

CBPF-MO-003/84

INTRODUÇÃO AO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

por

Eduardo de Campos Valadares^{*+1}

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF/CNPq
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

*Bolsista do CNPq

²Endereço Atual: Departamento de Física
Universidade Federal de Minas Gerais
Cidade Universitária . Pampulha
30000 - Belo Horizonte, MG - Brasil

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma versão didática do artigo de Wilson, no qual pela primeira vez o Grupo de Renormalização foi associado a Fenômenos Críticos. Considerações gerais sobre desenvolvimentos posteriores são também delineadas.

1 INTRODUÇÃO

A importância do Grupo de Renormalização nos diversos contextos da física, especialmente no estudo de fenômenos críticos, é hoje um fato universalmente reconhecido.

Recentemente, durante um curso sobre fenômenos críticos, do qual o autor participou, surgiram discussões bastante elucidativas sobre os aspectos básicos do Grupo de Renormalização. Em especial, os trabalhos "clássicos" de Kadanoff e Wilson constituíram um excelente material de discussão. Em vista disto, o autor julgou que um trabalho reunindo estas discussões poderia ser útil àqueles que desejassem dispor de uma abordagem intuitiva do Grupo de Renormalização, nos seus aspectos mais elementares.

O presente trabalho se dirige, entre outros, a estudantes de física ou áreas afins que possuam alguma familiaridade com os conceitos da Mecânica Estatística (função de partição), e noções do que seja spin e sua importância para o Magnetismo (modelo de Ising). A linha de apresentação adotada segue de perto o trabalho original de Wilson. Contém, todavia, discussões elucidativas e atualizações do mesmo, em alguns poucos pontos. Um dos aspectos mais importantes do trabalho de Wilson, do ponto de vista pedagógico, a analogia do problema de transição de fase de segunda ordem com um problema de Mecânica Clássica, é particularmente enfatizada. Tendo em mente esta analogia, todas as idéias fundamentais do Grupo de Renormalização podem ser traduzidas numa linguagem simples e sugestiva.

No âmbito dos fenômenos críticos, um dos objetivos principais do Grupo de Renormalização é calcular expoentes críticos e determinar diagramas de fase. A nomenclatura para os expoentes críticos associados à transições de segunda ordem é apresentada na tabela abaixo.

GRANDEZA(S) FÍSICA(S)	SÍMBOLO	DEPENDÊNCIA APROXIMADA
CALOR ESPECÍFICO	C	$\epsilon^{-\alpha}$
SUSCEPTIBILIDADE (ELÉTRICA, MAGNÉTICA)	χ_T	$\epsilon^{-\gamma}$
COMPRESSIBILIDADE ISOTÉRMICA	κ_T	
PARÂMETRO DE ORDEM: MAGNETIZAÇÃO, POLARIZAÇÃO, DIFERENÇA DE DENSIDADES (e.g. fluido binário)	M P $n_A - n_B$	ϵ^β
COMPRIMENTO DE CORRELAÇÃO	ξ	$\epsilon^{-\nu}$
MAGNETIZAÇÃO x CAMPO MAGNÉTICO POLARIZAÇÃO x CAMPO ELÉTRICO PRESSÃO x VOLUME (EM $T = T_C$)	M P $p - p_c$	$H^{1/\delta}$ $E^{1/\delta}$ $(V - V_c)^{1/\delta}$
FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO CAMPO NULO, $T = T_C$ $R \rightarrow \infty$	$\Gamma(R)$	$\frac{1}{R^{d-2+\eta}}$

TABELA 1: Expressões assintóticas referentes a diversos sistemas físicos (Magnéticos, Elétricos, Fluidos) para $T > T_C$, exceto quando indicado $T = T_C$; (T_C , p_c , V_c) se referem respectivamente à temperatura, pressão e volume no ponto crítico.

$$\epsilon = \frac{T - T_C}{T} > 0, R \equiv \text{distância entre dois pontos do sistema.}$$

α , γ , β , ν , δ e η são os expoentes críticos; d é dimensionalidade do sistema. O comprimento de correlação ξ , constitui aproximadamente o comprimento mínimo do sistema a partir do qual se manifestam as propriedades macroscópicas. A função de correlação Γ , fornece uma medida de quão efetivas são as interações entre as diversas partes do sistema.

Diagramas de fase, por outro lado, exibem as diversas fases em que um dado sistema macroscópico pode se encontrar, variando-se os parâmetros termodinâmicos. Na figura abaixo é apresentado um diagrama bem conhecido. Note que as linhas separando as diversas fases se referem exclusivamente a transições de primeira ordem (nas quais a descontinuidade se manifesta na primeira derivada da energia livre). Apenas o ponto correspondente a $T_c(p_c, V_c)$ constitui uma transição de segunda ordem (descontinuidade na segunda derivada da energia livre), a única a ser discutida a seguir.

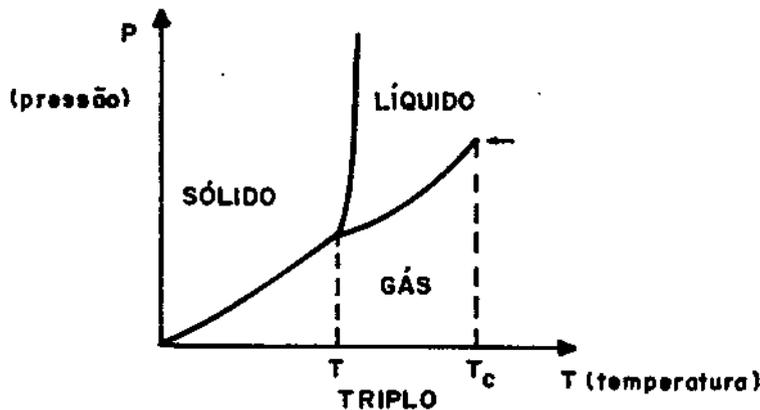


FIG. 1: Diagrama de fases ilustrativo. Apenas o ponto assinalado com uma seta constitui uma transição de segunda ordem.

Neste trabalho, a apresentação das idéias básicas do Grupo de Renormalização está organizada do seguinte modo. Na próxima seção (2), iniciamos com a função de partição para o modelo de Ising e introduzimos o problema da singularidade da mesma no ponto crítico.

