvement circulaire est donc aussi une solution du problème de Képler en relativité générale dans un champ de Schwarzschild.

L'autre solution sera:

$$\boxed{u'' + u = \frac{\ell}{h^2} + 3\,\ell u^2} \quad ,$$

elle correspond à l'orbite du problème de Képler classique.

Faisons la comparison en considérant en mécanique de Newton le mouvement d'une particule de masse $\ell$ dans un potentiel $f(r)$, le lagrangien est:

$$L = \frac{1}{2}\,\ell\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right] - \ell f(r) \quad ,$$

pour l'orbite dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Les équations du mouvement sont:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - f'(r) \quad ; \quad \text{avec:} \quad f'(r) = \frac{df}{dr} \quad ;$$

$$\boxed{r^2 \frac{d\phi}{dt} = A = C^{\underline{te}}}$$ A est la constante d'aire.

Introduisons:

$$u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)} \quad ,$$

d'oũ:

$$u'(\phi) = -\frac{1}{r^2} r'(\phi) \quad ,$$

et:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = r'(\phi)\frac{A}{r^2} = -Au'(\phi)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{d\phi}\left[-Au'(\phi)\right]\frac{d\phi}{dt} = -Au''(\phi)\frac{A}{r^2} = -A^2u''(\phi)u^2 \quad ;$$

l'équation:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - f'(r) \quad ,$$

devient:

$$r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - f'(r) = -A^2u''u^2 \quad ,$$

or:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{A}{r^2} \quad ,$$

d'où:

$$r\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{A^2}{r^3} = A^2u^3 \quad ,$$

alors:

$$-A^2u''u^2 = A^2u^3 - f'(r)$$

ou:

$$\boxed{u''(\phi) + u(\phi) = \frac{A}{A^2}\,\frac{f'(r)}{u^2}}$$

c'est la formule de Binet.

La formule de Binet donne la relation entre $u = \frac{1}{r}$ et $\phi$ pour une force centrale.

Dans le cas d'un potentiel newtonien:

$$f(r) = -\frac{Gm}{r} \quad , \quad \text{d'où:} \quad f'(r) = \frac{Gm}{r^2} = Gm.u^2$$

d'où:

$$u'' + u = \frac{Gm}{A^2}$$

et:

$$A = r^2\,\frac{d\phi}{dt} = C^{\underline{te}}$$

Le terme analogue en relativité est:

$$\frac{\ell}{k^2} \quad \text{où:} \quad \ell = \frac{Gm}{c^2}$$

$h = r^2\dot{\phi}$ dans l'espace de Schwarzschild

d'où:

$$\frac{\ell}{h^2} = \frac{Gm}{c^2 r^4 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2} = \frac{Gm}{c^2 r^4 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2} \quad ;$$

nous avons vu que dans un champ gravitationnel faible:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - v^2 + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}$$

$$= c^2\left[1 - \beta^2 + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dx^0}\frac{dx^\nu}{dx^0}\right] \quad ,$$

$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cong c^2(1 + \varepsilon\gamma_{oo})$: c'est l'approximation du champ faible non relativiste.

ou:

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \cong \frac{1}{c^2}$$

alors:

$$\frac{\ell}{h^2} \cong \frac{Gm}{r^4\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} = \frac{Gm}{A^2}$$

Donc, en mécanique newtonienne:

$$\boxed{u'' + u = \frac{Gm}{A^2} = \frac{Gm}{r^4\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}} \quad ;$$

en relativité générale:

$$\boxed{u'' + u = \frac{\ell}{h^2} + 3\ell u^2}$$

où:

$$\boxed{\frac{\ell}{h^2} = \frac{Gm}{r^4 c^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2}} \quad ;$$

en plus on a le terme $3\ell u^2$ qui est très petit devant $\frac{\ell}{h^2}$ ; en effet:

$$\frac{3\ell u^2}{\frac{\ell}{h^2}} = 3h^2u^2 = 3(r^2\dot{\phi})^2 \quad \left(\frac{1}{r}\right)^2 = 3r^2\dot{\phi}^2$$

$$\cong 3\left(r\,\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \cdot \frac{1}{c^2} \quad \text{car} \quad \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \cong \frac{1}{c^2} \quad ;$$

$$\cong \frac{3v^2}{c^2}\text{latérale} \cong 7{,}7.10^{-8} \text{ pour mercure.}$$

L'équation pour la relativité générale:

$$u'' + u = \frac{\ell}{h^2} + 3\ell u^2 \quad ,$$

peut être interprétée comme l'équation de Binet pour la mécanique classique:

$$u'' + u = \frac{1}{A^2}\,\frac{F'(r)}{u^2} \quad ,$$

avec le potentiel:

$$F(r) = -\frac{Gm}{r} - \frac{\gamma}{r^3} \quad , \quad \text{avec: } \gamma = \ell A^2 = Gmh^2$$

d'où:

$$F'(r) = \frac{Gm}{r^2} + \frac{3\gamma}{r^4} = Gmu^2 + 3Gmh^2u^4 \quad ,$$

et:

$$\frac{1}{A^2}\frac{F'(r)}{u^2} = \frac{\ell}{Gmh^2}(Gm + 3Gmh^2u^2) = \frac{\ell}{h^2} + 3\ell u^2$$

le potentiel est plus compliqué que le potentiel de Newton; ce n'est pas physique, car A est une constante d'intégration, donc pour chaque intégration on a un potentiel différent.

### 9.1.2 Traitement par perturbation du terme $3\ell u^2$: calcul de l'orbite

Revenons à l'équation:

$$u'' + u = \frac{\ell}{h^2} + 3\ell u^2 \quad ,$$

nous avous vu que $3\ell u^2$ est petit comparé à $\frac{\ell}{h^2}$; nous allons traiter $3\ell u^2$ par perturbation.

Soit:

$$\boxed{B = \frac{\ell}{h^2} \cong \frac{Gm}{A^2}} \quad ,$$

nous avons vu dans l'étude de la solution de Schwarzschild que $\ell = \frac{Gm}{c^2}$. D'où:

$$\varepsilon = 3\ell B = 3\ell\frac{\ell}{h^2} = 3\frac{Gm}{c^2}\cdot\frac{Gm}{A^2} \quad ,$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{3G^2m^2}{c^2A^2}} \quad , \quad \varepsilon \text{ est petit.}$$

L'équation:

$$u'' + u = \frac{\ell}{h^2} + 3\ell u^2 \quad , \quad \text{prend la forme:}$$

$$u'' + u = B + \frac{\varepsilon}{B} u^2 \quad ,$$

qui admet une solution de la forme:

$$u(\phi) = u_o(\phi) + \varepsilon v(\phi) + \sigma(\varepsilon^2) \quad ,$$

il s'agit de trouver u. et v; remplaçons cette équation dans l'équation différentielle:

$$u_o'' + \varepsilon v'' + u_o + \varepsilon v = B + \frac{\varepsilon u_o^2}{B} + \sigma(\varepsilon^2) \quad ,$$

$u_o'' + u_o = B$ est l'équation classique:

$$u'' + u = \frac{Gm}{A^2} \quad ,$$

considérons la solution:

$$u_o = B + C\cos(\phi + \delta) \quad ,$$

où C et $\delta$ sont des constantes arbitraires; on peut prendre des axes tel que $\delta = 0$ et alors:

$$u_o(\phi) = B + C \cos \phi \quad ,$$

qui est l'équation d'une ellipse.

Pour l'équation en $\varepsilon$:

$$v'' + v = \frac{u_o^2}{B} \quad ,$$

ou:
$$v'' + v = (B + C \cos\phi)^2 . \frac{1}{B}$$

$$= B + 2\ C \cos\phi + \frac{C^2}{B} \cos^2\phi$$

$$= \left(B + \frac{C^2}{2B}\right) + 2\ C \cos\phi + \frac{C^2}{2B} \cos 2\phi \quad ,$$

puisque: $\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1$;
nous avons besoin d'une solution particulière de l'équation ci-dessus puisque la solution d'ordre zéro, $u_o = B + C \cos \phi$, contient le terme $C \cos \phi$ qui est la solution générale de l'équation homogène.

L'équation:

$$v'' + v = \left(B + \frac{C^2}{2B}\right) + 2\ C \cos\phi + \frac{C^2}{2B} \cos 2\phi$$

est linéaire, décomposons:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 \quad .$$

$$v''_1 + v_1 = B + \frac{C^2}{2B}\,, \quad \text{d'où:} \quad v_1 = B + \frac{C^2}{2B}$$

$$v''_2 + v_2 = 2\,C\cos\phi \quad , \quad \text{d'où:} \quad v_2 = C\phi\sin\phi$$

$$v''_3 + v_3 = \frac{C^2}{2B}\cos 2\phi, \quad \text{d'où} \quad v_3 = -\frac{C^2}{6B}\cos 2\phi \quad ,$$

finalement:

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = B + \frac{C^2}{2B} + C\phi\sin\phi - \frac{C^2}{6B}\cos 2\phi \quad ;$$

la solution cherchée est:

$$\boxed{\begin{aligned} u(\phi) &= u_o(\phi) + \varepsilon v(\phi) \\ &= \left(B + \varepsilon B + \frac{\varepsilon C^2}{2B}\right) + \left(C\cos\phi - \frac{\varepsilon C^2}{6B}\cos 2\phi\right) \\ &\quad + \varepsilon\, C\phi\sin\phi \end{aligned}}$$

### 9.1.3 Calcul de l'avance du périhélie

C'est avec la solution:

$$u(\phi) = \left(B + \varepsilon B + \frac{\varepsilon C^2}{2B}\right) + \left(C\cos\phi - \frac{\varepsilon C^2}{6B}\cos 2\phi\right) + \varepsilon\, C\phi\sin\phi$$

qu'il faut calculer le déplacement du périhélie.

Le seul terme qui n'est pas périodique est le troisième: $\varepsilon C\phi\sin\phi$; il croit avec $\phi$. Notons que:

$$\cos(\phi - \varepsilon\phi) = \cos\phi\cos\varepsilon\phi + \sin\phi\sin\varepsilon\phi \cong \cos\phi + \varepsilon\phi\sin\phi \quad ,$$

d'où:

$$u = B + C\cos\left(\phi - \varepsilon\phi\right) + \varepsilon\left(B + \frac{C^2}{2B} - \frac{C^2}{6B}\cos 2\phi\right) \quad ,$$

l'orbite d'ordre zéro est: $u_0 = B + C\cos\phi$.

L'effet du dermier terme $\varepsilon\left(B + \frac{C^2}{2B} - \frac{C^2}{6B}\cos 2\phi\right)$ est d'introduire une petite variation *périodique* dans la distance radiale; ce terme n'affecte pas le déplacement du périhélie. C'est le terme $\varepsilon\phi$ dans $\cos(\phi - \varepsilon\phi)$ qui introduit une non périodicité qui peut être non négligeable dans le cas où $\phi$ est grand.

Donc:

$$u = B + C\cos(\phi - \varepsilon\phi) + \text{terme périodique d'ordre } \varepsilon.$$

Le périhélie se présente quand r est minimum soit $u = \frac{1}{r}$ maximum. Or u est maximum quand:

$$\phi(1 - \varepsilon) = 2\pi n \quad ,$$

on approximativement:

$$\phi \cong 2\pi n(1 + \varepsilon) \quad ;$$

pour deux périhélies successifs on a un intervalle:

$$\Delta\phi = 2\pi(1 + \varepsilon) = 2\pi + 2\pi\varepsilon \quad ,$$

au lieu d'un intervalle de $2\pi$.

Le déplacement pour une résolution est:

$$\boxed{\delta\phi = 2\pi\varepsilon = 2\pi\left(\frac{3G^2m^2}{C^2A^2}\right)}$$

A est la constante des aires de la planête, m la masse de la source.

Pour mercure on calcule:

$$\delta\phi = 42{,}89'' \text{ d'arc par siècle} \quad ,$$

et on observe:

$$\delta\phi = 42{,}6'' \pm 1{,}0''$$

On considère l'avance du périhélie comme un test de la relativité générale.

### 9.1.4 Note

Revenons sur la singularité de Schwarzschild. La solution de Schwarzschild est:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)(dx^0)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2\ell}{r}}\,dr^2 - r^2\,d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad ,$$

on a vu l'équation:

ou

$$\left(1-\frac{2\ell}{r}\right)\frac{dt}{ds} = k = C^{\underline{te}} \quad ;$$

pour $r = 2\ell$, à un intervalle de temps propre fini mesuré pour une particule dont l'équation du mouvement est une géodésique, correspond un intervalle de temps-coordonnée infini. Ainsi t n'est pas un bon paramètre. Aussi intégrons s, fonction de r, dans:

$$1 = \left(1-\frac{2\ell}{r}\right)^{-1} c^2k^2 - \left(1-\frac{2\ell}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} \quad ,$$

on obtient s(r) fini. Ainsi la région près de $r = 2\ell$ n'est pas singulière pour une particule test dans cette région.

## 9.2 Trajectoire d'un rayon lumineux dans un champ de Schwarzschild

Faisons les hypothèses suivantes:

- la trajectoire est une géodésique dans l'espace à 4 dimensions,
- comme en relativité restreinte, le chemin lumineux est caractérisé par $ds^2 = 0$.

Il faut utiliser autre paramètre à la place de s.

