

CBPF-MO-002/84
INTRODUÇÃO À TRIESFERA
(UNIVERSO DE EINSTEIN)

de

A:F. da F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF/CNPq
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

SUMÁRIO

Introdução.....	01
Universo quase plano.....	03
Geometria plana.....	05
Desacertos.....	08
Universo finito mas ilimitado.....	11
Vislumbre da curvatura.....	12
Infinidade do triespaço.....	15
A reta na prática.....	16
Curvatura do triespaço.....	18
Triesfera em modelos cosmológicos.....	20
Triesfera: finita mas ilimitada.....	21
Magnitude da triesfera.....	23
Pontos antípodas.....	24
Retas.....	26
Segmentos de retas.....	29
Dificuldades nos mapeamentos.....	32
Mapeamento.....	34
Planos da triesfera.....	38
Fechamento do plano.....	40
Partição da triesfera em duas esferas sólidas.....	43
Outro mapa da triesfera.....	45
Pólar de um ponto, polos de um plano.....	48
Semelhanças e dissemelhanças.....	52
Retas polares.....	56
Regiões complementares.....	58
Entidades equidistantes.....	60
Superfícies de Clifford.....	61
Retas paratáticas.....	64
Partição em poliedros.....	68
Partição-em-5.....	72
Partição-em-8.....	74
Partição-em-16.....	77
Partição-em-24.....	79
Partições em-120 e em-600; Tabela.....	80

APÊNDICES:

1 Elementos de linha no plano euclidiano.....	82
2 Elemento de linha na superfície esférica.....	84
3 Círculos curvos.....	87
4 Regras de Napier.....	91
5 Elementos de linha na triesfera.....	94
6 Esferas da triesfera.....	96
7 Superfícies de Clifford.....	100

INTRODUÇÃO

O que é um espaço tridimensional curvo?

Todo mundo distingue uma linha curva de uma linha reta, bem como distingue uma superfície curva de uma superfície plana. Mas um espaço tridimensional curvo, o que é isso? Além do mais, parece tão óbvio que o espaço em que vivemos é euclidiano... então para que servirá estudar triespço curvo, seja lá o que for isso?

Estudo de espaços curvos é da competência dos matemáticos, essencialmente. Na Física, foi aparentemente na Cosmologia que o estudo de triespços curvos encontrou seu mais frutífero campo de aplicação.

Em verdade o que se estuda modernamente em Cosmologia são quadriespços curvos: o Universo não é considerado simplesmente um espaço tridimensional no qual o tempo flui serena e independentemente, mas sim uma mistura de espaço e tempo formando uma variedade quadridimensional curva. A gravitação dos corpos celestes seria então a manifestação da curvatura dessa variedade.

Mas como visualizar a curvatura de um quadriespço? Isso é sem dúvida bastante difícil, e uma grande fração daqueles que iniciam o estudo da Cosmologia rapidamente desiste de conseguir essa visualização. Quase sempre os alunos interessados em Cosmologia partem de um conhecimento elementar de geometria das superfícies bidimensionais curvas diretamente para o estudo dos sofisticados quadriespços curvos.

É aqui que entra esta monografia: ela visa proporcio-

nar um útil degrau intermediário entre os espaços curvos em duas e em quatro dimensões.

Vamos aqui estudar a triesfera, que é provavelmente o espaço tridimensional curvo mais fácil de ser apreendido. Foi precisamente a triesfera que Einstein propôs em 1917 como modelo para o Universo; nesse modelo o tempo fluiria uniformemente em todos os pontos do espaço.

Nossa exposição do assunto será essencialmente do tipo descritivo ou qualitativo; apenas em Apêndices os leitores mais interessados encontrarão cálculos e fórmulas que justificam algumas das muitas asserções constantes do texto principal.

É notório que os trabalhos de divulgação científica são alvos fáceis tanto de especialistas como de iniciantes. Como satisfazer a gregos sem descontentar a troianos? Ao apresentarmos este trabalho estamos assumindo um risco, e pedimos aos leitores que nos assistam, com sugestões, em nosso esforço de futuramente lhes proporcionarmos leituras em que a amenidade, a quantidade e precisão de informações estejam melhor equilibradas.

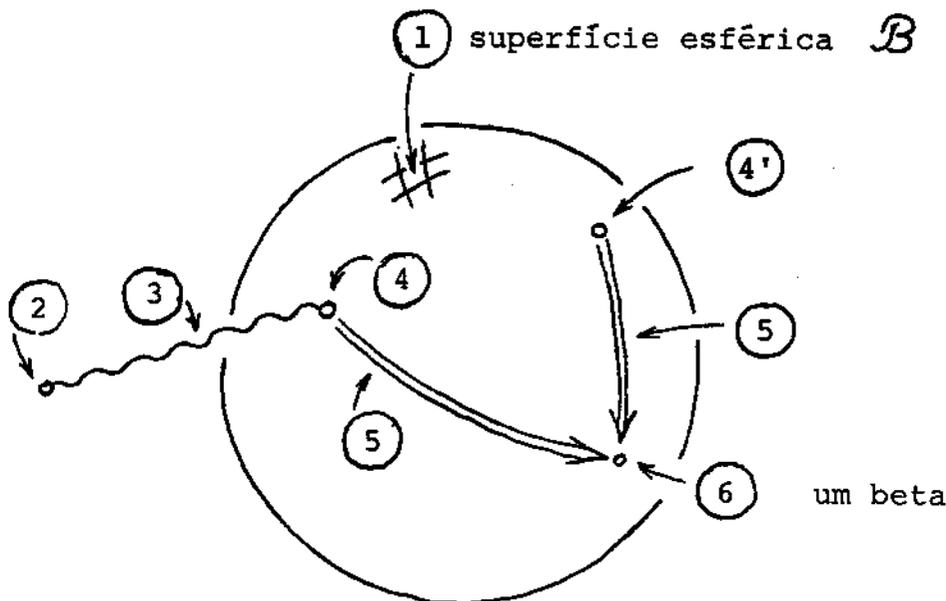
UNIVERSO QUASE PLANO

Imagine uma superfície esférica \mathcal{B} .

Achatados sobre essa superfície, admita que vivam seres bidimensionais inteligentes, os betas.

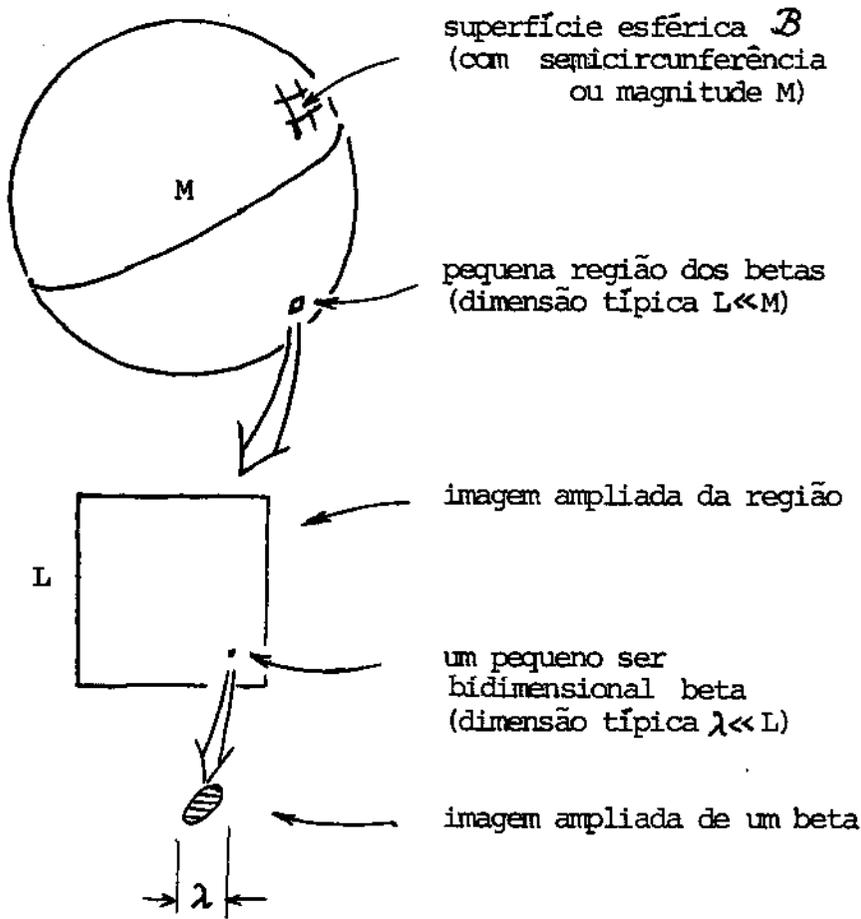
Admita ainda que esses seres sejam dotados de órgãos sensoriais diferentes dos nossos; esses órgãos se sensibilizariam apenas àquelas informações que se propagassem sobre a superfície \mathcal{B} . Em outras palavras, aos betas pareceria que a superfície \mathcal{B} é o palco e a fonte de todos os acontecimentos.

Assim sendo, e à semelhança ao conceito que temos desse vocábulo, os betas diriam que \mathcal{B} é o UNIVERSO.



- ② acontecimento fora de \mathcal{B}
- ③ informação propagando-se fora de \mathcal{B} ;
não sensibiliza os betas
- ④ ponto de \mathcal{B} atingido pela informação exterior
- ⑤ informação propagando-se sobre \mathcal{B} ;
sensibiliza os betas
- ④' acontecimento sobre \mathcal{B}

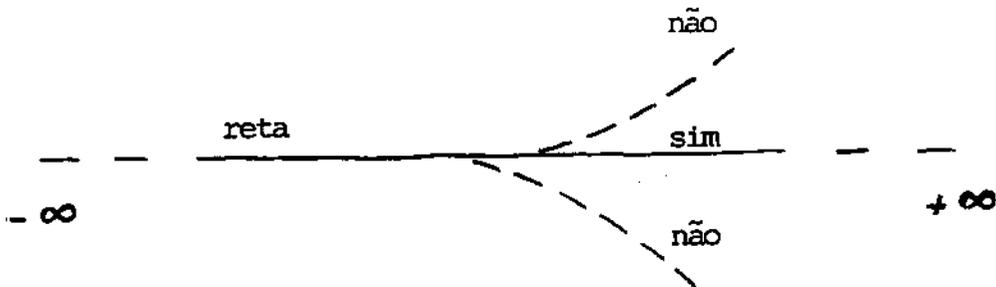
Suponha ainda que a colônia dos betas não se encontre espalhada por toda a superfície, mas ocupe apenas uma pequena região, e que os próprios betas sejam bastante pequenos relativamente a essa região.



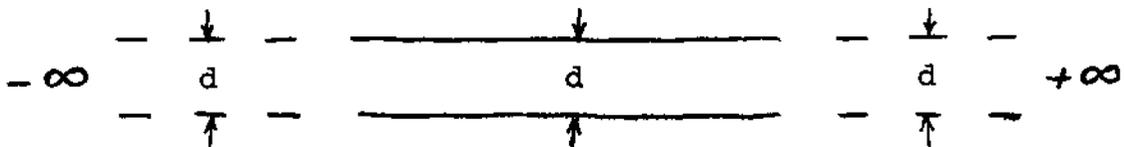
Os pequenos betas podem se locomover em qualquer direção sobre a superfície, porém sua lerdeza lhes impossibilita viajar a grandes distâncias. Por isso, com a experiência devida somente a pequenas incursões, eles descobrem e adotam a prática geometria euclidiana; esta se revela satisfatória dentro dos limites de precisão dos seus melhores instrumentos.

GEOMETRIA PLANA

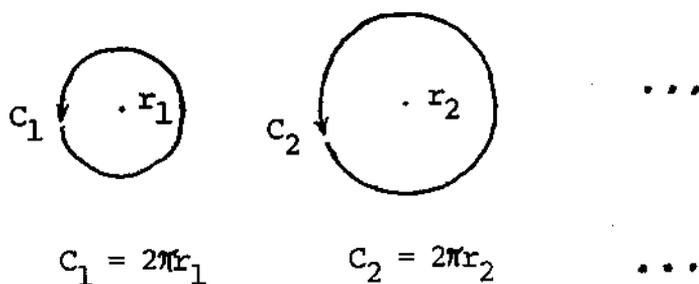
Cedo aprenderam os betas a traçar retas, por ele vagamente definidas como linhas que seguem "sempre em frente", sem desviar nem à direita nem à esquerda. Os betas crêem que o comprimento de uma reta é infinito, tanto para frente como para trás.



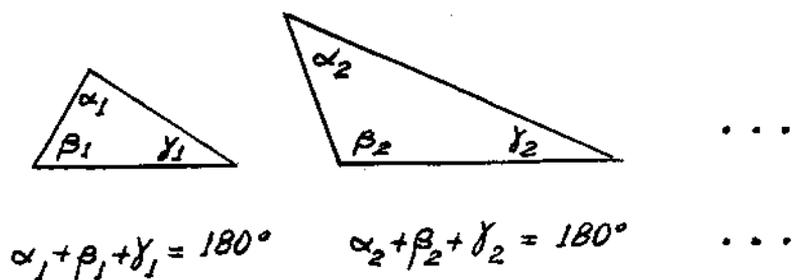
Num estágio posterior, aprenderam a traçar retas para lelas, definidas como retas que se mantêm equidistantes; os be tas crêem que tais retas são realizáveis em seu universo, pois para eles o UNIVERSO é uma infinita ampliação da região suposta tamente plana em que vivem.



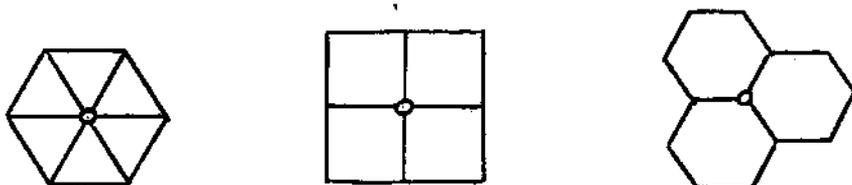
Aprenderam ainda a traçar circunferências, e crêem que o quociente do comprimento da circunferência pelo do raio é uma constante = 2π , qualquer que seja o tamanho da circunferência.



Igualmente, acreditam os betas que a soma dos ângulos internos de um triângulo é uma constante = 180° , independentemente da forma e do tamanho do triângulo.

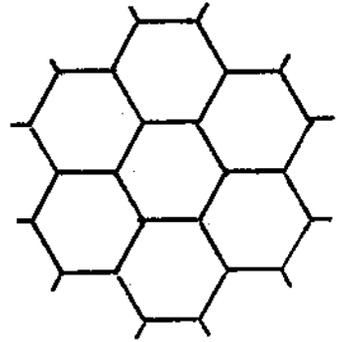
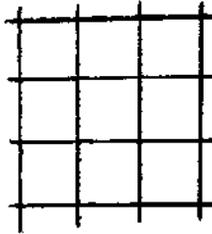
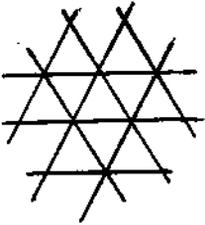


Completaremos agora esta pequena amostra do pensamento geométrico (euclidiano plano) dos betas: eles notaram que, em sua pequena região, a junção de 6 triângulos equiláteros idênticos se efetua aparentemente sem dificuldade em torno de um ponto, bem como a de 4 quadrados ou a de 3 hexágonos



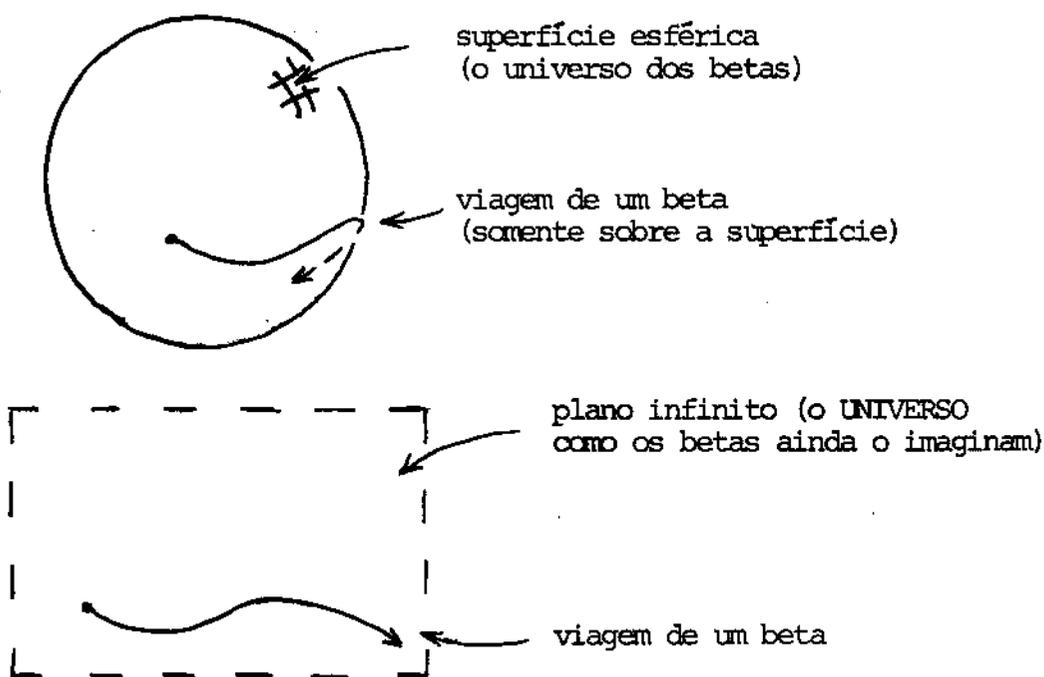
-7-

regulares. Em conseqüência, O UNIVERSO aparentemente poderia ser inteiramente ladrilhado por uma infinidade de triângulos equiláteros idênticos de tamanho qualquer, ou por quadrados (como um infinito tabuleiro de xadrez) ou ainda por hexágonos (como uma infinita colméia).

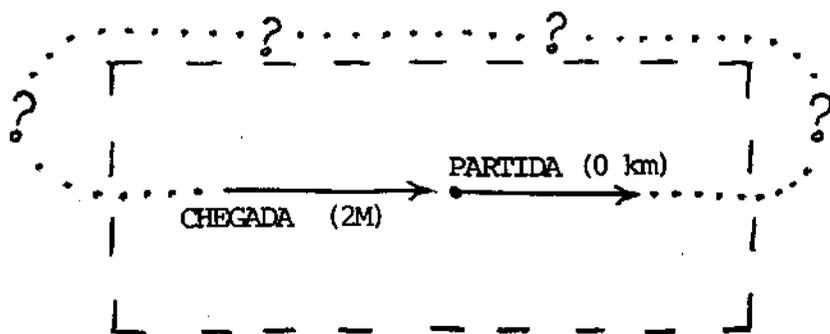


DESACERTOS

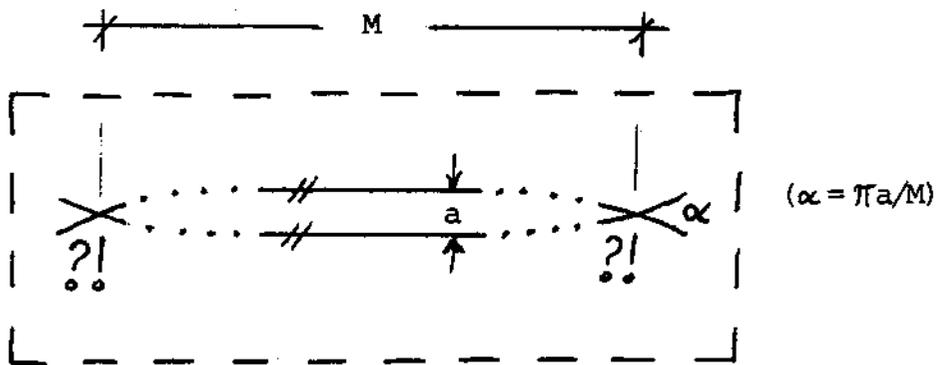
Um dia os betas inventam um veículo que lhes permite viajar mais rápido em seu universo bidimensional; consequentemente, eles passam a sondar regiões mais afastadas. Resultados estranhos começam então a ser observados.



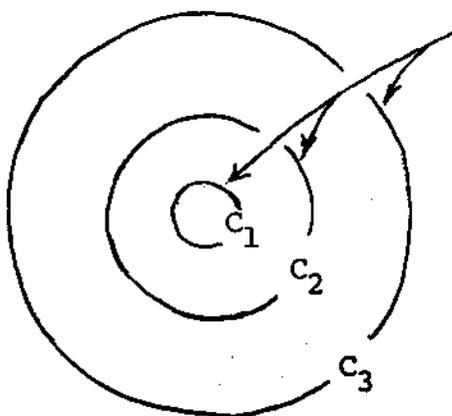
Um veículo que viaje rigorosamente "em frente" termina por retornar ao ponto de partida após percorrer uma longa distância que designaremos por $2M$; qualquer que tenha sido a direção inicial, o retorno sempre se dá pelo lado oposto ao da partida.



Dois veículos que partem em direções escolhidas cuidadosamente paralelas, no mesmo sentido, deveriam deixar como rastros duas retas paralelas. No entanto, os instrumentos de medida indicam que a separação entre as retas diminui com a distância percorrida, e que o mesmo ocorre no sentido oposto. Tanto para a frente como para trás as retas terminam por concorrer.



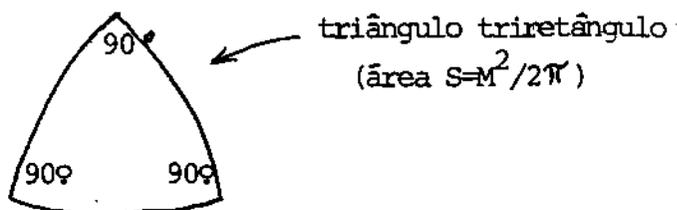
Verificam um dia os betas que a fórmula que dá o comprimento de uma circunferência de raio r não é simplesmente $2\pi r$, porém $C = 2M \sin(\pi r/M)$. Quando o raio é pequeno ($r \ll M$) as duas fórmulas coincidem; quando cresce o raio, também cresce a circunferência, porém num ritmo mais lento e só até um valor máximo $C = 2M$, quando $r = M/2$. Crescendo ainda mais o raio, a circunferência passa a diminuir, desaparecendo quando $r = M$.



circunferências
com raios r_1, r_2, r_3

$$\begin{aligned} r_1 \ll M & ; C_1 \approx 2\pi r_1 \\ r_2 = M/2 & ; C_2 = 2M \quad (\neq \pi M \text{ ?!}) \\ r_3 = M & ; C_3 = 0 \quad (\text{?!}) \end{aligned}$$

Ao construírem grandes triângulos, os betas verificam que a soma \sum dos ângulos internos não é constante, mas depende da área S do triângulo segundo a expressão $\sum = (1 + \pi S/M^2) \times 180^\circ$; somente para pequenos triângulos ($S \ll M^2$) se tem $\sum \simeq 180^\circ$.



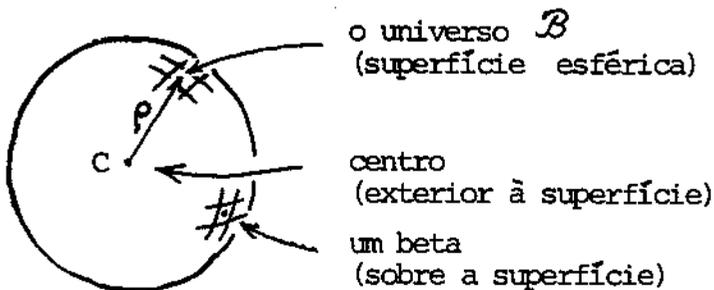
Finalmente, os betas descobrem que não poderiam desenhar em seu universo uma infinidade de triângulos equiláteros idênticos de tamanho arbitrário (concorrendo 6 em cada vértice), ou quadrados (4 por vértice) ou hexágonos (3 por vértice). Na verdade, só haveria cinco maneiras diferentes de cobrir inteiramente O UNIVERSO com polígonos regulares idênticos:

- 1) com quatro enormes triângulos, de lado $l_4 = 0,608M$, concorrendo 3 em cada vértice;
- 2) com seis quadrados de $l_6 = 0,392M$, 3 por vértice;
- 3) com oito triângulos de $l_8 = 0,500M$, 4 por vértice;
- 4) com doze pentágonos de $l_{12} = 0,233M$, 3 por vértice;
- 5) com vinte triângulos de $l_{20} = 0,352M$, 5 por vértice.

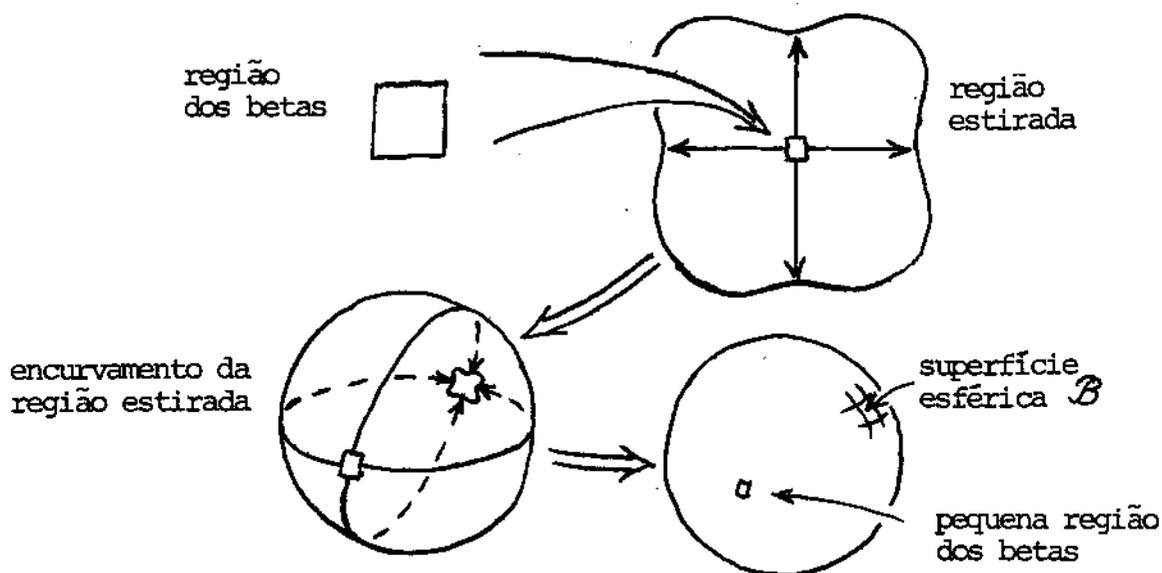
UNIVERSO FINITO MAS ILIMITADO

Os geômetras dos betas não tardam a explicar esses estranhos resultados: seu universo \mathcal{B} não é um plano infinito, como supunham até então, e sim uma superfície curva e *finita*. Embora finito, esse universo não apresenta em qualquer lugar alguma linha intransponível, ou seja, algum *limite*; é portanto um universo finito e ilimitado.

