

CBPF-MO-002/81

FORMALISMO DA HELICIDADE
E SUAS APLICAÇÕES

por

GERHARD OTTER* e
ANNA MARIA FREIRE ENDLER**

* III Physikalisches Institut der RWTH Aachen

** Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Av. Wenceslau Braz nº 71 - fundos - Botafogo - Rio de Janeiro

PREFÁCIO

Esta monografia apresenta o curso que um de nós (G.Otter) proferiu no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, em agosto e setembro de 1980. A elaboração foi feita tendo como base as notas de aula revisadas pelos dois autores em trabalho conjunto em Aachen.

Este curso foi dirigido aos pesquisadores e estudantes interessados na análise das interações nucleares a alta energia. Estas interações podem ser descritas através das amplitudes de helicidade. A determinação experimental tão completa quanto possível destas amplitudes torna-se de grande importância para a interpretação do mecanismo de interação.

Por necessidade, assumimos conhecimentos básicos de Mecânica Quântica e Física de Partículas, alguns dos quais são recordados no Capítulo I, para a conveniência do leitor. Vários exercícios são incluídos no texto. O leitor deve procurar resolvê-los, pois somente assim adquirirá treino para aplicar na pesquisa seus conhecimentos obtidos.

Ao CBPF e ao Convênio CNPq-KFA somos gratos por terem possibilitado a estada no CBPF de G. Otter. Agradecemos ao professor J.J. Gianbiagi a leitura crítica do manuscrito, à Helena de S. Ferreira e à Ana Maria de Miranda Rosa o árduo trabalho de datilografia, e à Sônia Maria Reis a paciência na revisão das provas.

Rio de Janeiro, Dezembro 1981

G. Otter

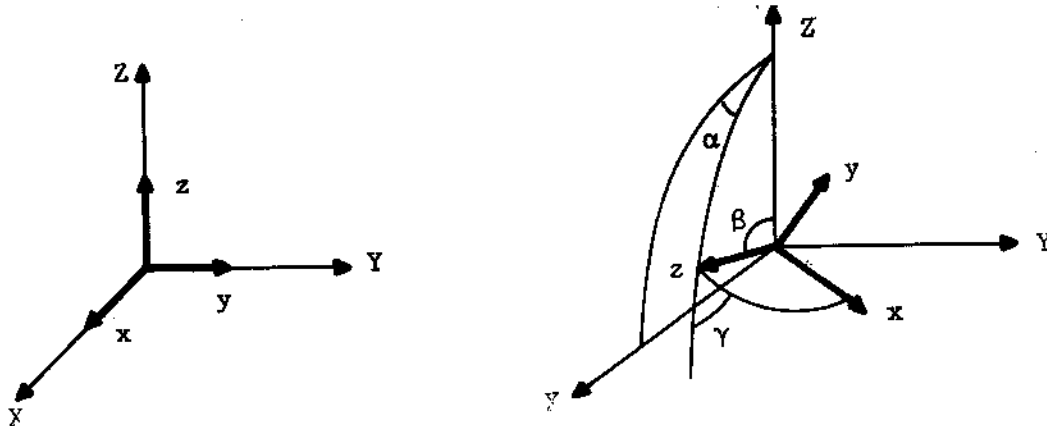
A.M.F. Endler

1. INTRODUÇÃO

1.1 - Rotações e Momento Angular

Existem várias possibilidades para se especificar a rotação de um corpo. Fixaremos no corpo um sistema de eixos definido através de 3 vetores x, y, z , ortogonais entre si e usaremos os 3 ângulos de Euler α, β, γ para descrever a rotação do corpo. Antes da rotação, o sistema de eixos fixo no corpo deve coincidir com o sistema de eixos X, Y, Z de coordenadas. Usaremos a chamada rotação ativa, i.e., manteremos o sistema de coordenadas X, Y, Z fixo no espaço e os ângulos α, β, γ definirão a rotação do corpo em relação a estes eixos. Equivalente a esta rotação seria a rotação passiva em que o sistema de coordenadas sofre a rotação e o corpo é mantido fixo. Em cada um dos dois casos a rotação poderá ser descrita de duas maneiras:

a) rotação em torno dos eixos fixos no corpo, isto é,



antes da rotação

depois da rotação

a rotação pode ser considerada como o resultado das seguintes 3 rotações sucessivas:

$$R = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha)$$

1º) $R_z(\alpha)$: rotação de ângulo α em torno do eixo z

2º) $R_Y(\beta)$: rotação de ângulo β em torno do eixo y

3º) $R_Z(\gamma)$: rotação de ângulo γ em torno do eixo z .

Os domínios de α, β, γ são $0 \leq \alpha \leq 2\pi$; $0 \leq \beta \leq \pi$; $0 \leq \gamma \leq 2\pi$

b) rotação em torno dos eixos fixos no espaço

$$R = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)$$

Exercício 1.1

Mostre que a rotação em torno dos eixos fixos no corpo é idêntica à rotação em torno dos eixos fixos no espaço.

$$R_Z(\gamma)R_Y(\beta)R_Z(\alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)$$

As rotações podem ser representadas por matrizes chamadas matrizes de rotação.

Por exemplo, para uma rotação de um ângulo ϕ em torno do eixo X , associamos a matriz

$$R_X(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

que efetua a rotação

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{XX} & R_{XY} & R_{XZ} \\ R_{YX} & R_{YY} & R_{YZ} \\ R_{ZX} & R_{ZY} & R_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Analogamente, para rotações, em torno dos eixos Y e Z associamos as matrizes

$$R_Y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \quad R_Z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 1.2

Expresse pelos ângulos de Euler, a rotação de um ângulo ϕ em torno do eixo X.

As matrizes de rotação a 3 dimensões formam um grupo, (o produto de duas matrizes de rotação é uma matriz de rotação e toda matriz de rotação admite uma inversa), satisfazendo às seguintes condições:

- 1) São matrizes unitárias, i.e., $R^+R = RR^+ = 1$ sendo R^+ a transposta conjugada de R ($R^+ = \tilde{R}^*$).
- 2) São matrizes reais $R^* = R$.
- 3) São matrizes unimodulares ($\det R = 1$).

Este grupo é chamado SO_3 (special orthogonal group em 3 dimensões). O grupo ortogonal O_n é definido como o grupo de matrizes $n \times n$ satisfazendo às condições 1 e 2, e o grupo especial ortogonal SO_n é o subgrupo satisfazendo às condições 1,2 e 3.

Se a rotação é infinitesimal poderemos escrever para o caso da rotação em torno do eixo X,

$$R_X(d\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\phi \\ 0 & d\phi & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} - iJ_X d\phi$$

onde \mathbb{I} é a matriz identidade e

$$J_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{é chamado o gerador.}$$

Correspondentemente existem os geradores J_Y e J_Z a saber

$$J_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_Z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Os 3 geradores J_X, J_Y, J_Z e o operador $J^2 = J_X^2 + J_Y^2 + J_Z^2$ isto é,

$$J^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obedecem às mesmas regras de comutação que os momentos angulares, i.e.,

$$[J_X, J_Y] \equiv J_X J_Y - J_Y J_X = iJ_Z$$

e as relações cíclicas semelhantes.

$$[J_X, J^2] = [J_Y, J^2] = [J_Z, J^2] = 0$$

Uma rotação finita de um ângulo ϕ pode ser obtida compondo transformações infinitesimais

$$R_X(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_n \left(1 - i J_X \frac{\phi}{n} \right) = e^{-iJ_X \phi}$$

Analogamente para uma rotação finita representada pelos ângulos de Euler α, β, γ teremos

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_Z(\gamma) = e^{-i\alpha J_Z} \cdot e^{-i\beta J_Y} \cdot e^{-i\gamma J_Z}$$

Exercício 1.3

Demonstre que a matriz de rotação representada pelos ângulos de Euler α, β, γ é dada por:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta\cos\alpha - \sin\gamma\sin\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha & \sin\beta\cos\alpha \\ \cos\gamma\cos\beta\sin\alpha + \sin\gamma\cos\alpha & -\sin\gamma\cos\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha \\ -\cos\gamma\sin\beta & \sin\gamma\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Representações do Grupo das Rotações

Uma representação matricial de um grupo consiste em associar a cada elemento do grupo, uma matriz de tal maneira que ao produto de 2 elementos seja associado o produto das matrizes correspondentes (homomorfismo). A representação se chama unitária se as matrizes forem matrizes unitárias. A dimensão das matrizes representantes é chamada a dimensão da representação. Consideraremos certas representações unitárias de dimensões $n = 1, 2, 3, \dots$ do grupo das rotações e veremos que elas correspondem ao spin $j = (n-1)/2 = 0, 1/2, 1, \dots$ respectivamente (usaremos a notação em que $\hbar = 1$). Nas representações unitarias os geradores J_x, J_y, J_z e J^2 satisfazendo as mesmas relações de comutação dos J_x, J_y, J_z, J^2 são matrizes hermitianas, isto é, os autovalores destas matrizes são reais e os autovetores de cada uma delas expandem completamente o espaço da representação. Poderemos então considerar os autovetores de J_z (que são também autovetores de J^2 pois J_z e J^2 comutam) como sendo os vetores de base do espaço da representação e denotaremos estes vetores como $|j, j_z\rangle$ tal que:

$$J^2 |j, j_z\rangle = j(j+1) |j, j_z\rangle$$

$$J_z |j, j_z\rangle = j_z |j, j_z\rangle$$

onde $j(j+1)$ e j_z são autovalores, com $j = (n-1)/2$ (onde n é a dimensão da representação)

e

$$-j \leq j_z \leq j \quad (j_z = -j, -j+1, \dots, j-1, j)$$

As representações, neste espaço a n dimensões, das matrizes de rotação em relação a estes eixos serão:

$$R_Z(\gamma)_{\ell, m} = \langle j, \ell | e^{-i\gamma J_Z} | j, m \rangle = e^{-i\gamma m} \delta_{\ell m} \quad (\text{i.é., a matriz}$$

é diagonal); isto porque

$$e^{-i\gamma J_Z} | j, m \rangle = e^{-i\gamma m} | j, m \rangle$$

e

$$R_Y(\beta)_{\ell, m} = d_{\ell, m}^j(\beta) = \langle j, \ell | e^{-i\beta J_Y} | j, m \rangle$$

em que a matriz d é conhecida como a matriz d de rotação reduzida.

A toda matriz de rotação $R(\alpha, \beta, \gamma)$ no espaço real a 3 dimensões corresponde uma matriz $D^j(\alpha, \beta, \gamma)$ no espaço $n(n = 2j + 1)$ cujos elementos denominados funções D são dados por:

$$\begin{aligned} D_{\ell, m}^j(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle j, \ell | e^{-i\alpha J_Z} e^{-i\beta J_Y} e^{-i\gamma J_Z} | j, m \rangle \\ &= e^{-i\ell\alpha - im\gamma} d_{\ell, m}^j(\beta) \end{aligned}$$

Como exemplo, estudaremos a representação bidimensional (correspondente a $j = 1/2$) cujos geradores J_X, J_Y e J_Z em termos das matrizes de Pauli σ_X, σ_Y e σ_Z serão dados por:

$$J_X = \frac{1}{2} \sigma_X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_Y = \frac{1}{2} \sigma_Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad J_Z = \frac{1}{2} \sigma_Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

para que as relações de comutação sejam satisfeitas.

$$\text{Teremos portanto } J^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então:

$$R_Y(\beta) = e^{-i\beta J_Y} = e^{-i \frac{\beta}{2} \sigma_Y} = \mathbb{1} - (i \frac{\beta}{2}) \sigma_Y + \frac{(i \frac{\beta}{2})^2}{2!} \sigma_Y^2 + \dots$$

Como $\sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ então $\sigma_Y^2 = \mathbb{1}$, $\sigma_Y^3 = \sigma_Y$, ..., $\sigma_Y^{2n} = \mathbb{1}$ e

$$\sigma_Y^{2n+1} = \sigma_Y, \text{ logo}$$

$$R_Y(\beta) = \mathbb{1} \left(1 + \frac{(i \frac{\beta}{2})^2}{2!} + \dots \right) - i\sigma_Y \left((\frac{\beta}{2}) + \frac{(\frac{\beta}{2})^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= \mathbb{1} \cdot \cos\beta/2 - i\sigma_Y \cdot \text{sen}\beta/2$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta/2 & -\text{sen}\beta/2 \\ \text{sen}\beta/2 & \cos\beta/2 \end{pmatrix} = d^{1/2}(\beta)$$

Daí resulta que

$$D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} D_{1/2, 1/2}^{1/2} & D_{1/2, -1/2}^{1/2} \\ D_{-1/2, 1/2}^{1/2} & D_{-1/2, -1/2}^{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos\beta/2 e^{-i\gamma/2} & -e^{-i\alpha/2} \text{sen}\beta/2 e^{i\gamma/2} \\ e^{i\alpha/2} \text{sen}\beta/2 e^{-i\gamma/2} & e^{i\alpha/2} \cos\beta/2 e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}$$

Observa-se que a expressão da matriz $D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$ tem a seguinte forma

$$D^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} A & -B^* \\ B & A^* \end{pmatrix} \text{ com } |A|^2 + |B|^2 = 1$$

Trata-se, portanto, de uma matriz unitária unimodular no espaço a 2 dimensões, isto é, é uma matriz de $SU(2)$.[†]

Vimos assim que toda rotação no espaço real a 3 dimensões admite uma representação por uma matriz pertencente a $SU(2)$.

Exercício 1.4

Sendo a matriz d de rotação reduzida para spin $j=1$ dada por

$$d^1 = \begin{pmatrix} (1+\cos\beta)/2 & -(\sin\beta)/\sqrt{2} & (1-\cos\beta)/2 \\ (\sin\beta)/\sqrt{2} & \cos\beta & -(\sin\beta)/\sqrt{2} \\ (1-\cos\beta)/2 & \sin\beta/\sqrt{2} & (1+\cos\beta)/2 \end{pmatrix}$$

calcule os geradores J_X, J_Y, J_Z e J^2

Apesar dos elementos $d_{k,m}^j(\beta)$ da matriz d dependerem somente de β , eles são funções trabalhosas para serem determinadas. É melhor e mais fácil consultar tabelas destas funções (para $j \leq 2$ vide tabela no Apêndice pág. 140) e usar suas propriedades e relações especiais para valores especiais.

Propriedades das funções D e alguns valores especiais

- 1) $d_{k,m}^j(\beta) = (-)^{k-m} d_{m,k}^j(\beta)$
- 2) $d_{-k,-m}^j(\beta) = (-)^{k-m} d_{k,m}^j(\beta)$
- 3) $d_{k,-m}^j(\beta) = (-)^{j+k} d_{k,m}^j(\pi-\beta)$
- 4) $d_{-k,-m}^j(\beta) = d_{m,k}^j(\beta) = d_{k,m}^j(-\beta)$

[†]SU(2) (Special Unitary Group em 2 dimensões)

O grupo unitário $U(n)$ é definido como o grupo de matrizes unitárias de dimensões $n \times n$ e o grupo especial unitário $SU(n)$ é o subgrupo de matrizes unitárias unimodulares

$$5) d_{k,m}^j(\beta) = (-1)^{j-k} d_{k,-m}^j(\pi-\beta) = (-1)^{j+m} d_{k,-m}^j(\pi+\beta)$$

$$6) d_{0,0}^\ell(\beta) = P_\ell(\cos\beta) \quad \ell = 0, 1, 2 \quad (\text{Polinômio de Legendre})$$

$$d_{m,0}^\ell(\beta) = (-1)^m \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \right]^{1/2} P_\ell^m(\cos\beta) \quad (\text{funções de Legendre associadas})$$

$$7) D_{m,0}^{\ell*}(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_m^\ell(\alpha, \beta) \quad (\text{funções harmônicas esféricas})$$

8) Ortogonalidade

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-1}^{+1} d(\cos\beta) \int_0^{2\pi} d\gamma D_{k',m'}^{j'*}(\alpha, \beta, \gamma) D_{k,m}^j(\alpha, \beta, \gamma) = \\ = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{kk'} \delta_{mm'}$$

e

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos\beta) d_{km}^{j'}(\beta) d_{km}^j(\beta) = \frac{2}{2j+1} \delta_{jj'}$$

9) As funções D formam um sistema completo.

Por exemplo, a função $f(\alpha, \beta, \gamma)$ que descreve a distribuição angular do decaimento de uma partícula em 3 outras, pode ser escrita como uma combinação linear das funções D tal que

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{j,k,m} a_{j,k,m} D_{k,m}^j(\alpha, \beta, \gamma)$$

onde $a_{j,k,m}$ são os coeficientes da expansão.

Definindo o D-momento da distribuição $f(\alpha, \beta, \gamma)$ como

$$\langle D_{k,m}^j \rangle = \iiint f(\alpha, \beta, \gamma) D_{k,m}^j(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d(\cos\beta) d\gamma$$

e usando a propriedade de ortogonalidade das funções D teremos

$$\langle D_{k',m'}^{j'} \rangle^* \equiv \iiint f(\alpha, \beta, \gamma) D_{k',m'}^{j'*}(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d(\cos\beta) d\gamma = \frac{8\pi^2}{2j'+1} a_{j',k',m'}$$

10) Clebsch-Gordon serie

$$D_{m_1, m_1}^{j_1}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2, m_2}^{j_2}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | jm' \rangle \times \\ \times D_{m, m}^j(\alpha, \beta, \gamma)$$

onde $m = m_1 + m_2$ e $m' = m_1' + m_2'$

e os coeficientes $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle$ são os coeficientes de Clebsch-Gordon. (Vide apêndice pág. 137)

Significado das funções D

Quando se faz no espaço a 3 dimensões uma transformação (por exemplo o sistema físico sobre uma rotação), então deve-se fazer uma transformação correspondente no espaço de Hilbert onde o estado do sistema está caracterizado pelo vetor $|\psi\rangle$. Esta transformação deve naturalmente ter as mesmas propriedades da transformação original no espaço a 3 dimensões. No nosso exemplo, em que o sistema físico sofre uma rotação (rotação ativa), o vetor de estado $|\psi\rangle$ será transformado no vetor $|\psi'\rangle$ por uma representação no espaço de Hilbert correspondente à rotação. Se a rotação no espaço a 3 dimensões for caracterizada pelos 3 ângulos de Euler (α, β, γ) em relação aos eixos fixos no espaço, então o vetor de estado $|\psi\rangle$ se transformará em $|\psi'\rangle$ da seguinte maneira:

$$|\psi'\rangle = R(\alpha, \beta, \gamma) |\psi\rangle = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} |\psi\rangle$$

onde J_x, J_y, J_z são os geradores da representação no espaço de Hilbert correspondente.

Quando $|\psi\rangle = |jm\rangle$ teremos:

$$|\psi'\rangle = R(\alpha, \beta, \gamma) |j; m\rangle = \sum_{k=-j}^{+j} |jk\rangle \langle jk | R(\alpha, \beta, \gamma) |jm\rangle = \sum_{k=-j}^j D_{km}^j(\alpha\beta\gamma) |jk\rangle$$

1.2 Estados Puros e Mistos

Na Mecânica Quântica assume-se que a qualquer grandeza observável (i.é., mensurável) de um sistema físico, corresponde um operador hermitiano A que age no espaço de Hilbert dos vetores de estado do sistema. Os autovetores $|m\rangle$ de A são ortogonais e formam um sistema completo (i.é., podem ser considerados como vetores de base para o espaço) e os autovalores α_m da observável correspondente são números reais e são as medidas da grandeza.

Assim

$$A|m\rangle = \alpha_m|m\rangle$$

Operadores que comutam têm os mesmos autovetores. Ao se medir a grandeza que corresponde ao operador A , o autovalor α_m é obtido com uma probabilidade que é igual ao quadrado absoluto da projeção do vetor estado $|\psi\rangle$ em relação ao autovetor $|m\rangle$ que corresponde a α_m (isto é $|\langle m|\psi\rangle|^2$).

No caso em que $|\psi\rangle$ tiver a direção de $|m\rangle$ o autovalor correspondente α_m será medido com probabilidade 1.

Um conjunto completo de observáveis comutáveis corresponde a um conjunto de grandezas mensuráveis simultaneamente. O estado do sistema fica completamente determinado quando se determina este conjunto completo de observáveis. O sistema pode ser representado por um único vetor de estado no espaço de Hilbert. Trata-se, neste caso, de um estado puro. Entretanto, pode acontecer que a informação sobre o sistema é incompleta (por exemplo quando se tem um feixe de partículas em estados quânticos não idênticos). O sistema será, então, descrito por diferentes vetores de esta-

do $|\psi_i\rangle$ através de probabilidades p_i que o sistema seja descrito pelo vetor de estado $|\psi_i\rangle$. Diz-se, neste caso, que o sistema está num estado misto. Naturalmente, teremos que ter $\sum p_i = 1$.

Quando o sistema físico está no estado misto caracterizado pelas probabilidades p_i relativas aos vetores de estado $|\psi_i\rangle$ o valor médio das grandezas físicas mensuráveis será obtido através do conhecimento do operador densidade ρ definido como

$$\rho = \sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i|$$

O operador densidade para o sistema físico no estado puro será particularmente simples, a saber: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. O valor médio da observável A correspondente ao operador A será:

$$\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \quad \text{para o estado puro}$$

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle \quad \text{para o estado misto.}$$

Em termos dos vetores base $|m\rangle$ no espaço de Hilbert, o operador densidade será representado pela matriz densidade ρ cujos elementos $\rho_{m',m}$ são dados por

$$\rho_{m',m} = \langle m'|\rho|m\rangle = \langle m'|\sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i|m\rangle$$

Escrevendo $|\psi_i\rangle = \sum_m \langle m|\psi_i\rangle |m\rangle$ teremos

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i p_i \sum_{m',m} \langle\psi_i|m'\rangle \langle m'|A|m\rangle \langle m|\psi_i\rangle \\ &= \sum_{m',m} \rho_{mm'} A_{m',m} = \text{Tr}(\rho A) \end{aligned}$$

onde Tr significa o traço da matriz.

Propriedades da matriz densidade

- 1) $\text{Tr}(\rho) = 1$ (porque fazendo $A = 1$ em $\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$ tem-se $\langle 1 \rangle = 1 = \text{Tr}(\rho)$)
- 2) $\rho = \rho^\dagger$, isto é, $\rho_{ik}^* = \rho_{ki}$ (porque ρ_{ik} são reais)
- 3) $\text{Tr}(\rho^2) \leq 1$ ($\text{Tr}(\rho^2) = 1$ para estados puros)
- 4) A matriz densidade de dimensão $n \times n$ possui $n^2 - 1$ parâmetros reais independentes. De fato, como seus elementos são quantidades complexas, os $2n^2$ parâmetros reais que seriam necessários se reduzirão a $n^2 - 1$ pelo fato de se ter $\rho = \rho^\dagger$ e $\text{Tr}(\rho) = 1$.

Exemplo

Consideremos um feixe de elétrons (partícula de spin $1/2$) em que não sabemos qual é a terceira componente de spin. Utilizaremos o formalismo da matriz densidade no espaço de spin.

O espaço de spin (2 dimensões) será gerado pelos vetores:

$$|j, j_z\rangle = |1/2, 1/2\rangle \equiv |+\rangle \quad \text{e} \quad |1/2, -1/2\rangle \equiv |-\rangle$$

Consideremos o estado misto caracterizado pelos vetores de estado ortogonais

$$|\psi_1\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle \quad \text{com probabilidade } p_1$$

e

$$|\psi_2\rangle = b^*|+\rangle - a^*|-\rangle \quad \text{com probabilidade } p_2 = 1 - p_1 \text{ tal}$$

$$\text{que } |a|^2 + |b|^2 = 1$$

De fato, estes vetores de estado $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ são ortonormais pois

$$\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = |b|^2 + |a|^2 = 1$$

e
$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = ba \langle + | + \rangle - ab \langle - | - \rangle = 0$$

O operador densidade será dado por

$$p_1 |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + p_2 |\psi_2\rangle \langle \psi_2|$$

A matriz densidade será dada por

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{1/2,1/2} & \rho_{1/2,-1/2} \\ \rho_{-1/2,1/2} & \rho_{-1/2,-1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 |a|^2 + p_2 |b|^2 & (p_1 - p_2) ab^* \\ (p_1 - p_2) a^* b & p_1 |b|^2 + p_2 |a|^2 \end{pmatrix}$$

Para um estado puro ter-se-ia $p_1 = 1$ e $p_2 = 0$ (ou $p_1 = 0$ e $p_2 = 1$). Os valores esperados para o spin da partícula serão

$$\langle J_X \rangle = \text{Tr}(J_X \rho) = \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = (p_1 - p_2) \text{Re}(a^* b)$$

$$\langle J_Y \rangle = \text{Tr}(J_Y \rho) = \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = (p_1 - p_2) \text{Im}(a^* b)$$

$$\langle J_Z \rangle = \text{Tr}(J_Z \rho) = \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (p_1 - p_2) (|a|^2 - |b|^2)$$

Para spin $j = 1/2$, o vetor polarização \vec{P} é definido como

$$\vec{P} = 2 \langle \vec{J} \rangle$$

Então

$$\begin{aligned} |\vec{P}|^2 &= 4(\langle J_X \rangle^2 + \langle J_Y \rangle^2 + \langle J_Z \rangle^2) \\ &= (p_1 - p_2)^2 \left[(|a|^2 - |b|^2)^2 + 4(\operatorname{Re}(a^*b))^2 + 4(\operatorname{Im}(a^*b))^2 \right] \end{aligned}$$

e como $|a|^2 |b|^2 = (\operatorname{Re}(a^*b))^2 + (\operatorname{Im}(a^*b))^2$ temos

$$|\vec{P}|^2 = (p_1 - p_2)^2 \left[(|a|^2 + |b|^2)^2 \right] = (p_1 - p_2)^2$$

ou

$$|\vec{P}| = |(p_1 - p_2)|$$

e daí $0 \leq |\vec{P}| \leq 1$.

Num estado não polarizado temos $p_1 = p_2$, isto é $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são igualmente prováveis e portanto, $|\vec{P}| = 0$ e num estado puro temos $p_2 = 0$ (ou $p_1 = 0$), e portanto, $|\vec{P}| = 1$.

Para spin $1/2$, a matriz densidade tem 3 parâmetros independentes e portanto pode ser expressa pelas 3 componentes do vetor polarização \vec{P} da seguinte maneira

$$\rho_{\ell m} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + 2 \vec{P} \cdot \vec{J})_{\ell m}$$

De fato, usando esta definição em $\vec{P} = 2\langle \vec{J} \rangle$ temos

$$P_i = 2\langle J_i \rangle = 2\operatorname{Tr}(\rho J_i) = \operatorname{Tr}(J_i + 2 \sum_j P_j J_j J_i) = 2 P_i \operatorname{Tr}(J_i^2) = P_i$$

Exercício 1.5

Qual é a forma das matrizes densidades para spin l e para spin $3/2$ e quantos parâmetros independentes tem estas matrizes, supondo que elas satisfazem às seguintes igualdades

$$a) \rho_{m,m'} = (-)^{m-m'} \rho_{-m,-m'}$$

$$b) \rho_{m,m'} = (-)^{m-m'} \rho_{m,m'}$$

Veremos mais tarde que estas igualdades serão satisfeitas no caso de conservação da paridade em processos de produção em reações entre partículas elementares.

Tensores Estatísticos

Trataremos a seguir somente de estados mistos de spin. Vimos que os estados mistos podem ser descritos pela matriz densidade. Em vez de usarmos a matriz densidade existe a possibilidade de descrevê-los pelos tensores estatísticos.

Em relação ao spin j com $-j \leq m, m' \leq j$ definimos o tensor estatístico T_M^J como

$$T_M^J = \sum_{mm'} (-)^{j+m-J} \langle j-mjm' | JM \rangle \rho_{m,m'}$$

onde $\langle j-mjm' | JM \rangle$ são os coeficientes de Clebsch-Gordon e portanto

$$0 \leq J \leq 2j$$

$$-J \leq M \leq J$$

Usando a propriedade (para as propriedades dos coeficientes de Clebsch-Gordon vide o apêndice pág. 138)

$$\langle j-mjm' | JM \rangle = (-)^{J-2j} \langle jm'j-m | JM \rangle$$

podemos escrever

$$T_M^J = \sum_{mm'} (-)^{j-m} \langle jm'j-m | JM \rangle \rho_{m,m'}$$

A matriz densidade ρ^j teria $(2j+1)^2$ elementos independentes se não tivéssemos a propriedade $\text{Tr}(\rho) = 1$.

