ISSN 0101 - 9236

CBPF-MO-002/86

LEÇONS SUR L'ELECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE

par

J. Leite Lopes

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

e

Centre de Recherches Nucleaires
Université de Strasbourg 1
Strasbourg - France

"War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb
Die mir das innre Toben stillen,
Das arme Herz mit Freunde füllen
Und mit geheimnisvollem Trieb
Die Kräfte der natur rings um mich enthüllen?"

Goethe, Faust, v. 434-438, Edit. Montaigne Paris.
Citation invoqueé par L. Boltzmann à propos des équations de Maxwell.

SUMÁRIO

CHAPITRE 1

LES GROUPES DE LORENTZ ET DE POINCARÉ

Le principe de la relativité et le groupe de Poincaré

1.1 Le principe de la relativité restreinte

Un *référentiel d'inertie* est un système de référence (axes de coordonnées observateur et appareils de mesure) par rapport auquel la loi d'inertie est valable. Tous les systèmes de référence animés d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie S, sont eux aussi des référentiels d'inertie.

Le *principe de la relativité* (restreinte) généralise cette affirmation: les lois physiques trouvées par un observateur d'un référentiel d'inertie sont identiques à celles trouvées par un observateur lié à un autre référentiel d'inertie S' (c'est-à-dire animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à S). Autrement dit, le *principe de la relativité galiléenne* qui affirme: tous les référentiels d'inertie sont équivalents pour la formulation des *lois mécaniques* se généralise par le *principe de la relativité* d'Einstein: tous les référentiels d'inertie sont équivalents pour la formulation des *lois physiques*.

Avant la découverte du principe de la relativité, on connaissait les principes d'invariance des lois physiques par rapport aux déplacements de l'origine du système de coordennées et de l'origine du temps; c'est pourquoi la répétition d'une observation sur un système physique dans les mêmes conditions initiales donne lieu aux mêmes résultats quel que soit le laboratoire où est faite l'observation et quel que soit le moment de l'observation. Le principe de la relativité ajoute que l'observation ne dépend pas du référentiel d'inertie où elle est réalisée (c'est-à-dire ne dépend pas de l'état de mouvement rectiligne et uniforme du laboratoire par rapport à un autre laboratoire d'inertie).

Les transformations linéaires et non homogènes, des coordonnées spatiales et du temps, qui relient les référentiels d'inertie entre eux, constituent le *groupe de Poincaré* ou groupe de Lorentz non homogène.

Le principe de la relativité restreinte affirme donc que les *lois de la physique sont invariantes par rapport au groupe de Poincaré* (cet enoncé sera precisé à la fin du § 5).

1.2 Transformations de Lorentz et de Poincaré - Définition

Un évènement qui a lieu en un point de l'espace physique (x^1, x^2, x^3), et à un instant donné t, est représenté par un point d'un espace vectoriel à quatre dimensions:

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

où on a posé $x^0 = ct$, c étant la constante de la vitesse de la lumière. Ce vecteur de coordonnées x^μ est un vecteur contravariant de l'espace temps.

Etant donné un vecteur constant a^μ et un ensemble de 16 nombres $\ell^\mu{}_\nu$

$$\ell = \begin{pmatrix} \ell^{o}{}_{o} & \ell^{o}{}_{1} & \ell^{o}{}_{2} & \ell^{o}{}_{3} \\ \ell^{1}{}_{o} & \ell^{1}{}_{1} & \ell^{1}{}_{2} & \ell^{1}{}_{3} \\ \ell^{2}{}_{o} & \ell^{2}{}_{1} & \ell^{2}{}_{2} & \ell^{2}{}_{3} \\ \ell^{3}{}_{o} & \ell^{3}{}_{1} & \ell^{3}{}_{2} & \ell^{3}{}_{3} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

une *transformation de Lorentz* est une transformation linéaire et homogène de l'espace temps en lui-même:

$$x'^{\mu} = \ell^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{1.2}$$

(une somme est sous-entendue de 0 à 3, sur l'indice ν) qui laisse invariante la forme bilinéaire:

$$x^{o}y^{o} - x^{1}y^{1} - x^{2}y^{2} - x^{3}y^{3}$$

Une *transformation de Poincaré* est une transformation de Lorentz non homogène:

$$x'^{\mu} = a^{\mu} + \ell^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{1.3}$$

c'est le résultat de la composition successive d'une transformation de Lorentz et d'une translation dans l'espace temps. Une telle transformation laisse invariante la forme:

$$(x^{o}-X^{o})(y^{o}-Y^{o}) - (x^{1}-X^{1})(y^{1}-Y^{1}) - (x^{2}-X^{2})(y^{2}-Y^{2}) - (x^{3}-X^{3})(y^{3}-Y^{3})$$

où x, X, y, Y sont quatre points de l'espace-temps - La forme bilinéaire invariante par une transformation de Poincaré est construite avec les différences des coordonnées des points.

1.3 Base physique de la transformation de Lorentz

Soit une onde lumineuse sphérique émise à l'instant t=0 à l'origine O du référentiel S, que nous appellerons référentiel fixe, et soit un deuxième référentiel S' animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à S de telle sorte que l'origine O' de S' coïncide avec l'origine O de S à l'instant t=0.

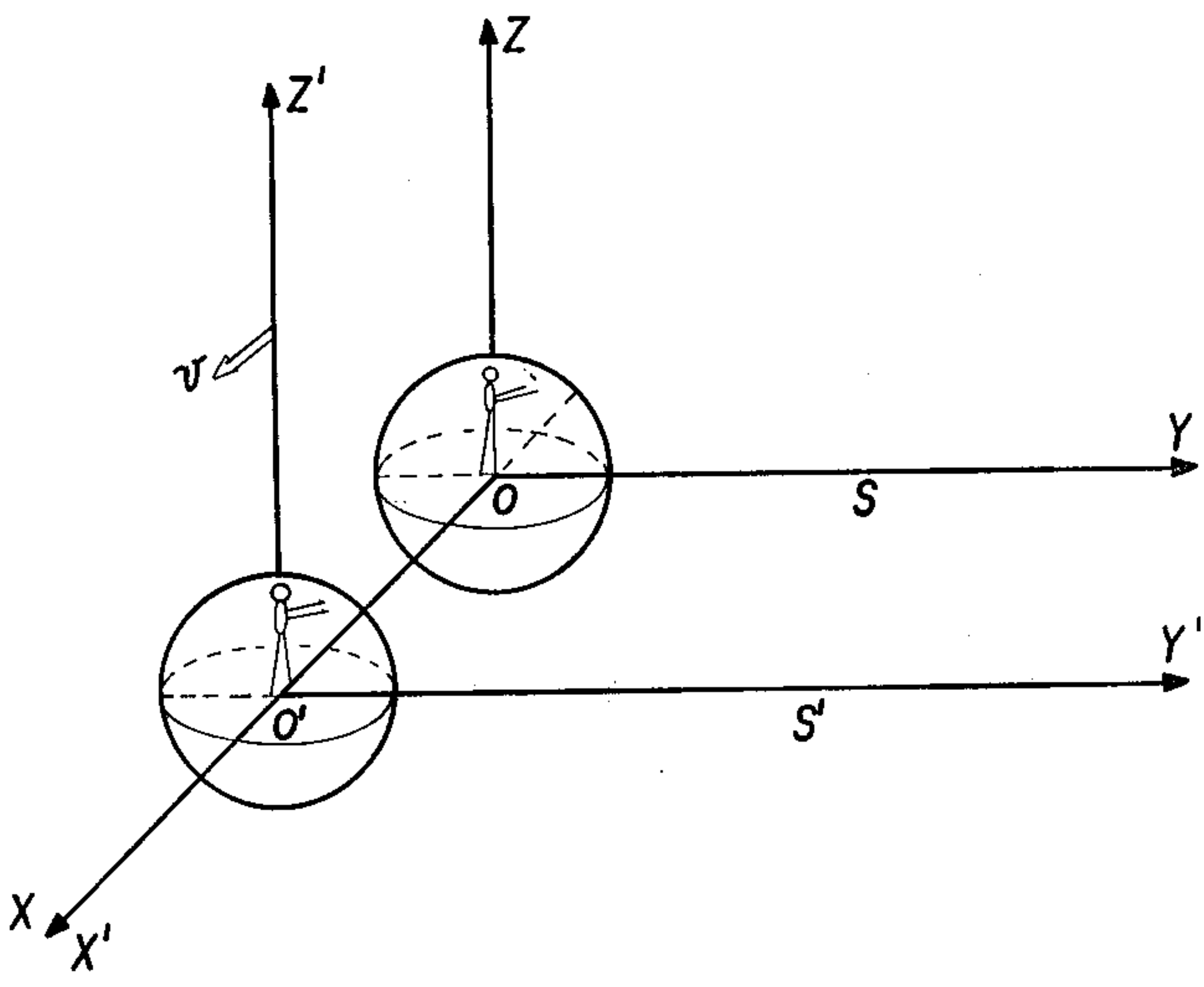

FIG. 1

Einstein a postulé que pour l'observateur du référentiel S' l'onde lumineuse se propage aussi comme une onde sphérique dont le centre est à l'origine O'.

Par conséquent si:

$$(x^{o})^2 - (\vec{x})^2 = 0 \tag{1.4}$$

est l'équation de l'onde sphérique vue par l'observateur de S, la transformation de Lorentz qui fait passer du référentiel S au référentiel S', devra transformer l'équation (1.4) en l'équation

$$(x'^{o})^2 - (\vec{x}')^2 = 0 \tag{1.5}$$

qui décrit l'onde lumineuse vue par l'observateur de S'.

Pour constater ceci, considérons la transformation de Lorentz pure, qui relie les systèmes S et S' de la figure (1.1) (translation parallèle à l'axe Ox avec vitesse v); cette transformation s'écrit:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x-\beta ct) \\ t' &= \gamma(t-\frac{\beta}{c}x), \quad y' = y, \quad z' = z \end{aligned} \tag{1.6}$$

où on a posé

$$\beta = \frac{V}{c} \quad , \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$$

Par conséquent la matrice de Lorentz l, (1.1) s'écrit:

$$1 \doteq \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les équations (1.6) peuvent aussi mettre sous la forme

$$x' = \gamma(x-\beta x^{o})$$

$$x'^{o} = \gamma(x^{o}-\beta x)$$

avec $x^{o} = ct$ et $x'^{o} = ct'$

ou encore

$$x' = x \operatorname{ch}\theta - x^{o} \operatorname{sh}\theta$$
$$x'^{o} = x^{o} \operatorname{ch}\theta - x \operatorname{sh}\theta \qquad (1.7)$$

en posent $\operatorname{ch}\theta = \gamma$, $\operatorname{sh}\theta = \beta\gamma$

$$\operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta = 1$$

On vérifie aisément que les transformations (1.7) satisfont à la relation:

$$(x'^{o})^2 - (\vec{x}')^2 = (x^{o})^2 - (\vec{x})^2$$

1.4 Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace-temps

Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace-temps, x^μ, y^μ, est défini par la forme bilinéaire:

$$(x,y) = x^\mu \, g_{\mu\nu} \, y^\nu \tag{1,8}$$

(où une somme, de 0 à 3, est sous-entendue pour les indices répétés μ et ν)

Les nombres $g_{\mu\nu}$ sont ainsi définis:

$$g=(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1,9}$$

et constituent ce que l'on appelle le tenseur covariant métrique. On définit le tenseur contravariant $g^{\mu\nu}$ par la relation:

$$g^{\mu\alpha} \, g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1,10}$$

Etant donné un vecteur contravariant x^μ, on lui associe un vecteur covariant x_μ par la règle:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} \, x^\nu \tag{1,11}$$

On voit que:

$$x_o = x^o$$

$$x_k = -x^k \quad , \quad k = 1,2,3 \quad .$$

Le produit scalaire (1,8) vaut donc:

$$(x,y) = x^\mu y_\mu = x^o\, y^o - \vec{x}.\vec{y} \equiv x^\mu g_{\mu\nu} y$$

La *norme* d'un vecteur s'écrit:

$$(x,x) = x^\mu\, x_\mu = (x^o)^2 - (\vec{x}\,)^2 \qquad (1,11a)$$

nombre qui peut être *positif, nul on négatif.*

Nous pouvons maintenant dire que les *transformations de Lorentz sont les transformations linéaires et homogènes de l'espace-temps en lui-même qui conservent le produit scalaire de deux vecteurs quelconques de cet espace.*
Les coefficients $l^\mu{}_\upsilon$ de l'équation (1,2) doivent satisfaire à certaines relations. En effet si

$$x'^\mu\;\; y'_\mu = x^\upsilon\, y_\upsilon$$

cela veut dire que:

$$l^\mu{}_\upsilon\; x^\upsilon\; g'_{\mu\alpha}\; l^\alpha{}_\beta\; y^\beta = x^\upsilon\; g_{\upsilon\beta}\; y^\beta$$

Le principe de la relativité impose (voir équations (I.4) et (1,5)) la conservation du tenseur métrique

$$g'_{\mu\alpha} = g_{\mu\alpha}$$

Par conséquent il vient:

$$l^{\mu}{}_{\upsilon}\ g_{\mu\alpha}\ l^{\alpha}{}_{\beta} = g_{\upsilon\beta} \qquad (1,12)$$

Ce sont dix équations imposées sur les seize nombres $l^{\mu}{}_{\upsilon}$.
Une transformation de Lorentz est donc définie par six paramètres.
Une transformation de Poincaré est définie par dix paramètres (les six $l^{\mu}{}_{\upsilon}$ indépendants et les quatre a^{μ}).

1.5 Les groupes de Lorentz et de Poincaré

Nous rappelons qu'un ensemble G d'éléments (G_1, G_2,...) constitue un *groupe* si on peut définir une opération de multiplication entre deux éléments quelconques de G de telle sorte que leur produit soit encore un élément de G (ie si $G_1 \varepsilon G$, $G_2 \varepsilon G$ alors $G_1 . G_2 \varepsilon G$) avec les propriétés suivantes:

1) l'opération est *associative*

$$G_1(G_2\ G_3) = (G_1G_2)G_3$$

2) l'ensemble contient l'élément *identité* E défini par

$$G_kE = EG_k = G_k$$

pour tous les éléments G_k de G.

3) à chaque élément G_k de G on peut associer un *élément inverse* G_k^{-1} défini par l'équation:

$$G_k\, G_k^{-1} = G_k^{-1}\, G_k = E$$

Prenons le déterminant de l'équation (1,12) il vient:

$$(\det 1) \quad (\det g) \quad (\det 1) = \det g$$

d'oũ on tire

$$(\det 1)^2 = 1$$

Une transformation de Lorentz (1,1) (1,2) (1,12) a pour déterminant + 1 ou -1.

Dans l'équation (1,12) posons $\upsilon = \beta = 0$

il vient:

$$1^{\mu}{}_{o}\, g_{\mu\,\alpha}\, 1^{a}{}_{o} = g_{oo}$$

on a donc:

$$(1^{o}{}_{o})^2 - (1^{k}{}_{o})^2 = 1$$

c'est-ã dire

$$(1^{o}{}_{o})^2 = 1 + \sum_{k=1}^{3} (1^{k}{}_{o})^2 \geq 1 \tag{1,12a}$$

On a donc pour une *transformation de Lorentz* (1,1)

$$\det l = +1 \qquad \text{ou} \qquad \det l = -1$$
$$l^o{}_o \geq 1 \qquad \text{ou} \qquad l^o{}_o \leq -1 \tag{1,13}$$

Il y a quatre ensembles de transformations de Lorentz:

1) L'ensemble des matrices l, (1,1) pour lesquelles

$$\det l = +1 \qquad \text{et } l^o{}_o \geq 1$$

on le notera l_{++}

2) L'ensemble des matrices l, (1,1) pour lesquelles

$$\det l = +1 \qquad \text{et } l^o{}_o \leq -1$$

c'est l'ensemble $l_{+-\downarrow}$

3) L'ensemble $l_{-+\uparrow}$ des matrices l, (1,1) pour lesquelles

$$\det l = -1 \quad \text{et } l^o{}_o \geq 1$$

4) L'ensemble $l_{--\downarrow}$ des matrices l, (1,1) pour lesquelles

$$\det l = -1 \quad \text{et } l^o{}_o \leq -1$$

Considérons l'ensemble ℓ_{++} et trois de ses éléments ℓ_1 ℓ_2, ℓ_3:

$$x'^{\mu} = (\ell_1)^{\mu}{}_{\upsilon}\, x^{\upsilon}$$
$$x''^{\mu} = (\ell_2)^{\mu}{}_{\upsilon}\, x'^{\upsilon}$$
$$x'''^{\mu} = (\ell_3)^{\mu}{}_{\upsilon}\, x''^{\upsilon}$$

On voit que

$$x''^{\mu} = k^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

avec

$$k^{\mu}{}_{\nu} = (\ell_2)^{\mu}{}_{\alpha}\, (\ell_1)^{\alpha}{}_{\nu}$$

Par conséquent la matrice k est le produit des matrices ℓ_2 et ℓ_1:

$$k = \ell_2\, \ell_1$$

et on a:

$$x'''^{\mu} = (\ell_3)^{\mu}{}_{\alpha} (\ell_2)^{\alpha}{}_{\beta}\, (\ell_1)^{\beta}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

$$x'''^{\mu} = (\ell_3)^{\mu}{}_{\alpha} (\ell_2 \ell_1)^{\alpha}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

$$x'''^{\mu} = (\ell_3 \ell_2)^{\mu}{}_{\beta} (\ell_1)^{\beta}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

L'identité est définie par: $x'^{\mu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$ et la transformation inverse de ℓ est la matrice inverse ℓ^{-1} un element de ~~les~~ laquelle est, d'après (1,12) $\ell_{\mu}{}^{\nu}$ où $\ell_{\mu} = g_{\mu\alpha}\, \ell^{\alpha}{}_{\beta}\, g^{\beta\nu}$

Par conséquent l'ensemble $L+\uparrow$ *des transformations de Lorentz pour lesquelles* det $\ell = +1$ et $\ell^{o}{}_{o} \geq 1$ *constitue un groupe, le groupe de Lorentz propre et orthochrone.*

L'ensemble $L+\downarrow$, pour lequel $\left\{\begin{array}{l}\det \ell = +1 \text{ n'est pas un groupe} \\ \text{puisqu'il ne } \ell^{o}{}_{o} \leq -1\end{array}\right.$

contient pas l'identité. Il contient la reflexion PT des trois coordonnées spatiales (ou d'une seule) et du temps.

Pour la même raison les ensembles $L_{-\uparrow}$ et $L_{-\downarrow}$ ne constituent pas un groupe. On peut néanmoins construire des groupes à partir de ces 3 ensembles si l'on fait la somme directe de chacun de ces ensembles avec le groupe propre et orthochrone.

On a donc les tableaux suivants:

Ensemble	Définition	Propriétés de groupe
$L_{+\uparrow}$	det $\ell = 1$, $\ell^o{}_o \geq 1$	OUI
$L_{+\downarrow}$	det $\ell = 1$, $\ell^o{}_o \leq -1$	NON
$L_{-\uparrow}$	det $\ell = -1$, $\ell^o{}_o \geq 1$	NON
$L_{-\downarrow}$	det $\ell = -1$, $\ell^o{}_o \leq -1$	NON

TABLEAU (1,1) - Ensemble des transformations de Lorentz

$L_{+\uparrow}$	groupe propre orthochrone
$L_{+\uparrow} \oplus L_{+\downarrow}$	groupe propre contient la réflexion PT
$L_{+\uparrow} \oplus L_{-\uparrow}$	groupe orthochrone contient la réflexion spatiale
$L_{+\uparrow} \oplus L_{-\downarrow}$	groupe impropre hetérochrone content P et T

TABLEAU (1,2) - Groupes de Lorentz

Les groupes correspondants de Poincaré sont les groupes des transformations de Lorentz suivies des translations.

Par exemple, le groupe propre orthochrone de Poincaré est l'ensemble des dix éléments $\{a, \ell\}$ tels que

$$x'^{\mu} = a^{\mu} + \ell^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

avec det $\ell = +1$, $\ell^{o}{}_{o} \geq 1$. On écrit: $x' = \{a, \ell\}\, x$.

La loi de multiplication des éléments du groupe de Poincaré est la suivante:

$$\{a_1, \ell_1\} \;\; \{a_2, \ell_2\} \;\; = \;\; \{a_1+\ell_1 a_2, \;\; \ell_1\, \ell_2\} \qquad (1.13a)$$

puisque les équations

$$x''^{\mu} = a_1{}^{\mu} + \ell_1{}^{\mu}{}_{\nu}\, x'^{\nu}$$

$$x'^{\nu} = a_2{}^{\nu} + \ell^{\nu}{}_{2\,\lambda}\, x^{\lambda}$$

donnent lieu à la relation:

$$x''^{\mu} = a_1{}^{\mu} + \ell_1{}^{\mu}{}_{\nu}\, a_2{}^{\nu} + \ell^{\mu}{}_{1\,\nu}\, \ell_2{}^{\nu}{}_{\lambda}\, x^{\lambda}$$

Il est clair que le groupe propre de Lorentz ne contient pas les réflexions par rapport à un nombre impair d'axes de coordonnées (les transformations avec det $\ell = -1$ sont les transformations impropres); le groupe orthochrone ne change pas le signe du temps. Les réflexions de deux coordonnées spatiales sont equivalentes à une rotation d'un angle II autour de l'axe correspondant à la troisième coordonnée.