Prenons un paramètre arbitraire p, et exigeons que:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{dx^\alpha}{dp}\right) + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\frac{dx^\beta}{dp}\cdot\frac{dx^\gamma}{dp} = 0 \quad ,$$

ce qui est équivalent à:

$$\delta\int g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{dp}\,\frac{dx^\beta}{dp}\,dp = 0 \quad ,$$

p appartient à une famille de paramètres linéaitement dépendants.

On a trouvé auparavant, pour une métrique de Schwarschild

$$r^2\dot{\phi} = c^{\underline{te}} = \tilde{h} \quad ,$$

$$\left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)\dot{t} = C^{\underline{te}} = \tilde{k} \;, \quad \text{où} \;\; \dot{} \;\; \text{est} \; \frac{d}{dq} \quad ,$$

et nous avons posé: $\theta = \frac{\pi}{2}$. Maintenant, au lieu de:

$$1 = \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)^{-1} c^2 k^2 - \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} \quad ,$$

nous avons, puisque $ds^2 = 0$:

$$0 = \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)^{-1} c^2 \tilde{k}^2 - \left(1 - \frac{2\ell}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{\tilde{h}^2}{r^2} \quad .$$

En posant: $u(\phi) = \dfrac{1}{r(\phi)}$ , on obtient:

$$0 = c^2\tilde{k}^2 = \tilde{h}^2 u'^2 - \tilde{h}^2 u^2 (1 - 2\ell u) \quad ,$$

en différentiant:

$$u'(u'' + u - 3\ell u^2) = 0$$

ou:

$$\boxed{u'' + u - 3\ell u^2 = 0 \quad ; \quad u' = 0}$$

Considérons d'abord $u' = 0$; dans le problème de Kêpler elle représentait une trajectoire circulaire, que signifie cette équation ici?

Cette équation $u' = 0$ vient de la différentiation de l'équation

$$0 = c^2\tilde{k}^2 - \tilde{h}^2 u'^2 - \tilde{h}^2 u^2 (1 - 2\ell u) \quad .$$

Dans l'équation générale

$$u'' + u = \frac{\ell}{h^2} + 3\ell u^2 \quad ,$$

$u' = 0$, on $u = C^{\underline{te}}$ peut être solution de l'équation précédente si

$$u_0 = \frac{\ell}{h^2} + 3\ell u_0^2$$

est choisi comme valeur initiale;

ici:

$$u' = 0$$

veut dire

$$u_0 = 3\ell u_0^2 \quad \text{ou} \quad r_0 = 3\ell \quad ;$$

ainsi on a une signification physique pour $r_0 = 3\ell$ seulement.

L'équation du rayon lumineux peut être du second ordre et ainsi les rayons sont possibles en tout point et dans toutes les directions.

Montrons que $3\ell u^2$ est petit.

Considérons $\frac{3\ell u^2}{u} = 3\ell u$ ou, puisque $r_s = 2\ell$ (rayon de Schwarschild), $3\ell u = \frac{3}{2}\left(\frac{r_s}{r}\right)$ puisque $u = \frac{1}{r}$.

Or, pour le soleil $r_s \cong 1$km. Ainsi, pour une trajectoire à l'extérieur du soleil ce terme est petit. Posons:

$$3\ell = \varepsilon \quad ;$$

l'équation de la trajectoire du rayon lumineux est:

$$u'' + u = \varepsilon u^2$$

supposons une solution de la forme:

$$u = u_o + \varepsilon v + \theta(\varepsilon^2) \quad ,$$

en substituant dans l'équation on obtient:

$$u''_o + u_o + \varepsilon v'' + \varepsilon v = \varepsilon u_o^2 + \theta(\varepsilon^2)$$

d'où:

$$u''_o + u_o = 0 \quad , \quad \text{soit} \quad u_o = A\cos(\phi + \delta) \quad ;$$

en orientant les axes tel que $\delta = 0$:

$$u_o = A\cos\phi$$

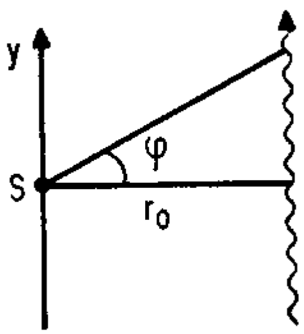
donc, dans le premier ordre:

$$r = \frac{1}{u_o} = \frac{1}{A\cos\phi}$$

ou:

$$r\cos\phi = \frac{1}{A} \quad .$$

Comme $r\cos\phi = x$, ceci représente une ligne droite parallèle à l'axe y. Ceci est juste: à l'ordre zéro, le rayon lumineux n'est pas dévié par le champ gravitationnel du soleil.




Posons: $r_o = \frac{1}{A}$, donc: $u_o = \frac{1}{r_o} \cos\phi$

En général:

$$u_o = A\cos(\phi + \delta) \quad ,$$

ou:

$$r\cos(\phi + \delta) = \frac{1}{A}$$

ou: $$r\cos\phi\cos\delta - r\sin\phi\sin\delta = \frac{1}{A}$$

soit: $$x\cos\delta - y\sin\delta = \frac{1}{A} \quad ,$$

qui est une droite avec un coefficient angulaire de:

$$\frac{\cos\delta}{\sin\delta}$$

Passons maintenant à:

$$v'' + v = u_o^2 = \frac{1}{r_o^2}\cos^2\phi \quad ,$$

ou:

$$v'' + v = \frac{1}{2r_o^2}(1+\cos 2\phi) \quad .$$

Ensayons:

$$v = \alpha + \beta\cos 2\phi \quad ,$$

d'où:

$$v'' = -4\beta\cos 2\phi \quad ,$$

ainsi:

$$v'' + v = \alpha - 3\beta\cos 2\phi \quad ,$$

en comparant:

$$\alpha - 3\beta\cos 2\phi = \frac{1}{2r_o^2}(1+\cos 2\phi) \quad ,$$

on trouve:

$$\alpha = \frac{1}{2r_0^2} \quad ; \quad \beta = -\frac{1}{6r_0^2}$$

Donc la solution est:

$$v = \frac{1}{2r_0^2} - \frac{1}{6r_0^2}\cos 2\phi \quad ,$$

mais:

$$\cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1 \quad ,$$

alors:

$$v = \frac{4}{6r_0^2} - \frac{1}{3r_0^2}\cos^2\phi = \frac{2}{3r_0^2} - \frac{1}{3r_0^2}\cos^2\phi$$

finalement:

$$\boxed{u = \frac{1}{r_0}\cos\phi - \frac{\varepsilon}{3r_0^2}\cos^2\phi + \frac{2\varepsilon}{3r_0^2}}$$

La valeur de $\phi$ qui correspond à $r \to \infty$ ou $u \to 0$, définit la trajéctoire asymptotique du rayon lumineux:

$$\frac{\varepsilon}{3r_0^2}\cos^2\phi - \frac{1}{r_0}\cos\phi - \frac{2\varepsilon}{3r_0^2} = 0 \quad ,$$

ou:

$$\cos^2\phi - \frac{3r_0}{\varepsilon}\cos\phi - 2 = 0 \quad ,$$

en résolvant cette équation par rapport à $\cos\phi$:

$$\cos\phi = \frac{3r_0}{2\varepsilon} \pm \left(\frac{9r_0^2}{4\varepsilon^2}+2\right)^{1/2} = \frac{3r_0}{2\varepsilon}\left[1 \pm \left(1+\frac{8\varepsilon^2}{9r_0^2}\right)^{1/2}\right] ,$$

comme $\cos\phi \leq 1$:

$$\cos\phi = \frac{3r_0}{2\varepsilon}\left[1 - \left(1+\frac{8\varepsilon^2}{9r_0^2}\right)^{1/2}\right]$$

$$= \frac{3r_0}{2\varepsilon}\left[1 - 1 - \frac{4\varepsilon^2}{9r_0^2}\right]$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{r_0}$$

ou, puisque $\varepsilon = 3\ell$:

$$\cos\phi = -\frac{2\ell}{r_0}$$

Puisque $\frac{\ell}{r_0}$ est petit, $\cos\phi \approx 0$, d'où $\phi \approx \frac{\pi}{2}$ comme cela est possible pour les asymptotes.

Considérons maintenant:

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \delta ,$$

pour *une asymptote*:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) = -\frac{2\ell}{r_0} ,$$

ou:

$$\sin\delta = \frac{2\ell}{r_0}$$

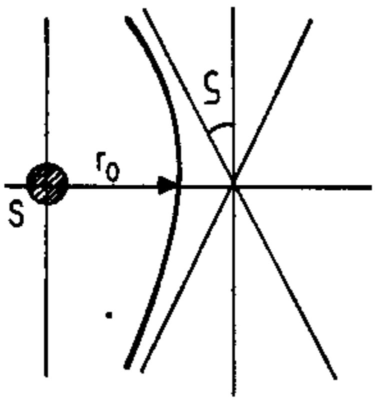
ou:

$$\boxed{\delta \cong \frac{2\ell}{r_0}} \;.$$

Pour l'autre: $\phi = -\frac{\pi}{2} - \delta$ et on obtient la même chose.

La déviation du rayon lumineux est (angle compris entre les asymptotes):

$$\boxed{\Delta = 2\delta = \frac{4\ell}{r_0} = \frac{4GM}{c^2 r_0} \qquad \text{puisque } \ell = \frac{GM}{c^2}}$$




Ceci pour un rayon lumineux tangent au soleil; ou a:

$$\Delta = 1{,}75''$$

Van Biesbroeck: $\Delta = 1{,}7'' \pm 0{,}1''$

# 10 ÉQUATIONS DU CHAMP LINÉAIRE

## 10.1 Équations du champ

En absence de matière, les équations d'Einstein du champ:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = - KT_{\mu\nu} \quad ,$$

s'écrivent:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = 0 \quad ,$$

ou:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 0 \quad ,$$

$$R - 2R = 0 \quad ,$$

d'où: $R = 0$ dans un espace libre;

finalement:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad .$$

Faisons l'étude dans le cas du *champ faible*:

$$g_{\mu\nu}(x) = g^{L}_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}(x) \quad ,$$

nous négligerons les termes d'ordre $\varepsilon^{n}$ avec $n \geq 2$.

Utilisans les coordonnées de Minkowski:

$$ict,\ z, y, x \quad ,$$

et choisissons:

$$g^L_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = -\delta_{\mu\nu}$$

Or:

$$R_{\mu\nu} \equiv (\Gamma^\alpha_{\alpha\nu})_{,\mu} - (\Gamma^\alpha_{\mu\nu})_{,\alpha} + \Gamma^\alpha_{\eta\mu}\Gamma^\eta_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\eta\alpha}\Gamma^\eta_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

où:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, \varepsilon g^{\alpha\lambda}_L\left(\frac{\partial \gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \gamma_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right) \quad ,$$

en ayant négligé les termes $\varepsilon^n$ avec $n \geq 2$; donc:

$R_{\mu\nu} = 0$ se réduit à:

$$\left(\Gamma^\alpha_{\alpha\nu}\right)_{,\mu} - \left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right)_{,\alpha} = 0 \quad .$$

Or:

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\, \mathrm{Log}\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}/g/\right)_{,\nu} \quad ,$$

l'équation s'écrit alors:

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}/g/\right)_{,\nu,\mu} - \left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)_{,\alpha} = 0 \quad .$$

Mais:

$$|g| = \det|-g| = \begin{vmatrix} 1-\varepsilon\gamma_{00} & -\varepsilon\gamma_{01} & -\varepsilon\gamma_{02} & -\varepsilon\gamma_{03} \\ -\varepsilon\gamma_{10} & 1-\varepsilon\gamma_{11} & -\varepsilon\gamma_{12} & -\varepsilon\gamma_{13} \\ -\varepsilon\gamma_{20} & -\varepsilon\gamma_{21} & 1-\varepsilon\gamma_{22} & -\varepsilon\gamma_{23} \\ -\varepsilon\gamma_{30} & -\varepsilon\gamma_{31} & -\varepsilon\gamma_{32} & 1-\varepsilon\gamma_{33} \end{vmatrix}$$

$$\cong (1-\varepsilon\gamma_{00})(1-\varepsilon\gamma_{11})(1-\varepsilon\gamma_{22})(1-\varepsilon\gamma_{33})$$

$$\cong 1 - \varepsilon\,\mathrm{Tr}\gamma \quad ,$$

et:

$$\mathrm{Log}|g| = \mathrm{Log}(1-\varepsilon\mathrm{Tr}\gamma) = -\varepsilon\mathrm{Tr}\gamma \quad ;$$

d'où:

$$\frac{1}{2}(\mathrm{Log}|g|)_{,\nu,\mu} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon(\mathrm{Tr}\gamma)_{,\nu,\mu} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon\left(\sum_{\beta=0}^{3}\gamma_{\beta\beta}\right)_{,\nu,\mu}$$

et:

$$\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) = \frac{\varepsilon}{2}\left(g_L^{\alpha\lambda} + \varepsilon\gamma^{\alpha\lambda}\right)\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial\gamma_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right)$$

$$\cong -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right) \quad ,$$

d'où:

$$\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)_{,\alpha} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon\left(\gamma_{\mu\alpha,\nu} + \gamma_{\nu\alpha,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\alpha}\right)_{,\alpha}$$

L'équation, d'ordre $\varepsilon$, est alors:

$$-\frac{1}{2}\,\varepsilon\sum_{\beta=0}^{3}\gamma_{\beta\beta,\nu,\mu} + \frac{1}{2}\,\varepsilon\left(\gamma_{\mu\alpha,\nu} + \gamma_{\nu\alpha,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\alpha}\right)_{,\alpha} = 0 \quad ,$$

ou:

$$\sum_{\beta=0}^{3}\gamma_{\beta\beta,\nu,\mu} = \sum_{\alpha=0}^{3}\left(\gamma_{\mu\alpha,\nu} + \gamma_{\nu\alpha,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\alpha}\right)_{,\alpha} \quad ,$$

ou:

$$\partial_{\nu}\partial_{\mu}\sum_{\beta=0}^{3}\gamma_{\beta\beta} = \sum_{\alpha=0}^{3}\left(\partial_{\nu}\partial_{\alpha}\gamma_{\mu\alpha} + \partial_{\mu}\partial_{\alpha}\gamma_{\nu\alpha} - \partial_{\alpha}\partial_{\alpha}\gamma_{\mu\nu}\right) \quad ;$$

on a 10 équations différentielles et 10 symboles $\gamma_{\mu\nu}$ inconnus (symétriques en $\mu$ et $\nu$).