Na seção 3, é apresentada a proposta do Grupo de Renormalização para tratar este problema. Uma analogia mecânica permite visualizar o caráter da singularidade da função de partição no ponto crítico. A seguir, na seção 4, são introduzidas as idéias básicas do modelo de blocos de spin sugerido por Kadanoff, onde se encontra subjacente a noção de autosimilaridade frente a uma mudança de escala. São apresentadas fórmulas de recorrência que permitem determinar a energia livre e o comprimento de correlação

para o sistema em questão. As equações do Grupo de Renormalização para este modelo são discutidas na seção 5 e a análise geral das mesmas se encontra na seção 6. O esquema de linearização para estas equações é discutido na seção 7 e as consequências desta aproximação, as leis de escala, são expostas na seção 8. Uma generalização das equações do Grupo de Renormalização é sugerida na seção 9, sendo introduzida de modo intuitivo a noção de variável irrelevante, com base na analogia mecânica estendida para um sistema bidimensional (dois acoplamentos, campo nulo). São determinadas leis de escala via o esquema de linearização e é visto que estas leis são semelhantes ao caso unidimensional (um único acoplamento, campo nulo), indicando que uma variável irrelevante não altera os resultados dos expoentes críticos. Finalmente, na seção 10, são discutidos aspectos gerais do material exposto bem como delineados os procedimentos usuais empregados para se determinar se uma variável é ou não relevante. Um esquema geral do Grupo de Renormalização para um Hamiltoniano que inclui um número arbitrário de acoplamentos encerra nossa exposição.

2 FUNÇÃO DE PARTIÇÃO DO MODELO DE ISING: SINGULARIDADE NO PONTO CRÍTICO

Consideremos o modelo de Ising. A função de partição para este problema é:

$$Z(K, h) = \sum_{\{s\}} \exp(K \sum_{\vec{n}} \sum_{\vec{i}} s_{\vec{n}} \cdot s_{\vec{n}+\vec{i}} + h \sum_{\vec{n}} s_{\vec{n}}) \quad (1)$$

onde $s_{\vec{n}} = \pm 1$ e $K = -\frac{J}{k_B T} > 0$, sendo J a constante de acoplamento. A primeira soma se refere às configurações de spin e as outras cobrem o sítio n e os primeiros vizinhos. h é um campo magnético adimensional.

A função de partição constitui portanto uma soma de exponenciais, todas elas funções analíticas de K e h . Com isto é de se supor que a própria função de partição seja também analítica em K e h . Isto não é verdade contudo no ponto crítico, definido por $K=K_C$ e $h=0$. A razão disso se deve à ocorrência de uma singularidade quando se toma o limite termodinâmico,

no cálculo da densidade de energia livre, i.e.

$$F(K,h) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln Z(K,h)$$

Ou seja, ao se somar um número infinito de funções analíticas, pode-se gerar uma função que apresenta uma singularidade, definida no ponto crítico.

A questão então consiste em se obter uma idéia do comportamento crítico, sem que seja preciso recorrer diretamente à soma em (1). Para evitar um ataque frontal, é conveniente transformar o problema original num outro, mais tratável, onde a singularidade ocorra naturalmente quando o ponto crítico é atingido, ou seja, em $K=K_c$ e $h=0$. Esta é a tarefa que o Grupo de Renormalização se propõe a realizar.

3 - UMA IDEIA INTUITIVA DA SINGULARIDADE DA FUNÇÃO DE PARTIÇÃO

Em linhas gerais, a proposta do Grupo de Renormalização consiste em gerar uma (ou mais) equações diferenciais não lineares (acopladas ou não), cuja solução permite deduzir o comportamento crítico. À estas equações associaremos o nome de "Grupo de Renormalização". Vejamos agora um exemplo ilustrativo que permite visualizar a singularidade mencionada acima, gerada a partir de uma equação diferencial.

Consideremos uma "bola" se movendo num terreno acidentado, cuja topografia é apresentada na fig. 2.

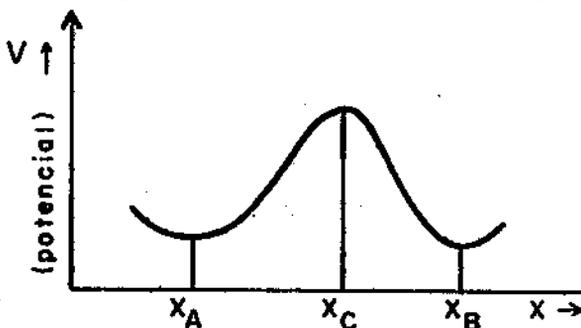


FIG.2: Perfil do terreno onde a bola se move. Vide o texto.

A equação:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-dV(x)}{dx} \quad (V \text{ é o potencial atuando na bola}) \quad (2)$$

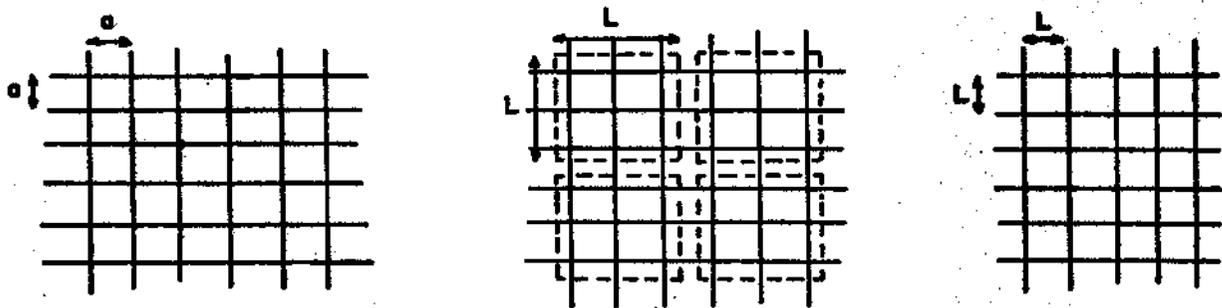
não é propriamente uma equação de movimento para a bola (a menos, é claro, que a suponhamos aristotélica!, ou seja, a presença de atrito torna sua existência plausível).