É fácil para nós, seres tridimensionais, a visualização do universo \mathcal{B} : é uma trivial superfície esférica de raio $\rho = M/\pi$, e portanto área total $4\pi\rho^2 = 4\pi(M/\pi)^2 = 4M^2/\pi$. Note-se que o centro C dessa superfície não pertence ao universo dos betas, e que a medição do raio ρ é efetuada por nós no nosso espaço tridimensional (fora do universo dos betas).

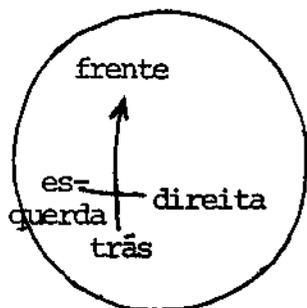


Se nos fosse apresentada uma pequena região de \mathcal{B} , nós construiríamos o restante de \mathcal{B} inicialmente estirando a pequena região para todos os lados, e a seguir "curvando para dentro" a região estirada a fim de soldar suas beiradas.

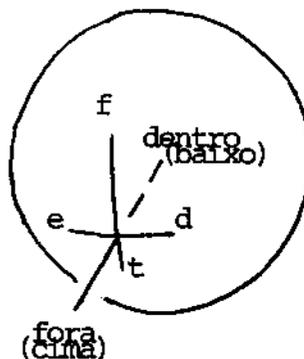


Entretanto, teríamos dificuldade em explicar aos betas essa nossa construção do seu universo: eles não compreenderiam o que queremos dizer com "curvar para dentro". Aos betas sô são familiares as noções direcionais "frente, trás, direita, esquerda"; eles não dispõem de qualquer sensibilidade associada a "para dentro, para fora" ou equivalentemente "para baixo, para cima".

sensibilidade de um beta



sensibilidade dos humanos

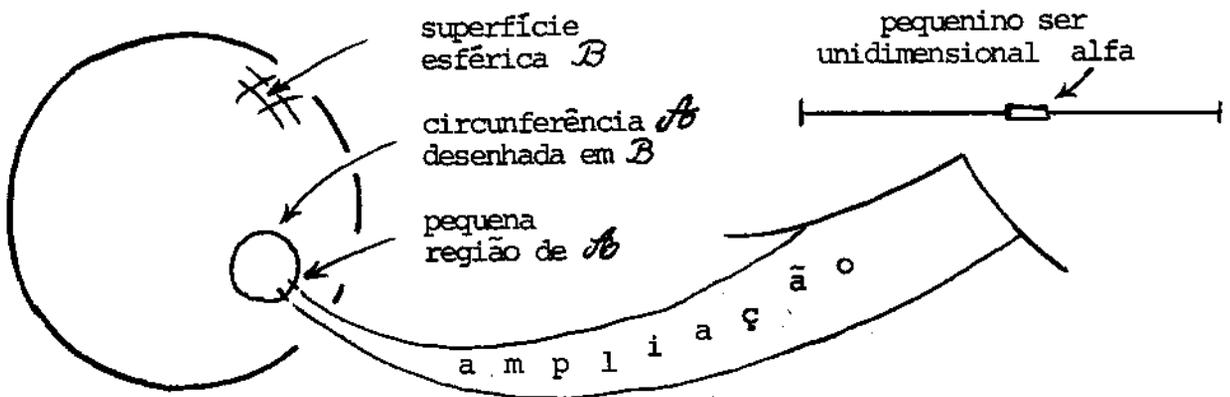


Não obstante, pela análise de um problema unidimensional semelhante poderiam os betas perceber a origem da dificuldade em compreenderem seu universo.

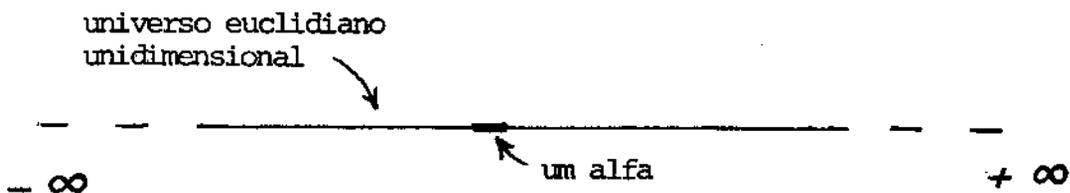
-13-

VISLUMBRE DA CURVATURA

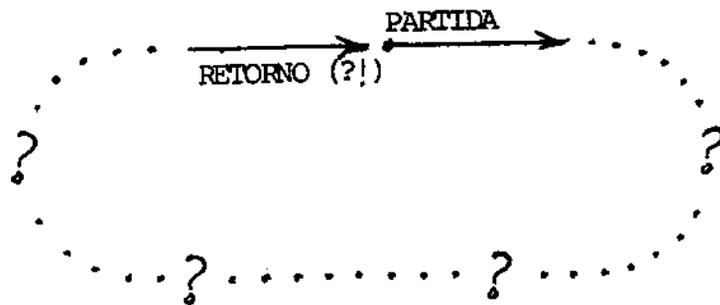
Imagine-se que na região habitada pelos betas exista desenhada uma circunferência A_B , ao longo da qual vivam alinhados pequeninos seres unidimensionais, os alfas. Cada alfa só pode se locomover para frente e para trás sobre aquela linha, e não faz idéia do que seja "para os lados". Além disso, somente chegam ao conhecimento dos alfas as informações que se propagam ao longo da linha A_B ; os alfas dizem então que A_B é O UNIVERSO.



Em suas pequenas andanças sobre seu universo unidimensional, cada alfa nota que quanto mais se locomove "em frente", a partir do seu local de moradia, mais afastado ele fica daquele local. Muito justificadamente, ele extrapola mentalmente suas experiências iniciais e crê que o UNIVERSO é infinito, para frente e para trás.



Com surpresa verificam os alfas que numa viagem muito longa, deslocando-se sempre no mesmo sentido, eles retornam ao ponto de partida. Os alfas não conseguem compreender o que ocorre, mas têm que aceitar essa ocorrência como real e aprender a conviver com essa nova realidade.

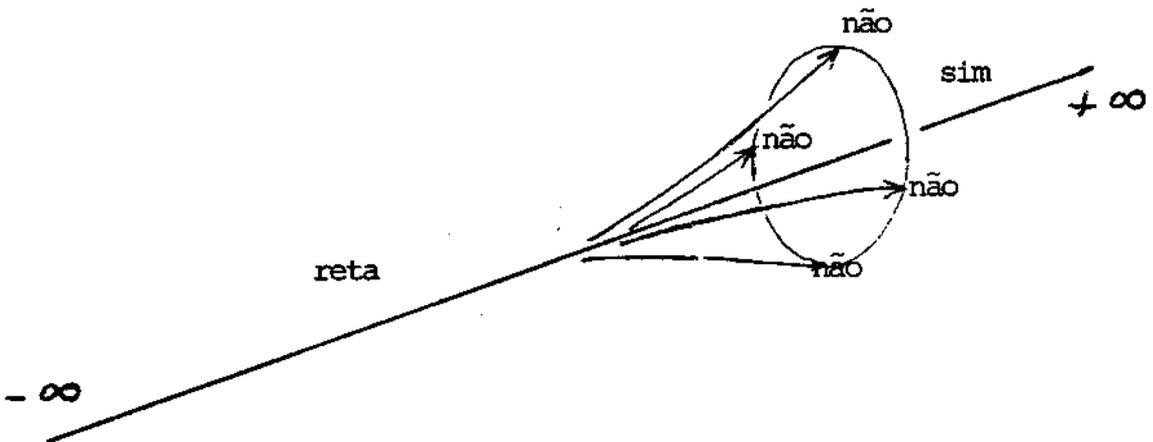


Os seres bidimensionais betas, acompanhando o dia-a-dia dos alfas, percebem sem dificuldade o fechamento do universo unidimensional \mathcal{A} , e compreendem o motivo da incapacidade dos alfas em entender tal fechamento: é que falta aos alfas sensibilidade para as noções de "direita, esquerda" tão familiares a eles, betas.

Por compreenderem essa incapacidade, podem agora os betas vislumbrar o motivo da sua própria incapacidade em perceber a curvatura do seu universo \mathcal{B} . Agora eles podem até imaginar um universo tridimensional \mathcal{C} , no qual seu universo bidimensional \mathcal{B} estivesse encaixado. Seres tridimensionais perceberiam espontaneamente a curvatura de \mathcal{B} .

INFINIDADE DO TRIESPACO

Nós, humanos, definimos vagamente uma reta como sendo uma linha que segue "sempre em frente" no espaço tridimensional, sem desviar à direita, ou à esquerda, ou para cima ou para baixo. Assim, parece-nos evidente que as retas do nosso triespaco tenham comprimento infinito tanto para a frente como para trás. Parece-nos também óbvio que nosso universo possa ser percorrido por retas orientadas em quaisquer direções; portanto O UNIVERSO seria infinito em todas as direções.



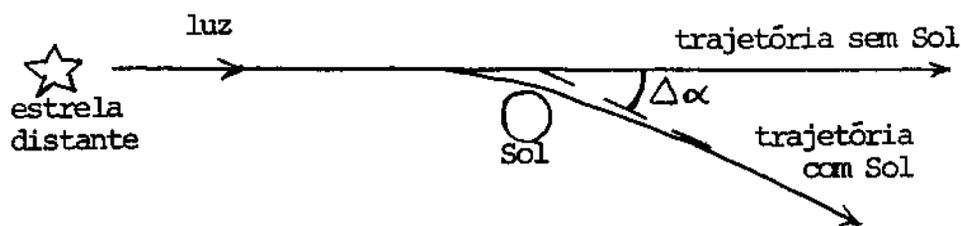
A RETA NA PRÁTICA

É entretanto chegada a hora de perguntarmos: o que é uma reta na prática? Mais precisamente, deveríamos perguntar: o que nos convém escolher na prática para representar a reta dos geômetras?

Certamente o trajeto de um raio de luz é um excelente candidato, contanto que umas tantas precauções sejam tomadas. Por exemplo, devemos retirar todo objeto opaco do caminho a ser seguido pelo raio de luz, a fim de que a reta correspondente não se interrompa no objeto. Devemos também retirar espelhos do caminho, pois a trajetória do raio sofreria reflexões e não representaria uma reta única. Devemos ainda evitar variações do índice de refração do meio, pois também essas variações ocasionariam desvios do raio luminoso.

Pode parecer então que uma definição apropriada de reta (física) seria "o caminho seguido por um raio de luz no vácuo": realmente, estando o vácuo desprovido de matéria, nada haveria que desviasse a luz do seu caminho retilíneo.

Entretanto, sabe-se hoje que também os campos gravitacionais alteram a trajetória da luz. Por exemplo, um raio de luz que passe nas vizinhanças do Sol sofre em sua trajetória um desvio angular $\Delta\alpha$ da ordem de 1,75 segundos de arco, em consequência da gravitação solar.



-17-

Uma definição já um pouco melhorada para reta "física" seria então "a trajetória de um raio de luz no vácuo e na ausência de campos gravitacionais".

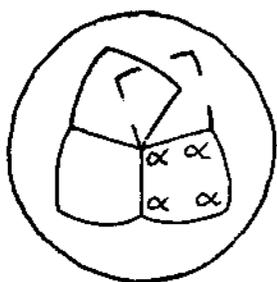
Entretanto, ainda essa definição é insatisfatória, pois a anulação total da gravitação no UNIVERSO exigiria a eliminação total da própria matéria do UNIVERSO. Assim, devemos buscar uma definição de reta física que aceite a convivência da gravitação.

Para minimizar a influência gravitacional, podemos admitir que, em escala cosmológica, a matéria do UNIVERSO inteiro se encontre espalhada de modo uniforme; assim, por questão de simetria, um raio de luz não seria defletido gravitacionalmente nem para a direita, nem esquerda, nem para cima nem para baixo ao longo de sua trajetória. Portanto vamos admitir que a melhor realização física da reta geométrica é "a trajetória de um raio de luz no vácuo, sendo este vácuo gravitacionalmente uniforme".

CURVATURA DO TRIESPACO

Imaginemos agora, no espaço tridimensional com gravitação uniforme, três pontos não-colineares próximos um do outro, e unâmo-los por segmentos de retas formando assim um triângulo. Segundo a geometria espacial euclidiana, a soma dos ângulos internos desse triângulo será 180° , e nossos mais precisos aparelhos de medida confirmam essa previsão. Mas cabe aqui a conjectura: e se os afastamentos entre aqueles três pontos forem muito grandes (de dimensões cósmicas, digamos), será que a soma dos ângulos ainda valerá 180° ?

É verdade que a geometria euclidiana espacial é matematicamente bastante simples, e que ela até hoje mostrou-se eficiente na solução dos muitos problemas que lhe propusemos. Entretanto, devemos recordar que tampouco os pequenos seres bidimensionais que habitem uma grande superfície esférica terão qualquer motivo para abandonar a prática geometria bidimensional euclidiana enquanto se ativerem a medições de pequena envergadura; somente para medições em grandes escalas é que sentirão a conveniência de adotar uma nova geometria, que no caso deles será a geometria bidimensional esférica.



$$\alpha > 90^\circ$$

geometria
bidimensional esférica

$$4 \square \neq 1 \square$$

Portanto, é plausível conjecturarmos que também o nosso imenso universo seja não-euclidiano, e investigarmos algumas das estruturas que ele possa ter.

Vamos iniciar pelo modelo triesférico do UNIVERSO (a triesfera): trata-se de um modelo homogêneo, isotrópico, finito, ilimitado, orientado, e estacionário (imutável ao longo do tempo). Em outras oportunidades esperamos tratar ~~dos~~ modelos elitico (também finito) e hiperbólico (infinito) para O UNIVERSO.

TRIESFERA EM MODELOS COSMOLÓGICOS

Foi o matemático Riemann (1854) o descobridor, ou inventor da triesfera; e foi a triesfera que o físico Einstein (1917) apontou como modelo cosmológico estático para o Universo, como uma das soluções de suas equações da relatividade geral.

O modelo cosmológico de Einstein pressupõe que o constituente físico fundamental do Universo é o seu conteúdo material, e que a densidade volumétrica da matéria ϵ é uniforme no espaço e constante ao correr do tempo; a eterna atração mútua da matéria seria contrabalançada por um campo repulsivo de natureza cosmológica, associado à chamada constante cosmológica Λ . O valor dessa constante seria $\Lambda = 4\pi G\epsilon/c^2$ (onde G = constante gravitacional de Newton, c = velocidade da luz no vácuo), e o universo triesférico teria um "raio" de valor $\rho = 1/\sqrt{\Lambda}$ (adiante veremos o significado desse raio).

Acredita-se atualmente que uma triesfera estática não representa satisfatoriamente o cosmos, o qual parece estar em expansão. Entretanto, uma triesfera cujo "raio" varie ao longo do tempo ainda vem sendo aceito como modelo para o nosso universo; isto justifica o estudo da triesfera estática como passo preliminar ao estudo de modelos cosmológicos mais elaborados.

TRIESFERA: FINITA MAIS ILIMITADA

É bem provável que o leitor esteja imaginando que "triesfera" é apenas uma denominação sofisticada para a familiar "esfera sólida", da qual uma bola de bilhar é um exemplo típico. Isto seria um equívoco com graves consequências, e convém que imediatamente deixemos bem estabelecido que essas duas entidades são totalmente diferentes.

A raiz dessa diferença é da mesma natureza que a existente entre um círculo e uma superfície esférica. Círculo e superfície esférica se assemelham no serem ambos bidimensionais e terem ambos área finita. Entretanto, encontramos no círculo pontos de duas classes distintas, os "interiores" e os "da periferia", enquanto que na superfície esférica não há "periferia" e portanto todos os pontos são "interiores".

O correspondente tridimensional do círculo é a esfera comum, ou esfera sólida; esta entidade claramente tem volume finito, e tem claramente pontos "interiores" e pontos "na fronteira".

Finalmente, o correspondente tridimensional da superfície esférica é a triesfera (ou S_3), que tem volume também finito mas não tem fronteira; todos os seus pontos são interiores, e é isso que torna a triesfera radicalmente diferente da esfera comum.

	entidades com fronteiras	entidades sem fronteira
1-dim.	segmento	circunferência
2-dim.	círculo	superfície esférica
3-dim.	esfera sólida	triesfera

É quase certo que esta primeira informação sobre a triesfera não basta para o leitor adquirir uma visão satisfatória da triesfera; o leitor provavelmente só começará a "sentir", ou "compreender", ou "dominar" a triesfera a partir das próximas seções.

MAGNITUDE DA TRIESFERA

Em anteriores considerações sobre a biesfera (ou seja, superfície esférica), estivemos caracterizando seu tamanho pela medida da sua semicircunferência, que chamamos de magnitude M : essa quantidade representa o máximo afastamento entre dois pontos da superfície, o afastamento sendo medido acompanhando a curvatura da superfície.

Do mesmo modo caracterizaremos o tamanho de uma triesfera por sua magnitude M , que representará o máximo afastamento possível entre dois pontos da triesfera (relembremos que a triesfera é finita, isto é, tem volume finito.) Por analogia com a superfície esférica, denominamos raio da triesfera a quantidade $\rho = M/\pi$; embora comparecendo frequentemente em expressões matemáticas, o raio ρ não tem para nós interpretação métrica tão direta quanto a magnitude M .

PONTOS ANTÍPODAS

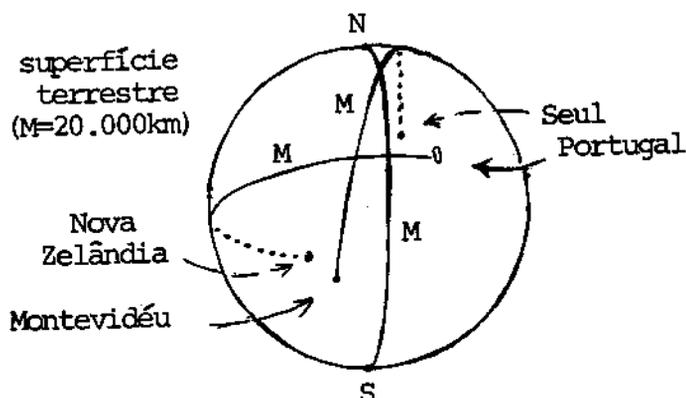
Para facilitar a visualização de certos conceitos, vamos admitir que a superfície do nosso planeta Terra seja perfeitamente esférica, com equador de comprimento $2M = 40.000$ km, e que constitua o universo bidimensional dos seres achatados betas.

Nesse universo (uma biesfera), notamos que a cada ponto P corresponde um único outro ponto \bar{P} que dele dista $M = 20.000$ km. Alguns exemplos de tais pares de pontos, chamados antípodas terrestres, são

polo N - polo S,

Montevideu - Seul (aproximadamente),

Portugal - Nova Zelândia (aproximadamente).

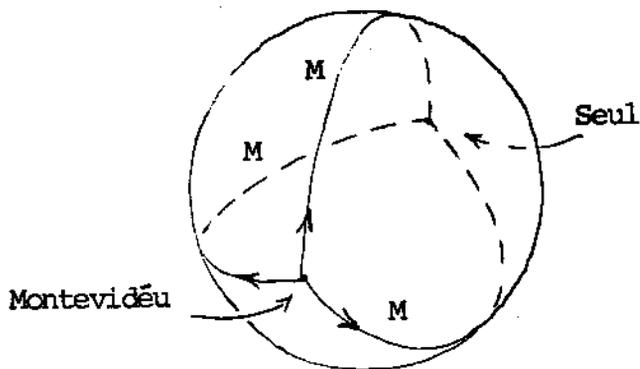


Também na triesfera cabe o conceito de pontos antípodas; dado um ponto P , há na triesfera um único ponto \bar{P} (o antípoda de P) que dele dista a magnitude M da triesfera.

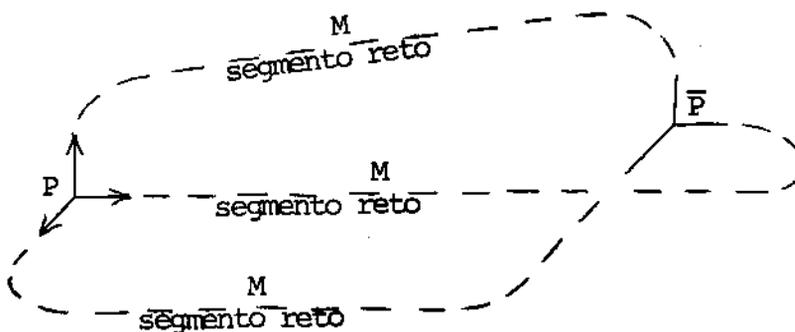
Imagine-se agora o leitor contemplando um céu estrelado no nosso universo suposto triesférico; seria muito natural o leitor se perguntar em que direção naquele céu se encon

tra o antípoda (triesférico) da posição que ele está ocupando.

Preparando a resposta a essa pergunta, vamos analisar uma questão semelhante na geometria da biesfera. Suponha-se um beta inicialmente em Montevidéu, e partindo para uma viagem de $M = 20.000$ km em uma trajetória "retilínea", isto é, acompanhando a curvatura terrestre. É fácil perceber que ao fim da viagem aquele beta estará em Seul, antípoda de Montevidéu, qual quer que tenha sido a direção inicial.



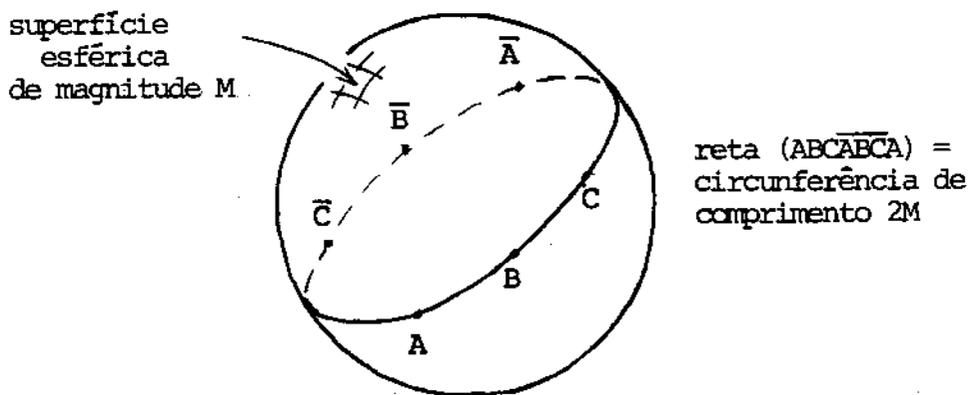
Informamos agora ao leitor sob o céu estrelado na tri-esfera de magnitude M : o seu antípoda se encontra em todas as direções (em cima, em baixo, à direita, à esquerda, em frente, atrás, etc.), sempre à distância M .



RETAS

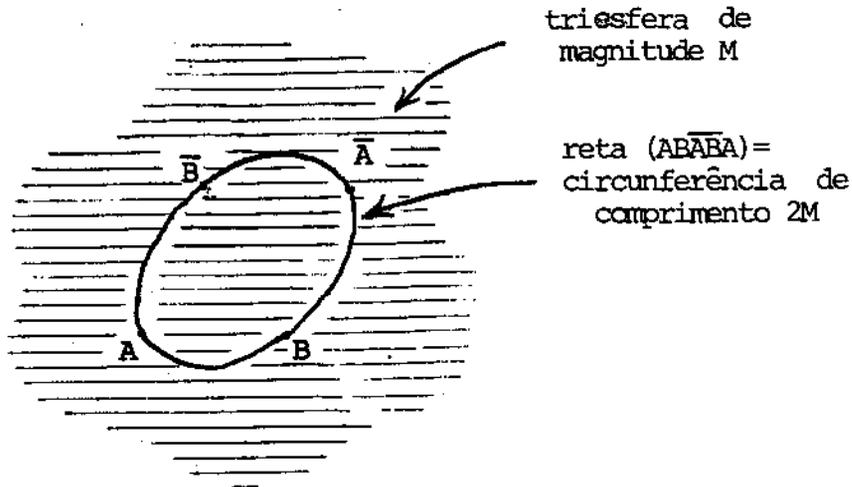
Já travamos conhecimento com as retas da biesfera (superfície esférica) de magnitude ou semicircunferência M : elas são as circunferências máximas da superfície, e tem comprimento $2M$.

Se um viajante da biesfera parte de um ponto A e viaja em linha reta, ele se afastará de A até atingir o antípoda \bar{A} , situado à distância máxima M ; se prosseguir naquela linha reta ele passará a se aproximar do ponto A , o qual será finalmente atingido "pelo outro lado". Notamos que o trecho de retorno é todo ele constituído por pontos seguidamente antípodas dos pontos do trecho de ida.



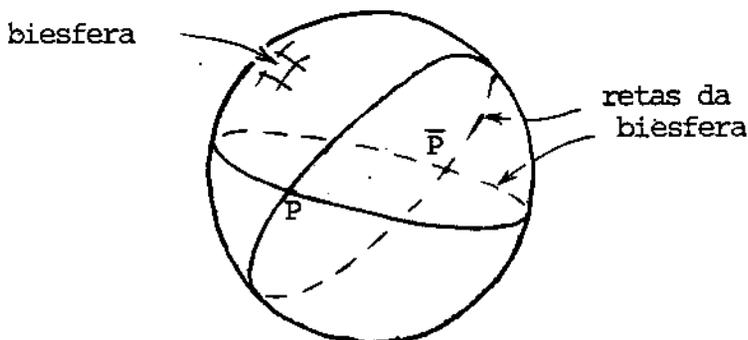
As retas da triesfera são em tudo idênticas às da biesfera: são também circunferências, todas com o mesmo comprimento $2M$ (onde agora $M =$ magnitude da triesfera), e cada uma é toda formada por pares de pontos antípodas.