Notons que dans notre choix de coordonnées:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}} - \vec{\nabla}^2 = -\,\partial_{\alpha}\partial_{\alpha} \qquad (\text{avec } x^{\circ} = ict)$$

Donc:

$$\boxed{\Box\,\gamma_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\partial_{\mu}\gamma_{\beta\beta} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}\gamma_{\mu\beta} - \partial_{\mu}\partial_{\beta}\gamma_{\nu\beta}}$$

Définissons:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^L_{\mu\nu}\gamma \quad ,$$

ainsi:

$$\bar{\gamma} \equiv \bar{\gamma}^{\alpha}_{\alpha} = - \gamma^{\alpha}_{\alpha} = - \gamma \quad ,$$

donc:

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\nu \partial^\alpha \bar{\gamma}_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial^\alpha \bar{\gamma}_{\nu\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu \partial^\alpha \gamma_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial^\alpha \gamma_{\nu\alpha}\right) - \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu \bar{\gamma}$$

ainsi:

$$\partial_\nu \partial_\mu \gamma - \left(\partial_\nu \partial^\alpha \gamma_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial^\alpha \gamma_{\nu\alpha}\right) = - \left(\partial_\nu \partial^\alpha \bar{\gamma}_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial^\alpha \bar{\gamma}_{\nu\alpha}\right) \quad ,$$

et avec l'équation ci-dessus on obtient:

$$\Box \gamma_{\mu\nu} = - \left(\partial_\nu \partial^\alpha \bar{\gamma}_{\mu\alpha} + \partial_\mu \partial^\alpha \bar{\gamma}_{\nu\alpha}\right) \quad .$$

A cause de l'abandon des termes $\varepsilon^n$, $\eta \geq 2$, la théorie n'est plus covariante. Mais l'ordre $\varepsilon$, $g^A_{\mu\nu} = g^L_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu}$ est un tenseur où $g^A_{\mu\nu}$ est formé de $\gamma_{\mu\nu}$ solution de l'équation encadrée.

Mais:

$$g^{exact}_{\mu\nu} - g^A_{\mu\nu} = \mathcal{O}_{\mu\nu}(\varepsilon^2) \quad ,$$

donc si $g^A_{\mu\nu}$ est un tenseur:

$$\bar{g}^{A}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\nu}} g^{A}_{\alpha\beta} \qquad ,$$

d'oû:

$$\bar{g}_{\mu\nu} - \bar{g}^{A}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \left(g_{\alpha\beta} - g^{A}_{\alpha\beta}\right) = \mathcal{O}_{\mu\nu}\left(\varepsilon^{2}\right) \qquad ;$$

ainsi, en assimilant $g^{A}_{\mu\nu}$ comme tenseur, on commet une erreur d'ordre $\varepsilon^2$.

## 10.2 Champ indépendant du temps et â symétrie sphérique

Considérons l'élement de ligne d'univers:

$$ds^2 = g_{oo}(dx^0)^2 + g_{ik}dx^i dx^k \qquad ,$$

avec: $g_{oo}(\vec{x}), g_{ik}(\vec{x})$. Si $x^0 = ict$, alors:

$$ds^2 = -g_{oo}c^2 dt^2 + g_{ik}dx^i dx^k \qquad ,$$

avec les $g_{ik}$ définis négativement. Introduisons la fonction $a(\vec{x})$:

$$g_{oo} = -1 + \varepsilon a(\vec{x}) \quad ; \quad a = \gamma_{oo}(\vec{x}) \quad , \gamma_{oi} = 0$$

et:

$$g_{ik} = -\delta_{ik} + \varepsilon\gamma_{ik} \qquad .$$

Ainsi, l'équation:

$$\square\ \gamma_{\mu\nu} = \partial_\nu\partial_\mu\gamma_{\beta\beta} - \partial_\nu\partial_\beta\gamma_{\mu\beta} - \partial_\mu\partial_\beta\gamma_{\nu\beta} \quad ,$$

est pour les composantes $\mu = \nu = 0$:

$$\square\,\gamma_{oo} = \partial_o^2\gamma_{\beta\beta} - \partial_o\partial_\beta\gamma_{o\beta} - \partial_o\partial_\beta\gamma_{o\beta} \quad ;$$

comme les $\gamma_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas du temps:

$$\square\ \gamma_{oo}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla}^2 a(\vec{x}) = 0 \quad .$$

$\gamma_{oo}$ est une fonction harmonique.

Nous avons vu dans l'étude de la *gravité en tant que métrique* que:

$$g_{oo} \cong 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad ,$$

ou dans les coordonnées de Minkowski:

$$g_{oo} = -1 - \frac{2\phi}{c^2} \quad ;$$

de:

$$g_{\mu\nu} = g^L_{\mu\nu} + \varepsilon\gamma_{\mu\nu} \quad ,$$

nous voyons que:

$$\varepsilon\gamma_{oo} \equiv \varepsilon a = -\frac{2\phi}{c^2} \quad ,$$

d'où: $$\nabla^2\gamma_{oo} = 0 \quad ,$$

donne: $$\nabla^2\phi = 0$$

aussi longtemps que $g_{\mu\nu}$ est indépendant du temps.

La symétrie sphérique implique que:

$$ds^2 = - g_{oo}c^2dt^2 - g_{11}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad ,$$

si $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, ainsi:

$$g_{oo} = - 1 + \varepsilon a(r) \quad ; \quad g_{11} = - 1 + \varepsilon b(r) \quad ,$$

d'où:

$$\gamma_{\alpha\beta}(r) = \begin{pmatrix} a(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b(r) \end{pmatrix}$$

Or:

$$\varepsilon\gamma_{oo} = \varepsilon a(r) = -\frac{2\phi}{c^2} \quad \text{par correspondance;}$$

mais un champ symétrique sphérique (avec singularité pour $r = 0$) a: $\phi = -\frac{GM}{r}$ (M masse du corps à $r = 0$), d'où:

$$\varepsilon a(r) = \frac{2GM}{c^2 r} \quad .$$

Maintenant, déterminons b(r) à partir de l'équation:

$$\Box \gamma_{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu \sum_\beta \gamma_{\beta\beta} - \sum_\beta \partial_\nu \partial_\beta \gamma_{\mu\beta} - \sum_\beta \partial_\mu \partial_\beta \gamma_{\nu\beta}$$

pour $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}$.

Avec $\mu = \nu = j$ on obtient:

$$\boxed{\Box \gamma_{jj} = \partial_j^2 \sum_\beta \gamma_{\beta\beta} - 2\sum_\beta \partial_j \partial_\beta \gamma_{j\beta}} \quad \text{pour } j \text{ fixé}$$

Or:

$$\partial_j^2 \gamma_{\beta\beta} = \partial_j^2 \gamma_{oo} + \partial_j^2 \gamma_{kk} = \partial_j^2 a + 3\partial_j^2 b \quad , \quad \text{pour } j \text{ fixé}$$

$$\Box \gamma_{jj} = - \nabla^2 \gamma_{jj} = - \nabla^2 b$$

$$\sum_\beta \partial_j \partial_\beta \gamma_{j\beta} = \sum_k \partial_j \partial_k \gamma_{jk} = \partial_j^2 \gamma_{jj} = \partial_j^2 b$$

l'équation encadrée s'écrit:

$$- \nabla^2 b = \partial_j^2 a + 3\partial_j^2 b - 2\partial_j^2 b = \partial_j^2 a + \partial_j^2 b \quad ,$$

ou :

$$\nabla^2 b + \partial_j^2 a + \partial_j^2 b = 0 \quad ,$$

en sommant sur j et en se souvenant que $\nabla^2 a = 0$:

$$\nabla^2 b = 0 \quad .$$

Ainsi l'équation

$$\Box \gamma_{jj} = \partial_j^2 \sum_\beta \gamma_{\beta\beta} - 2\sum_\beta \partial_j \partial_\beta \gamma_{j\beta} \quad ,$$

se réduit à:

$$- \nabla^2 b = \partial_j^2 a + \partial_j^2 b \quad ,$$

et puisque:

$$\nabla^2 b = 0 \quad ,$$

on obtient:

$$\partial_j^2 (a + b) = 0 \quad ,$$

a + b est une combinaison linéaire des coordonnées et puisque cette équation est vérifiée à l'infini, elle l'est partout. Donc:

$$a(r) = - b(r) \quad ,$$

et:

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

Le tenseur métrique approché pour les coordonnées de Minkowski est:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1+\varepsilon a(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\varepsilon a(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\varepsilon a(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\varepsilon a(r) \end{pmatrix}$$

et:

$$ds^2 = (1-\varepsilon a)c^2dt^2 - (1+\varepsilon a)(dx^2+dy^2+dz^2) \quad .$$

Avec la correspondance classique:

$$ds^2 = \left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)c^2dt^2 - \left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)(d\vec{x})^2$$

$$= \left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 - \left(1+\frac{2GM}{c^2r}\right)(d\vec{x})^2 \quad ,$$

en accord avec la solution de Schwarzschild.

Rappelons cette solution:

$$ds^2 = \left(1-\frac{2\ell}{r}\right)\left(dx^0\right)^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2\ell}{r}} - r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right)$$

avec $\ell = \dfrac{GM}{c^2}$ , et en développant le deuxième terme:

$$\frac{dr^2}{1-\frac{2\ell}{r}} \cong \left(1+\frac{2\ell}{r}\right)dr^2$$

## 10.3 Solutions de Weyl

Considérons l'équation:

$$\boxed{\Box\, \gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\beta \gamma_{\nu\beta} + \partial_\nu \partial_\beta \gamma_{\mu\beta} - \partial_\mu \partial_\nu \gamma_{\beta\beta} = 0}$$

ou:

$$\Box\, \hat{\gamma}_{\mu\nu} + \partial_\mu \left(\partial_\beta \gamma_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\, \partial_\nu \gamma_{\beta\beta}\right) + \partial_\nu \left(\partial_\beta \gamma_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\, \partial_\mu \gamma_{\beta\beta}\right) = 0$$

Définissons: $$\tau_\nu = -\left(\partial_\beta \gamma_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\, \partial_\nu \gamma_{\beta\beta}\right) \quad ,$$

ainsi:

$$\Box\, \gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu \tau_\nu + \partial_\nu \tau_\mu$$

Weyl écrit:

$$\tau_\nu = \Box\, \phi_\nu \quad ,$$

ainsi:

$$\Box\, \hat{\gamma}_{\mu\nu} = \Box\, (\partial_\mu \phi_\nu + \partial_\nu \phi_\mu) \quad ;$$

une solution possible est:

$$\boxed{\gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_\nu + \partial_\nu\phi_\mu} \; .$$

Substituons alors dans l'équation:

$$\Box\,\gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\beta\gamma_{\nu\beta} + \partial_\nu\partial_\beta\gamma_{\mu\beta} - \partial_\mu\partial_\nu\gamma_{\beta\beta} = 0 \quad ,$$

d'où:

$$\Box\,\gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\beta\left(\partial_\nu\phi_\beta + \partial_\beta\phi_\nu\right) + \partial_\nu\partial_\beta\left(\partial_\mu\phi_\beta + \partial_\beta\phi_\mu\right) - 2\partial_\mu\partial_\nu\left(\partial_\beta\phi_\beta\right)$$

$$= \Box\,\gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\beta^2\phi_\nu + \partial_\nu\partial_\beta^2\phi_\mu \quad ,$$

$$= \Box\,\gamma_{\mu\nu} - \Box\left(\partial_\mu\phi_\nu + \partial_\nu\phi_\mu\right) \quad .$$

Mais:

$$\Box\,\gamma_{\mu\nu} = \Box\left(\partial_\mu\phi_\nu + \partial_\nu\phi_\mu\right) \quad ,$$

d'où: $\gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_\nu + \partial_\nu\phi_\mu$ est solution de l'équation considérée.

| |
|---|
| $\gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_\nu + \partial_\nu\phi_\mu$ |
| sont les solutions de Weyl pour les équation du champ linéaire. |

Considérons maintenant une solution arbitraire $\gamma_{\mu\nu}$ des équations du champ linéaire. Utilisons-la pour définir les 4 fonctions associées:

$$\tau_\eta = -\left(\partial_\beta\gamma_{\eta\beta} - \frac{1}{2}\,\partial_\eta\gamma_{\beta\beta}\right)$$

et définissons les fonctions associées $\phi_\lambda$ posées, par:

$$\Box\,\phi_\lambda = \tau_\lambda \quad .$$

Ces fonctions $\phi_\lambda$, générées par la solution $\gamma_{\mu\nu}$, peuvent servir à générer une nouvelle solution des équations du champ de la forme de Weyl:

$$\gamma_{\mu\nu}^{(w)} = \partial_\mu\phi_\nu + \partial_\nu\phi_\mu$$

qui a les mêmes fonctions associées posées, $\tau_\eta$, que $\gamma_{\mu\nu}$.