A singularidade do ponto crítico pode ser vista através desta analogia de modo bastante pictórico. Seja $x(t, x_0)$ a posição da bola no instante t , sendo x_0 sua posição inicial. Se a bola se encontra inicialmente à direita de x_c ela vai rolar colina abaixo até atingir x_B , onde para. Se, por outro lado, ela parte de algum ponto à esquerda de x_c , seu destino será inevitavelmente x_A . Assim, se a bola se encontra exatamente em x_c , movendo-a um pouquinho para a direita ou para a esquerda, sua posição final será distinta nos dois casos, para um intervalo infinito de tempo. Em outras palavras, $x(\infty, x_0)$ é uma função singular de x_0 , sem que $V(x)$ apresente qualquer singularidade. Mais adiante voltaremos à esta analogia, indicando sua correspondência direta com o problema de transição de 2a. ordem.

4 BLOCOS DE SPIN DE KADANOFF: IDÉIAS BÁSICAS

A idéia básica de blocos de spin resume-se nos seguintes pontos. Uma rede cúbica infinita é dividida em blocos contendo L^3 sítios. Interpretando Kadanoff, todos os spins de um dado bloco estão apontados na mesma direção, uma conjectura que é aproximadamente correta apenas a baixas temperaturas, quando as flutuações térmicas se tornam pequenas. Além disso, a interação entre blocos envolve somente blocos primeiros vizinhos e o campo magnético se acopla com cada bloco individualmente. Toda vez que desejarmos determinar fronteiras ou expoentes críticos suporemos que o campo magnético externo seja nulo. Todavia, continuaremos escrevendo a letra h nas expressões em que o campo aparece, como a energia livre, pois para obtermos, e.g., a magnetização espontânea devemos primeiro derivar a energia livre em rela

ção a h e somente depois impor $h=0$. Assim, o problema original, definido pelas constantes K e h , se transforma num outro, cujo Hamiltoniano é o mesmo que o anterior, exceto que agora tem-se K_L e h_L em vez de K e h . Estas operações estão esquematizadas na figura 2 abaixo.



- i) Rede de spins original ii) configuração de blocos; aqui $L = 3a$ iii) nova rede; a cada vértice corresponde um bloco de ii)

FIG. 2: Sequência das operações descritas no texto para uma rede bidimensional quadrada.

Quando a nova configuração é semelhante à configuração inicial, ocorre o que se denomina autosimilaridade. Esta propriedade é estritamente válida apenas no ponto crítico. O comprimento de correlação, que representa a amplitude das flutuações relevantes, se torna então infinito e neste caso blocos de dimensões arbitrárias podem ser construídos sem que as flutuações dentro dos mesmos afetem significativamente o grau de "solidariedade" dos spins neles contidos. Fora do ponto crítico, o comprimento de correlação deixa de ser infinito, permanecendo todavia ainda grande nas suas vizinhanças, de modo que as flutuações dentro dos blocos de dimensão $L \ll \xi$ não são importantes macroscopicamente. Este é o sentido da aproximação de Kadanoff. Por outro lado, à medida que L se aproxima de ξ as flutuações presentes nos blocos passam a ser relevantes, comprometendo a hipótese de Kadanoff.

Seja agora $F(K,h)$ a energia livre por sítio para o Hamiltoniano de Ising original. A energia livre por bloco para o Hamiltoniano de blocos é simplesmente $F(K_L, h_L)$ (os dois sistemas são idênticos, a menos das constantes de acoplamento!). Se a energia livre total é a mesma nos dois casos, então:

$$F(K,L) = \frac{F(K_L, h_L)}{L^3} \quad (3)$$

Já que $F(K_L, h_L)$, a energia livre referente a um bloco de spins, inclui L^3 sítios originais.

Seja $\xi(K,h)$ o comprimento de correlação original (distância até onde a interação entre spins se faz notar), nas unidades de parâmetros de rede e $\xi(K_L, h_L)$ o comprimento de correlação referente ao Hamiltoniano de blocos expresso em unidades de espaçamento de blocos, L . Para que haja concordância entre ambos, a relação

$$\xi(K,h) = L \xi(K_L, h_L) \quad (4)$$

deve ser satisfeita.

As relações (3) e (4) refletem claramente o efeito de mudança de escala, quando se passa do Hamiltoniano original ao Hamiltoniano de blocos. Note que neste último Hamiltoniano o comprimento L dos blocos entra indiretamente através das constantes de acoplamento renormalizadas K_L e h_L , que constituem aqui os parâmetros essenciais. É importante observar que Kadanoff restringiu L a valores muito menores que o comprimento de correlação i.e. $L \ll \xi(K,h)$, além de tomá-lo como fixo. Esta hipótese corresponde a considerar uma região muito próxima do ponto crítico, como observado anteriormente.

As equações (5) e (6) constituem as equações do Grupo de Renormalização su geridas pelo modelo de blocos.

O ponto básico é que as funções u e v devem ser funções analí ticas de K_L e h_L^2 , do contrário não teriam nenhum interesse físico (i.e. to do o esquema do Grupo de Renormalização não funcionaria). Em particular isto deve ser válido no ponto crítico. Seguindo a analogia da bola na colina, $V(x)$ é analítica, a despeito de $x(\infty, x_0)$ ser descontínua em x_0 .

6 ANÁLISE DAS EQUAÇÕES DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO PARA O MODELO DE BLOCOS DE SPIN

A solução de um conjunto de equações diferenciais não- linea reas (acopladas ou não) constitui, em geral, uma tarefa nada trivial, este jam elas presentes no contexto da Mecânica Clássica (vide analogia) ou na descrição de fenômenos críticos. Todavia, aspectos relevantes podem ser ob tidos mediante considerações como linearização das equações originais, jun tamente com considerações adicionais, relativas à física do problema em pau ta.

No caso das equações do Grupo de Renormalização este procedi mento é bastante útil. Uma vez determinadas soluções aproximadas para $\xi(K_L, h_L)$ e $F(K_L, h_L)$ é imediato reconstruir $\xi(K, L)$ e $F(K, L)$ através das e quações (4) e (3) respectivamente. A linearização em questão é realizada em torno do ponto crítico. Uma vez que no ponto crítico o comprimento de correlação se torna infinito ($\xi(K_c, 0) \rightarrow \infty$), segue-se que $\xi(K_L, h_L)$ deve tam bém ser infinito para todos os valores de L , o que impõe que K_L e h_L sejam idênticos aos seus valores críticos (cf. relação (4)). Assim, $K_L = K_c$ e $h_L = 0$ é uma solução das equações do Grupo de Renormalização. Linearizar as equações do Grupo de Renormalização em torno deste ponto é completamente e quivalente a se aproximar o potencial mecânico apresentado anteriormente por uma parábola em torno de x_c (vide figura 1) - ou seja, por um potencial tipo harmônico. A solução acima implica que

$$u(K_c, 0) = 0$$

De fato:

$$\frac{dK_L}{dL} = \frac{1}{L} u(K_L, h_L^2); \text{ fazendo } K_L = K_C \text{ (cte)}$$

$$\text{e } h_L = 0 \Rightarrow u(K_C, 0) = 0$$

O ponto crítico representa, portanto, um ponto de equilíbrio para a bola na analogia mecânica; neste ponto a derivada do potencial $V(x)$ é nula (x_c na fig. 2).