Existem $\sum_0^{2j} (2J+1) = (2j+1)^2$ diferentes tensores estatísticos T_M^J . Portanto, poderemos escrever os elementos $\rho_{mm'}$, da matriz densidade através dos tensores estatísticos na seguinte forma

$$\rho_{m,m'} = \sum_{JM} (-)^{j-m} \langle jm'j-m | JM \rangle T_M^J$$

e usando a propriedade acima referida dos coeficientes de Clebsch-Gordon temos,

$$\rho_{m,m'} = \sum_{JM} (-)^{J-j-m} \langle j-mjm' | JM \rangle T_M^J$$

De fato, substituindo T_M^J pela expressão definida acima temos

$$\begin{aligned} & \sum_{JM} (-)^{j-m} \langle jm'j-m | JM \rangle \sum_{nn'} (-)^{j-n} \langle jn'j-n | JM \rangle \rho_{n,n'} \\ &= \sum_{nn'} (-)^{m-n} \rho_{nn'} \sum_{JM} \langle jm'j-m | JM \rangle \langle jn'j-n | JM \rangle \end{aligned}$$

Pela propriedade de ortogonalidade dos coeficientes de Clebsch - Gordon, i.ê.

$$\sum_{JM} \langle jm'j-m | JM \rangle \langle jn'j-n | JM \rangle = \delta_{m'n'} \delta_{-m-n}$$

podemos escrever a relação acima como:

$$\sum_{nn'} (-)^{m-n} \rho_{n,n'} \delta_{m'n'} \delta_{mn} = \rho_{m,m'}$$

Das propriedades da matriz densidade podemos concluir algumas propriedades dos tensores estatísticos:

Propriedade 1

Como $\text{Tr}(\rho) = 1$ temos $T_0^0 = 1/\sqrt{2j+1}$

De fato

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_m \rho_{m,m} = \sum_{JMm} (-)^{j-m} \langle jmj-m | JM \rangle T_M^J$$

e como neste caso $M = 0$, temos

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_j T_0^J \sum_m (-)^{j-m} \langle jmj-m | J0 \rangle .$$

Como

$$\langle jmj-m | 00 \rangle = \frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}} \langle 00j-m | j-m \rangle = \frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}}$$

temos

(vide apêndice pág. 138)

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho) &= \sum_j T_0^J \sqrt{2j+1} \sum_m \langle jmj-m | 00 \rangle \langle jmj-m | J0 \rangle \\ &= \sum_j T_0^J \sqrt{2j+1} \delta_{J0} = T_0^0 \sqrt{2j+1} , \end{aligned}$$

e

$$\text{Tr}(\rho) = 1$$

implica

$$T_0^0 = 1/\sqrt{2j+1} \text{ C.Q.D.}$$

Propriedade 2

Como $\rho = \rho^+$ temos $T_M^{J*} = (-)^M T_{-M}^J$

De fato,

$$T_M^{J*} = \sum_{mm'} (-)^{j-m} \langle jm' j-m | JM \rangle \rho_{m,m}^*$$

e como

$$\rho_{m,m'}^* = \rho_{m',m} \quad , \quad M = m'-m$$

e

$$\langle jm' j-m | JM \rangle = \langle jm j-m' | J-M \rangle$$

teremos

$$\begin{aligned} T_M^{J*} &= \sum_{mm'} (-)^{j-m'+M} \langle jm j-m' | J-M \rangle \rho_{m',m} = \\ &= (-)^M \sum_{mm'} (-)^{j-m'} \langle jm j-m' | J-M \rangle \rho_{m',m} = (-)^M T_{-M}^J \end{aligned}$$

Propriedade 3

Quando o sistema físico sofre uma rotação R, i.e.,

$$|\psi(R)\rangle = R|\psi\rangle$$

os elementos da matriz densidade $\rho_{m,m}$ sofrerão a seguinte transformação:

$$\rho_{mm'}(R) = \sum_{kl} D_{mk}^j(R) \rho_{kl} D_{m',l}^{j*}(R)$$

De fato, o efeito da rotação R sobre o operador densidade ρ será

$$\rho(R) = R\rho R^\dagger$$

Teremos então para os elementos $\rho_{mm'}$,

$$\begin{aligned} \rho_{mm'}(R) &= \langle jm | \sum_i R |\psi_i\rangle p_i \langle \psi_i | R^\dagger | jm' \rangle \\ &= \sum_{ikl} p_i \langle jm | R | jk \rangle \langle jk | \psi_i \rangle \langle \psi_i | j\ell \rangle \langle j\ell | R^\dagger | jm' \rangle . \end{aligned}$$

Como

$$\langle jm | R | jk \rangle = D_{mk}^j(R)$$

e

$$\langle j\ell | R^\dagger | jm' \rangle = \langle jm' | R | j\ell \rangle^* = D_{m',\ell}^{j*}(R)$$

podemos escrever

$$\rho_{mm'}(R) = \sum_{k\ell} D_{mk}^j(R) \rho_{k\ell} D_{m',\ell}^{j*}(R) \quad \text{C.Q.D.}$$

Analogamente os tensores estatísticos sofrerão a seguinte transformação:

$$T_M^J(R) = \sum_L D_{ML}^{J*}(R) T_L^J$$

De fato,

$$T_M^J(R) = \sum_{mm'} (-)^{j-m} \langle jm' j-m | JM \rangle \sum_{k\ell} D_{mk}^j(R) \rho_{k\ell} D_{m',\ell}^{j*}(R)$$

$$M = m' - m$$

e como

$$D_{mk}^j(R) D_{m',\ell}^{j*}(R) = (-)^{\ell-m'} \sum_{S=0}^{2j} \langle jm j-m' | S-M \rangle \langle jk j-\ell | S k-\ell \rangle D_{-M, k-\ell}^S(R)$$

(propriedade das funções D)

$$\langle jm j-m' | S-M \rangle = \langle jm' j-m | S M \rangle$$

e

$$\sum_{mm'} \langle jm' j-m | SM \rangle \langle jm' j-m | JM \rangle = \delta_{SJ}$$

podemos escrever

$$T_M^J(R) = \sum_{k\ell} (-)^{\ell-m'-j+m} \langle jk j-\ell | J, k-\ell \rangle D_{-M, k-\ell}^J(R) \rho_{k\ell}$$

Como $M = m' - m$ e chamando $L = \ell - k$ teremos

$$T_M^J(R) = \sum_{k\ell} (-)^{\ell - M - j} \langle jk \ j - \ell | J, -L \rangle D_{-M, -L}^J(R) \rho_{k\ell}$$

Como

$$D_{-M, -L}^J(R) = (-)^{M-L} D_{ML}^{J*}(R) \quad \text{e} \quad \langle jk \ j - \ell | J, -L \rangle = \langle j\ell \ j - k | JL \rangle$$

e L só pode ter o valor $\ell - k$, podemos escrever

$$\begin{aligned} T_M^J(R) &= \sum_{Lk\ell} (-)^{j-k} \langle j\ell \ j - k | JL \rangle D_{ML}^{J*}(R) \rho_{k\ell} \\ &= \sum_L D_{ML}^{J*}(R) T_L^J \quad \text{C.Q.D.} \end{aligned}$$

Como se pode observar, ao se fazer uma rotação do sistema físico, os tensores estatísticos se comportam de maneira bem mais simples que os elementos da matriz densidade.

Pode-se ver o significado dos tensores estatísticos pelo seu comportamento nas rotações. Os tensores estatísticos se comportam da mesma maneira como as representações do grupo das rotações. A decomposição da matriz densidade em tensores estatísticos significa portanto uma decomposição da matriz densidade em representações irredutíveis do grupo das rotações.

Exercício 1.6

Considere a reação $K^- p \rightarrow K^{*0} n$ e suponha que a matriz densidade para a partícula K^{*0} (de spin 1) no sistema de Gottfried - Jackson (sistema em repouso do K^{*0} com eixo z na direção do feixe K^- , o eixo y perpendicular ao plano de produção e o eixo $\vec{x} = \vec{y} \times \vec{z}$) seja dada por:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine a matriz densidade correspondente no sistema de helicidade (sistema em repouso do K^{*0} com o eixo z na direção oposta à do neutron que sai da reação, o eixo y como no sistema de Gottfried-Jackson e o eixo $\vec{x} = \vec{y} \times \vec{z}$) nos seguintes casos:

- a) o eixo y tem a direção $\vec{y} = \vec{n} \times \vec{f}$ (onde \vec{n} , \vec{f} são, respectivamente, as direções do neutron e feixe);
- b) o eixo y tem a direção $\vec{y} = \vec{f} \times \vec{n}$.

Exercício 1.7

Considere a reação $\pi^+ p \rightarrow \pi^0 \Delta^{++}$ e suponha que a matriz densidade para a partícula Δ^{++} (spin 3/2) no sistema de transversidade (sistema em repouso do Δ^{++} com o eixo z perpendicular ao plano de produção, digamos $\vec{z} = \vec{\pi}^0 \times \vec{p}$, o eixo y na direção oposta ao do próton inicial e $\vec{x} = \vec{y} \times \vec{z}$) seja dada por:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine a matriz densidade correspondente no sistema de Gottfried-Jackson (sistema em repouso do Δ^{++} , $\vec{z} = \vec{p}$, $\vec{y} = \vec{\pi}^0 \times \vec{p}$ e $\vec{x} = \vec{y} \times \vec{z}$).

Exercício 1.8

Considerando que a relação $\rho_{mm'} = (-)^{m-m'} \rho_{-m, -m'}$, é válida no sistema de helicidade,

- a) prove que ela será válida em qualquer sistema obtido pela rotação do eixo y (por exemplo no sistema de Gottfried-Jackson);
- b) indique qual será a relação num sistema onde o eixo z é perpendicular ao plano de produção (sistema de transversidade).

Propriedade 4

Quando em certas condições a matriz densidade satisfizer uma determinada relação, existirá para os tensores estatísticos u ma relação correspondente.

Exercício 1.9

Prove que:

a) se $\rho_{mm'} = (-)^{m-m'} \rho_{-m, -m'}$, então $T_M^J = (-)^{J-M} T_{-M}^J$

b) se $\rho_{mm'} = (-)^{m-m'} \rho_{mm'}$, então $T_M^J = (-)^M T_M^J$

Propriedade 5

A distribuição angular do decaimento de uma partícula em 2 outras está relacionada aos tensores estatísticos (da partícula que decai) de uma maneira muito mais simples que aos elementos da matriz densidade correspondente.

Como exemplo estudaremos o decaimento de uma partícula (com elementos $\rho_{mm'}$, da matriz densidade ou seus tensores estatís

ticos T_M^J) em duas outras de spin zero. Veremos mais tarde que a distribuição angular $W(\theta, \phi)$ no sistema em repouso da partícula que decai poderá ser descrita como

$$W(\theta, \phi) = \sum_{mm'} \rho_{m,m'} Y_m^j Y_{m'}^{j*}$$

onde

$$Y_m^j = Y_m^j(\theta, \phi)$$

são as funções harmônicas esféricas.

Substituindo $\rho_{mm'}$ em função de T_M^J teremos

$$W(\theta, \phi) = \sum_{mm'} Y_m^j Y_{m'}^{j*} \sum_{JM} (-)^{j-m} \langle jm' j-m | JM \rangle T_M^J$$

Como

$$Y_{m'}^{j*} = (-)^{m'} Y_{-m'}^j, \quad M = m' - m$$

$$Y_m^j Y_{-m'}^j = \sum_{LN} \frac{2j+1}{\sqrt{4\pi(2L+1)}} \langle jm j-m' | LN \rangle \langle j0 j0 | L0 \rangle Y_N^L$$

e

$$\langle jm j-m' | LN \rangle = \langle jm' j-m | L-N \rangle$$

teremos

$$W(\theta, \phi) = \sum_{JM} \sum_{LN} (-)^{j+M} \frac{2j+1}{\sqrt{4\pi(2L+1)}} Y_N^L \langle j0 j0 | L0 \rangle T_M^J \times \\ \times \sum_{mm'} \langle jm' j-m | JM \rangle \langle jm' j-m | L-N \rangle$$

Sendo

$$\sum_{mm'} \langle jm' j-m | JM \rangle \langle jm' j-m | L-N \rangle = \delta_{JL} \delta_{M-N}$$

teremos

$$W(\theta, \phi) = \sum_{JM} (-)^j \frac{2j+1}{\sqrt{4\pi(2J+1)}} \langle j0j0 | J0 \rangle T_M^J Y_M^{J*}$$

Escrevendo

$$F(J) = (-)^j \frac{2j+1}{\sqrt{4\pi(2J+1)}} \langle j0j0 | J0 \rangle$$

obtemos

$$W(\theta, \phi) = \sum_{JM} F(J) Y_M^{J*} T_M^J$$

que é uma relação bem mais simples que a com os elementos da matriz densidade.

Os tensores estatísticos podem ser facilmente determinados através do cálculo dos momentos.

De fato, sendo

$$\langle Y_M^J \rangle = \iint W(\theta, \phi) Y_M^J d(\cos\theta)d\phi$$

podemos escrever

$$\langle Y_M^J \rangle = \iint \sum_{J'M'} F(J') T_{M'}^{J'} Y_{M'}^{J'*} Y_M^J d(\cos\theta)d\phi$$

Da ortogonalidade das funções harmônicas esféricas, isto é

$$\iint Y_{M'}^{J'*} Y_M^J d(\cos\theta)d\phi = \delta_{M'M} \delta_{J'J}$$

concluimos

$$\langle Y_M^J \rangle = F(J) T_M^J$$

Exercício 1.10

Supondo que $W(\theta, \phi) = \sum_{mm'} \rho_{mm'} Y_m^j Y_{m'}^{j*}$, onde Y_m^j são as funções har-

mônicas esféricas, qual é a relação de simetria válida para a distribuição angular $W(\theta, \phi)$

- a) quando $\rho_{mm'} = (-)^{m-m'} \rho_{-m-m'}$
- b) quando $\rho_{mm'} = (-)^{m-m'} \rho_{mm'}$
- c) que resulta de $\rho = \rho^+$
- d) que resulta de $Y_m^j(\theta, \phi) = (-)^j Y_m^j(\pi-\theta, \pi+\phi)$

Significado dos tensores Estatísticos

Como já foi dito, a decomposição da matriz densidade em tensores estatísticos significa a decomposição da matriz densidade em representações do grupo das rotações. Estudaremos agora, detalhadamente, este aspecto.

Definimos o operador Q_M^J cujos elementos de matriz são dados por:

$$(Q_M^J)_{m'm} = (-)^{j-m} \langle jm' j-m | JM \rangle$$

e portanto a sua transposta conjugada será:

$$\begin{aligned} (Q_M^J)_{m'm}^+ &= (Q_M^J)_{mm'}^* = (-)^{j-m'} \langle jm j-m' | JM \rangle \\ &= (-)^{j+M-m} \langle jm' j-m | J-M \rangle = (-)^M (Q_{-M}^J)_{m'm} \end{aligned}$$

Como

$$T_M^J = \sum_{mm'} (-)^{j-m} \langle jm' j-m | JM \rangle \rho_{m,m'}$$

teremos

$$T_M^J = \sum_{mm'} (Q_M^J)_{m'm} \rho_{mm'} = \text{Tr}(Q_M^J \rho) = \langle Q_M^J \rangle ,$$

isto é, o tensor estatístico T_M^J é o valor médio do operador Q_M^J .

Como

$$\rho_{mm'} = \sum_{JM} (-)^{j-m} \langle jm' j-m | JM \rangle T_M^J$$

e

$$T_M^J = (-)^M T_{-M}^{J*}$$

temos

$$\begin{aligned} \rho_{mm'} &= \sum_{JM} (Q_M^J)_{m'm} (-)^M T_{-M}^{J*} = \sum_{JM} (Q_{-M}^J)_{m'm} (-)^M T_M^{J*} \\ &= \sum_{JM} (Q_M^J)_{mm'} \langle Q_M^J \rangle^* \end{aligned}$$

Propriedades do operador Q_M^J

$$1) \text{Tr}(Q_M^J) = \sqrt{2j+1} \delta_{J0} \delta_{M0}$$

De fato:

$$\text{Tr}(Q_M^J) = \sum_m (-)^{j-m} \langle jm j-m | JM \rangle$$

e como

$$\langle jm j-m | 00 \rangle = \frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}} \quad (\text{vide apêndice pág. 138})$$

temos

$$\text{Tr}(Q_M^J) = \sqrt{2j+1} \sum_m \langle jm j-m | JM \rangle \langle jm j-m | 00 \rangle = \sqrt{2j+1} \delta_{J0} \delta_{M0}$$

$$2) \text{Tr}(Q_M^{J+} \cdot Q_{M'}^{J'}) = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (\text{ortogonalidade})$$

De fato:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(Q_M^{J+} \cdot Q_{M'}^{J'}) &= \sum_{mm'} (-)^{j-m'} \langle jm j-m' | JM \rangle (-)^{j-m} \langle jm j-m' | J'M' \rangle = \\ &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \end{aligned}$$

Calculemos o valor do operador Q_M^J para valores de $J=0$ e 1

$J = 0$

$$(Q_0^0)_{mm'} = (-)^{j-m'} \langle jmj-m' | 00 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \delta_{mm'}$$

$$(Q_0^0)_{mm'} \times \langle Q_0^0 \rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \delta_{mm'} \quad T_0^{0*} = \frac{1}{2j+1} \delta_{mm'}$$

$J = 1$

$$(Q_M^1)_{mm'} = (-)^{j-m'} \langle jmj-m' | 1M \rangle$$

Como

$$\begin{aligned} \langle jmj-m' | 1M \rangle &= (-)^{j-m'} \sqrt{\frac{3}{2j+1}} \langle 1-Mj-m' | j-m \rangle = \\ &= (-)^{j-m'} \sqrt{\frac{3}{2j+1}} \langle jm' 1M | jm \rangle \end{aligned}$$

teremos

$$(Q_M^1)_{mm'} = \sqrt{\frac{3}{2j+1}} \langle jm' 1M | jm \rangle$$

Para $M = 0$,

$$(Q_0^1)_{mm'} = \sqrt{\frac{3}{2j+1}} \langle jm' 10 | jm \rangle = \sqrt{\frac{3}{(2j+1)j(j+1)}} m \delta_{mm'}$$

Como $(J_z)_{mm'} = m \delta_{mm'}$, podemos escrever

$$(Q_0^1)_{mm'} = \sqrt{\frac{3}{(2j+1)j(j+1)}} (J_z)_{mm'}$$

Da mesma forma

$$(Q_1^1)_{mm'} = -\sqrt{\frac{3}{(2j+1)2j(j+1)}} (J_+)_{mm'}$$

e

$$(Q_{-1}^1)_{mm'} = \sqrt{\frac{3}{(2j+1)2j(j+1)}} (J_-)_{mm'}$$

onde $J_{\pm} = J_x \pm J_y$

Portanto

$$T_0^1 = \langle Q_0^1 \rangle = \sqrt{\frac{3}{(2j+1)j(j+1)}} \langle J_z \rangle$$

$$T_{\pm 1}^1 = \langle Q_{\pm 1}^1 \rangle = \mp \sqrt{\frac{3}{(2j+1)2j(j+1)}} \langle J_{\pm} \rangle$$

Observamos que os tensores estatísticos para $J=1$ são essencialmente os valores médios das componentes do momento angular.

Definimos o vetor polarização como

$$\vec{P} = \sqrt{\frac{3}{2j^2 \cdot (j+1)}} \langle \vec{J} \rangle ;$$

em particular $\vec{P} = 2\langle \vec{J} \rangle$ no caso $j = 1/2$ e $\vec{P} = \sqrt{3}/2 \cdot \langle \vec{J} \rangle$ no caso $j = 1$.

Desta definição resulta:

$$\sum_M \langle Q_M^1 \rangle^* (Q_M^1)_{mm'} = \frac{1}{2j+1} \sqrt{\frac{6}{j+1}} \vec{P} \cdot (\vec{J})_{mm'}$$

De fato

$$\begin{aligned} \sum_M \langle Q_M^1 \rangle^* (Q_M^1)_{mm'} &= \frac{3}{(2j+1)j(j+1)} \left[\langle J_z \rangle^* (J_z)_{mm'} + \frac{1}{2} \langle J_+ \rangle^* (J_+)_{mm'} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \langle J_- \rangle^* (J_-)_{mm'} \right] = \\ &= \frac{3}{(2j+1)j(j+1)} \left[\langle J_z \rangle^* (J_z)_{mm'} + \langle J_x \rangle^* (J_x)_{mm'} + \langle J_y \rangle^* (J_y)_{mm'} \right] \\ &= \frac{3}{(2j+1)j(j+1)} \left[\langle \vec{J} \rangle \cdot (\vec{J})_{mm'} \right] \end{aligned}$$

e portanto

$$\sum_M \langle Q_M^1 \rangle^* (Q_M^1)_{mm'} = \frac{1}{2j+1} \sqrt{\frac{6}{j+1}} \vec{P} \cdot (\vec{J})_{mm'}$$

Exercício 1.11

Usando as relações

$$\text{Tr}(J_i J_k) = \frac{1}{3} (2j+1)j(j+1)\delta_{ik}$$

e

$$\text{Tr}(J_i) = 0$$

onde $i, k \in \{x, y, z\}$, prove que

$$0 \leq |\vec{P}| \leq 1$$

Generalização da Matriz Densidade e dos Tensores Estatísticos

Dois casos serão aqui tratados:

a) Consideremos um sistema constituído por duas partículas (1) e (2) de spins j_1 e j_2 respectivamente. Sejam ρ^{j_1} e ρ^{j_2} as matrizes densidade de cada uma das partículas em relação ao seu sistema em repouso.

A matriz densidade do sistema constituído pelas duas partículas é definida como

$$\rho = \rho^{j_1} \otimes \rho^{j_2},$$

tem dimensão $(2j_1+1) \cdot (2j_2+1)$ e é denominada matriz densidade combinada (joint density matrix).

No lugar da matriz densidade podemos usar os tensores estatísticos definidos como

$$T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2} = \sum_{\substack{mm' \\ nn'}} (-)^{j_1 - m + j_2 - n} \langle j_1 m' j_1 - m | J_1 M_1 \rangle \langle j_2 n' j_2 - n | J_2 M_2 \rangle \rho_{nn'}^{mm'}$$

e a relação inversa será

$$\rho_{nn'}^{mm'} = \sum_{\substack{J_1 M_1 \\ J_2 M_2}} (-)^{j_1 - m + j_2 - n} \langle j_1 m' j_1 - m | J_1 M_1 \rangle \langle j_2 n' j_2 - n | J_2 M_2 \rangle T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2}$$

As propriedades dos tensores estatísticos e da matriz densidade para o sistema de 2 partículas são semelhantes ao caso de uma partícula com spin j tratado anteriormente

1) Como $\text{Tr}(\rho) = 1$ temos $T_{00}^{00} = 1 / (\sqrt{2j_1+1} \cdot \sqrt{2j_2+1})$

2) A matriz densidade para a partícula (2) será $\rho_{nn'} = \sum_m \rho_{nn'}^{mm}$ e portanto o tensor estatístico correspondente será

$$T_{0M_2}^{0J_2} = \frac{1}{\sqrt{2j_1+1}} T_{M_2}^{J_2}$$

Analogamente se obtém a matriz densidade e o tensor estatístico para a partícula (1).

3) Como $\rho = \rho^+$ temos

$$(T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2})^* = (-)^{M_1 + M_2} T_{-M_1 -M_2}^{J_1 J_2}$$

4) Se $\rho_{nn'}^{mm'} = (-)^{m-m'+n-n'} \rho_{-n-n'}^{-m-m'}$ então $T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2} = (-)^{J_1 - M_1 + J_2 - M_2} T_{-M_1 -M_2}^{J_1 J_2}$

Se $\rho_{nn'}^{mm'} = (-)^{m-m'+n-n'} \rho_{nn'}^{mm'}$ então $T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2} = (-)^{M_1 + M_2} T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2}$

5) Os efeitos causados por rotações R_1 e R_2 serão:

$$\rho_{nn'}^{mm'}(R_1 R_2) = \sum_{\substack{kk' \\ \ell\ell'}} D_{mk}^{j_1}(R_1) D_{n\ell}^{j_2}(R_2) \rho_{\ell\ell'}^{kk'} D_{m'k'}^{j_1*}(R_1) D_{n'\ell'}^{j_2*}(R_2)$$

e

$$T_{M_1 M_2}^{J_1 J_2}(R_1 R_2) = \sum_{L_1 L_2} D_{M_1 L_1}^{J_1*}(R_1) D_{M_2 L_2}^{J_2*}(R_2) T_{L_1 L_2}^{J_1 J_2}$$

Exercício 1.12

Prove as relações acima referidas

b) Consideremos o caso em que o spin do sistema composto por 2 partículas não é conhecido, por exemplo, o sistema $\pi^+\pi^-$ com estados interferentes das partículas ρ e ϵ . Neste caso existem também tensores estatísticos que são denominados tensores estatísticos parciais e definidos como:

$$T_M^J(j, j') = \sum_{mm'} (-)^{j'-m} \langle j'm' j-m | JM \rangle \rho_{jm, j'm'}$$

onde

$$\rho_{jm, j'm'} = \langle jm | \rho | j'm' \rangle$$

Inversamente poderemos escrever

$$\rho_{jm, j'm'} = \sum_{JM} (-)^{j'-m} \langle j'm', j-m | JM \rangle T_M^J(j, j')$$

Como $\rho = \rho^+$ temos

$$T_M^J(j, j')^* = (-)^{j-j'+M} T_{-M}^J(j', j)$$

Os tensores estatísticos parciais tem também propriedades análogas às deduzidas anteriormente para os tensores estatísticos.

Vimos que os tensores estatísticos podem ser facilmente determinados através da distribuição angular no caso do decaimento de uma partícula em duas outras de spin zero. Entretanto, neste caso, os tensores estatísticos parciais não podem ser determinados individualmente.

As fórmulas correspondentes são:

$$\begin{aligned}
 W(\theta, \phi) &= \sum_{jj', mm'} \rho_{jm, j'm'} Y_m^j (Y_{m'}^{j'})^* \\
 &= \sum_{JM} \sum_{jj'} F_{jj'}(J) T_M^J(j, j') (Y_M^J)^* \\
 \langle Y_M^J \rangle &= \sum_{jj'} F_{jj'}(J) T_M^J(j, j')
 \end{aligned}$$

onde $F_{jj'}$ é uma função conhecida.

Portanto do cálculo do momento pode-se determinar somente a soma dos tensores estatísticos parciais e não seus valores individuais.

1.3 - Formalismo do Espalhamento

Consideremos uma reação entre as partículas a e b em que o estado final é composto pelo sistema de partículas cde...., isto é,



Na mecânica quântica o comportamento dinâmico de um sistema é determinado quando se conhece o operador Hamiltoniano (hermitiano) H do sistema. A equação de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

onde $|\psi(t)\rangle$ é o vetor de estado do sistema, descreverá o desenvolvimento temporal do sistema.

Restringiremos ao estudo de interações fortes, e para estas não se conhece H.

Nas interações eletromagnéticas e fracas se conhece H e através do cálculo das perturbações procura-se obter soluções da equação de Schrödinger. Nas interações fortes, entretanto, o cálculo

lo das perturbações torna-se sem sentido uma vez que a constante de acoplamento é grande.

No estudo de interações fortes trabalha-se com outro método que, em vez de procurar o mecanismo detalhado da interação, observa o resultado do espalhamento. Utiliza-se o formalismo da matriz S. Como a interação forte é uma interação de pequeno alcance, as duas partículas iniciais a e b podem ser consideradas num instante bem anterior ($t = -\infty$) à interação como não afetadas pela interação e podem ser descritas por estados livres (isto é, por ondas planas). Do mesmo modo, as partículas finais c, d, e... podem ser consideradas num instante bem posterior ($t = +\infty$) à interação como partículas livres e descritas por ondas planas.

O operador S de espalhamento (matriz S em uma determinada representação) leva o vetor estado inicial $|i\rangle$ ao vetor estado $|i'\rangle$ após a interação. Seja, por exemplo, o vetor estado $|i\rangle$ descrito na base dos momentos das 2 partículas livres a e b por: $|i\rangle = |\vec{p}_a \lambda_a\rangle |\vec{p}_b \lambda_b\rangle$ onde \vec{p} é o momento e λ a helicidade. Quando no estado final, determinadas grandezas (por exemplo momento \vec{p} e helicidade λ) foram medidas para as partículas finais c, d, e... formando assim um vetor $|f\rangle$, obtemos a amplitude de transição do estado inicial $|i\rangle$ ao estado final $|f\rangle$ por

$$S_{fi} = \langle f|i'\rangle = \langle f|S|i\rangle = \langle \vec{p}_c \lambda_c \vec{p}_d \lambda_d \dots | S | \vec{p}_a \lambda_a \vec{p}_b \lambda_b \rangle$$

As quantidades S_{fi} são os elementos da matriz S.

A probabilidade de transição $W_{i \rightarrow f}$ que o sistema faça uma transição de um estado $|i\rangle$ para o estado $|f\rangle$ é dada por

$$W_{i \rightarrow f} = |S_{fi}|^2$$

Como a probabilidade que de um determinado estado inicial $|i\rangle$ se obtenha algum estado final possível deve ser igual a 1, temos:

$$\sum_f W_{i \rightarrow f} = 1 \quad \text{i.e.,} \quad \sum_f |\langle f|S|i\rangle|^2 = \sum_f \langle i|S^\dagger|f\rangle \langle f|S|i\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle = 1$$

Disto resulta que a matriz S é unitária, i.e.,

$$SS^\dagger = S^\dagger S = \mathbb{1}$$

(para uma dedução rigorosa, consulte livros sobre física de partículas elementares).

No espalhamento se usa na prática o operador T de transição (matriz T em uma determinada representação) como:

$$S = \mathbb{1} + iT \quad (i = \sqrt{-1})$$

O operador T é usado no cálculo da seção de choque da interação. Somente no caso do espalhamento elástico na direção para frente é que a matriz unitária $\mathbb{1}$ na relação acima tem sentido; em qualquer outro caso pode-se usar $S = iT$. De fato, somente quando $|f\rangle = |i\rangle$ teremos $\langle f|i\rangle \neq 0$ pois nos outros casos se tem $\langle f|i\rangle = 0$.

O significado da passagem da matriz S à matriz T é que, deste modo se subtrai a parte da onda incidente que não foi espalhada.

A propriedade do operador S ser unitário implica para o operador T a relação

$$T = T^\dagger = iT^\dagger T$$

Nos processos de espalhamento há sempre conservação de energia e momento e portanto podemos escrever

$$\langle \vec{p}_c \lambda_c \vec{p}_d \lambda_d \dots | S | \vec{p}_a \lambda_a \vec{p}_b \lambda_b \rangle = \delta^3(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \delta(E_i - E_f) \langle \vec{p}_c \lambda_c \vec{p}_d \lambda_d \dots | S | \vec{p}_a \lambda_a \vec{p}_b \lambda_b \rangle$$

onde \vec{p}_i, E_i e \vec{p}_f, E_f são o momento e a energia dos estados inicial e final, respectivamente. Analogamente o operador T satisfaz uma relação semelhante.

A seção de choque é proporcional a

$$\iint \dots \left| \langle \vec{p}_c \lambda_c \vec{p}_d \lambda_d \dots | T_{fi} | \vec{p}_a \lambda_a \vec{p}_b \lambda_b \rangle \right|^2 \delta^3(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \delta(E_i - E_f) \frac{d^3 p_c}{E_c} \frac{d^3 p_d}{E_d} \dots$$

Exemplo 1:

Seja o espalhamento de 2 partículas de spin zero caracterizado por um canal, i.e.,

$$ab \rightarrow ab \quad (\text{por exemplo } \pi^+ \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^0)$$

Para um spin total J temos

$$\langle JM | S | J'M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} S^J$$

Sendo $SS^+ = |S|^2 = \mathbb{I}$ obtemos

$$S^J = e^{2i\delta_J}$$

onde δ_J é um número real conhecido como variação de fase (phase shift)

Como
$$T^J = \frac{S^J - 1}{i}$$

teremos:

$$T^J = \frac{e^{2i\delta_J} - 1}{i} = 2e^{i\delta_J} \sin\delta_J = \frac{2\sin\delta_J}{\cos\delta_J - i\sin\delta_J} = \frac{2}{\cotg\delta_J - i}$$

Portanto a seção de choque σ_J é proporcional a

$$|T^J|^2 = |e^{2i\delta_J} - 1|^2 = 4 \sin^2\delta_J$$

Exemplo 2:

Seja o espalhamento de 2 partículas de spin zero caracterizado por 2 canais, i.e.,

$$\begin{array}{l|l} ab \rightarrow ab & cd \rightarrow ab \\ \rightarrow cd & \rightarrow cd \end{array}$$

ab e cd correspondem aos canais A e B respectivamente; por exemplo:

$$\begin{array}{l|l} K\bar{K} \rightarrow K\bar{K} (S_{11} = \langle A|S|A \rangle) & \eta\pi \rightarrow K\bar{K} (S_{21} = \langle A|S|B \rangle) \\ K\bar{K} \rightarrow \eta\pi (S_{12} = \langle B|S|A \rangle) & \eta\pi \rightarrow \eta\pi (S_{22} = \langle B|S|B \rangle) \end{array}$$

A matriz S

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

devido à invariância na inversão do tempo é tal que

$$S_{12} = S_{21}$$

e sendo $SS^+ = S^+S = 1$, podemos escrever

$$S = \begin{pmatrix} e^{2i(\alpha_1+i\beta)} & i\sqrt{1-e^{-4\beta}} e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} \\ i\sqrt{1-e^{-4\beta}} e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} & e^{2i(\alpha_2+i\beta)} \end{pmatrix}$$

onde $\alpha_1+i\beta$ e $\alpha_2+i\beta$ são "phase shifts" complexas com a mesma parte imaginária.