Pendant plusieurs années on a cru que le principe de la relativité affirmait l'invariance des lois physiques par rapport au groupe conplet de Poincaré. On a découvert en 1957 que les lois des interactions faibles n'étaient pas invariantes par rapport aux réflexions d'espace et donc que cette généralisation était inexacte.

Le principe de la relativité restreinte affirme essentiellement que les lois de la physique doivent être invariantes par rapport au groupe de Poincaré propre orthochrone (que nous appellerons simplement groupe de Poincaré).

1.6 Cone de Lumière

La norme d'un vecteur x telle que nous l'avons définie en (1,11a) est le nombre S^2 tel que

$$S^2 = x^\mu \; g_{\mu\nu} \; x^\nu = (x^0)^2 - (\vec{x})^2 \tag{1, 14}$$

La distance entre deux points infiniment voisins x et x + dx de l'espace-temps (espace de Minkowski, espace pseudo-euclidien) est donc la forme différentielle:

$$dS^2 = dx^\mu \; g_{\mu\nu} \; dx^\nu \tag{1, 15}$$

où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur (1,9).

La norme S^2 peut avoir des valeurs négatives, positives ou nulles.

L'équation: $\underline{S^2 = 0}$ définit l'ensemble des points de l'espace-

-temps qui peuvent être atteints par un rayon de lumière à partir de l'origine: c'est le *cône de lumière de l'origine*.

Les inégalités: $s^2 > 0$, $x^o > 0$

décrivent la région de l'espace-temps (le *futur* de 0) pour laquelle les points M peuvent être atteints dès l'origine par une action physique avec une vitesse inférieure à c (l'intérieur du cône au-dessus de l'origine). A chaque valeur de la constante a telle que

$$s^2 = a > 0 \quad , \quad x^o > 0$$

correspond une branche supérieure d'un hyperboloïde à deux feuilles.

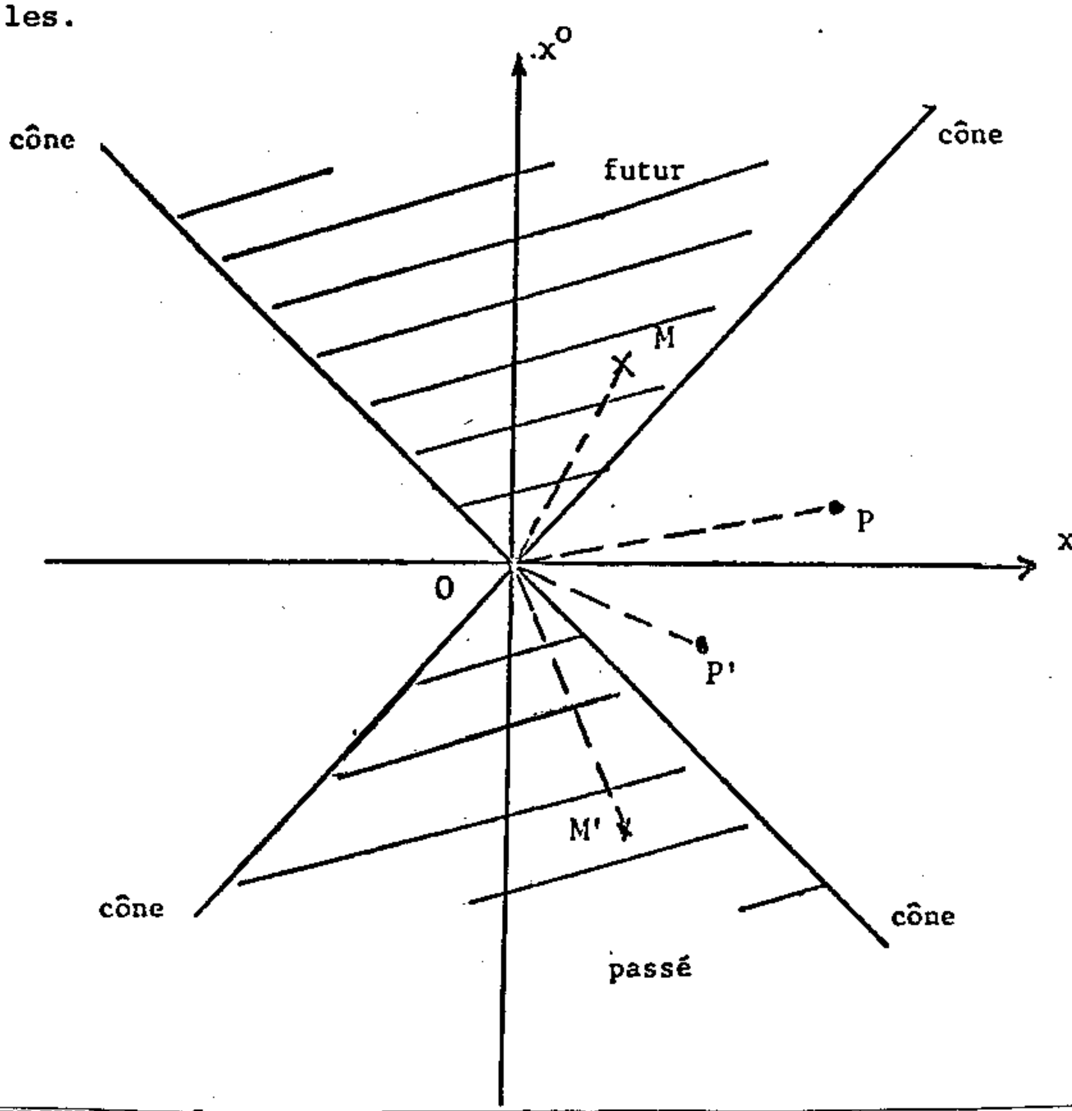

FIGURE (I.2) - Cone de lumière

Les inégalités: $S^2 > 0 \quad x^o < 0$ définissent l'ensemble des points M' (le *passé* de 0) à partir desquels on peut atteindre l'origine par une action physique avec une vitesse inférieure à c (l'intérieur du cône au-dessous de l'origine). La branche inférieure de l'hyperboloïde est $S^2 = a > 0$, $x^o < 0$. L'inégalite: $\underline{S^2 < 0}$ correspond aux points P à l'extérieur du cône. L'origine ne peut pas les influencer physiquement puisque l'on admet que toutes les actions physiques se propagent avec une vitesse inférieure ou égale à c. $S^2 = b < 0$ est un hyperboloïde *à une feuille*. Cette hypothèse constitue la *condition de causalité*. Cette condition est une conséquence du principe de causalité que nous énoncerons sous la forme suivante:

Si un évènement B est l'effet produit par un évènement A (la cause) dans un référentiel S, cette relation de cause à effet sera encore observée dans tout autre référentiel d'inertie S'.

Ou encore: *La relation cause-effet entre deux évènements A et B doit être invariante par rapport du groupe de Poincaré.*

Ainsi un évènement représenté par un point M à l'intérieur ou sur le cône de lumière du futur, peut être considéré comme la conséquence d'un évènement à l'origine O.

Par contre *les évènements tels que P ou P' à l'extérieur du cône de lumière 0, ne peuvent avoir aucune relation de cause à effet avec l'évènement de l'origine 0.* En effet on peut toujours faire une *rotation de Lorentz* autour du point 0 pour passer à un autre référentiel S' dans lequel P se produit avant 0.

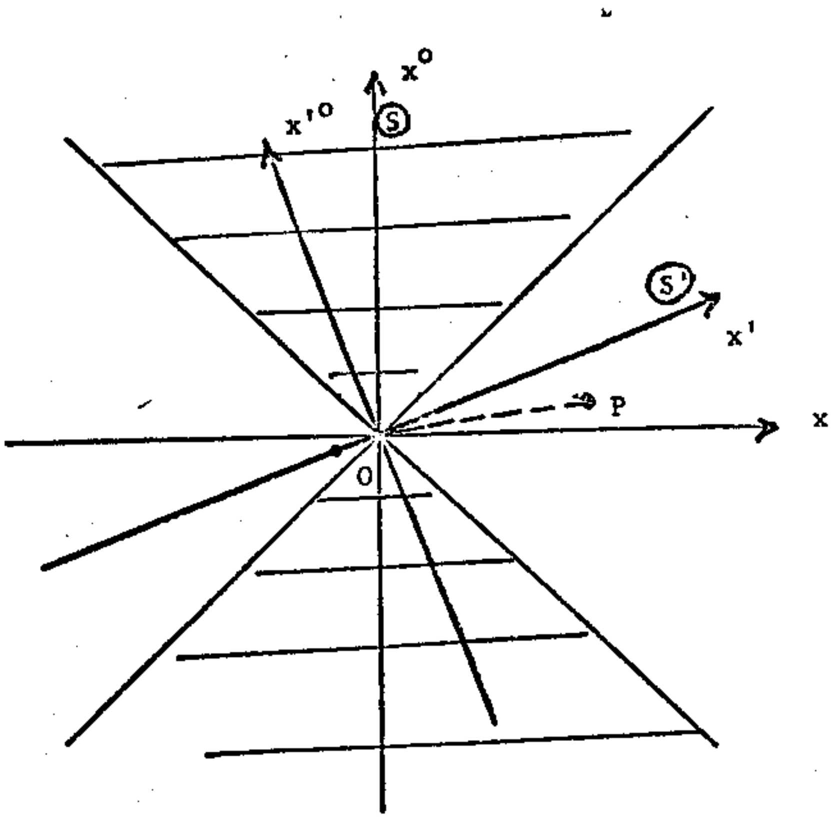

FIGURE (1,3) - Le signe de la composant temporelle d'un vecteur du genre espace n'est pas invariant.

Un vecteur dont la *norme*, définie par l'équation (1,14) est *positive*, s'appelle du *genre temps*. Si la *norme* d'un vecteur est *négative*, le vecteur est du *genre espace*.
Le principe de causalité impose que les vecteurs, qui relient deux évènements qui ont une relation de cause à effet entre eux, soient du genre temps.

Une transformation de Lorentz peut être regardée comme une rotation autour de l'origine dans l'espace-temps de Minkowski (avec un angle imaginaire) - on peut l'appeler une *rotation hyperbolique*. Ainsi dans le cas des équations (1,7) on peut poser:

$$x_4 = ix^o \quad , \quad x'_4 = ix'^o$$

$$\text{ch}\ \Theta = \cos(i\alpha) \quad , \quad \text{sh}\ \Theta = -\, i \sin(i\alpha) \quad , \alpha \in R$$

de sorte que les équations (1,7) soient de la forme:

$$x' = x\cos(i\alpha) + x_4 \sin(i\alpha)$$

$$x'_4 = x_4 \cos(i\alpha) - x \sin(i\alpha)$$

L'angle $i\alpha$ et le signe de $(dx^o)^2$ dans la forme différentielle dS^2 marquent la différence entre l'espace temps de Minkowski et un espace euclidien à quatre dimensions.

Remarquons en conclusion, qu'il est possible de rejeter le principe de causalité et de tenter de construire une théorie des actions (tachyoniques) à vitesse supérieure à la vitesse de la lumière c (voir § 1.3)

1.7 Transformation de Lorentz inverse: transformation de Poincaré inverse

Etant donnée une transformation de Lorentz (1,2), la transformation inverse est définie par l'équation:

$$x^\alpha = h^\alpha{}_\mu\, x'^\mu$$

d'où la condition sur la matrice h:

$$h^\alpha{}_\mu\, \ell^\mu{}_\upsilon = \delta^\alpha{}_\upsilon$$

ou encore

$$h^{\alpha}_{\ \mu} = (\ell^{-1})^{\alpha}_{\ \mu}$$

La matrice h est l'inverse de la matrice ℓ.

De l'équation (1,12) on tire:

$$g^{\upsilon} \ \ell^{\mu}_{\ \upsilon} \ g_{\mu\alpha} \ \ell^{\alpha}_{\ \beta} = \delta^{\lambda}_{\ \beta}$$

et par conséquent il vient:

$$h^{\lambda}_{\ \alpha} = (\ell^{-1})^{\lambda}_{\ \alpha} = g^{\lambda\upsilon} \ \ell^{\mu}_{\ \upsilon} \ g_{\mu\alpha} = \ell_{\alpha}^{\ \lambda}$$

Considérons par exemple la transformation (1,6)("boost" ou transformation de Lorentz pure). On a

$$\ell = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \beta = \frac{v}{c} , \quad \gamma = (\sqrt{1-\beta^2})^{-1}$$

det $\ell = +1$

$$\ell^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate qu'il suffit de remplacer v par -v ou β par $-\beta$ dans la matrice ℓ pour obtenir la matrice ℓ^{-1} dans ce cas particulier de transformation.

Etant donnée une transformation de Poincaré:

$$x'^{\mu} = a^{\mu} + \ell^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

la transformation inverse correspondante est:

$$x^{\mu} = -b^{\mu} + (\ell^{-1})^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu}$$

où
$$b^{\mu} = (\ell^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}\, a^{\alpha} = \ell_{\alpha}{}^{\mu} a^{\alpha}$$

1.8 Vecteurs contravariants et covariants

Soit

$$A^{\mu} = A^{\mu}(x) \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{1, 16}$$

un ensemble de quatre fonctions d'un point de l'espace-temps de Minkowski. Cet ensemble constitue un *vecteur* (quadrivecteur) *contravariant* dans cet espace si le groupe des transformations de Poincaré

$$x'^{\mu} = a^{\mu} + \ell^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \tag{1, 17}$$

induit une transformation linéaire, homogène de ces fonctions de la forme:

$$A'^{\mu}(x') = \ell^{\mu}{}_{\nu}\, A^{\nu}(x) \tag{1, 18}$$

Un vecteur contravariant se transforme donc, par définition, comme la différence entre les coordonnées de deux points de l'espace-temps, par rapport aux transformations de Poincaré.

Soit un ensemble de quatre fonctions d'un point:

$$B_\mu \doteq B_\mu(x)$$

telles que leurs transformées, par rapport à une transformation de Poincaré, laissent invariant le produit scalaire $B_\mu A^\mu$, où le vecteur $A^\mu(x)$ est contravariant:

$$B'_\mu(x')\ A'^\mu(x') = B_\alpha(x)\ A^\alpha(x)$$

L'ensemble $B_\mu\ (x)$ constitue un vecteur *covariant:*

$$B'_\mu\ (x')\, \ell^\mu{}_\upsilon = B_\upsilon\ (x) \qquad (1,\ 19)$$

L'équation (1, 11) relie les vecteurs covariants et contravariants dans tous les référentiels:

$$B'_\mu\ (x') = g_{\mu\upsilon}\ B'^\upsilon\ (x')$$

$$B_\mu\ (x) = g_{\mu\upsilon}\ B^\upsilon\ (x)$$

Ces relations se combinent avec les équations (1, 19) et (1, 18) pour rétablir l'équation (1, 12)

En multipliant l'équation (1, 19) par $(\ell^{-1})^\upsilon{}_\alpha$ on obtient:

$$B'_\alpha(x') = B_\nu(x)\ (\ell^{-1})^\nu{}_\alpha = B_\nu(x)\, \ell_\alpha{}^\nu \qquad (1.20)$$

1.9 Tenseurs

Le produit tensoriel de deux vecteurs contravariants $A_1^{\mu}(x)\, A_2^{\nu}(x)$ se transforme selon la loi:

$$A'^{\mu}_1(x')\, A'^{\nu}_2(x') = \ell^{\mu}{}_{\alpha}\, \ell^{\nu}{}_{\beta}\, A_1^{\alpha}(x)\, A_2^{\beta}(x) \quad .$$

Un tenseur contravariant du deuxième ordre est par définition l'ensemble de 16 fonctions

$$T^{\mu\nu}(x) \qquad (\mu,\nu = 0,\, 1,\, 2,\, 3)$$

qui se transforment selon l'équation:

$$T'^{\mu\nu}(x') = \ell^{\mu}{}_{\alpha}\, \ell^{\nu}{}_{\beta}\, T^{\alpha\beta}(x) \tag{1, 21}$$

De manière analogue on définit un *tenseur covariant* du deuxième ordre $S_{\mu\nu}(x)$ comme obéissant à la loi de transformation:

$$S'_{\mu\nu}(x') = S_{\alpha\beta}(x)\, (\ell^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}\, (\ell^{-1})^{\beta}{}_{\nu} \tag{1, 22}$$

$$= S_{\alpha\beta}(x)\, \ell_{\mu}{}^{\alpha} \ell_{\nu}{}^{\beta}$$

et un *tenseur mixte* $R_{\mu}{}^{\nu}(x)$ par la loi de transformation

$$R'^{\nu}{}_{\mu}(x') = \ell^{\nu}{}_{\alpha}\, R^{\alpha}{}_{\beta}(x)\, (\ell^{-1})^{\beta}{}_{\mu} \tag{1, 23}$$

En général un tenseur mixte, covariant de degré n et contravariant de degré m est l'ensemble des fonctions

$$\mathcal{U}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}_{a_1 a_2 \dots a_n}(x)$$

qui satisfont à la loi de transformation:

$$\mathcal{U}'^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}_{a_1a_2\dots a_n}(x') = \ell^{\alpha_1}_{\beta_1}\, \ell^{\alpha_2}_{\beta_2} \dots \ell^{\alpha m}_{\beta m}\, \mathcal{U}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_m}_{b_1b_2\dots b_n} (\ell^{-1})^{b_1}_{a_1} (\ell^{-1})^{b_1}_{a_i} \dots$$

$$\dots (\ell^{-1})^{b_n}_{a_n} \qquad (1.24)$$

induite par une transformation de Poincaré.
Son ordre est r, avec $m + n = r$ et ce tenseur a 4^r composantes. La trace d'un tenseur mixte du second degré $R^{\beta}_{\ \alpha}(x)$ est par définition la somme $R^{\alpha}_{\ \alpha}(x)$. Le lecteur montrera que la trace est un invariant par rapport au groupe de Poincaré, et que la somme sur α_1 : $\mathcal{U}^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}_{\alpha_1 a_2\dots a_n}$ est un tenseur de degré $m - 1$ contravariant et de degré $n - 1$ covariant.
Le tenseur de Kronecker $\delta^{\mu}_{\ \nu}$ a été défini par l'équation (1.10).
Il est invariant:

$$\delta'^{\mu}_{\ \nu} = \ell^{\mu}_{\ \alpha}\, \delta^{\alpha}_{\ \beta}\, (\ell^{-1})^{\beta}_{\ \nu} = \ell^{\mu}_{\ \alpha}(\ell^{-1})^{\alpha}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\ \nu} \qquad (1.25)$$

Le tenseur de Levi-Civita $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}$ est le tenseur totalement antisymétrique:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} = \begin{cases} \text{0, si deux indices sont égaux} \\ \text{1, si } \alpha\beta\gamma\mu \text{ est une permutation paire par rapport à 0,} \\ \text{1, 2, 3} \\ \text{-1, si } \alpha\beta\gamma\mu \text{ est une permutation impaire par rapport à} \\ \text{0,1,2,3} \end{cases}$$

Ce tenseur est invariant par rapport au groupe propre de Poincaré:

$$\varepsilon'^{\alpha\beta\lambda\mu} = \ell^{\alpha}{}_{\alpha'}\, \ell^{\beta}{}_{\beta'}\, \ell^{\lambda}{}_{\lambda'}\, \ell^{\mu}{}_{\mu'}\, \varepsilon^{\alpha'\beta'\lambda'\mu'}$$

$$= (\det \ell)\, \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu}$$

$$= \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} \qquad \underline{\text{si}}\text{: } \det \ell = 1$$

Un pseudo tenseur contient detℓ comme facteur dans la loi de transformation. $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\eta}$ est donc un pseudo tenseur

CHAPITRE 2

ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE

Les équations relativistes du mouvement de particules et du champ électromagnétique

2.1 Temps propre; quadrivitesse; accélération

Dans l'espace à trois dimentions, la trajectoire d'une particule en mouvement est déterminée par les équations:

$$z^k = z^k(t) \quad , \; k = 1,2,3$$

les trois coordonnées spatiales étant des fonctions du temps t. La vitesse de la particule à chaque instant est:

$$v^k = \frac{dz^k}{dt}$$

Dans l'espace - temps on peut introduire un paramètre scalaire r qui varie, sur la trajectoire, dans le même sens que le temps.

La trajectoire sera alors définie par les équations:

$$z^\mu = z^\mu(r) \quad , \; \mu = 0,1,2,3,$$

La distance entre deux points voisins de la trajectoire, dz^μ, sera déterminée par:

$$dz^\mu = \frac{dz^\mu}{dr}\, dr$$

et l'invariant associé à ces deux points est l'intervalle:

$$ds^2 = dz^\mu \, g_{\mu\nu} \, dz^\nu = (dz^o)^2 - dz^k dz^k \tag{2, 1}$$

L'intervalle de *temps propre* entre les deux points z^μ, $z^\mu + dz^\mu$, est, par définition l'invariant:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \quad (1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} \tag{2, 1a}$$

où $\qquad v^2 = (\vec{v})^2$

Le référentiel d'inertie par rapport auquel la particule est au repos à l'instant t est par définition, son *référentiel propre*. Dans un référentiel propre S, l'intervalle $d\tau$ coïncide avec dt, intervalle de temps mesuré en S.