Quando se considera pontos vizinhos do ponto crítico ($T > T_c$), o comprimento de correlação deixa de ser infinito, e se torna gradativamente menor à medida que nos afastamos dele. Uma recorrência à analogia mecânica é bastante útil para elucidar o que se passa.

Ao compararmos a equação (5) com a equação (2), notamos a correspondência imediata:

$$K_L \leftrightarrow x \text{ (posição)}$$

$$L \leftrightarrow t \text{ (tempo)}$$

O comprimento de correlação sendo um comprimento, representa na analogia mecânica o papel de um intervalo de tempo. Mais adiante será útil determinar o valor de L correspondente ao comprimento de correlação $\xi(K_C/2, 0)$. Neste caso, L representa, na analogia mecânica, o tempo necessário para que a bola, partindo das vizinhanças do ponto crítico ($T > T_c$), realize metade do percurso até a origem (x_A).

O fato do comprimento de correlação se tornar infinito no ponto crítico é inteiramente equivalente ao tempo infinito que a bola leva para atingir x_A (ou o que dá no mesmo, um ponto intermediário deste intervalo), partindo do ponto crítico (x_c).

Se a bola se encontra próximo do máximo, x_c , leia-se ponto crítico, a maior parte do tempo associado a $\xi(K_c/2, 0)$ provém do tempo gasto nas vizinhanças imediatas de x_c (ponto crítico). Isto torna plausível por que a linearização em torno do ponto crítico fornece resultados qualitativamente corretos.

7 - LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

Suponhamos agora que K e h se encontrem próximos de seus valores críticos, K_c e 0 (Analogia Mecânica: a bola se encontra próxima a x_c). Para valores de $L \ll \xi(K, h)$ (no caso mecânico: curto intervalo de tempo), o comprimento de correlação efetivo $\xi(K_L, h_L)$ será grande (ou seja, para a bola ainda transcorrerá um longo tempo antes que tenha se afastado consideravelmente da posição inicial). Assim, K_L e h_L se encontram efetivamente próximos dos valores críticos. Isto permite linearizar as equações diferenciais para K_L e h_L em torno do ponto crítico:

$$\frac{dK_L}{dL} \approx \frac{1}{L} (K_L - K_c) y \tag{7}$$

$$\frac{dh_L}{dL} \approx \frac{1}{L} h_L x \tag{8}$$

onde x e y representam:

$$y = \frac{\partial u}{\partial K}(K_c, 0) \quad \text{e} \quad x = v(K_c, 0)$$

Ao realizar as operações acima, fizemos uso das propriedades de analiticidade das funções u e v . Este procedimento é análogo ao de se expandir o potencial $V(x)$ em torno de x_c .

As soluções das equações (7) e (8) são:

$$K_L = K_C - \epsilon L^y \quad (9)$$

$$e h_L = h L^x \quad (10)$$

onde

$$\epsilon = K_C - K \sim (T - T_C) \left(\text{lembre que } K \sim -\frac{1}{T} \right)$$

Estas soluções coincidem com as expressões fornecidas pelo modelo original de blocos de Kadanoff, indicando claramente que este modelo conduz a resultados consistentes ($L \ll \xi$).

8 LEIS DE ESCALA

As equações (7) e (8) são estritamente válidas próximo do ponto crítico. Contudo, como discutido na seção (5), os resultados obtidos a partir delas permanecem válidos para pontos afastados do ponto crítico. Suponhamos então que (9) e (10) possam ser usados quando $K_L = K_C/2$. O valor de L correspondente é portanto:

$$\frac{K_C}{2} = \epsilon L^y \Rightarrow L = \left(\frac{K_C}{2\epsilon} \right)^{1/y}, \text{ que é uma lei de escala para } L \text{ em termos de } \epsilon.$$

Para este valor de L , h_L é:

$$h_L = h(K_C/2\epsilon)^{x/y}$$

Assim, de (3) e (4) segue-se:

$$F(K, h) = (K_c/2\varepsilon)^{-3/y} F(K_c/2, h(K_c/2\varepsilon)^{x/y}) \quad (11)$$

$$\xi(K, L) = (K_c/2\varepsilon)^{1/y} \xi(K_c/2, h(K_c/2\varepsilon)^{x/y}) \quad (12)$$

Estas duas expressões constituem leis de escala, que reproduzem os resultados de Widom-Kadanoff. Nelas, os argumentos incluem basicamente a dependência de h e ε na forma $h\varepsilon^{-x/y}$.

Para se obter soluções exatas o procedimento é o seguinte. Considere as funções:

$$K_L = \phi(L, h_0) \quad (13)$$

$$e \quad h_L = \psi(L, h_0) \quad (14)$$

Suponhamos agora que as equações (5) e (6) representem as soluções exatas das equações do Grupo de Renormalização, em todo o intervalo $0 < L < \infty$, com as seguintes condições de contorno:

$$\phi(1, h_0) = K_c/2 \quad (15)$$

$$\psi(1, h_0) = h_0 \quad (16)$$

Na realidade, ao fixarmos o ponto $L = 1$, $h = h_0$, fazendo ϕ igual a $K_c/2$ é totalmente irrelevante; poderíamos ter escrito qualquer fração de K_c , por exemplo $K_c/3$ ou $K_c/4$. O importante é que através desta condição, o sistema se encontre consideravelmente afastado do ponto crítico.