A matriz T (dimensão 2x2) pode ser determinada através da matriz S.

Simetrias e Regras de Seleção

Recordemos dois resultados importantes da mecânica quântica

a) Quando uma observável B (correspondendo ao operador hermitiano B) que não tenha dependência explícita do tempo, comuta com a Hamiltoniana H, i.e.,

$$[H, B] = 0$$

então o valor médio desta observável $\langle \psi | B | \psi \rangle$ onde $|\psi\rangle$ é o vetor estado, é constante no tempo. Diz-se que a observável é uma constante de movimento e isto significa uma lei de conservação. Analogamente, num processo de espalhamento descrito pelo operador S temos que se $[B, S] = 0$ então $\langle \psi | B | \psi \rangle$ é constante no tempo.

b) A uma transformação física corresponde no espaço de Hilbert um operador unitário ou antiunitário. No caso em que o problema físico é invariante em relação a esta transformação o operador correspondente comuta com o operador hamiltoniano do sistema. Num processo de espalhamento invariante em relação a esta transformação temos:

$$S = USU^+ \quad \text{para operadores unitários } U \text{ e}$$

$$S^+ = ASA^+ \quad \text{para operadores antiunitários } A,$$

onde S é o operador S de espalhamento.

Combinando os dois resultados acima, temos que se U corresponder a uma observável B, ou for uma função desta observável $U = f(B)$ tal que $[H, U] = 0$ implique $[H, B] = 0$ então o valor médio $\langle \psi | B | \psi \rangle$ é uma constante de movimento. É importante salientar que a um operador antiunitário não se pode fazer corresponder uma observável.

Quando o sistema físico é invariante em relação a uma transformação, isto é, a transformação aplicada ao sistema deixa as propriedades físicas do sistema inalteradas, dizemos que a transformação é uma simetria em relação ao sistema. Uma simetria representada por um operador antiunitário é a reversão do tempo; as outras transformações de simetria usadas são representadas por operadores unitários.

Toda simetria, que está relacionada a uma observável, corresponde a uma grandeza conservada (teorema de Noether).

Estudaremos agora invariância em relação a um grupo contínuo de transformações. Definimos um grupo contínuo como o grupo cujos elementos $g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ variam continuamente com parâmetros reais $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Quando os $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ são diferenciáveis em relação aos parâmetros, o grupo contínuo é chamado grupo de Lie.

Os parâmetros α_i são definidos tais que quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots, \alpha_n = 0$ temos o elemento identidade, isto é $g(0, 0, 0, \dots) = \mathbb{1}$. Para um elemento do grupo infinitesimalmente próximo da identidade podemos escrever

$$g(d\alpha_1, d\alpha_2, \dots, d\alpha_n) = \mathbb{1} + i \sum_k d\alpha_k L_k$$

Incluimos o fator $i = \sqrt{-1}$ no desenvolvimento em série de Taylor para que quando os elementos do grupo g forem representados por operadores unitários, os operadores representando as quantidades L_k sejam hermitianos (i.e., se $gg^\dagger = g^\dagger g = \mathbb{1}$ então $L_k = L_k^\dagger$).

Os L_1, L_2, \dots, L_n são chamados geradores do grupo e qualquer elemento do grupo pode ser expresso em função destes geradores. Uma propriedade importante é que qualquer elemento do grupo pode ser expresso como o produto de elementos que estão infinitesimalmente próximo da identidade. Por exemplo, o grupo das rotações

$R(\alpha, \beta, \gamma)$ é um grupo de Lie de 3 parâmetros, onde $R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_X} e^{-i\beta J_Y} e^{-i\gamma J_Z}$ é um operador unitário e os 3 geradores J_X, J_Y, J_Z são hermitianos. Do fato que o produto de qualquer 2 elementos do grupo é um elemento do grupo, resulta a seguinte relação de comutação para os geradores.

$$[L_k, L_n] = \sum_m c_{kn}^m L_m$$

onde c_{kn}^m são constantes conhecidas como constantes de estrutura do grupo.

No grupo das rotações temos $[J_X, J_Y] = iJ_Z$ e as relações cíclicas semelhantes. Através de combinações entre os geradores, pode-se construir outros operadores C_i que comutem com todos os geradores, i.e., $[C_i, L_k] = 0$. Estes operadores, C_1, C_2, \dots, C_p são chamados operadores de Casimir. No grupo das rotações o operador $J^2 = J_X^2 + J_Y^2 + J_Z^2$ é um operador de Casimir.

As mesmas propriedades valem para representações do grupo de Lie. Restringimo-nos à representações unitárias pois, como foi dito, estas tem geradores hermitianos. Quando o problema físico é invariante em relação a este grupo, os geradores, que nos casos conhecidos representam observáveis, são constantes de movimento.

Nas representações unitárias, os operadores de Casimir C_i juntamente com geradores L_k que comutam, formam um conjunto de observáveis que podem ser simultaneamente medidas, isto é, dão origem aos autovetores $|c_i, l_k\rangle$ que geram o espaço da representação.

Lema de Schur. Quando um operador comuta com todos os elementos do grupo (ou o que é o mesmo, com todos os geradores),

então ele é um múltiplo do operador identidade. Pelo lema de Schur concluímos que os operadores de Casimir são múltiplos do operador identidade (i.e., $C_i = c_i \mathbb{1}$).

Todo vetor $|a\rangle$ do espaço da representação que é ligado ao operador de Casimir C_i é um autovetor do operador de Casimir e tem autovalor c_i , i.e., $C_i |a\rangle = c_i |a\rangle$. O autovalor dos operadores de Casimir caracteriza portanto a representação. Por exemplo, no grupo das rotações o autovalor relativo ao operador J^2 é $j(j+1)$.

No caso em que o problema físico é invariante em relação a um grupo de transformações (grupo de simetrias), isto é, todos os elementos (e em particular todos os geradores deste grupo) comutam com o operador S , ($[S, L_k] = 0$), concluímos, pelo lema de Schur que o operador S é um múltiplo do operador identidade. Portanto os elementos da matriz S são dados por

$$\langle c' \ell' | S | c \ell \rangle = \langle c' \ell' | c \ell \rangle S^{(c)} = \delta_{cc'} \delta_{\ell \ell'} S^{(c)}$$

onde $c = (c_1, c_2, \dots, c_p)$ consiste dos autovalores dos operadores de Casimir C_1, C_2, \dots, C_p e também $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k)$ consiste dos autovalores dos geradores L_1, L_2, \dots, L_k , que comutam e que juntamente com os operadores de Casimir correspondem a observáveis possíveis de serem medidas simultaneamente, e $S^{(c)}$ é um número dependendo somente de c .

Em particular, para o grupo das rotações temos

$$\langle j' m' | S | j m \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} S^{(j)}$$

Quando os estados inicial e final são caracterizados adicionalmente por um conjunto de autovalores $\tau = \{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_j\}$ de observáveis extras (que não tem nada a haver com o grupo das transformações consideradas) teremos

$$\langle c' \ell' \tau' | S | c \ell \tau \rangle = \delta_{cc'} \delta_{\ell \ell'} S_{\tau' \tau}^{(c)}$$

Simetrias Especiais

a) Paridade (operador unitário P)

Sejam \vec{p} e \vec{q} os operadores momento e coordenadas espaciais respectivamente.

Aplicando o operador paridade P temos

$$P \vec{q} = - \vec{q} P$$

$$P \vec{p} = - \vec{p} P$$

Como o momento angular é dado por $\vec{J} = \vec{q} \times \vec{p}$, isto implica $[\vec{P}, \vec{J}] = 0$.

Como o operador rotação R é uma função de J , isto é:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$$

temos

$$[\vec{P}, \vec{R}] = 0$$

b) Reversão do tempo (operador antiunitário T)

Temos

$$T \vec{p} = - \vec{p} T$$

$$[T, \vec{q}] = 0$$

$$T \vec{J} = - \vec{J} T$$

Porque T é um operador antiunitário então vale

$$[T, R] = 0$$

Além disso T comuta com o operador paridade

$$[T, P] = 0$$

c) Conjugação de carga (operador unitário C)

Sejam Q, B, L, Y operadores de carga, número bariônico, número leptônico e hipercarga respectivamente:

Temos

$$CQ = - QC$$

$$CB = - BC$$

$$CL = - LC$$

$$CY = - YC$$

Para um sistema ser autoestado de C deve ter $Q = B = L = Y = 0$. (Por exemplo, a partícula π^0 é autoestado de C , i.e., $C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle$). Para o vetor de estado $|\gamma\rangle$ de um fóton temos

$$C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle,$$

e para o sistema de n fótons temos

$$C|n\gamma\rangle = (-)^n |n\gamma\rangle.$$

Para o sistema constituído por uma partícula p e sua antipartícula \bar{p} , num estado com momento angular orbital l e spin s temos

$$C|p\bar{p}\rangle = (-)^{l+s} |p\bar{p}\rangle$$

d) Paridade-G (operador unitário G)

Definimos o operador paridade G por

$$G = C \exp(-i\pi I_2)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e I_2 é a segunda componente do operador isospin \vec{I} .

A combinação da operação conjugação de carga C com a rotação de um ângulo π em torno do segundo eixo do espaço de isospin,

aplicada aos pions π^0 faz que os estados dos pions sejam autofunções da operação combinada, com autovalores -1 , i.e.,

$$G|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle$$

Para o sistema de n pions temos

$$G|n\pi\rangle = (-)^n|n\pi\rangle$$

Para o sistema constituído por uma partícula p e sua antipartícula \bar{p} , de isospin I , num estado de momento angular orbital ℓ e spin s temos

$$G|p\bar{p}\rangle = (-)^{\ell+s+I}|p\bar{p}\rangle .$$

2. FORMALISMO DE HELICIDADE

2.1 - Transformação de Poincaré

Uma teoria relativística é invariante em relação às transformações de Poincaré (também conhecidas como transformações de Lorentz não-homogêneas). Estas transformações podem ser escritas como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

e devem ser caracterizadas pela invariância do intervalo entre 2 pontos (deixam invariante formas do tipo $(x'_{\mu}(1) - x'_{\mu}(2)) (x'^{\mu}(1) - x'^{\mu}(2))$). O índice repetido na posição superior e inferior significa soma em relação a este índice. Os x^{μ} com $\mu = 0, 1, 2, 3$ são as componentes contravariantes de um quadrivetor. Por exemplo, as componentes contravariantes do quadrivetor espaço-tempo são dadas por

$$x^{\mu} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Usamos unidades em que a velocidade da luz é $c = 1$. As componentes covariantes x_{μ} com $\mu = 0, 1, 2, 3$ estão relacionadas às componentes contravariantes x^{μ} através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ tal que

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} \quad \text{com} \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

As componentes covariantes do quadrivetor espaço-tempo são dadas por

$$x_{\mu} = (t, -x, -y, -z) = (t, -\vec{x})$$

e $x_{\mu}x^{\mu}$ é dada por

$$x_{\mu}x^{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\nu}x^{\mu} = t^2 - \vec{x}^2$$

que corresponde à equação de um hiperboloide no espaço de Minkowski.

Os a^{μ} são componentes de um quadrivetor constante que caracteriza as translações no espaço-tempo. Quando se tem $a^0 = a^1 = a^2 = a^3 = 0$ diz-se que a transformação de Lorentz é homogênea.

Os Λ^{μ}_{ν} são os elementos de uma matriz (real) 4 x 4 que satisfaz

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^{\sigma}_{\mu} g_{\sigma\lambda} \Lambda^{\lambda}_{\nu}$$

Esta relação estabelece o requisito necessário para que as transformações homogêneas preservem o invariante $x^{\mu}x_{\mu}$. De fato

$$x'^{\mu}x'_{\nu}g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\sigma}x^{\sigma}\Lambda^{\nu}_{\lambda}x^{\lambda}g_{\nu\mu} = x^{\mu}x_{\mu}$$

e significa que $g_{\mu\nu} = \Lambda^{\sigma}_{\mu}g_{\sigma\lambda}\Lambda^{\lambda}_{\nu}$.

Desta relação conclui-se que

$$\det\Lambda = \pm 1$$

As rotações no espaço de Minkowski satisfazem à condição $\det\Lambda=+1$. Por outro lado, a reflexão das coordenadas espaciais (operador paridade P) ou da coordenada temporal (operador reversão do tempo T)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou seja

$$P \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

satisfazem à condição $\det A = -1$.

Estas transformações P e T não podem ser obtidas por uma soma de rotações infinitesimais.

Consideremos primeiro somente as rotações no espaço de Minkowski (conhecidas como transformações de Lorentz próprias). Existem 6 tipos de rotações, a saber: as rotações nos planos (1,2), (2,3) e (3,1) do espaço (chamadas rotações espaciais) e as rotações nos planos (0,1), (0,2) e (0,3) do espaço tempo (chamadas transformações de "boost" ou simplesmente transformações de Lorentz). Por exemplo, a transformação de Lorentz ao longo do eixo x_3 (i.e. eixo z) é dada por:

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

com

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$$

É fácil ver que esta é uma transformação na qual a origem do sistema de coordenadas espaciais (x_1, x_2, x_3) se move com uma velocidade constante $-\beta$ ao longo do eixo z . Dizemos que o sistema de coordenadas recebeu um "boost" de velocidade $-\beta$.

As rotações podem ser obtidas por composição de rotações infinitesimais. Portanto concluímos que existem 6 geradores para os 6 tipos de rotações acima referidos. Temos os 3 operadores \vec{J} do momento angular para as rotações espaciais.

$$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z) = (M_{23}, M_{31}, M_{12}) ,$$

e os 3 operadores \vec{K} para as transformações de "boost"

$$\vec{K} = (K_x, K_y, K_z) = (M_{01}, M_{02}, M_{03})$$

Estes 6 geradores são as componentes do operador quadritensorial antisimétrico

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$$

Além destes 6 geradores das rotações no espaço de Minkowski, existem ainda os 4 geradores P_μ com $\mu = 0, 1, 2, 3$ das translações. Estes 4 geradores P_μ são as quatro componentes do operador quadrivetorial energia-momento.

Estas rotações e translações podem ser escritas em função de seus geradores como: $\exp(-i a^\mu P_\mu)$ para a translação caracterizada pelo quadri-vetor a^μ ,

$\exp(-i\theta(\vec{J}\cdot\vec{u}))$ para a rotação de um ângulo θ em torno do eixo \vec{u} ,

$\exp(-i\xi(\vec{K}\cdot\vec{v}))$ para a transformação de Lorentz ao longo da direção \vec{v} .

Por exemplo, a rotação de um ângulo θ em torno do eixo z

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é dada por $\exp(-i\theta J_z)$

A transformação de Lorentz ao longo do eixo z

$$L_z(\xi) = \begin{pmatrix} \cosh\xi & 0 & 0 & \sinh\xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\xi & 0 & 0 & \cosh\xi \end{pmatrix}$$

é dada por $\exp(-i\xi K_z)$

Como $\cosh\xi = \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ e $\sinh\xi = \gamma\beta$ temos $\tanh\xi = \beta$.

O parâmetro ξ da transformação é conhecido por rapidez ("rapidity").

Exercício 2.1

- a) Determine as componentes J_x, J_y, J_z e K_x, K_y, K_z dos geradores \vec{J} e \vec{K} das rotações no espaço de Minkowski.
- b) Determine os geradores P_0, P_1, P_2, P_3 das translações no espaço Minkowski.

As relações de comutação para estes 10 geradores são:

$$[J_j, J_k] = i \epsilon_{jkl} J_l$$

$$[K_j, K_k] = -i \epsilon_{jkl} J_l$$

$$[J_j, K_k] = i \epsilon_{jkl} K_l$$

$$[P_j, J_k] = i \epsilon_{jkl} P_l$$

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= [P_0, J_j] = 0 & \mu, \nu &= 0, 1, 2, 3 \\ & & j, k, \ell &= 1, 2, 3 \\ [P_0, K_j] &= -iP_j \\ [P_j, K_k] &= -i \delta_{jk} P_0 \end{aligned}$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e ϵ_{jkl} são as componentes de um tensor antisimétrico em relação a todos os pares de índices tal que:

$$\epsilon_{j_1, \dots, j_n} = \begin{cases} 1 & \text{se } (j_1 \dots j_n) \text{ é uma permutação par de } (1, \dots, n) \\ -1 & \text{se } (j_1 \dots j_n) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, \dots, n) \\ 0 & \text{se existem } \ell \neq m \text{ tais que } j_\ell = j_m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= 1 \quad \text{quando } j = k \\ \delta_{jk} &= 0 \quad \text{quando } j \neq k \end{aligned}$$

Considerando também os operadores de paridade P e reversão no tempo T temos

$$\begin{aligned} TJ_j &= -J_j T & PJ_j &= J_j P \\ TK_j &= K_j T & PK_j &= -K_j P \\ TP_0 &= P_0 T & PP_0 &= P_0 P \\ TP_j &= -P_j T & PP_j &= -P_j P \end{aligned}$$

onde $j = 1, 2, 3$

$$TP = PT$$

Exercício 2.2

Prove que

$$\begin{pmatrix} \Lambda^\mu_\nu & a^\mu \\ 0000 & 1 \end{pmatrix}$$

é uma representação (no espaço a 5 dimensões) das transformações de Poincaré.

Exercício 2.3

Com a ajuda da representação no espaço a 5 dimensões, demonstre as relações de comutação para \vec{K} , \vec{J} , P_μ .

Representações do Grupo de Poincaré

As transformações de Poincaré formam um grupo denominado Grupo de Poincaré. Na Mecânica Quântica, para fazermos transformações equivalentes às transformações de Poincaré, precisamos de representações unitárias do grupo de Poincaré (os geradores \vec{J} , \vec{K} , P_μ são, portanto, operadores hermitianos).

O grupo de Poincaré tem 2 operadores de Casimir que comutam com todos os geradores, com o operador paridade P e com o reversão no tempo T . Como os operadores de Casimir são operadores escalares que comutam com o operador quadritensorial $M_{\mu\nu}$ e o operador quadri-vetorial P_μ , para obtê-los, construímos operadores escalares pela combinação dos operadores $M_{\mu\nu}$ e P_μ e investigamos seus autovalores que caracterizam diferentes representações do grupo de Poincaré.

Podemos formar dois operadores de Casimir:

$$A = P_\mu P^\mu = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 = M^2 \quad (\text{operador massa})$$

$$B = -\omega_\mu \omega^\mu \quad \text{com} \quad \omega^\sigma = \frac{1}{2} \epsilon^{\sigma\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu} P_\lambda$$

O significado de B é fácil de se observar no sistema em que $P_\mu = (P_0, 0, 0, 0)$, isto é, no sistema centro de massa. Neste sistema temos:

$$\omega^\sigma = P_0 \begin{pmatrix} 0 \\ J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} \quad \text{e portanto } B = M^2 J^2.$$

Como vemos, B significa, essencialmente, o spin do sistema.

Para gerar o espaço de Hilbert da representação, é necessário se ter um conjunto completo de operadores que comutem (observáveis). Podemos escolher o seguinte conjunto:

$$A, B, P_\mu, \bar{\omega}^0$$

onde $\bar{\omega}^0$ é o ω^0 normalizado, isto é,

$$\omega^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{0\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu} P_\lambda = J_x P_x + J_y P_y + J_z P_z = (\vec{J} \cdot \vec{P})$$

e

$$\bar{\omega}^0 = (\vec{J} \cdot \vec{P}) / |\vec{P}|,$$

$\bar{\omega}^0$ representa o operador helicidade.

Um autovetor deste conjunto de operadores é representado por

$$| [M, S] p^\nu_\mu \rangle$$

onde M e S são os autovalores massa e spin dos operadores de Casimir A e B respectivamente; p^ν é o quadrivetor momento-energia e μ a helicidade.

Abreviadamente este autovetor pode ser escrito por $|\vec{p}_\mu\rangle$ onde se deixou de escrever os autovalores massa, spin e energia.

No sistema centro de massa temos $P_\mu = (M, 0, 0, 0)$ e o autovalor μ do operador $\bar{\omega}^0$ torna-se a componente m do spin; então $|\vec{p}_\mu\rangle \rightarrow |0\mu\rangle = |000m\rangle$. Os vetores $|\vec{p}_\mu\rangle$ são ortogonais e geram o espaço de Hilbert. Eles são normalizados tais que

$$\langle \vec{p}', \mu' | \vec{p}, \mu \rangle = p^0 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{\mu\mu'}$$

onde $p^0 = (M^2 + \vec{p}^2)^{1/2}$ é a energia.

Prova-se que ao se fazer uma transformação de "boost" $\exp(-i\xi(\vec{k} \cdot \vec{v}))$ no autovetor $|0\mu\rangle$, se obtém um autovetor do operador energia-momento, mas, em geral, este vetor não é um autovetor do operador helicidade. Entretanto ao se fazer, no autovetor $|0\mu\rangle$, uma transformação de "boost" $L_z(\xi)$ ao longo do eixo z considerado como o eixo de quantização do spin (i.e., a componente do spin ao longo deste eixo é μ) e em seguida uma rotação $R(\phi\theta 0)$, obtém-se um vetor

$$R(\phi\theta 0) e^{-i\xi K_z} |0\mu\rangle.$$

Este vetor não é apenas autovetor do operador energia-momento como também é autovetor do operador helicidade, cujo autovalor μ é mantido; portanto este vetor pode ser escrito

$$|\vec{p}, \mu\rangle = R(\phi\theta 0) L_z(\xi) |0\mu\rangle$$

com $|\vec{p}| = M \sinh\xi$ onde M é a massa.

Rotação de Wigner

Investigaremos agora como o vetor estado $|\vec{p}, \mu\rangle$ se transforma quando nele se aplica uma transformação de Lorentz homogênea arbitrária Λ

$$\Lambda |\vec{p}, \mu\rangle = \Lambda R L_z |0\mu\rangle$$

Como as transformações de Lorentz formam um grupo, o resultado da aplicação do produto de transformações $\Lambda R L_z$ pode também ser obtido por uma transformação de Lorentz aplicada no sistema em repouso (sistema centro de massa). Entretanto, em geral, não é possível

substituir o produto $\Lambda R L_z$ por um produto $\bar{R} \bar{L}_z$ composto apenas de uma rotação \bar{R} e de um "boost" \bar{L}_z . Geralmente, o sistema em repouso deve primeiro sofrer uma rotação espacial R chamada rotação de Wigner.

$$\Lambda(RL_z) = (\bar{R}\bar{L}_z)R$$

isto é

$$R = (\bar{R}\bar{L}_z)^{-1}\Lambda(RL_z) .$$

Então

$$\Lambda|\vec{p}\mu\rangle = \Lambda RL_z|0\mu\rangle = \bar{R}\bar{L}_z R|0\mu\rangle ,$$

e como

$$R|0\mu\rangle = \sum_{\mu'} D_{\mu',\mu}^S(R) |0\mu'\rangle ,$$

temos

$$\Lambda|\vec{p}\mu\rangle = \sum_{\mu'} D_{\mu',\mu}^S(R) |\vec{p}'\mu'\rangle ,$$

onde $p' = \Lambda p$.

Os ângulos de rotação de R não são fáceis de calcular. Consideremos o caso particular em que Λ é uma transformação de Lorentz ao longo do eixo z , isto é

$$\Lambda(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & 0 & 0 & \sinh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{com } \cosh\chi = \gamma \\ \sinh\chi = \beta\gamma \end{array}$$

Neste caso \vec{p}' e \vec{p} estão num mesmo plano que contém o eixo z , que por simplicidade tomaremos como o plano xz . Então:

$$R(\phi=0, \theta) \bar{L}_z(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\sigma & 0 & 0 & \sinh\sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\sigma & 0 & 0 & \cosh\sigma \end{pmatrix}$$

onde $E = m \cosh \sigma$ e $|\vec{p}| = m \sinh \sigma$.

Analogamente

$$\bar{R}(\phi'=0, \theta') \bar{L}_z(\sigma') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta' & 0 & \sin \theta' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta' & 0 & \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \sigma' & 0 & 0 & \sinh \sigma' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \sigma' & 0 & 0 & \cosh \sigma' \end{pmatrix}$$

onde $E' = m \cosh \sigma'$ e $|\vec{p}'| = m \sinh \sigma'$.

Como \vec{p}' e \vec{p} estão no plano xz , a rotação de Wigner, aplicada no sistema em repouso, deverá ser uma rotação de um ângulo ω em torno do eixo y , tal que

$$R(0, \omega, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & 0 & \sin \omega \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \omega & 0 & \cos \omega \end{pmatrix} = \bar{L}_z^{-1} \bar{R}^{-1}(0, \theta', 0) \Lambda(\chi) R(0, \theta, 0) L_z(\sigma)$$

Portanto:

$$\cosh \chi = \cosh \sigma \cosh \sigma' - \sinh \sigma \sinh \sigma' \cos \omega$$

$$\cosh \sigma = \cosh \chi \cosh \sigma' - \sinh \chi \sinh \sigma' \cos \theta'$$

$$\cosh \sigma' = \cosh \sigma \cosh \chi - \sinh \sigma \sinh \chi \cos(\pi - \theta)$$

$$\frac{\sinh \chi}{\sin \omega} = \frac{\sinh \sigma'}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{\sinh \sigma}{\sin \theta'}$$

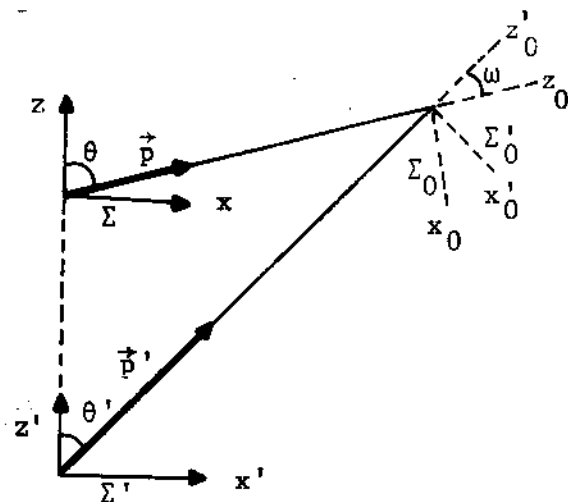
que implica

$$\cos \omega = \frac{\cosh \sigma \cosh \sigma' - \cosh \chi}{\sinh \sigma \sinh \sigma'} = \frac{EE' - m^2 \cdot \cosh \chi}{|\vec{p}| |\vec{p}'|}$$

Para se entender mais facilmente a rotação de Wigner consideraremos o ponto de vista passivo para as transformações.

Assim, se $|\vec{p}_\mu\rangle$ descrever o estado num sistema Σ , então $\Lambda|\vec{p}_\mu\rangle$ descreverá o mesmo estado num sistema transformado Σ' no qual o quadrimo-

mento é p' . Analogamente, a transformação RL_z é a transformação do sistema em repouso Σ_0 ao sistema Σ (a direção de \vec{p} é a do eixo z_0 do sistema Σ_0)



Inicialmente o sistema em repouso Σ_0 é transformado no sistema Σ , para em seguida ser transformado no sistema Σ' e finalmente regressado ao sistema Σ_0 . A transformação resultante é simplesmente a rotação em torno do eixo y_0 de um ângulo ω tal que leve o eixo z_0 em z'_0 , isto é, transforma o sistema Σ_0 em Σ'_0 . Por causa da geometria hiperbólica temos naturalmente

$$\omega + \theta' \neq \theta$$

2.2 - Estados de Helicidade Para Uma e Duas Partículas e a Relação Entre Eles

Definimos o estado de helicidade para uma partícula de massa m suposta diferente de zero e spin s como

$$|\vec{p}\lambda\rangle \equiv |\phi\theta p\lambda\rangle = R(\phi\theta) L_z(\mathbf{v}) |000\lambda\rangle ,$$

onde ϕ e θ são os ângulos polares de \vec{p} com $0 < \theta < \pi$ e $-\pi < \phi \leq \pi$.

Para $\phi = \theta$ e $\theta = \theta$ ou $\theta = \pi$ definimos

$$|00p\lambda\rangle = L_z(v) |000\lambda\rangle ,$$

$$|0\pi p\lambda\rangle = |00-p\lambda\rangle = L_{-z} |000-\lambda\rangle .$$

Como

$$R(\pi\pi 0) |000\lambda\rangle = \sum_{\lambda'} D_{\lambda',\lambda}^S(\pi\pi 0) |000\lambda'\rangle$$

e

$$D_{\lambda',\lambda}^S(\pi\pi 0) = e^{-i\pi\lambda'} d_{\lambda',\lambda}^S(\pi) = e^{-i\pi\lambda'} (-1)^{s+\lambda'} \delta_{\lambda',-\lambda}$$

temos

$$R(\pi\pi 0) |000\lambda\rangle = e^{i\pi\lambda} (e^{i\pi})^{s-\lambda} |000-\lambda\rangle = e^{i\pi s} |000-\lambda\rangle$$

Como $L_{-z}R(\pi\pi 0) = R(\pi\pi 0)L_z$ (veja exercício 2.4), podemos então escrever:

$$|0\pi p\lambda\rangle = |00-p\lambda\rangle = L_{-z} |000-\lambda\rangle = e^{-i\pi s} L_{-z} R(\pi\pi 0) |000\lambda\rangle = e^{-i\pi s} R(\pi\pi 0) |00p\lambda\rangle$$

Os vetores $|\vec{p}\lambda\rangle$ são normalizados tais que

$$\langle \vec{p}'\lambda' | \vec{p}\lambda \rangle = \epsilon \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \text{com } \epsilon = \sqrt{m^2+p^2}$$

Com esta normalização teremos

$$\sum_{\lambda} \int d^4 p_{\nu} \delta(M^2 - p^{\mu} p_{\mu}) \langle \vec{p}'\lambda' | \vec{p}\lambda \rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2\epsilon} \epsilon \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \delta_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{2}$$

É importante se estudar o efeito da aplicação, nos estados de helicidade, das transformações de Poincaré: rotação, translação, transformação de Lorentz, paridade e reversão do tempo.

Aplicando uma rotação $R(\alpha, \beta, \gamma)$ em $|\vec{p}\lambda\rangle$ teremos:

$$\begin{aligned} R(\alpha\beta\gamma) |\vec{p}\lambda\rangle &= R(\alpha\beta\gamma)R(\phi\theta 0)L_z |000\lambda\rangle = \\ &= R(\alpha'\beta'\gamma')L_z |000\lambda\rangle = R(\alpha'\beta'0)\hat{R}_z(\gamma')L_z |000\lambda\rangle \end{aligned}$$

Como $L_z R_z = R_z L_z$ (veja exercício 2.4) temos ;

$$R(\alpha\beta\gamma) |\vec{p}\lambda\rangle = R(\alpha'\beta'0)L_z R_z(\gamma') |000\lambda\rangle = R(\alpha'\beta'0) e^{-i\lambda\gamma'} L_z |000\lambda\rangle$$

e portanto

$$R(\alpha\beta\gamma) |\vec{p}\lambda\rangle = e^{-i\lambda\gamma'} |\vec{p}'\lambda\rangle ,$$

onde \vec{p}' tem ângulos polares α' e β' e módulo $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$.