Pour un rayon de lumière on a $d\tau = o$

Si l'on choisit pour une particule matérielle le temps propre comme paramètre r, on a les équations de la trajectoire:

$$z^\mu \quad z^\mu \quad (\tau) \tag{2, 2}$$

La vitesse quadrimensionnelle (quadrivitesse) est définie par:

$$u^\mu = \frac{dz^\mu}{d\tau} = v^\mu \frac{dt}{d\tau} \; , \quad v^\mu = \frac{dz^\mu}{dt} \tag{2, 3}$$

c'est à dire:

$$u^k = \frac{v^k}{\sqrt{1-\beta 2}} \; , \quad u^o = \frac{c}{\sqrt{1-\beta 2}} \; , \; k = 1,2,3, \beta = \frac{v}{c} \tag{2, 3a}$$

La quadrivitesse satisfait à la condition:

$$u^{\mu} \quad u_{\mu} = c^2 \quad \text{ou} \quad w^{\mu} \quad w_{\mu} = 1 \text{ avec } w^{\mu} \doteq \frac{u^{\mu}}{c} \qquad (2,\ 4)$$

Dans le cas des transformations (1,6) et (1,7) on a:

$$\begin{aligned} w'_x &= w_x \ \text{ch}\ \theta - w_o \ \text{sh}\ \theta \\ w'_o &= w_o \ \text{ch}\ \theta - w_z \ \text{sh}\ \theta \end{aligned} \qquad (2,\ 5)$$

La relation:

$$w_o{}^2 - w_x{}^2 = 1$$

indique que l'on peut poser:

$$w_o = \text{ch}\ \alpha \qquad w'_o = \text{ch}\ \alpha'$$

$$w_x = \text{sh}\ \alpha \qquad w'_x = \text{sh}\ \alpha'$$

par conséquent les équations (2, 5) prennent la forme:

$$\begin{aligned} \text{sh}\ \alpha' &= \text{sh}\ \alpha \ \ \text{ch}\ \theta - \text{ch}\ \alpha \ \ \text{sh}\ \theta \\ \text{ch}\ \alpha' &= \text{ch}\ \alpha \ \ \text{ch}\ \theta - \text{sh}\ \alpha \ \ \text{sh}\ \theta \end{aligned} \qquad (2.\ 6)$$

soit: $\alpha' = \alpha - \theta$

Maintenant $c \dfrac{w_x}{w_o} = v_x$ est la vitesse de la particule dans le référentiel S et $c \dfrac{w'_x}{w'_o} = v'_x$ est la vitesse de la particule dans le référentiel S' (ne pas confondre avec la vitesse v de S' par rapport à S)

Il résulte des formules (2, 6) que:

$$\text{th } \alpha' = \frac{\text{th } \alpha - \text{th } \theta}{1 - \text{th } \alpha \text{ th } \theta} \tag{2, 7}$$

et par conséquent:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \quad , \quad v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}} \tag{2, 8}$$

On voit que:

$$v_x < c \Rightarrow v'_x < c \tag{2, 8a}$$

$$v_x = c \Rightarrow v'_x = c$$

L'accélération quadridimensionnelle est définie par la formule:

$$\gamma^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \tag{2, 9}$$

De la condition:

$$u^\mu u_\mu = c^2 \tag{2.9a}$$

il résulte que l'accélération est orthogonale à la quadrivitesse:

$$\gamma^\mu u_\mu = 0 \tag{2, 9b}$$

2.2 Le quadrivecteur énergie-impulsion et l'équation du mouvement classique d'un corpuscule

La masse d'une particule animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel S dépend de cette vitesse et s'exprime par la formule d'Einstein:

$$m(\vec{v}) = \frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{2, 10}$$

où m_o est la masse au repos de la particule.

L'impulsion d'une particule, en mécanique newtonienne, est le produit de la masse par la vitesse. En mécanique relativiste on maintient cette définition mais la masse est donnée par la relation (2, 10); il vient alors:

$$\vec{p} = m(\vec{v})\,\vec{v} = \frac{m_o\,\vec{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{2, 10a}$$

L'énergie d'une particule libre est donnée par l'équation:

$$E = \frac{m_o\,c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \tag{2, 10b}$$

En considérant les équations (2, 3a) nous constatons qu'il est possible de définir le quadrivecteur impulsion:

$$p^{\mu} = m_{o}, u^{\mu} \tag{2, 11}$$

dont les composantes sont:

$$p^{o} = \frac{E}{c} \quad \text{et} \quad \vec{p}$$

On voit grâce à l'équation (2, 4) que le quadrivecteur impulsion d'une particule libre satisfait à l'équation:

$$p^{\mu} \, p_{\mu} = m_{o}^{2} \, c^{2} \tag{2, 12}$$

qui est la relation quadratique bien connue entre énergie et quantité de mouvement:

$$E^{2} = c^{2} \, (\vec{p}^{\,2} + m_{o}{}^{2} \, c^{2}) \tag{2, 13}$$

Si l'on considère un référentiel dans l'espace des impulsions, il y aura un cône défini par l'équation $p^{\mu} \; p_{\mu} = 0$ dont les solutions sont les particules libres de vitesse egale à la vitesse de la lumière: photons, neutrinos (fig. 2, 1) (peut-être les neutrinos ont une masse faible).

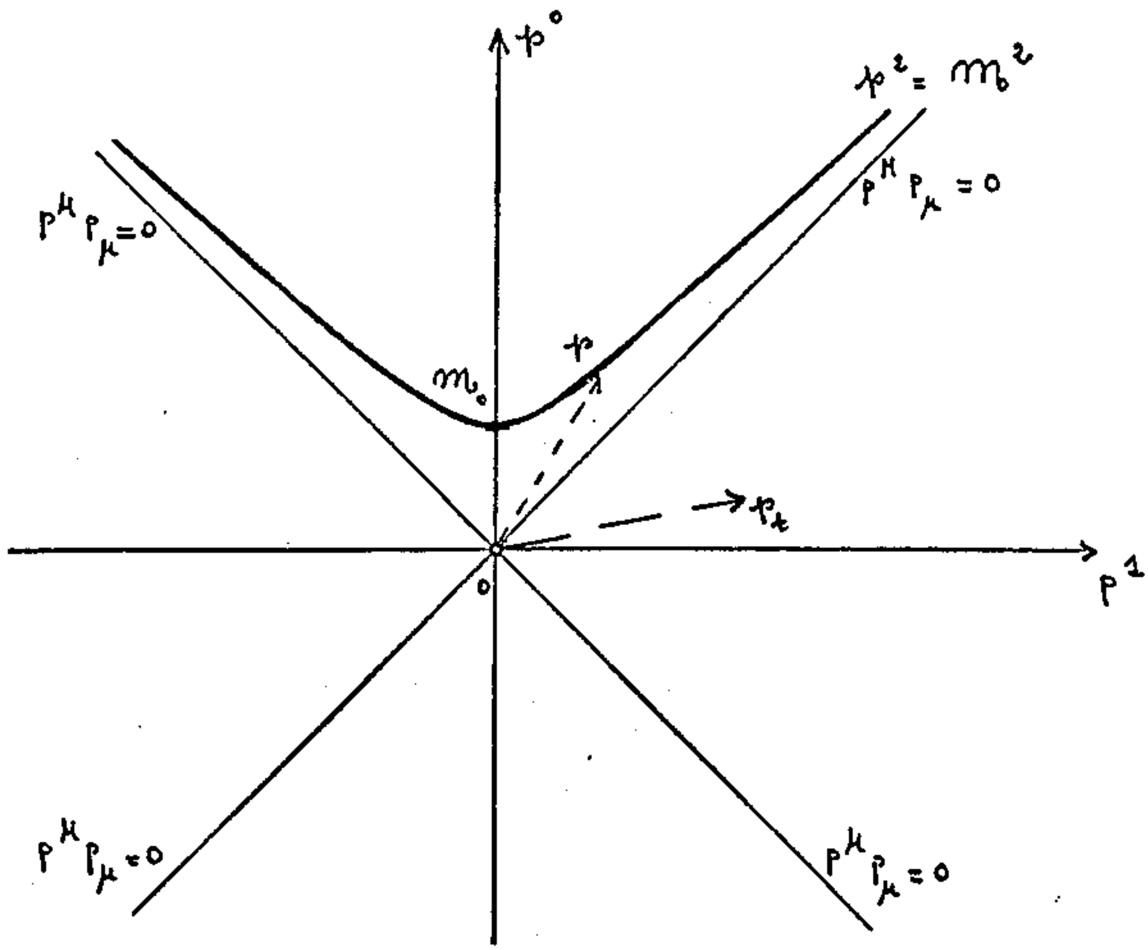

FIGURE (2, 1) - Cône de lumière dans l'espace des impulsions

Nous voyons que l'impulsion d'une particule libre qui satisfait ã l'équation (2, 12) est du genre temps puisque:

$$p^{\mu}p_{\mu} \; > \; 0 \text{ pour } \; m_o \neq 0 \qquad (2,\ 14)$$

Comme l'énergie est positive, $p^o > 0$, l'impulsion est un quadrivecteur du genre temps situé à l'intérieur du demi-cône vers le haut et le lieu des impulsions d'une particule de masse m_o est l'hyperboloïde (2.12)

En physique des particules élémentaires on dit d'une particule qui satisfait à l'équation (2, 12) - c'est à dire d'une particule libre - qu'elle est dans *sa couche de masse*. Le fait que le temps propre soit invariant entraine que la quadrivitesse u^μ (2, 3) se transforme comme un vecteur par rapport au groupe de Poincaré, et de même pour l'impulsion p^μ (2, 11).

$$
\begin{aligned}
u'^\mu &= \ell^\mu{}_\nu \, u^\nu \\
p'^\mu &= \ell^\mu{}_\nu \, p^\nu
\end{aligned}
\qquad (2, 15)
$$

Pour le groupe propre orthochrone, det $\ell=1, \ell_o{}^o \geq 1$, *les particules à énergie positive pour un observateur auront une énergie positive pour tout autre observateur en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier.*

L'équation de mouvement relativiste d'une particule qui généralise l'équation de Newton aura la forme:

$$c \frac{dp^\mu}{ds} = F^\mu (z) \qquad (2, 15a)$$

où $F^k = \dfrac{\mathcal{F}^k}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$, $\mathcal{F}^k$ étant la force qui agit sur la particule et $$F^{o} = \frac{\mathcal{F}^{o}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$, c $\mathcal{F}^{o}$ étant la puissance.

Cette équation s'écrit encore

$$m_o \; c^2 \; \frac{d^2 \; z^{\mu}}{ds^2} = F^{\mu} \; (z) \qquad (2,\ 15b)$$

2.3 Les hypothétiques tachyons

Un *tachyon* serait une particule de vitesse v supérieure à la vitesse de la lumière c.

Supposons que les équations (2, 10a) et (2, 10b) pour l'impulsion et l'énergie soient encore appliquables à un tachyon. Comme:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = i \quad \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)^{1/2} \text{ pour } v > c \qquad (2,\ 16)$$

on peut admettre que le paramètre m_o est imaginaire:

$$m_o = i\mu \;,\; \mu \varepsilon \;\; \mathcal{R}^{+}$$

de sorte que $\vec{p}$ et E soient des nombres réels:

$$\vec{p}_t = \frac{\mu \, \vec{v}}{\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)^{1/2}} \;, \qquad E_t = \frac{\mu c^2}{\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)^{1/2}} \qquad (2,\ 17)$$

pour v > c

Les valeurs possibles de l'impulsion et de l'énergie d'une particule réelle sont représentées, en fonction de la vitesse v, par les courbes de la Figure (2, 2).

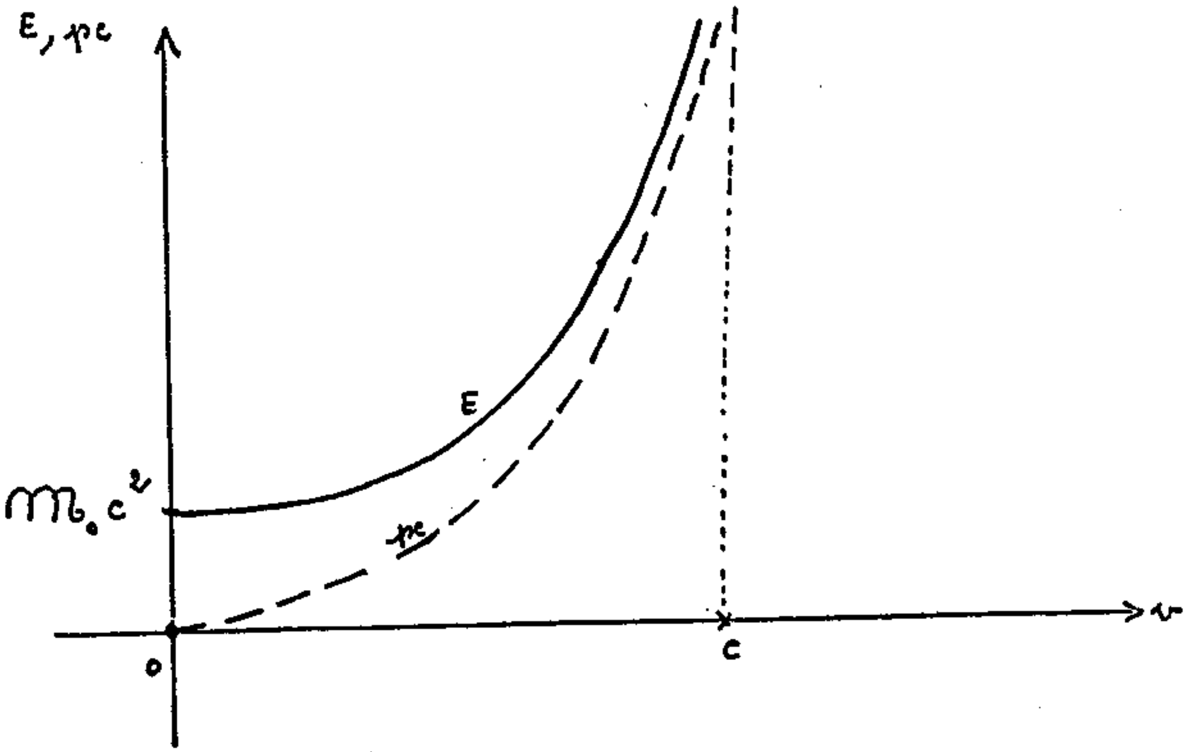

FIGURE (2, 2) - Énergie et impulsion d'une particule en fonction de la vitesse

Les valeurs possibles de l'impulsion et de l'énergie d'un tachyon sont données, en fonction de la vitesse v, par les courbes de la figure (2, 3).

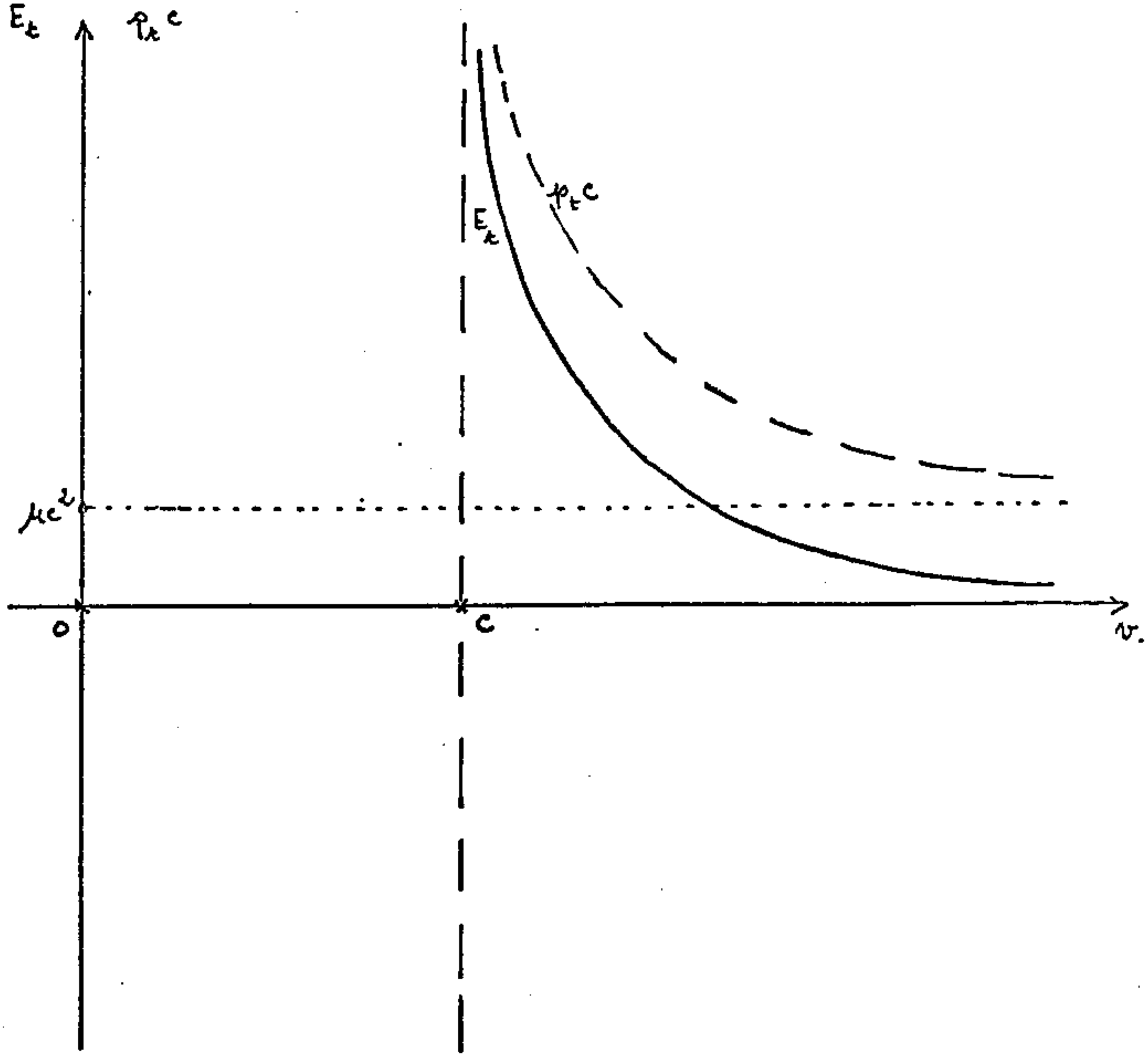

FIGURE (2, 3) - Energie et impulsion d'un tachyon en fonction de la vitesse -

Comme la vitesse d'un tachyon ne peut pas être inférieure à c, la notion de tachyon au repos, et donc de masse au repos, n'a pas de sens; le fait que m_o soit imaginaire n'est donc pas un inconvénient de la théorie.

L'énergie d'un tachyon croît quand v tend vers c, comme pour les particules ordinaires, mais elle décroît au fur et à mesure qu'augmente la vitesse du tachyon.
A la limite d'une vitesse infinie, l'énergie est nulle mais l'impulsion est finie et égale à μc:

$$\lim_{v \to \infty} E_t = 0 \quad , \quad \lim_{v \to \infty} P_t = \mu c.$$

Il n'y a donc pas propagation d'énergie à vitesse infinie, mais une impulsion μc se propage instantanément.
Il résulte des équations (2, 17) que l'énergie et l'impulsion d'un tachyon satisfont à la relation:

$$E_t^{\,2} = c^2(p_t^{\,2} - \mu^2 c^2)$$

Le quadrivecteur impulsion $p_t^{\,\alpha}$ est donc tel que:

$$p_t^{\,\alpha} \; p_{t_\alpha} = - \mu^2 c^2$$

c'est un vecteur du genre espace.

Par conséquent si un tachyon a une impulsion p^μ avec énergie positive, $p^o > 0$, pour un observateur donné, il existe un autre observateur, transformé du premier par une transformation de Poincaré propre et orthochrone, qui voit le même tachyon avec une énergie négative, $p'^o < 0$ (Figure 2.4).