Para $L \ll 1$, as soluções exatas devem coincidir com as soluções fornecidas pelo esquema de linearização:

$$\phi(L, h_0) = -\phi(h_0) L^y + K_c \quad (17)$$

e

$$\psi(L, h_0) = \psi(h_0) L^x \quad (18)$$

Agora, as soluções das equações do Grupo de Renormalização continuam satisfazendo as relações (5) e (6) se substituirmos L por aL . Isto se torna evidente se considerarmos que estas equações permanecem, elas próprias, inalteradas quando se efetua a operação $L \rightarrow aL$:

$$\frac{dK_L}{d(aL)} = \frac{1}{(aL)} \quad u(K_L, h_L^2)$$

$$\frac{dh_L}{d(aL)} = \frac{1}{(aL)} \quad h_L \cdot v(K_L, h_L^2)$$

Obviamente os argumentos de K_L e h_L^2 serão agora aL em vez de L . Assim, as soluções destas equações serão idênticas às originais, com a única diferença que agora teremos aL em vez de L como argumento.

Em vista disso, as funções

$$K_L = \phi(aL, h_0) \quad (19)$$

e

$$h_L = \psi(aL, h_0) \quad (20)$$

são também soluções das equações do GR, onde a representa, em princípio, uma constante arbitrária, a ser fixada. Para $aL \ll 1$ esta solução se reduz a:

$$K_L = - \phi(h_0) \cdot (aL)^y + K_C \quad (21)$$

$$h_L = \psi(h_0) \cdot (aL)^x \quad (22)$$

Se K_L e h_L se encontram próximas dos valores críticos, então podemos ajustá-las de modo que as relações acima coincidam com as expressões (9) e (10). Disto resulta as igualdades:

$$\phi(h_0) a^y = \epsilon \quad (23)$$

e

$$h = a^x \psi(h_0) \quad (24)$$

Destas relações segue-se: $h \epsilon^{-x/y} = \psi(h_0) / [\phi(h_0)]^{x/y}$.

Deste modo, h_0 é uma função que depende de h e ϵ na forma $h \epsilon^{-x/y}$. Da relação (23) segue-se que

$$a = \left(\frac{\epsilon}{\phi(h_0)} \right)^{1/y}$$

Note que agora o valor de L para o qual $K_L = K_C/2$ não é mais $L = 1$, mas $L = a^{-1}$ (o argumento é agora aL !); além disso, $h_L = h_0$. Com estes valores, as equações (3) e (4) fornecem:

$$F(K, h) = \left(\frac{\epsilon}{\phi(h_0)} \right)^{3/y} \cdot F(K_C/2, h_0) \quad (25)$$

$$\xi(K, L) = \left(\frac{\epsilon}{\phi(h_0)} \right)^{-1/y} \cdot \xi(K_C/2, h_0) \quad (26)$$

Estes resultados justificam as conjecturas anteriores, pois

novamente encontramos o produto $h e^{-x/y}$ nas relações acima através de h_0 , que é função apenas deste produto. Os coeficientes críticos fornecidos pelo cálculo aproximado e exato são, portanto, os mesmos. Por outro lado, devemos notar que os dois resultados contêm uma dependência funcional em $h e^{-x/y}$ diferente.

9 GENERALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE GR: VARIÁVEIS IRRELEVANTES

Uma generalização das equações do GR consiste em introduzir uma nova variável q , de modo que agora passamos a ter três equações em vez de duas, a saber:

$$\frac{dK_L}{d_L} = \frac{1}{L} u(K_L, q_L, h_L^2) \quad (27)$$

$$\frac{dq_L}{d_L} = \frac{1}{L} \omega(K_L, q_L, h_L^2) \quad (28)$$

$$\frac{dh_L}{d_L} = \frac{1}{L} h_L v(K_L, q_L, h_L^2) \quad (29)$$

A variável q pode ser, por exemplo, a constante de acoplamento da interação entre um dado sítio e o seu segundo vizinho, daí termos escrito uma equação para q_L análoga à (27).

A energia livre e o comprimento de correlação ficam:

$$F(K, q, h) = L^{-3} \cdot F(K_L, q_L, h_L) \quad (30)$$

e

$$\xi(K, q, h) = L \cdot \xi(K_L, q_L, h_L) \quad (31)$$

Com a introdução do novo parâmetro, devemos esperar o aparecimento de uma linha de pontos críticos, i.e., uma linha crítica. Assim, para cada valor de q deve existir um valor crítico $K_c(q)$ para K . Agora, o comprimento de correlação é infinito na linha crítica, para qualquer L . A relação (31) exige que $\xi(K_L, q_L, h_L)$ também seja infinito. Isto só será possível se $K_L = K_c(q_L)$, $h_c = 0$.

A equação para q_L neste caso fica:

$$\frac{dq_L}{dL} = \frac{1}{L} \omega_c(q_L) \quad (32)$$

onde

$$\omega_c(q_L) = \omega(K_c(q_L), q_L, 0)$$

que é análoga à equação de movimento da bola vista anteriormente na seção 3 (equação (2)).

No limite $L \rightarrow \infty$, q_L pode se aproximar de um ponto de equilíbrio ou se afastar para o infinito. O primeiro caso é simples de se tratar, e será o único a ser considerado aqui. O tratamento geral envolve complexidades que fogem ao escopo da presente exposição.

Tendo estas considerações em mente, $K_c = K_c(q_L)$, $q = q_c$ é um ponto de equilíbrio e portanto podemos linearizar as equações do GR em torno do mesmo:

$$L \frac{dK_L}{dL} = y_{11} (K_L - K_c) + y_{12} (q_L - q_c) \quad (33)$$

$$L \frac{dq_L}{dL} = y_{21} (K_L - K_c) + y_{22} (q_L - q_c) \quad (34)$$

$$L \frac{dh_L}{dL} = x h_L \quad (35)$$

onde

$$\begin{aligned}
 y_{11} &= \frac{\partial u}{\partial K} (K_c, q_c, 0) & y_{21} &= \frac{\partial w}{\partial K} (K_c, q_c, 0) \\
 y_{12} &= \frac{\partial u}{\partial q} (K_c, q_c, 0) & y_{22} &= \frac{\partial w}{\partial q} (K_c, q_c, 0)
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Em geral, existem duas soluções linearmente independentes para o sistema de equações acima, expressas como potências de L , a saber:

$$K_L - K_c = L^y, \quad q_L - q_c = r_y L^y \tag{37a}$$

$$K_L - K_c = L^z, \quad q_L - q_c = r_z L^z \tag{37b}$$

Um dos expoentes, y ou z , deve ser negativo para que, quando $L \rightarrow \infty$ K_L se aproxime de K_c , para um valor inicial de K igual a $K_c(q)$; seja z este expoente. y deve ser portanto positivo para que K_L se afaste de K_c , caso $K \neq K_c(q)$. Deste modo o ponto crítico é claramente um ponto de sela.