-27-

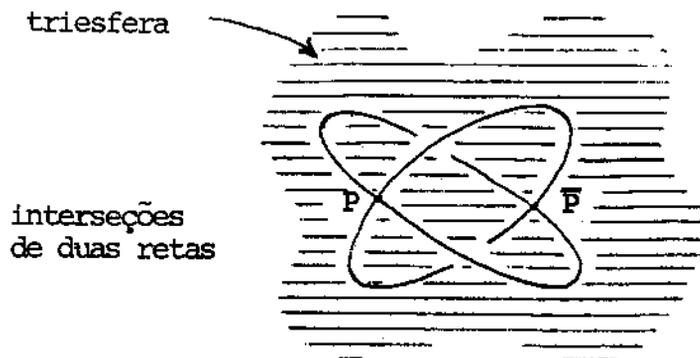


Possivelmente o leitor resistirá a aceitar que uma reta triesférica resulte numa curva fechada, pois por construção a reta não sofre qualquer desvio para qualquer lado no espaço tridimensional; lembre então o leitor que a mesma dificuldade é sentida pelos pequenos seres bidimensionais que vivem em uma grande superfície esférica, e que eles têm que aprender a conviver com essa realidade.

Em uma superfície esférica, duas circunferências máximas se interceptam em dois pontos antípodas; em outras palavras, duas retas de uma biesfera que se cruzam em um ponto P automaticamente se cruzarão também no ponto antípoda \bar{P} .



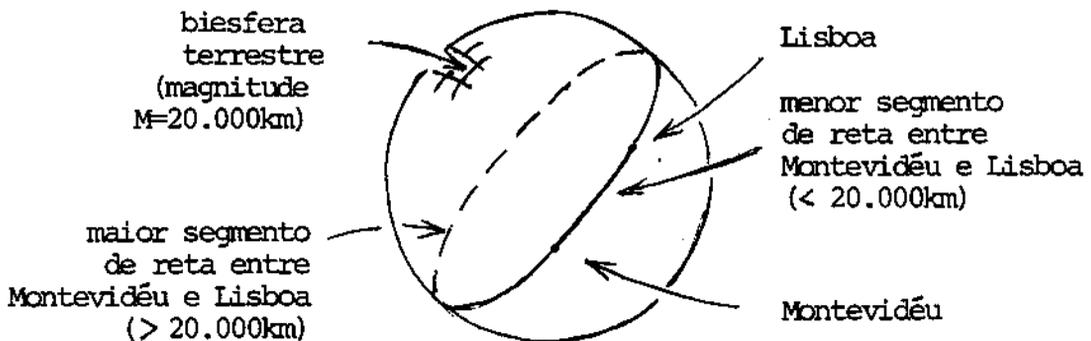
Também na triesfera duas retas que se encontram em um ponto P automaticamente tornarão a se encontrar no antípoda \bar{P} .



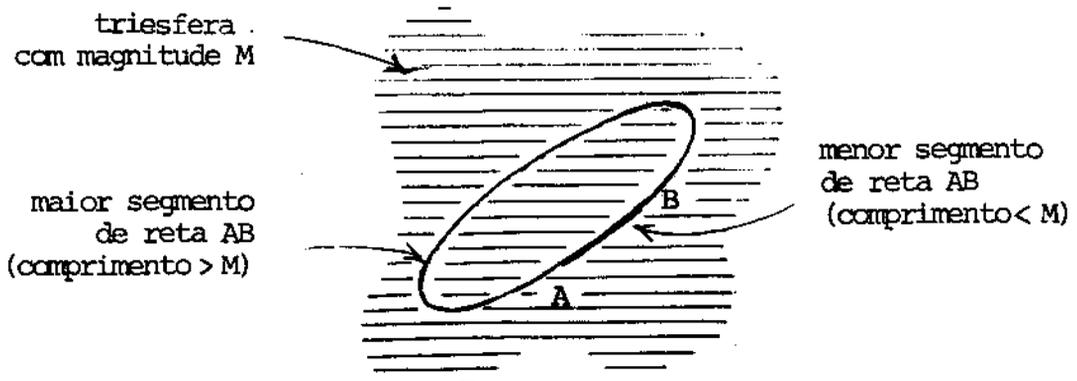
SEGMENTOS DE RETAS

Na geometria plana euclidiana, bem como no triespaco euclidiano, para cada par de pontos dados há um único segmento de reta que os une.

Já na biesfera (superfície esférica) e na triesfera, há não apenas 1, mas 2 segmentos de reta unindo dois dados pontos (que não sejam antípodas); um dos segmentos faz a união pelo caminho mais curto que M , e o outro a faz pelo mais longo que

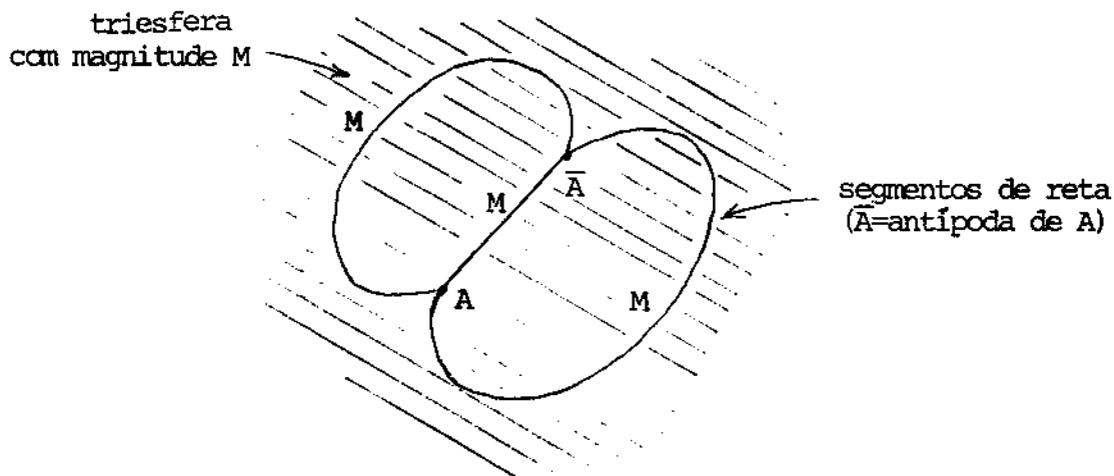
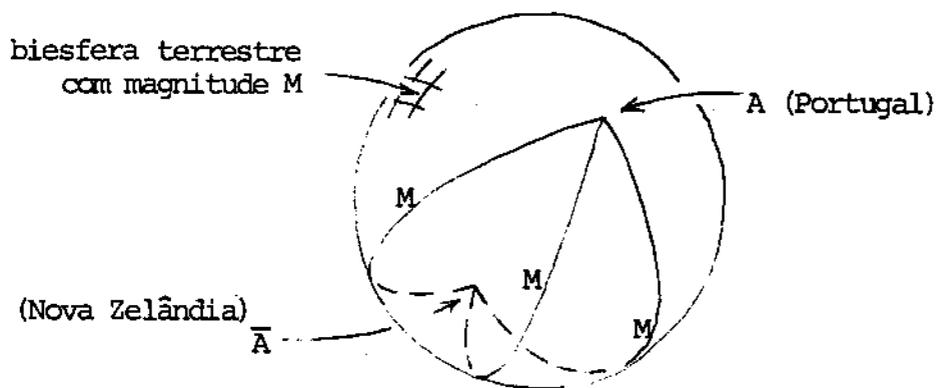


M , ou seja, "pelo outro lado". A soma dos dois segmentos dá uma reta completa, de comprimento $2M$.



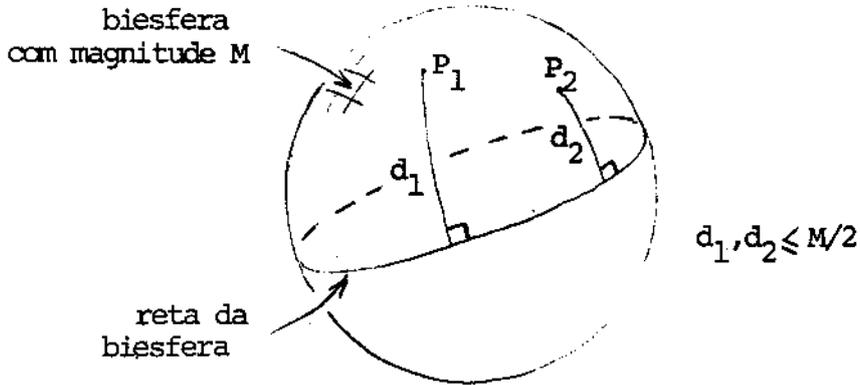
Por razões de economia, é usual designar-se o segmento menor que M simplesmente por "segmento", tanto na biesfera como na triesfera.

No caso dos pontos extremos serem antípodas há uma infinidade de segmentos de reta entre eles, todos de comprimento M , tanto na biesfera como na triesfera.

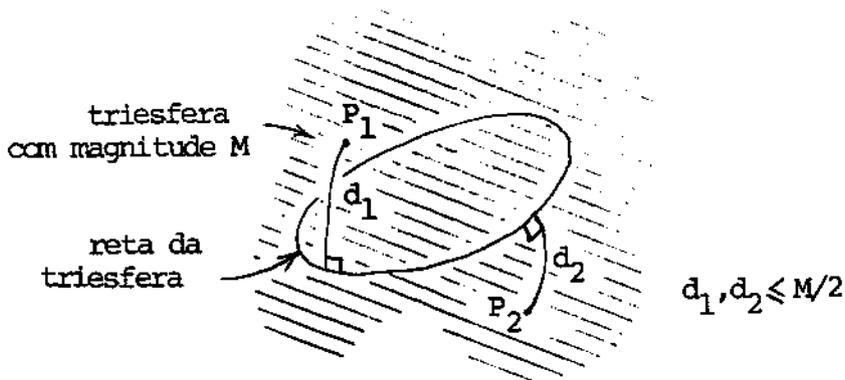


-31-

Na biesfera de magnitude M é fácil ver que a máxima distância entre um ponto e uma reta é $M/2$. O mesmo ocorre na triesfera de magnitude M : dada uma reta qualquer, nenhum ponto



da triesfera distará da reta mais que $M/2$.



DIFICULDADES NOS MAPEAMENTOS

Chegou o momento de enfrentarmos uma séria dificuldade para o estudo e compreensão da triésfera: o do seu mapeamento. Para percebermos a natureza do problema, buscaremos primeiro analisar um problema análogo no mapeamento de uma superfície.

Para simplificar, vamos inicialmente supor euclidiano o nosso triéspace. Nesse caso será fácil obtermos uma cópia uniformemente reduzida de uma dada gravura plana: tomamos uma folha plana de papel, e nela desenhemos a gravura na escala que pretendermos. A precisão da cópia dependerá apenas da nossa habilidade como desenhista.

Entretanto, mesmo no triéspace euclidiano fracassaremos se tentarmos reproduzir com fidelidade um continente terrestre sobre uma folha plana de papel. Com efeito, se quisermos elaborar um mapa preciso de qualquer região do nosso planeta (suposto esférico com raio ρ_1), nós necessitaremos dispor de uma superfície também esférica que sirva de sustentação para o mapa; chamando de ρ_2 o raio desta, então o mapa será composto na escala $\rho_2 : \rho_1$.

Não constitui problema para nós, seres tridimensionais, o manuseio de superfícies esféricas em nosso espaço tridimensional, pois tais superfícies podem ser inseridas no nosso espaço. Entretanto, percebe-se facilmente que uma superfície esférica não pode "fazer parte" de uma superfície esférica de tamanho diferente. Este fato é de fundamental importância para os betas, os seres bidimensionais que habitam uma superfície esférica: impossibilitados de confeccionar em seu universo uma

pequena superfície esférica, eles jamais terão acesso a um mapa preciso de qualquer região do seu universo, e terão portanto que se satisfazer com representações imperfeitas sob um ou outro aspecto.

Já os alfas (seres unidimensionais que habitam uma circunferência \mathcal{A}) podem realizar precisos mapas parciais de seu universo; entretanto não podem confeccionar um mapa completo, pois uma circunferência não pode "acolher" uma circunferência menor.

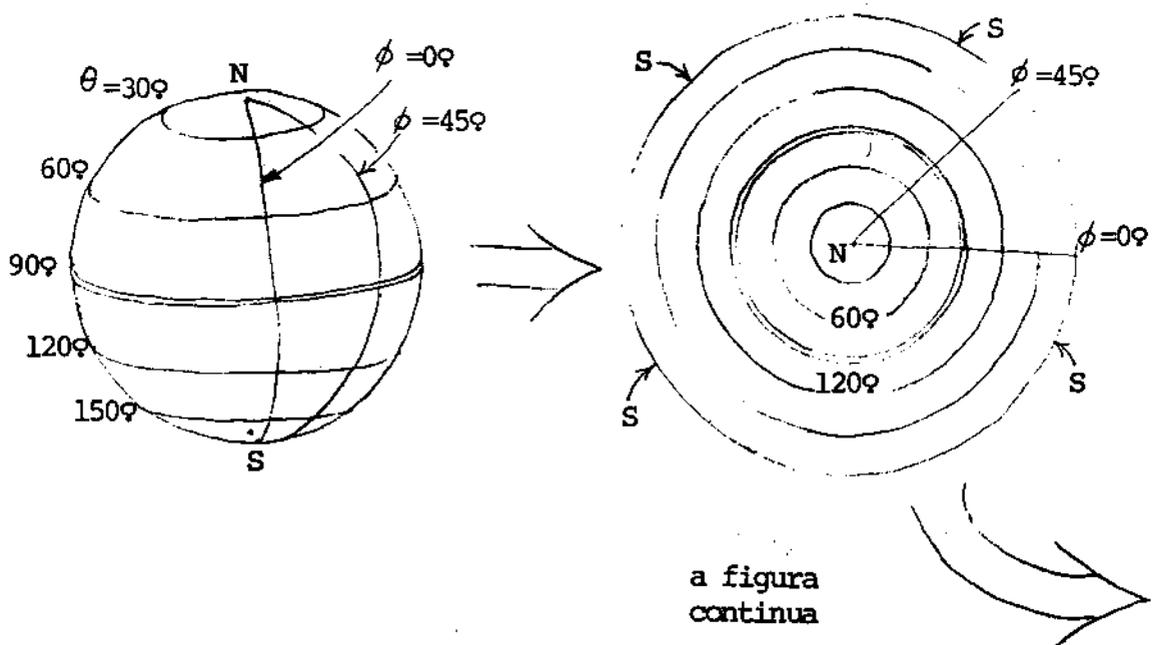
Tal mapa completo de \mathcal{A} pode evidentemente ser realizado pelos betas no universo \mathcal{B} , bem como nós, seres tridimensionais, podemos desenhar em nosso universo mapas proporcionais tanto a \mathcal{A} como a \mathcal{B} inteiros.

Chegamos agora ao ponto a que pretendíamos. Do mesmo modo que uma circunferência (objeto unidimensional fechado), mesmo pequena, não pode ser posta dentro de um pedaço limitado de linha, e do mesmo modo que uma superfície esférica (objeto bidimensional fechado), mesmo pequena, não pode ser posta dentro de uma fração limitada de superfície, igualmente será impossível para nós confeccionar em nosso espaço tridimensional um modelo uniformemente reduzido de uma triesfera (objeto tridimensional fechado). Um tal modelo, mesmo que pequeno, "não pode ser acolhido" pelo nosso universo tridimensional.

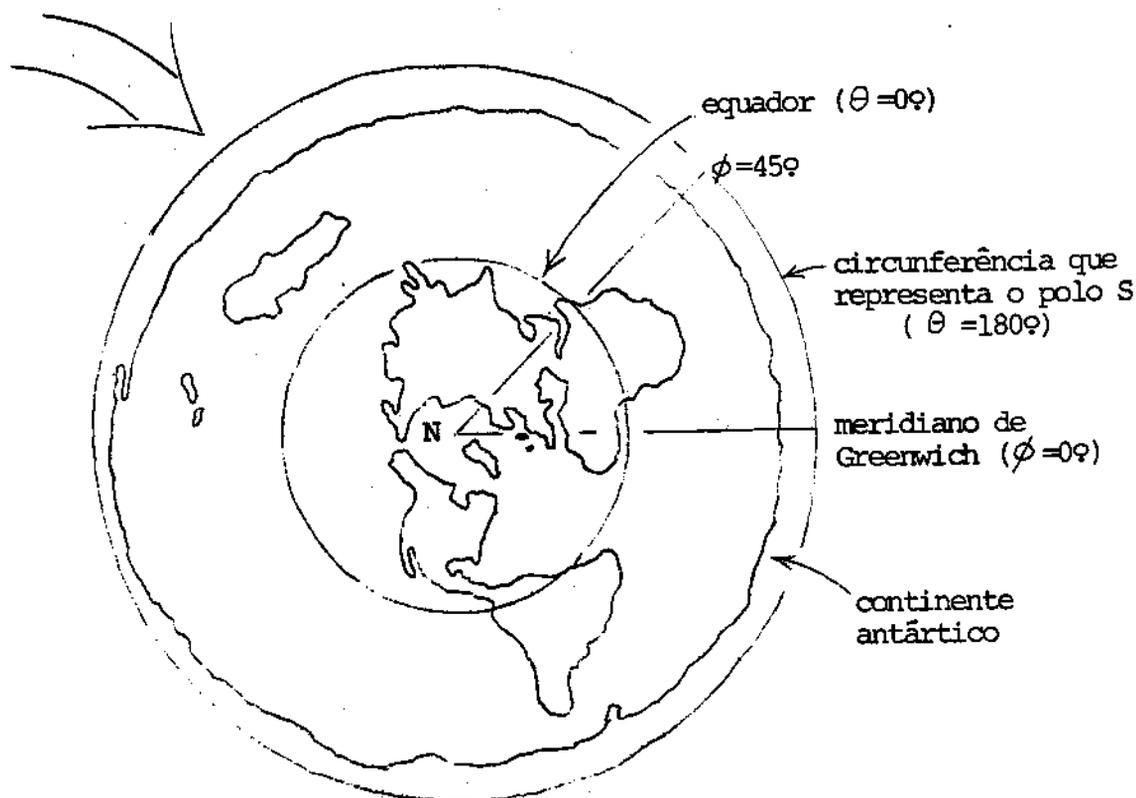
MAPEAMENTO

Vimos que os betas não podem confeccionar um mapa que sozinho represente com fidelidade seu universo \mathcal{B} inteiro, e que assim eles terão que se habituar com mapas menos satisfatórios.

Novamente vamos tomar emprestada da superfície terrestre toda sua terminologia a fim de descrever o universo biesférico dos betas. Vamos construir um mapa que se destaca por sua simplicidade. O mapa consiste essencialmente em um círculo. O centro do círculo corresponde ao polo norte N da biesfera, e o raio do círculo representa a magnitude M da biesfera (seria $M = 20.000$ km se \mathcal{B} fosse efetivamente a superfície terrestre). Os paralelos são representados por circunferências concêntricas, com raios linearmente proporcionais aos correspondentes ângulos polares $\theta = \text{const}$; finalmente, os meridianos são representados por segmentos radiais $\phi = \text{const}$.



-35-

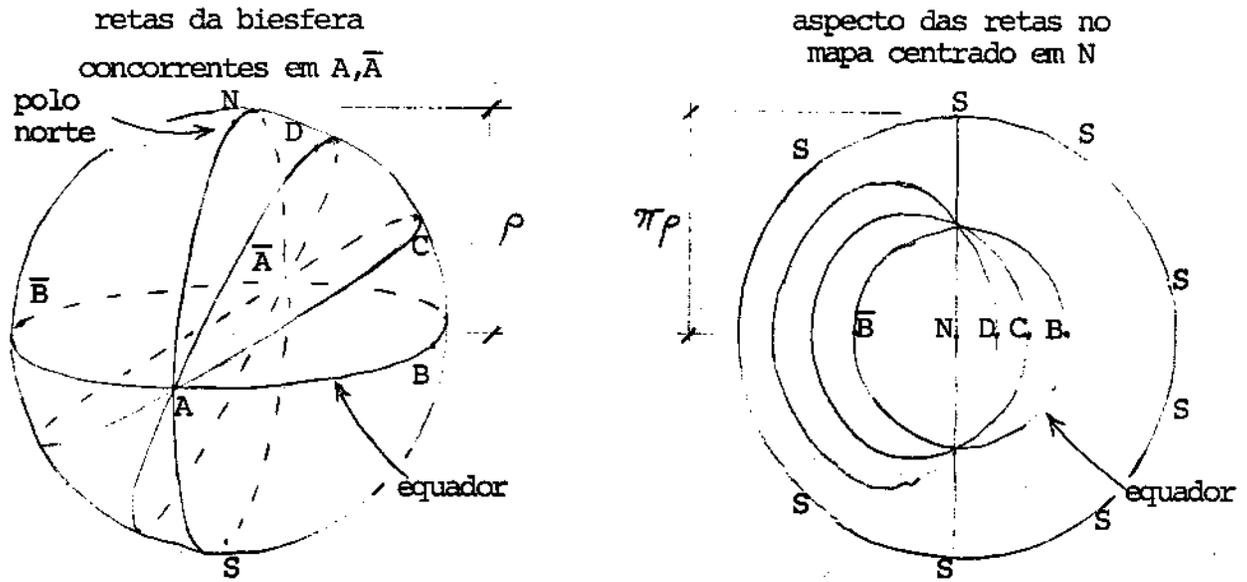


Tal mapeamento apresenta distorção mínima na região central (região ártica) e crescente nas direções das bordas. O continente antártico se apresenta desproporcionalmente grande, e o polo sul (que é apenas um ponto, o antípoda do polo norte) é representado pela borda toda do mapa, ou seja, por uma circunferência.

Se entretanto centrássemos em Portugal o nosso mapa, então teríamos a Península Ibérica representada com distorção mínima, e as regiões polares ambas deformadas em grau tolerável; mas teríamos a Nova Zelândia estendida por toda a borda do mapa, de modo anormalmente grande.

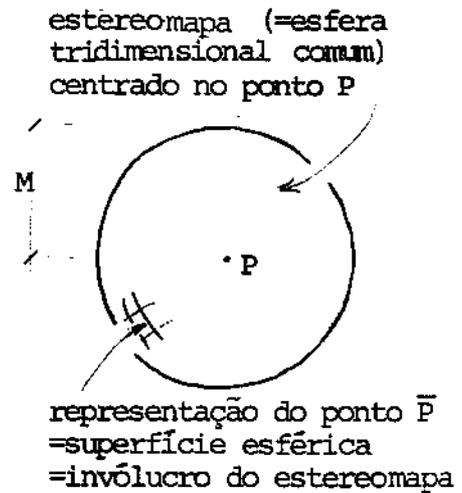
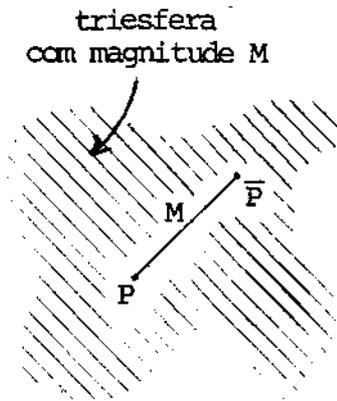
É importante conhecer o aspecto apresentado pelas retas (circunferências máximas) da geometria biesférica no nosso

mapa centrado no polo norte; elas comparecem usualmente como curvas ovais (não elipses), tendo como formas limites ora uma circunferência (o equador), ora diâmetros (os meridianos), estes adicionados do contorno todo do mapa (o polo sul).



Encontramos dificuldades semelhantes quando tentamos mapear uma triesfera (entidade tridimensional fechada) em um espaço tridimensional aberto. Escolhemos um ponto P da triesfera para centro do estereomapa, que será uma esfera tridimensional comum cujo raio representará a magnitude M da triesfera; a região volumétrica vizinha a P será representada com mínima distorção mas a região volumétrica vizinha ao antípoda \bar{P} estará altamente deformada e estendida por toda a "casca" dos estereomapa; o ponto \bar{P} será representado por toda a superfície esférica externa, o invólucro do estereomapa.

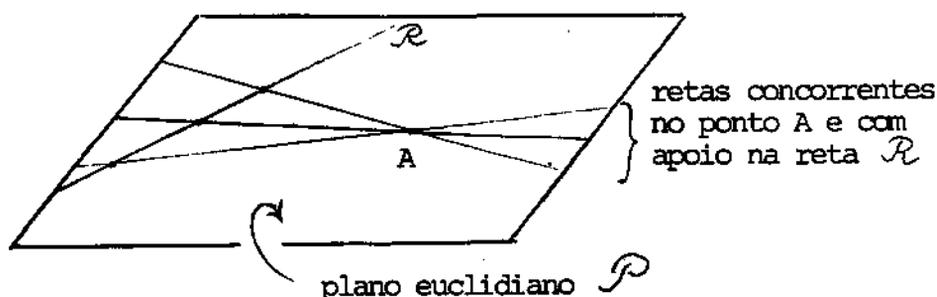
-37-



Feita esta apresentação do estereomapa, vamos a partir de agora adotar a seguinte norma de economia nas legendas das figuras: indicaremos simplesmente como "triesfera" o que corretamente deveria ser indicado como "estereomapa da triesfera, centrado no ponto tal".

PLANOS DA TRIESFERA

No infinito triespaço euclidiano, consideremos uma reta \mathcal{R} e um ponto A não pertencente a \mathcal{R} . Essa reta e esse ponto determinam um particular plano \mathcal{P} , aquele que contém ambos. Notamos que o plano \mathcal{P} conterá também qualquer reta que passe pelo ponto A e se apoie na reta \mathcal{R} ; assim, uma caracterização simples do plano \mathcal{P} é "o conjunto das retas que passem por A e se apoiem em \mathcal{R} ".

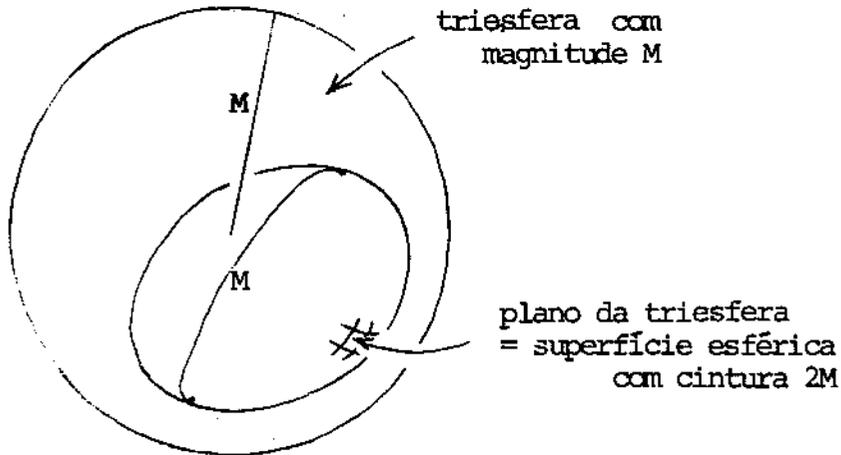


Esse plano euclidiano \mathcal{P} é infinito em todas as direções (frente, trás, direita, esquerda), e sobre ele é válida a geometria euclidiana plana.