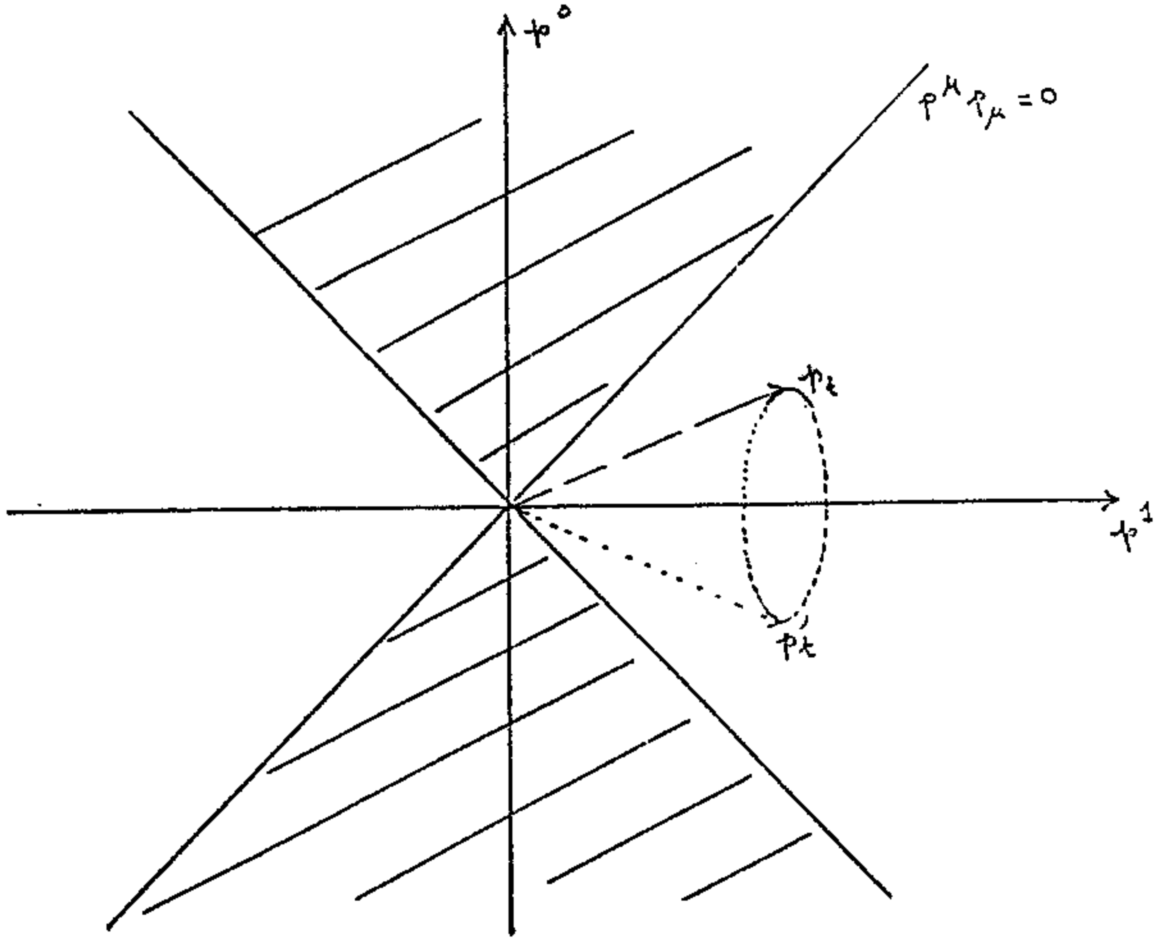

FIGURE (2, 4)

Autrement dit, le signe p^o, qui est invariant pour les vecteurs p^μ *du genre temps, n'est pas invariant pour les vecteurs* p^μ *du genre espace.* On peut démontrer ce résultat dans le cas simple d'une transformation spéciale de Lorentz (1, 6)

$$x' = \gamma\ (x - Vt),\ y' = y, z' = z$$

$$x'_o = \gamma\ (x_o - \frac{V}{c}\, x),\ x_o = ct$$

$$\gamma = (1 - \frac{V^2}{c^2})^{1/2},\ V < c$$

où V représente la vitesse de l'observateur O' qui se déplace pa-rallèlement à p_{t_x}, par rapport à l'observateur O; on a $V < c$. L'énergie du tachyon se transformant comme le temps, on aura:

$$E'_t = \gamma\ (E_t - V\, p_{t_x})$$

Il résulte des équations (2, 10a) (2, 10b) aussi bien que des é-quations (2, 17) que:

$$p_t = \frac{E_t}{c^2}\ \vec{v}_t \qquad \text{où} \quad \left|\vec{v}_t\right| > c$$

Par conséquent il vient:

$$E'_t = \gamma\, E_t \left(1 - \frac{V\, v_{t_x}}{c^2} \right)$$

Il existe donc un observateur O' animé d'une vitesse V telle que:

$$\frac{c}{v_{t_x}} < \frac{V}{c} < 1$$

où $v_{t_x} > c$, représente la vitesse du tachyon dans le référentiel de l'observateur O.

On aura donc pour l'observateur O':

$$\frac{V\, v_{t_x}}{c^2} > 1$$

et par conséquent:

$$E'_t < 0 \text{ si } E_t > 0$$

La trajectoire d'une particule ordinaire

$$z^\mu = z^\mu \ (s)$$

solution de l'équation de mouvement (2, 15b) est une ligne du genre temps, c'est à dire telle que deux points arbitraires de cette ligne déterminent toujours un vecteur du genre temps (Figure 2, 5)

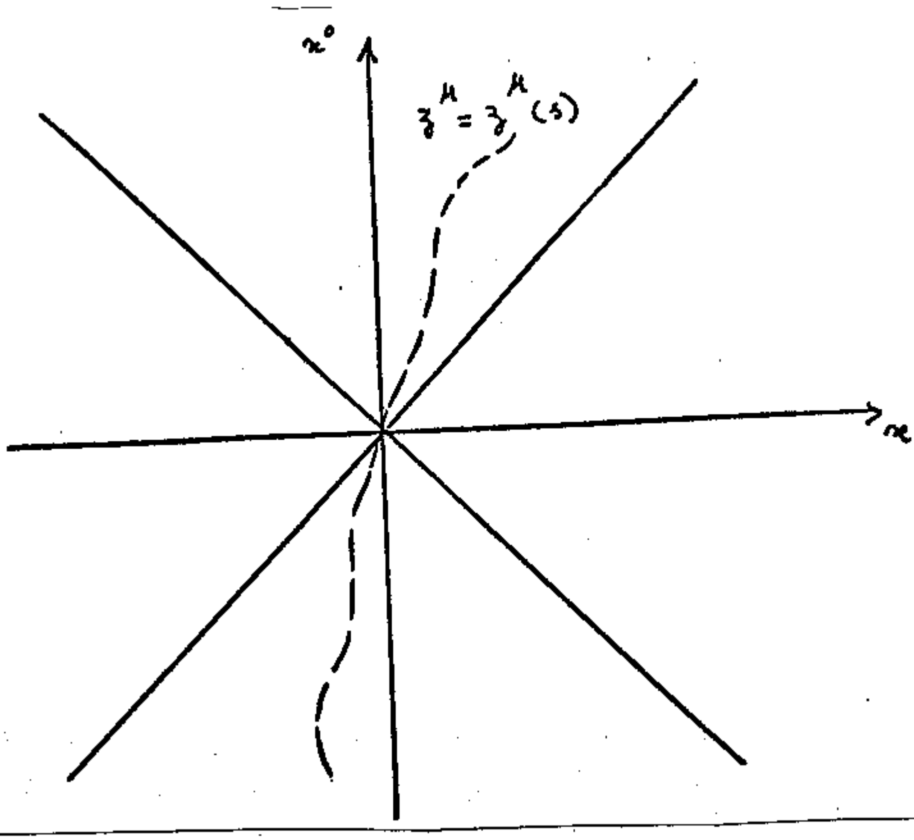

FIGURE (2, 5)

On a:

$$(z^\mu(s_2) - z^\mu(s_1)) \quad (z_\mu(s_2) - z_\mu(s_1)) > 0$$

Ce fait est naturellement équivalent au fait de dire que l'impulsion d'une particule est toujours un vecteur du genre temps.

Comme nous avons remarqué précédemment que l'impulsion d'un tachyon était toujours du genre espace, la trajectoire du tachyon devra donc être une ligne d'univers du genre espace (Figure 2.6)

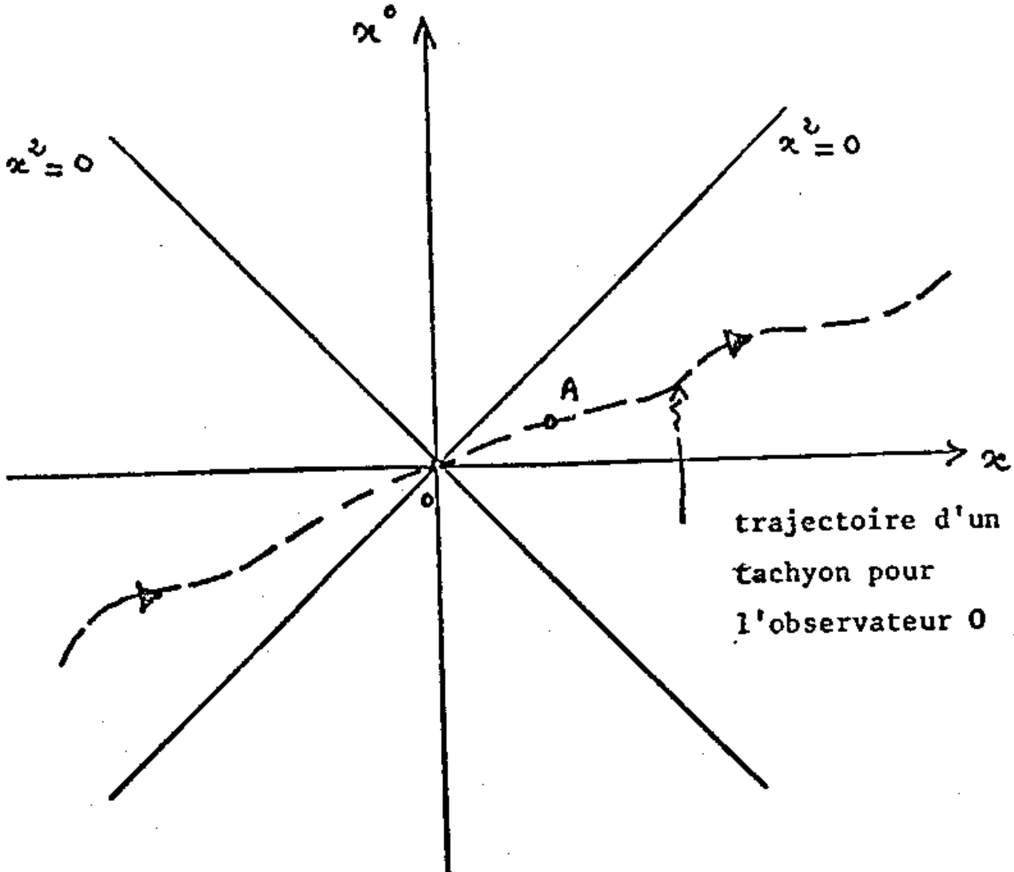

FIGURE (2, 6)

L'une des difficultés fondamentales d'une théorie classique des tachyons est la violation du principe de causalité.
En effet si, pour un observateur donné O, la trajectoire d'un tachyon est la ligne représentée par la figure (2, 6) pour laquel-

le tachyon se propage vers le futur, il existera un autre observateur O' pour lequel le tachyon se propagera vers le passé et sa trajectoire sera représentée par la Figure (2, 7).

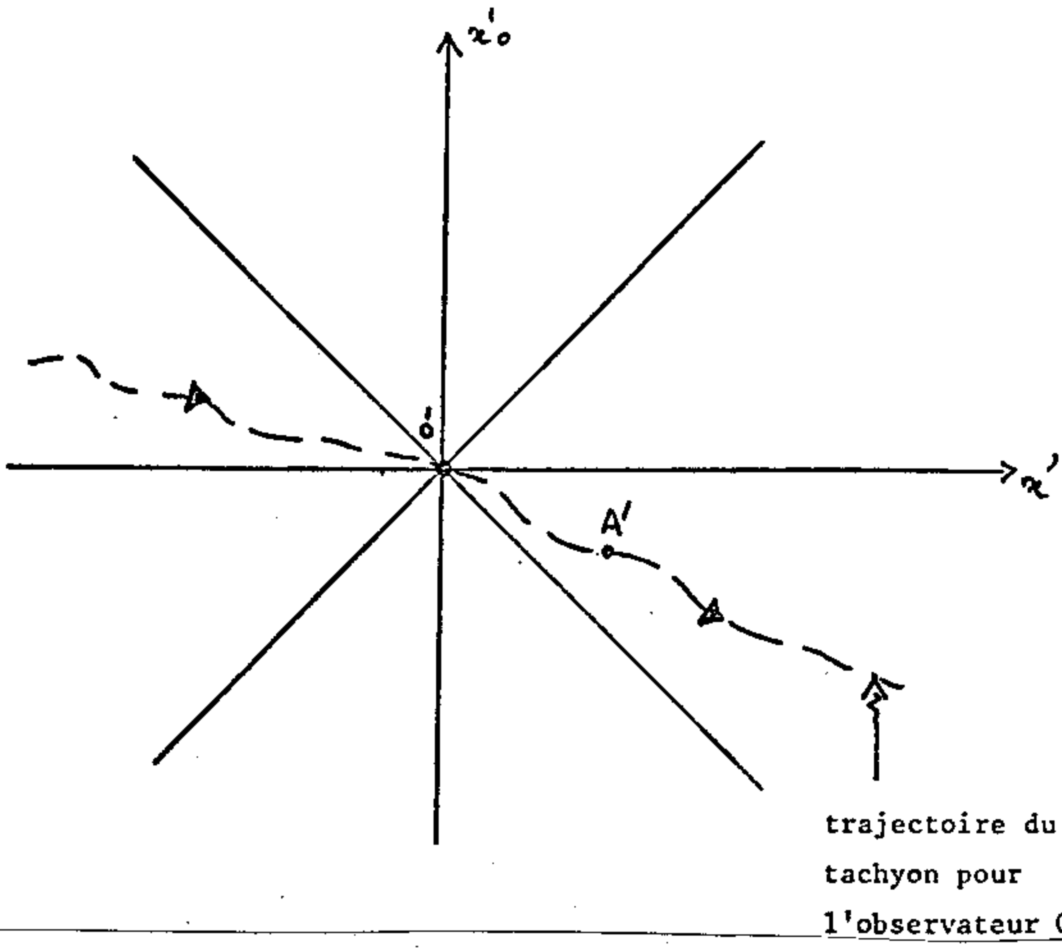

FIGURE (2, 7)

Autrement dit, si un tachyon est émis au point O à l'instant initial t = o et arrive au point A à l'instant t_A, postérieur, $t_A > o$ pour l'observateur O, (Figure 2, 6) pour l'observateur O' (Figure 2, 7) ce même tachyon, émis à l'instant t' = o, arrivera en A' à l'instant $t_{A'} < o$, c'est à dire dans le passé de O'.
La relation cause-effet n'est pas invariante; c'est une conséquence des transformations de Lorentz de vecteurs du genre espace.

Une réinterprètation possible est de dire que, l'énergie du tachyon étant négative pour O' si elle est positive pour O, l'émission par O' d'un tachyon à énergie négative E absorbé par A' dans la passé $t'_a < 0$, est équivalente à l'émission d'un tachyon avec énergie positive - E à l'instant $t_{A'} < 0$ par A' et absorption par O' à l'instant $t' = 0$.

Les processus d'émission et d'absorption sont alors renversés pour les deux observateurs.

Un tachyon peut donc subir l'action d'une force et passer d'un état avec énergie positive à un état avec énergie négative (Figure 2, 8)

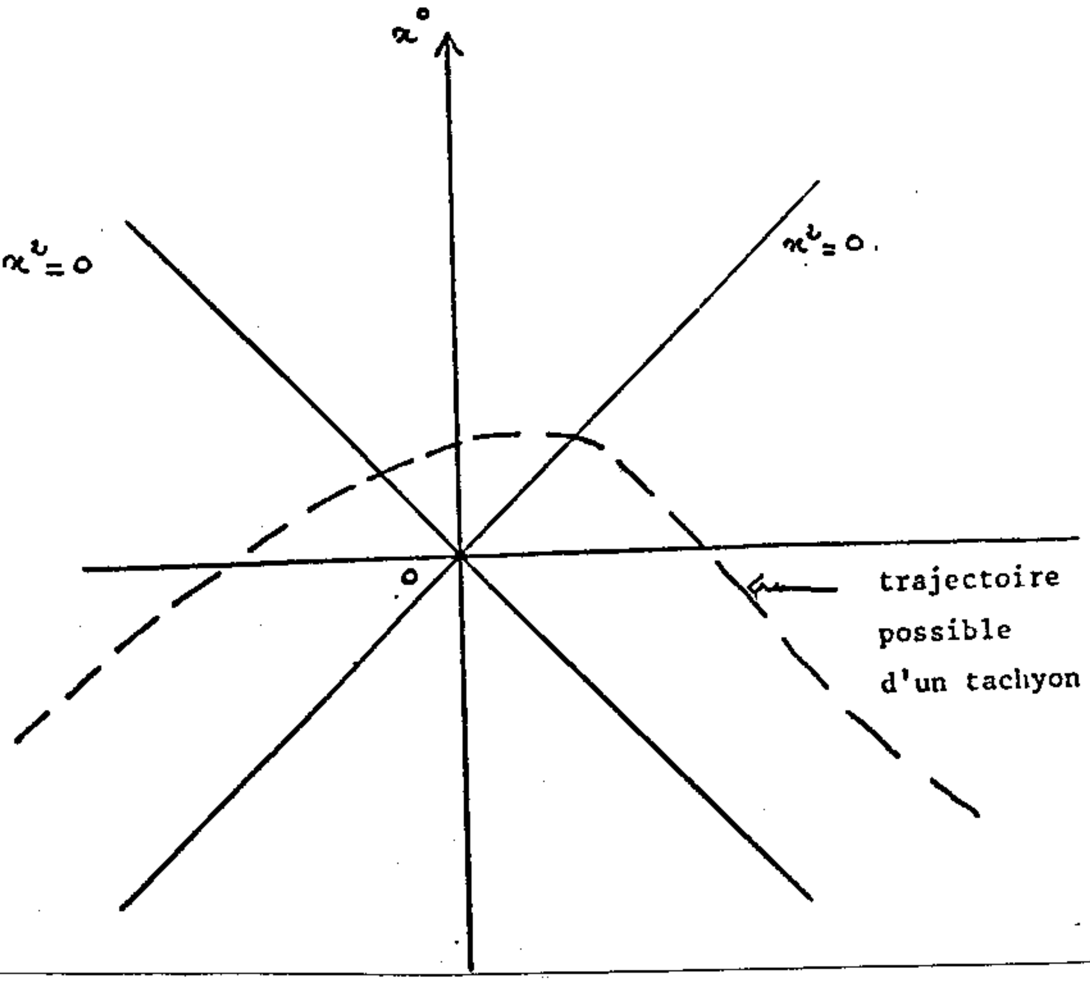

FIGURE (2, 8)

Si une *interaction existait entre un tachyon et une particule ordinaire, on devrait pouvoir observer la particule ordinaire passant à un état d'énergie, arbitrairement élevée* due au transfert de l'énergie du tachyon qui, lui, pourrait passer à un état d'énergie négative arbitrairement grand en valeur absolue.

Il résulte de l'équation (2, 1a) que l'intervalle de "temps propre" pour un tachyon est imaginaire:

$$ds = i ds_t = icdt\ (\frac{v^2}{c^2} - 1)^{1/2} \qquad \text{pour} \quad v > c$$

et que par conséquent la force qui agit sur un tachyon a la forme $- i\ F_t{}^{\mu}(z)$. L'équation (2, 15a) sera par la suite équivalente à l'équation:

$$c\ \frac{dp_t{}^{\alpha}}{ds_t} = F_t{}^{\mu}\ (z)$$

où $\qquad F_t{}^{\mu}\ (z)$ est un vecteur réel.

L'égalité

$$F^{\mu}\ (z) = - 1\ F_t{}^{\mu}\ (z)$$

est satisfaite dans le cas électrodynamique. Nous abandonnons ici l'étude des tachyons.

2.4 Les équations du mouvement et le principe d'action

Revenons à l'étude des particules classiques normales.

Soit:

$$ds = (dz^{\mu}\ dz_{\mu})^{1/2}$$

l'intervalle d'univers, équation (2, 1)

L'intégrale:

$$\int_{s_1}^{s_2} ds$$

est l'action d'une particule libre.

On postule que la variation de l'action est nulle:

$$\delta \int_{s1}^{s_2} ds = 0 \text{ avec } \delta\ z^{\mu}\ (s)\ \Big|_{\text{limites } s_1,\ s_2} = 0 \qquad \textbf{(2.18)}$$

et que cette équation détermine l'équation du mouvement de la particule. Soit la famille de trajectoires

$$z^{\mu} = z^{\mu}\ (s,\ \alpha)$$

définie par le paramètre α; à chaque valeur de α il correspond une trajectoire déterminée par z^μ comme fonction de s.