C'est l'unique solution de Weyel *associée* (associée à la solution $\gamma^{\mu\nu}$).

Considerons maintenant:

$$\gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}^{(w)} = \hat{\gamma}_{\mu\nu} \quad .$$

Comme l'équation:

$$\Box\,\gamma_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial_\nu\gamma_{\beta\beta} - \partial_\mu\partial_\beta\gamma_{\nu\beta} - \partial_\nu\partial_\beta\partial_{\mu\beta}$$

est linéaire, $\hat{\gamma}_{\mu\nu}$ est une solution de l'équation homogène.

Nons avons:

$$\Box\,\gamma_{\mu\nu} = \tau_{\mu,\nu} + \tau_{\nu,\mu} \quad ,$$

mais:

$$\square\gamma^{(w)}_{\mu\nu} = \square(\phi_{\nu,\mu} + \phi_{\mu,\nu}) = \tau_{\nu,\mu} + \tau_{\mu,\nu}$$

car:

$$\square\,\phi_\lambda = \tau_\lambda$$

$$\gamma^{(w)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_\nu + \partial_\nu\phi_\mu \quad ;$$

d'où: $\gamma_{\mu\nu}$ et $\gamma^{(w)}_{\mu\nu}$ ont le même d'Alembertien, et alors:

$$\boxed{\square\,\hat{\gamma}_{\mu\nu} = 0}$$

Ainsi, les 10 composantes de la quantité $\hat{\gamma}_{\mu\nu}$ se propagent avec la vitesse c.

Si:

$$\hat{\tau}_\nu = -\left(\partial_\beta\hat{\gamma}_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\,\partial_\nu\hat{\gamma}_{\beta\beta}\right)$$

donc:

$$\square\,\hat{\gamma}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{\tau}_\nu + \partial_\nu\hat{\tau}_\mu = 0 \quad .$$

Les vecteurs dans l'espace de Riemann tels que:

$$\mu_{\lambda;\eta} + \mu_{\eta;\lambda} = 0$$

sont appelés les *vecteurs champ de Killing*.

Dans notre approximation, $\hat{\tau}_\nu$ est un champ de vecteurs de Killing.

Un champ de vecteurs de Killing qui est régulier partout, et qui se confond à l'infini en un espace qui est asymptotiquement pseudo-euclidien, est identiquement nul.

De:

$$\hat{\tau}_{\nu,\mu} + \hat{\tau}_{\mu,\nu} = 0 \quad ,$$

on obtient:

$$\hat{\tau}_{\nu,\mu,\lambda} + \hat{\tau}_{\mu,\nu,\lambda} = 0 \quad ,$$

et ainsi:

$$\hat{\tau}_{\nu,\mu,\lambda} + \hat{\tau}_{\mu,\nu,\lambda} = 0$$

$$\hat{\tau}_{\lambda,\nu,\mu} + \hat{\tau}_{\lambda,\mu,\nu} = 0$$

$$\hat{\tau}_{\mu,\lambda,\nu} + \hat{\tau}_{\nu,\lambda,\mu} = 0$$

ou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\tau}_{\nu,\mu,\lambda} \\ \hat{\tau}_{\mu,\nu,\lambda} \\ \hat{\tau}_{\lambda,\mu,\nu} \end{pmatrix} = 0$$

ou:

$$\hat{\tau}_{\nu,\mu,\lambda} + \hat{\tau}_{\mu,\nu,\lambda} = 0$$

$$\hat{\tau}_{\mu,\nu,\lambda} + \hat{\tau}_{\lambda,\mu,\nu} = 0$$

$$\hat{\tau}_{\nu,\mu,\lambda} + \hat{\tau}_{\lambda,\mu,\nu} = 0$$

mais de

$$\partial_\nu \partial_\mu \hat{\tau}_\lambda + \partial_\mu \partial_\nu \hat{\tau}_\lambda = 0 \quad ,$$

il suit que:

$$\partial_\nu \partial_\mu \hat{\tau}_\lambda = 0 \quad ;$$

en intégrant on obtient

$$\hat{\tau}_\lambda = \text{fonction linéaire.}$$

Si $\hat{\tau}_\lambda$ est nul asymptotiquement dans au moins une direction spatiale, alors:

$$\hat{\tau}_\lambda = 0$$

ou:

$$\boxed{\sum_\beta \left( \partial_\beta \hat{\gamma}_{\nu\beta} - \frac{1}{2} \partial_\nu \hat{\gamma}_{\beta\beta} \right) = 0}$$

*Cette équation relie les dérivées des composantes de $\hat{\gamma}_{\nu\beta}$ entre elles-mêmes.*

Calculons le tenseur de Riemann $R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda}$ ($R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace considéré soit un espace de Lorentz); nous voulons voir le rôle de $R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda}$ pour $g_{\mu\nu} = g^{L}_{\mu\nu} - \varepsilon\gamma_{\mu\nu}$.

On a:

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda} = \left(\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\right)_{,\lambda} - \left(\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\right)_{,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{m\lambda}\Gamma^{m}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{m\nu}\Gamma^{m}_{\mu\lambda} \quad ,$$

$\Gamma$ est d'ordre $\varepsilon$, ainsi dans cet ordre:

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda} \cong \left(\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}\right)_{,\lambda} - \left(\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\right)_{,\nu} \quad ,$$

on a vu:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \cong -\frac{1}{2}\,\varepsilon\left(\frac{\partial\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right) \; ,$$

ainsi:

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\,\varepsilon\left(\gamma_{\mu\alpha,\lambda,\nu} + \gamma_{\lambda\alpha,\mu,\nu} - \gamma_{\mu\lambda,\alpha,\nu}\right.$$

$$\left. - \gamma_{\mu\alpha,\nu,\lambda} - \gamma_{\nu\alpha,\mu,\lambda} + \gamma_{\mu\nu,\alpha,\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\left(\gamma_{\alpha\lambda,\mu,\nu} + \gamma_{\mu\nu,\alpha,\lambda} - \gamma_{\nu\alpha,\mu,\lambda} - \gamma_{\mu\lambda,\alpha,\nu}\right)$$

Maintenant, dans le cas d'une solution de Weyl, $\gamma_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\phi_{\beta} + \partial_{\beta}\phi_{\alpha}$ et donc:

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\,\varepsilon\Big(\phi_{\lambda,\alpha,\mu,\nu} + \phi_{\alpha,\lambda,\mu,\nu} + \phi_{\mu,\nu,\alpha,\lambda} + \phi_{\nu,\mu,\alpha,\lambda}$$

$$- \phi_{\nu,\alpha,\mu,\lambda} - \phi_{\alpha,\nu,\mu,\lambda} - \phi_{\mu,\lambda,\alpha,\nu} - \phi_{\lambda,\mu,\alpha,\nu}\Big) = 0\ .$$

La solution de Weyl détermine $R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda}$ s'annulant (de premier ordre en $\varepsilon$).

Maintenant on a $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma^{(w)}_{\alpha\beta} + \hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ et comme $\gamma^{(w)}_{\alpha\beta}$ donne $R^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda}$ s'annulant, $R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda}$ dépend de $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$.

$\gamma^{(w)}_{\alpha\beta}$ est une propriété formelle de la solution, c'est $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}$ qui donne R significatif .

Considérons la forme supposée du tenseur métrique:

$$g_{\alpha\beta} = -\,\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon\gamma_{\alpha\beta}\quad ,$$

la transformation de coordonnées:

$$\bar{x}^{\mu} = x^{\mu} - \varepsilon\phi^{\mu}$$

donne:

$$\frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\mu}{}_{\alpha} - \varepsilon\,\frac{\partial\phi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\bar{x}^{\mu}} = \delta^{\alpha}{}_{\mu} + \varepsilon\,\frac{\partial\phi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}$$

ainsi:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\alpha\beta} = \left(\delta^\alpha{}_\mu + \varepsilon\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\left(\delta^\beta{}_\nu + \varepsilon\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^\nu}\right) g_{\alpha\beta}$$

$$= \left(\delta^\alpha{}_\mu + \varepsilon\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)\left(\delta^\beta{}_\nu + \varepsilon\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^\nu}\right)\left(-\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon\gamma_{\alpha\beta}\right)$$

$$= -\delta_{\mu\nu} + \varepsilon\left[\gamma_{\mu\nu} - \frac{\partial\phi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\phi_\mu}{\partial x^\nu}\right]$$

$$= -\delta_{\mu\nu} + \varepsilon(\gamma_{\mu\nu} - \phi_{\nu,\mu} - \phi_{\mu,\nu})$$

Ainsi une solution de Weyl est additionnée à $g_{\mu\nu}$ dans ce nouveau système, cela signifie que cette solution est une mesure de l'arbitraire du système de coordonnées. Cette part constituée de la solution de Weyl peut être éliminée par une transformation de $\bar{g}_{\mu\nu}$ à $g_{\mu\nu}$. Si nous avions $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \varepsilon(-\phi_{\nu,\mu} - \phi_{\mu,\nu})$ nous pourrions aller dans un système de coordonnées où $g_{\mu\nu}$ serait simplement $-\delta_{\mu\nu}$. Ceci est en accord avec le fait que $R^\alpha_{\mu\lambda\nu}(\gamma^{(w)}) = 0$.

*Ainsi la solution de Weyl ne correspond pas à un champ gravitationnel, c'est une propriété formelle du système de coordonnées et non une propriété physique de l'espace.*

Nous devons éliminer la solution de Weyl et étudier seulement:

$$\boxed{\begin{aligned} &\Box\hat{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \\ \text{et}\quad &\sum_\beta\left(\partial_\beta\hat{\gamma}_{\nu\beta} - \frac{1}{2}\partial_\nu\hat{\gamma}_{\beta\beta}\right) = 0 \end{aligned}}$$

Considérons:

$$\square \hat{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \quad ,$$

$$\sum_{\beta} \left( \partial_\beta \hat{\gamma}_{\nu\beta} - \frac{1}{2} \partial_\nu \hat{\gamma}_{\beta\beta} \right) = 0$$

Puisque (ordre $\varepsilon$):

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left( \gamma_{\alpha\lambda,\mu,\nu} + \gamma_{\nu\mu,\alpha,\lambda} - \gamma_{\alpha\nu,\mu,\lambda} - \gamma_{\mu\lambda,\alpha,\nu} \right) \quad ,$$

on voit que:

$$\square R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda} = 0 \quad .$$

L'effet gravitationnel se propage donc avec la vitesse c.

# 11 CHAMP DE GRAVITÉ D'UNE PARTICULE CHARGÉE

## 11.1 Tenseur énergie-impulsion

Considérons une métrique statique et à symétrie sphérique.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{oo}(dx^0)^2 + 2g_{ok}dx^0dx^k + g_{ik}dx^idx^k$$

Nous voulons que:

$$g_{\mu\nu} \xrightarrow[r\to\infty]{} g^L_{\mu\nu} \quad ,$$

ou:

$$ds^2_\infty = (dx^0)^2 - (d\vec{x})^2 \quad .$$

Appelons:

$$\boxed{\begin{aligned} g_{oo}(x) &= A(r) \\ g_{ok}(x) &= B(r)\frac{xk}{r} \\ g_{ik}(x) &= -C(r)\delta_{ik} + D(r)\frac{xi}{r}\frac{xk}{r} \end{aligned}} \quad ;$$

ainsi:

$$ds^2 = A(r)(dx^0)^2 + 2B(r)\frac{xk}{r}dx^0dx^k - C(r)\delta_{ik}dx^idx^k$$

$$+ D(r)\frac{xi}{r}\frac{xk}{r}dx^idx^k \quad .$$

Considérons la transformation:

$$x'^0 = x^0 + F(r) \quad , \quad \text{ou:} \quad x^0 = x'^0 - f(r')$$

$$x'^k = x^k \quad , \quad \text{ou:} \quad x^k = x'^k$$

or:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}$$

donc:

$$g'_{0k} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^k} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \frac{\partial x^k}{\partial x'^k} g_{0k} + \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \frac{\partial x^0}{\partial x'^k} g_{00}$$

$$= g_{0k} + \frac{\partial x^0}{\partial x'^k} g_{00} \quad ,$$

ce qui s'écrit:

$$B'(r') \frac{x'k}{r'} = B(r)\frac{xk}{r} - \frac{df(r')}{dr'} \cdot \frac{\partial r'}{\partial x'^k} g_{00}$$

$$= B(r)\frac{xk}{r} - \frac{\partial f}{dr'} \cdot \frac{x'k}{r'} g_{00}$$

$$= \left(B - \frac{df}{dr} A\right) \frac{x'k}{r'} \quad \text{puisque } x'k = xk, \quad r' = r$$

soit:

$$B'(r') = B(r) - \frac{df}{dr} A(r) \quad ,$$

ainsi, si:

$$\frac{df}{dr} = \frac{B(r)}{A(r)} \quad ,$$

on obtient:

$$B'(r') \quad ;$$

ainsi, on peut choisir:

$$\boxed{\begin{aligned} &g_{oo}(x) = A(r) \quad , \quad g_{ok}(x) = 0 \\ &\qquad g_{ik}(x) = -C(r)\delta_{ik} + D(r)\frac{xi}{r}\frac{xk}{r} \end{aligned}} \; .$$