A lei de transformação para $|\vec{p}\lambda\rangle$ diante de uma translação $\exp(-ia^\mu P_\mu)$ é muito simples pois $|\vec{p}\lambda\rangle$ é autovetor dos geradores P_μ das translações. Assim, diante de uma translação, os vetores $|\vec{p}\lambda\rangle$ adquirem somente um fator de fase e $e^{-ia^\mu P_\mu}$, isto é

$$e^{-ia^\mu P_\mu} |\vec{p}\lambda\rangle = e^{-ia^\mu p_\mu} |\vec{p}\lambda\rangle .$$

Para a aplicação da transformação de Lorentz Λ em $|\vec{p}\lambda\rangle$ vimos que

$$\Lambda |\vec{p}\lambda\rangle = \sum_{\lambda'} D_{\lambda',\lambda}^S(R) |\vec{p}'\lambda'\rangle \quad \text{com } p' = \Lambda p$$

e R é a rotação de Wigner.

Consideremos agora a transformação de $|\vec{p}\lambda\rangle$ diante de uma reflexão das coordenadas espaciais (operação paridade P)

$$P |\vec{p}\lambda\rangle = PR(\phi\theta 0)L_z |000\lambda\rangle .$$

Relembrando as regras de comutação $PR = RP$ e $P\vec{K} = -\vec{K}P$, em particular $PL_z = L_{-z}P$, sendo $P|000\lambda\rangle = \eta|000\lambda\rangle$, onde η é a paridade intrínseca, temos

$$P |\vec{p}\lambda\rangle = \eta R(\phi\theta 0)L_{-z} |000\lambda\rangle = \eta e^{-i\pi S} R(\phi\theta 0)R(\pi\pi 0) |00p-\lambda\rangle .$$

De

$$R(\phi\theta 0)R(\pi\pi 0) = R(\pi+\phi, \pi-\theta, 0) \quad (\text{vide exercício 2.4})$$

então resulta

$$P|\vec{p}\lambda\rangle = \eta e^{-i\pi s} |-\vec{p}-\lambda\rangle.$$

Consideremos agora a transformação Y reflexão das coordenadas espaciais pelo plano xz , isto é, trata-se de uma transformação que somente a coordenada y é refletida

$$Y = R(0\pi 0)P = PR(0\pi 0)$$

$$Y|000\lambda\rangle = R(0\pi 0)P|000\lambda\rangle = PR(0\pi 0)|000\lambda\rangle$$

Como

$$R(0\pi 0)|000\lambda\rangle = \sum_{\lambda'} d_{\lambda, \lambda'}^s(\pi) |000\lambda'\rangle = (-)^{s-\lambda} |000-\lambda\rangle$$

temos

$$Y|000\lambda\rangle = \eta (-)^{s-\lambda} |000-\lambda\rangle$$

Como $YL_z = L_z Y$ podemos escrever

$$\begin{aligned} Y|00p\lambda\rangle &= YL_z |000\lambda\rangle = L_z Y|000\lambda\rangle = \\ &= \eta (-)^{s-\lambda} L_z |000-\lambda\rangle = \eta (-)^{s-\lambda} |00p-\lambda\rangle \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} Y|\vec{p}\lambda\rangle &= PR(0\pi 0)R(\phi, \theta, 0)|00p\lambda\rangle = PR(-\phi, \theta, 0)R(0\pi 0)|00p\lambda\rangle = \\ &= R(-\phi, \theta, 0)Y|00p\lambda\rangle = \eta (-)^{s-\lambda} |\vec{p}\lambda\rangle \end{aligned}$$

onde \vec{p}^r é o momento refletido pelo plano xz.

Trataremos agora do comportamento de $|\vec{p}\lambda\rangle$ diante de uma transformação T de inversão do tempo.

O efeito ao se aplicar T no estado $|000\lambda\rangle$ é, a menos de um fator de fase, o mesmo que o da rotação $R(0,\pi,0)$, portanto

$$T|000\lambda\rangle = a R(0\pi 0) |000\lambda\rangle = a (-)^{S-\lambda} |000-\lambda\rangle$$

A aplicação de T em $|00p\lambda\rangle$ será

$$T|00p\lambda\rangle = TL_z|000\lambda\rangle$$

e como $TL_z = L_{-z} T$ porque $TK_j = K_j T$ e T é antiunitária temos

$$\begin{aligned} T|00p\lambda\rangle &= L_{-z} T|000\lambda\rangle = a L_{-z} R(0\pi 0) |000\lambda\rangle = a R(0\pi 0) L_z |000\lambda\rangle = \\ &= a R(0\pi 0) |00p\lambda\rangle . \end{aligned}$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned} T|\vec{p}\lambda\rangle &= TR(\phi\theta 0) |00p\lambda\rangle = R(\phi\theta 0) T|00p\lambda\rangle = a R(\phi\theta 0) R(0\pi 0) |00p\lambda\rangle = a e^{-i\pi\lambda} |-\vec{p}\lambda\rangle = \\ &= a (-)^{-\lambda} |-\vec{p}\lambda\rangle \end{aligned}$$

porque

$$R(\phi\theta 0) R(0\pi 0) = R(\pi+\phi, \pi-\theta, \pi)$$

e

$$TJ_j = -J_j T \text{ com } T \text{ antiunitária.}$$

O fator a é irrelevante por causa da propriedade antiunitária de T .

Portanto, fixaremos $a = 1$.

Exercício 2.4

Prove que

$$R(\phi, \theta, 0) R(\pi\pi 0) = R(\pi+\phi, \pi-\theta, 0)$$

$$R(0, \pi, 0) R(\phi, \theta, 0) = R(-\phi, \theta, 0) R(0\pi 0)$$

$$R(\phi\theta 0) R(0\pi 0) = R(\pi+\phi, \pi-\theta, \pi)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{-z} R_Y(\pi) &= R_Y(\pi) L_z \\ L_z R_z(\alpha) &= R_z(\alpha) L_z \\ Y L_z &= L_z Y \end{aligned} \right\}$$

Em vez de se usar a base $|\vec{p}\lambda\rangle$ para gerar o espaço de Hilbert, podemos usar uma outra base, denominada base momento angular constituída pelo conjunto dos autovetores $|j m p \lambda\rangle$ comuns aos operadores J^2 , J_z , \vec{P}^2 , \vec{w}^0 e aos 2 operadores de Casimir. Pode-se mostrar que

$$|j m p \lambda\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int d\cos\theta d\phi D_{m\lambda}^{*j}(\phi\theta 0) |\phi\theta p \lambda\rangle$$

e portanto

$$|\phi\theta p \lambda\rangle = \sum_{j m} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{m\lambda}^j(\phi\theta 0) |j m p \lambda\rangle$$

(verifique por substituição)

A normalização é tal que

$$\langle j' m' p' \lambda' | j m p \lambda \rangle = \frac{\epsilon}{p} \delta(p'-p) \delta_{j'j} \delta_{m'm} \delta_{\lambda'\lambda}$$

(verifique por substituição)

Aplicando a transformação paridade em $|j m p \lambda\rangle$ teremos

$$P |j m p \lambda\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int d\cos\theta d\phi D_{m\lambda}^{*j}(\phi\theta 0) R(\phi\theta 0) R^{-1}(0\pi 0) \chi |00 p \lambda\rangle$$

Colocando $R(\phi\theta 0) R^{-1}(0\pi 0) = R'(\phi', \theta', \alpha)$ temos

$$\begin{aligned} D_{m\lambda}^{*j}(\phi, \theta, 0) &= \sum_n D_{mn}^{*j}(\phi', \theta', \alpha) D_{n\lambda}^{*j}(0\pi 0) = (-)^{j-\lambda} D_{m-\lambda}^{*j}(\phi', \theta', \alpha) = \\ &= (-)^{j-\lambda} e^{-i\lambda\alpha} D_{m-\lambda}^{*j}(\phi', \theta', 0) \end{aligned}$$

Como

$$\chi |00 p \lambda\rangle = \eta(-)^{s-\lambda} |00 p -\lambda\rangle$$

temos

$$P |j m p \lambda\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \eta(-)^{s-\lambda} (-)^{j-\lambda} \int d\cos\theta' d\phi' e^{-i\lambda\alpha} D_{m-\lambda}^{*j}(\phi', \theta', 0) R'(\phi', \theta', \alpha) |00 p -\lambda\rangle$$

pois

$$R'(\phi', \theta', \alpha) |00p-\lambda\rangle = e^{i\lambda\alpha} R'(\phi', \theta', 0) |00p-\lambda\rangle$$

Portanto

$$P |j m p \lambda\rangle = \eta (-)^{j-s} |j m p -\lambda\rangle$$

Aplicando a transformação inversão do tempo em $|j m p \lambda\rangle$ e considerando que se trata de uma transformação antiunitária, teremos:

$$\begin{aligned} T |j m p \lambda\rangle &= \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int d\cos\theta d\phi D_{m\lambda}^j(R) R(\phi\theta 0) T |00p\lambda\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int d\cos\theta d\phi D_{m\lambda}^j(R) R(\phi\theta 0) R(0\pi 0) |00p\lambda\rangle \end{aligned}$$

Colocando

$$R(\phi, \theta, 0) R(0\pi 0) = R'(\phi', \theta', \alpha)$$

temos

$$\begin{aligned} D_{m\lambda}^j(\phi, \theta, 0) &= \sum_n D_{mn}^j(\phi', \theta', \alpha) D_{\lambda n}^{*j}(0\pi 0) = (-)^{j+\lambda} D_{m-\lambda}^j(\phi', \theta', \alpha) = \\ &= (-)^{j-m} e^{+i\lambda\alpha} D_{-m\lambda}^{*j}(\phi', \theta', 0) \end{aligned}$$

pois

$$D_{m-\lambda}^j(\phi', \theta', \alpha) = (-)^{\lambda+m} D_{-m\lambda}^{*j}(\phi', \theta', \alpha)$$

Portanto

$$T |j m p \lambda\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} (-)^{j-m} \int d\cos\theta' d\phi' e^{i\lambda\alpha} D_{-m\lambda}^{*j}(\phi', \theta', 0) e^{-i\lambda\alpha} R'(\phi', \theta', 0) |00p\lambda\rangle$$

isto é

$$T |j m p \lambda\rangle = (-)^{j-m} |j -m p \lambda\rangle$$

Às vezes é conveniente se usar uma outra base, denominada - base momento angular orbital - constituída pelos autovetores $|j m \ell\rangle$ onde ℓ significa o número quântico momento orbital.

Pode-se provar que

$$|j m \ell\rangle = \sum_{\lambda} \left(\frac{2\ell+1}{2j+1}\right)^{1/2} \langle \ell 0, s \lambda | j \lambda \rangle |j m \lambda\rangle$$

e

$$|j m \lambda\rangle = \sum_{\ell} \left(\frac{2\ell+1}{2j+1}\right)^{1/2} \langle \ell 0, s \lambda | j \lambda \rangle |j m \ell\rangle$$

Os vetores $|j m \ell\rangle$ são normalizados tais que

$$\langle j' m' \ell' | j m \ell \rangle = \frac{\epsilon}{p} \delta(p'-p) \delta_{j' j} \delta_{m' m} \delta_{\ell' \ell}$$

A aplicação em $|j m \ell\rangle$ da transformação P resultará:

$$P |j m \ell\rangle = \eta (-)^{\ell} |j m \ell\rangle$$

Como se pode observar, $|j m \ell\rangle$ são autovetores do operador paridade correspondendo aos autovalores $\eta (-1)^{\ell}$.

A transformação T aplicada em $|j m \ell\rangle$ resultará

$$T |j m \ell\rangle = (-)^{j-m} |j -m \ell\rangle$$

Exercício 2.5

Prove que

$$a) P |j m \ell\rangle = \eta (-)^{\ell} |j m \ell\rangle ; \quad b) T |j m \ell\rangle = (-)^{j-m} |j -m \ell\rangle .$$

Sistema de Duas Partículas

Consideremos um sistema constituído por duas partículas livres (1) e (2) de massas w_1 e w_2 e de spin s_1 e s_2 respectivamente.

O espaço de Hilbert H de todos os possíveis vetores de estado do sistema é o produto direto dos espaços de Hilbert $H(w_1 s_1)$ e $H(w_2 s_2)$ dos estados correspondentes às partículas (1) e (2).

$$H = H(w_1 s_1) \otimes H(w_2 s_2)$$

Nosso objetivo é decompor o espaço produto em uma soma direta de espaços de representações irredutíveis (semelhante ao acoplamento de dois momentos angulares). Estes espaços podem ser gerados pela base constituída dos seguintes vetores:

$$|\vec{P} \Lambda [W S c]\rangle$$

\vec{P} é o momento total e Λ é a helicidade total do sistema; W e S são os autovalores dos operadores de Casimir correspondentes à massa total ($w_1 + w_2 \leq W < +\infty$) e ao spin total do sistema; c consiste dos autovalores dos adicionais operadores de Casimir (veremos que são apenas dois).

Em analogia ao que foi feito para o caso de uma partícula, definimos

$$\omega^\sigma = \frac{1}{2} \epsilon^{\sigma\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu} P_\lambda$$

onde $P_\mu = p_\mu^{(1)} + p_\mu^{(2)}$ e $M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}^{(1)} + M_{\mu\nu}^{(2)}$ são geradores do espaço produto.

Além dos dois operadores escalares

$$A = p_\mu p^\mu \quad \text{e} \quad B = -\omega^\sigma \omega_\sigma$$

relacionados à massa total W e ao spin total S do sistema, podemos construir dois outros operadores de Casimir:

$$\lambda_i = \frac{\omega^{(i)\sigma} P_\sigma}{\left[(P_\mu^{(i)})^2 - (W^{(i)})^2 \right]^{1/2}} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{\sigma\nu\rho\lambda} M_{\nu\rho}^{(i)} P_\lambda^{(i)} P_\sigma}{\left[(P_\mu^{(i)})^2 - (W^{(i)})^2 \right]^{1/2}} \quad (i = 1, 2)$$

Como $\omega^{(i)\sigma}$ são pseudovetores, os geradores λ_i são pseudoescalares e portanto não comutam com o operador paridade.

No sistema centro de massa (CM) das duas partículas ($\vec{p}^{(1)} + \vec{p}^{(2)} = 0, W = E^{(1)} + E^{(2)}$) os operadores λ_1 e λ_2 são os operadores helicidade das partículas (1) e (2).

De fato, como

$$P^{CM} = \{P_0, 000\}$$

e $E^{(1)} + E^{(2)}$ é autovalor de P_0

resulta que:

$$\lambda_i^{CM} = \frac{\frac{1}{2} P_0 \epsilon^{0\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu}^{(i)} P_\lambda^{(i)}}{\left[(E^{(i)} (E^{(1)} + E^{(2)}))^2 - ((E^{(1)} + E^{(2)})_W^{(i)})^2 \right]^{1/2}} =$$

$$= \frac{P_0}{E^{(1)} + E^{(2)}} \frac{\vec{j}^{(i)} \cdot \vec{p}^{(i)}}{|\vec{p}^{(i)}|}$$

e portanto

$$\lambda_i^{CM} = \frac{\vec{j}^{(i)} \cdot \vec{p}^{(i)}}{|\vec{p}^{(i)}|}$$

Para o sistema de 2 partículas pode-se escolher como observáveis possíveis de serem medidas simultaneamente, as seguintes:

$$P_{\mu}^{\dagger}, \bar{\omega}^0, [A, B, \lambda_1, \lambda_2]$$

onde $\bar{\omega}^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{0\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu} P_{\lambda}$ é o operador helicidade do sistema.

Usando a base constituída pelos vetores

$$|\vec{P} \wedge [WS\lambda_1\lambda_2]\rangle$$

geramos totalmente o espaço correspondente ao sistema.

Análogo ao vetor estado de helicidade de uma partícula, podemos escrever para o vetor estado de helicidade do sistema das duas partículas:

$$|\vec{P} \wedge [WS\lambda_1\lambda_2]\rangle = R(\phi\theta) L_z |\vec{P} = 0 \wedge [WS\lambda_1\lambda_2]\rangle$$

Relação Entre o Estado de Helicidade do Sistema de duas Partículas e os Estados de Helicidade Correspondentes a cada uma das Partículas

Em lugar dos momentos \vec{p}_1 e \vec{p}_2 das partículas (1) e (2), pode-se usar o momento $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ do sistema centro de massa juntamente com o momento \vec{p} de uma das partículas em relação ao sistema centro de massa:

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \rightarrow (\vec{P}, \vec{p})$$

No sistema centro de massa temos:

$$|\vec{p}\lambda_1\rangle |-\vec{p}\lambda_2\rangle = \frac{1}{A} |\vec{P}=0, \vec{p}\lambda_1\lambda_2\rangle = \frac{1}{A} |\vec{P}=0, \phi\theta p\lambda_1\lambda_2\rangle$$

onde A é um fator de normalização e ϕ e θ são os ângulos polares de \vec{p} .

O módulo do momento $p = |\vec{p}|$ pode ser substituído pela massa total W pois

$$p^2 = \frac{\left[W^2 - (w_1 - w_2)^2 \right] \left[W^2 - (w_1 + w_2)^2 \right]}{4W^2}$$

Pondo $A = \sqrt{p/W}$, os vetores $|\vec{P} = 0, \phi \theta W \lambda_1 \lambda_2\rangle$ são normalizados tais que

$$\langle \vec{P}' = 0, \phi' \theta' W' \lambda_1' \lambda_2' | \vec{P} = 0, \phi \theta W \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \delta(P_0' - P_0) \delta^2(\Omega' - \Omega) \delta_{\lambda_1' \lambda_1} \delta_{\lambda_2' \lambda_2}$$

onde $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ e $d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\phi$

Observemos que o estado $|\vec{P} = 0, \phi \theta W \lambda_1 \lambda_2\rangle$ pode ser escrito como

$$R(\phi \theta) (L_z |000 \lambda_1\rangle L_{-z} |000 -\lambda_2\rangle)$$

Definimos:

$$|\vec{P} = 0, \Lambda [W S \lambda_1 \lambda_2]\rangle = \sqrt{\frac{2S+1}{4\pi}} \int d\cos\theta d\phi D_{\Lambda, \lambda_1 - \lambda_2}^{*S}(\phi \theta) |\vec{P} = 0, \phi \theta W \lambda_1 \lambda_2\rangle$$

Prova-se que este vetor é um autovetor do operador momento angular, bem como da sua terceira componente, com autovalores S e Λ respectivamente.

A formula inversa da definição acima é

$$|\vec{P} = 0, \phi \theta W \lambda_1 \lambda_2\rangle = \sum_{S\Lambda} \sqrt{\frac{2S+1}{4\pi}} D_{\Lambda, \lambda_1 - \lambda_2}^S(\phi \theta) |\vec{P} = 0, \Lambda [W S \lambda_1 \lambda_2]\rangle$$

(Prove por substituição)

Exercício 2.6

Como deve se modificar esta decomposição em ondas parciais, caso o centro de massa sofra as seguintes transformações:

a) $R(\phi \theta) L_z$

b) $R(\phi \theta) L_{-z}$

A relação entre $|\vec{P}\Lambda [WS\lambda_1\lambda_2]\rangle$ e os vetores $|p_1\lambda_1\rangle$ e $|p_2\lambda_2\rangle$ é obtida por

$$\begin{aligned} |\vec{P}\Lambda [WS\lambda_1\lambda_2]\rangle &= R(\phi\theta 0) L_z |\vec{P}=0\Lambda [WS\lambda_1\lambda_2]\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{2S+1}{4\pi}} \int d\cos\theta d\phi D_{\Lambda, \lambda_1-\lambda_2}^{*S}(\phi\theta 0) R(\phi\theta 0) L_z |\vec{P}=0\phi\theta W\lambda_1\lambda_2\rangle \end{aligned}$$

e como

$$|\vec{P}=0, \phi\theta W\lambda_1\lambda_2\rangle = \sqrt{\frac{P}{W}} |\vec{P}\lambda_1\rangle |-\vec{P}\lambda_2\rangle$$

obtemos o resultado

$$\begin{aligned} |\vec{P}\Lambda [WS\lambda_1\lambda_2]\rangle &= \sqrt{\frac{P}{W}} \sqrt{\frac{2S+1}{4\pi}} \int d\cos\theta d\phi D_{\Lambda, \lambda_1-\lambda_2}^{*S}(\phi\theta 0) \times \\ &\times \sum_{\lambda'_1\lambda'_2} D_{\lambda'_1\lambda_1}^{S_1}(R_1) D_{\lambda'_2\lambda_2}^{S_2}(R_2) |\vec{P}'_1\lambda'_1\rangle |\vec{P}'_2\lambda'_2\rangle \end{aligned}$$

onde R_1 e R_2 são rotações de Wigner.

A normalização é tal que

$$\langle \vec{P}'\Lambda' [W'S'\lambda'_1\lambda'_2] | \vec{P}\Lambda [WS\lambda_1\lambda_2] \rangle = \delta^4(P'_\mu - P_\mu) \delta_{S'S} \delta_{\Lambda'\Lambda} \delta_{\lambda'_1\lambda_1} \delta_{\lambda'_2\lambda_2}$$

Consideremos agora as propriedades de transformação dos vetores

$|\vec{P}=0, \Lambda [WS\lambda_1\lambda_2]\rangle$ diante das reflexões espaciais e temporais.

Operação Paridade

$$P |\vec{P}=0, \Lambda [WS\lambda_1\lambda_2]\rangle = \eta_1 \eta_2 (-)^{S-S_1-S_2} |\vec{P}=0, \Lambda [W S -\lambda_1 -\lambda_2]\rangle$$

onde η_1 e η_2 são as paridades intrínsecas das partículas (1) e (2).

Exercício 2.7

Prove que, para $\vec{P} \neq 0$, aplicando a transformação paridade P resulta

$$P \left| \vec{P} \Lambda \left[WS \lambda_1 \lambda_2 \right] \right\rangle = \eta_1 \eta_2 (-)^{-s_1 - s_2} \left| -\vec{P} - \Lambda \left[WS - \lambda_1 - \lambda_2 \right] \right\rangle .$$

Compare com a formula correspondente para o estado de helicidade de uma partícula

Exercício 2.8

Prove que, aplicando a transformação reflexão Y pelo plano xz tem-se

$$Y \left| \vec{P} \Lambda \left[WS \right] \lambda_1 \lambda_2 \right\rangle = \eta (-)^{S - \Lambda} \left| \vec{P}^r - \Lambda \left[WS \right] - \lambda_1 - \lambda_2 \right\rangle$$

onde $\eta = \eta_1 \eta_2 (-)^{S - s_1 - s_2}$ e \vec{P}^r é o momento \vec{P} refletido pelo plano xz .

Compare com a formula correspondente para o estado de helicidade de uma partícula.

Operação Reversão do Tempo

$$T \left| \vec{P}=0, \Lambda \left[WS \lambda_1 \lambda_2 \right] \right\rangle = (-)^{S - \Lambda} \left| \vec{P}=0, -\Lambda \left[WS \lambda_1 \lambda_2 \right] \right\rangle .$$

Operação Permutação

O operador A_{12} troca as duas partículas. Para que esta operação tenha sentido, é necessário que as duas partículas sejam idênticas; pelo menos, dentro de uma simetria.

Por exemplo, em $SU(2)$, prótons e neutrons são idênticos. Se as partículas são idênticas os possíveis vetores estado

devem ter propriedade definida de simetria. De fato, os vetores estado devem ser simétricos se as partículas idênticas forem bósons e antisimétricos se elas forem férmions.

Exercício 2.9

Prove que para partículas idênticas ($s_1 = s_2$) vale:

$$A_{12} |\vec{P}=0, \phi \theta W \lambda_1 \lambda_2\rangle = (-)^{2s_1} |\vec{P}=0, \pi+\phi, \pi-\theta W \lambda_2 \lambda_1\rangle .$$

Veremos agora o efeito da aplicação de A_{12} no estado $|\vec{P} \Lambda [WS \lambda_1 \lambda_2]\rangle$.

Como

$$|\vec{P} \Lambda [WS \lambda_1 \lambda_2]\rangle = R(\phi \theta 0) L_z |\vec{P}=0 \Lambda [WS \lambda_1 \lambda_2]\rangle$$

onde

$$|\vec{P}=0 \Lambda [WS \lambda_1 \lambda_2]\rangle = \sqrt{\frac{2S+1}{4\pi}} \int \cos \theta d\phi D_{\Lambda, \lambda_1 - \lambda_2}^{*S}(\phi \theta 0) |\vec{P}=0, \phi \theta W \lambda_1 \lambda_2\rangle$$

e

$$D_{m,n}^{*S}(\phi \theta 0) = (-)^{-S} D_{m,-n}^{*S}(\pi+\phi, \pi-\theta, 0)$$

e usando o resultado do exercício anterior temos:

$$\begin{aligned} A_{12} |\vec{P} \Lambda [WS \lambda_1 \lambda_2]\rangle &= R(\phi \theta 0) L_z A_{12} |\vec{P}=0 \Lambda [WS \lambda_1 \lambda_2]\rangle = \\ &= (-)^{S-2s_1} \sqrt{\frac{2S+1}{4\pi}} R(\phi \theta 0) L_z \int d\cos \theta' d\phi' D_{\Lambda, \lambda_2 - \lambda_1}^{*S}(\pi+\phi', \pi-\theta', 0) \times \\ &\quad \times |\vec{P}=0, \pi+\phi', \pi-\theta', W \lambda_2 \lambda_1\rangle \end{aligned}$$

Pondo $\pi+\phi' = \phi''$ e $\pi-\theta' = \theta''$ temos $d\cos\theta'd\phi' = d\cos\theta''d\phi''$ e portanto

$$A_{12} \left| \vec{P}\Lambda \left[WS\lambda_1\lambda_2 \right] \right\rangle = (-)^{S-2s_1} \left| \vec{P}\Lambda \left[WS\lambda_2\lambda_1 \right] \right\rangle .$$

Algumas vezes, é mais conveniente se usar uma outra base de vetores estado tal que os números quânticos da helicidade λ_1, λ_2 , são substituídos pelo momento orbital relativo ℓ e pelo spin resultante σ das partículas. Esta base denominada - base do momento angular (ou base LS) é constituída pelos vetores

$$\left| \vec{P}\Lambda \left[WS\ell\sigma \right] \right\rangle$$

onde

$$\vec{\sigma} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

e

$$\vec{S} = \vec{\ell} + \vec{\sigma}$$

A relação entre estes vetores e os $\left| \vec{P}\Lambda \left[WS\lambda_1\lambda_2 \right] \right\rangle$ será:

$$\left| \vec{P}=0\Lambda \left[WS\ell\sigma \right] \right\rangle = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \left(\frac{2\ell+1}{2S+1} \right)^{1/2} \langle s_1\lambda_1, s_2-\lambda_2 | \sigma\lambda \rangle \langle \ell 0, \sigma\lambda | S\lambda \rangle \times$$

$$\times \left| \vec{P}=0\Lambda \left[WS\lambda_1\lambda_2 \right] \right\rangle$$

onde $\langle \ell 0, \sigma\lambda | S\lambda \rangle$ e $\langle s_1\lambda_1, s_2-\lambda_2 | \sigma\lambda \rangle$ são coeficientes de Clebsh-Gordon com $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$.

A normalização é tal que

$$\langle \vec{P}'\Lambda' \left[W'S'\ell'\sigma' \right] | \vec{P}\Lambda \left[WS\ell\sigma \right] \rangle = \delta^4(P'_\mu - P_\mu) \delta_{S'S} \delta_{\Lambda'\Lambda} \delta_{\ell'\ell} \delta_{\sigma'\sigma}$$

As aplicações dos operadores P , T e A_{12} resultam:

$$\begin{aligned}
 P \left| \vec{P}=0, \Lambda \left[WS \ell \sigma \right] \right\rangle &= \eta_1 \eta_2 (-)^{\ell} \left| \vec{P}=0, \Lambda \left[WS \ell \sigma \right] \right\rangle \\
 T \left| \vec{P}=0, \Lambda \left[WS \ell \sigma \right] \right\rangle &= (-)^{S-\Lambda} \left| \vec{P}=0, -\Lambda \left[WS \ell \sigma \right] \right\rangle \\
 A_{12} \left| \vec{P} \Lambda \left[WS \ell \sigma \right] \right\rangle &= (-)^{\ell+\sigma-2s_1} \left| \vec{P} \Lambda \left[WS \ell \sigma \right] \right\rangle
 \end{aligned}$$

Como vemos estes vetores são autovetores dos operadores paridade (para $\vec{P}=0$) e permutação.

Autoestados dos Operadores C e G

Vimos no capítulo anterior que o fóton γ e a partícula π^0 são autoestados do operador C conjugação de carga com autovalores -1 e $+1$ respectivamente. Portanto, um sistema constituído de n fótons e k píons neutros será autoestado de C , tal que

$$C |n\gamma; k\pi^0\rangle = (-)^n |n\gamma; k\pi^0\rangle$$

Um sistema constituído por uma partícula p e sua antipartícula \bar{p} tem os números quânticos carga, número bariônico, número leptônico e hipercarga iguais a zero ($Q = B = L = Y = 0$) e portanto é um autoestado de C .

Na Teoria de Campo prova-se que

$$C |p\bar{p}\rangle = (-)^{2s_1} A_{12} |p\bar{p}\rangle$$

Quando o sistema $p\bar{p}$ é descrito pelo estado de helicidade

$$\left| \vec{P} \Lambda \left[WS \lambda_1 \lambda_2 \right] \right\rangle$$

temos

$$C \left| \vec{P}_\Lambda \left[WS\lambda_1\lambda_2 \right] \right\rangle = (-)^S \left| \vec{P}_\Lambda \left[WS\lambda_2\lambda_1 \right] \right\rangle$$

e portanto, este estado sô será autoestado de C se $\lambda_2 = \lambda_1$. Para $\lambda_2 \neq \lambda_1$, podemos construir os estados

$$\left| \vec{P}_\Lambda \left[WS\lambda_1\lambda_2 \right] \right\rangle \pm \left| \vec{P}_\Lambda \left[WS\lambda_2\lambda_1 \right] \right\rangle$$

que são autoestados de C com autovalores $(-)^S$ e $(-)^{S+1}$ respectivamente.

Quando o sistema $p\bar{p}$ é descrito pelo vetor estado

$$\left| \vec{P}_\Lambda \left[WS\ell\sigma \right] \right\rangle$$

temos

$$C \left| \vec{P}_\Lambda \left[WS\ell\sigma \right] \right\rangle = (-)^{2s_1} A_{12} \left| \vec{P}_\Lambda \left[WS\ell\sigma \right] \right\rangle = (-)^{\ell+\sigma} \left| \vec{P}_\Lambda \left[WS\ell\sigma \right] \right\rangle$$

e portanto é um autovetor de C com autovalor $(-)^{\ell+\sigma}$.

Um sistema partícula e antipartícula no esquema SU(2) tem $B = L = Y = 0$ e não necessariamente $Q = 0$ (por exemplo proton e antineutron).

Quando este sistema é tal que corresponde a um determinado estado de isospin I (por exemplo o sistema proton e antineutron tem $|I=1, I_z=1\rangle$), então ele pode ser um autoestado do operador $G = CR(0\pi 0) = R(0\pi 0)C$, onde R é uma rotação no espaço de isospin.