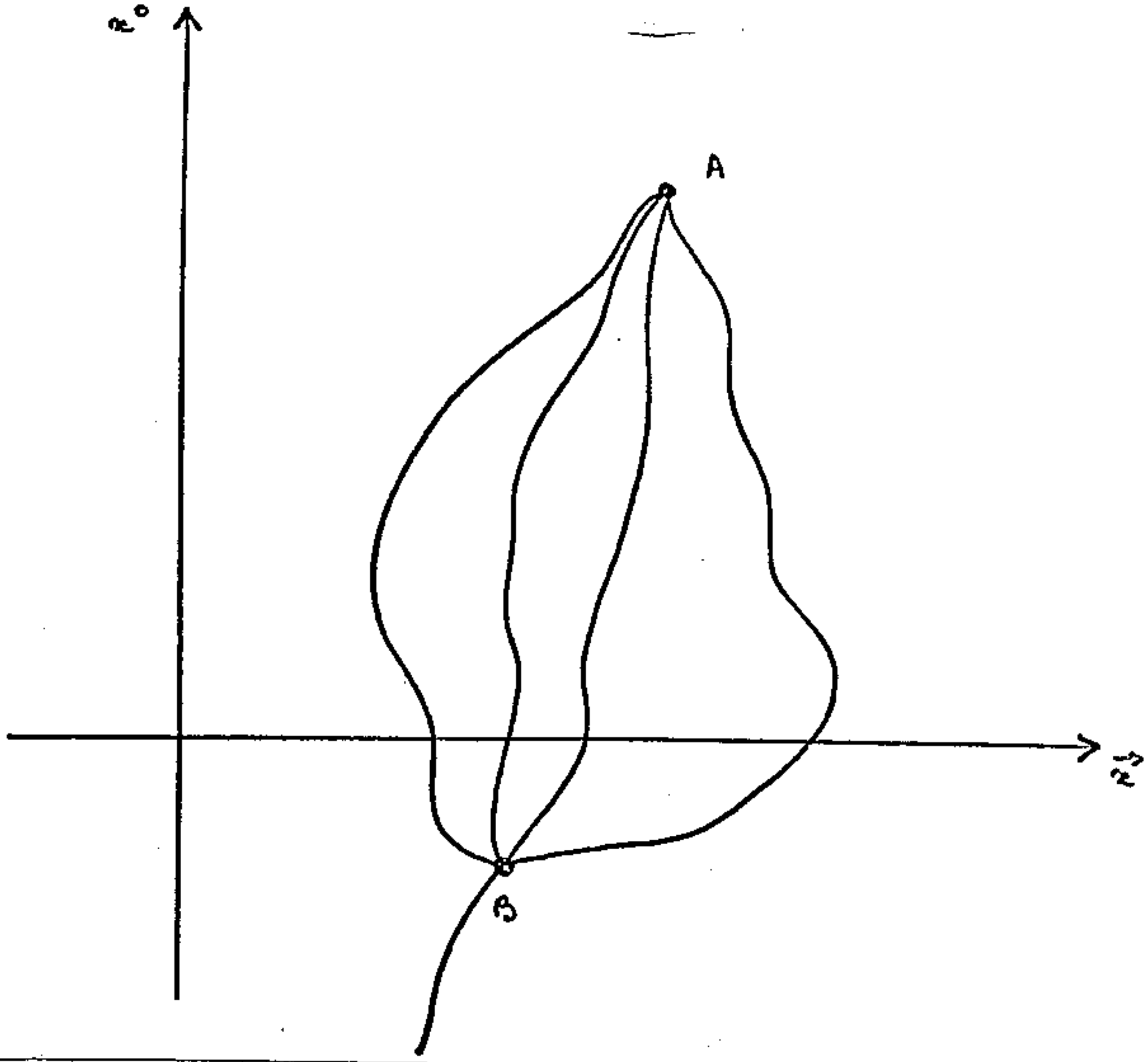

FIGURE (2, 9)

La variation de z^μ est par définition la différentielle de z^μ correspondant à $d\alpha$:

$$\delta\, z^\mu = \frac{\partial z^\mu}{\partial \alpha}\, d\alpha$$

alors que nous écrivons:

$$dz^{\mu} = \left(\frac{\partial z^{\mu}}{\partial s}\right) ds$$
$$\alpha = \text{constante}$$

Nous avons alors:

$$\delta \int_{s1}^{s_2} ds = \int_{s^1}^{s_2} \delta \ (ds)$$

puisque

$$\delta \ (ds) = \frac{dz^{\mu} \ \delta(dz_{\mu})}{(dz^{\mu} \ dz_{\mu})^{1/2}}$$

$$= \frac{dz^{\mu}}{ds} \ \delta \ (dz_{\mu})$$

$$= \frac{dz^{\mu}}{ds} \ d \ (\delta z_{\mu})$$

on a

$$\delta \int_{s^1}^{s_2} ds = \int_{s^1}^{s_2} \frac{dz^{\mu}}{ds} \ \delta \ (dz_{\mu})$$

$$= \int_{s^1}^{s_2} \frac{dz^{\mu}}{ds} \ d \ (\delta z_{\mu})$$

$$= \int_{s^1}^{s_2} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{dz^\mu}{ds} \delta z_\mu \right) - \left(\frac{d}{ds} \frac{dz^\mu}{ds} \right) \delta z_\mu \right] ds$$

$$= \frac{dz^\mu}{ds} \delta z_\mu \Big|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{d}{ds} \frac{dz^\mu}{ds} \right) \delta z_\mu \, ds$$

comme d'aure part:

$$\delta z_\mu \Big|_{s1}^{s_2} = 0$$

il vient:

$$\delta \int_{s^1}^{s_2} ds = - \int_{s^1}^{s_2} \left(\frac{d}{ds} \frac{dz^\mu}{ds} \right) \delta z_\mu \, ds = 0$$

comme $\delta \int_{s^1}^{s_2}$ ds s'annulle (d'aprés le principe d'action, pour δz_μ arbitraire et qui s'annulle à la frontière)

on obtient:

$$\frac{d}{ds} \frac{dz^\mu}{ds} = 0$$

ou encore:

$$\frac{du^\mu}{ds} = 0$$

Pour une particule libre la vitesse est constante et donc l'accélération nulle.

2.5 Le principe d'action pour une particule placée dans un champ électromagnétique

Considérons à présent le postulat suivant:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \left[m\, ds + \frac{e}{m_o\, c^2}\, A^\mu (z)\, dz_\mu \right] = 0 \qquad (2.19)$$

où $A^\mu (z)$ est le champ électromagnétique dans lequel se trouve la particule de charge e et de masse m_o.

On a

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} A^\mu (z)\, dz_\mu$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} \delta A^\mu dz_\mu + \int_{s_1}^{s_2} A^\mu \delta (dz_\mu)$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial A^\mu}{\partial z_\alpha}\, \delta z^\alpha\, dz_\mu + \int_{s_1}^{s_2} A^\mu\, d\, (\delta z\mu)$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} d(a^{\mu}\delta z_{\mu}) + \int_{s_1}^{s_2} (\frac{\partial A^{\mu}}{\partial z_{\alpha}} \delta z^{\alpha} dz_{\mu} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial z_{\alpha}} dz^{\alpha}\delta z_{\mu})$$

$$= A^{\mu}\delta z_{\mu}\Big|_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} (\frac{\partial A^{\mu}}{\partial z_{\alpha}} - \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial z_{\mu}}) dz_{\mu}\delta z_{\alpha}$$

Comme on a par hypothèses:

$$\delta z_{\mu} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0$$

il vient

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} A^{\mu}(z)\, dz_{\mu} = \int_{s_1}^{s_2} (\frac{\partial A^{\mu}}{\partial z_{\alpha}} - \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial z_{\mu}}) dz_{\mu}\, \delta z_{\alpha}$$

En remplaçant dans l'équation de départ

on obtient donc:

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \left[+ ds + \frac{e}{m_o c^2} A^{\mu}(z)\, dz_{\mu} \right] =$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{-d}{ds} (\frac{dz_{\alpha}}{ds}) + \frac{e}{m_o c^2} (\frac{\partial A_{\mu}}{\partial z_{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial z_{\mu}}) \frac{dz^{\mu}}{ds} \right] \delta z^{\alpha} ds = 0$$

Cette relation devant être vérifiée quelle que soit la variation δz^{α} on aura:

$$m_o\, {}_o c^2 \frac{d}{ds}(\frac{dz_\alpha}{ds} = e\, (\frac{\partial A^\mu}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial A^\alpha}{\partial z_\mu}) \frac{dz_\mu}{ds}$$

$$= - e\, (\frac{\partial A^\alpha}{\partial z_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial z_\alpha}) \frac{dz_\mu}{ds}$$

Soit:

$$m_o\, c^2 \frac{d}{ds} \quad \frac{dz^\alpha}{ds} = - e\, F^{\alpha\mu}\ (z) \frac{dz_\mu}{ds} \qquad (2.20)$$

où

$$F^{\alpha\mu} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial z_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial z_\alpha} \equiv \partial^\mu A^\alpha - \partial^\alpha A^\mu \qquad (2,\ 21)$$

est le tenseur antisymétrique du champ électromagnétique.

On a:

$$E^k = F^{ok} = \partial^k\, A^o - \partial^o\, A^k = - \partial_k\, A^o - \partial^o\, A^k = - E_k$$

$$\vec{E} = - \vec{\nabla}\, \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$F^{12} = \partial^2\, A^1 - \partial^1\, A^2 = - \partial_2\, A^1 + \partial_1\, A^2 = B^3$$

$$F^{23} = \partial^3\, A^2 - \partial^2\, A^3 = - \partial_3\, A^2 + \partial_2\, A^3 = B^1$$

$$F^{31} = \partial^1\, A^3 - \partial^3\, A^1 = - \partial_1\, A^3 + \partial_3\, A^1 = B^2$$

soit

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.6 Le champ dual et les équations homogènes de Maxwell

Le champ dual est, par définition:

$$* \ F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \qquad (2, 22).$$

où $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ est le tenseur totalement antisymétrique.

$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = - \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$

On a

$$\varepsilon^{0123} = 1 \ ; \ \varepsilon^{0231} = 1 \ ; \ \varepsilon^{0312} = 1$$

$$\varepsilon^{3021} = 1 \ ; \ \varepsilon^{3201} = -1 \ ; \ \varepsilon^{2301} = 1$$

$$\varepsilon^{3102} = 1 \ ; \ \varepsilon^{1230} = -1 \ ; \ \varepsilon^{1203} = 1$$

d'où on tire:

$$* \; F^{01} = F_{23} \; ; \quad * \; F^{02} = F_{31} \; ; \quad * \; F^{03} = F_{12}$$

$$* \; F^{12} = F_{03} \; ; \quad * \; F^{23} = F_{01} \; ; \quad * \; F^{31} = F_{02}$$

soit:

$$* \; F^{0k} = * \; E^{k} = B_k \; ; \quad * \; F_{01} = - F_{23}$$

$$* \; F^{j\ell} = * \; B^{k} = - E^{k} \; ; \; * \; F_{23} = F_{01}$$

Considérons à présent la relation:

$$\frac{\partial * F^{\alpha\beta}}{\partial z^{\beta}} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial z^{\beta}}$$

$$= \frac{1}{6} \left| \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial z^{\beta}} + \varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} \frac{\partial F_{\beta\mu}}{\partial z^{\nu}} + \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} \frac{\partial F_{\nu\beta}}{\partial z^{\mu}} \right|$$

mais on a

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = - \varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} = \varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} = - \varepsilon^{\alpha\nu\mu\beta} = \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta}$$

il vient donc:

$$\frac{\partial^{*} F^{\alpha\beta}}{\partial z^{\beta}} = \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial z^{\beta}} + \frac{\partial F_{\beta\mu}}{\partial z^{\nu}} + \frac{\partial F_{\nu\beta}}{\partial z^{\mu}}\right)$$

par conséquent les équations homogènes de Maxwell sont équivalentes à la relation:

$$\frac{\partial\, {}^*F^{\alpha\beta}}{\partial z^\beta} = 0 \qquad (2,\ 23)$$

On constate que:

$${}^*F^{\alpha\beta}\ G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\ F_{\mu\nu}\ G_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{2}\ F_{\mu\nu}\ \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\ G_{\alpha\beta}$$

$$= F_{\mu\nu}\ {}^*G^{\mu\nu}$$

Ce produit est un pseudoscalaire

$${}^*F'^{\alpha\beta}\ G'_{\alpha\beta} = (\det \ell)\ {}^*F^{\alpha\beta}\ G_{\alpha\beta}$$

puisque ${}^*F^{\alpha\beta}$ est un pseudotenseur

2.7 Les équations du champ électromagnétique et des particules en interaction

Considérons l'action du champ:

$$S_1 = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}\ F^{\mu\nu}\ d^4x \qquad (2,\ 24)$$

On a:

$$\delta S_1 = -\frac{1}{2} \int F_{\mu\nu}\delta\ F^{\mu\nu}\ d^4x =$$

$$= -\frac{1}{2} \int F_{\mu\nu}\ (\delta\partial^\nu A^\mu - \delta\partial^\mu A^\nu)\ d^4x =$$

$$= - \frac{1}{2} \int F_{\mu\nu} \quad (\partial^{\nu}\delta A^{\mu} - \partial^{\mu}\delta A^{\nu}) \; d^4x =$$

$$= + \frac{1}{2} \int \left[\partial^{\mu} \; (F_{\mu\nu}\delta A^{\nu}) \; - \; \partial^{\nu} \; (F_{\mu\nu}\delta A^{\mu})\right] d^4x \; -$$

$$- \frac{1}{2} \int \left[(\partial^{\mu} \; F_{\mu\nu})\delta A^{\nu} \; - \; (\partial^{\nu} \; F_{\mu\nu})\delta A^{\mu}\right] d^4x$$

si $\delta A^{\nu} \Big|$ frontière $= 0$, c'est-à-dire si δA^{ν} s'annule sur la frontière du domaine où l'on intègre S_1 il vient:

$$\delta S_1 = \int \partial^{\nu} F_{\mu\nu}\delta A^{\mu} \; d^4x.$$

Le postulat $\delta S_1 = 0$ conduit donc aux équations du champ libre:

$$\delta^{\nu} \; F_{\mu\nu} = 0$$

pour toute variation δA^{μ} s'annulant à la frontière du domaine d'intègration.

Nous sommes par conséquent amenés à considérer l'action S suivante:

$$S = - \int m_o c^2 ds - \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}(x) \; F^{\mu\nu}(x) \; d^4x - e \int A^{\mu} \; (z) dz_{\mu} \quad (2, \; 25)$$

où

$- \int m_o c^2 \; ds$ est l'action pour la particule)

$- \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}(x)\, F^{\mu\nu}(x)\, d^4x$ est l'action pour le champ,

$- e \int A^{\mu}(z)\, dz_{\mu} = - \int j^{\mu}(x)\, A_{\mu}(x)\, d^4x$ est l'action d'interaction

On peut écrire:

$$j_{\mu}(x) = e \int \frac{dz_{\mu}}{ds}\, \delta^4 \left[x - z(s) \right] ds$$

$j_{\mu}(x)$ est le courant électrique de la particule ponctuelle de charge e.

On a:

$$\delta^4 \left[x - z(s) \right] = \delta \left[x^o - z^o(s) \right] . \delta \left[\vec{x} - \vec{z}(s) \right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta \left[g(x) \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta \left[g(x) \right] \left| \frac{dg(x)}{g'(x)} \right|$$

$$= \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

avec $g(x_i) = 0$

d'où on tire:

$$j_{\mu}(x) = e\, \frac{dz_{\mu}}{dz^o}\, \delta \left[\vec{x} - \vec{z}(z^o) \right]$$

Si on fait varier $z^{\mu}(s)$ on obtient l'équation de la particule

$$m_o\, c^2 \,\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} = - \, e \, F^{\mu\nu}\,(z)\,\frac{dz_\nu}{ds}$$

Si on fait varier $A^\mu\,(x)$ on obtient:

$$\delta S = - \int \partial^\mu F_{\mu\nu}\, \delta A^\nu\, d^4x - \int j_\nu(x)\, \delta A^\nu\, d^4x =$$
$$= 0$$

d'oũ

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + j_\nu = 0$$

ou encore:

$$\partial^\mu F_{\nu\mu} = j_\nu \qquad (2, 26)$$

Cette équation est l'équation du mouvement du champ - l'équation de Maxwell.

On a:

$$j^o\,(x) = \rho(x) = e\,\frac{dz^o}{dz^o}\,\delta\,[\vec{x}-\vec{z}(z^o)\,]$$

$$= e\,\delta\,[\vec{x}-\vec{z}\,(z^o)\,]$$

$j^o\,(x) = \rho(x)$ représente la densité de charge en un point $\vec{x}$ quelconque de l'espace, la particule étant localisée en un point de sa trajectoire $\vec{z}\,(s)$.

Le tri-vecteur courant est donné par:

$$j^k\ (x) = e\ \frac{dz^k}{dz^o}\ \delta\ [\ \vec{x}-\vec{z}\ (z^o)\ ]$$

S est *l'action complète de l'interaction d'une charge ponctuelle avec un champ.*

Dans le cas présent, il est impossible d'obtenir l'équation du mouvement de la particule à partir de l'équation du champ. Par contre l'équation d'une particule dans un champ de gravitation peut se déduire des équations d'Einstein de ce champ parce que ces dernières ne sont pas linéaires.

Classiquement, les équations d'une charge dans un champ électromagnétique sont donc:

$$\partial_\mu\ F^{\nu\mu} = j^\nu = e \int \frac{dz^\nu}{ds}\ \delta^{(4)}\ |\ x-z\ (s)\ |\ ds$$

$$\partial_\mu^*\ F^{\mu\nu} = 0$$

$$m_o\ c^2\ \frac{d^2z^\mu}{ds^2} = -\ e\ F^{\mu\nu}\ \frac{dz_\nu}{ds}$$

De la relation:

$$\partial_\mu\ F^{\nu\mu} = j^\nu$$

on tire:

$$\partial_\nu\ \partial_\mu\ F^{\nu\mu} \equiv 0 = \partial_\nu\ j^\nu$$

Le courant est donc conservé:

$$\partial_\nu j^\nu = \partial_o j^o + \vec{\nabla}\,\vec{j} = 0$$

L'équation de Maxwell s' écrit:

$$\partial_\mu\ (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = j^\nu \qquad (2,\ 27)$$

ou:

$$\Box A^\nu - \partial^\nu\ \partial_\mu\ A^\mu = j^\nu$$

Cette équation est invariante par rapport au groupe de trans formations:

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda(x) \qquad (2,\ 28)$$

où $\Lambda(x)$ est une fonction scalaire arbitraire (différentiable). En effect le champ $F^{\mu\nu}(x)$ est invariant sous ces transformations:

$$F^{\mu\nu'}\ (x) = F^{\mu\nu}(x)$$

par conséquent les équations (2, 26) et (2, 27) sont aussi invariantes.

Les transformations (2, 28) s'appelent transformations de jauje électromagnétique. En théorie classique, les corpuscules obeissant aux équations (2, 29) les variables $z^\mu(s)$ ne aubissent aucune transformation correspondante aux transformations (2, 28). En théorie quantique la matière étant representée par certains champs complexes - par example, un scalaire $\phi(x)$ pour des par ticules à spin zero, un spineur de Dirac $\Psi(x)$, pour les particules à spin 1/2 - ces champs, comme nous le verrons subissent une transformation de phase |avec $\Lambda(x)$ comme phase|, en correspondance aux transformations (2, 28). C'est cet ensemble de transformations du champ électromagnétique et du champ de la matière qui constitue le *groupe de jauge électromagnétique*.

En physique classique, donc, c'est le champ $F^{\mu\nu}(x)$ qui est rattaché aux observations, le champ $A^{\mu}(x)$ n'étant determiné que dans une jauge choisie et qui peut varier d'observateur en observateur.

CHAPITRE III

LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE MOUVEMENT

3.1 Les fonctions de Green retardée et avancée du champ eléctromagnétique

Les équations d'un champ électromagnétique en interaction avec un électron classique sont donc données par:

$$\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = j^{\mu} \tag{3, 0}$$

où

$$j^{\mu}(x) = e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz^{\mu}}{ds} \delta^{4} (x - z (s)) ds \tag{3, 1}$$

et

$$m_o c^2 \frac{d^2 z^{\mu}}{ds^2} = - e F^{\mu\nu} (z) \frac{dz_{\nu}}{ds}$$

avec

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\nu} A^{\mu} - \partial^{\mu} A^{\nu}$$

Pour déterminer le courant $j^{\mu}(x)$ de l'électron classique, il faut connaître sa trajectoire $z^{\mu}(S)$. Celle-ci, est par ailleurs solution de l'équation de la particule dans laquelle intervient le champ qui est solution de la première équation.

On rappelle, que, étant donnée une équation différentielle linéaire en ϕ (z) du type:

$$L \left[\phi(z) \right] = f(z) \tag{3, 2}$$

où L est l'opérateur

$$L = \sum_n a_n \frac{d^n}{dz^{\;n}} \text{ ; les } a_n \text{ sont constantes,}$$

et f(x) est la source du champ $\phi(z)$, *la fonction de Green* de cette équation est par définition:

$$L \left[G\ (z\ ;\ z') \right] = \delta\ (z - z') \tag{3, 3}$$

si $\delta(x)$ représente la fonction de Dirac, source de la fonction de Green. Comme δ, G est une distribution.

Une solution particulière de l'équation (3, 2) sera donnée par:

$$\phi(z) = \int G\ (z\ ;\ z')\ f\ (z')\ dz'$$

comme on peut le vérifier par application de l'opérateur L aux deux membres de cette dernière relation.