On peut prendre la transformation des coordonnées telle que dans le nouveau système <u>C(r) = 1.</u>

$$x''^k = \phi(r)x^k \quad ,$$

$$x^k = \psi(r'')x''^k \; ,$$

on a:

$$\sum_k (x''^k)^2 = \phi^2(r)\sum_k (x^k)^2 \quad ,$$

$$\sum_k (x^k)^2 = \psi^2(r'')\sum_k (x''^k)^2 = \psi^2(r'')\phi^2(r)\sum_k (x^k)^2$$

d'où:

$$\psi^2(r")\phi^2(r) = 1 \quad ,$$

$$\psi = \frac{1}{\phi} \qquad \text{pour une transformation propre}$$

ainsi: $\quad r"^2 = \frac{1}{\psi^2} r^2 \quad , \quad$ ou: $\quad r = \psi . r" \quad , \quad r" = \phi r$

$$\frac{x"^k}{r"} = \frac{\phi}{\phi}\frac{x^k}{r} = \frac{x^k}{r} \quad ,$$

dbũ:

$$g"_{ik} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x"^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x"^k} g_{\alpha\beta} = \left(4\delta^\alpha_i + x"^\alpha \frac{d\psi}{dr"} . \frac{x"i}{r"}\right) x$$

$$x\left(\psi\delta^\beta_k + x"^\beta \frac{d\psi}{dr"}\frac{x"k}{r"}\right) g_{\alpha\beta} \quad ,$$

mais:

$$r^2 = \psi^2(r")r"^2 \quad , \quad \text{ou} \quad x"^\alpha = \phi(r)x^\alpha$$
$$x"^i = \phi(r)x^i$$

$$x"^\alpha x"i = \phi^2(r)x^\alpha x_i = \frac{1}{\psi^2} x^\alpha x_i$$

$\frac{1}{r"} = \frac{\psi(r")}{r}$ , $\quad$ ainsi: $\quad \frac{x"^\alpha x"i}{r"} = \frac{1}{\psi}\frac{x^\alpha xi}{r}$

$$x"^\alpha \frac{d\psi}{dr"}\frac{x"i}{r"} = \frac{1}{\psi}\frac{x^\alpha xi}{r}\frac{d\psi}{dr"} = r"\frac{x^\alpha}{r}\frac{xi}{r}\frac{d\psi}{dr"}$$

puisque $\frac{1}{\psi} = \frac{r"}{r}$ .

Ainsi:

$$g''_{ik} = \left(\psi\delta^{\alpha}_{i} + r''\ \frac{x^{\alpha}}{r}\ \frac{xi}{r}\ \frac{d\psi}{dr''}\right)\left(\psi\delta^{\beta}_{k} + r''\ \frac{x^{\beta}}{r}\ \frac{xk}{r}\ \frac{d\psi}{dr''}\right)\left(-C\delta_{\alpha\beta} + \frac{Dx\alpha}{r}\ \frac{x\beta}{r}\right)$$

$$= -\psi^2\ C\delta_{ik} + \left[\psi^2\ \frac{x^i}{r}\ \frac{xk}{r}\ D + 2\psi r''\ \frac{xi}{r}\ \frac{xk}{r}\ \frac{d\psi}{dr''}\ D + r''^2\ \frac{x^x}{r}\ \frac{x^k}{r}\left(\frac{d\psi}{dr''}\right)^2 D\right]$$

$$-2r''\ \frac{d\psi}{dr''}\ \frac{xi}{r}\ \frac{xk}{r}\ \psi C - r''^2\left(\frac{d\psi}{dr''}\right)^2 C\ \frac{xi}{r}\ \frac{xk}{r}$$

$$= -\psi^2\ C\delta_{ik} + \left[\left(\psi + r''\ \frac{d\psi}{dr''}\right)^2 D - r''\ \frac{d\psi}{dr''}\left(2\psi + r''\ \frac{d\psi}{dr''}\right)C\right]\frac{xi}{r}\ \frac{xk}{r}$$

puisque $\psi = C^{-1/2}$ :

$$g''_{ik} = -\ \delta_{ik} + \mathcal{H}(r)\frac{xi}{r}\ \frac{xk}{r} \quad ,$$

ainsi:

$$\boxed{\begin{array}{ll} g_{oo} = A(r) = e^{\nu(r)} & g_{ok} = 0 \\ \\ g_{ik} = -\delta_{ik} + \mathcal{H}(r)\frac{xi}{r}\ \frac{xk}{r} = -\ \delta_{ik} + (1 - e^{\lambda(r)})\frac{xi}{r}\ \frac{xk}{r} & \end{array}}$$

On voit que si on pose:

$$x = r\cos\phi\sin\theta$$

$$y = r\sin\phi\sin\theta$$

$$z = r\cos\theta$$

donc:

$$dx = -r\sin\phi\sin\theta d\phi + r\cos\phi\cos\theta d\theta + dr\cos\phi\sin\theta$$

$$dy = r\cos\phi\sin\theta d\phi + r\sin\phi\cos\theta d\theta + dr\sin\phi\sin\theta$$

$$dz = -r\sin\theta d\theta + dr\cos\theta \quad ,$$

et:

$$xdx + ydy + zdz = r^2\Big[-\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta d\phi + \cos^2\phi\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$+ \sin\phi\cos\phi\sin^2\theta d\phi + \sin^2\phi\sin\theta\cos\theta d\theta - \cos\theta\sin\theta d\theta\Big]$$

$$+ rdr\left[\cos^2\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] = rdr$$

Nons voyons donc que notre $ds^2$ est:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}(dx^0)^2 + \left[-\delta_{ik} + \left(1 - e^{\lambda(r)}\right)\frac{xi}{r}\,\frac{xk}{r}\right]dx^i dx^k$$

$$= e^{\nu(r)}(dx^0)^2 + \left[-(d\vec{x})^2 + dr^2 - e^{\lambda(r)}(dr)^2\right]$$

$$= e^{\nu(r)}(dx^0)^2 - e^{\lambda(r)}(dr)^2 - r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad .$$

car:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (d\vec{x})^2 = dr^2 + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

ce $ds^2$ est equivalent à la solution de Schwarzschild.

Nous avions trouvé:

$$g_{oo} = e^{\nu(r)} = 1 - \frac{2\ell}{r} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad ,$$

$$\boxed{e^{\lambda(r)} = e^{-\nu(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2\ell}{r}}} \quad ,$$

ainsi:

$$g_{ik} = -\delta_{ik} + \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{2\ell}{r}}\right) \frac{xi}{r} \frac{xk}{r} \quad , \quad \ell = \frac{GM}{c^2}$$

$$= -\delta_{ik} - \frac{2\frac{GM}{c^2}}{r - 2\frac{GM}{c^2}} \frac{xi}{r} \frac{xk}{r} \quad .$$

Maintenant nous voulons le tenseur énergie impulsion du champ électromagnétique créé par un point chargé statique:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu}\right)} \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\nu} - Lg_{\mu\nu} \quad ;$$

prenons:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda}\right)\left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\lambda}\right) ,$$

maintenant:

$$\delta L = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda}\right) \delta \left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\lambda}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} F_{\lambda\mu} \left(\delta \frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu} - \delta \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\lambda}\right)$$

$$= -F_{\lambda\mu} \delta \frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu} \quad ,$$

d'où:

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x_{\mu}}\right)} = - F_{\lambda\mu} \quad ,$$

ainsi:

$$T_{\mu\nu} = - F_{\lambda\mu} \frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad ;$$

symétrisons $T_{\mu\nu}$ en additionant $F_{\lambda\mu} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\lambda}}$ (ce terme ne donne pas de contribution si on intègre, puisque:

$$F_{\lambda\mu} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} (F_{\lambda\mu} A_{\nu}) - \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\lambda}} A_{\nu}$$

et $\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\lambda}} = 0$ en absence de courant et $\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} (F_{\lambda\mu} A_{\nu})$ est la divergence du tenseur antisymétrique $F_{\lambda\mu} A_{\nu} = - F_{\mu\lambda} A_{\nu}$ , d'où:

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} (F_{\lambda\mu} A_{\nu}) \quad , \qquad \text{donne:} \qquad \partial^{\mu} T'_{\mu\nu} = \partial^{\mu} T_{\mu\nu} \quad .$$

ainsi:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= - F_{\lambda\mu} \left( \frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\lambda}} \right) + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= - F_{\lambda\mu} F^{\lambda}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

ou:

$$\boxed{T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda} F^{\lambda}{}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \text{ puisque:}$$

$$F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} = g^{\lambda\alpha}F_{\alpha\nu}F_{\mu\lambda}$$

$$F_{\nu\lambda}F^{\lambda}{}_{\mu} = g^{\lambda\alpha}F_{\alpha\mu}F_{\nu\lambda} = g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\nu}F_{\mu\alpha}$$

$$= g^{\lambda\alpha}F_{\alpha\nu}F_{\mu\lambda}$$

On voit que:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + \frac{1}{4}\,\delta^{\mu}{}_{\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad ,$$

d'oû:

$$T^{\mu}{}_{\mu} = F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\lambda}{}_{\mu} + F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

$$= g^{\mu\alpha}F_{\alpha\lambda}g^{\lambda\beta}F_{\beta\mu} + F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

mais:

$$g^{\mu\alpha}F_{\alpha\lambda}g^{\lambda\beta}F_{\beta\mu} = F_{\alpha\lambda}F^{\lambda\alpha} = - F_{\alpha\lambda}F^{\alpha\lambda}$$

ainsi:

$$T^{\mu}{}_{\mu} = Tr(T^{\mu}{}_{\nu}) = 0 \;;$$

Maintenant considérons le champ électrostatique comme fonction de r:

$$\boxed{A^k = 0 \quad ; \quad k = 1,2,3 \quad ; \quad A^0 = A^0(r)}$$

Le tenseur $T_{\mu\nu}$ pour ce champ est:

$$T_{oo} = F_{o\lambda}F^{\lambda}{}_{o} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{oo}$$

et:

$$F_{ok} = \frac{\partial A_o}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^0} = \frac{\partial A_o}{\partial x^k} = \frac{dA_o}{dr}\frac{xk}{r}$$

soit:

$$\boxed{F_{ko} = - A'_o \frac{xk}{r} \quad ; \quad F_{ik} = 0}$$

$$F^k{}_o = g^{k\alpha}F_{\alpha o} = g^{k\ell}F_{\ell o}$$

ainsi:

$$F_{o\lambda}F^{\lambda}{}_{o} = F_{ok}F^k_o = g^{k\ell}F_{ok}F_{\ell o} = - g^{k\ell}F_{ok}F_{o\ell}$$

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = F_{ok}F^{ok} + F_{ko}F^{ko} = 2g^{k\beta}g^{o\alpha}F_{ok}F_{\alpha\beta}$$

$$= 2g^{k\ell}g^{oo}F_{ok}F_{o\ell}$$

$$T_{oo} = - g^{k\ell}F_{ok}F_{o\ell} + \frac{1}{4}2g^{k\ell}F_{ok}F_{o\ell}g^{oo}g_{oo} \quad ;$$

or, nous avons:

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \quad , \quad \text{d'où:} \quad g^{o\lambda}g_{\lambda o} = 1$$

ou:

$$g^{oo}g_{oo} + g^{ok}g_{ko} = 1 \text{ , mais } \quad g_{ok} = 0 \quad ,$$

d'où:

$$g^{oo}g_{oo} = 1$$

et on a:

$$g^{oo} = e^{-\nu} \quad ;$$

ainsi:

$$T_{oo} = -\frac{1}{2}\, g^{k\ell}F_{ok}F_{o\ell} \quad .$$

Nous voulons: $g^{k\ell}$.