Também na triesfera de magnitude M podemos especificar um plano \mathcal{P} por meio de uma de suas retas, \mathcal{R} , e um de seus pontos, A , exterior a \mathcal{R} : o plano \mathcal{P} será igualmente o conjunto das retas que passem por A e se apoiem em \mathcal{R} .

Entretanto, na triesfera tanto a reta \mathcal{R} como as demais retas que nela se apoiam são circunferências, todas de mesmo comprimento $2M$; assim sendo, o plano \mathcal{P} é na verdade uma superfície esférica cuja "cintura" mede $2M$.

-39-

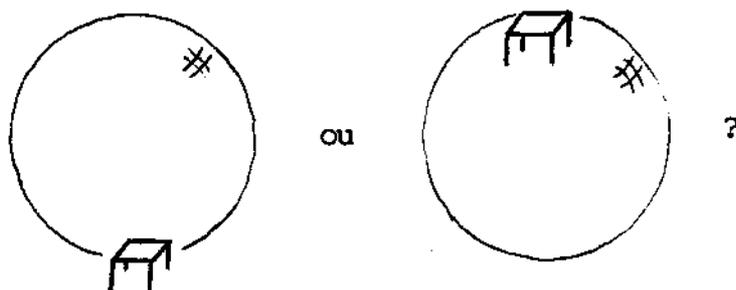


Sobre um plano da triesfera de magnitude M não vale portanto a geometria euclidiana plana, e sim a geometria da superfície esférica de raio $\rho = M/\pi$, com a correspondente "trigonometria esférica" (APÊNDICES 2,3,4).

Novamente é possível que algum leitor receba com desconforto a revelação de que um plano da triesfera é topologicamente uma superfície esférica; podem crer, máximos esforços serão envidados no redigir das próximas seções visando progressivamente eliminar esse desconforto.

FECHAMENTO DO PLANO

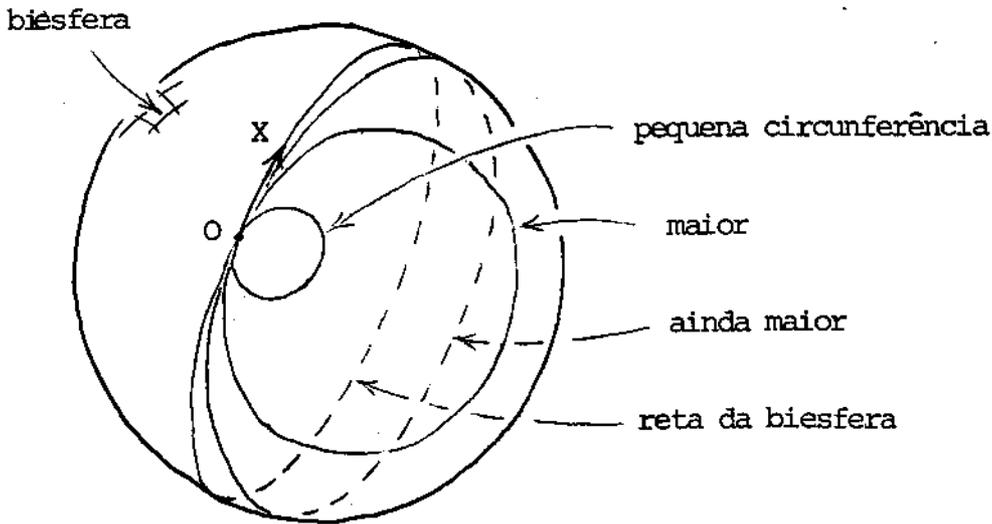
Ainda no contexto de curvatura do plano triesférico, uma interessante questão pode ser colocada: suponhamos que o tampo (horizontal) de uma mesa no espaço triesférico é estendido para todos os lados até completar um plano triesférico. Como esse plano é uma superfície esférica, é razoável perguntar-se se essa superfície "se fechou" por cima ou por baixo da mesa. Em outras palavras: ficam as pernas da mesa fora ou den-



tro do espaço esférico enclausurado pela superfície esférica?

Para encaminhar a resposta a essa pergunta, vamos considerar uma questão semelhante na geometria da superfície esférica de magnitude M . Tomemos um ponto O sobre a superfície, e uma direção \vec{OX} , também sobre a superfície. Construamos a seguir uma pequena circunferência passando por O e tangenciando \vec{OX} pela direita, e façamos a circunferência crescer mantendo-a tangente a \vec{OX} no ponto O . Quando a circunferência atingir o raio $M/2$ ela será uma reta da esfera; pela maneira como essa reta foi construída, seria natural afirmarmos que ela "se fechou pela direita" (ver Figura).

-41-



Entretanto, essa mesma reta poderia resultar de uma pequena circunferência construída à esquerda de \vec{OX} e com raio crescendo até o valor $M/2$. Portanto, seria igualmente válido dizer-se que a reta "se fechou pela esquerda".

Retornemos agora à mesa na triesfera de magnitude M . Coloquemos sobre a mesa um balão esférico inflável e façamo-lo crescer mantendo a forma esférica. Cada vez mais a forma esférica do balão se aproximará da forma do tampo "plano" da mesa. Quando o balão adquirir uma cintura de valor $2M$ ele será um plano da triesfera, e portanto as duas formas se confundirão. Somos assim tentados a afirmar que as pernas da mesa ficaram fora do espaço encerrado pelo plano (= superfície esférica).

Entretanto, esse plano pode ser considerado como o limite a que tendem superfícies esféricas tangenciando o tampo da mesa pelo lado de baixo, quando suas cinturas crescem até o máximo valor $2M$.

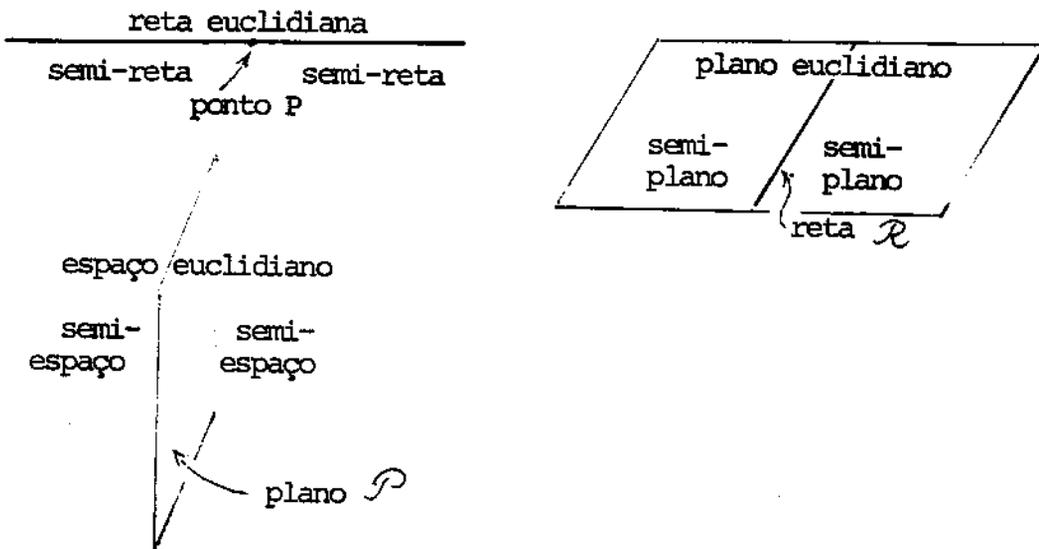
Portanto, quando na triesfera de magnitude M estiramos o tampo da mesa para todos os lados, obtemos finalmente uma

superfície esférica de circunferência 2M, cujo "fechamento" tanto podemos dizer que ocorreu por cima como que por baixo da mesa.

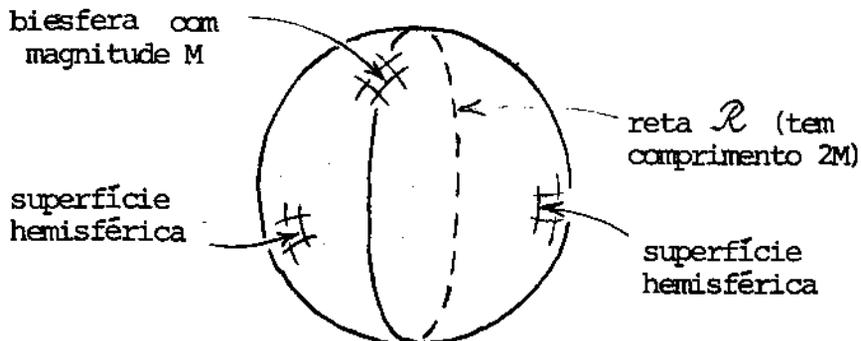
Quanto à questão "mas afinal, as pernas da mesa ficaram fora ou dentro ?", passe o leitor à seção seguinte.

PARTIÇÃO DA TRIESFERA EM DUAS ESFERAS SÓLIDAS

O leitor sabe que uma reta euclidiana é dividida por qualquer de seus pontos (P) em duas semiretas, bem como que um plano euclidiano é dividido por qualquer de suas retas (\mathcal{R}) em dois semiplanos; sabe também que o trieespaço euclidiano é dividido por qualquer plano euclidiano em duas regiões tridimensionais.



Passemos agora a espaços curvos: uma biesfera (superfície esférica) de magnitude M fica dividida por qualquer de suas retas (circunferências máximas, de comprimento 2M) em duas superfícies idênticas, que são círculos curvos.



Finalmente, uma triesfera de magnitude M é dividida por qualquer de seus planos (superfícies esféricas de circunferência $2M$) em duas regiões idênticas, que são esferas tridimensionais curvas.

Podemos agora concluir a questão das pernas da mesa: elas ficam fora da região esférica enclausurada por cima pelo tampo do plano da mesa, mas ficam dentro da região complementar, também esférica, enclausurada por baixo pelo mesmo plano. Fácil, não é?

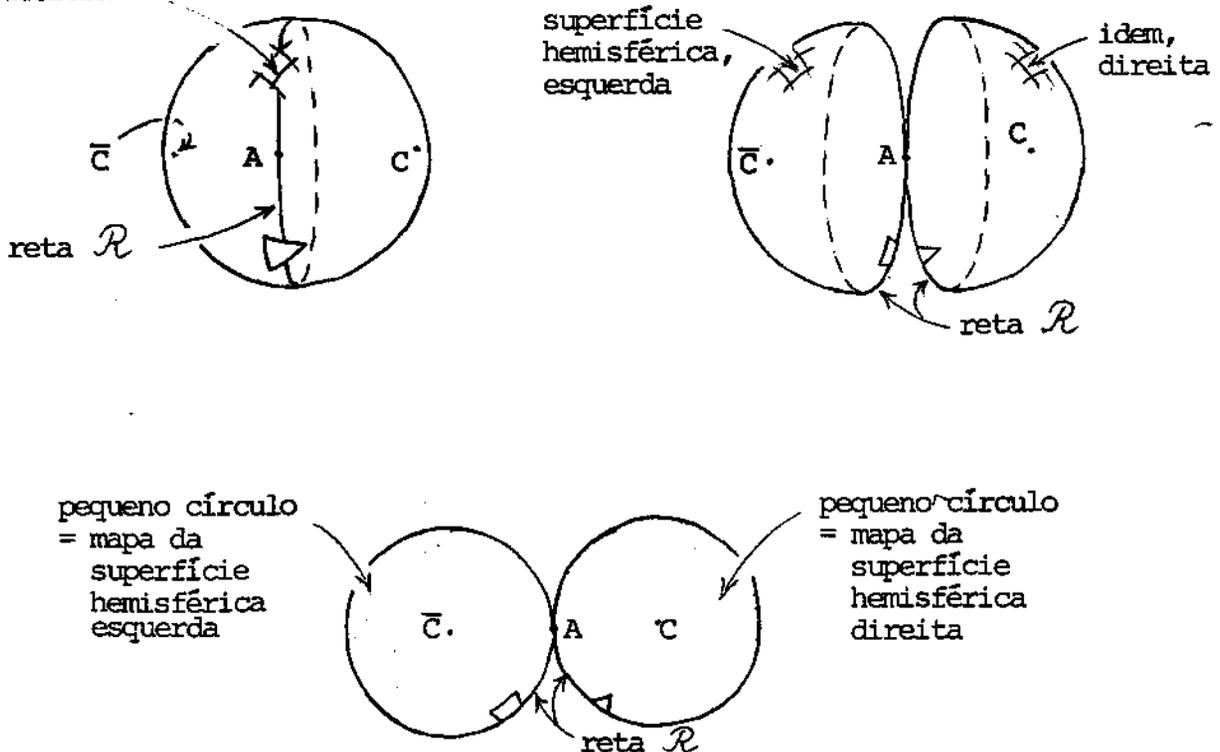
OUTRO MAPA DA TRIESFERA

Em seção anterior descrevemos um mapa plano da superfície esférica cuja virtude maior era a de consistir em uma peça única, um círculo; essa virtude era entretanto parcialmente neutralizada pelas enormes deformações presentes na borda do mapa.

Vamos agora descrever um modo alternativo de mapear a biesfera (e depois a triesfera); as deformações serão consideravelmente menores, porém o mapa completo constará de mais de uma peça.

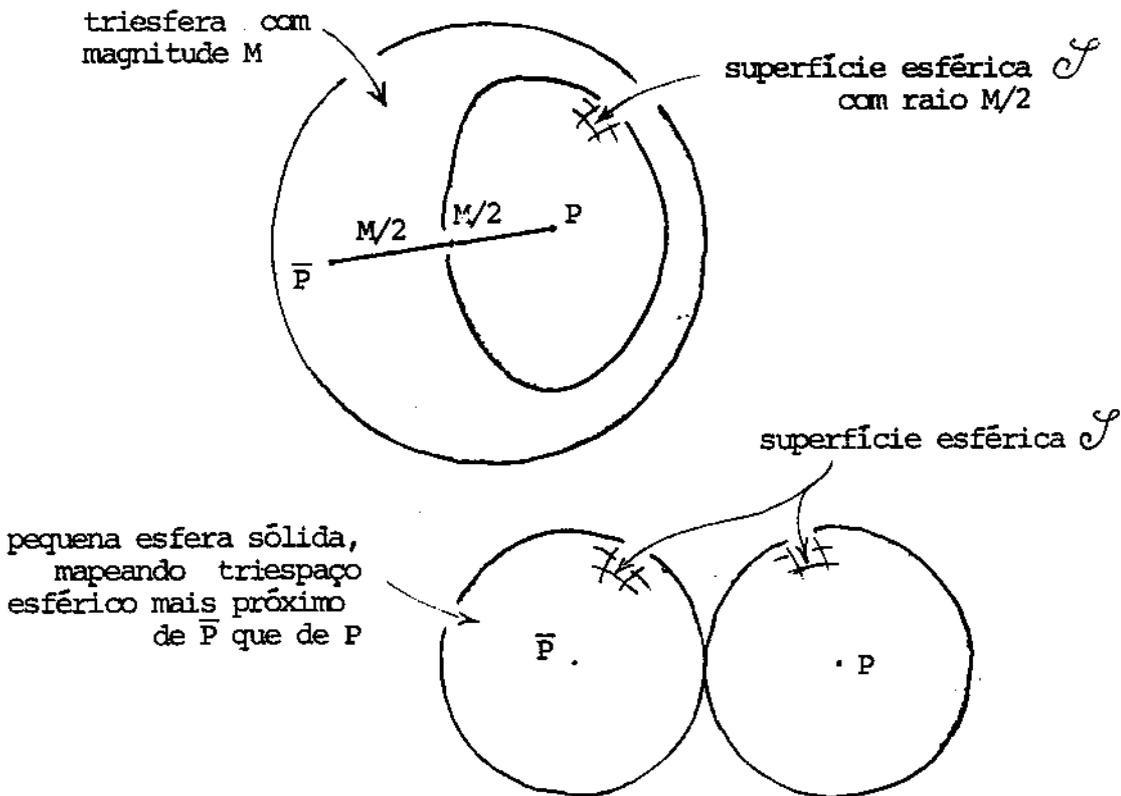
Fazemos separadamente os mapas de duas superfícies hemisféricas complementares, separadas por uma reta \mathcal{R} ; esta reta pertencerá a ambas as seções do mapa completo. Notamos que as maio

biesfera



res distorções desse mapeamento ocorrerão nas vizinhanças da reta \mathcal{R} , mas que essas distorções são bem menores que as das bordas do mapeamento descrito anteriormente.

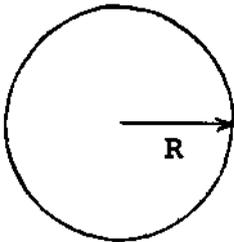
Do mesmo modo que na biesfera, dispomos de uma maneira alternativa também simples e prática de mapear uma triesfera de magnitude M . Nosso mapa completo constará de duas peças, cada peça consistindo em uma pequena esfera tridimensional, como uma bola de bilhar. Uma dessas pequenas esferas sólidas representará o espaço da triesfera vizinho a um ponto P , e a outra pequena esfera sólida representará o espaço triesférico vi-



zinho ao ponto antípoda \bar{P} . Ambos esses espaços triesféricos mapeados são esferas sólidas, de raio $M/2$, no sentido de que o invólucro de ambos é uma superfície esférica de raio $M/2$.

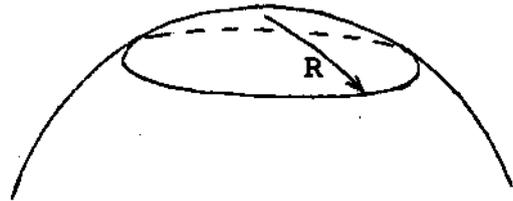
Entretanto, essas esferas grandes da triesfera são esferas "curvas", com geometria diferente das esferas eu-

clidianas, do mesmo modo que um círculo pertencente a uma superfície esférica é metricamente diferente de um círculo euclidiano.



círculo euclidiano,
com raio R
(no plano euclidiano)

$$\text{área} = \pi R^2$$

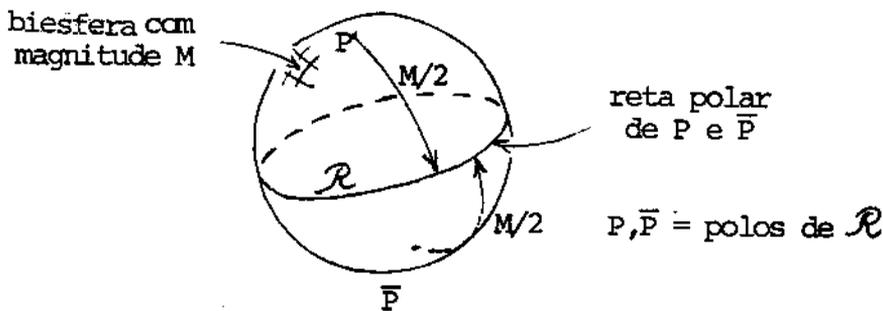


círculo curvo,
com raio R
(em biesfera com magnitude M)

$$\text{área} = \frac{4M^2}{\pi} \sin^2 \frac{\pi R}{2M}$$

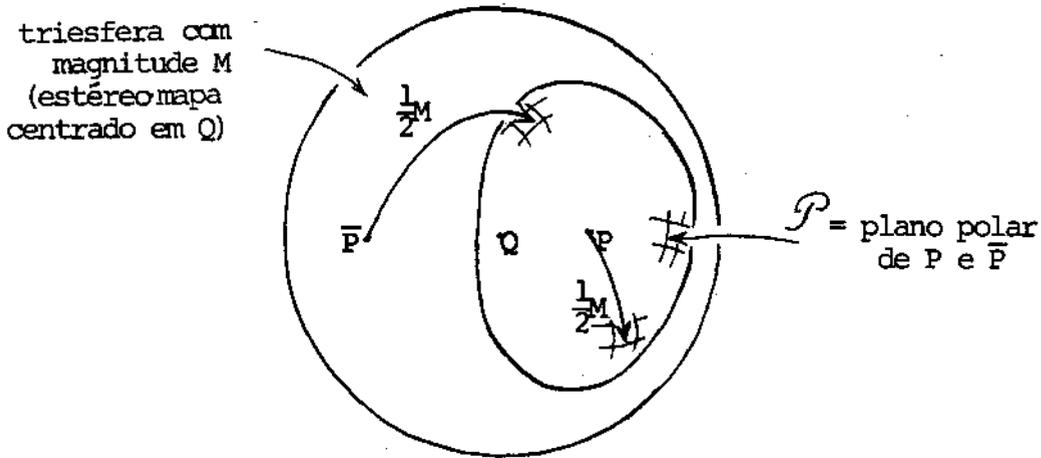
POLAR DE UM PONTO, POLOS DE UM PLANO

Na geometria euclidiana plana um dado ponto não privilegia reta alguma do plano. Já na geometria da biesfera (superfície esférica) de magnitude M , a cada ponto P podemos associar uma reta \mathcal{R} com a seguinte característica ímpar: todos os seus pontos distam $M/2$ do ponto P .



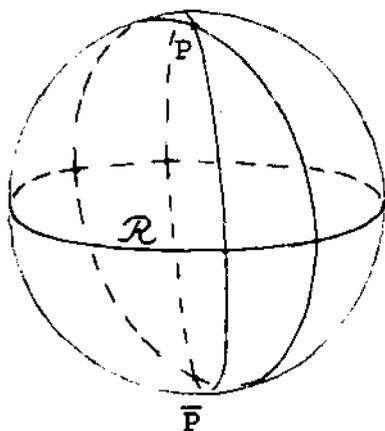
É fácil perceber que também o ponto \bar{P} (antípoda de P) dista $M/2$ de todos os pontos de \mathcal{R} ; dizemos que \mathcal{R} é a (reta) polar dos pontos P e \bar{P} , e que estes pontos antípodas são os polos da reta \mathcal{R} . É também fácil perceber que a reta maximamente afastada de um dado ponto na biesfera é a correspondente reta polar, e que vice-versa os pontos maximamente afastados de uma reta na biesfera são os correspondentes polos.

Também na triesfera de magnitude M encontramos os conceitos de polos-polar; só que agora o polar é um plano (superfície esférica máxima) e não uma reta (circunferência máxima). Dado um ponto arbitrário P ; notamos que o conjunto \mathcal{P} dos pontos que dele distam $M/2$ constitui um plano, denominado plano polar de P ou simplesmente polar de P ; dizemos ainda que P e seu antípoda \bar{P} são os polos do plano \mathcal{P} .

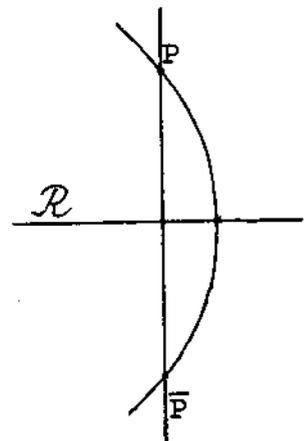


Claro está que o plano \mathcal{P} é uma superfície esférica com raio $M/2$, centrada tanto no polo P como no antípoda \bar{P} . Além disso, e semelhantemente ao que ocorre na biesfera, um conjunto polos-polar na triesfera apresenta as características de máximo afastamento mútuo entre pontos e planos da triesfera.

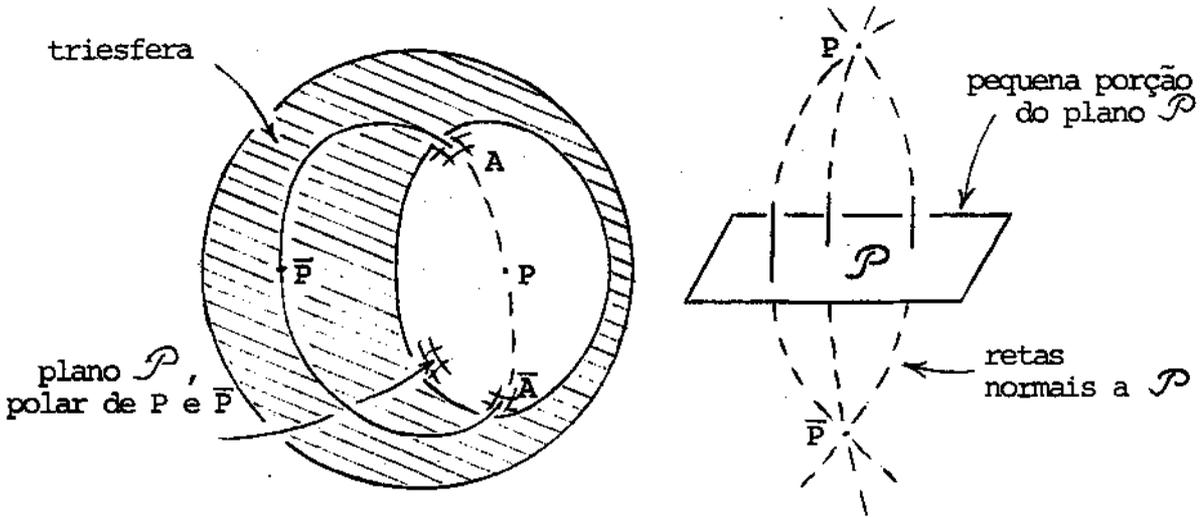
Vamos retornar por um instante à geometria da biesfera. Notamos que todas as retas que passam por um ponto P incidem perpendicularmente sobre a reta \mathcal{R} polar de P . Vice-versa, todas as retas normais a uma dada reta \mathcal{R} se cruzam sobre os seus polos P e \bar{P} .