Si $\phi_o(z)$ est la solution générale de l'équation homogène:

$$L \left[\phi_o(z) \right] = 0$$

alors une solution générale de l'équation inhomogène (3, 2) s' écrira:

$$\phi(z) = \phi_o(z) + \int G(z; z') \, f \, (z') \, dz'$$

On constate que la fonction de Green prend les contributions de la source f(z') en les points z' et les transporte pour ainsi dire au point z pour donner la contribution totale de la source au champ $\phi(z)$.

On appelle souvent la fonction de Green un *propagateur*.

La définition de la fonction G (z ; z') comme solution de l'équation (3, 2) doit être complétée par des conditions aux limites.

Les equations de Maxwell (2, 27) n'admettent pas de fonction de Green, D'après l'équation de definition (3, 3) la fonction de Green est l'inverse de l'operateur L. Or l'operateur de Maxwell $\Box\, g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu$ n'a pas d'inverse. En effet, soit $G_{\nu\lambda}$ (x;x') la fonction de Green de l'equation (2, 27).

$$\left[\Box\, g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \right] G_{\nu\lambda} \, (x;x') = \delta^4 \, (x-x) \; \delta^{\mu\lambda} \qquad (3.3a)$$

Nous voyons tout de suite que cette équation n'est pas correcte puisque si l'on applique l'operateur ∂_μ sur les deux cotés de cette équation et si l'on fait la somme sur μ, le premier mem bre est zero tandis que le deuxième membre est $\partial_\lambda \delta^4$ (x-x')

Ensuite, si l'on prend l'équation ci - dessus en l'espace des impulsions au moyen des transformations de Fourier:

$$4 \quad G_{\nu\lambda} \, (\, (x;\, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \; G_{\nu\lambda} \, (k) e^{-\, ik(x-x')} \tag{3.4}$$

$$\delta^4 \, (x-x') = \int \frac{d^{4k}}{(2\pi)^4} \, e - ik \, (x-x')$$

on obtient:

$$\left\{ -k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu \, k^\nu \right\} \; G_{\nu\lambda} = (k) = \delta^{\mu\lambda} \tag{3.5}$$

La fonction $G_{\nu\lambda}$ (k) ne peut être que de la forme:

$$G_{\nu\lambda} \, (k) = A(k) \; g_{\nu\lambda} + B(k) \; \frac{k_\nu k_\lambda}{k^2}$$

oũ A(k) et B(k) sont des fonctions de k^2. L'equation pour $G_{\nu\lambda}$ (k) devient alors:

$$\left\{ - \, k^2 \; g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu \right\} \; G_{\nu\lambda} \, (k) =$$

$$= A(k) \; (-k^2 \; \delta^\mu{}_\lambda + k^\mu k_\lambda) =$$

$$= - \; A(k) \, k^2 \; (\delta^\mu{}_\lambda - \; \frac{k^\mu k_\lambda}{k^2}) \neq \; \delta^{\mu\lambda}$$

Il nous faut donc modifier l'équation (2, 27) de telle façon que l'operateur differentiel soit inversible. Comme l'équation est invariante de jauge on peut (on doit) se placer dans une jauge particulière. Ainsi, on peut choisir la fonction N (x) de l'équation (2, 28) de telle sorte que la divergence de $A^{\mu}(x)$ s'annulle. Il suffit de choisir

$$A^{\mu}(x) = A^{\mu}_{(\nu)}(x) - \partial^{\mu}\Omega(x)$$

sera une source pour $\Omega(x)$:

$$\Box\,\Omega(x) = \partial_{\mu} A^{\mu}_{(\nu)}(x)$$

de sorte que

$$\partial_{\mu}A^{\mu}(x) = 0 \qquad (3,\ 6)$$

Si l'on veut que cette équation soit satisfaite par tous les champs $A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) - \partial^{\mu}\Omega'(\lambda)$ provenant de A^{μ} par une transformation de jauge alors les fonctions $\Omega'(x)$ doivent satisfaire à l'équation de D'Alembert

$$\Box\,\Omega'(x) = 0$$

L'équation (3, 6) définit la jauge de Lorentz. Dans cette jauge l'équation du champ électromagnétique devient:

$$\Box\, A^{\mu}(x) = j^{\mu}(x)$$

$$\partial_{\mu} A^{\mu}(x) = 0$$

Dans ce cas le propagateur aura la forme:

$$G^{\mu}_{\nu} (x; x') = \delta^{\mu}{}_{\nu} \; G (x; x')$$

où:

$$G(x; x') = - \int \frac{d^{4}k}{(2\pi)^4} \; \frac{1}{k^2} \, e^{-ik(x-x')}$$

Cette integrale ne sera définie que lorsque' on postule comment on traite les deux poles:

$$k^2 = 0 \;;\; k^0 = +[\vec{k}] \text{ et } k^0 = -[\vec{k}]$$

Le champ correspondant sera donné par:

$$A^{\mu}(x) = A_0{}^{\mu}(x) + \int G(x; x') \, j^{\mu} (x') \, d^4 x$$

Le terme $A_0{}^{\mu}(x)$ n'est pas produit par le courant $j^{\mu}(x)$; c'est soit un champ libre incident (incoming), soit un champ libre émergent (out going):

$$\Box A_o^{\mu}(x) = 0$$

Si nous imposons au propagateur la condition:

$$G(x, x') = 0 \text{ pour } x_o < x'_o$$

et si le courant $j^{\mu}(x)$ est régulier à la limite quand x_o tend vers $-\infty$, alors le champ $A^{\mu}(x)$ se réduit dans le passé lointain à une onde libre incidente:

$$\lim_{x_o \to -\infty} A^{\mu}(x) = A_{in}^{\mu}(x)$$

La fonction de Green qui satisfait à cette condition est la *fonction de Green retardée:*

$$G_{ret}(z ; x') = 0 \quad \text{si } x_o < x'_o \tag{3.4a}$$

et la partie du champ qui lui correspond est *le potentiel retardé:*

$$A_{ret}^{\mu}(x) = \int G_{ret}(x, x')\, j^{\mu}(x')\, d^4x' \tag{3.4b}$$

Nous avons ainsi construit une solution $A^{\mu}(x)$:

$$A^{\mu}(x) = A_{in}^{\mu}(x) + \int G_{ret}(x, x') j^{\mu}(x') d^4x' \tag{3.4c}$$

obtenue en imposant la condition que à la limite du passé lointain, $x_o \to -\infty$, la dynamique du champ se réduise à celle d'un champ libre incident, le courant étant supposé suffisamment régulier pour qu'on ait:

$$\lim_{x_o \to -\infty} \int G_{ret}(x\ ;\ x')j^{\mu}(x')d^4x' = 0$$

On peut aussi construire une solution en imposant la condition que dans le futur lointain, x_o tend vers $+\infty$, le champ se réduise à un champ libre émergent:

$$\lim_{x_o \to +\infty} A^{\mu}(x) = A_{out}{}^{\mu}(x)$$

La solution sera:

$$A^{\mu}(x) = A_{out}{}^{\mu}(x) + \int G_{av}(x\ ;\ x')j^{\mu}(x')d^4x' \qquad (3.7)$$

où la *fonction de Green avancée* est définie par:

$$G_{av}(x\ ;\ x') = o \text{ pour } x_o > x'_o \qquad (3.7a)$$

Le potentiel avancé est donné par:

$$A_{av}{}^{\mu} = \int G_{av}(x,\ x')j^{\mu}(x')d^4x'$$

Il nous faut à présent déterminer ces fonctions de Green ou propagateurs. Considérons, au lieu de l'équation (3, 3) l'équation:

$$(\Box + \mu^2)\ G\ (x,\ x'\ ,\ \mu) = \delta^4\ (x - x') \qquad (3,\ 8)$$

La constante μ a les dimensions de l'inverse d'une longueur; μ est l'inverse de la longueur d'onde Compton, $\frac{\mu_o e}{h}$, associée à un champ Φ (x) dont l'équation

$$(\Box + \mu^2) \Phi (x) = j (x)$$

admet la fonction $G(x ; x', \mu)$ comme propagateur.

Si l'on représente les fonctions δ^4 (x) et $G (x ; x', \mu)$ par des intégrales de Fourier:

$$\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \; e^{-ik(x - x')}, \; k(x - x')=k_{\mu(x - x')^{\mu}}$$

$$G(x , x'; \mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \; g(k , \mu) \; e^{-ik(x - x')}$$

alors l'équation (3, 8) nous donne:

$$G(x ; x', \mu) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \; \frac{e^{-ik(x - x')}}{k^2 - \mu^2}$$

avec $k^2 = k_o{}^2 - \vec{k}^2$

Cette intégrale n'est définie que si on spécifie comment on traite ses deux pôles:

$$k_o = + \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2} \equiv \omega$$

et

$$k_o = - \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2} \equiv - \omega$$

On a:

$$G(x ; x', \mu) = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}\,\vec{z}} \frac{1}{2\pi} \int dk_o \frac{e^{-ik_o z_o}}{(k_o - \omega)(k_o + \omega)}$$

où $\quad \vec{z} = \vec{x} - \vec{x}'$, $z_o = x_o - x'_o$

Dans le plan complexe k_o, les deux pôles ω et $- \omega$ sont sur l'axe réel (Figure 3, 1)

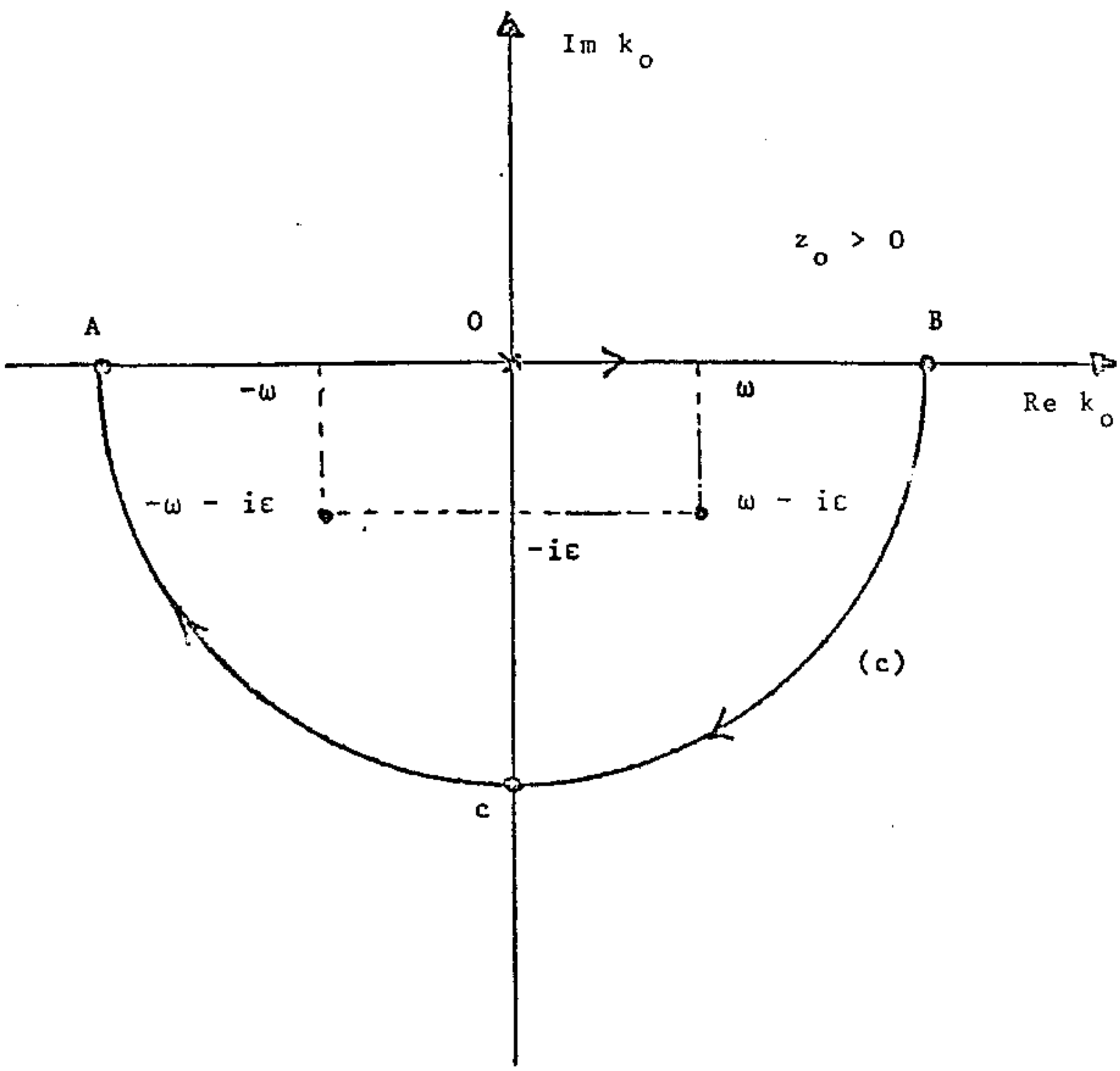

FIGURE (3.1) - Contour d'integration pour le propagateur retardé vers le futur.

Déplaçons les pôles ω et $-\omega$ de $-i\varepsilon$ vers le demi-plan inférieur. Soit (c) un contour fermé AOBCA constitué par l'intervalle A B sur l'axe réel et par le demi-cercle, de rayon R, BCA de sorte que les deux pôles déplacés $\omega - i\varepsilon$ et $-\omega - i\varepsilon$ soient à l'intéri eur de la région limitée par le contour (c).

Considérons un point k_o quelconque du demi-plan inférieur, $k_o = \alpha - i\beta$, $\beta > o$

on a alors:

$$e^{-ik_o z_o} = e^{-i\alpha z_o} e^{-\beta z_o}$$

Si on prend l'intégrale sur k_o comme une intégrale sur le contour (c), à la limite quand $R \to \infty$, l'intégrale sur la demi-circonférence BCA tends vers zéro et donc si $z_o > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_o \frac{e^{-ik_o z_o}}{(k_o-\omega)(k_o+\omega)} = \lim_{\substack{\varepsilon \to o \\ R \to \infty}} \int_c dk_o \frac{e^{-ik_o z_o}}{(k_o-\omega+i\varepsilon)(k_o+\omega+i\varepsilon)}$$

En appliquant le théorème des résidus on obtient:

$$\lim_{\varepsilon \to o} \int_c dk_o \frac{e^{-ik_o z_o}}{(k_o-\omega+i\varepsilon)(k_o+\omega+i\varepsilon)}$$

$$= -2\pi i \left(\frac{e^{-i\omega z_o}}{2\omega} - \frac{e^{i\omega z_o}}{2\omega} \right)$$

$$= -2\pi \frac{\sin \omega z_o}{\omega} \qquad \text{pour} \quad z_o > 0$$

Le signe négatif provient de l'orientation du contour (c)

D'autre part, si $z_o < 0$, il faut consideérer le contour(c') formé du segment AOB et de la demi-circonférence BC'A, puisque alors

$$e^{-ik_o z_o} = e^{-i(\alpha + i\beta) z_o} = e^{-i\alpha z_o} e^{\beta z_o} , \beta > 0$$

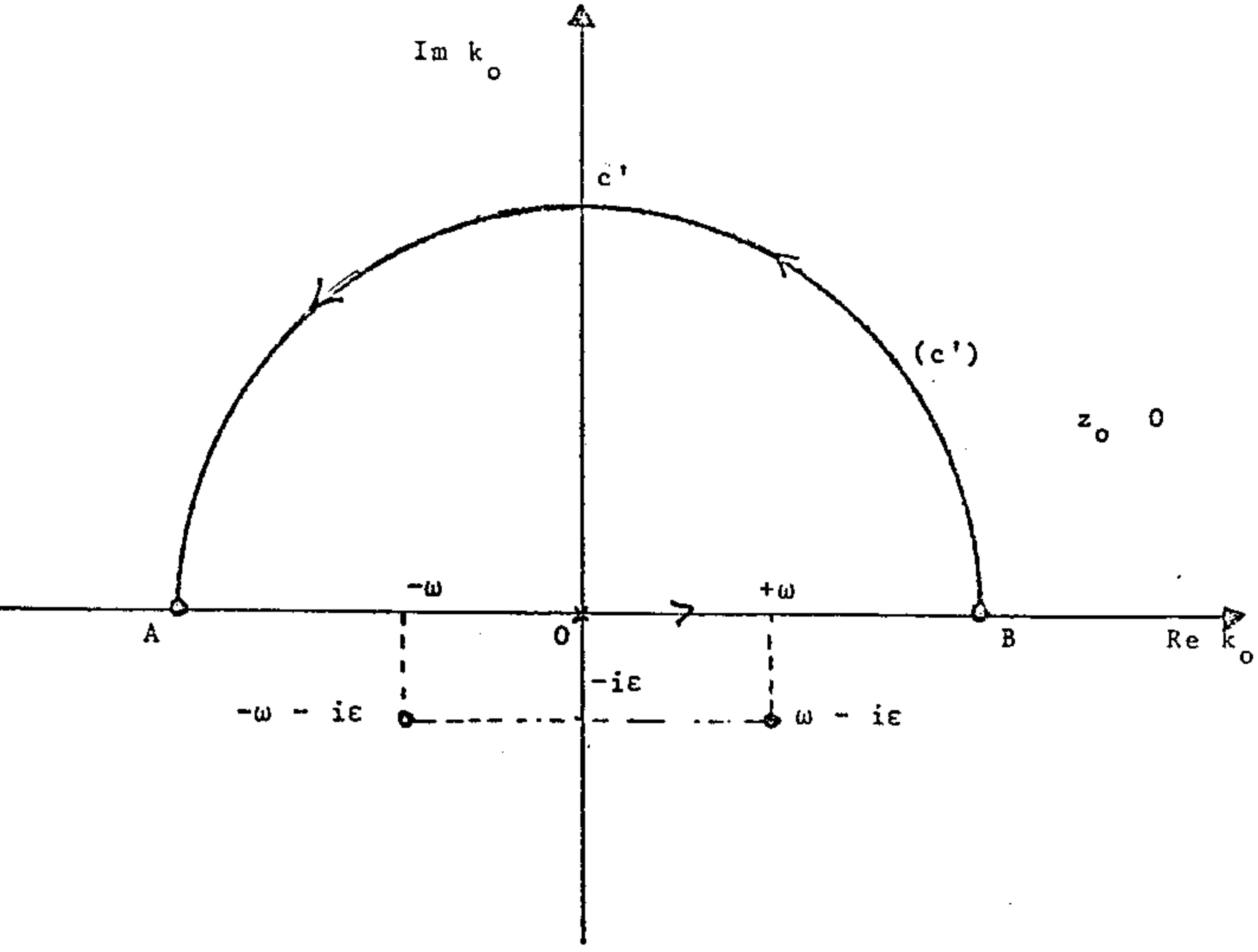

FIGURE (3, 2) - Contour d'intégration pour le propagateur retardé vers le passé

Si $z_o < 0$, l'intégrale sur la demi-circonférence tend vers zéro quand R tend vers l'infini; mais dans ce cas, comme les résidus ne sont pas à l'intérieur de la région limitée par (c') on aura:

$$\int_{c'} dk_o \frac{e^{-ik_o z_o}}{(k_o - \omega + i\varepsilon)(k_o + \omega + i\varepsilon)} = 0 \text{ si } z_o < 0$$

Le propagateur retardé $G_{ret}(x ; x', \mu)$ de l'équation (3, 8) est donc:

$$G_{ret}(x ; x', \mu) \equiv \bar{\Delta}_{ret}(x - x') = \begin{cases} -\Delta(x - x') & \text{pour } x_o > x'_o \\ 0 & \text{pour } x_o < x'_o \end{cases} \tag{3.8a}$$

où la fonction $\Delta(x)$ est définie par

$$\Delta(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \; e^{i\vec{k}\,\vec{x}} \; \frac{\sin \omega x_o}{\omega} \tag{3, 9}$$

avec $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}$

C'est la fonction de Jordan-Pauli pour un champ de masse μ.