Uma interpretação pictórica das equações acima pode ser obtida recorrendo-se à analogia da bola numa colina. A situação agora é um pouco mais complexa devido à introdução da nova variável q . As equações mecânicas correspondentes são agora:

$$\begin{aligned}
 \frac{dK(t)}{dt} &= - \frac{\partial V}{\partial K} (K, q) \\
 \frac{dq(t)}{dt} &= - \frac{\partial V}{\partial q} (K, q)
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Estas duas equações são menos gerais que as equações do GR; todavia, podemos obter uma imagem física muito clara do que ocorre a partir delas.

O potencial V é bidimensional. A figura 4 ilustra a nova situação da bola. Existem três pontos bem definidos na figura, a saber p_A , p_B e p_C . p_A é um mínimo absoluto (origem), p_B é um máximo absoluto e p_C é um ponto de sela.

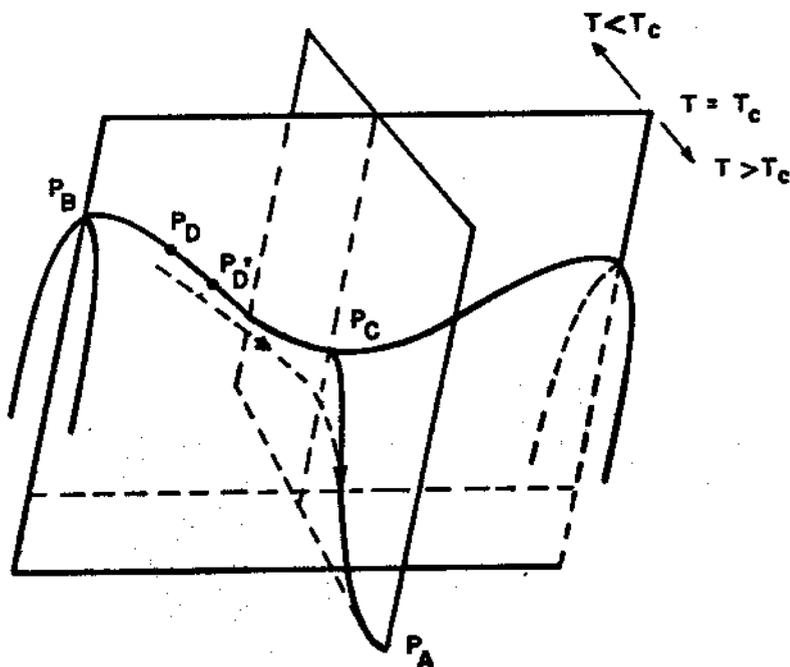


FIG. 4: A linha ligando p_B e p_C representa a linha crítica ($T = T_c$) ; a linha ligando p_C a p_A constitui o "rego".

A situação agora pode ser descrita nos seguintes termos. Se a bola parte de um ponto p_D , situado na linha crítica entre p_B e p_C (lembre, a linha crítica é definida por $K = K_c(q)$ no caso da transição de fase), a bola rola até atingir p_C , onde para. Se agora a bola se encontrar um pouquinho afastada de p_D , fora da curva crítica, então a bola inicialmente tenderá a acompanhar a linha crítica e neste caso a solução associada ao expoente

te negativo domina (eq. 37b), pois L (o tempo) ainda é pequeno. Esta tendência persiste até que a bola se avizinha de p_c e então cai no rego que conduz a p_A , a sua meta final. Ao se afastar de p_c , um tempo considerável (L grande) transcorreu e então a solução de expoente positivo passa a dominar (eq. 37a), de modo que a contribuição da solução referente ao expoente negativo se torna rapidamente desprezível. Um ponto importante a se notar é que as constantes multiplicativas que aparecem na solução geral, que é uma combinação linear das duas soluções mencionadas, fixam a posição inicial da bola (sistema de spins) e em virtude das considerações acima, a constante referente a estas condições (associada ao expoente negativo), não influencia no cálculo do tempo necessário para a bola se afastar consideravelmente de p_c rumo a p_A , pois neste trajeto apenas a solução ligada ao expoente positivo é relevante. Em outras palavras, o problema se reduz, ao longo deste percurso, ao caso em que apenas uma constante de acoplamento, K , era considerada.

A denominação "variável irrelevante" se refere ao fato de que, não importa de onde parta na curva crítica (exceto p_B !), a bola sempre acaba em p_c (ponto crítico). Por outro lado, se a bola parte de qualquer ponto próximo a curva crítica, ela sempre vai acabar parando em p_A (origem). Em ambos os casos, é como se a bola esquecesse sua procedência. Mais à frente voltaremos a precisar estas noções.

O quadro pictórico exposto acima pode ser consubstanciado recorrendo-se às expressões anteriores. A solução geral deve ser uma combinação linear das duas soluções apresentadas, i.e.

$$K_L = K_c - \epsilon L^y + \eta L^z \quad (39a)$$

$$q_L = q_c - \epsilon r_y L^y + \eta r_z L^z \quad (39b)$$

$$h_L = h L^x \quad (39c)$$

Onde as constantes ϵ e η dependem dos valores iniciais $K_L = K$ e $q_L = q$ na forma:

$$\epsilon = \frac{r_z \cdot (K - K_c) - (q - q_c)}{r_y - r_z} \quad (40)$$

$$\eta = \frac{r_y (K - K_c) - (q - q_c)}{r_y - r_z} \quad (41)$$

O sistema se encontra sobre a linha crítica se $\epsilon = h = 0$ e $\eta \neq 0$, pois então $K_L \rightarrow K_c$ e $q_L \rightarrow q_c$ quando $L \rightarrow \infty$ (neste caso a solução correspondente é a de expoente negativo, z). Se agora $\epsilon \ll \eta$ e para h pequeno, o sistema está neste caso próximo da linha crítica, porém afastado do ponto crítico (K_c, q_c).

Para $L < 1$ o termo em η domina; sendo z negativo, \bar{a} medido que L aumenta K_L e q_L se aproxima de K_c e q_c acompanhando de perto a linha crítica.