P, \bar{P} = polos de \mathcal{R}



O mesmo ocorre na triesfera: todas as retas que passam por um ponto P incidem perpendicularmente sobre o correspondente plano polar \mathcal{P} , e vice-versa. A visualização desses resultados é trivial: todas as retas que partem do ponto P são

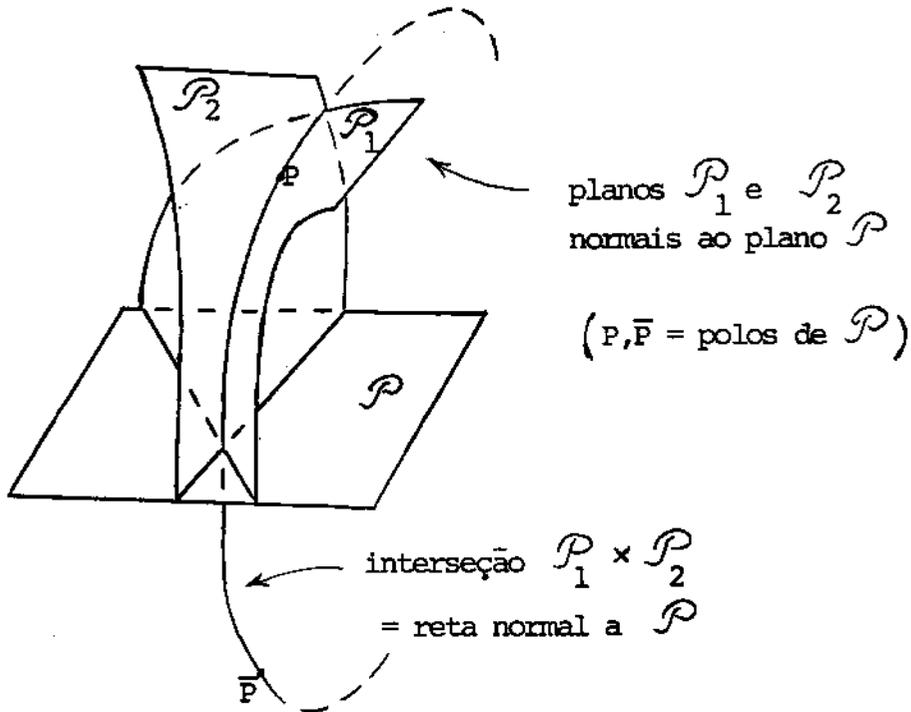


perpendiculares a qualquer superfície esférica centrada em P , em particular ao plano polar \mathcal{P} .

Podemos então descrever em 4 etapas qualquer "tour-nêe" retilínea em uma triesfera, todas de mesmo comprimento: a 1ª etapa vai do ponto P de partida até um ponto A no plano polar \mathcal{P} (a localização precisa de A depende da direção e sentido iniciais); a 2ª etapa vai do plano \mathcal{P} ao ponto antípoda \bar{P} ; a 3ª etapa, que já é de retorno, vai do antípoda \bar{P} ao ponto \bar{A} (novamente no plano \mathcal{P}), e a 4ª vai do plano ao ponto P de partida.

Ainda na triesfera, notamos que todos os planos que passam por um ponto P são perpendiculares ao plano \mathcal{P} polar do ponto P ; do mesmo modo, todos os planos normais a um dado plano \mathcal{P}

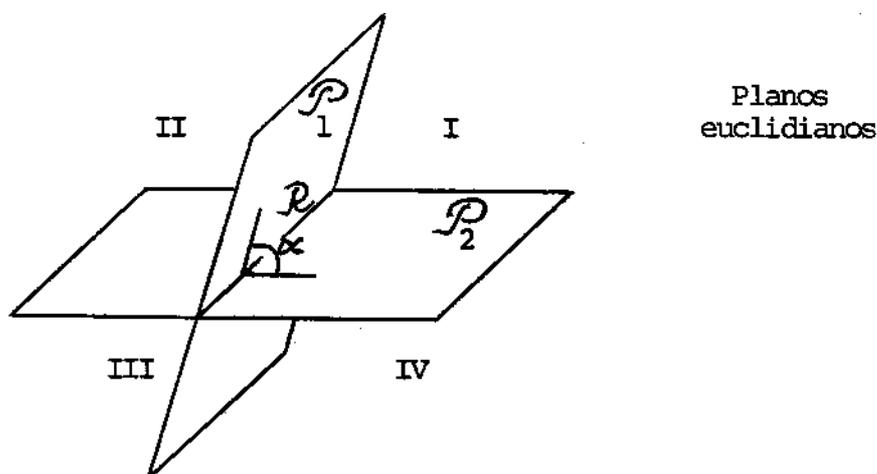
se encontram nos polos P e \bar{P} do plano \mathcal{P} .



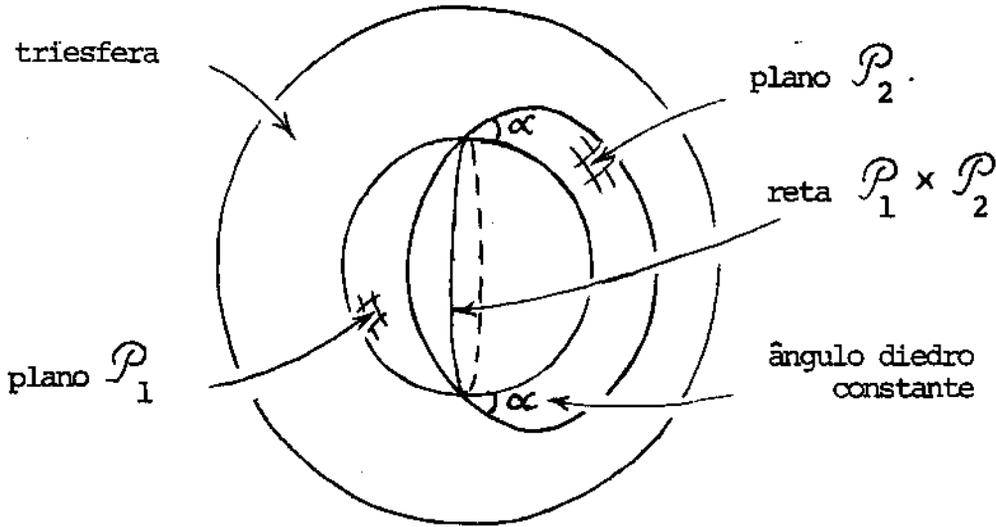
SEMELHANÇAS E DISSEMELHANÇAS

Possivelmente o leitor estará se sentindo inseguro sobre a "acomodação" ou "ajuste relativo" das retas e dos planos em uma triesfera. Talvez uma série de comparações com as retas e planos euclidianos venha a melhorar a situação.

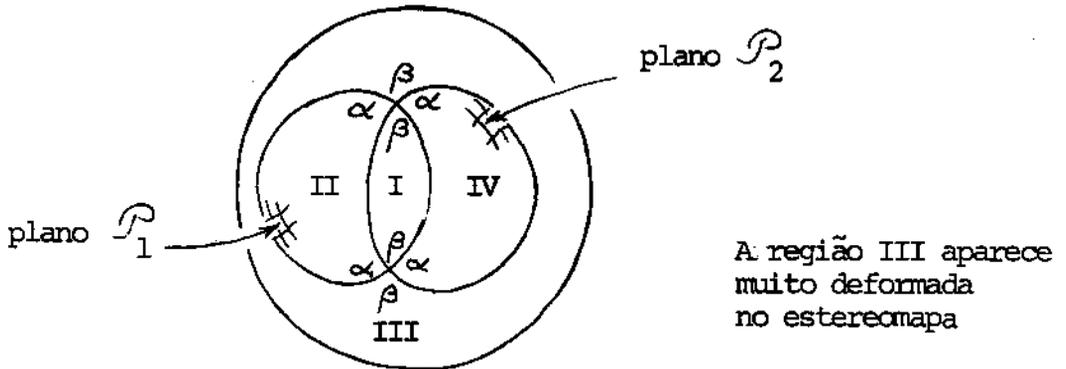
No triespaco euclidiano, dois planos diferentes são ou paralelos ou concorrentes. Neste último caso eles determinam uma reta, ao longo da qual o ângulo (diedro) α entre os planos é constante; o espaço euclidiano fica repartido em dois pares de seções cuneiformes infinitas idênticas (I=III, II=IV).



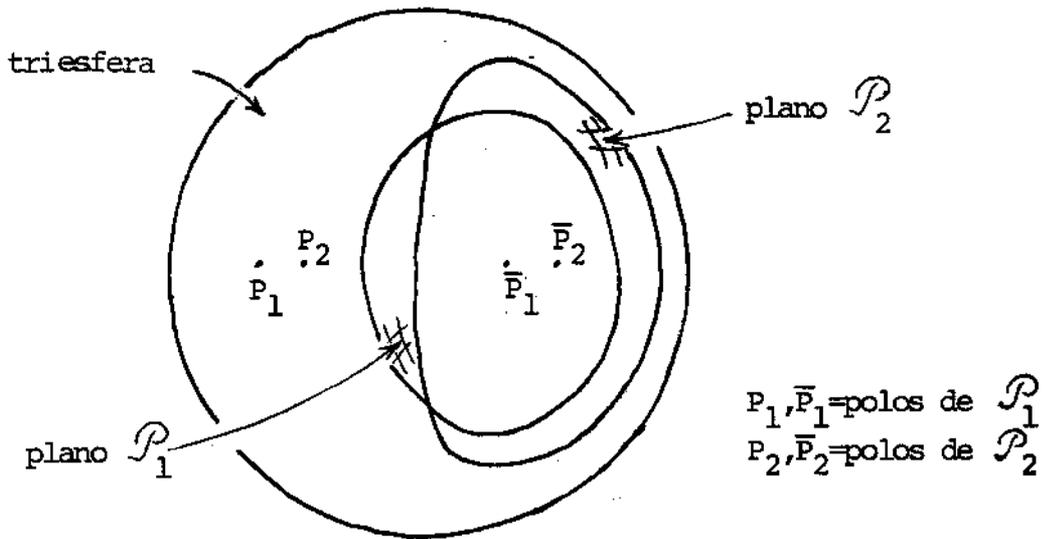
Na triesfera não há paralelismo de planos, eles sempre concorrem ao longo de uma reta; formam também ângulo diedro constante, pois são em essência superfícies esféricas que se interceptam (ver Figura).



A concorrência dos planos partilha a triesfera em dois pares de seções lenticulares idênticas (I=III, II=IV).

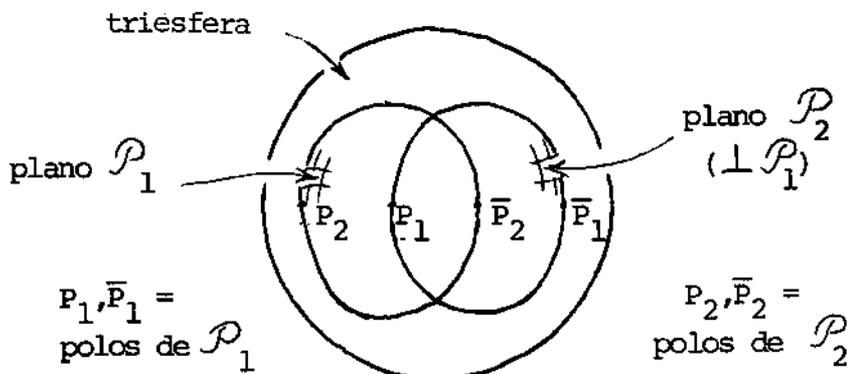


Diferentemente do que ocorre no triespaco euclidiano, quaisquer dois planos da triesfera sempre admitem uma reta ortogonal a ambos. Essa reta é única, e é determinada pela junção dos polos dos planos. Mais adiante veremos que as retas $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$

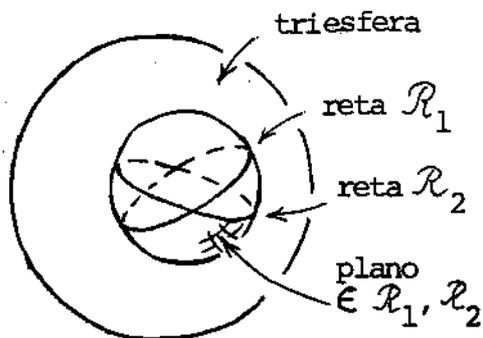


(interseção de dois planos) e $P_1 P_2$ (junção de polos correspondentes) formam um par muito especial, cada reta sendo chamada reta polar da outra.

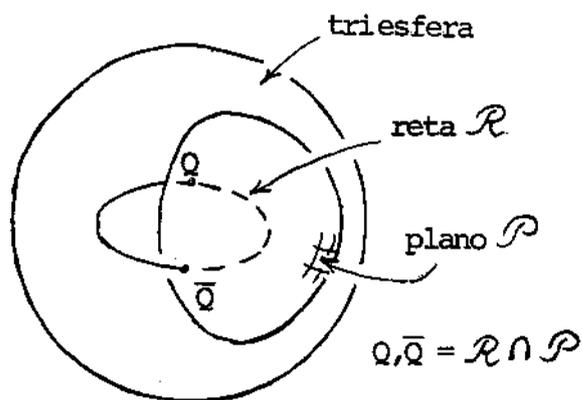
No caso dos planos serem ortogonais, eles dividem o UNIVERSO em quatro setores idênticos, cuneiformes infinitos no infinito triespaço euclidiano e lenticulares na triesfera. Planos ortogonais na triesfera apresentam ainda uma propriedade digna de menção: cada plano contém os polos do outro.



No triespaco euclidiano, duas retas concorrentes determinam um plano; o mesmo se dá na tri-esfera.



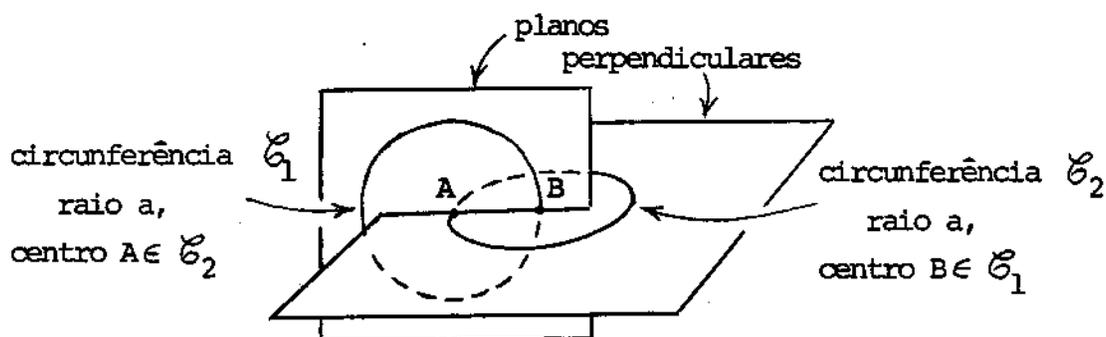
No triespaco euclidiano, uma reta não pertencente a um plano é ou paralela a ele ou tem com ele um ponto único em comum; na tri-esfera não há paralelismo entre reta e plano, e toda reta ou pertence a um plano ou tem com ele dois pontos (antípodas) em comum.



RETAS POLARES

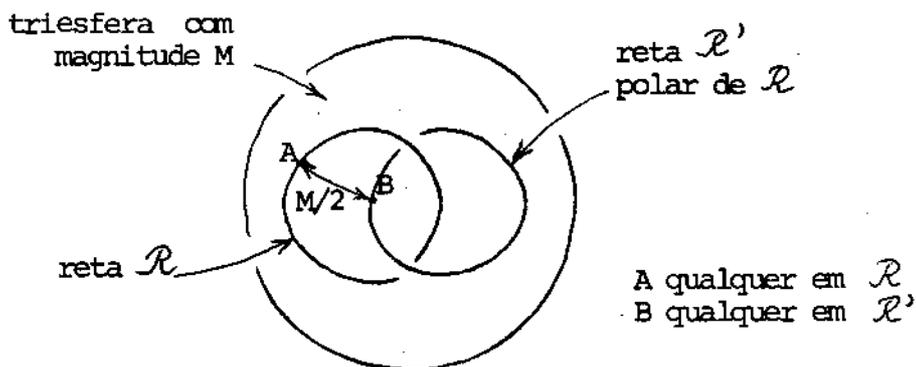
Do mesmo modo que um plano da tri-esfera privilegia um par de pontos antípodos (e vice-versa), também cada reta \mathcal{R} da tri-esfera privilegia uma reta companheira \mathcal{R}' , chamada reta polar de \mathcal{R} ou simplesmente polar de \mathcal{R} ; reciprocamente, \mathcal{R} será a polar de \mathcal{R}' .

Há um modo simples de construirmos um par de retas polares na tri-esfera de magnitude M : inicialmente tomamos duas circunferências de mesmo raio, enlaçadas e situadas em planos ortogonais, centradas cada uma em algum ponto da outra; em seguida fazemos



crescer os raios das circunferências, mantendo tanto a centralização mútua como a ortogonalidade dos planos. Quando os raios atingirem o valor $M/2$ as circunferências constituirão o pretendido par de retas polares $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$.

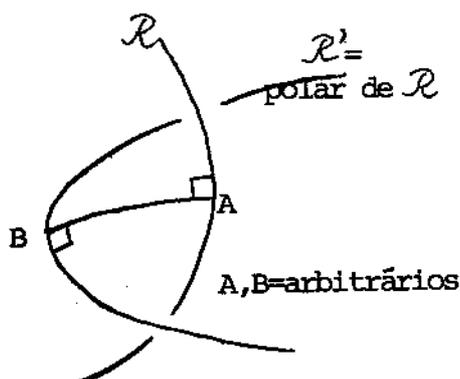
A característica mais admirável de um par de retas polares é que a distância de qualquer ponto de uma delas para qualquer ponto da outra é invariante, $M/2$.



Anteriormente notamos que nenhum ponto da triessfera de magnitude M pode distar mais do que $M/2$ de qualquer reta; percebemos então que cada reta em uma triessfera é o lugar geométrico dos pontos maximamente afastados da correspondente reta polar.

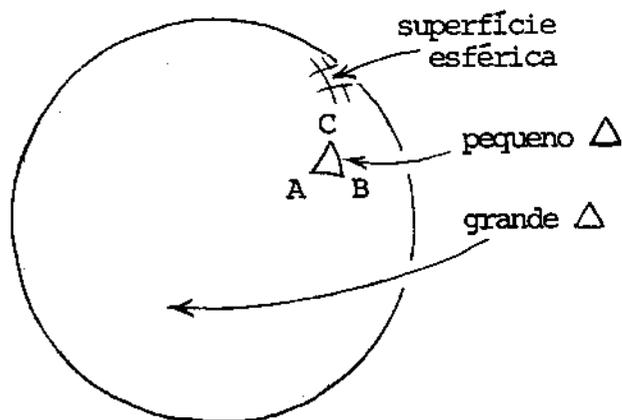
Isso sugere um meio simples para obter a reta polar de uma reta \mathcal{R} . Primeiramente escolhemos arbitrariamente um ponto P_1 da reta \mathcal{R} e desenhamos o correspondente plano polar \mathcal{P}_1 (constituído, relembremos, pelos pontos que distam $M/2$ do ponto P_1); em seguida escolhemos arbitrariamente outro ponto P_2 da mesma reta \mathcal{R} e desenhamos o correspondente plano polar \mathcal{P}_2 . A interseção dos planos \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 determinará a reta \mathcal{R}' polar da \mathcal{R} .

Vale ainda mencionar que o segmento de reta que une qualquer ponto da reta \mathcal{R} a qualquer ponto da polar \mathcal{R}' é ortogonal tanto a \mathcal{R} como a \mathcal{R}' .



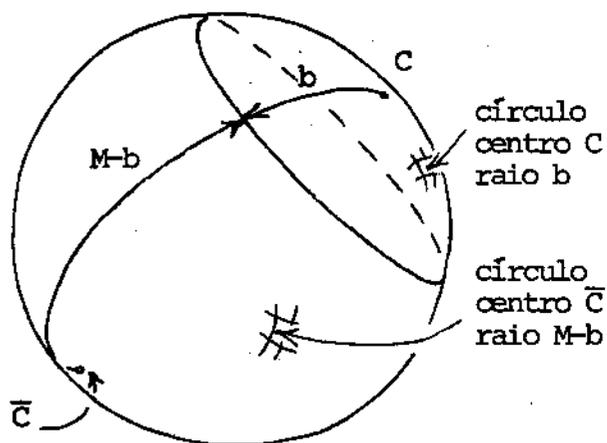
REGIÕES COMPLEMENTARES

Consideremos uma superfície esférica, e imaginemos um pequeno triângulo ABC nela desenhado. Imaginemos agora o que resta da superfície quando descontamos o pequeno triângulo: trata-se de uma superfície limitada também unicamente pelos três segmentos de retas AB, BC e CA. Em outras palavras, é também um triângulo, um triângulo de aspecto estranho pois tem uma grande área e pequeno perímetro.



Igualmente a superfície complementar a qualquer pequeno polígono será um grande polígono com o mesmo pequeno contorno.

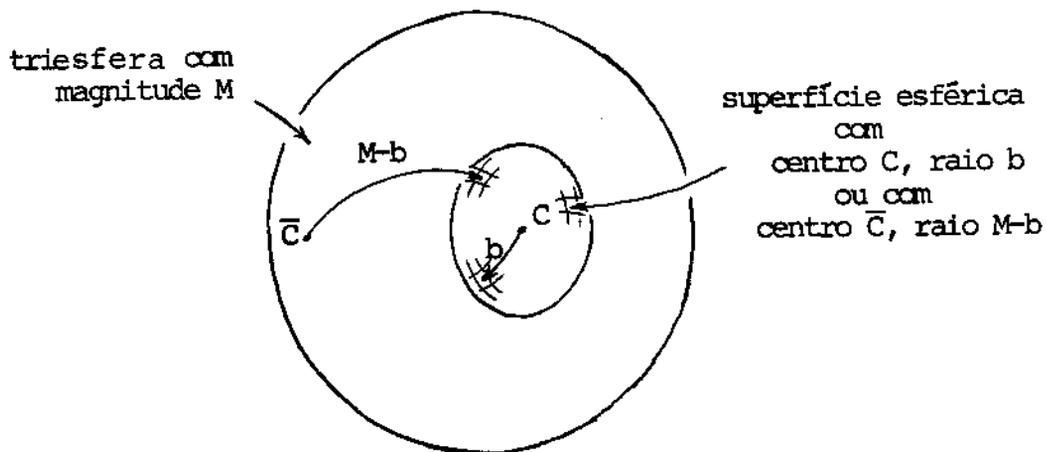
Ainda na superfície esférica de magnitude M (cintura $2M$) consideremos agora um círculo de centro C e raio b (é claro que o centro C está sobre a superfície, e que o raio b é medido ao longo da superfície); notamos que a circunferência que limita o



círculo também limita o círculo complementar, de centro \bar{C} (antípoda de C) e raio $M-b$ (medido acompanhando a superfície).

-59-

Passemos agora a uma triesfera de magnitude M , onde iremos encontrar resultados semelhantes. Por exemplo, a superfície esférica que limita uma esfera sólida de centro C e raio b limita também a esfera sólida de centro \bar{C} e raio $M-b$. Na verdade este resultado é apenas uma generalização (para $b \neq M/2$) da



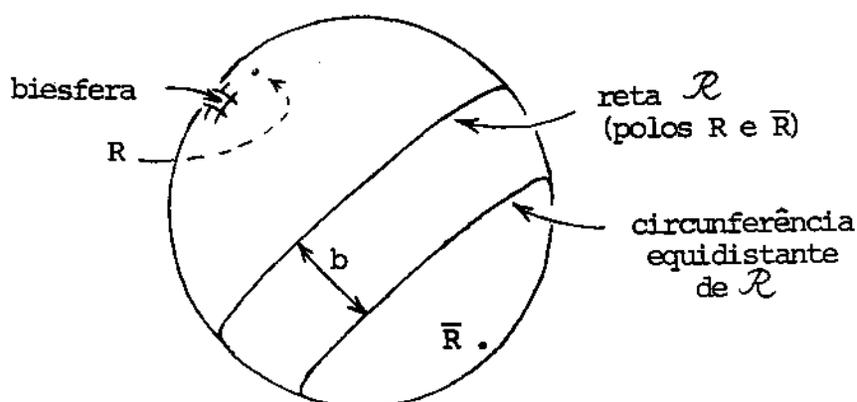
partição de uma triesfera em duas esferas sólidas iguais, partição essa efetuada por um plano.

Ainda na triesfera, o espaço complementar a um pequeno cubo é um grande cubo limitado pelas mesmas seis pequenas faces, o espaço complementar a um pequeno tetraedro é um grande tetraedro, etc. Este tópico será retomado quando estudarmos a partição da triesfera em poliedros regulares.

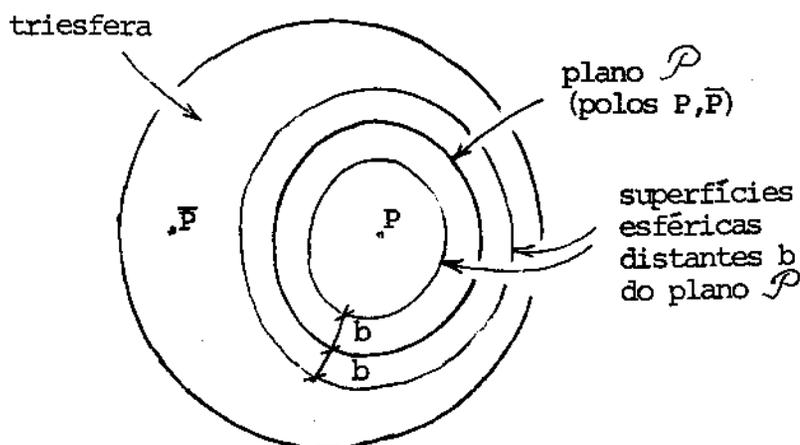
ENTIDADES EQUIDISTANTES

Em um plano euclidiano, as linhas que se mantêm equidistantes a uma dada reta no plano são também retas do plano.

Em uma biesfera (superfície esférica), as linhas que se mantêm equidistantes a uma dada reta \mathcal{R} da biesfera (\mathcal{R} é uma circunferência máxima) são circunferências menores centradas nos polos R e \bar{R} da reta \mathcal{R} .



Finalmente, em uma triesfera as superfícies que se mantêm equidistantes de um plano \mathcal{P} (superfície esférica máxima) são superfícies esféricas de menor área, centradas nos polos do plano \mathcal{P} .