Pour le propagateur avancé défini par la condition (3, 7) nous déplaçons les deux pôles ω et $-\omega$ vers le demi-plan supérieur de $+ i\eta$

(Figure 3, 3)

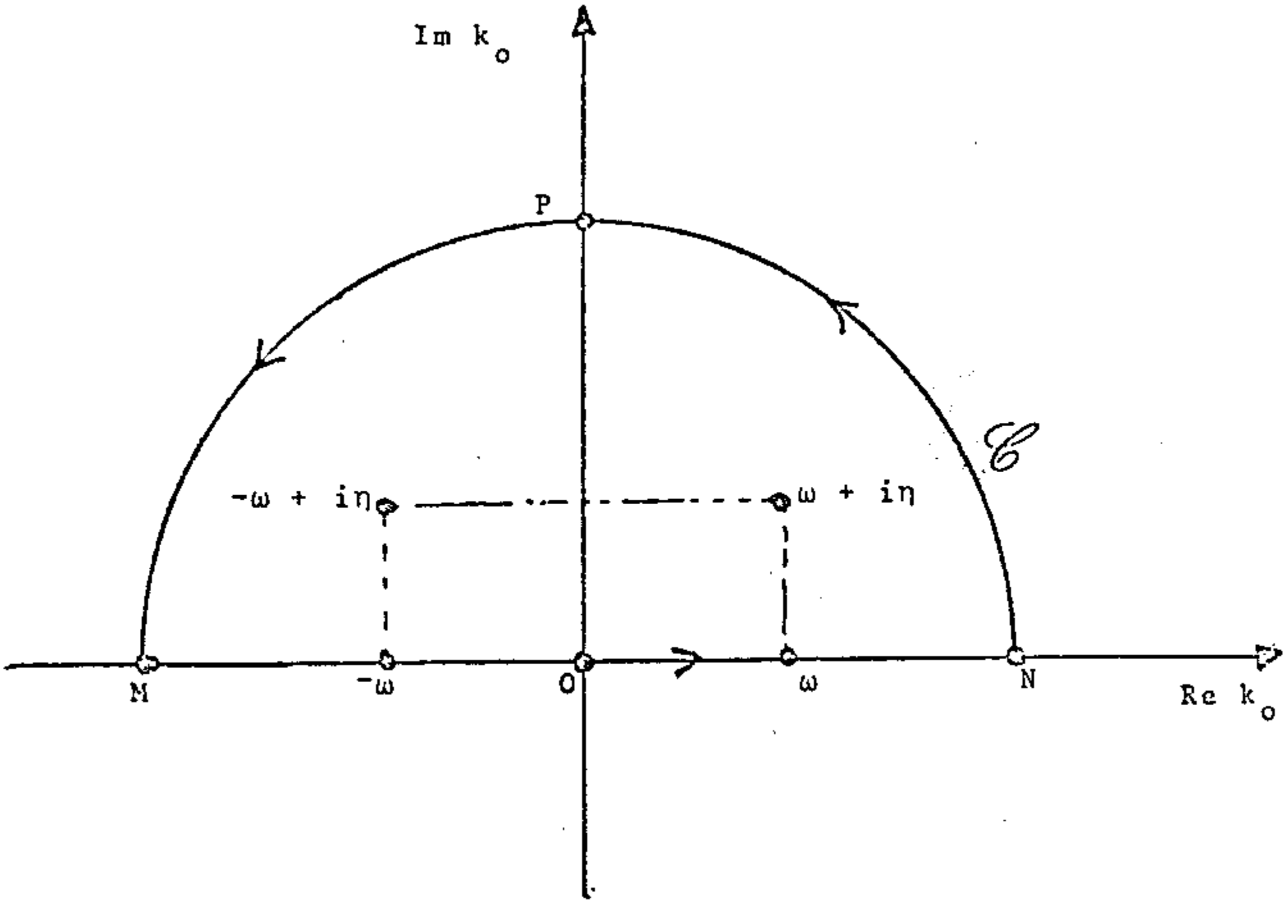

FIGURE (3, 3) - Contour d'intégration pour le propagateur avancé pour $z_o < 0$.

Comme dans ce demi-plan, $k_o = a + ib$, $b > 0$

$$e^{-ik_oz_o} = e^{-iaz_o} e^{bz_o}$$

On doit donc prendre le contour $\mathscr{C}$ = M O N P M (avec les deux pôles à l'intérieur) pour l'intégrale sur k_o.

On obtient ainsi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_o \, \frac{e^{-ik_o z_o}}{(k_o - \omega)(k_o + \omega)}$$

$$= \lim_{\substack{\eta \to o \\ R \to \infty}} \int dk_o \, \frac{e^{-ik_o z_o}}{(k_o - \omega - i\eta)(k_o + \omega - i\eta)}$$

$$= 2\pi \, i \left(\frac{e^{-i\omega z_o}}{2\,\omega} - \frac{e^{i\omega z_o}}{2\,\omega} \right)$$

$$= 2\pi \, \frac{\sin \omega \, z_o}{\omega} \qquad \text{pour} \quad z_o < 0$$

Quand $z_o > 0$, on doit avoir par définition $G_{av}(z) = 0$ et par conséquent on prendra le contour de la Figure (3, 4)

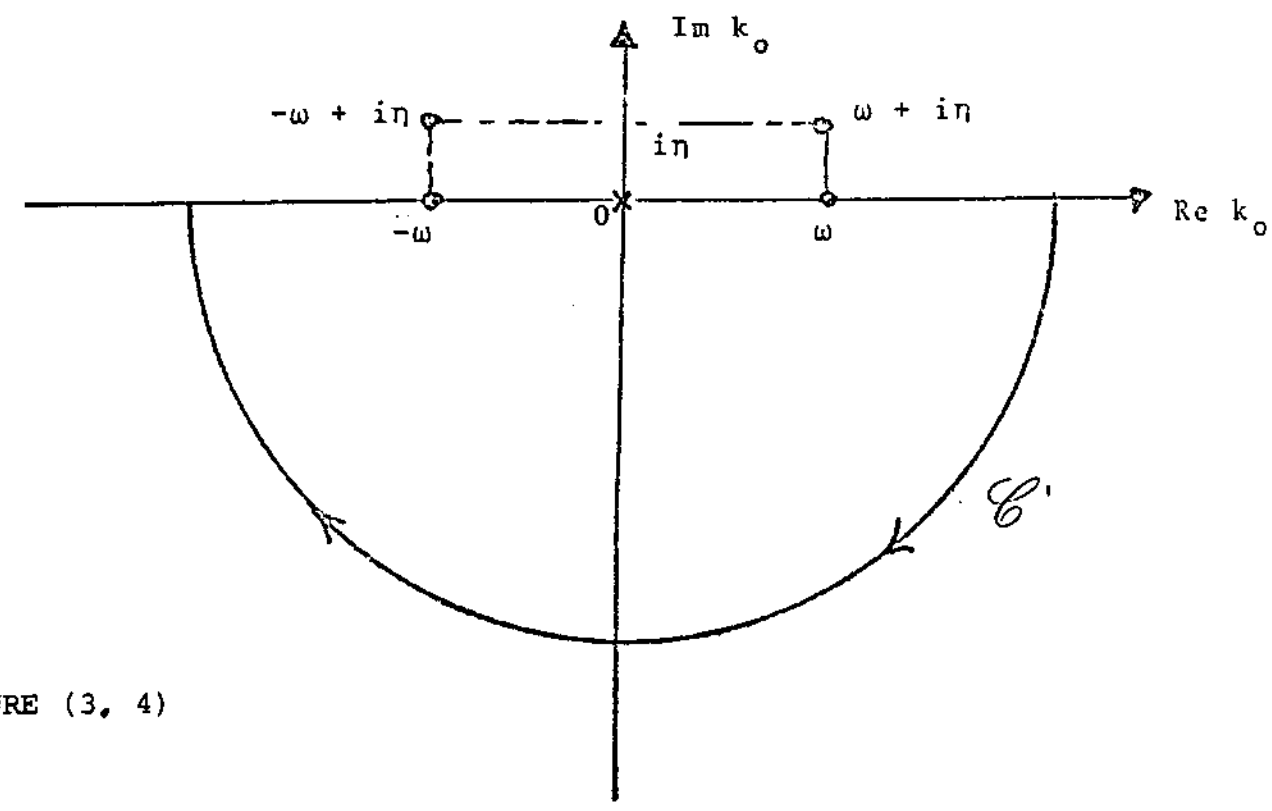

FIGURE (3, 4)

Le propagateur avancé de l'équation (3, 8) est donc:

$$G_{av}(x;\ x',\ \mu) = \bar{\Delta}_{av}(x - x') = \begin{cases} 0 \text{ pour } x_o > x'_o \\ \Delta(x - x') \text{ pour } x_o < x'_o \end{cases} \tag{3, 8b}$$

Pour un champ électromagnétique, les fonctions de Green retardée et avancée sont données par les équations (3, 8a) et (3. 8b) respectivement où on pose pourtant $\mu = 0$ dans l'expression (3, 9) de la fonction $\Delta(x)$ que l'on appelle alors D (x):

$$\Delta(x) = D(x) \text{ pour } \mu = 0 \tag{3.9}$$

3.2 La fonction $\Delta(x)$

La fonction $\Delta(x)$ est importante puisqu'elle détermine le crochet de Poisson d'un champ scalaire libre $\Phi(x)$ en deux points de l'espace-temps. Définissons le *crochet de Poisson d'un tel champ* par l'expression:

$$\left\{\phi(x),\ \phi(x')\right\} = \int d^3y \left(\frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\phi(\vec{y},t)}\ \frac{\delta\phi(\vec{x}',t')}{\delta\pi(\vec{y},t)} - \frac{\delta\phi(\vec{x},t)}{\delta\pi(\vec{y},t)}\ \frac{\delta\phi(\vec{x}',t')}{\delta\phi(\vec{y},t)} \right) \tag{3, 10}$$

où $\pi\ (\vec{x},\ t)$ désigne le moment canonique conjugué de $\phi(\vec{x},t)$.

$\dfrac{\delta F\,[\,f\,]}{\delta\ f(x)}$ est la *dérivée fonctionnelle de la fonctionnelle* F

$[\,f(x)\,]$ par rapport à f:

$$\frac{\delta F\,[\,f\,]}{\delta\ f(\vec{x})} = \lim_{\varepsilon\to o} \frac{1}{\varepsilon} \left(F[\,f(\vec{y})+\varepsilon\delta(\vec{y}-\vec{x})\,] - F[\,f(y)\,] \right)$$

Un exemple trivial de fonctionnelle bien connu est l'intègrale:

$$F[\,f\,] = \int d^3x\ f\ (\vec{x})\ g\ (\vec{x})$$

Pour une fonction donnée g $(\vec{x})$ cette intégrale définit une correspondance entre chaque fonction $f(\vec{x})$ pour laquelle l'inté-grale ci-dessus existe, et un nombre $F[\,f\,]$.
Dans ce cas:

$$\frac{\delta\ F[\,f\,]}{\delta\ f\ (\vec{u})} = g\ (\vec{u}) \tag{3, 11}$$

D'autre part, comme une fonction peut s'écrire, grâce à la fonction de Dirac:

$$\phi\ (\vec{x},\ t) = \int d^3y\ \phi\ (\vec{y},\ t)\ \delta\ (\vec{y}-\vec{x})$$

on a:

$$\frac{\delta\phi\ (\vec{x},\ t)}{\delta\phi\ (\vec{u},\ t)} = \delta\ (\vec{u}-\vec{x}) \tag{3, 12}$$

Dans la dynamique lagrangienne, le champ $\phi(x)$ et le moment conjugué au même instant sont considérés comme des variables indépendantes; nous traduirons ce fait par l'équation:

$$\frac{\delta\phi\ (\vec{x},\ t)}{\delta\pi\ (\vec{y},\ t)} = 0 \tag{3, 13}$$

En vertu des relations (3, 12) et (3, 13) le crochet de Poisson (3, 10) s'écrit:

$$\left\{\phi\ (x),\ \phi\ (x')\right\} = \int d^3y\ \delta\ (\vec{x} - \vec{y})\ \frac{\delta\phi\ (\vec{x}',\ t')}{\delta\pi\ (\vec{y},\ t)} = \frac{\delta\phi\ (\vec{x}',\ t')}{\delta\pi\ (\vec{x},\ t)}$$

Faisons un développement limité à l'instant t de la fonction $\phi\ (\vec{x}',\ t')$.

Il vient:

$$\phi(\vec{x}',\ t') = \phi(\vec{x}',\ t) + (t' - t)\ \frac{\partial\phi(\vec{x}',\ t')}{\partial\ t'}\bigg|_{t' = t}$$

$$+ \ldots + \frac{(t' - t)^n}{n!}\ \frac{\partial^n\ \phi(\vec{x}',\ t')}{\partial\ t'^n}\bigg|_{t' = t} + \ldots$$

Le champ libre $\phi\ (x)$ satisfait à l'équation:

$$(\Box + \mu^2)\ \phi\ (x) = 0$$

et son moment conjugué est donné par:

$$\pi\ (x) = \frac{\partial\ \phi}{\partial x_o} = \dot{\phi}$$

Il vient:

$$(\Box + \mu^2)\ \pi\ (x) = 0$$

et par conséquent:

$$\left.\frac{\partial^2\ \phi(\vec{x}',\ t')}{\partial\ t'^2}\right|_{t' = t} = -\ \mu^2\ \phi(\vec{x}',\ t) + \nabla'^2\ \phi(\vec{x}',\ t)$$

$$\left.\frac{\partial^2\ \pi(\vec{x}',\ t')}{\partial t'^2}\right|_{t' = t} = -\ \mu^2\ \pi(\vec{x}',\ t) + \nabla'^2\ \pi(\vec{x}',\ t)$$

Le crochet de Poisson devient:

$$\left\{\phi(x),\ \phi(x')\right\} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (t' - t)^{2n+1} \left[-\mu^2 + \nabla'^2\right]^n \delta(\vec{x}' - \vec{x})$$

La représentation de Fourier pour la fonction de Dirac

$$\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \doteq \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\ k\ e^{i\ \vec{k}\ \cdot\ (\vec{x}' - \vec{x})}$$

donne:

$$\left\{\phi(x), \phi(x')\right\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\ (t' - t)^{2n+1} \int \frac{k_o^{2n+1}\ e^{i\vec{k}.(\vec{x}'-\vec{x})}}{k_o}\ d^3k$$

où $$k_o = (\vec{k}^2 + \mu^2)^{1/2} \qquad (3, 13a)$$

c'est à dire

$$\left\{\phi(x),\ \phi(x')\right\} = -\ \Delta\ (x' - x)$$

où on a défini $\Delta\ (x)$ par l'intégrale (3, 9)

La fonction $\Delta\ (x)$ étant impaire:

$$\Delta\ (x) = -\ \Delta\ (-x)$$

on a par conséquent

$$\left\{\phi\ (x),\ \phi\ (x')\right\} = \Delta\ (x - x')$$

La fonction $\Delta\ (x)$ peut s'écrire de la manière suivante:

$$\Delta\ (x) = -\ \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k\ e^{-\ ikx}\ \delta(k^2 - \mu^2)\ \varepsilon\ (k^o) \qquad (3, 14)$$

où

$$kx = k_\mu\ x^\mu = k^o\ x^o - \vec{k}.\ \vec{x}$$

$$k^2 - \mu^2 = k_o{}^2 - \vec{k}^{\,2} - \mu^2$$

$$\varepsilon\ (k^o) = \begin{cases} +\ 1 \text{ pour } k_o > 0 \\ -\ 1 \text{ pour } k_o < 0 \end{cases}$$

$\varepsilon(k^o)$ désigne le signe de k_o

Comme

$$\delta(k^2 - \mu^2) = \frac{1}{2\omega} (\delta (k_o - \omega) + \delta (k_o + \omega)) \qquad (3, 15)$$

avec $$\omega = (\vec{k}^2 + \mu^2)^{1/2}$$

l'expression (3, 14) est équivalente à la définition (3, 9).

En vertu de l'expression (3, 13a), k est un quadrivecteur du genre temps; par conséquent $\varepsilon(k^o)$ est invariant par rapport au groupe de Poincaré orthochrone et, d'aprés l'intégrale (3,14), la fonction Δ (x) est également invariante. Le lecteur vérifiera que Δ (x) satisfait à l'équation de Klein-Gordon:

$$(\Box + \mu^2) \Delta (x - x') = 0$$

et que

$$\Delta (\vec{x} - \vec{x}', 0) = 0$$

$$\left. \frac{\partial \Delta (x - x')}{\partial x_o} \right|_{x_o = x'_o} = - \delta (\vec{x} - \vec{x}')$$

Comme $\Delta\ (x - x')$ est un invariant de Poincaré de même qu'une fonction impaire de son argument il s'ensuit que

$$\Delta\ (x - x') = \varepsilon\ (x - x')\ f\ ((x - x')^2) \text{ pour } (x - x')^2 > 0$$

où $\varepsilon\ (x - x')$ désigne le signe de $x_o - x'_o$,

invariant pour tout vecteur $(x - x')$ du genre temps, et f est une fonction (invariante) de l'invariant $(x - x')^2$.

Lorsque $(x - x')$ est un vecteur du genre espace, ε n'est plus invariant et on doit avoir:

$$\Delta\ (x - x') = 0 \qquad \text{pour} \qquad (x - x')^2 < 0$$

Revenons à l'intégrale (3, 9).

Si l'on introduit des coordonnées polaires et si on effectue l'intégration sur les angles on obtient:

$$\Delta\ (x) = \frac{1}{4\pi}\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial\ F\ (x_o,\ r)}{\partial_r}$$

où $\qquad r = |\vec{x}|,$

$$F(x_o,\ r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{k_o} \cos\ (kr) \sin\ (k_o\ x_o) \qquad (3,\ 16)$$

Une autre expression pour $F(x_o,\ r)$ est obtenue par le changement de variables:

$$k \equiv |\vec{k}| = \mu \, \mathrm{shy}, \quad \vec{k}^2 + \mu^2 = \mu^2 \, \mathrm{ch}^2 y \equiv k_o 2,$$

$$\frac{dk}{k_o} = dy$$

Il vient:

$$F(x_o, r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\,y \;\; \cos\,(\mu r \,\mathrm{shy}) \,\sin\,(\mu \, x_o \,\mathrm{chy}) \qquad (3, 17)$$

Si l'on pose:

$$s^2 = x_o 2 - r^2$$

on aura:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{s} \frac{d}{ds}$$

et donc

$$\Delta\ (x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{s} \frac{d}{ds} F\ (x_o, r) \qquad (3, 18)$$

Si x représente une différence de points de l'espace-temps, puis que Δ (x), s et $\frac{d}{ds}$ sont des invariants de Poincaré il en sera de même pour $F(x_o, r)$.

Par conséquent, comme:

$$F(x_o, r) = 0 \text{ pour } x_o = 0$$

(voir l'intégrale (3, 16) il vient:

$$F\ (x_o,\ r) = 0 \text{ pour } x_o{}^2 - r^2 < 0$$

c'est à dire $F(x_o,\ r) = 0$ à l'extérieur du cône de lumière de l' origine, donc pour $-r < x_o < r$.

D'autre part il résulte de l'intégrale (3, 17)

$$F\ (x_o,\ 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \sin\ (\mu\ x_o\ \text{ch}y)$$

La fonction de Bessel J_o est bien commue:

$$J_o(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \sin\ (z\ \text{ch}u)$$

par conséquent

$$F(x_o,\ 0) = \begin{cases} J_o\ (\mu\ _o) & \text{pour } x_o > 0. \\ -J_o\ (\mu\ |x_o|) & \text{pour } x_o < 0. \end{cases}$$

D'aprés l'invariance de $F\ (x_o,\ r)$, on aura

$$F\ (x_o,\ r) = \begin{cases} J_o\ (\mu(x_o{}^2 - r^2)^{1/2}) & \text{pour } x_o > r \\ -J_o(\mu(x_o{}^2 - r^2)^{1/2}) & \text{pour } x_o < -r \end{cases}$$

La fonction F sera donc telle que

$$F\ (x_o,\ r) = \begin{cases} J_o(\mu(x_o{}^2 - r^2)^{1/2}) & \text{pour } x^2 > 0,\ x_o \geq r \\ 0 & \text{pour } x^2 < 0,\ -r<x_o<r \\ -J_o(\mu(x_o{}^2 - r^2)^{1/2}) & \text{pour } x^2 > 0,\ x_o < -r \end{cases}$$

ou encore:

$$F(x_o, r) = J_o(\mu(x_o{}^2 - r^2)^{1/2}) \; \varepsilon \; (x^o)\theta(x^2) \qquad (3, 19)$$

où

$\varepsilon(x^o)$ désigne le signe de x_o

$$\theta(x^2) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x^2 > 0 \\ 0 \text{ pour } x^2 < 0 \end{cases}$$

Comme

$$\frac{d}{ds} \theta \; (x^2) = 2s \; \delta \; (s^2)$$

$$\frac{d}{ds} J_o \; (\mu s) = - \mu \; J_1 \; (\mu s)$$

il vient pour la fonction Δ par l'intermédiaire des équations (3, 18) et (3, 19)

$$\Delta \; (x) = - \frac{1}{2\pi} \; \varepsilon \; (x^o) \left(\delta \; (x^2) - \frac{\mu}{2s} J_1 \; (\mu s) \; \Theta \; (x^2)\right) \qquad (3, 20)$$

$$s^2 \equiv x^2 = x_o{}^2 - r^2$$

Si l'on remarque que:

$$\Theta \; (x^2)\frac{d}{ds} \; \varepsilon \; (x^o) = \frac{d}{ds} \; \varepsilon \; (x)\Big|_{s^2 > 0} = \frac{d}{ds} \; \varepsilon \; (x) \; \Big|_{s = x_o}$$

$$= \frac{d}{dx_o} \varepsilon (x_o) = 2 \delta(x_o)$$

$$\Rightarrow 2 \theta (x^2) \delta (x_o) = 2 \theta (-r^2) = 0$$

$$J_o (\mu s) \delta (x^2) \varepsilon (x^o) = J_o (0) \delta (x^2) \varepsilon (x^o)$$

$$= \delta (x^2) \varepsilon (x^o)$$

on obtient

$$\Delta (x) = - \frac{1}{2\pi} \varepsilon (x^o) \left[\delta (x^2) - \frac{\mu}{2x^2} J_1(\mu(x^2)^{1/2}) \theta (x^2) \right] \quad (3.20a)$$

Si l'on fait tendre x vers zéro à l'intérieur du cône,

$J_1 (\mu(x^2)^{1/2})$ tend vers $\frac{\mu s}{2}$

et

$$\lim_{\substack{x^2 \to 0 \\ x^2 > 0}} \Delta(x) = - \frac{1}{2\pi} \varepsilon (x) \left[\delta (x^2) - \frac{\mu^2}{-4} \theta (x^2) \right] \quad (3.21)$$

Ainsi $\Delta (x)$ présente une singularité delta à la surface du cône de lumière et une discontinuité finie égale à $\frac{\mu 2}{8\pi}$ lorsqu'on tra-verse cette surface (Fig. 3, 5).