Para valores de L suficientemente grandes, o termo em ϵ domina e K_L e q_L se afastam de K_c e q_c respectivamente. A contribuição do termo em η se torna cada vez menor até se tornar desprezível. Uma vez que η mede a posição inicial ao longo da linha crítica, a independência de η significa independência da posição inicial com relação a esta linha (isto é, é irrelevante se a bola parte de um ponto próximo de p_D ou $p_{\bar{D}}$, para um dado ϵ fixo). O valor de L para o qual $K_L = K_c/2$ pode ser calculado aproximadamente usando (39a) ($L \gg 1$ neste caso):

$$\frac{K_c}{2} = \epsilon L^y$$

donde

$$L = \left(\frac{K_c}{2\epsilon} \right)^{1/y} \quad (42)$$

Este cálculo é realizado no mesmo espírito da aproximação linear da seção

(7). Na realidade os dois resultados são idênticos, no que diz respeito aos coeficientes críticos.

Para este valor de L ,

$$q_L = q_c - r_y(K_c/2) \quad (43)$$

$$h_L = h(K_c/2\epsilon)^{x/y} \quad (44)$$

O aspecto relevante destas equações é que q_L independe de h , ϵ ou η , ao passo que h_L depende, como antes, do produto $he^{-x/y}$. Deste modo, $F(K_L, q_L, h_L)$ e $\xi(K_L, q_L, h_L)$ dependerão de h e ϵ somente através de $he^{-x/y}$.

Os resultados obtidos para $F(K, q, L)$ e $\xi(K, q, L)$ são portanto qualitativamente idênticos aos obtidos na seção anterior, onde o caso unidimensional foi considerado. É bom lembrar, todavia, que os diagramas de fase ficam afetados com a introdução de uma variável irrelevante no problema.

Uma vez que $K = K_c(q)$ para $\epsilon = 0$ (neste caso o sistema se encontra na linha crítica), segue-se de (40) que ϵ é proporcional a $K - K_c(q)$, que por sua vez é proporcional a $T - T_c(q)$ (da definição $K = -J/K_B T$). Assim podemos identificar ϵ com a variável $(T - T_c)$ a menos de um fator de normalização, não importando o que seja q .

10 COMENTÁRIOS FINAIS

As noções expostas nas seções anteriores constituem a base do GR. Partindo da propriedade de autosimilaridade do modelo de blocos de Kadanoff, comum a todos os sistemas no ponto crítico, chega-se às equações do GR para este modelo. Linearizando-se estas equações obtém-se uma boa dose de informações relevantes, como expoentes críticos e expressões aproximadas para o comprimento de correlação e a energia livre (leis de escala) e

com isto diagramas de fase. O emprego da analogia mecânica fornece um quadro nítido, possibilitando compreender facilmente as principais características do GR. Assim é possível traduzir o comportamento singular da função de partição no ponto crítico em termos de um potencial atuando numa bola "aristotélica".

Gostaríamos de finalizar apresentando de um modo mais técnico o significado de variáveis irrelevantes e uma versão mais geral do GR, que permite aplicá-lo a um Hamiltoniano envolvendo um número arbitrário de acoplamentos.

O ponto de partida para determinar se uma variável é relevante ou irrelevante (ou seja, determinar univocamente os "campos" relevantes e irrelevantes) consiste em determinar os pontos fixos do sistema. Para ilustrar o significado destes pontos vamos recorrer ao caso envolvendo duas constantes de acoplamento K e q , com campo nulo, apresentado na seção anterior. As constantes renormalizadas K_L e q_L ao se realizar a transformação do GR correspondente à transformação de blocos ficam K_L e q_L . Novas transformações levam a novas constantes. Os pontos fixos (K^*, q^*) definidos no espaço (K, q) são caracterizados pelo fato de, ao serem atingidos, não se modificam frente a novas transformações. Uma vez obtidos estes pontos, deve-se linearizar as equações do GR em torno dos mesmos.

Os campos de escala associados aos autovetores correspondentes à estas equações, por exemplo g_1 e g_2 , se transformam em g'_1 e g'_2 , tal que:

$$g'_1 = g_1 L^z$$

(L é o fator da escala)

$$g'_2 = g_2 L^y$$

Se $z < 0$, a variável é irrelevante; por outro lado, se $y > 0$, a variável correspondente é relevante. É importante assinalar que existem pontos fixos sobre a fronteira crítica e pontos fixos fora das mesmas. Os primeiros determinam os expoentes críticos e aqui as variáveis irrelevantes são realmente "irrelevantes". Contudo, os diagramas de fase são determinados

através de pontos fixos fora das fronteiras críticas, e neste caso as variáveis irrelevantes são importantes, contrariamente ao que o nome "irrelevante" possa sugerir à primeira vista. A determinação de diagramas de fase por meio destes pontos é uma das formas mais comumente empregadas na prática.

Um esquema geral para o GR referente a um Hamiltoniano que inclui um número arbitrário de acoplamentos pode ser visto como se segue.

As constantes de acoplamento presentes no Hamiltoniano generalizado, previamente divididas pela temperatura, são associadas aos eixos coordenados de um espaço abstrato. Neste espaço, à cada ponto corresponde um Hamiltoniano da forma

$$H = H \sum_i S_i + \sum_{\langle i,j \rangle} K^{(1)} S_i S_j + \sum_{\{i,j\}} K^{(2)} S_i S_j + \dots \quad (45)$$

onde H é um campo magnético, que supusemos nulo, e o segundo somatório se refere às interações entre um spin e seus primeiros vizinhos; o somatório seguinte leva em conta a contribuição dos segundos vizinhos e assim por diante. Contribuições envolvendo um número de spins superior a dois devem ser também levadas em conta, embora tenham sido omitidas por simplicidade na relação (45) acima.

Consideremos agora as hipersuperfícies de comprimento de correlação constante ("equi- ξ "), definidas no espaço gerado pelas constantes K presentes no Hamiltoniano acima ($K^{(1)}$, $K^{(2)}$, H , etc.). Obtemos assim a coleção de hipersuperfícies mostradas na figura abaixo.

Tendo em vista que as constantes K são as "verdadeiras" constantes divididas pela temperatura, os pontos de uma dada hipersuperfície de ξ constante se deslocam à medida que a temperatura se aproxima de T_c , atravessando sucessivamente hipersuperfícies de ξ crescentes. Finalmente se acomodam na hipersuperfície correspondente a $\xi = \infty$, onde representam pontos críticos, que podem ser pontos fixos ou não.