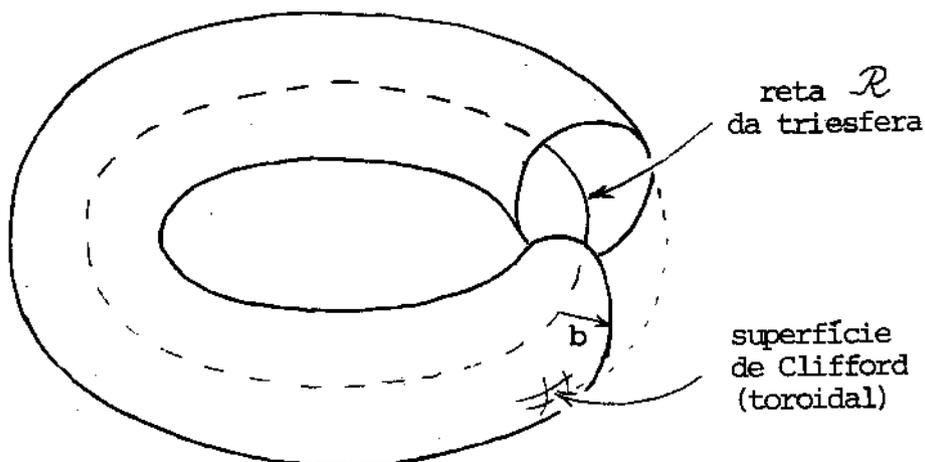


SUPERFÍCIES DE CLIFFORD

Ainda no contexto de entidades equidistantes, consideremos o trieespaço euclidiano e selecionemos uma particular reta \mathcal{R} ; o lugar geométrico dos pontos que distam b dessa reta é uma superfície cilíndrica infinitamente longa, de eixo \mathcal{R} e raio b .



Na triesfera de magnitude M a reta \mathcal{R} é uma circunferência de comprimento $2M$, e portanto aquele lugar geométrico assume um aspecto de câmara pneumática (superfície toroidal).



Tal superfície na triesfera foi estudada por Clifford (1873), e apresenta propriedades notáveis.

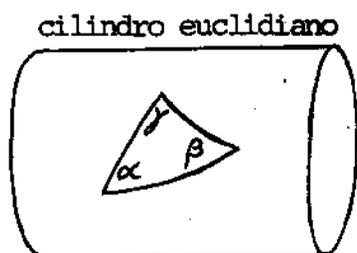
Uma delas: consideremos uma reta \mathcal{R} , eixo de uma su-

superfície de Clifford com pequeno raio $b \ll M$; tal superfície é delgada como uma câmara de bicicleta (quando b tende a zero a superfície se confunde com a própria reta \mathcal{R}). Imaginemos agora que podemos inflar homogeneamente essa câmara, mantendo inalterado o eixo \mathcal{R} ; então em todas as fases do processo teremos sempre uma superfície de Clifford, com um valor de b cada vez maior. Entretanto, a curvatura da triésfera nos reserva uma surpresa quando o raio b da superfície se aproximar do valor $M/2$; como já sabemos, o lugar geométrico dos pontos que distam $M/2$ de uma reta é a correspondente reta polar \mathcal{R}' , e portanto a câmara maximamente inflada ficará reduzida a uma reta. Para valores de b ligeiramente menores que o valor máximo $M/2$ a superfície de Clifford parecerá portanto novamente uma delgada câmara de bicicleta, porém envolvendo agora a reta \mathcal{R}' , polar da reta original \mathcal{R} .

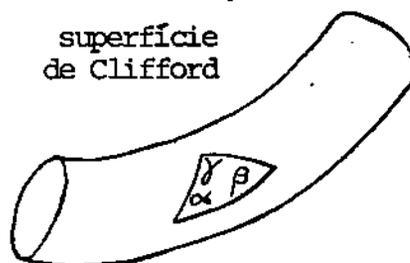
Disso tudo inferimos a seguinte notável propriedade de uma superfície de Clifford de eixo \mathcal{R} e raio b : automaticamente ela tem também eixo \mathcal{R}' (polar de \mathcal{R}) e raio $(M/2) - b$. Isto significa que as superfícies de Clifford são de dupla revolução, diferentemente das superfícies cilíndricas euclidianas, que são de revolução simples em torno do eixo, e de translação paralela ao eixo.

Entretanto, superfícies cilíndricas euclidianas e superfícies de Clifford compartilham uma propriedade de suma importância, a de serem ambas superfícies regradadas; em consequência, sobre ambas é válida a geometria euclidiana plana.

-63-

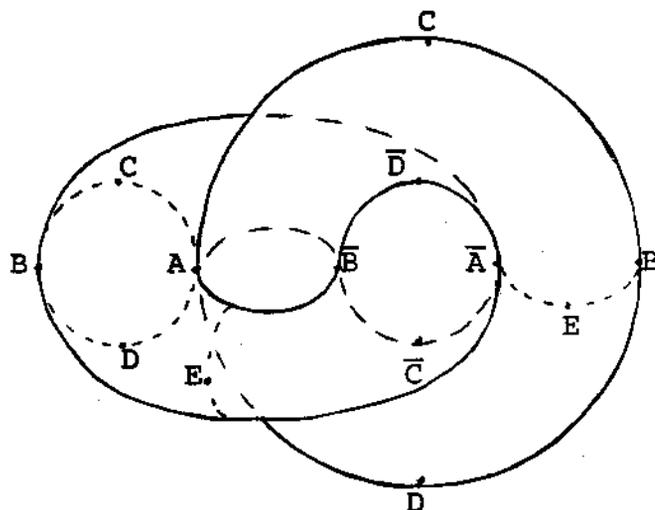


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

A superfície de Clifford com raio $b = M/4$ é particularmente interessante, pois o outro raio $b' = (M/2) - b$ valerá também $M/4$; essa superfície separa a triesfera de magnitude M em duas regiões toroidais sólidas idênticas, entrelaçadas como dois elos circulares de uma grossa corrente. A simetria de tal separação sugere um mapa alternativo para triesfera, que poderíamos chamar de isotoroidal.



Mapeamento
isotoroidal
da triesfera

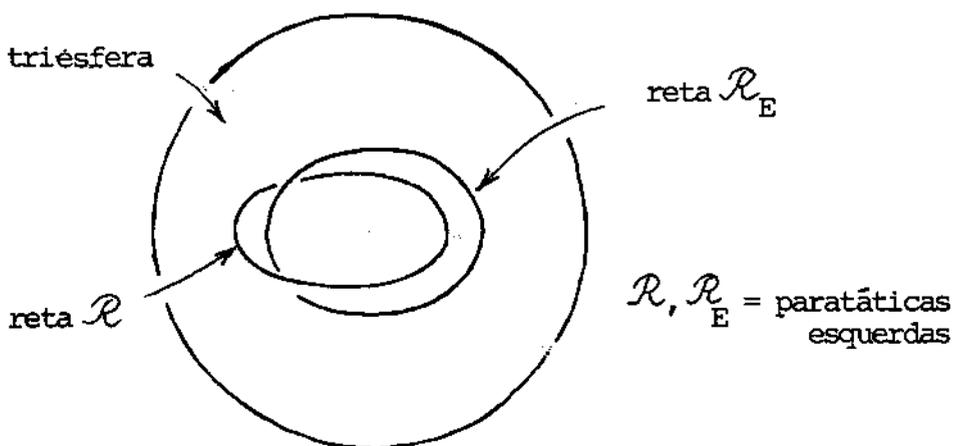
(a superfície
simétrica
de Clifford
comparece
duas vezes)

RETAS PARATÁTICAS

Vimos que na geometria da superfície esférica não há retas paralelas, pois cada circunferência máxima se cruza com cada outra circunferência máxima em dois pontos antípodas.

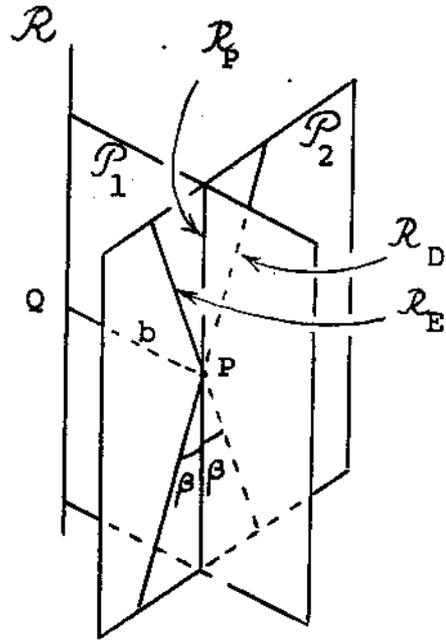
Na triesfera, porém, a curvatura do espaço permite a existência de pares de retas que mantenham entre si uma separação constante. Entretanto, tais retas equidistantes não podem ser coplanares (se o fossem teriam que concorrer em dois pontos antípodas), por isso evita-se chamá-las de paralelas; são denominadas paratáticas, ou ainda paralelas de Clifford.

O posicionamento relativo das retas paratáticas se assemelha ao de circunferências enlaçadas. Entretanto, é claro que o simples enlaçar de duas circunferências (de comprim-



mento $2M$ na triesfera de magnitude M) não as torna necessariamente equidistantes; há uma receita para obter paratáticas, que passamos a descrever.

Imaginemos uma reta \mathcal{R} , e um ponto P sito à distância b . Queremos traçar por P as retas paratáticas a \mathcal{R} ; (adiantemos que serão duas, essas paratáticas a \mathcal{R}). Começamos por desenhar o plano \mathcal{P}_1 , que contém a reta \mathcal{R} e o ponto P . Em seguida baixamos de P a perpendicular PQ à reta \mathcal{R} (o segmento PQ terá comprimento b), e traçamos pelo ponto P o plano \mathcal{P}_2 normal ao segmento PQ . Os planos \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 formam uma reta, \mathcal{R}_p . (Como as retas \mathcal{R} e \mathcal{R}_p pertencem ambas ao plano \mathcal{P}_1 , elas não podem permanecer equidistantes). Finalmente, no plano \mathcal{P}_2 traçamos duas retas passando pelo ponto P e formando com a reta \mathcal{R}_p ângulos $\beta = \pi b/M$; essas duas retas (\mathcal{R}_D e \mathcal{R}_E) são as paratáticas (direita e esquerda) à reta \mathcal{R} que passam por P .



Um caso particular de retas paratáticas já nos é familiar: o das retas polares, que são paratáticas separadas pela especial distância $b = M/2$. A reta polar de \mathcal{R} goza da propriedade única de ser paratática simultaneamente direita e esquerda a \mathcal{R} .

Uma propriedade importante das retas paratáticas nos lembra as retas euclidianas: duas paratáticas direitas a uma dada reta são também paratáticas direitas entre si, bem como paratáticas esquerdas a uma dada reta são paratáticas esquerdas entre si.

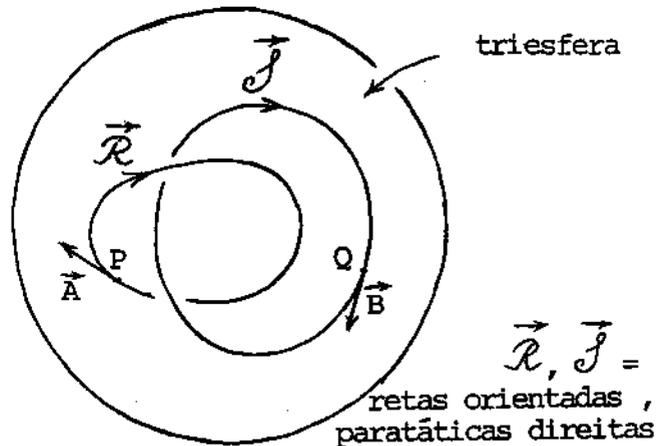
Isto significa que podemos preencher a triessfera inteira com uma infinidade de retas todas paratáticas direitas en-

tre si, bem como com paratáticas esquerdas. Nessa propriedade a triesfera lembra o triespaço euclidiano, que também pode ser preenchido por uma infinidade de retas paralelas entre si.

Lamentavelmente, qualquer tentativa de facilitar por meio de uma Figura a visualização das paratáticas preenchendo harmoniosamente a triesfera está fadada ao fracasso, pois o emaranhado de circunferências cada uma enlaçando todas as outras no espaço curvo mais servirá para confundir que esclarecer.

Vamos agora escolher um sentido de orientação ao longo da reta \mathcal{R} (que é uma circunferência, vale relembrar), e busquemos orientar com esse mesmo sentido todas as retas paratáticas direitas a \mathcal{R} . Iniciamos pelas retas vizinhas a \mathcal{R} , e pros seguimos orientando passo-a-passo retas cada vez mais afastadas, até finalmente chegarmos à longínqua polar de \mathcal{R} . Assim orientadas todas as retas paratáticas direitas a \mathcal{R} , verificaremos que em nenhum lugar da triesfera haverá retas próximas com orientações relativas opostas. (Novamente desistimos de ilustrar este texto.)

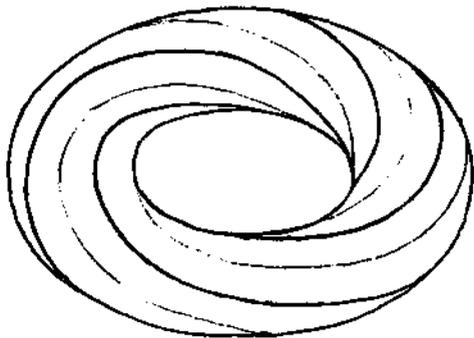
Fica agora fácil perceber que se definirmos um vetor unitário \vec{A} em um ponto P da triesfera, então em qualquer outro ponto Q ficará univocamente definido um outro vetor unitário \vec{B}



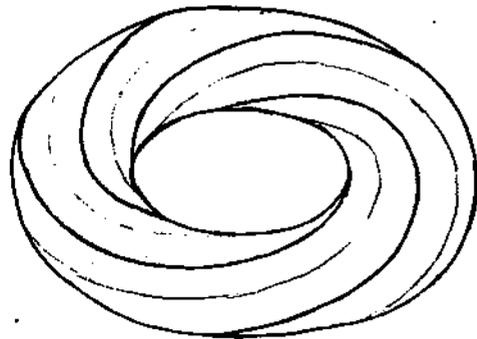
paratático direito ao vetor \vec{A} ; bastará imaginar que \vec{A} e \vec{B} são vetores tangentes a retas paratáticas direitas, orientadas con-
sistentemente.

É claro que tudo o que foi descrito referente a para-
táticas direita é também válido para paratáticas esquerdas; as-
sim sendo, a triessfera admite dois tipos de paralelismo abso-
luto, enquanto que o triespaco euclidiano admite apenas um.

Retornemos brevemente às superfícies de Clifford, pa-
ra notar que cada uma admite uma família de retas paratáticas
direitas a seus eixos, bem como outra família paratática es-
querda.



Paratáticas direitas
em uma superfície de Clifford

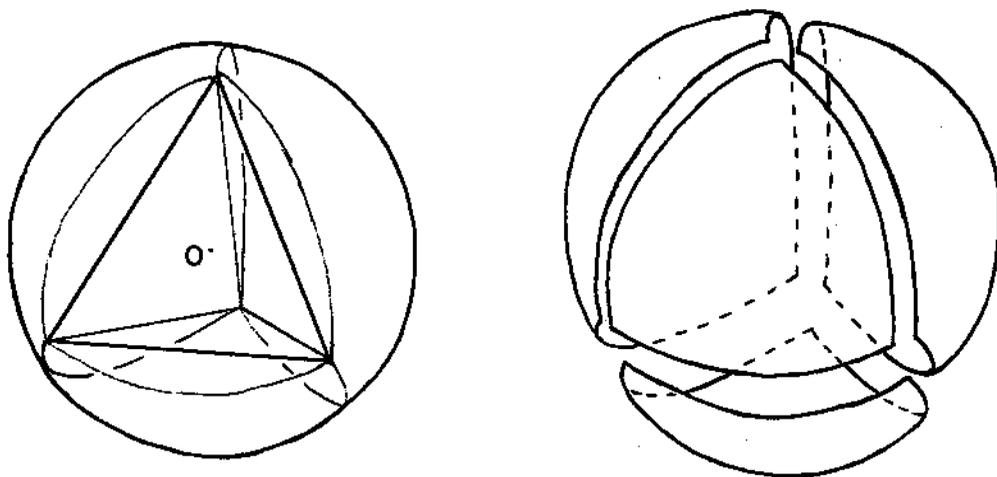


Paratáticas esquerdas
na mesma superfície

PARTIÇÃO EM POLIEDROS

Sabemos que no triespaco euclidiano são apenas 5 os poliedros regulares (ou de Platão): tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro.

Ainda no triespaco euclidiano, imaginemos um desses poliedros platônicos inscrito em uma superfície esférica, o tetraedro por exemplo; se a partir do centro O da superfície



projetarmos cada aresta euclidiana do tetraedro sobre a superfície esférica veremos a superfície repartida em 4 triângulos esféricos regulares idênticos, e dizemos que foi realizada uma divisão-em-4 da superfície esférica.

Com respeito aos restantes poliedros platônicos efetuaríamos correspondentemente as divisões em-6, em-8, em-12 e em-20 da superfície; essas seriam as cinco únicas divisões possíveis de uma esfera em áreas poligonais regulares idênticas. Nas divisões em-4, em-8 e em-20 as áreas são triangulares, na divisão em-6 são quadradas e na em-12 são pentagonais.

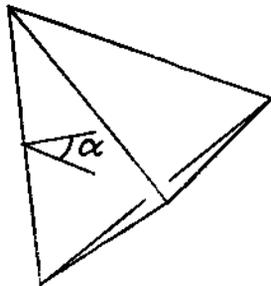
Imediatamente nossa curiosidade é despertada para a

questão análoga na triesfera: haverá algum modo de repartir o espaço triesférico em regiões poliédricas regulares idênticas? A resposta é afirmativa, há 6 partições possíveis; nessas partições os "blocos" são ora tetraedros curvos (partições em-5, em-16 e em-600), ora cubos curvos (partição-em-8), ora octaedros curvos (partição-em-24), ora dodecaedros curvos (partição-em-120).

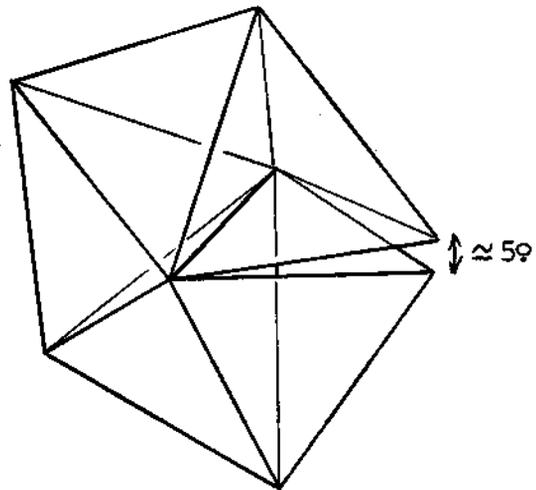
Vamos ver quais razões limitam a apenas 6 as possibilidades de partição da triesfera em poliedros regulares idênticos.

Imaginemos um pequeno tetraedro regular, praticamente euclidiano na grande triesfera. Cálculos trigonométricos simples mostram que o ângulo diedro α entre as faces desse pequeno

tetraedro
euclidiano



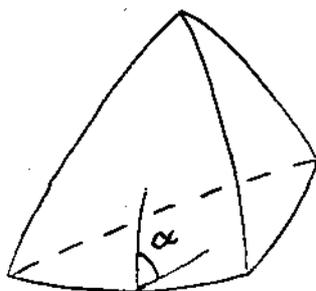
$$\alpha = \sec^{-1} 3 \approx 71^\circ$$



tetraedro vale aproximadamente 71° . Como $5 \times 71^\circ = 355^\circ < 360^\circ$, percebemos que a junção face-a-face de cinco tetraedros euclidianos partilhando uma mesma aresta não seria suficiente para encobrir totalmente essa aresta.

Aumentamos agora o tamanho do tetraedro regular na triesfera; os efeitos da curvatura positiva do triespaço farão aumentar o valor dos ângulos diedros α , dando ao tetraedro uma aparência geral de inchado. Quanto maior o tetraedro, mais

pronunciado será o seu arredondamento. Para certos tamanhos do tetraedro, o ângulo diedro α se tornará submúltiplo de 360° ; nestes casos poderemos assentar um número inteiro de tetraedros desse tamanho em torno de uma aresta comum. Como os demais ângulos diedros dos tetraedros regulares terão todos aquele mesmo valor, poderemos prosseguir assentando tetraedros idênticos em todas as direções até que a triésfera inteira esteja preenchida.



tetraedro triésferico.

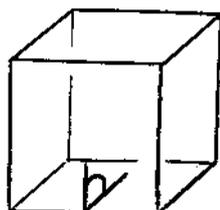
$$\alpha > \sec^{-1} 3 \approx 71^\circ$$

Notemos que o número de poliedros idênticos a compartilhar uma dada aresta não pode ser inferior a três, e portanto o ângulo diedro desses poliedros curvos não pode ultrapassar 120° .

Para blocos tetraédricos, os valores $\alpha = 120^\circ, 90^\circ, 72^\circ$ são então os únicos submúltiplos de 360° aceitáveis, maiores que o valor euclidiano $\approx 71^\circ$; conforme veremos mais adiante, a esses três valores de α correspondem as partições em-5; em-16 e em-600 da triésfera, respectivamente.

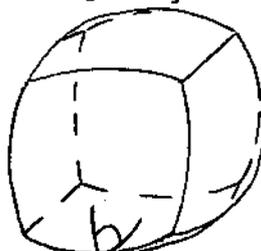
O cubo euclidiano tem ângulo diedro reto; assim, uma

cubo euclidiano



$$\alpha = 90^\circ$$

bloco cúbico da partição em-8

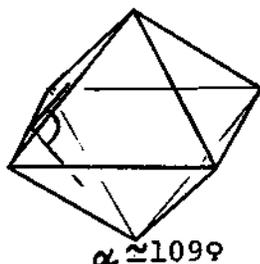


$$\alpha = 120^\circ$$

partição da triesfera em blocos cúbicos idênticos só será possível se o ângulo diedro dos cubos triesféricos for 120° ; serão ao todo 8, esses blocos.

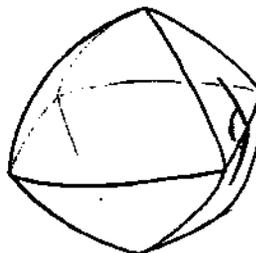
O octaedro euclidiano tem $\alpha \simeq 109^\circ$, portanto somente

octaedro
euclidiano



$$\alpha \simeq 109^\circ$$

bloco octaédrico
da partição-em-24



$$\alpha = 120^\circ$$

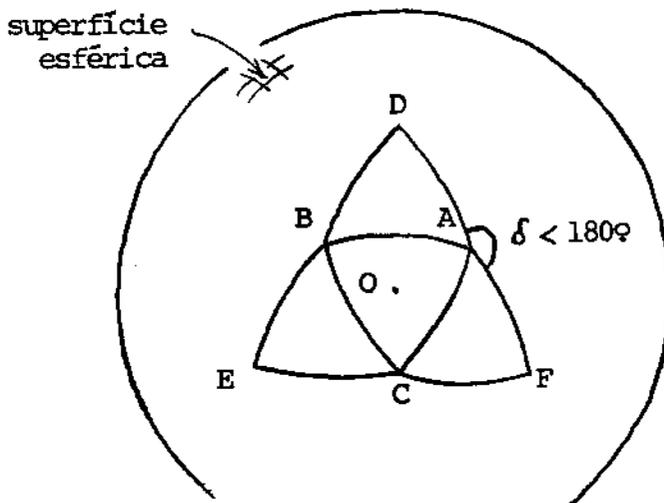
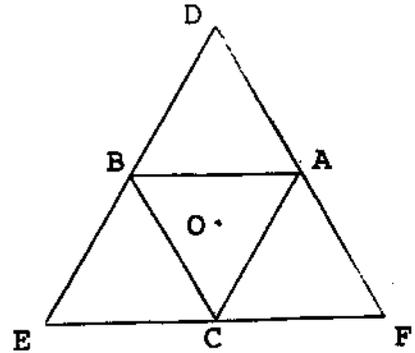
com $\alpha = 120^\circ$ poderão octaedros curvos compor a partição (em-24) da triesfera.

O dodecaedro euclidiano tem ângulo diedro ligeiramente menor que 120° ; dodecaedros curvos com ângulos diédros 120° servem de blocos para a partição-em-120 da triesfera.

Finalmente, o mais arredondado dos poliedros platônicos, o icosaedro euclidiano, tem ângulo diedro já maior que 120° ; isso torna impossível a partição da triesfera em icosaedros curvos.

PARTIÇÃO-EM-5

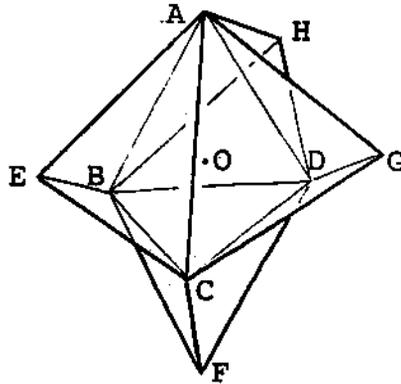
Em uma superfície esférica imaginemos um pequeno triângulo equilátero ABC, com centro O, e construamos três outros triângulos equiláteros ABD, BCE, CAF. A seguir façamos crescer gradual e homogeneamente esses quatro pequenos triângulos; devido à curvatura da superfície, os ângulos internos dos triângulos gradualmente aumentam de valor, enquanto que os ângulos externos $\delta = \widehat{FAD} = \widehat{DBE} = \widehat{ECF}$ gradualmente diminuem de



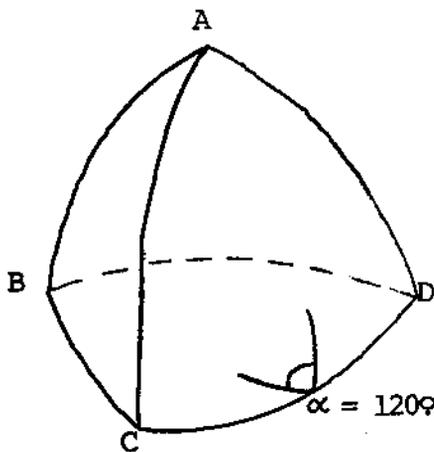
valor. Quando cada ângulo interno atingir 120° , os ângulos externos δ tenderão a zero e os três vértices D, E, F se encontrarão no ponto \bar{O} (antípoda do centro O do triângulo ABC); teremos então efetuado a divisão-em-4 da esfera.