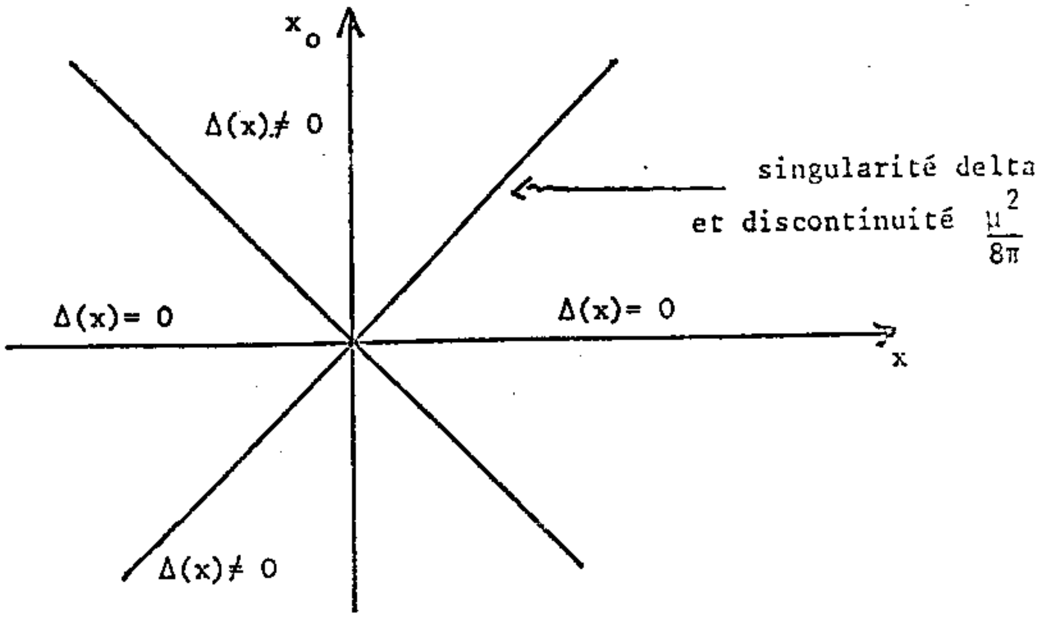

FIGURE (3, 5)

La fonction invariante pour le champ électromagnétique, qui est représentée par $\mathcal{D}(x)$, s'obtient à partir de $\Delta(a)$ en posant $\mu=0$; il vient:

$$\mathcal{D}(x) = -\frac{1}{2\pi}\,\varepsilon\,(x^o)\;\delta\,(x^2). \tag{3.22}$$

3.3 Le problème de Cauchy de l'équation de Klein-Gordon

La fonction Δ (x) est également importante parcequ'elle résoud le problème de Cauchy de l'équation de Klein-Gordon. Il s'agit de déterminer la solution Φ (x) de l'équation:

$$(\Box + \mu^2)\;\Phi\;(x) = 0 \tag{3, 23}$$

en un point quelconque x de l'espace temps si l'on connaît la fonction Φ (y) et ses dérivées premières $\frac{\partial \Phi}{\partial y_\mu}$ sur une surface du genre espace Σ antérieure au point x, c'est à dire telle que l'on ait $y_o < x_o$ pour tous les points y de Σ.

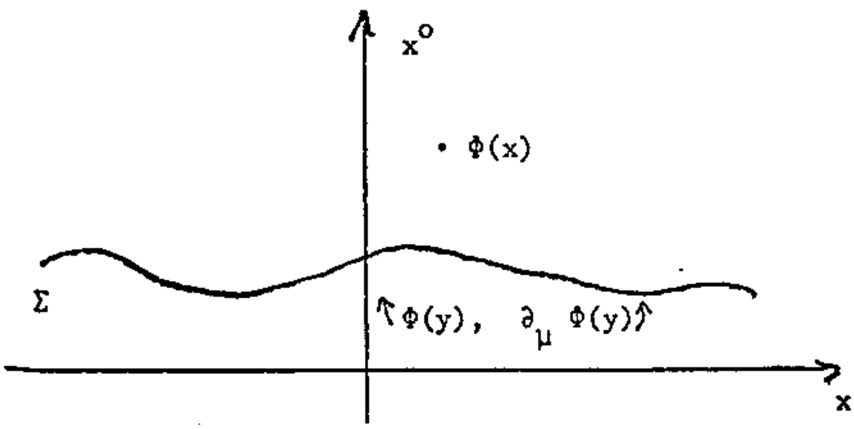

FIGURE (3, 6) - Le problème de Cauchy de l'équation de Klein-Gordon

Considérons les équations (3, 8) et (3, 21).

On aura l'identité

$$\Phi (x) = - \int d^4y \left\{ G(y)-x) \ (\Box + \mu^2) \ \Phi(y) \ - \ \Phi(y) \ (\Box + \mu^2) \ G(y-x) \right\}$$

ou encore

$$\Phi (x) = - \int d^4y \left\{ G(y-x) \ \Box \ \Phi(y) \ - \ \Phi(y) \ \Box \ G(y-x) \right\}$$

Si l'intégration s'étend sur un volume V de l'espace-temps limité par deux surfaces du genre espace, Σ' et Σ, se situant respectivement avant et aprés le point x Figure (3, 7) et si le champ est tel que

$$G(y - x) \frac{\partial \Phi (y)}{\partial y_\mu} \rightarrow 0 \quad \text{pour } y \rightarrow \infty$$

$$\Phi (x) \frac{\partial G (y - x)}{\partial y_\mu} \rightarrow 0 \quad \text{pour } y \rightarrow \infty$$

alors le théorème de Gauss nous permettra d'écrire:

$$\Phi(x) = - \int_{\Sigma'} \left\{ G(y-x) \frac{\partial \phi(y)}{\partial y_\mu} - \Phi(y) \frac{\partial G(y-x)}{\partial y_\mu} \right\} d\sigma^\mu (y)$$

$$+ \int_{\Sigma} \left\{ G(y-x) \frac{\partial \Phi}{\partial y^\mu} - \Phi(y) \frac{\partial G (y-x)}{\partial y^\mu} \right\} d\sigma^\mu (y)$$

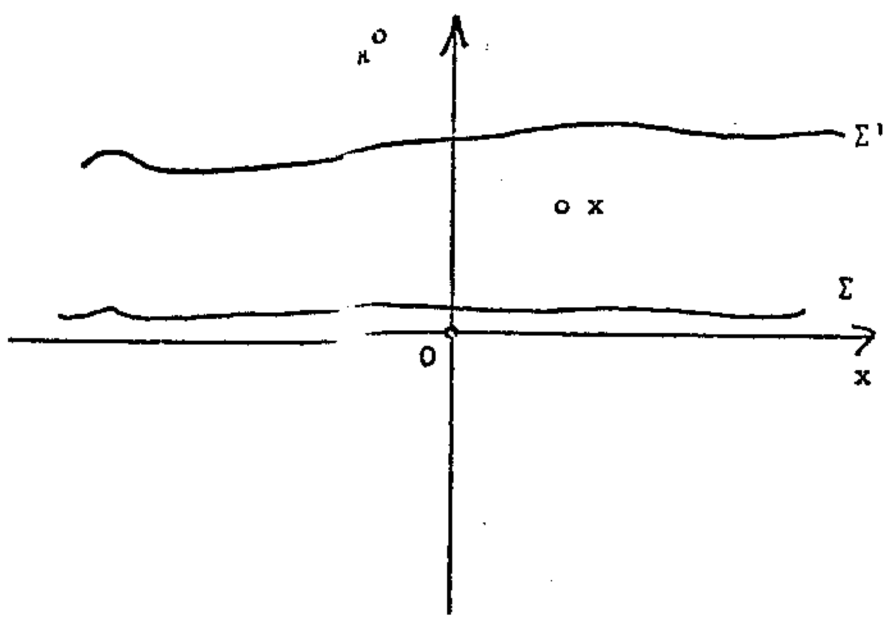

FIGURE (3, 7)

où $$y^{o}\ (\Sigma') > x^{o}\ ,\ y^{o}\ (\Sigma) < x^{o}$$

Si Σ' tend vers l'infini, $y^{o}\ (\Sigma')$ tend vers l'infini et alors:

$$\Phi\ (x) = -\int_{\Sigma} \left\{ G(y - x)\ \frac{\partial\ \Phi}{\partial\ y^{\mu}} - \phi\ (y)\ \frac{\partial\ G(y - x)}{\partial\ y^{\mu}} \right\}\ d\sigma^{\mu}\ (y)$$

Comme dans cette intégrale, on a $y^{o} < x^{o}$ la fonction de Green ne peut être que le propagateur avancé pour lequel (équation(3.8b))

$$G\ (y - x) = \Delta\ (y - x)\ \text{pour}\ y^{o} < x^{o}$$

Par conséquent:

$$\Phi\ (x) = \int_{\Sigma} \left\{ \Delta(y-x)\ \frac{\partial\phi(y)}{\partial\ y^{\mu}} - \Phi\ (y)\ \frac{\partial\ \Delta(y-x)}{\partial\ y^{\mu}} \right\} d\sigma^{\mu}(y)$$

$$\text{avec}\quad x^{o} > y^{o}\ ,\ y^{o} \in \Sigma$$

Il s'en suivra en particulier, pour la fonction Δ, la relation:

$$\Delta\ (x-z) = \int_{\Sigma} \left\{ \Delta\ (y-x)\ \frac{\partial\Delta\ (y-z)}{\partial\ y^{\mu}} - \Delta\ (y-z)\ \frac{\partial\Delta\ (y-x)}{\partial\ y^{\mu}} \right\}\ d\sigma^{\mu}\ (y)$$

3.4 Les champs retarde et avance

Les fonctions de Green de l'équation:

$$(\Box + \mu^{2})\quad \Phi\ (x) = j\ (x)$$

sont donc

$$\bar{\Delta}_{ret}\ (x - x') = \begin{cases} -\Delta\ (x - x'), & x_o - x'_o > 0 \\ 0 & , x_o - x'_o < 0 \end{cases}$$

et

$$\bar{\Delta}_{av}(x - x') = \begin{cases} 0 & , x_o - x'_o > 0 \\ \Delta\ (x - x'), & x_o - x'_0 < 0 \end{cases}$$

avec

$$\Delta\ (x) = -\frac{1}{2\pi}\ \varepsilon\ (x) \left[\delta\ (x^2) - \frac{\mu}{2x^2}\ J_1(\mu(x^2)^{1/2})\Theta\ (x^2) \right]$$

Les propagateurs correspondants pour l'équation du champ électro magnétique s'obtiennent à partir de ces fonctions en posant $\mu=0$.

Désignons ces propagateurs par $\bar{\mathcal{D}}_{ret}\ (x - x')$ et $\bar{\mathcal{D}}_{av}$ $(x - x')$. Il vient, au moyen de l'équation:

$$\mathcal{D}(x) = -\frac{1}{2\pi}\ \varepsilon\ (x)\ \delta\ (x^2),$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{ret}\ (x) = \frac{1}{4\pi}\ (1 + \varepsilon\ (x))\ \delta\ (x^2),$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{av}\ (x) = \frac{1}{4\pi}\ (1 - \varepsilon\ (x))\ \delta\ (x^2).$$

De cette manière la solution de l'équation (3, 0) qui, dans le passé lointain se réduit à une onde libre incidente est:

$$A^{\mu}(x) = A_{in}{}^{\mu}(x) + \frac{e}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[1+\varepsilon(x-z(S)) \right] \delta \left[(x-z(S))^2 \right] \frac{dz^{\mu}}{dS}\, dS$$

L'hypothèse $\frac{dz^0}{dS} > 0$ fait de $z^0(s)$ une fonction croissante de s ; par conséquent quant x varie entre $-\infty$ et $+\infty$, $x^0 - z^0(s)$ prend d'abord des valeurs positives puis des valeurs négatives. Soit s_0 tel que

$$x^0 = z^0\,(s_0)$$

et

$$x^0 < z^0\,(s) \text{ pour } s > s_0$$

Dans ce cas

$$1 + \varepsilon\,(x - z(s)) - \begin{cases} 2 \text{ pour } s < so \\ 0 \text{ pour } s > so \end{cases}$$

donc

$$A^{\mu}(x) = A_{in}{}^{\mu}(x) + \frac{2e}{4\pi}\int_{-\infty}^{s} \delta\,([x - z(s)]^2)\,\frac{dz^{\mu}}{ds}\, ds$$

$$A^{\mu}(x) = A_{in}{}^{\mu}(x) + \frac{e}{4\pi}\left[\frac{\dot z^{\mu}\,(s)}{|\dot z_{\alpha}(s)\,(x^{\alpha} - z^{\alpha}(s))|}\right]_{z^0\,(s)} \tag{3.24}$$

$$= x^0 - |\vec{x} - z(s)|$$

où

$$\dot{z}^{\mu} = \frac{dz^{\mu}}{ds}$$

Quand $A_{in}{}^{\mu}(x) = 0$, cette expression est celle du potentiel retardé de Liénard et Wiechert.

Le champ retardé est donc:

$$F^{\mu\nu}_{ret}(x) = \frac{e}{4\pi}\left[\frac{1}{|\dot{z}_{\alpha}(s)(x^{\alpha}-z^{\alpha}(s))|}\frac{d}{ds}\frac{\dot{z}^{\mu}(s)(x^{\nu}-z^{\nu}(s))-\dot{z}^{\nu}(s)(x^{\mu}-z^{\mu}(s))}{\dot{z}^{\lambda}(s)\ (x_{\lambda}-z_{\lambda}(s))}\right] \tag{3.25}$$

où l'on pose:

$$z^{o}(s) = x^{o} - |\vec{x} - \vec{z}(s)|$$

La solution qui, dans le futur lointain, se réduit à une onde libre émergente s'écrit

$$A^{\mu}(x) = A^{\mu}{}_{out}(x) + \int_{so}^{\infty} \delta\ (x - z(s)^{2})\ \frac{dz^{\mu}}{ds}\ ds.$$

$$A^{\mu}(x) = A^{\mu}{}_{out}(x) + \frac{\ell}{4\pi}\left[\frac{\dot{z}^{\mu}(s)}{|\dot{z}_{\alpha}(s)(x^{\alpha}-z^{\alpha}(s))|}\right]_{z^{o}(s) = x^{o} + |\vec{x}-\vec{z}(s)|}$$

Le champ avancé est:

$$F_{av}{}^{\mu\nu}(x) = \frac{e}{4\pi}\left[\frac{1}{\dot{z}_{\alpha}(s)(x^{\alpha}-z^{\alpha}(s))}\frac{d}{ds}\frac{\dot{z}^{\mu}(x^{\nu}-z^{\nu}(s)) - \dot{z}^{\nu}(x)}{\dot{z}^{\lambda}(s)(x_{\lambda}-z_{\lambda}(s))}\right]$$

où l'on pose:

$$z^{o}(s) = x^{o} + |\vec{x} - \vec{z}(s)|$$

Les deux champs résultent des contributions des ondes émises par points M_1 et M_2, respectivement, et qui arrivent au point x a la figure (3, 8)

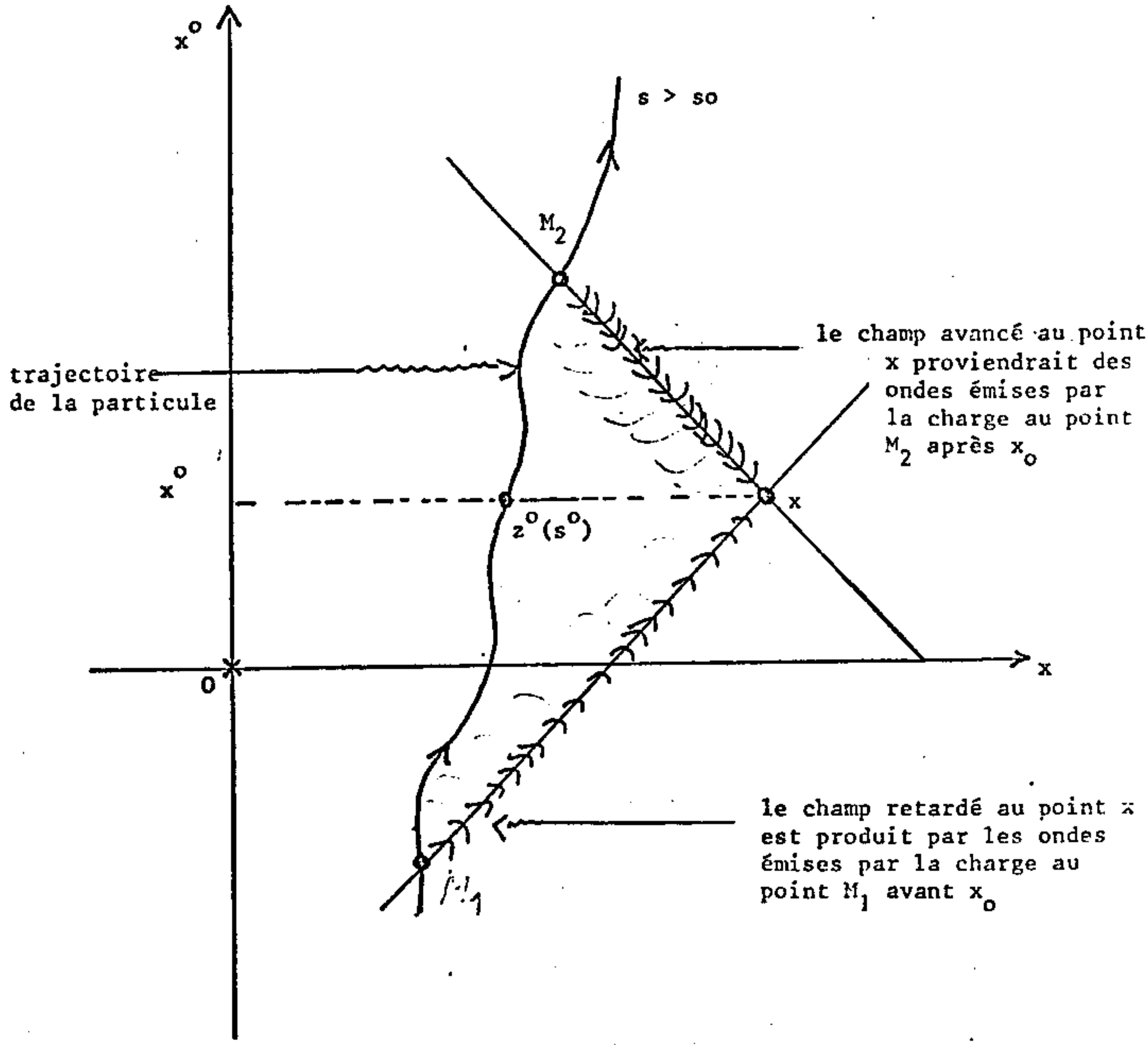

FIGURE (3, 8) - Champ retardé et avancé

Le champ retardé est produit par l'état de la charge à l'instant $x^o - |\vec{x} - \vec{z}\ (s)|$ et les ondes émises par la particule à cet instant arriveront au point x à l'instant x^o.

C'est la solution qui *satisfait au principe de causalité* et qui est retenue dans la théorie de l'électron de Lorentz.

Le champ avancé est produit par la charge au point M_2, à l'instant $x^o + |\vec{x} - \vec{z}\ (s)|$ et les ondes émises à cet instant arriveraient au point x à l'instant x_o, c'est à dire dans le passe de M_2. Cette solution, d'après la théorie classique de Lorentz, n'a pas de sens physique, puisqu'elle viole le principe de causalité.

D'après cette théorie les équations fondamentales dans la jauge de Lorentz sont donc:

$$\Box A^{\mu}(x) = j^{\mu}(x)$$

$$j^{\mu}(x) = e\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz^{\mu}}{ds}\ \delta(x - z(s))\ ds$$

$$m_o c^2 \frac{dz^{\mu}}{ds} = - e F^{\mu\nu}(z) \frac{dz_{\nu}}{ds}$$

avec $$F^{\mu\nu} = \partial^{\nu} A^{\mu} - \partial^{\mu} A^{\nu}$$

et la condition aux limites:

$$\lim_{x_o \to -\infty} A^{\mu}(x) = A_{in}^{\mu}(x)$$

$$\Box A_{in}^{\mu}(x) = 0.$$