Nã Teoria de Campo prova-se que

$$G \left| p\bar{p}, II_3 \right\rangle = (-)^{2s_1+I} A_{12} \left| p\bar{p}, II_3 \right\rangle$$

Portanto

$$G \left| \vec{P}\Lambda \left[WS\lambda_1\lambda_2 \right] II_3 \right\rangle = (-)^{S+I} \left| \vec{P}\Lambda \left[WS\lambda_2\lambda_1 \right] II_3 \right\rangle$$

que para $\lambda_1 \neq \lambda_2$ não é um autoestado de G . Entretanto, podemos construir os estados

$$\left| \vec{P}\Lambda \left[WS\lambda_1\lambda_2 \right] II_3 \right\rangle \pm \left| \vec{P}\Lambda \left[WS\lambda_2\lambda_1 \right] II_3 \right\rangle$$

que são autoestados de G com autovalores $(-)^{S+I}$ e $(-)^{S+I+1}$ respectivamente.

Descrevendo o sistema pelo vetor estado

$$\left| \vec{P}\Lambda \left[WS\ell\sigma \right] II_3 \right\rangle$$

temos

$$G \left| \vec{P}\Lambda \left[WS\ell\sigma \right] II_3 \right\rangle = (-)^{\ell+\sigma+I} \left| \vec{P}\Lambda \left[WS\ell\sigma \right] II_3 \right\rangle,$$

e portanto é um autovetor de G com autovalor $(-)^{\ell+\sigma+I}$.

2.3 - Estados de Helicidade para um Sistema de Muitas Partículas

Consideremos um sistema constituído por n ($n \geq 3$) partículas livres (1) (2) ... (n) de massas w_i e spins s_i . O espaço de Hilbert H do sistema é o produto direto dos espaços de Hilbert $H(w_i, s_i)$ individuais das partículas

$$H = H(w_1, s_1) \otimes H(w_2, s_2) \otimes \dots \otimes H(w_n, s_n)$$

e os vetores neste espaço são:

$$\left| \vec{p}_1\lambda_1 \right\rangle \left| \vec{p}_2\lambda_2 \right\rangle \dots \left| \vec{p}_n\lambda_n \right\rangle$$

Como no caso do sistema de duas partículas, queremos decompor o espaço produto em uma soma direta de espaços de representações irreduzíveis. Estes espaços podem ser gerados pela base constituída pelos vetores

$$|\vec{P}\Lambda [WSc]\rangle$$

\vec{P} é o momento do sistema das n partículas (momento do centro de massa); Λ é a helicidade total do sistema; W e S são os autovalores dos operadores de Casimir correspondentes à massa total W e ao spin S total do sistema; c consiste dos autovalores dos operadores adicionais de Casimir (existem 4n-6 operadores adicionais de Casimir).

Para se construir estes operadores de Casimir, existem várias diferentes possibilidades. A mais simples, é a generalização do acoplamento de duas partículas; primeiro formamos o sistema de duas partículas, para então acoplarmos com uma terceira, formando então um sistema para ser acoplado a uma quarta partícula e assim sucessivamente.

$$(((12)3)4) \dots$$

Construímos os seguintes geradores

$$p_{\mu}^{(12)} = p_{\mu}^{(1)} + p_{\mu}^{(2)}$$

$$M_{\mu\nu}^{(12)} = M_{\mu\nu}^{(1)} + M_{\mu\nu}^{(2)}$$

$$p_{\mu}^{(123)} = p_{\mu}^{(12)} + p_{\mu}^{(3)} = \sum_{i=1}^3 p_{\mu}^{(i)}$$

$$M_{\mu\nu}^{(123)} = M_{\mu\nu}^{(12)} + M_{\mu\nu}^{(3)} = \sum_{i=1}^3 M_{\mu\nu}^{(i)}$$

.....

.....

$$p_{\mu}^{(1\dots n)} = \sum_{i=1}^n p_{\mu}^{(i)}$$

$$M_{\mu\nu}^{(1\dots n)} = \sum_{i=1}^n M_{\mu\nu}^{(i)}$$

e

$$\omega_{(i)}^\sigma = \frac{1}{2} \varepsilon^{\sigma\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu}^{(i)} P_\lambda^{(i)} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\omega_{(12)}^\sigma = \frac{1}{2} \varepsilon^{\sigma\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu}^{(12)} P_\lambda^{(12)}$$

$$\omega_{123}^\sigma = \frac{1}{2} \varepsilon^{\sigma\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu}^{(123)} P_\lambda^{(123)}$$

No acoplamento (12) existem os seguintes operadores de Casimir independentes

$$P_\mu^{(12)} P^\mu_{(12)} \quad , \quad \omega_{(12)}^\sigma \omega_\sigma^{(12)} \quad , \quad \omega_{(1)}^\sigma P_\sigma^{(12)} \quad , \quad \omega_{(2)}^\sigma P_\sigma^{(12)}$$

que correspondem respectivamente a massa e spin do sistema (12), à helicidade da partícula (1) e à da partícula (2) no sistema em re pouso. Analogamente, no acoplamento (12) com a partícula (3) temos

$$P_\mu^{(123)} P^\mu_{(123)} \quad , \quad \omega_{(123)}^\sigma \omega_\sigma^{(123)} \quad , \quad \omega_{12}^\sigma P_\sigma^{(123)} \quad , \quad \omega_3^\sigma P_\sigma^{(123)}$$

que correspondem a massa e spin do sistema (123), à helicidade do sistema (12) e à da partícula (3) no sistema em repouso de (123).

Para um sistema de n partículas existem, portanto, 4n-4 operadores de Casimir incluindo a massa total do sistema

$$\left\{ P_\mu^{(1\dots n)} P^\mu_{(1\dots n)} \right\} \quad \text{e o spin total} \quad \left\{ \omega_{(1\dots n)}^\sigma \omega_\sigma^{(1\dots n)} \right\} \quad .$$

A seguir, vamos considerar um sistema de 3 partículas e veremos a relação entre o estado de helicidade do sistema das 3 partículas e os estados de helicidade correspondentes a cada uma das partículas. Em analogia ao sistema de 2 partículas, definimos, para o sistema de 3 partículas, o seguinte vetor estado

$$\begin{aligned}
 |\vec{P}=0, \bar{\phi}\bar{\theta}W; \phi\theta w \lambda_1 \lambda_2; \lambda_3\rangle &= |\vec{P}=0, \bar{\omega}W; \omega w; \lambda_1 \lambda_2; \lambda_3\rangle = \\
 &= AR(\bar{\omega}) \left\{ \left[L_z R(\omega) (|00p\lambda_1\rangle |00-p\lambda_2\rangle) \right] |00-p_3\lambda_3\rangle \right\}
 \end{aligned}$$

onde $\phi\theta$ são os ângulos polares de \vec{p} no sistema 12 e $\bar{\phi}\bar{\theta}$ os de \vec{p}_3 no sistema 123

$$R(\bar{\omega}) = R(\bar{\phi}\bar{\theta}0), \quad R(\omega) = R(\phi\theta 0);$$

w e W são as massas dos sistemas (12) e (123); L_z é a transformação de Lorentz do sistema (12) ao sistema (123).

Tomando o fator A como $A = (pp_3/W_{123})^{1/2}$ resultará a seguinte normalização

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{P}'\bar{\omega}'W'; \omega'w' \lambda'_1 \lambda'_2; \lambda'_3 | \vec{P}\bar{\omega}W; \omega w \lambda_1 \lambda_2; \lambda_3 \rangle &= \\
 &= \delta^4(p'_\mu - p_\mu) \delta^2(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) \delta^2(\omega' - \omega) \delta(w' - w) \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} \delta_{\lambda'_3 \lambda_3}
 \end{aligned}$$

Convém salientar que λ_1 e λ_2 são helicidades referentes ao sistema em repouso de (12) e λ_3 é a helicidade referente ao sistema em repouso de (123).

Definimos:

$$\begin{aligned}
 |\vec{P} = 0 \Lambda [WSws \lambda_1 \lambda_2; \mu \lambda_3]\rangle &= \\
 &= \sqrt{\frac{2S+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}} \int d\bar{\omega}d\omega D_{\Lambda, \mu - \lambda_3}^{*S}(\bar{\omega}) D_{\mu, \lambda_1 - \lambda_2}^{*s}(\omega) |\vec{P}=0, \bar{\omega}W; \omega w \lambda_1 \lambda_2; \lambda_3\rangle
 \end{aligned}$$

onde S e s são os spins totais do sistema (123) e (12); Λ é a helicidade total do sistema (123) e $\mu = \lambda_{12}$ a helicidade do sistema (12) no sistema em repouso de (123).

A fórmula inversa da definição acima é:

$$\begin{aligned}
 & |\vec{P}=0, \bar{\omega}W; \omega W \lambda_1 \lambda_2; \lambda_3 \rangle = \\
 & = \sum_{\substack{S \Lambda \\ s \mu}} \sqrt{\frac{2S+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}} D_{\Lambda, \mu-\lambda_3}^S(\bar{\omega}) D_{\mu, \lambda_1-\lambda_2}^S(\omega) |\vec{P}=0 \Lambda [WSws \lambda_1 \lambda_2; \mu \lambda_3] \rangle
 \end{aligned}$$

(Prove por substituição)

A normalização é tal que

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{P}' \Lambda' [W'S'w's' \lambda'_1 \lambda'_2; \mu' \lambda'_3] | \vec{P} \Lambda [WSws \lambda_1 \lambda_2; \mu \lambda_3] \rangle = \\
 & = \delta^4(P'_\mu - P_\mu) \delta(w' - w) \delta_{\Lambda' \Lambda} \delta_{S' S} \delta_{s' s} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} \delta_{\mu' \mu} \delta_{\lambda'_3 \lambda_3}
 \end{aligned}$$

Operação Paridade

$$P |\vec{P}=0 \Lambda [WSws \lambda_1 \lambda_2; \mu \lambda_3] \rangle = \eta_1 \eta_2 \eta_3 (-)^{S-s_1-s_2-s_3} |\vec{P}=0 \Lambda [WSws -\lambda_1 -\lambda_2; -\mu -\lambda_3] \rangle$$

Operação Reversão do Tempo

$$T |\vec{P}=0 \Lambda [WSws \lambda_1 \lambda_2; \mu \lambda_3] \rangle = (-)^{S-\Lambda} |\vec{P}=0 -\Lambda [WSws \lambda_1 \lambda_2; \mu \lambda_3] \rangle$$

Base do Momento Angular

Sejam ℓ e σ o momento angular orbital relativo e o spin resultante das partículas 1 e 2. Semelhantemente, o momento angular relativo e o spin resultante (do sistema 12 e da partícula 3) serão designados por L e Σ respectivamente. Em analogia ao que foi feito para o caso do sistema de 2 partículas, introduzimos a base momento angular constituída pelos vetores:

$$|\vec{P}\Lambda [WSws\ell\sigma L\Sigma]\rangle \text{ com } \vec{S}=\vec{\Sigma}+\vec{L}, \vec{\Sigma}=\vec{s}+\vec{s}_3, \vec{s}=\vec{\sigma}+\vec{\ell}$$

A relação entre estes vetores e os anteriores será

$$\begin{aligned} & |\vec{P}\Lambda [WSws\ell\sigma L\Sigma]\rangle = \\ & = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \sum_{\mu\lambda_3} \left(\frac{2\ell+1}{2s+1}\right)^{1/2} \left(\frac{2L+1}{2S+1}\right)^{1/2} \langle s_1\lambda_1, s_2-\lambda_2 | \sigma\lambda \rangle \langle \ell 0, \sigma\lambda | s\lambda \rangle \langle s\mu, s_3-\lambda_3 | \Sigma M \rangle \times \\ & \times \langle L 0, \Sigma M | S M \rangle |\vec{P}\Lambda [WSws\lambda_1\lambda_2\mu\lambda_3]\rangle \end{aligned}$$

A normalização é tal que

$$\begin{aligned} & \langle P'\Lambda' [W'S'w's'\ell'\sigma'L'\Sigma'] | \vec{P}\Lambda [WSws\ell\sigma L\Sigma] \rangle = \\ & = \delta^4(P'_\mu - P_\mu) \delta(w'-w) \delta_{\Lambda'\Lambda} \delta_{S'S} \delta_{s's} \delta_{s_3's_3} \delta_{\ell'\ell} \delta_{\sigma'\sigma} \delta_{L'L} \delta_{\Sigma'\Sigma} \end{aligned}$$

As aplicações dos operadores P e T resultam

$$P |\vec{P}=0\Lambda [WSws\ell\sigma L\Sigma]\rangle = \eta_1\eta_2\eta_3 (-)^{L+\ell} |\vec{P}=0, \Lambda [WSws\ell\sigma L\Sigma]\rangle$$

$$T |\vec{P}=0\Lambda [WSws\ell\sigma L\Sigma]\rangle = (-)^{S-\Lambda} |\vec{P}=0, -\Lambda [WSws\ell\sigma L\Sigma]\rangle$$

Como vemos, estes vetores são autovetores do operador paridade.

A maneira como o estado de helicidade para o sistema de n partículas foi construído, isto é, pelo acoplamento sucessivo de partículas $((12)3)4\dots$, resulta num tratamento diferente para as partículas (por exemplo, suas helicidades estão relacionadas a

diferentes sistemas de referência).

Para sistemas contendo partículas idênticas, é aconselhável tratá-las igualmente, isto é, relaciona-las ao mesmo sistema de referência. Para isto, precisamos de outro conjunto de operadores de Casimir. Escolhemos os seguintes $4n-4$ operadores:

$p_{\mu}^{(12\dots n)} p_{(12\dots n)}^{\mu}$ - relacionado à massa total W do sistema

$\omega_{\sigma}^{(12\dots n)} \omega_{(12\dots n)}^{\sigma}$ - relacionado ao spin total S do sistema

$\omega_{\mu}^{(12\dots n)} a^{\mu}$ - onde a^{μ} é um quadrivetor operador construído pelos diferentes momentos p_{μ}^i . Quando este invariante é normalizado, ele significa a projeção do spin total na direção de \vec{a} no sistema centro de massa total. Denotaremos por K o seu autovalor.

$\omega_{\mu}^i p_{(12\dots n)}^{\mu}$ - são n operadores relacionados às helicidades λ_i individuais das partículas, medidas no sistema centro de massa total.

$\chi_j(p_1 \dots p_n)$ - são outros $(3n-7)$ operadores escalares ou pseudoescalares de Casimir construídos pelos momentos p_i das partículas. Para um sistema de 3 partículas usa-se comumente os seguintes: $\chi_1 = (p_{\mu}^{(2)} + p_{\mu}^{(3)})^2$ e $\chi_2 = (p_{\mu}^{(1)} + p_{\mu}^{(2)})^2$ cujos autovalores são as massas efetivas utilizadas como variáveis no gráfico de Dalitz.

Portanto, o vetor estado para o sistema de n partículas pode ser escrito por

$$|\vec{P}\Lambda [WSK\chi\lambda]\rangle$$

onde χ e λ são os conjuntos

$$\chi = (\chi_1 \chi_2 \dots \chi_{3n-7}) \quad \text{e} \quad \lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)$$

Vamos considerar as seguintes duas possibilidades para K:

a) Escolhendo $p_\mu^{(1)}$ como a_μ , o autovalor K será a projeção do momento angular total na direção do momento da partícula 1 no sistema centro de massa total;

b) Escolhemos $a^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} p_\nu^{(1)} p_\rho^{(2)} p_\lambda^{(12\dots n)}$, isto é, a forma invariante do produto vetorial de $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ no sistema (12...n). No caso n=3, o autovalor K será a projeção do momento angular total na direção da normal ao plano dos momentos das três partículas em relação ao sistema centro de massa.

No primeiro caso, K é autovalor de um operador pseudo-escalar e no segundo de um operador escalar.

Para se estabelecer a relação entre o estado de helicidade do sistema e os estados correspondentes a cada uma das partículas, definimos, no sistema centro de massa total, o seguinte vetor estado:

$$|\vec{P}=0, \alpha\beta\gamma W\chi\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{A}} R(\alpha\beta\gamma) \prod_{i=1}^n |\vec{\pi}_i \lambda_i\rangle$$

onde $|\vec{\pi}_i \lambda_i\rangle$ são os vetores estado de cada uma das partículas com

momento $\vec{\pi}_i$ e helicidade λ_i no sistema centro de massa. Escolhemos a orientação de 2 das partículas e com isto as outras são fixadas e pela rotação $R(\alpha, \beta, \gamma)$ pode-se obter qualquer orientação no espaço. A escolha desta orientação é feita por conveniência prática.

Para o caso a) em que $a_\mu = p_\mu^{(1)}$ escolhemos $\vec{\pi}_1 = (0, 0, p_1)$ na direção do eixo z; $\vec{\pi}_2 = (0, \theta_2, p_2)$ no plano xz e $\vec{\pi}_k$ é fixado por (ϕ_k, θ_k, p_k) onde $k = 3 \dots n$.

Para o caso b) em que $a^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} p_\nu^{(1)} p_\rho^{(2)} p_\lambda^{(1 \dots n)}$ escolhemos $\vec{\pi}_1 = (0, \frac{\pi}{2}, p_1)$ na direção do eixo x; $\vec{\pi}_2 = (\phi_2, \frac{\pi}{2}, p_2)$ no plano xy e $\vec{\pi}_k = (\phi_k, \theta_k, p_k)$ onde $k = 3 \dots n$.

A rotação $R(\alpha\beta\gamma)$ leva os vetores $\vec{\pi}_i$ nos vetores \vec{p}_i

$$\vec{p}_i = R(\alpha\beta\gamma)\vec{\pi}_i$$

e portanto

$$R(\alpha\beta\gamma) |\vec{\pi}_i, \lambda_i\rangle = e^{-i\lambda_i \gamma} |\vec{p}_i, \lambda_i\rangle,$$

como foi mostrado anteriormente (pág. 58)

Escolheremos como fator de normalização A o jacobiano da seguinte transformação das variáveis

$$\prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{E_i} = A d^4 P d\alpha d\cos\beta d\gamma \prod_{j=1}^{3n-7} d\chi_j$$

A normalização será tal que

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}'_\alpha \beta' \gamma' W' \chi' \lambda' | \vec{p}_\alpha \beta \gamma W \chi \lambda \rangle &= \\ &= \delta^4(p'_\mu - p_\mu) \delta(\alpha' - \alpha) \delta(\cos\beta' - \cos\beta) \delta(\gamma' - \gamma) \prod_{j=1}^{3n-7} \delta(\chi'_j - \chi_j) \prod_{i=1}^n \delta_{\lambda'_i, \lambda_i} \end{aligned}$$

onde

$$|\vec{P}\alpha\beta\gamma W\chi\lambda\rangle = R(\phi\theta 0)L_z|\vec{P}=0,\alpha\beta\gamma W\chi\lambda\rangle$$

A relação deste vetor com o $|\vec{P}\Lambda[WSK\chi\lambda]\rangle$ é:

$$|\vec{P}\Lambda[WSK\chi\lambda]\rangle = \sqrt{\frac{2S+1}{8\pi^2}} \int d\alpha d\cos\beta d\gamma D_{\Lambda K}^{*S}(\alpha\beta\gamma) |\vec{P}\alpha\beta\gamma W\chi\lambda\rangle$$

O fator $8\pi^2$ aparece porque a integração é em relação aos 3 ângulos de Euler.

A fórmula inversa da definição acima é dada por

$$|\vec{P}\alpha\beta\gamma W\chi\lambda\rangle = \sum_{S\Lambda} \sum_{K=-S}^S \sqrt{\frac{2S+1}{8\pi^2}} D_{\Lambda K}^S(\alpha\beta\gamma) |\vec{P}\Lambda[WSK\chi\lambda]\rangle$$

A normalização para $|\vec{P}\Lambda[WSK\chi\lambda]\rangle$ será tal que

$$\langle \vec{P}'\Lambda' [W'S'K'\chi'\lambda'] | \vec{P}\Lambda [WSK\chi\lambda] \rangle = \delta^4(P'_\mu - P_\mu) \delta_{\Lambda'\Lambda} \delta_{K'K} \delta_{S'S} \prod_{j=1}^{3n-7} \delta(\chi'_j - \chi_j) \times \\ \times \prod_{i=1}^n \delta_{\lambda'_i \lambda_i}$$

Prova-se que no caso a) em que $a_\mu = p_\mu^{(1)}$, K é a projeção do momento angular na direção do momento da partícula 1 no sistema centro de massa; e no caso b), em que $a^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} p_\nu^{(1)} p_\rho^{(2)} p_\lambda^{(12\dots n)}$, K é a projeção do momento angular na direção da normal ao plano definido por \vec{p}_1 e \vec{p}_2 no sistema centro de massa.

Aplicando as transformações paridade e reversão do tempo teremos para o caso a) em que K é um autovalor de um operador pseudoescalar:

$$P |\vec{P}=0,\Lambda [WSK\chi\lambda]\rangle = (-)^{S-K} \left\{ \prod_{i=1}^n (-)^{S_i - \lambda_i} n_i \right\} |\vec{P}=0,\Lambda [WS-K\hat{\chi}-\lambda]\rangle \\ T |\vec{P}=0,\Lambda [WSK\chi\lambda]\rangle = (-)^{S-\Lambda} |\vec{P}=0,-\Lambda [WSK\hat{\chi}\lambda]\rangle$$

com $-\lambda = (-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n)$ e $\hat{\chi} = (\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2, \dots, \hat{\chi}_{3n-7})$ obtidos pela reflexão dos $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_{3n-7})$ em relação ao plano definido pelos vetores $\vec{\pi}_1$ e $\vec{\pi}_2$. Para o sistema de 3 partículas, sendo χ_1 e χ_2 as variáveis do gráfico de Dalitz, teremos $\hat{\chi}_1 = \chi_1$ e $\hat{\chi}_2 = \chi_2$.

E para o caso b) em que K é um autovalor de um operador escalar, teremos:

$$P \left| \vec{P}=0 \Lambda \left[WSK\chi\lambda \right] \right\rangle = (-)^K \left\{ \prod_{i=1}^n (-)^{s_i} n_i \right\} \left| \vec{P}=0 \Lambda \left[WSK\tilde{\chi}-\lambda \right] \right\rangle$$

$$T \left| \vec{P}=0 \Lambda \left[WSK\chi\lambda \right] \right\rangle = (-)^{\Lambda + \sum_{i=1}^n \lambda_i} \left| \vec{P}=0 \Lambda \left[WS-K\tilde{\chi}\lambda \right] \right\rangle$$

com $\tilde{\chi} = (\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \dots, \tilde{\chi}_{3n-7})$ obtidos pela reflexão dos $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{3n-7})$ em relação ao plano definido pelos vetores $\vec{\pi}_1$ e $\vec{\pi}_2$. Para o sistema de 3 partículas, sendo χ_1 e χ_2 as variáveis do gráfico de Dalitz, teremos $\tilde{\chi}_1 = \chi_1$ e $\tilde{\chi}_2 = \chi_2$.

3. REAÇÕES

3.1 - Amplitudes de Espalhamento

Procuramos as amplitudes que descrevam o processo de espalhamento $ab \rightarrow cde \dots$, supondo que as partículas envolvidas (a,b, c,d,e...) tenham spin. Principalmente trataremos do caso particular das reações binárias $ab \rightarrow cd$ (em que o espalhamento elástico $ab \rightarrow ab$ é um caso especial).

O processo de espalhamento deve ser invariante em relação as transformações de Poincaré, e portanto o operador S de espalhamento deve comutar com todos os geradores do grupo de Poincaré. Deveremos ter

$$\left[S, P_\mu \right] = 0 \quad \left[S, M_{\mu\nu} \right] = 0$$

Em relação à invariância diante das transformações paridade e inversão no tempo (caso dos processos eletromagnéticos e fortes) podemos escrever:

$$\left[S, P \right] = 0 \quad S^\dagger = T S T^\dagger$$

Pelo lema de Schur concluímos que S é múltiplo do operador identidade do grupo de Poincaré.

Estudaremos agora, as amplitudes de helicidade do processo. Para isto, descreveremos os estados inicial (i) e final (f) do espalhamento pelos seguintes vetores de estado de partículas livres:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |ab\rangle = |\vec{p}_a \lambda_a \vec{p}_b \lambda_b\rangle & \text{ou} & \quad |i\rangle = |\vec{P}, \phi \theta W \lambda_a \lambda_b\rangle \\ |f\rangle &= |cde \dots\rangle = |\vec{p}_c \lambda_c \vec{p}_d \lambda_d \vec{p}_e \lambda_e \dots\rangle & \text{ou} & \quad |f\rangle = |\vec{P}, \bar{\phi} \bar{\theta} W, \phi \theta \dots\rangle \end{aligned}$$

dependendo do problema.

Os elementos da matriz S serão:

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \langle \vec{p}_c \lambda_c \vec{p}_d \lambda_d \vec{p}_e \lambda_e \dots | S | \vec{p}_a \lambda_a \vec{p}_b \lambda_b \rangle$$

ou

$$S_{fi} = \langle \vec{P}, \vec{\phi} \bar{\theta} W, \phi \theta \dots | S | \vec{P}, \phi \theta W \lambda_a \lambda_b \rangle$$

Da invariância em relação às translações no espaço-tempo (i.e., $[S, P_\mu] = 0$) resulta a conservação de momento e energia; portanto,

$$S_{fi} = \delta^4 \left(\sum_i p_\mu - \sum_f p_\mu \right) S(\vec{p}_a \lambda_a \vec{p}_b \lambda_b, \vec{p}_c \lambda_c, \dots)$$

ou

$$S_{fi} = \delta^4 (P_\mu - P'_\mu) S(\vec{P} \phi \theta W \lambda_a \lambda_b \dots)$$

Como o operador S é um múltiplo do operador identidade do grupo de Poincaré, ele só depende dos autovalores dos operadores de Casimir da representação (i.e., depende de grandezas relativisticamente invariantes).

Consideremos o espalhamento no sistema centro de massa CM em que o eixo z está na direção da partícula incidente.

$$S_{fi} = \delta^4 \left(\sum_i p_\mu - \sum_f p_\mu \right) \langle \vec{p}_c \lambda_c \dots | S | 00 p \lambda_a, 00 -p \lambda_b \rangle$$

ou

$$S_{fi} = \delta^4 (P_\mu - P'_\mu) \langle \vec{P}=0, \dots | S | \vec{P}=0, 00 W \lambda_a \lambda_b \rangle .$$

A conservação de paridade no processo de espalhamento implica:

$$[S, P] = 0 \quad \text{ou} \quad S = P^\dagger S P$$

e portanto

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|P^+SP|i\rangle = \langle Pf|S|Pi\rangle$$

Como o momento angular também se conserva, isto é, $[S,R] = 0$, podemos usar, em vez da invariância em relação a P a invariância em relação a $Y = R(0\pi 0)P$, reflexão pelo plano xz :

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|Y^+SY|i\rangle = \langle Yf|S|Yi\rangle$$

Já vimos que $Y|\vec{p}\lambda\rangle = \eta(-)^{s-\lambda}|\vec{p}^r-\lambda\rangle$, onde \vec{p}^r é o momento refletido pelo plano xz , (pág. 59), portanto:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c^{\lambda_c} \vec{p}_d^{\lambda_d} \dots |S| \vec{p}_a^{\lambda_a} \vec{p}_b^{\lambda_b} \rangle &= \frac{\eta_c \eta_d \dots (-)^{s_a - \lambda_a + s_b - \lambda_b + s_c - \lambda_c \dots}}{\eta_a \eta_b} \times \\ &\times \langle \vec{p}_c^r - \lambda_c \vec{p}_d^r - \lambda_d \dots |S| \vec{p}_a^r - \lambda_a \vec{p}_b^r - \lambda_b \rangle \end{aligned}$$

Notemos que $\vec{p}_a^r = \vec{p}_a$ e $\vec{p}_b^r = \vec{p}_b$, pois são vetores no eixo z .

Se, nas reações binárias, escolhermos o plano xz como o plano de produção, teremos:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_c^{\lambda_c} \vec{p}_d^{\lambda_d} |S| \vec{p}_a^{\lambda_a} \vec{p}_b^{\lambda_b} \rangle &= \frac{\eta_c \eta_d}{\eta_a \eta_b} (-)^{s_a - \lambda_a + s_b - \lambda_b + s_c - \lambda_c + s_d - \lambda_d} \times \\ &\times \langle \vec{p}_c - \lambda_c \vec{p}_d - \lambda_d |S| \vec{p}_a - \lambda_a \vec{p}_b - \lambda_b \rangle \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}=0, \phi=0, \theta W \lambda_c \lambda_d |S| \vec{P}=0, 0, 0, W \lambda_a \lambda_b \rangle &= \frac{\eta_c \eta_d}{\eta_a \eta_b} (-)^{s_a - \lambda_a + s_b + \lambda_b + s_c - \lambda_c + s_d - \lambda_d} \times \\ &\times \langle \vec{P}=0, \phi=0, \theta W - \lambda_c - \lambda_d |S| \vec{P}=0, 0, 0, W - \lambda_a - \lambda_b \rangle \end{aligned}$$

A invariância do processo de espalhamento diante da transformação (anti-unitária) de reversão do tempo, implica

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|(T^+S^+T)|i\rangle = \langle Ti|S|Tf\rangle$$

A transformação de reversão do tempo relaciona a reação $ab \rightarrow cde\dots$ com a reação inversa $cde\dots \rightarrow ab$. Quando não existe invariância de reversão do tempo, não se pode relacionar estas duas reações. No caso de espalhamento elástico ($ab \rightarrow ab$), esta invariância implica numa relação entre dois valores da mesma amplitude, isto é,

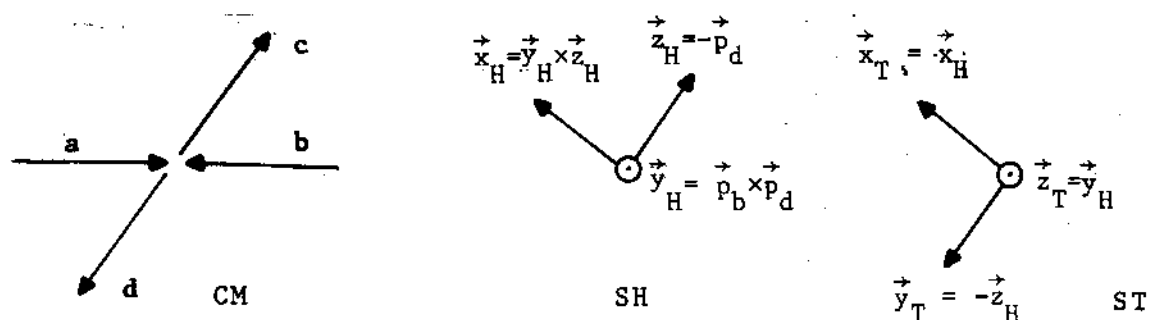
$$\langle \vec{p}_a \lambda_a \vec{p}_b \lambda_b | S | \vec{p}'_a \lambda'_a \vec{p}'_b \lambda'_b \rangle = (-)^{\lambda_a + \lambda_b - \lambda'_a - \lambda'_b} \langle -\vec{p}'_a \lambda'_a -\vec{p}'_b \lambda'_b | S | -\vec{p}_a \lambda_a -\vec{p}_b \lambda_b \rangle$$

Quando transformamos o estado de helicidade de uma partícula para o sistema em repouso da partícula, então a helicidade se transforma na terceira componente do spin, na direção da transformação. Uma outra possibilidade é quando, ao se fazer a transformação para o sistema em repouso da partícula, a terceira componente do spin seja perpendicular à direção da transformação.