Analogamente imaginemos em uma triesfera um pequeno tetraedro regular ABCD com centro O, e construamos 4 outros tetraedros regulares ABCE, BCDF, CDAG, DABH. Façamos agora crescer gra

-73-



dual e homogeneamente esses 5 pequenos tetraedros regulares; todos os ângulos diedros, que inicialmente valem $\simeq 71^\circ$, terão seus valores gradualmente aumentados devido à curvatura da tri-esfera; isso ocasionará a aproximação gradativa de pares de faces livres (CDF e CDG, por exemplo). Quando os ângulos diedros atingirem 120° aquelas faces se confundirão duas-a-duas, e os quatro vértices



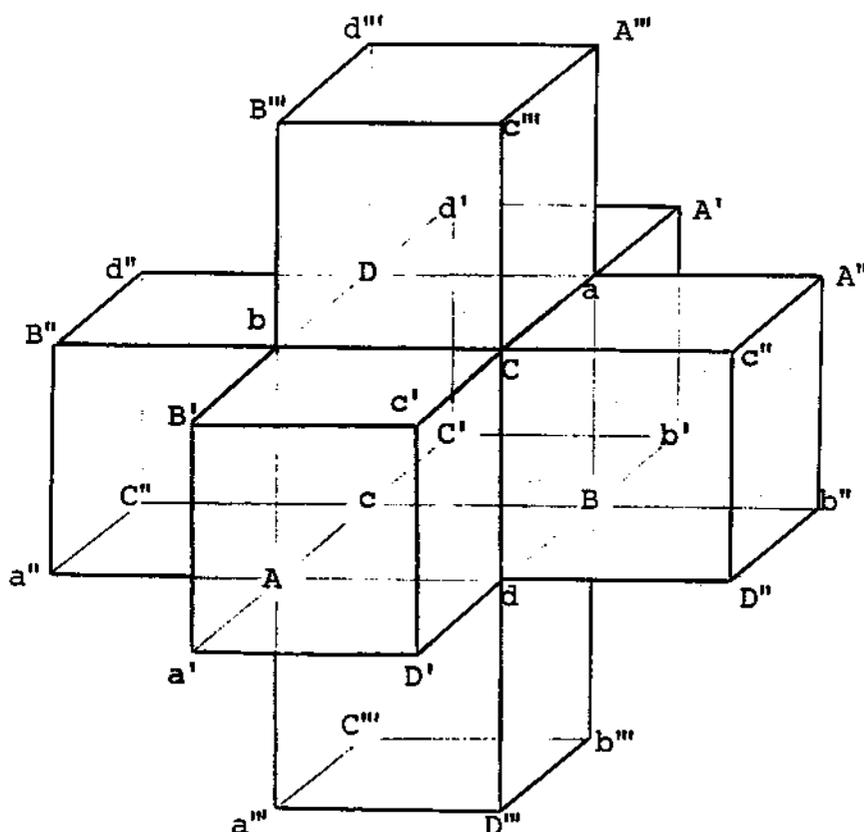
tetraedro da
partição-em-5
da tri-esfera
de magnitude M

$$\begin{aligned} \ell &= AB \\ &= (1 - \pi^{-1} \sec^{-1} 4)M \\ &\simeq 0.58M \end{aligned}$$

tes livres E, F, G, H se encontrarão no ponto \bar{O} (antípoda do centro O do tetraedro ABCD). Teremos então efetuado a partição-em-5 da tri-esfera.

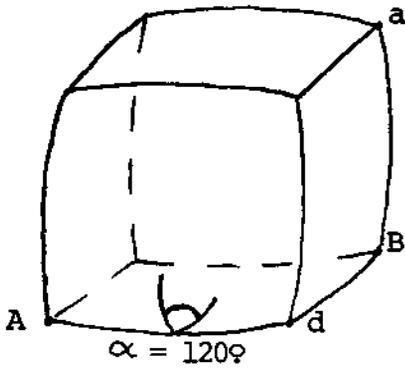
PARTIÇÃO-EM-8

Podemos preencher a triesfera com oito cubos esféricos idênticos. Para isso, partimos de um pequeno cubo euclidiano com vértices ABCDabcd, (ver figura) e a ele juntamos seis outros cubos idênticos, um em cada face. Notamos que entre os



seis cubos anexados ficam formados pares de faces contíguas, ortogonais, tais como $Cac''A''$ e $Cac'A'$, ou como $Cbc''B''$ e $Cbc'B'$. Em seguida fazemos crescer gradual e homoganeamente todos esses sete cubos; a curvatura positiva do espaço provocará um aumento gradativo do valor dos ângulos diedros dos cubos (que originalmente eram de 90°), diminuindo consequentemente o ângulo entre aquelas faces livres contíguas. Quando os ângulos diedros dos cubos atingirem 120° essas faces

contíguas se fundirão duas-a-duas, deixando o cubo central ABCDabcd totalmente encoberto pelos seis cubos vizinhos. A a-

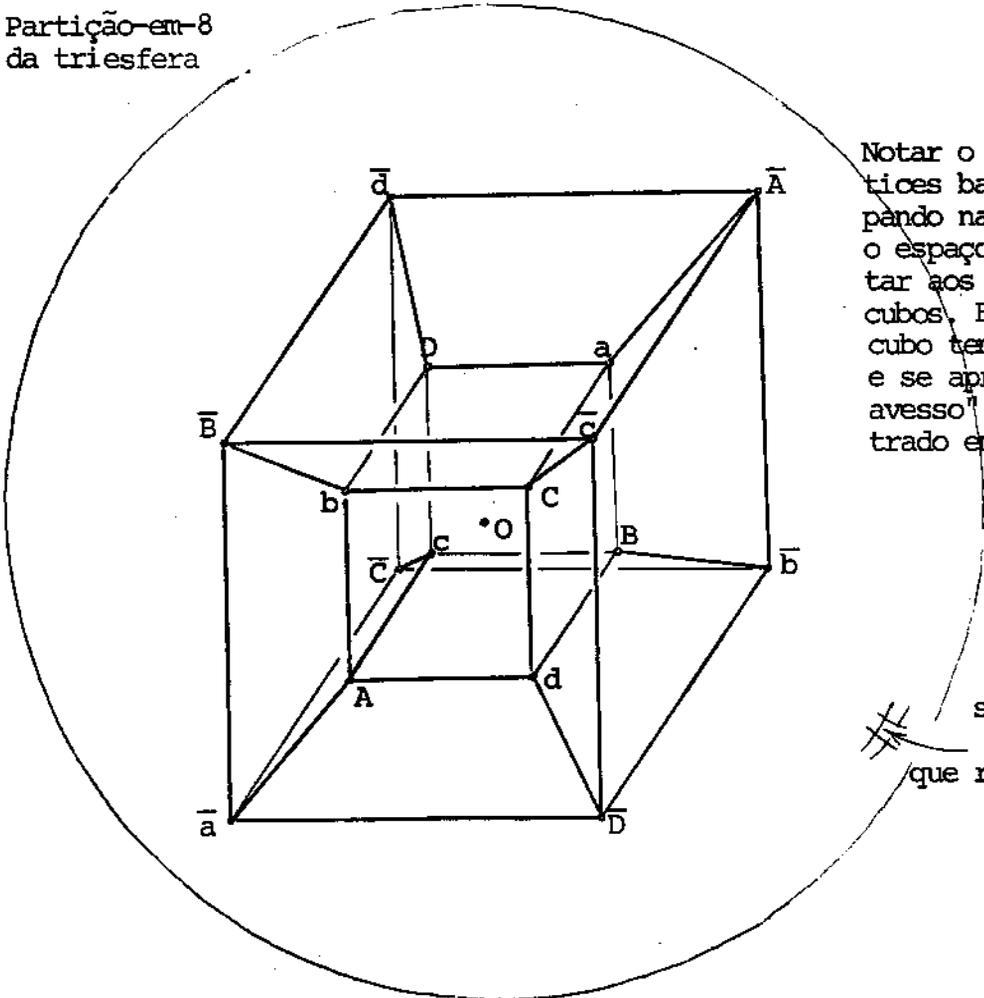


Bloco cúbico da partição-em-8 de triesfera com magnitude M

Ad = M/3
 AB = M/2
 Aa = 2M/3

resta dos cubos medirá M/3 (M sendo a magnitude da triesfera), cada diagonal de face medirá M/2 e cada diagonal de cubo valerá 2M/3. Cada tríade de vêtices "linhados" estará amalgama

Partição-em-8 da triesfera



Notar o cubo de vêtices barrados, ocupando na triesfera o espaço complementar aos restantes 7 cubos. Esse oitavo cubo tem centro O, e se apresenta "do avesso" no mapa centrado em O.

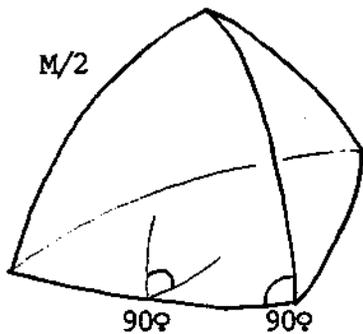
superfície esférica que representa o ponto O

da no ponto antípoda de algum vértice do cubo central; por exemplo, A' , A'' , A''' , estarão em \bar{A} (antípoda de A), assim como c' , c'' , c''' estarão em \bar{c} (antípoda do vértice c), etc.

No total esses sete cubos formarão um enorme cubo cujos vértices são pontos antípodas dos vértices do subcubo central. O espaço da triesfera ainda não preenchido é portanto também um cubo, com os mesmos vértices, arestas e faces que o enorme cubo, e idêntico aos sete cubos anteriores. A triesfera ficou assim partida em 8 cubos idênticos.

PARTIÇÃO-EM-16

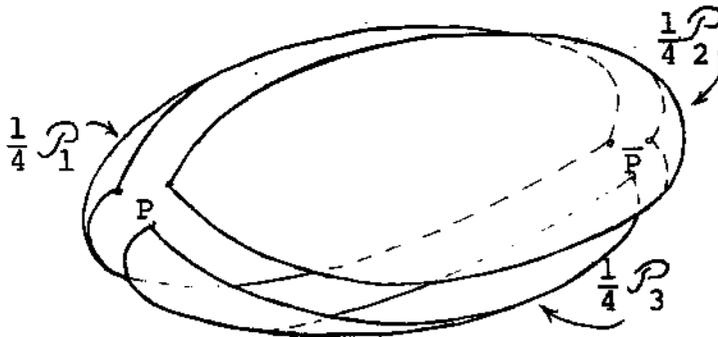
Outra partição da tri-esfera em tetraedros idênticos é obtida quando os ângulos diedros destes valerem $\alpha = 90^\circ$ (também submúltiplo de 360°); cada bloco tetraédrico terá agora aresta $M/2$, e serão necessários 16 blocos para preencher a tri-esfera de magnitude M . Em cada um desses tetraedros as arestas



Bloco da
partição-em-16
da tri-esfera
com magnitude M

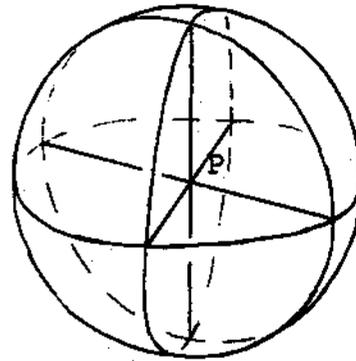
opostas são segmentos de retas polares, e cada vértice é polo da face oposta.

Há um modo simples de repartir a tri-esfera nesses 16 tetraedros idênticos. Considere-se um plano \mathcal{P}_1 qualquer da tri-esfera, que ficará dividida em 2 regiões esféricas de mesmo volume. Considere-se um segundo plano \mathcal{P}_2 , normal a \mathcal{P}_1 ; a tri-esfera está agora separada em 4 regiões lenticulares idênticas. Considere-se um terceiro plano \mathcal{P}_3 , normal aos dois anteriores; teremos então 8 regiões idênticas, cada uma tendo aspecto de uma fava com seção reta triangular. Cada fava tem apenas 3 faces, 3 arestas e 2 vértices; todas as oito favas tem em comum esses 2 vértices, que são os pontos antípodas, P e \bar{P} onde os três planos ortogonais se encontram. Finalmente, considere-se um quarto plano \mathcal{P}_4 , polar de P e \bar{P} ; esse plano é ortogonal aos três

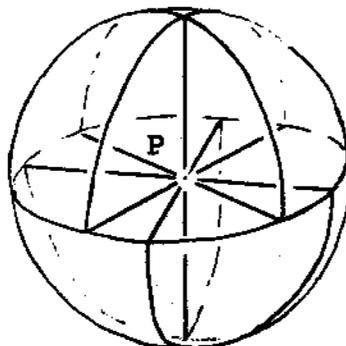


anteriores, e divide cada uma das oito favas em dois tetraedros idênticos, completando assim a partição-em-16 da triesfera.

Notamos que oito desses dezesseis tetraedros tem o vértice P em comum, preenchendo simetricamente uma esfera sólida de raio $M/2$; os oito tetraedros restantes envolvem o ponto antípoda \bar{P} de modo análogo.



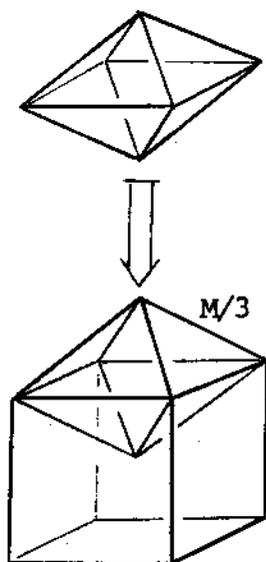
Vale notar ainda que os 16 tetraedros idênticos podem ser arrumados na triesfera de modos menos simétricos que o descrito anteriormente. Por exemplo, 4 dos oito tetraedros que envolvem o ponto P naquela descrição poderiam ser deslocados com respeito aos outros 4, ocupando porém coletivamente o mesmo espaço.



PARTIÇÃO-EM-24

Vimos anteriormente que a triesfera de magnitude M pode ser preenchida com oito cubos idênticos. Esses cubos curvos precisarão ter aresta $M/3$, quando então a distância do centro do cubo a cada vértice será também $M/3$ (pois a diagonal do cubo valerá $2M/3$).

Podemos então incrustar na face de cada um desses cubos a metade de um octaedro curvo regular. Cada cubo conterá assim



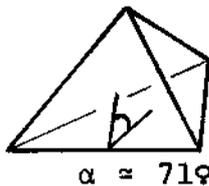
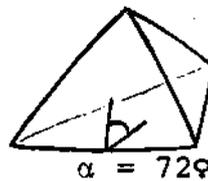
Relação entre as parti-
ções em 24 octaedros
e em 8 cubos na triesfera
com magnitude M

6 metades de octaedros, ou 3 octaedros ao todo, e os oito cubos conterão $8 \times 3 = 24$ octaedros no total; estará assim constituída a partição da triesfera em 24 octaedros idênticos.

PARTIÇÕES EM-120 E EM-600; TABELA

Se repartirmos o espaço triesférico em um número elevado de regiões de mesmo tamanho perceberemos que a trigometria em cada pequena região pouco diferirá da geometria euclidiãna. Assim, quando dividimos em 120 dodecaedros idênticos uma triesfera, notamos que esses dodecaedros são praticamente euclidianos, apenas ligeiramente "inflados".

A fortiori, os tetraedros que constituem a partição-em-600 da triesfera de magnitude M (eles têm aresta $M/5$) mal podem ser discernidos de modelos euclidianos.

tetraedro
euclidianotetraedro
com aresta $M/5$
em triesfera
com magnitude M

A seguir, vamos resumir em uma tabela alguns dados referentes às seis partições da triesfera em sólidos regulares idênticos.

-81-

s = número de sólidos na partição	5	8	16	24	120	600
f_s = número de faces em cada sólido (sólidos tetraédricos, cúbicos, ...)	4	6	4	8	12	4
s_a = número de sólidos com uma aresta em comum	3	3	4	3	3	5
s_v = número de sólidos com um vértice em comum	4	4	8	6	4	20
f = número de faces na partição	10	24	32	96	720	1200
a = número de arestas na partição	10	32	24	96	1200	720
v = número de vértices na partição	5	16	8	24	600	120
a_f = número de arestas em cada face	3	4	3	3	5	3

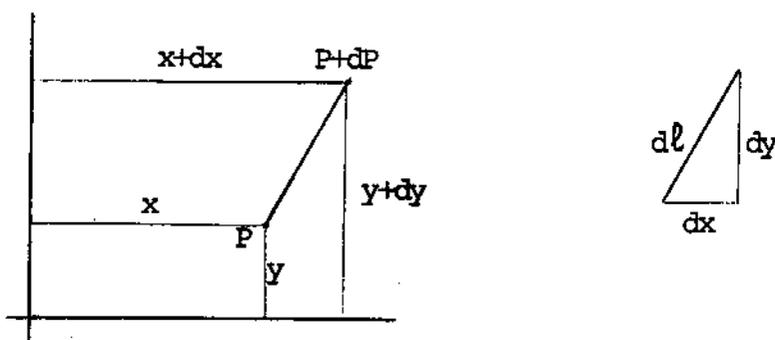
APÊNDICE 1

ELEMENTOS DE LINHA NO PLANO EUCLIDIANO

Para a descrição de um espaço, uma apreciável quantidade de informações é prestada compactamente pelo chamado "elemento de linha", que é a expressão matemática do quadrado da distância $(d\ell)^2$ entre dois pontos vizinhos, P e $P+dP$. Conhecendo o elemento de linha podemos calcular comprimentos, áreas, volumes, trajetos mais curtos entre dois pontos, etc.

Como exemplo muito simples, vamos ver um elemento de linha apropriado para o plano euclidiano; se o ponto P tem coordenadas cartesianas (x,y) e o ponto vizinho $P+dP$ tem coordenadas $(x+dx, y+dy)$, então o elemento de linha será

$$(d\ell)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (A1.1)$$



O sistema cartesiano de coordenadas é geralmente o mais prático para cálculos matemáticos. Entretanto, há casos em que outros sistemas de coordenadas se mostram mais apropriados. Por exemplo, se o leitor estiver situado na origem cartesiana O e quiser se locomover até o ponto P de coordenadas (x,y) ,

ele provavelmente procurará tomar o caminho mais curto. Assim, ele procurará saber "em que direção" está aquele ponto P, e "a que distância". Isso nos leva às coordenadas polares e a outro exemplo de elemento de linha, válido ainda para o plano euclidiano: o ponto P terá coordenadas polares (r, ϕ) dadas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \phi = \tan^{-1}(y/x) \quad (\text{A1.2})$$

ou equivalentemente por

$$x = r \cos \phi \quad , \quad y = r \sin \phi. \quad (\text{A1.3})$$

Diferenciando estas últimas duas relações obtemos

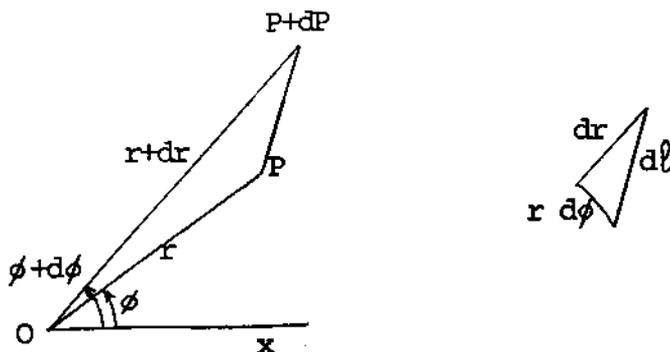
$$dx = \cos \phi \, dr - r \sin \phi \, d\phi, \quad (\text{A1.4})$$

$$dy = \sin \phi \, dr + r \cos \phi \, d\phi,$$

o que nos dá para $(dx)^2 + (dy)^2$ a expressão

$$(d\ell)_{E_2}^2 = (dr)^2 + (r \, d\phi)^2, \quad (\text{A1.5})$$

que é o elemento de linha euclidiano nas coordenadas polares (r, ϕ) .

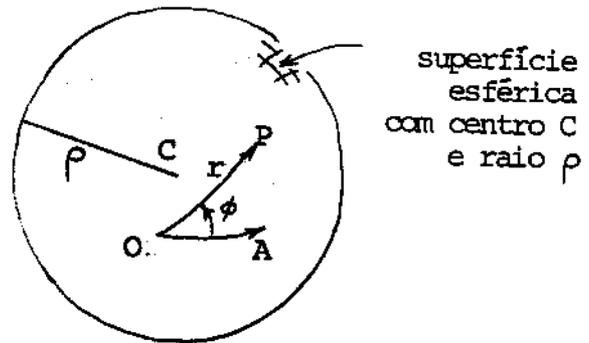


APÊNDICE 2

ELEMENTO DE LINHA NA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Vamos agora obter um elemento de linha sobre uma superfície esférica de raio ρ . O sistema de coordenadas que usaremos constará de um ponto origem O (sobre a superfície) e uma direção orientada \vec{OA} (também sobre a superfície). As coordenadas (r, ϕ) de um ponto genérico P da superfície serão obtidas do modo descrito a seguir.

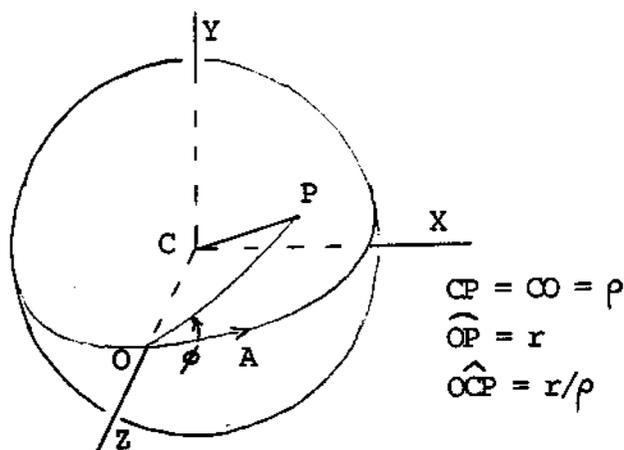
Inicialmente unimos P à origem O pelo arco \vec{OP} que se estenda sobre a superfície esférica e apresente mínimo comprimento, e medimos esse comprimento, que denotaremos por r . Em seguida medimos, nas vizinhanças de O , o ângulo ϕ que a direção orientada \vec{OP} faz com a direção orientada \vec{OA} .



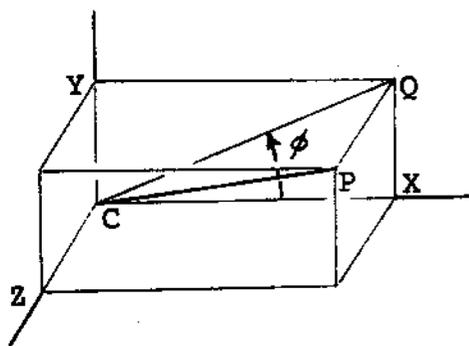
Notamos que r varia de um valor mínimo zero até um valor máximo $M = \pi\rho$ (semi-cintura da superfície esférica), enquanto ϕ está compreendido entre zero e 2π .

No caso de a superfície esférica constituir o UNIVERSO bidimensional dos seres betas (cap. 1), estes seres deverão obter o elemento de linha da biosfera mediante experiências geométricas realizadas unicamente sobre a superfície; e exemplos de tais experiências seriam medições de comprimentos, áreas, ângulos, etc. Entretanto nós, seres tridimensionais, podemos

obter tal elemento de linha por um modo formal largamente mais econômico que o método empírico dos betas. Estabelecemos no centro C da superfície esférica um referencial cartesiano $CXYZ$; note-se que nem o ponto C nem os eixos cartesianos pertencem ao



universo dos betas. É fácil ver que as três coordenadas cartesianas do ponto genérico P da superfície se relacionam ao raio



$$\begin{aligned}
 CQ &= CP \cos \widehat{PCQ} \\
 &= \rho \sin r/\rho \\
 X &= CQ \cos \phi \\
 Y &= CQ \sin \phi \\
 Z &= CP \cos \widehat{PCZ}
 \end{aligned}$$

ρ fixo e às duas coordenadas (r, ϕ) do mesmo ponto P segundo

$$X = \rho \sin(r/\rho) \cos \phi,$$

$$Y = \rho \sin(r/\rho) \sin \phi,$$

$$z = \rho \cos(r/\rho).$$

Para obtermos o elemento de linha $(dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2$ sobre a superfície $\rho = \text{const}$ precisamos diferenciar essas expressões tomando $d\rho = 0$:

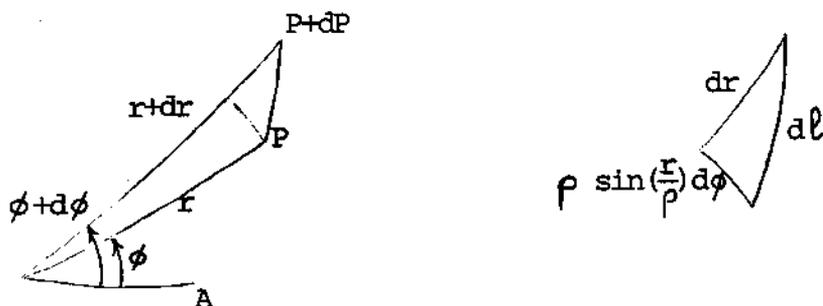
$$dX = \cos(r/\rho) \cos\phi \, dr - \rho \sin(r/\rho) \sin\phi \, d\phi,$$

$$dY = \cos(r/\rho) \sin\phi \, dr + \rho \sin(r/\rho) \cos\phi \, d\phi,$$

$$dZ = -\sin(r/\rho) \, dr;$$

o elemento de linha é então expresso, mediante algumas simplificações, por

$$(dl)_{S_2}^2 = (dr)^2 + [\rho \sin(r/\rho) d\phi]^2$$

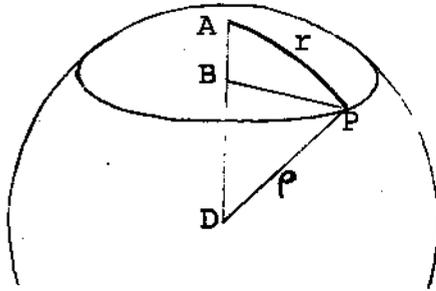


Reparamos que quando os pontos vizinhos P e $P+dP$ estão próximos à origem (isto é, $r \ll \rho$), então $\rho \sin(r/\rho) \simeq r$ e o elemento de linha se confunde com seu correspondente euclidiano (A1.5); é por esse motivo que a geometria de uma pequena região de uma grande superfície esférica é aproximadamente euclidiana.