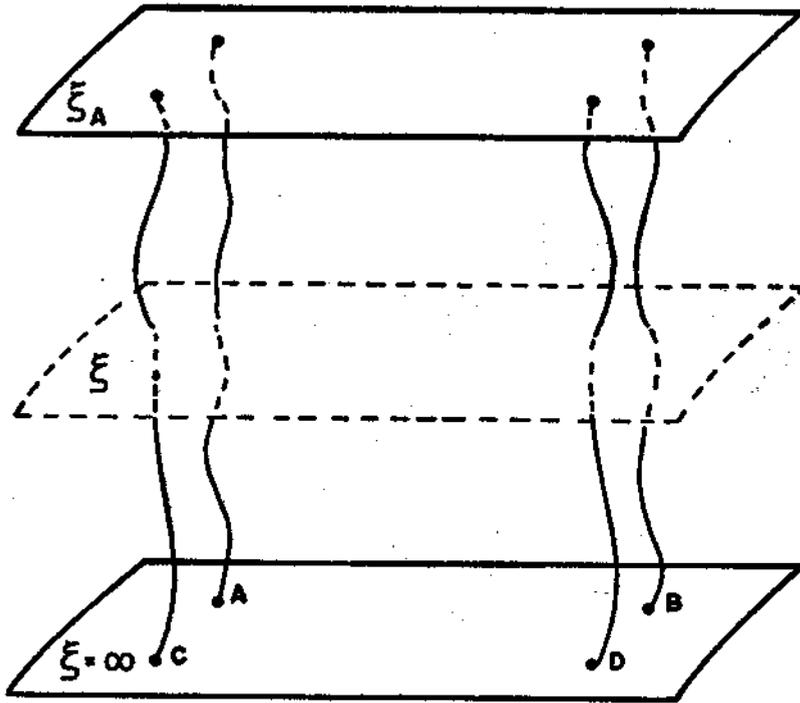


Figura 4: Hipersuperfície de comprimento de correlação constante. Sobre a hipersuperfície $\xi = \infty$ se encontram os pontos críticos.

Os pontos fixos da hipersuperfície de $\xi = \infty$ podem estender sua influência sobre a vizinhança imediata em torno dos mesmos ("bacias críticas"), definindo comportamentos topológicos peculiares (veja pontos A, B e C na ilustração abaixo). É importante assinalar que o número de variáveis irrelevantes associadas a cada ponto crítico define a dimensão da bacia crítica correspondente. Na figura 5 apresentamos uma possível configuração, que resume o comportamento geral.

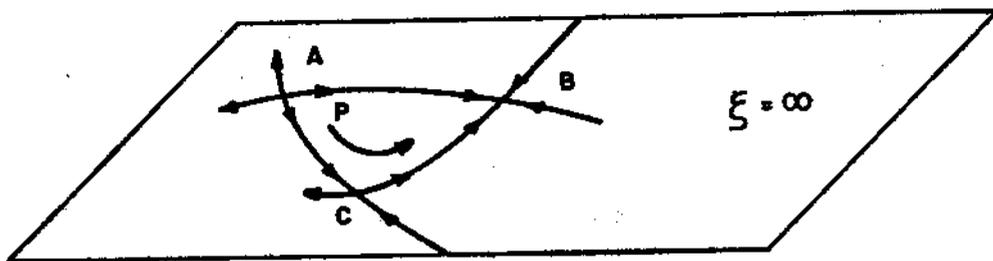


Figura 5: Configuração geométrica de pontos críticos. Os pontos A, B e C são os mesmos da figura anterior.

Como indicado pelas setas, o ponto A é localmente instável (correspondendo a um "máximo"); B é um ponto localmente estável ("mínimo") e C é um ponto de sela.

Um ponto sobre o segmento AC tem seus expoentes críticos de terminados pelo ponto fixo C exceto, claro, o ponto A. Por outro lado, se o sistema "parte" de um ponto próximo da linha AC (ponto P), caminhará a princípio rumo ao ponto C (ponto fixo com apenas uma única variável irrelevante associada). Após sucessivas iterações, troca de direção e se dirige ao ponto B (ponto fixo com duas variáveis irrelevantes associadas).

Este comportamento é denominado "cross-over" na literatura. É interessante observar que em cálculos práticos, a precisão se torna essencial. Uma aproximação pobre pode erroneamente fornecer expoentes críticos referentes ao ponto C, no caso em que o resultado correto se refere ao ponto B, atingido ao se levar em conta aproximações mais acuradas.

Uma das generalizações do GR mais empregadas atualmente corresponde ao Grupo de Renormalização no Espaço Real, onde as relações de recorrência não envolvem mais operações contínuas (equações diferenciais para as constantes de acoplamento), mas relações discretas. Todas as outras condições expostas acima (pontos fixos, bacias críticas, etc.) permanecem essencialmente inalteradas. Existem ainda outras versões do GR. A base de todas elas se fundamenta, contudo, nos conceitos aqui apresentados.

AGRADECIMENTOS

O autor se sente profundamente agradecido a inúmeras pessoas. Dr. Evaldo M.F. Curado contribuiu de forma decisiva com sua clareza de exposição durante o curso "Tópicos de Fenômenos Críticos" e contínuo interesse, a lêm de realizar uma leitura crítica do texto. Os comentários do mestrando Fernando S. Rodrigues permitiram elucidar certos pontos obscuros da versão original. Seus colegas, Ananias M. Mariz, Luciano R. da Silva, Paulo R. Hauser e Uriel M.S. da Costa colaboraram de modo inestimável com importantes observações e esclarecimentos. Prof. Constantino Tsallis contribuiu significativamente para o crescente interesse do autor por Fenômenos Críticos. Ao Prof. Affonso A. Gomes deve a compreensão dos "blocos de Kadanoff". Prof. Ricardo Ferreira cedeu gentilmente dois trabalhos que constam nas referências. A dedicação das secretárias Marlene B. Mello, Myriam S. Coutinho e Simone G. Ribeiro, e da desenhista Conceição Franco tornou possível a apresentação deste trabalho. O autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

B. Widom - J. Chem. Phys. 43 (1965) 3898

L. Kadanoff - Physics 6 (1966) 263

K.G. Wilson - Phys. Rev. B4 (1971) 3174

P. Pfeuty e G. Toulouse - "Introduction to the Renormalization Group and to Critical Phenomena" - John Wiley & Sons (1977)

K.G. Wilson e J. Kogut - Phys. Repts. 12C (1974) 77

K.G. Wilson - Scientific American 241 (1979) 140