Para reações binárias ($ab \rightarrow cd$) é muitas vezes aconselhável se construir amplitudes tais que, quando se faz a transformação para o sistema em repouso de cada uma das partículas, a terceira componente do seu spin seja perpendicular ao plano de produção. As amplitudes assim construídas são denominadas amplitudes de transversidade.

Consideremos uma reação $ab \rightarrow cd$ no sistema centro de massa CM. Definimos o sistema de helicidade SH para a partícula c, sendo o sistema em repouso de c com o eixo z na direção oposta a da partícula d ($\vec{z}_H = -\vec{p}_d$), o eixo y perpendicular ao plano de produção ($\vec{y}_H = \vec{p}_b \times \vec{p}_d$) e o eixo x como $\vec{x}_H = \vec{y}_H \times \vec{z}_H$.

Definimos o sistema de transversidade ST para a partícula c, como sendo o sistema em repouso de c com o eixo z coincidente ao eixo y do sistema de helicidade ($\vec{z}_T = \vec{y}_H$), o eixo x coincidente ao eixo x do sistema de helicidade ($\vec{x}_T = \vec{x}_H$) e o eixo y como $\vec{y}_T = \vec{z}_T \times \vec{x}_T = -\vec{z}_H$.



É fácil ver que o SH se transforma em ST por uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo x_H , a qual em função dos ângulos de Euler é:

$$R_x(\pi/2) = R\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{resultado do exercício 1.2})$$

Desta rotação, que é uma transformação passiva, resulta:

$$|\tau\rangle = R^{-1}|\lambda\rangle$$

onde $|\tau\rangle$ e $|\lambda\rangle$ são vetores no ST e SH, respectivamente.

Portanto, teremos a seguinte decomposição

$$|\tau\rangle = R^+|\lambda\rangle = \sum_{\mu} |\mu\rangle \langle \mu| R^+|\lambda\rangle = \sum_{\mu} D_{\lambda\mu}^{*S}(R) |\mu\rangle$$

Da mesma forma

$$\langle \tau| = \sum_{\mu} \langle \lambda| R |\mu\rangle \langle \mu| = \sum_{\mu} D_{\lambda\mu}^S(R) \langle \mu|$$

Consequentemente, podemos escrever a seguinte relação entre a amplitude de transversidade T e a amplitude de helicidade H

$$T_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b} = \sum_{\substack{\mu_a \mu_b \\ \mu_c \mu_d}} D_{\lambda_a \mu_a}^{*s_a}(R) D_{\lambda_b \mu_b}^{*s_b}(R) D_{\lambda_c \mu_c}^{s_c}(R) D_{\lambda_d \mu_d}^{s_d}(R) \cdot H_{\mu_c \mu_d \mu_a \mu_b}$$

onde

$$H_{\mu_c \mu_d \mu_a \mu_b} = \langle \vec{p}_c \mu_c \vec{p}_d \mu_d | S | \vec{p}_a \mu_a \vec{p}_b \mu_b \rangle$$

Pela conservação da paridade e sendo o plano xz do SH, o plano de produção, teremos

$$H^{\mu_c \mu_d \mu_a \mu_b} = \frac{\eta_c \eta_d}{\eta_a \eta_b} (-)^{s_a - \mu_a + s_b - \mu_b + s_c - \mu_c + s_d - \mu_d} H^{-\mu_c - \mu_d - \mu_a - \mu_b}$$

e como

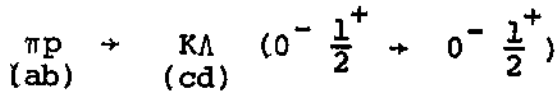
$$D_{\lambda \mu}^S \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = (-)^{s+\lambda-\mu} D_{\lambda-\mu}^S \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

resulta

$$T_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b} = \frac{\eta_c \eta_d}{\eta_a \eta_b} (-)^{\lambda_c + \lambda_d - \lambda_a - \lambda_b} T_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b}.$$

Exemplo:

Consideremos a reação



Existem as seguintes amplitudes de helicidade:

$$H^{\mu_c \mu_d \mu_a \mu_b} = \begin{pmatrix} H_{++} & H_{+-} \\ H_{-+} & H_{--} \end{pmatrix}$$

Pela conservação da paridade concluímos que

$$H_{++} = H_{--} \quad ; \quad H_{+-} = -H_{-+}$$

e portanto

$$H^{\mu_c \mu_d \mu_a \mu_b} = \begin{pmatrix} H_{++} & H_{+-} \\ -H_{+-} & H_{++} \end{pmatrix}$$

Existem as seguintes amplitudes de transversidade

$$T_{\lambda_d \lambda_b} = \begin{pmatrix} T_{++} & T_{+-} \\ T_{-+} & T_{--} \end{pmatrix}$$

Pela conservação da paridade concluímos que

$$T_{+-} = -T_{-+} \quad , \quad T_{-+} = -T_{+-} \quad ,$$

isto é

$$T_{-+} = T_{+-} = 0$$

e portanto

$$T_{\lambda_d \lambda_b} = \begin{pmatrix} T_{++} & 0 \\ 0 & T_{--} \end{pmatrix}$$

A relação entre as amplitudes T e H se obtém através de:

$$D_{\lambda\mu}^{1/2} \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \begin{pmatrix} D_{++}^{1/2} & D_{+-}^{1/2} \\ D_{-+}^{1/2} & D_{--}^{1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

como sendo:

$$T_{++} = H_{++} + i H_{+-}$$

$$T_{--} = H_{++} - i H_{+-}$$

Amplitudes de Refletividade

No sistema em repouso de uma partícula, os vetores $|\vec{p} = 0 \lambda\rangle$ (ou abreviadamente $|\lambda\rangle$) geram o espaço de spin. Em vez de usarmos

esta base constituída por $2s+1$ vetores ($\lambda=-s, -s+1, \dots, s$) que são autovetores de J_z e P (i.e $J_z|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ e $P|\lambda\rangle = \eta|\lambda\rangle$) utilizaremos uma outra base constituída por autovetores dos operadores paridade P e reflexão Y ($Y=R(0\pi 0)P$). Definimos o vetor $|\epsilon\lambda\rangle$ onde λ significa o módulo de λ , como combinação linear de $|\lambda\rangle$ e $|\lambda\rangle$ e determinamos os valores de ϵ tais que o vetor $|\epsilon\lambda\rangle$ seja um autovetor de Y com autovalor $(-)^{2s}\epsilon$, isto é,

$$Y|\epsilon\lambda\rangle = (-)^{2s}\epsilon|\epsilon\lambda\rangle.$$

Como sabemos, $Y|\lambda\rangle = \eta(-)^{s-\lambda}|\lambda\rangle$ e portanto

$$Y^2|\lambda\rangle = \eta(-)^{s-\lambda}Y|\lambda\rangle = (-)^{2s}|\lambda\rangle$$

Aplicando Y^2 em $|\epsilon\lambda\rangle = a|\lambda\rangle + b|\lambda\rangle$ temos

$$Y^2|\epsilon\lambda\rangle = (-)^{2s}(a|\lambda\rangle + b|\lambda\rangle) = (-)^{2s}|\epsilon\lambda\rangle$$

Entretanto, pela definição acima temos

$$Y^2|\epsilon\lambda\rangle = (-)^{2s}\epsilon Y|\epsilon\lambda\rangle = \epsilon^2|\epsilon\lambda\rangle$$

Concluimos portanto que

$$\epsilon^2 = (-)^{2s}$$

Para bosons (s inteiro) temos $\epsilon = \pm 1$ e para fermions (s semi-inteiro) temos $\epsilon = \pm i$ com $\epsilon\epsilon^* = 1$.

O autovetor $|\epsilon\lambda\rangle$ de Y com autovalor $(-)^{2s}\epsilon$ pode ser escrito como:

$$|\epsilon\lambda\rangle = c(\lambda)\{|\lambda\rangle + \epsilon\eta(-)^{s-\lambda}|\lambda\rangle\}$$

com

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= 1/\sqrt{2} && \text{para } \lambda > 0 \\ c(\lambda) &= 1/2 && \text{para } \lambda = 0 \\ c(\lambda) &= 0 && \text{para } \lambda < 0 \end{aligned}$$

De fato, aplicando Y em $|\epsilon\lambda\rangle$ temos:

$$\begin{aligned} Y|\epsilon\lambda\rangle &= c(\lambda) \left\{ \eta(-)^{s-\lambda} |-\lambda\rangle + \epsilon \eta(-)^{s-\lambda} \eta(-)^{s+\lambda} |\lambda\rangle \right\} = \\ &= \epsilon(-)^{2s} c(\lambda) \left\{ |\lambda\rangle + \frac{\eta}{\epsilon} (-)^{2s} (-)^{s-\lambda} |-\lambda\rangle \right\} \end{aligned}$$

Como $\epsilon^2 = (-)^{2s}$, podemos escrever

$$Y|\epsilon\lambda\rangle = \epsilon(-)^{2s} c(\lambda) \left\{ |\lambda\rangle + \eta \epsilon(-)^{s-\lambda} |-\lambda\rangle \right\} = \epsilon(-)^{2s} |\epsilon\lambda\rangle.$$

O vetor $|\epsilon\lambda\rangle$ é também autovetor do operador paridade P , pois

$$P|\epsilon\lambda\rangle = \eta c(\lambda) \left\{ |\lambda\rangle + \epsilon \eta(-)^{s-\lambda} |-\lambda\rangle \right\} = \eta |\epsilon\lambda\rangle$$

De $|\epsilon\lambda\rangle = c(\lambda) \left\{ |\lambda\rangle + \epsilon \eta(-)^{s-\lambda} |-\lambda\rangle \right\}$ podemos escrever a fórmula inversa

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle &= \sum_{\epsilon} |\epsilon\lambda\rangle c(\lambda) + \eta(-)^{s+\lambda} \epsilon^* |\epsilon-\lambda\rangle c(-\lambda) \\ &= \sum_{\epsilon} c(\lambda) |\epsilon\lambda\rangle + \eta \epsilon(-)^{s-\lambda} c(-\lambda) |\epsilon-\lambda\rangle \end{aligned}$$

Quando numa reação binária $ab \rightarrow cd$, introduzirmos esta base de vetores para uma das partículas (digamos, a partícula c), a relação entre a amplitude de refletividade R e a de helicidade H será

$$R(|\lambda_c| \epsilon_c)^{\lambda_d \lambda_a \lambda_b} = c(\lambda_c) \left\{ H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b} + \epsilon_c^* \eta_c (-)^{s-\lambda_c} H_{-\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b} \right\}$$

Para as outras partículas tem-se relações semelhantes.

Veremos mais tarde, a vantagem de se usar as amplitudes de refletividade.

3.2 - Desenvolvimento em Ondas Parciais

O desenvolvimento em ondas parciais significa a decomposição em estados de momentos angulares.

Para o vetor estado de uma partícula, já foi visto que o desenvolvimento em ondas parciais é dado por (pág. 61)

$$|\phi\theta p\lambda\rangle = \sum_{jm} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{m\lambda}^j(\phi\theta 0) |j m p \lambda\rangle$$

Para o sistema de duas partículas vimos que (pág. 67)

$$|\vec{P}, \phi\theta, W\lambda_1\lambda_2\rangle = \sum_{S\Lambda} \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}} D_{\Lambda, \lambda_1-\lambda_2}^S(\phi\theta 0) |\vec{P}\Lambda [W s \lambda_1 \lambda_2]\rangle,$$

o que, no sistema centro de massa na direção para frente se reduz a

$$|\vec{P}=0, 00W\lambda_1\lambda_2\rangle = \sum_{S\Lambda} \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}} D_{\Lambda, \lambda_1-\lambda_2}^S(000) |\vec{P}=0\Lambda [W s \lambda_1 \lambda_2]\rangle,$$

e como $D_{\Lambda, \lambda_1-\lambda_2}^S(000) = \delta_{\Lambda, \lambda_1-\lambda_2}$ temos

$$|\vec{P}=0, 00W\lambda_1\lambda_2\rangle = \sum_S \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}} |\vec{P}=0(\lambda_1-\lambda_2) [W s \lambda_1 \lambda_2]\rangle$$

Para o sistema de três partículas, vimos que o desenvolvimento em ondas parciais é dado por: (pág. 78)

$$|\vec{P}=0, \bar{\omega}W; \omega\lambda_1\lambda_2; \lambda_3\rangle = \sum_{S\Lambda} \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}} D_{\Lambda, \mu-\lambda_3}^S(\bar{\omega}) D_{\mu, \lambda_1-\lambda_2}^S(\omega) \times \\ \times |\vec{P}=0\Lambda [W S w s \lambda_1 \lambda_2; \mu \lambda_3]\rangle$$

O desenvolvimento em ondas parciais da amplitude de espalhamento para a reação binária ($ab \rightarrow cd$) será:

$$S_{fi} = \langle \vec{P}=0 \phi\theta W \lambda_c \lambda_d | S | \vec{P}=0 00 W \lambda_a \lambda_b \rangle =$$

$$= \sum_{\substack{s \Lambda \\ s' \Lambda'}} \frac{\sqrt{(2s+1)(2s'+1)}}{4\pi} D_{\Lambda, \lambda_c - \lambda_d}^{*s}(\phi\theta 0) \delta_{\Lambda', \lambda_a - \lambda_b} \times$$

$$* \langle \vec{P} = 0 \Lambda \left[W s \lambda_c \lambda_d \right] | S | \vec{P}' = 0 \Lambda' \left[W s' \lambda_a \lambda_b \right] \rangle$$

a conservação do momento angular implica que

$$\langle \vec{P} = 0 \Lambda \left[W s \lambda_c \lambda_d \right] | S | \vec{P}' = 0 \Lambda' \left[W s' \lambda_a \lambda_b \right] \rangle = \delta^4(P_\mu - P'_\mu) \delta_{ss'} \delta_{\Lambda\Lambda'} S_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b}^{(s)}(W).$$

Os elementos $S_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b}^{(s)}$ são invariantes relativísticos e dependem somente de uma variável contínua $P_\mu P^\mu = W^2$ e das quantidades invariantes s e λ_i ; portanto podemos escrever

$$S_{fi} = \delta^4(P_\mu - P'_\mu) \sum_s \frac{2s+1}{4\pi} D_{\lambda_a - \lambda_b, \lambda_c - \lambda_d}^{*s}(\phi\theta 0) S_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b}^{(s)}(W)$$

Para o espalhamento na direção para frente ($\phi = \theta = 0$), isto é, quando o quadrimomento transferido t é mínimo ($t' = |t - t_{\min}| = 0$), no desenvolvimento em ondas parciais aparecem somente as amplitudes em que $\lambda_a - \lambda_b = \lambda_c - \lambda_d$ pois

$$D_{\lambda_a - \lambda_b, \lambda_c - \lambda_d}^s(000) = \delta_{\lambda_a - \lambda_b, \lambda_c - \lambda_d}$$

Assim, no espalhamento para frente de pions com nucleons ($\pi N \rightarrow \pi N$), as únicas contribuições para a amplitude serão: S_{--}^s e S_{++}^s .

Para reações a muitos corpos ($ab \rightarrow cde \dots$) teremos:

$$s_{fi} = \langle \vec{P} = 0 \alpha \beta \gamma W \chi \lambda | S | \vec{P}' = 0, 00 W \lambda_a \lambda_b \rangle =$$

$$\sum_{\substack{s \Lambda K \\ s' \Lambda'}} \sqrt{\frac{2s+1}{8\pi^2}} \sqrt{\frac{2s'+1}{4\pi}} D_{\Lambda K}^{*s}(\alpha\beta\gamma) \delta_{\Lambda', \lambda_a - \lambda_b} \times$$

$$\times \langle \vec{P} = 0 \Lambda \left[W s K \chi \lambda \right] | S | \vec{P}' = 0 \Lambda' \left[W s' \lambda_a \lambda_b \right] \rangle = \delta^4(P_\mu - P'_\mu) \sum_{sK} \frac{2s+1}{\sqrt{32\pi^3}} D_{\lambda_a - \lambda_b, K}^{*s}(\alpha\beta\gamma) \times$$

$$\times S_{K \lambda \lambda_a \lambda_b}^{(s)}(W, \chi)$$

A conservação da paridade em reações binárias implica:

$$S_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b}^{(s)} = \frac{\eta_a \eta_b}{\eta_c \eta_d} (-)^{s_a + s_b - s_c - s_d} S_{-\lambda_c -\lambda_d -\lambda_a -\lambda_b}^{(s)}$$

A invariância em relação a reversão do tempo ($\langle f|S|i\rangle = \langle Ti|S|Tf\rangle$) é como já foi dito, particularmente importante para o espalhamento elástico ($ab \rightarrow ab$) em que as partículas iniciais são iguais às finais. Neste caso, obtêm-se as seguintes restrições adicionais para as amplitudes:

$$S_{\lambda'_a \lambda'_b \lambda_a \lambda_b}^{(s)}(W) = S_{\lambda_a \lambda_b \lambda'_a \lambda'_b}^{(s)}(W)$$

Exemplos

a) Consideramos o espalhamento elástico neutron-próton ($np \rightarrow np$). Veremos como a invariância em relação à paridade e reversão do tempo, limita o número das diferentes amplitudes parciais. Para o momento angular total $s \neq 0$ existem $2^4 = 16$ amplitudes parciais.

Pela conservação da paridade temos

$$S_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d} = S_{-\lambda_a -\lambda_b -\lambda_c -\lambda_d}$$

isto é, $S_{++++} = S_{----}$; $S_{+++ -} = S_{-+++}$; $S_{++--} = S_{--++}$, etc, e portanto o número de amplitudes parciais se reduzirá à metade (isto é, 8). Da invariância diante da reversão do tempo, existe ainda 2 restrições adicionais

$$S_{++++} = S_{-+++} \quad e \quad S_{++--} = S_{--++}$$

Portanto, existem 6 amplitudes parciais independentes.

b) O desenvolvimento em ondas parciais, para a reação entre 4 partículas de spins zero ($00 \rightarrow 00$) é bastante simples e pode ser escrita como:

$$S_{fi} = \delta^4(P_{\mu} - P'_{\mu}) \sum_s \frac{2s+1}{4\pi} D_{00}^{*s}(\phi\theta) S^{(s)}(w)$$

$$= \delta^4(P_{\mu} - P'_{\mu}) \sum_s \frac{2s+1}{4\pi} P_s(\theta) S^{(s)}(w)$$

onde $P_s(\theta)$ são os polinômios de Legendre.

Das invariâncias em relação à paridade e reversão do tempo não resulta nenhuma condição adicional para as amplitudes parciais.

Se a reação $00 \rightarrow 00$ representar um espalhamento elástico, então pelo fato de $S^{(s)}$ ser unitário, isto é $|S^{(s)}|^2 = 1$, as amplitudes parciais poderão ser descritas por meio de deslocamentos de fases δ_s (phase shifts), isto é

$$S^{(s)} = e^{2i\delta_s}$$

Exercício 3.1

Quantas amplitudes independentes existem para as reações seguintes:

- a) $pp \rightarrow pp$
- b) $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$
- c) $p\bar{p} \rightarrow n\bar{n}$

Base do Momento Angular (base LS)

Já vimos que usando a base do momento angular, o vetor estado do sistema de duas partículas pode ser descrito como: (pág. 71)

$$|\vec{P}\Lambda [W s \ell \sigma]\rangle = \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{2\ell+1}{2s+1}\right)^{1/2} \langle \ell 0, \sigma \lambda | s \lambda \rangle \langle s_1 \lambda_1, s_2 -\lambda_2 | \sigma \lambda \rangle \times \\ \times |\vec{P}\Lambda [W s \lambda_1 \lambda_2]\rangle$$

e inversamente

$$|\vec{P}\Lambda [W s \lambda_1 \lambda_2]\rangle = \sum_{\ell \sigma} \left(\frac{2\ell+1}{2s+1}\right)^{1/2} \langle \ell 0, \sigma \lambda | s \lambda \rangle \langle s_1 \lambda_1 s_2 -\lambda_2 | \sigma \lambda \rangle |\vec{P}\Lambda [W s \ell \sigma]\rangle$$

Considerando uma reação binária, a decomposição da amplitude de helicidade resulta em:

$$S_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b}^{(s)} = \langle \vec{P}=0\Lambda [W s \lambda_c \lambda_d] | S | \vec{P}=0\Lambda [W s \lambda_a \lambda_b] \rangle = \\ = \sum_{\substack{\ell \sigma \\ \ell' \sigma'}} \left(\frac{2\ell+1}{2s+1} \times \frac{2\ell'+1}{2s'+1}\right)^{1/2} \langle \ell 0, \sigma \lambda | s \lambda \rangle \langle s_a \lambda_a s_b -\lambda_b | \sigma \lambda \rangle \langle \ell' 0 \sigma' \lambda' | s \lambda' \rangle \times \\ \times \langle s_c \lambda_c s_d -\lambda_d | \sigma' \lambda' \rangle S_{\ell' \sigma' \ell \sigma}^{(s)}(W)$$

onde

$$S_{\ell' \sigma' \ell \sigma}^{(s)}(W) = \langle \vec{P}=0\Lambda [W s \ell' \sigma'] | S | \vec{P}=0\Lambda [W s \ell \sigma] \rangle$$

Exercício 3.2

Prove que o desenvolvimento em ondas parciais (base LS) da amplitude de espalhamento para a reação $ab \rightarrow cd$ é dado por:

$$\langle \vec{P}, \phi \theta W \lambda_c \lambda_d | S | \vec{P}'=0, 0 W \lambda_a \lambda_b \rangle = \delta^4(P_\mu - P'_\mu) \sum_s \sum_{\ell \sigma \ell' \sigma'} \frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{4\pi} \times \\ \times D_{\lambda', \lambda}^{s*}(\phi \theta 0) \langle s_c \lambda_c s_d -\lambda_d | \sigma \lambda \rangle \langle \ell 0 \sigma \lambda | s \lambda \rangle \langle s_a \lambda_a s_b -\lambda_b | \sigma' \lambda' \rangle \times \\ \times \langle \ell' 0 \sigma' \lambda' | s \lambda' \rangle S_{\ell \sigma \ell' \sigma'}^s(W).$$

A conservação de paridade em reações binárias implica:

$$S_{\ell'\sigma'\ell\sigma}^{(s)}(W) = \frac{\eta_c \eta_d}{\eta_a \eta_b} (-)^{\ell-\ell'} S_{\ell'\sigma'\ell\sigma}^{(s)}(W)$$

Esta relação é bem mais cômoda para se usar que a correspondente para amplitudes de helicidade.

A invariância em relação a reversão do tempo ($\langle f|S|i\rangle = \langle Tf|S|Ti\rangle$) que é importante nos espalhamentos elásticos, implica a seguinte relação

$$S_{\ell'\sigma'\ell\sigma}^{(s)}(W) = S_{\ell\sigma\ell'\sigma'}^{(s)}(W)$$

Como caso particular, estudaremos o espalhamento elástico, de partículas de spins e paridade ($0^- \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- \frac{1}{2}^+$); por exemplo, ($\pi p \rightarrow \pi p$).

A decomposição em ondas parciais na base da helicidade é:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= f_{\lambda_a \lambda_c}(\phi\theta) = \delta^4(P_\mu - P'_\mu) \langle \vec{P}=0, \phi\theta, W, \lambda_c | S | \vec{P}=0, 0, 0, W, \lambda_a \rangle \\ &= \delta^4(P_\mu - P'_\mu) \sum_s \frac{2s+1}{4\pi} D_{\lambda_a \lambda_c}^{*s}(\phi\theta) S_{\lambda_c \lambda_a}^{(s)}(W) \end{aligned}$$

A decomposição em ondas parciais na base do momento angular é dada por:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= f_{\lambda_a \lambda_c}(\phi\theta) = \\ &= \delta^4(P_\mu - P'_\mu) \sum_{s\ell\ell'} \frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{4\pi} D_{\lambda_a \lambda_c}^{*s}(\phi\theta) \langle \ell 0, \frac{1}{2} \lambda_c | s \lambda_c \rangle \times \\ &\times \langle \ell' 0, \frac{1}{2} \lambda_a | s \lambda_a \rangle S_{\ell'\ell}^{(s)}(W) \end{aligned}$$

A conservação de paridade implica

$$S_{\lambda_c \lambda_a}^{(s)} = S_{-\lambda_c -\lambda_a}^{(s)} \quad \text{isto é} \quad S_{\lambda_c \lambda_a}^{(s)} = \begin{pmatrix} S_{++}^{(s)} & S_{+-}^{(s)} \\ S_{+-}^{(s)} & S_{++}^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$d\sigma_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d \lambda_e \dots} = \frac{(2\pi)^2}{pW} \delta^4(\sum_i p_i - \sum_f p_f) |\langle \vec{p}_c \lambda_c \dots | T(W) | \vec{p}_a \lambda_a \vec{p}_b \lambda_b \rangle|^2 \prod_f \frac{d^3 p_f}{E_f}$$

(Para uma dedução rigorosa, consulte livros sobre física de partículas elementares).

Para a reação binária $ab \rightarrow cd$, a probabilidade de transição é

$$|\langle \vec{p}_c \lambda_c \vec{p}_d \lambda_d | T | \vec{p}_a \lambda_a \vec{p}_b \lambda_b \rangle|^2 = \frac{W^2}{p^2} |\langle \vec{p}=0, \phi \theta W \lambda_c \lambda_d | T | \vec{p}=0, 00 W \lambda_a \lambda_b \rangle|^2$$

pois

$$|\vec{p}=0, \phi \theta W \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sqrt{\frac{p}{W}} |\vec{p} \lambda_1 \rangle | -\vec{p} \lambda_2 \rangle$$

Como

$$\frac{d^3 p_c}{E_c} \frac{d^3 p_d}{E_d} = \frac{p}{W} d^4 p d\omega$$

onde $d\omega = d\cos\theta d\phi$ e P é o quadrimomento do sistema centro de massa, temos

$$d\sigma_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d} = \frac{(2\pi)^2 W^2}{pW p^2} |\langle \vec{p}=0, \phi \theta W \lambda_c \lambda_d | T(W) | \vec{p}=0, 00 W \lambda_a \lambda_b \rangle|^2 \times$$

$$\times \delta^4(P_i - P_f) \frac{p}{W} d^4 p d\omega = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 |\langle \vec{p}=0, \phi \theta W \lambda_c \lambda_d | T(W) | \vec{p}=0, 00 W \lambda_a \lambda_b \rangle|^2 d\omega$$

Analogamente para uma reação em que o estado final é constituído de n partículas, a seção de choque diferencial passa a ser:

$$d\sigma_{\lambda_a \lambda_b \lambda} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 |\langle \vec{p}=0, \alpha \beta \gamma W \chi \lambda | T(W) | \vec{p}=0, 00 W \lambda_a \lambda_b \rangle|^2 d\alpha d\beta d\gamma \prod_j d\chi_j$$

onde λ e χ são os conjuntos $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n)$ e $\chi = (\chi_1 \chi_2 \dots \chi_{3n-7})$

As seções de choque acima consideradas se referem a estados

iniciais e finais com helicidade fixas. No caso mais geral, quando o estado inicial é descrito por uma densidade de matriz, pode-se calcular facilmente a seção de choque da seguinte maneira:

Seja $\rho^{(i)}$ o operador densidade do estado inicial da reação definido por:

$$\rho^{(i)} = \sum_k |\psi_k\rangle p_k \langle \psi_k| = \sum_{ii'} |i\rangle \langle i| \sum_k |\psi_k\rangle p_k \langle \psi_k| i'\rangle \langle i'|$$

onde $|\psi_k\rangle$ representam os vetores de estado, e $\langle i| \sum_k |\psi_k\rangle p_k \langle \psi_k| i'\rangle = \rho_{ii'}$, é a matriz densidade na base $|i\rangle$.

Portanto

$$\rho^{(i)} = \sum_{ii'} |i\rangle \rho_{ii'} \langle i'|$$

Devido à reação, o operador densidade $\rho^{(i)}$ se transforma no operador densidade $\bar{\rho}$ tal que $\bar{\rho} = \sum_{ii'} T |i\rangle \rho_{ii'} \langle i'| T^\dagger$ onde T é o operador de transição.

A matriz densidade do estado final da reação na base $|f\rangle$ é

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{ff'} &= \sum_{ii'} \langle f|T|i\rangle \rho_{ii'} \langle i'|T^\dagger|f'\rangle = \\ &= \sum_{ii'} \langle f|T|i\rangle \rho_{ii'} \langle f'|T|i'\rangle^* \end{aligned}$$

Se a matriz densidade do estado inicial da reação for uma matriz diagonal, o traço da matriz densidade $\bar{\rho}_{ff}$, será

$$\text{Tr } \bar{\rho}_{ff} = \sum_{fi} |\langle f|T|i\rangle|^2 \rho_{ii}$$

Portanto, $\text{Tr } \bar{\rho}_{ff}$, representa, a menos de uma normalização a seção de choque diferencial da reação.

Por exemplo, para a reação binária $ab \rightarrow cd$ temos

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \sum_{\substack{\lambda_a \lambda_b \\ \lambda_c \lambda_d}} \frac{d\sigma_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d}}{d\omega} \rho_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \sum_{\substack{\lambda_a \lambda_b \\ \lambda_c \lambda_d}} |\langle \vec{P}=0 \phi \theta W \lambda_c \lambda_d | T(W) | \vec{P}=0 0 0 W \lambda_a \lambda_b \rangle|^2 \rho_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d}$$

Para o caso geral em que a matriz densidade do estado inicial não é diagonal, o traço da matriz densidade $\bar{\rho}_{ff'}$, isto é $\text{Tr } \bar{\rho}_{ff'}$, também será, a menos de uma normalização, a seção de choque diferencial da reação pois

$$\bar{\rho}_{ff'} = \sum_k \langle f | T | \psi_k \rangle p_k \langle \psi_k | T^\dagger | f' \rangle$$

onde ψ_k são os vetores estado.