D'après ce qui précède:

$$g_{oo} = e^{\nu(r)}$$

$$g_{ok} = 0$$

$$g_{ik} = -\,\delta_{ik} + \left(1 - e^{\lambda(r)}\right)\frac{xi}{r}\,\frac{xk}{r}$$

et:

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \quad ,$$

ce qui donne, comme nous l'avons vu:

$$g^{oo} g_{oo} = 1 \quad ,$$

et:

$$g^{ik} g_{k\ell} = \delta^{i}{}_{\ell} \quad ,$$

ou:

$$\sum_k g^{ik} g_{ki} = 1 \quad .$$

Donc:

$$g^{ik} = - \delta_{ik} + \left(1 - e^{-\lambda(r)}\right) \frac{xi}{r} \frac{xk}{r} \quad ,$$

puisque:

$$\sum_k g^{ik} g_{k\ell} = \sum_k \left[ - \delta_{ik} + \left(1 - e^{-\lambda(r)}\right) \frac{xi}{r} \frac{xk}{r} \right] \left[ - \delta_{k\ell} + \left(1 - e^{-\lambda(r)}\right) \frac{xk}{r} \frac{x\ell}{r} \right]$$

$$= \delta_{i\ell} - \left(1 - e^{-\lambda(r)}\right) \frac{xi}{r} \frac{x\ell}{r} - \left(1 - e^{-\lambda(r)}\right) \frac{xi}{r} \frac{x\ell}{r}$$

$$+ \left(1 - e^{-\lambda(r)}\right) \left(1 - e^{\lambda(r)}\right) \frac{xi}{r} \frac{x\ell}{r}$$

$$= \delta_{i\ell} \quad ;$$

d'où:

$$T_{oo} = -\frac{1}{2}\left[-\delta_{ik} + \left(1 - e^{-\lambda(r)}\right)\frac{xi}{r}\frac{xk}{r}\right]F_{oi}F_{ok}$$

$$= \frac{1}{2}\left(F_{ok}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\lambda(r)}\right)\frac{xi}{r} F_{oi} \frac{xk}{r} F_{ok}$$

mais:

$$F_{ok} = A'_o \frac{xk}{r} \quad , \quad \text{d'oũ:} \quad \frac{xk}{r} F_{ok} = A'_o$$

ainsi:

$$T_{oo} = \frac{1}{2}\left(A'_o\right)^2 - \frac{1}{2}\left(A'_o\right)^2 + \frac{1}{2} e^{-\lambda(r)}\left(A'_o\right)^2$$

$$\boxed{T_{oo} = \frac{1}{2} e^{-\lambda(r)}\left(A'_o\right)^2}$$

$$\boxed{T_{ko} = F_{k\lambda}F^{\lambda}{}_{o} = F_{ko}F^{o}{}_{o} = 0}$$

$$T_{k\ell} = F_{k\lambda}F^{\lambda}{}_{\ell} + \frac{1}{4} g_{k\ell}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

$$= F_{ko}F^{o}{}_{\ell} + \frac{1}{4} g_{k\ell}\left(F_{mo}F^{mo}\right)$$

$$= F_{ko}F^{o}{}_{\ell} + \frac{1}{4} g_{k\ell}2g^{mn}g^{oo}F_{om}F_{on}$$

mais:

$$F_{ko}F^{o}{}_{\ell} = F_{ko}g^{o\alpha}F_{\alpha\ell} = F_{ko}g^{oo}F_{o\ell}$$

ainsi:

$$T_{k\ell} = g^{oo}\left(F_{ko}F_{o\ell} + \frac{1}{2}\, g_{k\ell}g^{mn}F_{om}F_{on}\right)$$

mais:

$$g^{oo} = e^{-\nu(r)}$$

$$T_{k\ell} = e^{-\nu(r)}\left\{-(A_o')^2\ \frac{xkx\ell}{r^2} + \frac{1}{2}\left[-\delta_{k\ell} + \left(1-e^{\lambda}\right)\frac{xkx\ell}{r^2}\right]\left[-\delta_{mn} + \left(1-e^{-\lambda}\right)\frac{xmxn}{r^2}\right]\right.$$

$$\left.(A_o')^2\ \frac{xmxn}{r^2}\right\}$$

$$T_{k\ell} = e^{-\nu(r)}\left(A_o'\right)^2\left\{-\frac{xkx\ell}{r^2} + \frac{1}{2}\left[-\delta_{k\ell} + \left(1-e^{\lambda}\right)\frac{xkx\ell}{r^2}\right]\left(-1+1-e^{-\lambda}\right)\right\}$$

$$= e^{-\nu(r)}\left(A_o'\right)^2\left\{-\frac{xkx\ell}{r^2} + \frac{1}{2}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2} + e^{\lambda}\ \frac{xkx\ell}{r^2}\right)e^{-\lambda}\right\}$$

$$= e^{-\nu(r)}\left(A_o'\right)^2\left\{-\frac{1}{2}\ \frac{xkx\ell}{r^2} + \frac{1}{2}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)e^{-\lambda}\right\}$$

$$\boxed{T_{k\ell} = \frac{e^{-(\nu+\lambda)}}{2}\left(A_o'\right)^2\left\{-e^{\lambda}\ \frac{xkx\ell}{r^2} + \left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right\}}$$

ainsi:

$$T_{ko} = T_{ok} = 0$$

$$T_{oo} = \frac{1}{2}\left(A'_o\right)^2 e^{-\lambda(r)}$$

$$T_{k\ell} = \frac{1}{2}(A'_o)^2\ e^{-\left[\nu(r)+\lambda(r)\right]}\left\{-e^{\lambda(r)}\frac{xkx\ell}{r^2}+\left(\delta_{k\ell}-\frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right\}$$

Les équations d'Einstein sont:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R = -\,KT_{\mu\nu} \quad ,$$

mais:

$$R - 2R = -\,KT^{\mu}{}_{\mu} \quad ,$$

ainsi:

$$R = KT^{\mu}{}_{\mu} \quad ,$$

donc:

$$R_{\mu\nu} = -\,K\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}T^{\alpha}{}_{\alpha}\right) \quad ,$$

mais dans le cas électromagnétique $T^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$, d'où:

$$R_{\mu\nu} = -\,KT_{\mu\nu} \quad .$$

Dans notre cas:

$$R_{oo} = -\,KT_{oo} \quad ; \quad R_{ko} = 0 \quad ; \quad R_{k\ell} = -KT_{k\ell}$$

## 11.2 Tenseur de Riemann

Voyons l'expression du symbole de Christoffel. Nous avons:

$$g_{oo} = e^{\nu(r)} \quad ; \quad g_{ok} = 0 \quad ;$$

$$g_{k\ell} = -\delta_{k\ell} + \left(1 - e^{\lambda(r)}\right)\frac{xk}{r}\,\frac{x\ell}{r}$$

$$g^{oo} = e^{-\nu(r)} \; ; \; g^{ko} = 0 \; , \; \text{car: } g^{k\alpha}g_{\alpha o} = g^{ko}g_{oo} + g^{k\ell}g_{\ell o} = 0$$

$$\text{et: } g_{\ell o} = 0$$

$$g^{k\ell} = -\delta_{k\ell} + \left(1 - e^{-\lambda(r)}\right)\frac{xkx\ell}{r^2}$$

Or:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\right) \quad ,$$

ainsi:

$$\Gamma^{k}_{oo} = \frac{1}{2}\, g^{k\ell}\left(\frac{\partial g_{o\ell}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial g_{o\ell}}{\partial x^{0}} - \frac{\partial g_{oo}}{\partial x^{\ell}}\right) = -\frac{1}{2}\, g^{k\ell}\,\frac{\partial g_{oo}}{\partial x^{\ell}}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\nu'(r)\frac{x\ell}{r}\left[-\delta_{k\ell} + \left(1 - e^{-\lambda}\right)\frac{xkx\ell}{r^2}\right]e^{\nu(r)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\nu'(r)\left[\frac{xk}{r} - \left(1 - e^{-\lambda}\right)\frac{xk}{r}\right]e^{\nu(r)}$$

$$\boxed{\Gamma^k_{oo} = \frac{1}{2}\,\nu'(r)\,e^{\nu-\lambda}\,\frac{xk}{r}}$$

$$\Gamma^o_{ok} = \frac{1}{2}\,g^{oo}\left(\frac{\partial g_{oo}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ko}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{ok}}{\partial x^o}\right) = \frac{1}{2}\,g^{oo}\,\frac{\partial g_{oo}}{\partial x^k}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\nu'(r)\frac{xk}{r}\,e^{\nu(r)}\right]e^{-\nu(r)} = \frac{1}{2}\,\nu'(r)\frac{xk}{r}$$

$$\boxed{\Gamma^o_{ok} = \frac{1}{2}\,\nu'(r)\frac{xk}{r}}$$

$$\Gamma^j_{k\ell} = \frac{1}{2}\,g^{jm}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial g_{m\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^m}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\delta_{jm} + \left(1 - e^{-\lambda}\right)\frac{xjxm}{r^2}\right] x$$

$$x\left\{\frac{xmxkx\ell}{r^3}\left[-\lambda' e^\lambda - \frac{2}{r}\left(1 - e^\lambda\right)\right] + \left(1 - e^\lambda\right)\frac{1}{r^2}\left(x_k\delta_{m\ell} + x_m\delta_{k\ell}\right)\right.$$

$$+ \frac{xmxkx\ell}{r^3}\left[-\lambda' e^\lambda - \frac{2}{r}\left(1 - e^\lambda\right)\right] + \left(1 - e^\lambda\right)\frac{1}{r^2}\left(x_\ell\delta_{mk} + x_m\delta_{k\ell}\right)$$

$$\left.- \frac{xmxkx\ell}{r^3}\left[-\lambda' e^\lambda - \frac{2}{r}\left(1 - e^\lambda\right)\right] - \left(1 - e^\lambda\right)\frac{1}{r^2}\left(x_\ell\delta_{mk} + x_k\delta_{m\ell}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\delta_{jm} + \left(1 - e^{-\lambda}\right)\frac{xjxm}{r^2}\right]\left\{\frac{xmxkx\ell}{r^3}\left[-\lambda' e^\lambda - \frac{2}{r}\left(1 - e^\lambda\right)\right]\right.$$

$$\left.+ \left(1 - e^\lambda\right)\frac{2}{r^2}\,x_m\delta_{k\ell}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{xjxkx\ell}{r^3}\left[\lambda' e^\lambda + \frac{2}{r}\left(1 - e^\lambda\right)\right] - \left(1 - e^\lambda\right)\frac{2}{r^2}\,x_j\delta_{k\ell}\right.$$

$$- \frac{xjxkx\ell}{r^3}\left(1 - e^{-\lambda}\right)\left[\lambda' e^{\lambda} + \frac{2}{r}\left(1 - e^{\lambda}\right)\right]$$

$$\left. + \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(1 - e^{\lambda}\right)\frac{2}{r^2}\, x_j \delta_{k\ell} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{xjxkx\ell}{r^3}\left(\lambda' e^{\lambda} + \frac{2}{r} - \frac{2}{r}\, e^{\lambda} - \lambda' e^{\lambda} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r}\, e^{\lambda} + \lambda' + \frac{2}{r}\, e^{-\lambda} - \frac{2}{r}\right)\right.$$

$$\left. + \left(1 - e^{\lambda}\right)\frac{2}{r^2}\, x_j \delta_{k\ell}\left(1 - e^{-\lambda} - 1\right)\right\}$$

$$= \frac{xj}{r}\left\{ \frac{1}{2}\, \frac{xkx\ell}{r^2}\, \lambda' + \frac{1}{r}\left(e^{-\lambda} - 1\right)\left[\frac{xkx\ell}{r^2} - \delta_{k\ell}\right]\right.$$

ainsi:

$$\boxed{\Gamma^j_{k\ell} = \frac{xj}{r}\left[\frac{1}{2}\, \frac{xkx\ell}{r^2}\, \lambda' + \frac{1 - e^{-\lambda}}{r}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right]}$$

$$\Gamma^o_{k\ell} = \frac{1}{2}\, g^{o\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda k}}{\partial x^{\ell}} + \frac{\partial g_{\lambda \ell}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^{\lambda}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, g^{oo}\left(\frac{\partial g_{ok}}{\partial x^{\ell}} + \frac{\partial g_{o\ell}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^{o}}\right) = 0$$

puisque $g_{k\ell}$ est indépendant de $x^0$.

$$\Gamma^o_{oo} = \frac{1}{2}\, g^{o\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda o}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\lambda o}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{oo}}{\partial x^0}\right) = 0 \quad .$$