APÊNDICE 3

CÍRCULOS CURVOS

Imaginemos uma superfície esférica de raio ρ , e sobre ela um ponto A; consideremos os pontos da superfície que distam r do ponto A, essa distância r sendo medida acompanhando a curvatura da superfície. Da figura abaixo percebemos que no tri



$$\begin{aligned} AD &= DP = \rho \\ \widehat{AP} &= r \\ \widehat{ADP} &= r/\rho \\ BP &= DP \sin \widehat{ADP} \\ &= \rho \sin(r/\rho) \end{aligned}$$

espaço euclidiano a circunferência terá centro B (localizado fora da superfície esférica) e raio $BP = \rho \sin(r/\rho)$; então

$$\left. \begin{array}{l} \text{na superfície esférica de raio } \rho \text{ uma} \\ \text{circunferência de raio } r \text{ tem comprimento} \\ C(r) = 2\pi\rho \sin(r/\rho) \end{array} \right\} \quad (A3.1)$$

Talvez o leitor estranhe que o resultado não seja $2\pi r$; o motivo é que "r" não é o comprimento do segmento euclidiano BP na Figura, mas sim o do arco AP que acompanha a curvatura da superfície.

Uma circunferência adquire seu máximo comprimento quando $r = \pi\rho/2$, circunstância em que ela se torna uma geodésica (ou

"reta") da superfície. Chamando $\pi\rho = M = \text{magnitude}$, dizemos então que

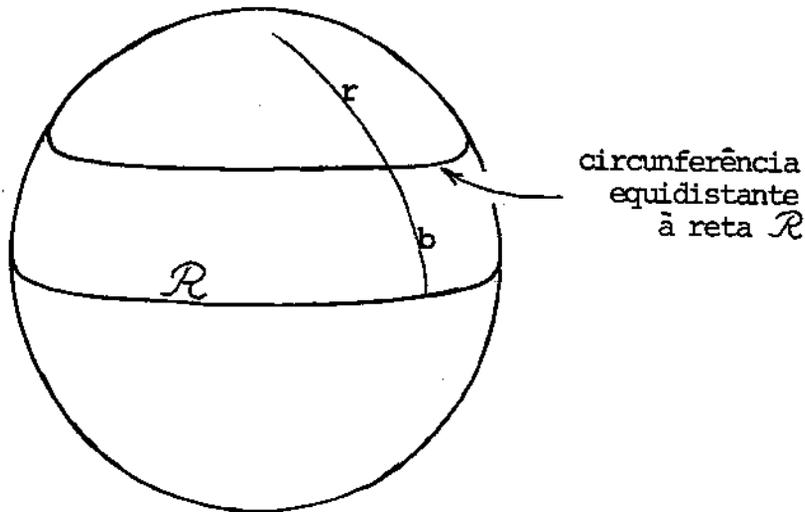
na biesfera de magnitude

M as retas tem comprimento

$$C(M/2) = 2M.$$

(A3.2)

Imaginemos uma reta \mathcal{R} em uma biesfera de magnitude M (ou raio $\rho = M/\pi$). É fácil ver que uma curva da biesfera que acompanhe essa reta a uma distância constante b é uma circunferência; o comprimento dessa circunferência é dado pela (A3.1)

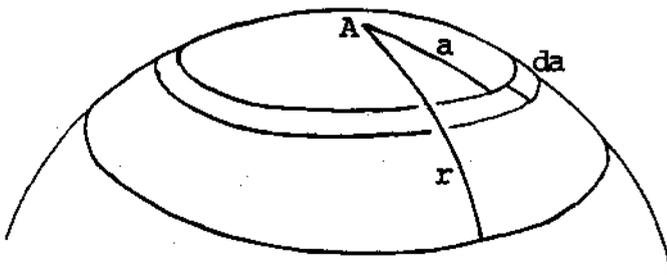


onde tomamos $r + b = \pi\rho$. Consequentemente,

em uma biesfera de raio ρ a circunferência que acompanhe uma reta à distância b tem comprimento

$$2\pi\rho\cos(b/\rho)$$

Vamos agora calcular a área de um círculo de raio r em uma esfera de magnitude M . No triângulo euclidiano esse círculo é uma calota de uma superfície esférica de raio $\rho = M/\pi$, com raio r medido acompanhando a curvatura da superfície (ver Figura);



uma estreita zona esférica de circunferência $C(a)$ e pequena largura "da" tem área elementar

$$\begin{aligned} dS_1(a) &= C(a) da \\ &= 2\pi\rho \sin(a/\rho) da, \end{aligned} \quad (\text{A3.4})$$

e portanto a área da calota será

$$\begin{aligned} S_1(r) &= \int_{a=0}^{a=r} dS_1(a) = 2\pi\rho \int_0^r \sin(a/\rho) da \\ &= 2\pi\rho^2 (1 - \cos r/\rho) \\ &= 4\pi\rho^2 \sin^2\left(\frac{r}{2\rho}\right). \end{aligned} \quad (\text{A3.5})$$

Dizemos então que

na biesfera de raio ρ um
círculo de raio r tem área

$$S_1(r) = \pi \left(2\rho \sin \frac{r}{2\rho} \right)^2 . \quad (\text{A3.6})$$

Um círculo de área máxima tem raio $r = \pi\rho = M = \text{magnitu}$
de, daí concluímos que

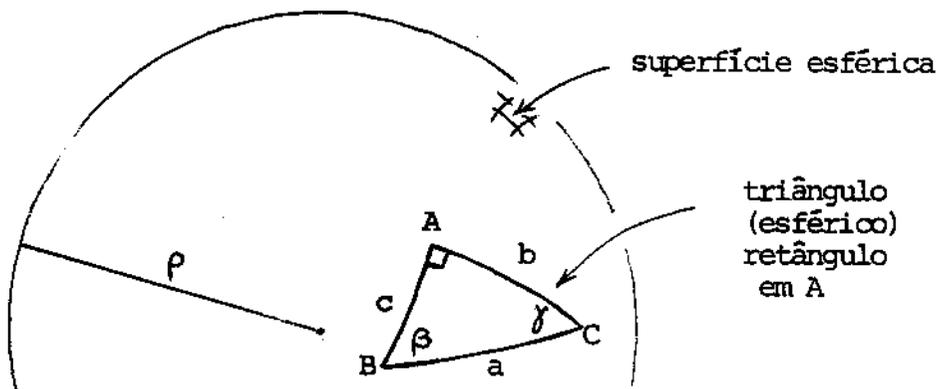
uma biesfera de magni-
tude M tem área

$$S_1(M) = 4M^2/\pi . \quad (\text{A3.7})$$

APÊNDICE 4

REGRAS DE NAPIER

Sobre uma superfície esférica de raio ρ seja um triângulo esférico de lados a, b, c e ângulos internos $\alpha = 90^\circ, \beta, \gamma$; o triângulo é portanto retângulo no vértice A da Figura abaixo.



As cinco quantidades a, b, c, β, γ do triângulo retângulo não são independentes, e algumas das numerosas relações entre elas foram engenhosamente sintetizadas nas regras de Napier

$$\begin{aligned} & \text{"seno} = \text{cosop} \\ & \text{=tanadj"}. \end{aligned}$$

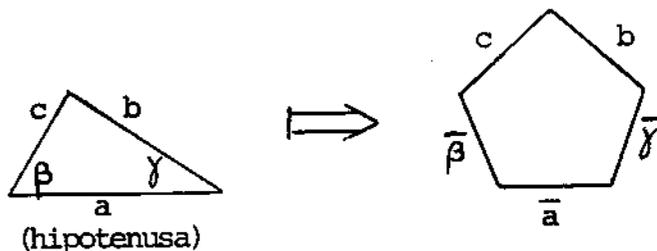
Essas regras são escritas compactamente quando o raio da superfície esférica é unitário, $\rho = 1$; Quando tivermos $\rho \neq 1$ deveremos substituir $a, b, c \rightarrow a/\rho, b/\rho, c/\rho$ em todas as expressões que se seguirão.

Principiemos por construir um pentágono auxiliar com lados \bar{a} $\bar{\beta}$ c b $\bar{\gamma}$ (a sequência correta é fundamental), onde

$$\bar{a} = 90^\circ - a,$$

$$\bar{\beta} = 90^\circ - \beta,$$

$$\bar{\gamma} = 90^\circ - \gamma.$$



A regra "seno-cosop" diz que o seno de qualquer lado do pentágono auxiliar é igual ao produto dos cosenos dos lados opostos;

exemplo 1: $\sin \bar{a} = \cos b \cos c$, ou seja

$$\cos a = \cos b \cos c;$$

exemplo 2: $\sin \bar{\gamma} = \cos c \cos \bar{\beta}$, ou seja,

$$\cos \gamma = \cos c \sin \beta.$$

A outra regra, "seno=tanadj", diz que o seno de qualquer lado do pentágono auxiliar é igual ao produto das tangentes dos lados adjacentes;

exemplo 3: $\sin \bar{a} = \tan \bar{\beta} \tan \bar{\gamma}$, ou seja,

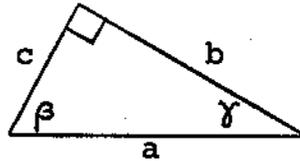
$$\cos a = \cot \beta \cot \gamma;$$

exemplo 4: $\sin b = \tan c \tan \bar{\gamma}$, ou seja,

$$\sin b = \tan c \cot \gamma.$$

Quando os lados do triângulo esférico forem muito maiores que o raio da superfície esférica, as regras de Napier se

reduzem às (mais familiares) regras trigonométricas dos triângulos retângulos euclidianos, como seria de esperar. Com efeito, vamos tomar a, b, c pequenos em alguns exemplos anteriores.



triângulo
retângulo
euclidiano

exemplo 1: $\cos a = \cos b \cos c$, ou seja,

$$\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \simeq \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2}\right)$$

$$\simeq 1 - (b^2/2) - (c^2/2) \quad , \quad \text{ou ainda}$$

$$a^2 \simeq b^2 + c^2 \quad , \quad \text{que corresponde ao teorema de Pitágoras,}$$

exemplo 2: $\cos \gamma = \cos c \sin \beta$

$$\simeq \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) \sin \beta$$

$$\simeq \sin \beta \quad , \quad \text{que diz que } \beta \text{ e } \gamma \text{ são aproximadamente complementares;}$$

exemplo 3: $\sin b = \tan c \cot \gamma$, ou seja,

$$b \simeq c \cot \gamma \quad , \quad \text{ou ainda}$$

$$\tan \gamma \simeq c/b \quad , \quad \text{como da definição de tangente trigonométrica.}$$

APÊNDICE 5

ELEMENTO DE LINHA NA TRIESFERA

No Apêndice 2 o elemento de linha da biesfera foi deduzido a partir do elemento de linha de um espaço euclídiano auxiliar, do qual a superfície esférica era uma especial seção bidimensional ($\rho = \text{const}$).

Igualmente podemos considerar a triesfera como uma especial seção tridimensional de um quadriespaço euclidiano auxiliar; neste espaço estabelecemos 4 eixos cartesianos OX , OY , OZ , OW , e o elemento de linha será $(dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2 + (dW)^2$. Consideremos agora a triesfera constituída pelos particulares pontos (X, Y, Z, W) do quadriespaço que satisfaçam $X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = \rho^2 = \text{const}$; dizemos que essa triesfera tem centro no ponto O do quadriespaço, e que tem raio ρ , medido euclidianamente nesse quadriespaço.

Nessa triesfera S_3 (um espaço tridimensional curvo) relacionamos as quatro coordenadas (X, Y, Z, W) de um ponto genérico P ao "quadriraio" $\rho = \text{const}$ e às três coordenadas (r, θ, ϕ) do mesmo ponto segundo

$$X = \rho \sin(r/\rho) \sin \theta \cos \phi,$$

$$Y = \rho \sin(r/\rho) \sin \theta \sin \phi,$$

$$Z = \rho \sin(r/\rho) \cos \phi,$$

$$W = \rho \cos(r/\rho);$$

diferenciando essas relações (nas quais tomamos $d\rho = 0$) e efetuando numerosas simplificações obtemos finalmente

$$(dl)_{S_3}^2 = (dr)^2 + (\rho \sin r/\rho d\theta)^2 + (\rho \sin r/\rho \sin\theta d\phi)^2;$$

é esta a expressão do quadrado da distância entre um ponto P (r, θ, ϕ) e seu vizinho $P + dP$ com coordenadas $(r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$, ambos pertencentes a uma triessfera de magnitude $M = \pi\rho$.

No elemento de linha da triessfera, notamos que quando os pontos vizinhos P e $P + dP$ estão próximos à origem (isto é, $r \ll \rho$) então $\rho \sin r/\rho \simeq r$, e portanto o elemento de linha se assemelha ao da geometria espacial euclidiana (E_3) expresso em coordenadas esféricas,

$$(dl)_{E_3}^2 = (dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin\theta d\phi)^2;$$

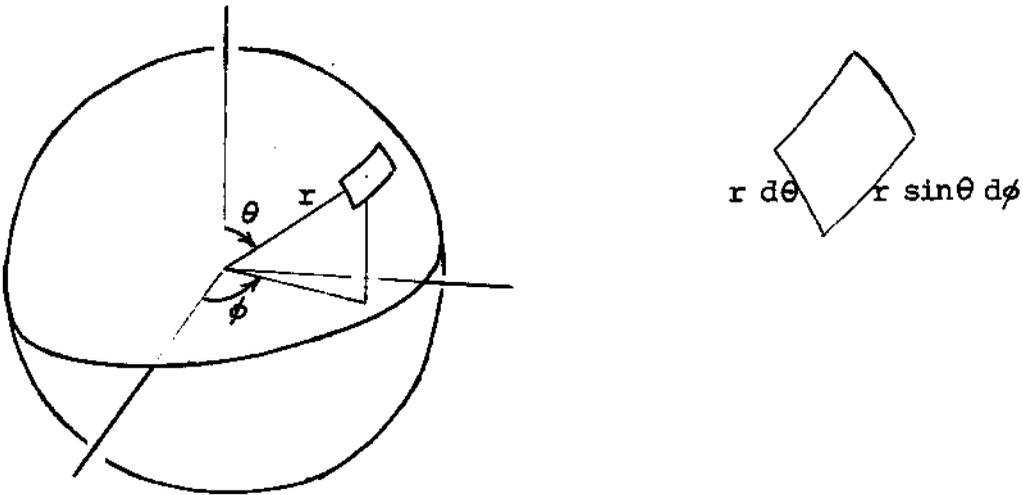
isso faz com que as duas geometrias sejam indiscerníveis para pequenas distâncias.

Será portanto apenas nas grandes distâncias que encontraremos as novidades da geometria tridimensional esférica com respeito à tridimensional euclidiana.

APÊNDICE 6

ESFERAS DA TRIESFERA

Lembremos que no triespaco euclidiano a área de uma superfície esférica de raio r é $4\pi r^2$; esse resultado é obtido partin-



do-se do elemento de linha euclidiano tridimensional

$$(d\ell)_{E_3}^2 = (dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin\theta d\phi)^2$$

e efetuando-se a integração total dos elementos de área com $dr = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (r d\theta) \int_0^{2\pi} (r \sin\theta d\phi) &= r^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= r^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Para obtermos a área de uma superfície esférica de raio r em uma triesfera de raio ρ lembramos que o elemento de linha é agora

$$(dl)_{S_3}^2 = (dr)^2 + [\bar{\rho} \sin(r/\rho) d\theta]^2 + [\bar{\rho} \sin(r/\rho) \sin\theta d\phi]^2$$

e efetuamos a integração total dos elementos de área com $dr = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [\bar{\rho} \sin(r/\rho) d\theta] \int_0^{2\pi} [\bar{\rho} \sin(r/\rho) \sin\theta d\phi] &= \\ &= (\rho \sin r/\rho)^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 4\pi (\rho \sin r/\rho)^2. \end{aligned}$$

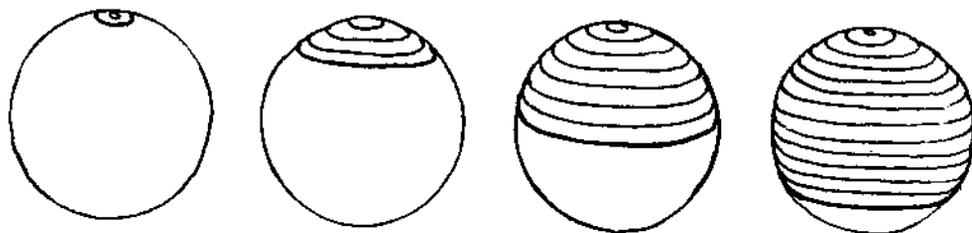
Portanto

<div style="border-bottom: 1px solid black; height: 100px; width: 100%;"></div>	<p>a área de uma superfície esférica</p> <p>de raio r em uma triesfera de raio</p> <p>ρ vale</p> <p>$S_2(r) = 4\pi (\rho \sin r/\rho)^2$.</p>
---	---

Vemos que a função $S_2(r)$ é crescente para r crescendo de zero até $\pi\rho/2$, porém decrescente para r crescendo de $\pi\rho/2$ até o valor máximo $\pi\rho = M$ (magnitude da triesfera). Para compreendermos esse estranho comportamento vamos acompanhar algo semelhante que ocorre na biesfera.

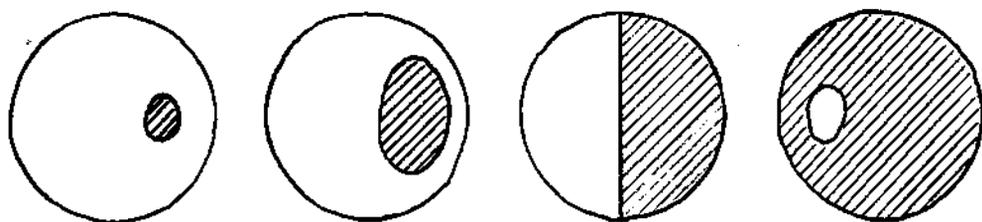
Imaginemos que em uma biesfera de raio ρ nós pinguemos uma gota de óleo, que se espalha formando uma pequena mancha circular com um pequeno perímetro. Com a adição de novas gotas no mesmo lugar, a mancha inicialmente aumentará tanto

de perímetro como de área, depois manterão perímetro praticamente invariante mas ainda aumentará de área, para em seguida



diminuir de perímetro embora continue aumentando a área. No final, a superfície inteira será toda ela uma mancha, correspondendo a um grande círculo com perímetro nulo.

O análogo trisférico da mancha crescente na biesfera é obtido com um balão esférico inflável. Inicialmente o balão teria pequeno volume e pequena área; ao inflarmos seguidamente o balão, ele primeiro aumenta de volume (que corresponde à área da mancha) e de área (que corresponde ao perímetro da man



cha), depois mantém a área praticamente invariante mas ainda aumenta de volume, para em seguida diminuir de área apesar de continuar aumentando de volume. No final, o espaço inteiro da trisfera estará contido no balão agora com área nula.

Notamos que $S_2(r)$ é máxima para $r = \pi\rho/2$, circunstância em que a superfície esférica é um plano da trisfera. Assim, embora o raio dessa superfície seja $\pi\rho/2$ (e não ρ) a área vale $S_2(\pi\rho/2) = 4\pi\rho^2$; dizemos então que

-99-

|| na triesfera de raio ρ
 || um plano tem área $4\pi\rho^2$.

Retornemos ao triespaço euclidiano para vermos como se calcula o volume de uma esfera sólida de raio r . Esse volume é obtido pela integração de finas cascas esféricas de raio " a " e espessura " da ", cada casca tendo área $4\pi a^2$; então o volume da esfera de raio r é

$$\int_0^r 4\pi a^2 da = 4\pi r^3/3.$$

Na triesfera de raio ρ calculemos agora o volume de uma esfera sólida de raio r . Procedemos exatamente como no caso euclidiano, apenas notando que agora a área de cada casca esférica de raio " a " vale $S_2(a) = 4\pi(\rho \sin a/\rho)^2$; então

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_0^r S_2(a) da = 4\pi\rho^2 \int_0^r \sin^2(a/\rho) da \\ &= 2\pi\rho^3 \left(\frac{r}{\rho} - \sin\frac{r}{\rho} \cos\frac{r}{\rho} \right). \end{aligned}$$

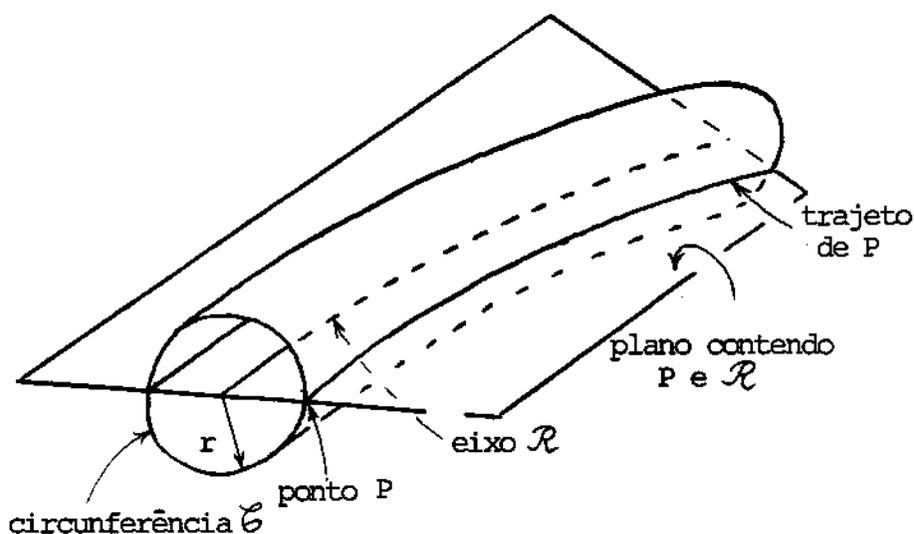
Pode-se mostrar que a função $V(r)$ é monotonicamente crescente; para o valor máximo do raio, que é a magnitude $M = \pi\rho$, a esfera estará ocupando o volume todo da triesfera. Assim,

|| a triesfera de raio ρ
 || tem volume $2\pi^2\rho^3$.

APÊNDICE 7

SUPERFÍCIES DE CLIFFORD

Em uma triésfera de raio ρ , seja uma circunferência \mathcal{C} de raio r (portanto com comprimento $2\pi\rho\sin r/\rho$). Seja ainda a reta \mathcal{R} normal ao plano dessa circunferência, e passando pelo seu centro (a reta \mathcal{R} tem comprimento $2\pi\rho$).



Tomemos um ponto P qualquer da circunferência. Consideremos o plano da triésfera comum ao ponto P e à reta \mathcal{R} , e façamos o ponto P percorrer nesse plano uma curva equidistante da reta \mathcal{R} ; tal curva será uma circunferência de raio $(\pi\rho/2) - r$, portanto terá comprimento $2\pi\rho\cos r/\rho$.

Admitamos agora que o ponto P transporte em seu movimento a circunferência \mathcal{C} , mantendo-a sempre normal à reta \mathcal{R} ; então cada ponto de \mathcal{C} descreverá também uma circunferência de comprimento $2\pi\rho\cos r/\rho$. A superfície assim gerada é de Clifford, com eixo \mathcal{R} e raio r ; como sua área é dada pelo produto $(2\pi\rho\sin r/\rho) \times (2\pi\rho\cos r/\rho)$ concluímos que

na triesfera de raio ρ uma superfície

de Clifford com raio r tem área

$$S_C(r) = 2\pi^2\rho^2\sin(2r/\rho).$$

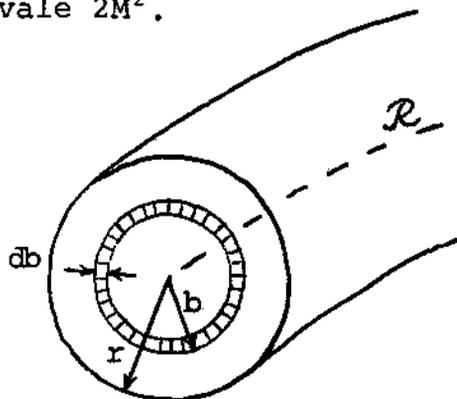
Notamos que a função $S_C(r)$ cresce até o máximo valor $2\pi^2\rho^2$, quando $r = \pi\rho/4 = M/4$ (onde $M = \pi\rho =$ magnitude da triesfera), tornando-se decrescente para maiores valores de r . Portanto,

na triesfera de magnitude M a super-

fície de Clifford de máxima área tem

raio $M/4$, e sua área vale $2M^2$.

O volume contido por uma superfície de Clifford de raio r é obtido por integração de finas "cascas" de Clifford, de raio variável b e espessura db :



$$\begin{aligned} V_C(r) &= \int_0^r S_C(b) db = 2\pi^2\rho^2 \int_0^r \sin(2b/\rho) db \\ &= 2\pi^2\rho^3 \sin^2(r/\rho). \end{aligned}$$

Notamos que quando o raio r da superfície de eixo \mathcal{R} tender a $\pi\rho/2$ então o volume enclausurado juntamente com \mathcal{R} atingirá o valor máximo $2\pi^2\rho^3$, que é o volume todo da triesfera de raio ρ ; neste limite a superfície colapsa à reta \mathcal{R}' polar do eixo \mathcal{R} considerado.

BIBLIOGRAFIA

- R. BONOLA-"Non-Euclidean Geometry; A Critical and Historical Study of its Developments", Dover Publications, Inc., 1955; first published in Pavia, 1906.
- W. L. BURKE-"Spacetime, Geometry, Cosmology", University Science Books, Mill Valley, California, 1980.
- H.S.M. COXETER-"Non-Euclidean Geometry", University of Toronto Press, Toronto, 5th ed. 1965, reprinted 1968.
- R. L. FABER-"Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry", Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.
- J. GRAY-"Ideas of Space; Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic", Oxford University Press, Oxford, 1979.
- D. HILBERT & S. COHN-VOSSEN-"Geometry and the Imagination", Chelsea Publishing Company, New York, 1952; first published in Göttingen, 1932.
- H. P. MANNING-"Geometry of four dimensions", Dover Publications, Inc., New York, 1956; reprinted from 1914's edition of the Macmillan Company.
- H. C. OHANIAN-"Gravitation and spacetime", W. W. Norton & Company, Inc., New York, 1976.
- D. M. Y. SOMMERVILLE-"The elements of non-euclidean geometry" Dover Publications, New York, 1958; first published in 1914.
- D. M. Y. SOMMERVILLE-"An introduction to the geometry of n dimensions", Dover Publications, Inc., New York, 1958; first published in 1929.
- R. C. TOLMAN-"Relativity, thermodynamics and cosmology", Oxford University Press, London 1934 (reprinted by Bookprint Limited, 1966).