Portanto, uma matriz densidade normalizada do estado final será

$$\rho_{ff'}(\text{estado final}) = \frac{\bar{\rho}_{ff'}}{\text{Tr } \bar{\rho}_{ff'}} = \frac{\sum_{ii'} \langle f | T | i \rangle \rho_{ii'} \langle f' | T | i' \rangle^*}{\sum_{ii'} \langle f | T | i \rangle \rho_{ii'} \langle f | T | i' \rangle^*}$$

Por exemplo, para a reação binária $ab \rightarrow cd$ temos

$$\rho_{ii'} = \rho_{\lambda_a \lambda_b \lambda'_a \lambda'_b}, \quad \langle f | T | i \rangle = \langle \vec{P}=0 \phi \theta W \lambda_c \lambda_d | T | \vec{P}=0 0 0 W \lambda_a \lambda_b \rangle$$

e portanto,

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \sum_{\substack{\lambda_a \lambda_b \lambda'_a \lambda'_b \\ \lambda_c \lambda_d}} \langle \vec{P}=0, \phi \theta W \lambda_c \lambda_d | T(W) | \vec{P}=0 0 0 W \lambda_a \lambda_b \rangle \rho_{\lambda_a \lambda_b \lambda'_a \lambda'_b} \times$$

$$\times \langle \vec{P}=0 \phi \theta \lambda_c \lambda_d | T(W) | \vec{P}=0, 0 0 \lambda'_a \lambda'_b \rangle^*$$

Como

$$\rho_{ff'}(\text{estado final}) = \frac{\bar{\rho}_{ff'}}{\text{Tr } \bar{\rho}_{ff'}}$$

teremos

$$\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d} = \frac{1}{\frac{d\sigma}{d\omega}} \times \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\substack{\lambda_a \lambda'_a \\ \lambda_b \lambda'_b}} \langle \vec{P}=0 \phi \theta W \lambda_c \lambda_d | T(W) | \vec{P}=0 0 0 W \lambda_a \lambda_b \rangle \times \\ \times \rho_{\lambda_a \lambda_b \lambda'_a \lambda'_b} \langle \vec{P}=0 \phi \theta W \lambda'_c \lambda'_d | T(W) | \vec{P}=0, 0 0 W \lambda'_a \lambda'_b \rangle^*$$

A matriz densidade $\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}$ é a matriz densidade combinada ("joint density matrix") referente ao sistema centro de massa. Esta matriz coincide com a referente ao sistema em repouso da partícula c ou da partícula d, pois a transformação ocorre ao longo do eixo do momento \vec{p}_c ou \vec{p}_d respectivamente. A matriz densidade de uma partícula, digamos da partícula c, será

$$\rho_{\lambda_c \lambda'_c}^{(c)} = \sum_{\lambda'_d} \rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}$$

Exemplos

1) Consideremos o espalhamento elástico $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ ($0^- 0^- \rightarrow 0^- 0^-$)

$$d\sigma = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 |\langle \vec{P}=0 \phi \theta W | T(W) | \vec{P}=0 0 0 W \rangle|^2 d\omega$$

Desenvolvendo $\langle \vec{P}=0 \phi \theta W | T | \vec{P}=0 0 0 W \rangle$ em ondas parciais temos

$$\langle \vec{P}=0 \phi \theta W | T(W) | \vec{P}=0 0 0 W \rangle = \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} D_{00}^J(\phi \theta) T^J(W)$$

Pelo fato da matriz S ser unitária, isto é $|S^J|^2 = 1$, podemos concluir $S^J = e^{2i\delta_J}$ e portanto $T^J = \frac{S^J - 1}{i} = \frac{e^{2i\delta_J} - 1}{i}$ onde δ_J representa um fator de fase.

E como $D_{00}^J(\phi \theta) = P_J(\cos \theta)$ temos

$$\langle \vec{P}=0 \phi \theta W | T(W) | \vec{P}=0 0 0 W \rangle = \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} \left(\frac{e^{2i\delta_J} - 1}{i} \right) P_J(\cos \theta)$$

concluimos portanto que

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{1}{2p}\right)^2 \left| \sum_J (2J+1) P_J(\cos\theta) \frac{e^{2i\delta_{J-1}}}{i} \right|^2$$

2) Consideremos o espalhamento elástico $N\pi \rightarrow N\pi \left(\frac{1}{2}0 \rightarrow \frac{1}{2}0\right)$.

O desenvolvimento em ondas parciais resulta em

$$\langle \vec{P}=0, \phi, \theta, \lambda_c | T(W) | \vec{P}=0, 0, 0, \lambda_a \rangle \equiv F_{\lambda_c \lambda_a}(\phi, \theta) = \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} D_{\lambda_a \lambda_c}^{*J}(\phi, \theta, 0) T_{\lambda_c \lambda_a}^J$$

onde $D_{\lambda_a \lambda_c}^{*J}(\phi, \theta, 0) = e^{i\lambda_a \phi} d_{\lambda_a \lambda_c}^J(\theta)$

e $T_{\lambda_c \lambda_a}^J$ desenvolvido na base do momento angular é

$$T_{\lambda_c \lambda_a}^J = \sum_{\ell \ell'} \frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{2J+1} \langle \ell 0, \frac{1}{2}\lambda_a | J\lambda_a \rangle \langle \ell' 0, \frac{1}{2}\lambda_c | J\lambda_c \rangle T_{\ell' \ell}^J$$

A conservação da paridade implica

$$T_{\ell' \ell}^J = (-)^{\ell-\ell'} T_{\ell \ell'}^J$$

e como $J = \ell \pm \frac{1}{2}$ e $J = \ell' \pm \frac{1}{2}$, isto é, $|\ell-\ell'|$ só pode assumir os valores 0 ou 1, portanto $T_{\ell' \ell}^J$ pode ter valores diferentes de zero somente no caso $\ell' = \ell$. Portanto

$$T_{\lambda_c \lambda_a}^J = \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{2J+1} \langle \ell 0, \frac{1}{2}\lambda_a | J\lambda_a \rangle \langle \ell 0, \frac{1}{2}\lambda_c | J\lambda_c \rangle T_{\ell}^J$$

Como $\ell = J \pm \frac{1}{2}$ os coeficientes da expressão acima são

$$\langle J + \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} | J, \pm \frac{1}{2} \rangle = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2J+1}{J+1}}$$

$$\langle J - \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} | J, \pm \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2J+1}{J}}$$

Substituindo estes valores na expressão de $T_{\lambda_c \lambda_a}^J$ temos para $\lambda_c = \lambda_a = + \frac{1}{2}$:

$$T_{++}^J = \frac{2(J + \frac{1}{2}) + 1}{2J + 1} \left(\frac{1}{4} \times \frac{2J + 1}{J + 1} \right) T_-^J + \frac{2(J - \frac{1}{2}) + 1}{2J + 1} \left(\frac{1}{4} \times \frac{2J + 1}{J} \right) T_+^J =$$

$$= \frac{1}{2} (T_-^J + T_+^J) \quad \text{onde} \quad T_-^J = T_{J+}^J \cdot \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad T_+^J = T_{J-}^J \cdot \frac{1}{2}$$

Analogamente para $\lambda_c = 1/2$ e $\lambda_a = -1/2$ temos

$$T_{+-}^J = \frac{1}{2} (T_+^J - T_-^J) .$$

Da conservação da paridade resulta

$$T_{++}^J = T_{--}^J \quad \text{e} \quad T_{+-}^J = T_{-+}^J$$

os elementos da matriz $d_{\lambda_a \lambda_c}^J(\theta)$ são

$$d_{++}^J(\theta) = d_{--}^J(\theta) = \frac{2}{2J+1} \cos \frac{\theta}{2} \left(P'_{J+\frac{1}{2}} - P'_{J-\frac{1}{2}} \right)$$

$$d_{-+}^J(\theta) = -d_{+-}^J(\theta) = \frac{2}{2J+1} \sin \frac{\theta}{2} \left(P'_{J+\frac{1}{2}} + P'_{J-\frac{1}{2}} \right)$$

onde P' é a derivada do polinômio de Legendre.

Portanto

$$F_{++}(\phi, \theta) = F_{--}(-\phi, \theta) = \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} e^{i\frac{\phi}{2}} \times \frac{2}{2J+1} \cos \frac{\theta}{2} \left(P'_{J+1/2} - P'_{J-1/2} \right) T_{++}^J$$

e

$$-F_{-+}(\phi, \theta) = F_{+-}(-\phi, \theta) = \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} e^{i\frac{\phi}{2}} \times \frac{2}{2J+1} \sin \frac{\theta}{2} \left(P'_{J+1/2} + P'_{J-1/2} \right) T_{+-}^J$$

Como vimos que $l = l'$, a matriz S referente a base do momento angular será diagonal, isto é,

$$S_l^J = \begin{pmatrix} S_+^J & 0 \\ 0 & S_-^J \end{pmatrix}$$

O fato da matriz S ser unitária implica $|S_+^J|^2 = 1$ e $|S_-^J|^2 = 1$ e portanto

$$T_+^J = \frac{e^{2i\delta_+^J} - 1}{i} \quad e \quad T_-^J = \frac{e^{2i\delta_-^J} - 1}{i}$$

onde δ_+^J e δ_-^J são os fatores de fase.

As amplitudes relacionadas à reversão da helicidade (spin flip) $T_{+-} = T_{-+}$ e as amplitudes relacionadas à não reversão da helicidade (spin non-flip) $T_{++} = T_{--}$ podem ser escritas :

$$T_{++}^J = T_{--}^J = \frac{1}{2} (T_-^J + T_+^J) = \frac{1}{2i} (e^{2i\delta_+^J} + e^{2i\delta_-^J} - 2)$$

$$T_{+-}^J = T_{-+}^J = \frac{1}{2} (T_+^J - T_-^J) = \frac{1}{2i} (e^{2i\delta_+^J} - e^{2i\delta_-^J})$$

E portanto

$$\begin{aligned} F_{++}(\phi\theta) &= F_{--}(-\phi\theta) = \cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \sum_J \frac{1}{2\pi} (P_{J+1/2}' - P_{J-1/2}') \frac{1}{2i} (e^{2i\delta_+^J} + e^{2i\delta_-^J} - 2) \\ &= e^{i\phi/2} \cos\frac{\theta}{2} \sum_J \frac{1}{2\pi} (P_{J+1/2}' - P_{J-1/2}') \left[\frac{(e^{2i\delta_+^J} - 1)}{2i} + \frac{(e^{2i\delta_-^J} - 1)}{2i} \right] \\ &= e^{i\phi/2} \cos\frac{\theta}{2} \frac{1}{2\pi} \sum_J (P_{J_+}' - P_{J_-}') (f_{J_+} + f_{J_-}) \end{aligned}$$

onde

$$f_{J_+} = \frac{e^{2i\delta_+^J} - 1}{2i} \quad e \quad f_{J_-} = \frac{e^{2i\delta_-^J} - 1}{2i}$$

Analogamente

$$F_{-+}(\phi\theta) = -F_{+-}(-\phi\theta) = e^{i\phi/2} \sin\frac{\theta}{2} \frac{1}{2\pi} \sum_J (P_{J_+}' + P_{J_-}') (f_{J_+} - f_{J_-})$$

Podemos escrever

$$F_{\lambda_c \lambda_a}(\phi\theta) = \begin{bmatrix} F_{++} & F_{+-} \\ F_{-+} & F_{--} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta)e^{i\phi/2} & -B(\theta)e^{-i\phi/2} \\ B(\theta)e^{i\phi/2} & A(\theta)e^{-i\phi/2} \end{bmatrix}$$

A seção de choque diferencial é

$$\frac{d\sigma_{\lambda_c \lambda_a}}{d\omega} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \left| F_{\lambda_c \lambda_a}(\phi\theta) \right|^2$$

Se o estado inicial for descrito pela densidade de matriz $\rho_{\lambda_a \lambda'_a}$ teremos

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\lambda_c} \sum_{\lambda_a \lambda'_a} F_{\lambda_c \lambda_a} \rho_{\lambda_a \lambda'_a} F_{\lambda_c \lambda'_a}^*$$

A matriz densidade para o estado final é

$$\rho_{\lambda_c \lambda'_c} = \frac{1}{d\sigma} \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\lambda_a \lambda'_a} F_{\lambda_c \lambda_a} \rho_{\lambda_a \lambda'_a} F_{\lambda_c \lambda'_a}^*$$

3.4 - Reações com o Estado Inicial Não Polarizado

Consideremos, agora reações binárias ($ab \rightarrow cd$) com o estado inicial não polarizado, isto é, a matriz densidade $\rho_{\lambda_a \lambda_b \lambda'_a \lambda'_b}$ é dada por:

$$\rho_{\lambda_a \lambda_b \lambda'_a \lambda'_b} = \frac{1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \mathbb{I}$$

onde \mathbb{I} é a matriz identidade.

A amplitude de helicidade, neste caso, é

$$H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b}(\phi, \theta) = \langle \vec{P}=0, \phi \theta W_{\lambda_c \lambda_d} | T | \vec{P}=0, 00 W_{\lambda_a \lambda_b} \rangle =$$

$$= \sum_s \frac{2s+1}{4\pi} D_{\lambda_a - \lambda_b, \lambda_c - \lambda_d}^{*s}(\phi, \theta, 0) T_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b}^s(W)$$

e a seção de choque diferencial é

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\substack{\lambda_a \lambda_b \\ \lambda_c \lambda_d}} \frac{1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \left| H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b} \right|^2$$

Como vemos, a seção de choque é obtida tomando-se o quadrado das amplitudes, fazendo-se a soma para todos os estados finais e tirando-se a média para os estados iniciais.

A matriz densidade combinada ("joint density matrix") do estado final é

$$\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d} = \frac{1}{d\omega} \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\lambda_a \lambda_b} \frac{1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b} \times H_{\lambda'_c \lambda'_d \lambda_a \lambda_b}^*$$

É fácil ver que $d\sigma/d\omega$ e $\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}$ são independentes de ϕ . De fato, substituindo nas expressões acima o desenvolvimento em ondas parciais para a amplitude de helicidade, os termos dependentes de ϕ se cancelam, isto é, teremos

$$D_{\lambda_a - \lambda_b, \lambda_c - \lambda_d}^{*s}(\phi, \theta, 0) D_{\lambda_a - \lambda_b, \lambda'_c - \lambda'_d}^s(\phi, \theta, 0)$$

sendo função somente de θ .

Exercício 3.3

Prove que para as reações binárias ($ab \rightarrow cd$) com estado inicial não polarizado, a conservação da paridade implica

$$\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d} = (-)^{\lambda_c - \lambda_d - \lambda'_c + \lambda'_d} \rho_{-\lambda_c - \lambda_d - \lambda'_c - \lambda'_d}$$

Para a matriz densidade de uma partícula, digamos, da partícula c, isto é,

$$\rho_{\lambda_c \lambda_c'}^{(c)} = \sum_{\lambda_d} \rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda_c' \lambda_d}$$

a conservação de paridade implica:

$$\rho_{\lambda_c \lambda_c'}^{(c)} = (-)^{\lambda_c - \lambda_c'} \rho_{-\lambda_c - \lambda_c'}$$

Exercício 3.4

Considere o espalhamento $\pi N \rightarrow \pi N$ para nucleons iniciais não polarizados. Deduza a expressão da seção de choque diferencial e a polarização do nucleon no estado final.

A matriz densidade $\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda_c' \lambda_d'}$ pode ser determinada pelo decaimento posterior das partículas c e d em outras partículas, a saber, através dos seus ângulos de decaimento. Isto será tratado em detalhes no capítulo 4.

Usando-se as amplitudes de transversidade no lugar das amplitudes de helicidade, a conservação da paridade implica, para a matriz densidade com amplitudes de transversidade (matriz densidade no sistema de transversidade), a seguinte relação:

$$\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda_c' \lambda_d'}^T = (-)^{\lambda_c - \lambda_d - \lambda_c' + \lambda_d'} \rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda_c' \lambda_d'}^T$$

De fato, a conservação da paridade implica a seguinte relação para as amplitudes de transversidade (pág. 90)

$$T_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b} = \frac{\eta_c \eta_d}{\eta_a \eta_b} (-)^{\lambda_c + \lambda_d - \lambda_a - \lambda_b} T_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b}$$

e portanto

$$T_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b} \times T_{\lambda'_c \lambda'_d \lambda_a \lambda_b}^* = (-)^{\lambda_c - \lambda_d - \lambda'_c + \lambda'_d} T_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b} T_{\lambda'_c \lambda'_d \lambda_a \lambda_b}^*$$

disto resulta a relação acima para a matriz densidade.

Muitas vezes, é conveniente se usar a matriz densidade no sistema de refletividade. Consideremos tal matriz para uma partícula. Como a base considerada é constituída pelos vetores: $|\epsilon\lambda\rangle = c(\lambda) \{ |\lambda\rangle + \epsilon\eta(-)^{s-\lambda} |-\lambda\rangle \}$ com $\epsilon^2 = (-)^{2s}$ e $c(\lambda) = 1/\sqrt{2}$ para $\lambda > 0$; $c(\lambda) = 1/2$ para $\lambda = 0$ e $c(\lambda) = 0$ para $\lambda < 0$, a matriz densidade $\rho_{\lambda\lambda'}^{\epsilon\epsilon'}$ é

$$\begin{aligned} \rho_{\lambda\lambda'}^{\epsilon\epsilon'} &= \langle \epsilon\lambda | \rho | \epsilon'\lambda' \rangle = c(\lambda)c(\lambda') \{ \langle \lambda | + \epsilon^*\eta(-)^{s-\lambda} \langle -\lambda | \} \rho \{ | \lambda' \rangle + \\ &\quad + \epsilon'\eta(-)^{s-\lambda'} | -\lambda' \rangle \} \\ &= c(\lambda)c(\lambda') \{ \rho_{\lambda\lambda'} + \epsilon^*\epsilon'(-)^{\lambda-\lambda'} \rho_{-\lambda-\lambda'} + \epsilon^*\eta(-)^{s-\lambda} \rho_{-\lambda\lambda'} + \\ &\quad + \epsilon'\eta(-)^{s-\lambda'} \rho_{\lambda-\lambda'} \} \end{aligned}$$

Para as amplitudes de helicidade, a conservação da paridade implica que

$$\rho_{\lambda\lambda'} = (-)^{\lambda-\lambda'} \rho_{-\lambda-\lambda'}$$

e portanto

$$\rho_{\lambda\lambda'}^{\epsilon\epsilon'} = c(\lambda)c(\lambda') \left[\rho_{\lambda\lambda'} (1 + \epsilon^*\epsilon') + \epsilon^*\eta(-)^{s-\lambda} \rho_{-\lambda\lambda'} \left(1 + \frac{\epsilon'(-)^{2s}}{\epsilon^*} \right) \right]$$

Como $\epsilon = \pm 1$ quando s for inteiro e $\epsilon = \pm i$ quando s for semi-inteiro, temos

$$\left(1 + \frac{\epsilon'(-)^{2s}}{\epsilon^*} \right) = 1 + \epsilon'\epsilon^*$$

e portanto

$$\rho_{\lambda\lambda'}^{\epsilon\epsilon'} = (1 + \epsilon'\epsilon^*)c(\lambda)c(\lambda'), \left[\rho_{\lambda\lambda'} + \epsilon^*\eta(-)^{s-\lambda}\rho_{-\lambda\lambda'} \right]$$

Para $\epsilon = \epsilon'$ temos $\epsilon^*\epsilon' = 1$ e $1 + \epsilon'\epsilon^* = 2$

e para

$$\epsilon = -\epsilon' \text{ temos } \epsilon^*\epsilon' = -1 \text{ e } 1 + \epsilon^*\epsilon' = 0 ;$$

e portanto sempre $(1 + \epsilon'\epsilon^*) = 2\delta_{\epsilon\epsilon'}$,

Portanto

$$\rho_{\lambda\lambda'}^{\epsilon\epsilon'} = 2c(\lambda)c(\lambda') \left[\rho_{\lambda\lambda'} + \epsilon^*\eta(-)^{s-\lambda}\rho_{-\lambda\lambda'} \right] \delta_{\epsilon\epsilon'}$$

e pode-se verificar que

$$\text{Tr } \rho_{\lambda\lambda'}^{\epsilon} = 1$$

Assim, a conservação de paridade divide a matriz densidade em duas outras

$$\left(\begin{array}{c|c} \rho_{\lambda\lambda'}^{(+)} & 0 \\ \hline 0 & \rho_{\lambda\lambda'}^{(-)} \end{array} \right)$$

onde (+) representa $+\epsilon = +\epsilon'$ e (-) representa $-\epsilon = -\epsilon'$.

Inversamente temos

$$\rho_{\lambda\lambda'}^{\epsilon} = \int_{\epsilon'} \left\{ \rho_{\lambda\lambda'}^{\epsilon\epsilon'} c(\lambda)c(\lambda') + \epsilon^*\eta(-)^{s+\lambda'} \rho_{\lambda-\lambda'}^{\epsilon} c(\lambda)c(-\lambda') + \epsilon\eta(-)^{s+\lambda} \rho_{-\lambda'}^{\epsilon} c(-\lambda)c(\lambda') \right. \\ \left. + (-)^{\lambda-\lambda'} \rho_{-\lambda-\lambda'}^{\epsilon} c(-\lambda)c(-\lambda') \right\}$$

Exemplos

a) A matriz densidade para uma partícula de spin e paridade 1^- (por exemplo o méson ρ) na base de helicidade é

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} & \rho_{1-1} \\ & \rho_{00} & -\rho_{10}^* \\ & & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \text{Tr } \rho = 2\rho_{11} + \rho_{00} = 1,$$

pois sendo ρ hermitiano temos $\rho_{\lambda\lambda'} = \rho_{\lambda'\lambda}^*$, e pela conservação da paridade temos $\rho_{\lambda\lambda'} = (-)^{\lambda-\lambda'} \rho_{-\lambda-\lambda'}$. Na base de refletividade, $\varepsilon = \pm 1$, temos

$$\rho_{\lambda\lambda'}^{(\pm)} = 2c(\lambda)c(\lambda') \left[\rho_{\lambda\lambda'} \pm (-)^{\lambda} \rho_{-\lambda-\lambda'} \right]$$

e usando os valores de $c(\lambda)$ resulta

$$\rho_{00}^{(+)} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left[\rho_{00} + \rho_{00} \right] = \rho_{00} \quad ; \quad \rho_{00}^{(-)} = 0 \quad ;$$

$$\rho_{11}^{(\pm)} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\rho_{11} \mp \rho_{-11} \right] = \rho_{11} \mp \rho_{-11}$$

$$\rho_{10}^{(+)} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \left[\rho_{10} - \rho_{-10} \right] = \frac{2}{\sqrt{2}} \rho_{10}$$

portanto temos

$$\left(\begin{array}{cc|c} \rho_{11}^{(+)} & \rho_{10}^{(+)} & 0 \\ & \rho_{00}^{(+)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \rho_{11}^{(-)} \end{array} \right)$$

b) A matriz densidade para uma partícula de spin e paridade $3/2^+$ (por exemplo a ressonância bariônica Δ) na base de helicidade é

$$\begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{31} & \rho_{3-1} & \rho_{3-3} \\ & \rho_{11} & \rho_{1-1} & \rho_{3-1}^* \\ & & \rho_{11} & -\rho_{31}^* \\ & & & \rho_{33} \end{pmatrix}$$

Na base de refletividade, $\epsilon = \pm i$, temos

$$\rho_{\lambda\lambda'}^{(\pm)} = 2c(\lambda)c(\lambda') \left[\rho_{\lambda\lambda'} + i(-)^{s-\lambda} \rho_{-\lambda\lambda'} \right]$$

e os valores de $c(\lambda)$ resulta

$$\rho_{33}^{(+)} = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\rho_{33} - i \rho_{-33} \right] = \left[\rho_{33} - \text{Im} \rho_{3-3} \right]$$

$$\rho_{11}^{(+)} = \rho_{11} + \text{Im} \rho_{1-1} ; \quad \rho_{31}^{(+)} = \rho_{31} - i \rho_{3-1} ;$$

$$\rho_{33}^{(-)} = \rho_{33} + \text{Im} \rho_{3-3} ; \quad \rho_{11}^{(-)} = \rho_{11} - \text{Im} \rho_{1-1} ;$$

$$\rho_{31}^{(-)} = \rho_{31} + i \rho_{3-1} ;$$

portanto temos

$$\begin{pmatrix} \rho_{33}^{(+)} & \rho_{31}^{(+)} & & 0 \\ & \rho_{11}^{(+)} & & \\ \hline & & \rho_{33}^{(-)} & \rho_{31}^{(-)} \\ 0 & & & \rho_{11}^{(-)} \end{pmatrix}$$

3.5 - Reações Com o Estado Inicial Polarizado

Consideremos agora, as reações, nas quais o estado inicial

é polarizado; e em particular a reação que ocorre comumente, entre um pseudoescalar meson e uma partícula de spin 1/2, isto é, a reação $(0^- \ 1/2^+)$.

A matriz densidade do estado inicial para a reação binária $ab \rightarrow cd$ é

$$\rho_{\lambda_a \lambda_b \lambda'_a \lambda'_b} = \rho_{\lambda_b \lambda'_b}^{1/2} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1-P_z \end{pmatrix}$$

onde $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$ é o vetor polarização e $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ consiste as matrizes de Pauli (vide capítulo 1 pág. 15)

Considerando o plano xz como o plano da reação, a seção de choque diferencial é

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\omega} &= \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \sum_{\lambda_a \lambda_b \lambda'_a \lambda'_b} \langle \vec{P}=0, \phi=0 | T | \vec{P}=0, 0 \rangle \rho_{\lambda_a \lambda_b \lambda'_a \lambda'_b} \times \\ &\quad \times \langle \vec{P}=0, \phi=0 | T | \vec{P}=0, 0 \rangle^* = \\ &= \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \sum_{\lambda_b \lambda'_b} H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_b} \times \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})_{\lambda_b \lambda'_b} H_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_b}^* \end{aligned}$$

A densidade de matriz do estado final $\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}$ é

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\omega} \times \rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d} &= \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \sum_{\lambda_b \lambda'_b} H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_b} \times \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})_{\lambda_b \lambda'_b} H_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_b}^* = \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_0 \left(\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}^{(0)} + P_x \rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}^{(x)} + P_y \rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}^{(y)} + P_z \rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}^{(z)} \right) \end{aligned}$$

sendo

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_0 \quad e \quad \rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}^{(0)}$$

a seção de choque e a matriz densidade do estado final, ambos para o caso em que o estado inicial não for polarizado, isto é,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_0 = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\substack{\lambda_b \\ \lambda_c \lambda_d}} \left| H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_b} \right|^2$$

e

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_0 \rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}^{(0)} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\lambda_b} H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_b} \times H_{\lambda'_c \lambda'_d \lambda_b}^*$$

e

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_0 \rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\lambda_b \lambda'_b} H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_b} \times \sigma_{\lambda'_b \lambda'_b} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} H_{\lambda'_c \lambda'_d \lambda'_b}^*$$

Conservação da Paridade

Pelo resultado do exercício 3.3 podemos escrever

$$\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}^0 = (-)^{\lambda_c - \lambda_d - \lambda'_c + \lambda'_d} \rho_{-\lambda_c - \lambda_d - \lambda'_c - \lambda'_d}^0$$

Como

$$(\sigma_x)_{\lambda_b \lambda'_b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\sigma_x)_{-\lambda_b - \lambda'_b} = (-)^{\lambda_b - \lambda'_b + 1} (\sigma_x)_{-\lambda_b - \lambda'_b}$$

$$(\sigma_y)_{\lambda_b \lambda'_b} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -(\sigma_y)_{-\lambda_b - \lambda'_b} = (-)^{\lambda_b - \lambda'_b} (\sigma_y)_{-\lambda_b - \lambda'_b}$$

$$(\sigma_z)_{\lambda_b \lambda'_b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -(\sigma_z)_{-\lambda_b - \lambda'_b} = (-)^{\lambda_b - \lambda'_b + 1} (\sigma_z)_{-\lambda_b - \lambda'_b}$$

e

$$H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_b} \times H_{\lambda'_c \lambda'_d \lambda'_b}^* = (-)^{\lambda_b - \lambda'_b + \lambda_c - \lambda_d - \lambda'_c + \lambda'_d} H_{-\lambda_c - \lambda_d - \lambda_b} H_{-\lambda'_c - \lambda'_d - \lambda'_b}^*$$

podemos escrever:

$$\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}^{(x)} = (-)^{\lambda_c - \lambda_d - \lambda'_c + \lambda'_d + 1} \rho_{-\lambda_c - \lambda_d - \lambda'_c - \lambda'_d}^{(x)}$$

$$\rho_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_c \lambda'_d}^{(y)} = (-)^{\lambda_c - \lambda_d - \lambda'_c + \lambda'_d} \rho_{-\lambda_c - \lambda_d - \lambda'_c \lambda'_d}^{(y)}$$

De maneira análoga se obtêm as relações semelhantes referentes às amplitudes de transversidade.

Já vimos que a relação entre as amplitudes de transversidade T e de helicidade H é: (pág. 89)

$$T_{\lambda_c \lambda_d \lambda_a \lambda_b} = \sum_{\substack{\mu_a \mu_b \\ \mu_c \mu_d}} D_{\lambda_a \mu_a}^{s_a} (R) D_{\lambda_b \mu_b}^{s_b} (R) D_{\lambda_c \mu_c}^{s_c} (R) D_{\lambda_d \mu_d}^{s_d} (R) H_{\mu_c \mu_d \mu_a \mu_b}$$

onde $R = (\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

e inversamente

$$H_{\mu_c \mu_d \mu_a \mu_b} = \sum_{\substack{\sigma_a \sigma_b \\ \sigma_c \sigma_d}} D_{\sigma_a \mu_a}^{s_a} (R) D_{\sigma_b \mu_b}^{s_b} (R) D_{\sigma_c \mu_c}^{s_c} (R) D_{\sigma_d \mu_d}^{s_d} (R) T_{\sigma_c \sigma_d \sigma_a \sigma_b}$$

Substituindo esta relação (no caso particular $s_a = 0$) em

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \sum_{\substack{\lambda_b \lambda'_b \\ \lambda_c \lambda'_d}} H_{\lambda_c \lambda_d \lambda_b} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})_{\lambda_b \lambda'_b} H_{\lambda_c \lambda_d \lambda'_b}^*$$

temos

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\substack{\lambda_b \lambda_b' \\ \sigma_c \sigma_c' \\ \sigma_d \sigma_d'}} \sum_{\lambda_c \lambda_d} D_{\sigma_b \lambda_b}^{s_b} (R) D_{\sigma_c \lambda_c}^{*s_c} (R) D_{\sigma_d \lambda_d}^{*s_d} (R) T_{\sigma_c \sigma_d \sigma_b} \times \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})_{\lambda_b \lambda_b'} \times \\ \times D_{\sigma_b' \lambda_b'}^{*s_b} (R) D_{\sigma_c' \lambda_c}^{s_c} (R) D_{\sigma_d' \lambda_d}^{s_d} (R) T_{\sigma_c' \sigma_d' \sigma_b'}$$

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\substack{\sigma_c \sigma_c' \\ \sigma_b \sigma_b'}} T_{\sigma_c \sigma_d \sigma_b} T_{\sigma_c \sigma_d \sigma_b'}^* \sum_{\lambda_b \lambda_b'} D_{\sigma_b \lambda_b}^{s_b} (R) \times \\ \times \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})_{\lambda_b \lambda_b'} \times D_{\sigma_b' \lambda_b'}^{*s_b} (R)$$

Como

$$\sum_{\lambda_c} D_{\sigma_c \lambda_c}^{*s_c} (R) D_{\sigma_c' \lambda_c}^{s_c} (R) = \delta_{\sigma_c \sigma_c'}$$

teremos

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\substack{\sigma_b \sigma_b' \\ \sigma_c \sigma_c'}} T_{\sigma_c \sigma_d \sigma_b} T_{\sigma_c \sigma_d \sigma_b'}^* \times \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})_{\sigma_b \sigma_b'}$$

onde $\frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})_{\sigma_b \sigma_b'}$ é a matriz densidade do estado inicial referente à base de transversidade.