Or:

$$R_{\mu\nu} = \left(\Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu}\right)_{,\mu} - \left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\eta\alpha}\Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \quad ,$$

ainsi:

$$R_{oo} = \left(\Gamma^{\alpha}_{\alpha o}\right)_{,o} - \left(\Gamma^{\alpha}_{oo}\right)_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\eta o}\Gamma^{\eta}_{\alpha o} - \Gamma^{\alpha}_{\eta\alpha}\Gamma^{\eta}_{oo}$$

$$= -\left(\Gamma^{k}_{oo}\right)_{,k} + \Gamma^{o}_{ko}\Gamma^{k}_{oo} + \Gamma^{k}_{oo}\Gamma^{o}_{ko} - \Gamma^{o}_{ko}\Gamma^{k}_{oo}$$

$$- \Gamma^{\ell}_{k\ell}\Gamma^{k}_{oo} \quad .$$

Soit:

$$\left(\Gamma^{k}_{oo}\right)_{,k} = \frac{1}{2}\nu'(r)e^{\nu-\lambda}\frac{3}{r} + \frac{1}{2}\nu'(r)e^{\nu-r}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{x^2k}{r}$$

$$+ \frac{1}{2}\nu'' e^{\nu-\lambda}\frac{x^2k}{r^2} + \frac{1}{2}\nu'(\nu'-\lambda')e^{\nu-\lambda}\frac{x^2k}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r}\nu'(r)e^{\nu-\lambda} + \frac{1}{2}\nu'' e^{\nu-\lambda} + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)e^{\nu-\lambda}$$

$$= e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{2}\nu'(\nu'-\lambda') + \frac{\nu''}{2}\right]$$

$$\Gamma^{o}_{ko}\Gamma^{k}_{oo} = \frac{1}{2}\nu'\frac{xk}{r}\frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}\frac{xk}{r} = \frac{1}{4}(\nu')^2 e^{\nu-\lambda}$$

$$\Gamma^{\ell}_{k\ell}\Gamma^{k}_{oo} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}xk\lambda' + \frac{1-e^{-\lambda}}{r}\left(x_k - x_k\right)\right]\frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}\frac{xk}{r}$$

$$= \frac{1}{4}\nu'\lambda' e^{\nu-\lambda} \quad ;$$

ainsi:

$$\boxed{R_{oo} = - e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{4}\nu'(\nu'-\lambda')\right]}$$

$$R_{ok} = \left(\Gamma^{\alpha}_{\alpha k}\right)_{,o} - \left(\Gamma^{\alpha}_{ok}\right)_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\eta o}\Gamma^{\eta}_{\alpha k} - \Gamma^{\alpha}_{\eta\alpha}\Gamma^{\eta}_{ok}$$

$$= -\left(\Gamma^{o}_{ok}\right)_{,o} - \left(\Gamma^{j}_{ok}\right)_{,j} + \Gamma^{o}_{mo}\Gamma^{m}_{ok} + \Gamma^{n}_{oo}\Gamma^{o}_{nk} - \Gamma^{o}_{mo}\Gamma^{m}_{ok}$$

$$- \Gamma^{k}_{mk}\Gamma^{m}_{ok} = 0 \quad .$$

$$R_{k\ell} = \left(\Gamma^{\alpha}_{\alpha\ell}\right)_{,k} - \left(\Gamma^{\alpha}_{k\ell}\right)_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{nk}\Gamma^{\eta}_{\alpha\ell} - \Gamma^{\alpha}_{\eta\alpha}\Gamma^{\eta}_{k\ell}$$

$$= \left(\Gamma^{o}_{o\ell}\right)_{,k} + \left(\Gamma^{m}_{m\ell}\right)_{,k} - (\Gamma^{m}_{k\ell})_{,m} + \Gamma^{o}_{ok}\Gamma^{o}_{o\ell} + \Gamma^{m}_{nk}\Gamma^{n}_{m\ell}$$

$$- \Gamma^{o}_{mo}\Gamma^{m}_{k\ell} - \Gamma^{n}_{mn}\Gamma^{m}_{k\ell} \quad .$$

Or:

$$\left(\Gamma^{o}_{o\ell}\right)_{,k} = \left(\frac{1}{2}\nu'\frac{x\ell}{r}\right)_{,k} = \frac{1}{2}\nu''\frac{xkx\ell}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{\nu'}{r}\left(\delta_{\ell k} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)$$

$$\Gamma^{m}_{m\ell} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}x_\ell\lambda' + \frac{1-e^{-\lambda}}{r}\left(x_\ell - x_\ell\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{x\ell}{r}\lambda'$$

$$\left(\Gamma^{m}_{m\ell}\right)_{,k} = \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{r}\delta_{k\ell} - \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}xk\frac{x_\ell}{r}\lambda' + \frac{1}{2}\frac{x\ell}{r}\lambda''\frac{xk}{r}$$

$$= \frac{1}{2}\lambda''\frac{xkx\ell}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{r}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)$$

$$\left(\Gamma^{m}_{k\ell}\right)_{,m} \left\{ = \frac{xm}{r}\left[\frac{1}{2}\,\frac{xkx\ell}{r^2}\,\lambda' + \frac{1-e^{-\lambda}}{r}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right]\right\}_{,m}$$

$$= \frac{2}{r}\left[\frac{1}{2}\,\frac{xkx\ell}{r^2}\,\lambda' + \frac{1-e^{-\lambda}}{r}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right] + \frac{xkx\ell}{r^2}\,\frac{\lambda'}{r}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{xkx\ell}{r^2}\,\lambda'' - \frac{xkx\ell}{r^2}\,\frac{\lambda'}{r} + \frac{\lambda'}{r}\,e^{-\lambda}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)$$

$$- \frac{1-e^{-\lambda}}{r^2}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right) - 2\,\frac{1-e^{-\lambda}}{r^2}\,\frac{xkx\ell}{r^2}$$

$$+ 2\,\frac{1-e^{-\lambda}}{r^2}\,\frac{xkx\ell}{r^2}$$

$$= \frac{xkx\ell}{r^2}\,\frac{\lambda'}{r} + \frac{2}{r}\,\frac{1-e^{-\lambda}}{r}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{xkx\ell}{r^2}\,\lambda''$$

$$+ \frac{\lambda'}{r}\,e^{-\lambda}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right) - \frac{1-e^{-\lambda}}{r^2}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\lambda''\,\frac{xkx\ell}{r^2} + \frac{\lambda'}{r}\,e^{-\lambda}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right) + \frac{\lambda'}{r}\,\frac{xkx\ell}{r^2} + \frac{1-e^{-\lambda}}{r^2}\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)$$

$$R_{k\ell} = \left[\frac{1}{2}\,\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{4}\,\nu'\lambda'\right]\frac{xkx\ell}{r^2}$$

$$+ \left[-\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}\left(\nu' - \lambda'\right)\right\}\right]\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)$$

Réunissons les résultats:

$$R_{ok} = 0 \;;\quad R_{oo} = -\, e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{r} + \frac{1}{r}\,\nu' + \frac{1}{4}\,\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]$$

$$R_{k\ell} = \left[\frac{1}{2}\,\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{4}\,\nu'\lambda'\right]\frac{xkx\ell}{r^2}$$

$$+ \left[-\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right)\right\}\right]\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)$$

$$T_{ok} = 0 \;;\quad T_{oo} = \frac{e^{-\lambda}}{2}(A_o')^2$$

$$T_{k\ell} = \frac{e^{-(\nu+\lambda)}}{2}(A_o')^2\left[-e^{\lambda}\,\frac{xkx\ell}{r^2} + \left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right]$$

## 11.3 Équations d'Einstein

Dans notre cas, les équations d'Einstein sont:

$$e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}\,\nu' + \frac{1}{4}\,\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right] = \frac{K}{2}\,e^{-\lambda}\left(A_o'\right)^2 = G\,e^{-\lambda}\left(A_o'\right)^2$$

$$\left[\frac{1}{2}\,\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{4}\,\nu'\lambda'\right]\frac{xkx\ell}{r^2} + \left[-\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}(\nu'-\lambda)\right\}\right]\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)$$

$$= -\,K\,\frac{e^{-(\nu+\lambda)}}{2}(A_o')^2\left[-e^{\lambda}\,\frac{xkx\ell}{r^2} + \left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right]$$

$$= -\,G\,e^{-(\nu+\lambda)}\,(A_o')^2\left[-e^{\lambda}\,\frac{xkx\ell}{r^2} + \left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right]$$

Nous avons vu que:

$$T^{\mu}{}_{\mu} = g^{oo} T_{oo} + g^{k\ell} T_{k\ell}$$

$$= \frac{e^{-\nu}}{2} e^{-\lambda}\left(A_o'\right)^2 + \left[-\delta_{k\ell} + \left(1 - e^{-\lambda}\right)\frac{xkx\ell}{r^2}\right]\frac{e^{-(\nu+\lambda)}}{2}\left(A_o'\right)^2 \quad x$$

$$x \left[-e^{\lambda} \frac{xkx\ell}{r^2} + \left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right]$$

$$= \frac{e^{-(\nu+\lambda)}}{2}\left(A_o'\right)^2\left[1 + e^{\lambda} - 3 + 1 - e^{\lambda} + 1 + \left(1 - e^{-\lambda}\right) - \left(1 - e^{-\lambda}\right)\right] = 0$$

Regardons maintenant pour R:

$$R = g^{oo} R_{oo} + g^{k\ell} R_{k\ell}$$

$$R = e^{-\nu}\left(-e^{\nu-\lambda}\right)\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu' - \lambda'\right)\right] +$$

$$\left[-\delta_{k\ell} + \left(1 - e^{-\lambda}\right)\frac{xkx\ell}{r^2}\right]\left\{\left(\frac{1}{2}\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{4}\nu'\lambda'\right)\frac{xkx\ell}{r^2}\right.$$

$$\left. + \left[-\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}(\nu' - \lambda')\right)\right]\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right\}$$

$$= - e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{4}(\nu')^2 - \frac{1}{4}\nu'\lambda'\right] - e^{-\lambda}\left[\frac{1}{2}\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}(\nu')^2\right.$$

$$- \frac{1}{4}\nu'\lambda'\Big] - 2\left\{-\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right)\right]\right\}$$

$$= - e^{-\lambda}\left[\nu'' + \frac{\nu'-\lambda}{r} + \frac{1}{2}\left(\nu'\right)^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + \frac{2}{r^2} + \frac{1}{r}\left(\nu'-\lambda'\right)\right] + \frac{2}{r^2}$$

$$R = \frac{2}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda}\right) - e^{-\lambda}\left[\nu'' + \frac{2}{r}\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right] .$$

Mais de $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$ il suit que $\boxed{R = 0}$ ; d'où :

$$\boxed{\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{e^{\lambda}}{r^2}}$$

ou:

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right) = \frac{e^{\lambda}}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'}{r} \quad ;$$

plaçons ceci dans la première équation d'Einstein:

$$e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}\nu' + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right] = \frac{K}{2}e^{-\lambda}\left(A'_0\right)^2 = \mathcal{G}\, e^{-\lambda}\left(A'_0\right)^2$$

soit:

$$e^{\nu-\lambda}\left(\frac{e^{\lambda}}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda'}{r}\right) = \frac{K}{2}e^{-\lambda}\left(A'_0\right)^2 = \mathcal{G}\, e^{-\lambda}\left(A'_0\right)^2$$

ou:

$$\boxed{e^{\nu}\left[e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\right] + \mathcal{G}\, e^{-\lambda}\left(A'_0\right)^2 = 0}$$

Maintenant remplaçons le terme $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right)$ dans la deuxième équation;

$$-\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right)\right] = -\frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\nu'' + \frac{\nu'-\lambda'}{r} + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]$$

ceci est obtenu à partir de l'équation:

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}(\nu'-\lambda') + \frac{1}{4}\nu'(\nu'-\lambda') + \frac{1}{r^2} = \frac{e^{\lambda}}{r^2} \quad .$$

Développons:

$$e^{-\lambda}\frac{\nu''}{2} + e^{-\lambda}\frac{\nu'-\lambda'}{2r} + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)e^{-\lambda} = \frac{1}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} - \frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right)e^{-\lambda}$$

Considérons la deuxième équation d'Einstein:

$$\left[\frac{1}{2}\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]\frac{xkx\ell}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\nu'' + \frac{\nu'-\lambda'}{r} + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)$$

$$= -\mathcal{G}\,e^{-(\nu+\lambda)}(A_0')^2\left[-e^{\lambda}\frac{xkx\ell}{r^2} + \left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right] \quad .$$

Si $k \neq \ell$, on a:

$$\frac{1}{2}\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\nu'' + \frac{\nu'-\lambda'}{r} + \frac{1}{2}\nu'\left(\lambda'-\lambda'\right)\right]$$

$$= \mathcal{G}\,e^{-(\nu+\lambda)}\left(A_0'\right)\left(e^{\lambda} + 1\right) \quad ;$$

si $k = \ell$, et en faisant la somme:

$$\frac{1}{2}\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu' - \lambda\right) - e^{-\lambda}\left[\nu'' + \frac{\nu'-\lambda'}{r} + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]$$

$$= \mathcal{G}\, e^{-(\nu+\lambda)}\left(A_0'\right)^2\left(-e^{\lambda}+2\right) \quad ;$$

faisant la soustraction membre à membre de ces deux expressions, on obtient:

$$\boxed{-e^{-\lambda}\left[\nu'' + \frac{\nu'-\lambda'}{r} + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right] = -2\,\mathcal{G} e^{-(\nu+\lambda)}\left(A_0'\right)^2}$$

ou:

$$e^{-\lambda}\left[\nu'' + \frac{\nu'-\lambda'}{r} + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right] = 2\,\mathcal{G}\, e^{-(\nu+\lambda)}\left(A_0'\right)^2 \quad ;$$

de:

$$\frac{\nu''}{r} + \frac{1}{r}\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{e^{\lambda}}{r^2} \quad ,$$

on obtient:

$$\nu'' + \frac{\nu'-\lambda'}{r} + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right) = \frac{2\left(e^{\lambda}-1\right)}{r^2} - \frac{\nu'-\lambda'}{r} \quad ,$$

d'où:

$$e^{-\lambda}\left[2\,\frac{(e^{\lambda}-1)}{r^2} - \frac{\nu'-\lambda'}{r}\right] = K e^{-(\nu+\lambda)}\left(A_0'\right)^2$$

ou:

$$\boxed{\frac{\lambda'-\nu'}{2r} + \frac{e^{\lambda}-1}{r^2} = \frac{K}{2}\, e^{-\nu}(A_o')^2}$$

Essayons une autre voie:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}R = -\, KT_{\mu\nu} \quad ,$$

$$R_{oo} - \frac{1}{2}\, g_{oo}R = -\, KT_{oo}$$

donne:

$$-e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{r}\,\nu' + \frac{1}{4}\,\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right] - \frac{1}{2}\, e^{\nu}\left\{\frac{2}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda}\right) - e^{-\lambda}\left[\nu'' + \frac{2}{r}\left(\nu'-\lambda'\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\,\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]\right\} = -\frac{K}{2}\, e^{-\lambda}\left(A_o'\right)^2$$

ou:

$$-e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{4}\,\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right] + \frac{1}{2}\, e^{\nu-\lambda}\left[\nu'' + \frac{2}{r}\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\, e^{\nu}\left[\frac{2}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda}\right)\right] = -\frac{K}{2}\, e^{\lambda}\left(A_o'\right)^2$$

ou:

$$e^{\nu-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{e^{\nu}}{r^2}\left(1 - e^{-\lambda}\right) = -\frac{K}{2}\, e^{-\lambda}\left(A_o'\right)^2$$

soit:

$$\boxed{e^{\nu}\left[e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\right] = -\frac{K}{2}\, e^{-\lambda}\left(A_o'\right)^2}$$

$$R_{k\ell} - \frac{1}{2} g_{k\ell} R = -K T_{k\ell}$$

donne:

$$\left[\frac{1}{2}\nu'' - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]\frac{xkx\ell}{r^2} + \left[-\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right)\right\}\right]\left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left[-\delta_{k\ell} + \left(1-e^{\lambda}\right)\frac{xkx\ell}{r^2}\right]\left[\frac{2}{r^2}\left(1-e^{-\lambda}\right) - e^{-\lambda}\left[\nu'' + \frac{2}{r}\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]\right]$$

$$= -\frac{K}{2}\, e^{-(\nu+\lambda)}\left(A_o'\right)^2\left[-e^{\lambda}\,\frac{xkx\ell}{r^2} + \left(\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}\right)\right] \quad ;$$

regardons maintenant le coefficient de $\frac{xkx\ell}{r^2}$ seulement:

$$\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right) - \frac{1}{2}\left[\nu'' + \frac{2}{r}\nu' + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right] + \frac{1}{2}\, e^{\lambda}\,\frac{2}{r^2}\left(1-e^{-\lambda}\right)$$

$$= -\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1-e^{\lambda}}{r^2}\right) \quad ;$$

le coefficient de $\delta_{k\ell} - \frac{xkx\ell}{r^2}$ :

$$-\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{r^2}\left(1-e^{-\lambda}\right) - e^{-\lambda}\left[\nu'' + \frac{2}{r}\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]\right]$$

$$= e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right) - \frac{1}{r^2} - \frac{\nu''}{2} - \frac{1}{r}\left(\nu'-\lambda'\right) - \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]$$

$$= -\frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\nu'' + \frac{1}{r}\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]$$

d'où:

$$-\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1-e^{\lambda}}{r^2}\right)\frac{x_k x_\ell}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\nu'' + \frac{1}{r}(\nu'-\lambda') + \frac{1}{2}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]\left(\delta_{k\ell} - \frac{x_k x_\ell}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{K}{2}\, e^{-(\nu+\lambda)}(A_0')^2\left[-e^{\lambda}\frac{x_k x_\ell}{r^2} + \left(\delta_{k\ell} - \frac{x_k x_\ell}{r^2}\right)\right]$$

$$= -\mathcal{G}\, e^{-(\nu+\lambda)}(A_0')^2\left[-e^{\lambda}\frac{x_k x_\ell}{r^2} + \left(\delta_{k\ell} - \frac{x_k x_\ell}{r^2}\right)\right]$$

soit:

$$\boxed{\begin{gathered} -\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1-e^{\lambda}}{r^2}\right) - \mathcal{G}(A_0')^2\, e^{-\nu} = 0 \\ -\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right) + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right] + \mathcal{G}\, e^{-\nu}\left(A_0'\right)^2 = 0 \\ \text{on a aussi:} \\ e^{\nu}\left[e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\right] + \mathcal{G}\, e^{-\lambda} A_0'^{\,2} = 0 \end{gathered}}$$

## 11.3 Expressions du champ électrostatique et du champ de gravité

À ces équations il faut ajouter:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad ,$$

ou:

$$F^{o\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad ;$$

or puisque:

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\eta} = F^{\alpha\beta}{}_{,\eta} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\eta}F^{\lambda\beta} + \Gamma^{\beta}_{\lambda\eta}F^{\alpha\lambda} \quad ,$$

donc:

$$F^{ok}{}_{,k} + \Gamma^{o}_{\lambda\beta}F^{\lambda\beta} + \Gamma^{\eta}_{\lambda\eta}F^{o\lambda} = 0 \quad ,$$

ou:

$$F^{ok}{}_{,k} + \Gamma^{o}_{ok}F^{ok} + \Gamma^{o}_{ko}F^{ko} + \Gamma^{o}_{ik}F^{ik} + \Gamma^{o}_{ki}F^{ki} + \Gamma^{\eta}_{\lambda\eta}F^{o\lambda} = 0 \quad ,$$

mais:

$$F_{ik} = 0 \quad ,$$

ainsi, puisque:

$$\Gamma^{o}_{ok} = \Gamma^{o}_{ko} \quad ; \quad F^{ko} = - F^{ok}$$

on obtient:

$$F^{ok}{}_{,k} + \Gamma^{\eta}_{k\eta}\, F^{ok} = 0 \quad .$$

Or:

$$F_{ok} = A_o'(r)\frac{xk}{r} \quad ; \quad F^{ok} = g^{o\alpha}g^{k\beta}F_{\alpha\beta} \quad ,$$

ainsi:

$$F^{ok} = g^{oo}g^{k\ell}F_{o\ell} = e^{-\nu}\left[-\delta_{k\ell} + \left(1 - e^{-\lambda}\right)\frac{xkx\ell}{r^2}\right]A_o' \frac{x\ell}{r}$$

$$= e^{-\nu}\left(-\frac{xk}{r} + \frac{xk}{r} - e^{-\lambda}\frac{xk}{r}\right)A',$$

$$= - e^{-(\nu+\lambda)}A_o' \frac{xk}{r} \quad ;$$

et:

$$\Gamma^{\eta}_{k\eta} = \Gamma^{o}_{ko} + \Gamma^{\ell}_{k\ell} = \frac{1}{2}\nu'\frac{xk}{r} + \frac{1}{2}\frac{xk}{r}\lambda' = \frac{1}{2}\left(\nu'+\lambda\right)\frac{xk}{r}$$

ainsi:

$$F^{ok}{}_{,k} + \Gamma^{\eta}_{k\eta}F^{ok} = 0 \quad ,$$

donne:

$$\left[-e^{-(\nu+\lambda)}A_o' \frac{xk}{r}\right]_{,k} + \frac{1}{2}(\nu'+\lambda')\frac{xk}{r}\left[-e^{-(\nu+\lambda)}A_o' \frac{xk}{r}\right] = 0$$

ou:

$$A_o'' + \frac{2}{r}A_o' - \frac{1}{2}\left(\nu'+\lambda'\right)A_o' = 0$$

Une intégrale première de cette équation vient de l'observation que:

$$\frac{1}{r^2 e^{-\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}} \frac{d}{dr}\left(r^2 e^{-\frac{1}{2}(\nu+\lambda)} A_o'\right) = 0 \quad ,$$

d'où:

$$\boxed{r^2 e^{-\frac{1}{2}(\nu+\lambda)} A_o' = C^{\underline{te}} = -\varepsilon}$$

ou:

$$A_o' = -\frac{\varepsilon}{r^2} e^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}$$

soit:

$$(A_o')^2 = \frac{\varepsilon^2}{r^4} e^{\nu+\lambda} \quad ;$$

portons cette valeur dans les équations du champ, on obtient:

$$e^{\nu}\left[e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\right] + \mathcal{G}\, e^{-\lambda} \frac{\varepsilon^2}{r^4} e^{\nu+\lambda} = 0 \quad ,$$

ou:

$$\boxed{e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} + \mathcal{G} \frac{\varepsilon^2}{r^4} = 0} \qquad \text{(A)}$$

et:

$$-\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1-e^{\lambda}}{r^2}\right)-\mathcal{G}\,\frac{\varepsilon^2}{r^4}\,e^{\nu+\lambda}\,e^{-\nu}=0$$

ou:

$$\boxed{-\,e^{\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}+\mathcal{G}\,\frac{\varepsilon^2}{r^4}=0} \qquad \text{(B)}$$

et:

$$-\left[\frac{\nu''}{2}+\frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right)+\frac{1}{4}\,\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]+\mathcal{G}\,e^{-\nu}\,\frac{\varepsilon^2}{r^4}\,e^{\nu+\lambda}=0$$

ou:

$$\boxed{-\,e^{-\lambda}\left[\frac{1}{2}\,\nu''+\frac{1}{2r}\left(\nu'-\lambda'\right)+\frac{1}{4}\,\nu'\left(\nu'-\lambda'\right)\right]+\mathcal{G}\,\frac{\varepsilon^2}{r^4}=0} \qquad \text{(C)}$$

De (A) et (B) on obtient:

$$\boxed{\nu'+\lambda'=0}$$

Appelons:

$$\chi=e^{-\lambda}$$

on:

$$\lambda=-\,\ell n\,\chi\;;$$

(A) donne:

$$\frac{d\chi}{dr}+\frac{\chi-1}{r}+\mathcal{G}\,\frac{\varepsilon^2}{r^3}=0\quad,$$

soit:

$$\chi = 1 - 2\frac{\mathcal{G}\ell}{r} + \mathcal{G}\frac{\varepsilon^2}{r^2}$$

De: $$\nu' + \lambda' = 0 \quad ,$$

on obtient: $$\nu + \lambda = \ell n\, k \quad ;$$

prenons k = 1, on obteint:

$$\nu = - \lambda \quad ,$$

d'où:

$$\boxed{\begin{aligned} &\chi = e^{\nu} = g_{oo} = 1 - 2\frac{\mathcal{G}\ell}{r} + \frac{\mathcal{G}\varepsilon^2}{r^2} \\ &g_{ok} = 0 \\ &g_{k\ell} = -\delta_{k\ell} + \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{2\mathcal{G}\ell}{r} + \frac{\mathcal{G}\varepsilon^2}{r^2}}\right]\frac{xkx\ell}{r^2} \end{aligned}}$$

En général on a:

$$\nu + \lambda = \ell n\, k \quad , -\lambda = \nu - \ell n\, k$$

$$g_{oo} = e^{\nu} = e^{-\lambda + \ell n k} = k e^{-\lambda} = k\chi = k\left(1 - \frac{2\mathcal{G}\ell}{r} + \frac{\mathcal{G}\varepsilon^2}{r^2}\right)$$

$$g_{k\ell} = -\delta_{k\ell} + \left(1 - e^{\lambda}\right)\frac{xkx\ell}{r^2} = -\delta_{k\ell} + \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{2\mathcal{G}\ell}{r} + \frac{\mathcal{G}\varepsilon^2}{r^2}}\right)\frac{xkx\ell}{r^2} .$$

ceci montre que k peut être inclus dans $dt^2$ ou être posé égal à 1.

Finalement, de:

$$A'_0 = -\frac{\varepsilon}{r^2}\, e^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}$$

et:

$$\nu + \lambda = \ell n\, k$$

on otient:

$$A'_0 = -\frac{\varepsilon}{r^2}\, k^{1/2}$$

donc:

$$\boxed{A_0 = \frac{\varepsilon}{r}\, k^{1/2}}$$

et nous voyons que l'unité de temps nous permet defaire $k=1$. Ainsi $A_0$ *est le champ d'une charge ponctuelle, identique à un champ de Coulomb.* Seulement le champ gravitationnel est changé par la charge comme on le voit dans $g_{00}$ et $g_{ik}$.

Dans le livre de Bergmann il y a une erreur dans la formule (13.30a) page 206, car $A'_0 = -\frac{\varepsilon}{r^2}\, e^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}$.

Le résultat de Bergmann serait correct si nous avions:

$$A'_0 = -\frac{\varepsilon}{r^2}\, e^{-\frac{1}{2}(\nu-\lambda)} \text{ ce qui donne } A'_0 = -\frac{\varepsilon}{r^2}\,\frac{1}{1-\frac{2\mathcal{G}\ell}{r}+\frac{\mathcal{G}\varepsilon^2}{r^2}}$$

d'où:

$$A_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g\varepsilon^2 - \mathcal{G}^2\ell^2}} \operatorname{arc\,cotg} \frac{r - \mathcal{G}\ell}{\sqrt{g\varepsilon^2 - \mathcal{G}^2\ell^2}}$$

Ceci est intuitif car le champ gravitationnel étant électriquement neutre, ne change pas $A_0$, mais un champ électrostatique a de l'énergie et ainsi il change le champ gravitationnel d'un point pesant.

BIBLIOGRAPHIE

R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, Introduction to General Relativity, Mc Graw-Hill, New York (1965)

P.G. Bergmann, Introduction to the theory of relativity, Prentice-Hall, 1946.

A. Einstein, The Meaning of Relativity (5th ed.) Princeton Univ. Press, 1955.

V. Fock, The Theory of Space, Time and Gravitation, Pergamon Press, New York (1959).

C. Möller, Theory of Relativity, Clarendon Press, Oxford (1956).

J. Weber, General Relativity and Gravitational Waves, Interscience Publ., New York (1961).