Da mesma maneira se obtém a matriz densidade $\rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma_c' \sigma_d'}^T$ do estado final referente à base de transversidade.

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma_c' \sigma_d'}^T = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \sum_{\sigma_b \sigma_b'} T_{\sigma_c \sigma_d \sigma_b} \times \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})_{\sigma_b \sigma_b'} T_{\sigma_c' \sigma_d' \sigma_b'}^* = \\ = \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_0 \left(\rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma_c' \sigma_d'}^T(0) + P_x \rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma_c' \sigma_d'}^T(x) + P_y \rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma_c' \sigma_d'}^T(y) + P_z \rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma_c' \sigma_d'}^T(z) \right)$$

Prova-se que a conservação da paridade implica as seguintes relações:

$$\rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma'_c \sigma'_d}^{(0)T} = (-)^{\sigma_c - \sigma_d - \sigma'_c + \sigma'_d} \rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma'_c \sigma'_d}^{(0)T}$$

$$\rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma'_c \sigma'_d}^{(x)T} = (-)^{\sigma_c - \sigma_d - \sigma'_c + \sigma'_d + 1} \rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma'_c \sigma'_d}^{(x)T}$$

$$\rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma'_c \sigma'_d}^{(z)T} = (-)^{\sigma_c - \sigma_d - \sigma'_c - \sigma'_d} \rho_{\sigma_c \sigma_d \sigma'_c \sigma'_d}^{(z)T}$$

Exercício 3.5

Prove as relações acima.



4. DECAIMENTO

Neste capítulo estudaremos o decaimento de uma partícula em duas ou três outras. Trataremos somente do caso em que a transição conserva a paridade.

4.1 - Dcaimento em Duas Partículas com Conservação da Paridade

Estudaremos o decaimento da partícula A nas partículas a e b em relação ao sistema em repouso de A.

O vetor estado do sistema das duas partículas a e b consideradas livres, é

$$|\vec{P}=0, \phi \theta W \lambda_a \lambda_b\rangle = \sum_{SM} \sqrt{\frac{2S+1}{4\pi}} D_{M, \lambda_a - \lambda_b}^S(\phi \theta) |\vec{P}=0M [WS \lambda_a \lambda_b]\rangle$$

onde ϕ e θ são os ângulos azimutal e polar de uma das partículas secundárias (digamos a partícula a) no sistema centro de massa de A.

A amplitude de transição é

$$\begin{aligned} f_{\Lambda \lambda_a \lambda_b}^{S_A}(\phi \theta) &= \langle \vec{P}=0, \phi \theta W \lambda_a \lambda_b | T | \vec{P}=0 \Lambda [S_A W_A] \rangle = \\ &= \sum_{SM} \sqrt{\frac{2S+1}{4\pi}} D_{M \lambda_a - \lambda_b}^{*S_A}(\phi \theta) \langle \vec{P}=0M [WS \lambda_a \lambda_b] | T | \vec{P}=0 \Lambda [S_A W_A] \rangle \end{aligned}$$

Escrevendo

$$\langle \vec{P}=0M [WS \lambda_a \lambda_b] | T | \vec{P}=0 \Lambda [S_A W_A] \rangle = \delta_{SS_A} \delta_{M\Lambda} G_{\lambda_a \lambda_b}^{S_A}(W)$$

temos

$$f_{\Lambda\lambda_a\lambda_b}^{S_A}(\phi\theta) = \sqrt{\frac{2S_A+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda_a-\lambda_b}^{*S_A}(\phi\theta) G_{\lambda_a\lambda_b}^{S_A}$$

Consideremos o caso geral em que o sistema constituído pela partícula A é uma mistura de estados de diferentes valores do spin S, paridade η e terceira componente do spin Λ . Seja $\rho_{S\Lambda\eta, S'\Lambda'\eta'}$ a matriz densidade relativa à partícula A.

A distribuição angular $I(\phi, \theta)$ é

$$I(\phi, \theta) = \sum_{\substack{SS'\Lambda\Lambda'\eta\eta' \\ \lambda_a\lambda_b}}^{S\eta} f_{\Lambda\lambda_a\lambda_b}^{S\eta} \rho_{S\Lambda\eta, S'\Lambda'\eta'} f_{\Lambda'\lambda_a\lambda_b}^{*S'\eta'} = \\ = \sum \frac{\sqrt{(2S+1)}\sqrt{(2S'+1)}}{4\pi} D_{\Lambda\lambda_a-\lambda_b}^{*S}(\phi\theta) D_{\Lambda'\lambda_a-\lambda_b}^{S'}(\phi\theta) G_{\lambda_a\lambda_b}^{S\eta} G_{\lambda_a\lambda_b}^{*S'\eta'} \rho_{S\Lambda\eta, S'\Lambda'\eta'}$$

Como

$$D_{\Lambda\lambda_a-\lambda_b}^{*S}(\phi\theta) D_{\Lambda'\lambda_a-\lambda_b}^{S'}(\phi\theta) = (-)^{\lambda_a-\lambda_b-\Lambda} \sum_j \langle S'\Lambda', S-\Lambda | jm \rangle \times \\ \times \langle S'\lambda_a-\lambda_b, S\lambda_b-\lambda_a | j0 \rangle D_{m0}^j(\phi\theta)$$

com $m = \Lambda' - \Lambda$ temos

$$I(\phi, \theta) = \sum_{jm} D_{m0}^j(\phi\theta) \sum_{\substack{SS'\eta\eta'\Lambda \\ \lambda_a\lambda_b}}^{S\eta} (-)^{\lambda_a-\lambda_b-\Lambda} \frac{\sqrt{(2S+1)}\sqrt{(2S'+1)}}{4\pi} \times \\ \times \rho_{S\Lambda\eta, S'(m+\Lambda)\eta'} \langle S'm+\Lambda, S-\Lambda | jm \rangle \langle S'\lambda_a-\lambda_b, S\lambda_b-\lambda_a | j0 \rangle G_{\lambda_a\lambda_b}^{S\eta} G_{\lambda_a\lambda_b}^{*S'\eta'}$$

Por outro lado, a distribuição angular pode ser escrita como uma

combinação linear das funções D, uma vez que estas funções formam um sistema completo. Portanto, podemos escrever

$$I(\phi, \theta) = \sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} \langle D_{m0}^j \rangle^* D_{m0}^j(\phi\theta)$$

onde

$$\langle D_{m0}^j \rangle = \int I(\phi\theta) D_{m0}^j(\phi\theta) d\phi d\cos\theta$$

são os D momentos da distribuição.

Comparando com a formula anterior podemos escrever

$$\frac{2j+1}{4\pi} \langle D_{m0}^j \rangle^* = \sum_{\substack{S S' \\ \lambda_a \lambda_b}} \sum_{\eta \eta'} (-)^{\lambda_a - \lambda_b - \Lambda} \frac{\sqrt{(2S+1)(2S'+1)}}{4\pi} \times$$

$$\times \rho_{S\Lambda\eta, S'(m+\Lambda)\eta'} \langle S'm+\Lambda, S-\Lambda | jm \rangle \times \langle S'\lambda_a - \lambda_b, S\lambda_b - \lambda_a | j0 \rangle G_{\lambda_a \lambda_b}^{S\eta} G_{\lambda_a \lambda_b}^{*S'\eta'}$$

Consideremos agora as propriedades da distribuição angular e dos D momentos.

a) Condição de Realidade

A distribuição angular $I(\phi\theta)$ é uma função real (consequência do fato que a matriz densidade é hermitiana).

Portanto temos

$$I(\phi\theta) = I^*(\phi\theta)$$

e como

$$D_{m0}^{*j}(\phi\theta) = (-)^m D_{-m0}^j(\phi\theta)$$

podemos escrever

$$\sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} \langle D_{m0}^j \rangle^* D_{m0}^j(\phi\theta 0) = \sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} \langle D_{m0}^j \rangle D_{m0}^{*j}(\phi\theta 0) =$$

$$= \sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} (-)^m \langle D_{-m0}^j \rangle D_{m0}^j(\phi\theta 0)$$

Concluimos que

$$\langle D_{m0}^j \rangle^* = (-)^m \langle D_{-m0}^j \rangle$$

b) Conservação da Paridade no Decaimento (A → ab)

A aplicação da conservação da paridade em

$$G_{\lambda_a \lambda_b}^S = \langle \vec{P}=0 \Lambda \left[WS_{\lambda_a \lambda_b} \right] | T | \vec{P}=0 \Lambda \rangle$$

implica

$$G_{\lambda_a \lambda_b}^{S\eta} = \langle \vec{P}=0 \Lambda \left[WS_{\lambda_a \lambda_b} \right] | P^+ T P | \vec{P}=0 \Lambda \rangle =$$

$$= \eta_a \eta_b (-)^{S-s_a -s_b} \eta \langle \vec{P}=0 \Lambda \left[WS_{-\lambda_a -\lambda_b} \right] | T | \vec{P}=0 \Lambda \rangle =$$

$$= \frac{\eta}{\eta_a \eta_b} (-)^{S-s_a -s_b} G_{-\lambda_a -\lambda_b}^{S\eta}$$

Como

$$D_{\Lambda \lambda}^S(\pi+\phi, \pi-\theta, 0) = (-)^S D_{\Lambda-\lambda}^S(\phi, \theta, 0)$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
 I(\phi, \theta) &= \sum \frac{\sqrt{(2S+1)(2S'+1)}}{4\pi} D_{\Lambda\lambda_a-\lambda_b}^{*S}(\phi\theta 0) D_{\Lambda'\lambda_a-\lambda_b}^{S'}(\phi\theta 0) \times \\
 &\times G_{\lambda_a\lambda_b}^{S\eta} G_{\lambda_a\lambda_b}^{*S'\eta'} \rho_{S\Lambda\eta, S'\Lambda'\eta'} = \\
 &= \sum \frac{\sqrt{(2S+1)(2S'+1)}}{4\pi} (-)^{S'-S} D_{\Lambda-(\lambda_a-\lambda_b)}^{*S}(\pi+\phi, \pi-\theta, 0) \times \\
 &\times D_{\Lambda'-(\lambda_a-\lambda_b)}^{S'}(\pi+\phi, \pi-\theta, 0) \eta\eta' (-)^{S-S'} G_{-\lambda_a-\lambda_b}^{S\eta} G_{-\lambda_a-\lambda_b}^{*S'\eta'} \rho_{S\Lambda\eta, S'\Lambda'\eta'}
 \end{aligned}$$

Para $\eta = \eta'$ ter-se-á $I(\phi, \theta) = I(\pi+\phi, \pi-\theta)$

Concluimos que somente quando o sistema A consiste de uma série de estados de mesma paridade (caso particular é quando A é uma partícula com determinada paridade) teremos $I(\phi, \theta) = I(\pi+\phi, \pi-\theta)$.

Escrevendo a distribuição angular como combinação linear das funções D e impondo $I(\phi, \theta) = I(\pi+\phi, \pi-\theta)$ temos

$$\begin{aligned}
 I(\phi, \theta) &= \sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} \langle D_{m0}^j \rangle^* D_{m0}^j(\phi\theta 0) = \sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} \langle D_{m0}^j \rangle^* D_{m0}^j(\pi+\phi, \pi-\theta, 0) = \\
 &= \sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} (-)^j \langle D_{m0}^j \rangle^* D_{m0}^j(\phi, \theta, 0) .
 \end{aligned}$$

Concluimos que para $\eta = \eta'$ temos

$$\langle D_{m0}^j \rangle = (-)^j \langle D_{m0}^j \rangle ,$$

isto é ,

$$\langle D_{m0}^j \rangle = 0$$

para valores ímpares de j.

c) Conservação da Paridade no Processo de Produção

Vimos que na base de helicidade, a conservação da paridade para uma partícula de um determinado spin, implica em $\rho_{\Lambda\Lambda'} = (-)^{\Lambda-\Lambda'} \rho_{-\Lambda-\Lambda'}$. Analogamente, para uma mistura de estados de diferentes valores de spin, paridade e terceira componente de spin, temos:

$$\rho_{S\Lambda\eta, S'\Lambda'\eta'} = \eta\eta' (-)^{S+\Lambda-S'-\Lambda'} \rho_{S-\Lambda\eta, S'-\Lambda'\eta'}$$

Como

$$D_{\Lambda\lambda}^S(\phi\theta) = (-)^{S+\Lambda-\lambda} D_{-\Lambda\lambda}^S(\pi-\phi, \pi-\theta, 0)$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} I(\phi\theta) = & \sum \frac{\sqrt{(2S+1)(2S'+1)}}{4\pi} (-)^{S'+\Lambda'-S-\Lambda} D_{-\Lambda\lambda_a-\lambda_b}^{*S}(\pi-\phi, \pi-\theta, 0) \times \\ & \times D_{-\Lambda'\lambda_a-\lambda_b}^{S'}(\pi-\phi, \pi-\theta, 0) G_{\lambda_a\lambda_b}^{S\eta} G_{\lambda_a\lambda_b}^{*S'\eta'} \eta\eta' (-)^{S+\Lambda-S'-\Lambda'} \times \\ & \times \rho_{S-\Lambda\eta, S'-\Lambda'\eta'} \end{aligned}$$

Para $\eta = \eta'$ ter-se-á $I(\phi, \theta) = I(\pi-\phi, \pi-\theta)$.

Para $I(\phi, \theta) = I(\pi-\phi, \pi-\theta)$ obtêm-se a relação entre os D-momentos escrevendo a distribuição angular como combinação linear das funções D. Deste modo temos:

$$\begin{aligned} I(\phi, \theta) = & \sum \frac{2j+1}{4\pi} \langle D_{m0}^j \rangle^* D_{m0}^j(\phi\theta) = \sum \frac{2j+1}{4\pi} \langle D_{m0}^j \rangle^* D_{m0}^j(\pi-\phi, \pi-\theta, 0) = \\ = & \sum \frac{2j+1}{4\pi} (-)^{j+m} \langle D_{m0}^j \rangle^* D_{-m0}^j(\phi\theta) \end{aligned}$$

Portanto, para $\eta = \eta'$ temos $\langle D_{m0}^j \rangle = (-)^{j+m} \langle D_{-m0}^j \rangle$

Resumindo, podemos dizer que na base de helicidade, para $\eta = \eta'$ e pela conservação da paridade no processo de produção e no decaimento resultam as seguintes relações:

$$\begin{aligned} I(\phi, \theta) &= I^*(\phi, \theta) \\ I(\phi, \theta) &= I(\pi + \phi, \pi - \theta) \\ I(\phi, \theta) &= I(\pi - \phi, \pi - \theta) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} I(\phi, \theta) &= I^*(\phi, \theta) \\ I(\phi, \theta) &= I(\pi + \phi, \pi - \theta) \\ I(\phi, \theta) &= I(\pi - \phi, \pi - \theta) \end{aligned}} \right\} I(\phi, \theta) = I(-\phi, \theta)$$

Exemplos

Consideremos o decaimento de uma partícula A (spin e paridade fixas). A distribuição angular é dada por

$$I(\phi, \theta) = \sum_{\Lambda\Lambda', \lambda_a \lambda_b} f_{\Lambda\lambda_a \lambda_b} \rho_{\Lambda\Lambda'} f_{\Lambda', \lambda_a \lambda_b}^* = \sum_{\Lambda\Lambda', \lambda_a \lambda_b} \frac{2S+1}{4\pi} |G_{\lambda_a \lambda_b}^S|^2 |D_{\Lambda\lambda_a - \lambda_b}^{*S} D_{\Lambda', \lambda_a - \lambda_b}^S| \rho_{\Lambda\Lambda'}$$

a) Seja o decaimento em duas partículas sem spin (por exemplo

$$\rho \rightarrow \pi\pi)$$

Como

$$s_a = s_b = 0$$

e

$$D_{\Lambda 0}^{*S} = \sqrt{\frac{4\pi}{2S+1}} Y_{\Lambda}^S(\phi, \theta)$$

temos

$$I(\phi, \theta) = |G|^2 \sum_{\Lambda\Lambda'} Y_{\Lambda}^S(\phi, \theta) Y_{\Lambda'}^{*S}(\phi, \theta) \rho_{\Lambda\Lambda'}$$

onde G significa um fator de normalização.

b) Seja o decaimento em uma partícula sem spin e outra com spin 1/2 (por exemplo $\Delta^{++} \rightarrow P \pi^+$)

A conservação da paridade implica em

$$G_{\lambda_a}^S = \frac{\eta}{\eta_a \eta_b} (-)^{S-1/2} G_{-\lambda_a}^S$$

e portanto

$$|G_{\lambda_a = +1/2}|^2 = |G_{\lambda_a = -1/2}|^2 = |G|^2$$

Para a distribuição angular temos

$$I(\phi, \theta) = |G|^2 \sum_{\Lambda \Lambda'} \sum_{\lambda_a} \frac{2S+1}{4\pi} D_{\Lambda \lambda_a}^{*S} D_{\Lambda' \lambda_a}^S \rho_{\Lambda \Lambda'}$$

Tanto no caso a) como no caso b), a matriz densidade (ou uma parte dela) pode ser determinada da distribuição angular. Isto fica mais fácil de ver, se no lugar da matriz densidade $\rho_{\Lambda \Lambda'}$, usarmos os tensores estatísticos T_M^J .

No capítulo 1, vimos que a relação entre $\rho_{\Lambda \Lambda'}$ e T_M^J é dada por: (pág. 17)

$$\rho_{\Lambda \Lambda'} = (-)^{S-\Lambda} \sum_{JM} \langle S \Lambda', S-\Lambda | JM \rangle T_M^J$$

e como

$$D_{\Lambda \lambda_a - \lambda_b}^{*S} D_{\Lambda' \lambda_a - \lambda_b}^S = (-)^{\lambda_a - \lambda_b - \Lambda} \sum_{jm} \langle S \Lambda', S-\Lambda | jm \rangle \langle S \lambda_a - \lambda_b, S \lambda_b - \lambda_a | j0 \rangle \times \\ \times D_{m0}^j(\phi \theta)$$

temos

$$\begin{aligned}
 I(\phi, \theta) &= \sum_{\Lambda \Lambda'} \sum_{\lambda_a \lambda_b} \frac{2S+1}{4\pi} D_{\Lambda \lambda_a}^{*S} D_{\Lambda' \lambda_b}^S |G_{\lambda_a \lambda_b}|^2 \rho_{\Lambda \Lambda'} = \\
 &= \sum_{\substack{j m J M \\ \lambda_a \lambda_b}} (-)^{S-\lambda_a+\lambda_b} \frac{2S+1}{4\pi} |G_{\lambda_a \lambda_b}|^2 \langle S \lambda_a -\lambda_b, S \lambda_b -\lambda_a | j 0 \rangle \times \\
 &\times D_{m 0}^j(\phi \theta 0) T_M^J \sum_{\Lambda \Lambda'} \langle S \Lambda', S -\Lambda | j m \rangle \langle S \Lambda', S -\Lambda | J M \rangle
 \end{aligned}$$

Sendo

$$\sum_{\Lambda \Lambda'} \langle S \Lambda', S -\Lambda | j m \rangle \langle S \Lambda', S -\Lambda | J M \rangle =: \delta_{j J} \delta_{m M}$$

a relação acima reduz a

$$I(\phi, \theta) = \sum_{j m} \frac{2S+1}{4\pi} D_{m 0}^j(\phi \theta 0) T_m^j \sum_{\lambda_a \lambda_b} (-)^{S-\lambda_a+\lambda_b} |G_{\lambda_a \lambda_b}|^2 \langle S \lambda_a -\lambda_b, S \lambda_b -\lambda_a | j 0 \rangle$$

Quando os valores de $|G_{\lambda_a \lambda_b}|^2$ são iguais para qualquer λ_a e λ_b , os tensores estatísticos podem ser determinados através dos momentos $\langle D_{m 0}^j \rangle$.

Conhecidos os tensores estatísticos pode-se sempre calcular a matriz densidade. Como vimos, para o decaimento com conservação da paridade podemos determinar somente os D momentos com j pares e portanto, em casos favoráveis se pode calcular os tensores estatísticos com j pares. Em consequência, a parte imaginária da matriz densidade não pode ser determinada.

Como a matriz densidade é hermitiana (i.e. $\rho_{\Lambda \Lambda'}^* = \rho_{\Lambda' \Lambda}$) temos

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\text{Re}\rho_{\Lambda\Lambda'} \\ 2\text{Im}\rho_{\Lambda\Lambda'} \end{array} \right\} = \rho_{\Lambda\Lambda'} \pm \rho_{\Lambda'\Lambda} = \rho_{\Lambda\Lambda'} \pm (-)^{\Lambda-\Lambda'} \rho_{-\Lambda',-\Lambda} =$$

$$= \sum_{jm} (-)^{S-\Lambda} \langle S\Lambda', S-\Lambda | jm \rangle T_m^j \pm \sum_{jm} (-)^{S+\Lambda'} (-)^{\Lambda-\Lambda'} \langle S-\Lambda, S\Lambda' | jm \rangle T_m^j$$

Como $\langle S-\Lambda, S\Lambda' | jm \rangle = (-)^{j-2S} \langle S\Lambda', S-\Lambda | jm \rangle$ temos

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\text{Re}\rho_{\Lambda\Lambda'} \\ 2\text{Im}\rho_{\Lambda\Lambda'} \end{array} \right\} = \sum_{jm} (-)^{S-\Lambda} \langle S\Lambda', S-\Lambda | jm \rangle \left\{ T_m^j \pm (-)^j T_m^j \right\}$$

Observamos que para o cálculo de $\text{Re}\rho_{\Lambda\Lambda'}$, necessitamos somente dos T_m^j com j par.

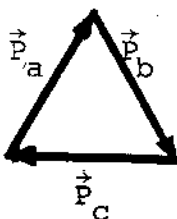
4.2 - Decaimento em três Partículas com Conservação da Paridade

Estudaremos o decaimento da partícula A nas partículas a, b e c em relação ao sistema em repouso de A.

O vetor estado do sistema das três partículas a, b e c consideradas livres, é

$$|\vec{P}=0, \alpha\beta\gamma W \chi_1 \chi_2 \lambda_a \lambda_b \lambda_c \rangle = \sum_{SMK} \sqrt{\frac{2S+1}{8\pi^2}} D_{MK}^S(\alpha\beta\gamma) |\vec{P}=0M \left[WSK \chi_1 \chi_2 \lambda_a \lambda_b \lambda_c \right] \rangle$$

onde $\chi_1 = M_{(bc)}^2 = (p_b^\mu + p_c^\mu)^2$ e $\chi_2 = M_{ac}^2 = (p_a^\mu + p_c^\mu)^2$ (isto é os autovalores são as variáveis usadas no gráfico de Dalitz). Para a massa total W constante, χ_1 e χ_2 fixam a forma do triângulo de impulso



$$\sum \vec{p}_i = 0$$

A orientação deste triângulo no espaço é descrita pelos três ângulos de Euler $\alpha\beta\gamma$. Sejam $\alpha\beta$ os ângulos que determinam a direção da normal $\vec{p}_a \times \vec{p}_b$ ao plano que contém o triângulo e γ a direção de \vec{p}_a no plano.

A amplitude de transição é portanto:

$$f_{\Lambda\lambda_a\lambda_b\lambda_c}^{S_A}(\alpha\beta\gamma, X_1, X_2) = \langle \vec{P}=0, \alpha\beta\gamma W X_1 X_2 \lambda_a \lambda_b \lambda_c \mid T \mid \vec{P}=0 \Lambda [S_A W_A] \rangle =$$

$$= \sum_{SMK} \sqrt{\frac{2S+1}{8\pi^2}} D_{MK}^{S*}(\alpha\beta\gamma) \langle \vec{P}=0 M [WSK X_1 \lambda_i] \mid T \mid \vec{P}=0 \Lambda [S_A W_A] \rangle$$

Escrevendo

$$\langle \vec{P}=0 M [WSK X_1 \lambda_i] \mid T \mid \vec{P}=0 \Lambda [S_A W_A] \rangle = \delta_{SS_A} \delta_{MK} G_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}^{S_A K}(X_1, X_2)$$

temos

$$f_{\Lambda\lambda_a\lambda_b\lambda_c}^{S_A}(\alpha\beta\gamma, X_1, X_2) = \sum_K \sqrt{\frac{2S_A+1}{8\pi^2}} D_{\Lambda K}^{S_A*}(\alpha\beta\gamma) G_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}^{S_A K}(X_1, X_2)$$

onde K é a projeção de S_A na direção de $\vec{p}_a \times \vec{p}_b$.

Quando se tem a matriz densidade $\rho_{\Lambda\Lambda'}$ para A , então a distribuição angular será função do gráfico de Dalitz (através das variáveis X_1, X_2).

$$I(\alpha\beta\gamma, X_1, X_2) = \sum_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c} \sum_{\Lambda \Lambda'} f_{\Lambda\lambda_a\lambda_b\lambda_c}^{S_A} \rho_{\Lambda\Lambda'} f_{\Lambda'\lambda_a\lambda_b\lambda_c}^{S_A*} =$$

$$= \frac{2S_A+1}{8\pi^2} \sum_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c} \sum_{\Lambda \Lambda' K K'} D_{\Lambda K}^{S_A*}(\alpha\beta\gamma) D_{\Lambda' K'}^{S_A}(\alpha\beta\gamma) G_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}^{S_A K} G_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}^{S_A* K'} \rho_{\Lambda\Lambda'} =$$

$$= \frac{2S_A+1}{8\pi^2} \sum_{j m L} D_{mL}^j(\alpha\beta\gamma) \sum_{\Lambda K} (-)^{\Lambda-K} \rho_{\Lambda, \Lambda+m} \langle S_A, m+\Lambda, S_A-\Lambda \mid j m \rangle \times$$

$$\times \langle S_A, L+K, S_A, -K \mid j L \rangle \sum_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c} G_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}^{S_A K} G_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}^{S_A* K+L}$$

Por outro lado, a distribuição angular pode ser escrita como uma combinação linear das funções D. Portanto, podemos escrever

$$I(\alpha\beta\gamma, X_1 X_2) = \sum_{jmL} \frac{2j+1}{8\pi^2} \langle D_{mL}^j \rangle^* (X_1 X_2) D_{mL}^j(\alpha\beta\gamma)$$

onde

$$\langle D_{mL}^j \rangle (X_1 X_2) = \int I(\alpha\beta\gamma X_1 X_2) D_{mL}^j(\alpha\beta\gamma) d\alpha d\cos\beta d\gamma$$

são os D momentos da distribuição.

Utilizando a fórmula anterior, podemos obter facilmente a relação para $\langle D_{mL}^j \rangle (X_1 X_2)$.

Calculemos, agora, a distribuição $W(X_1 X_2)$ do gráfico de Dalitz.

$$\begin{aligned} W(X_1 X_2) &= \int I(\alpha\beta\gamma X_1 X_2) d\alpha d\cos\beta d\gamma = \sum_{\Lambda} \rho_{\Lambda\Lambda} \sum_{K\lambda_i} \left| G_{\lambda_i K}^{S_A} \right|^2 \\ &= \sum_{K\lambda_i} \left| G_{\lambda_i K}^{S_A} \right|^2 \end{aligned}$$

onde usamos as seguintes propriedades

$$\int D_{mL}^j(\alpha\beta\gamma) d\alpha d\cos\beta d\gamma = \int D_{mL}^j D_{00}^0 d\alpha d\cos\beta d\gamma = 8\pi^2 \delta_{j0} \delta_{m0} \delta_{L0}$$

$$\langle S_A^\Lambda, S_A^{-\Lambda} | 00 \rangle = (-)^{S_A - \Lambda} \frac{1}{\sqrt{2S_A + 1}} \langle S_A^\Lambda, 00 | S_A^\Lambda \rangle = (-)^{S_A - \Lambda} \frac{1}{\sqrt{2S_A + 1}}$$

e

$$\sum_{\Lambda} \rho_{\Lambda\Lambda} = 1$$

Concluimos, portanto, que a distribuição do gráfico de Dalitz é independente da matriz densidade do decaimento da partícula A.

Estudaremos, agora, as propriedades da distribuição angular e dos momentos D.

Sejam $\alpha\beta$ os ângulos que determinam a direção da normal $\vec{p}_a \times \vec{p}_b$ ao plano que contém o triângulo e γ a direção de uma das partículas no plano.

a) Condição de Realidade

A distribuição angular $I(\alpha\beta\gamma, x_1, x_2)$ é uma função real (consequência do fato que a matriz densidade é hermitiana).

Portanto, temos

$$I(\alpha\beta\gamma, x_1, x_2) = I^*(\alpha\beta\gamma, x_1, x_2)$$

e como

$$D_{mL}^{j*}(\alpha\beta\gamma) = (-)^{m-L} D_{-m-L}^j(\alpha\beta\gamma)$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{j mL} \frac{2j+1}{8\pi^2} \langle D_{mL}^j \rangle^* D_{mL}^j(\alpha\beta\gamma) &= \sum_{j mL} \frac{2j+1}{8\pi^2} \langle D_{mL}^j \rangle D_{mL}^{j*}(\alpha\beta\gamma) = \\ &= \sum_{j mL} \frac{2j+1}{8\pi^2} \langle D_{mL}^j \rangle (-)^{m-L} D_{-m-L}^j(\alpha\beta\gamma) = \\ &= \sum_{j mL} \frac{2j+1}{8\pi^2} \langle D_{-m-L}^j \rangle (-)^{m-L} D_{mL}^j(\alpha\beta\gamma) \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\langle D_{mL}^j \rangle^* = (-)^{m-L} \langle D_{-m-L}^j \rangle$$

b) Conservação de Paridade no Decaimento ($A \rightarrow abc$)

A aplicação da conservação da paridade em

$$G_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}^{S_A} K(\chi_1 \chi_2) = \langle \vec{P}=0 \Lambda \left[W_{S_A} K \chi_i \lambda_i \right] \left| T \right| \vec{P}=0 \Lambda \left[S_A W \right] \rangle$$

implica: (vide pág. 84)

$$\begin{aligned} G_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}^{S_A} K(\chi_1 \chi_2) &= \langle \vec{P}=0 \Lambda \left[W_{S_A} K \chi_i \lambda_i \right] \left| P^+ T P \right| \vec{P}=0 \Lambda \left[S_A W \right] \rangle = \\ &= \frac{\eta_a \eta_b \eta_c}{\eta_A} (-)^{S_a + S_b + S_c + K} \langle \vec{P}=0 \Lambda \left[W_{S_A} K \chi_i - \lambda_i \right] \left| T \right| \vec{P}=0 \Lambda \left[S_A W \right] \rangle = \\ &= \frac{\eta_a \eta_b \eta_c}{\eta_A} (-)^{S_a + S_b + S_c + K} G_{-\lambda_a -\lambda_b -\lambda_c}^{S_A} K(\chi_1 \chi_2) \end{aligned}$$

Como

$$G_{\lambda_i K}^{S_A} (G_{\lambda_i K'}^{S_A})^* = (-)^{K-K'} G_{-\lambda_i K}^{S_A} (G_{-\lambda_i K'}^{S_A})^*$$

podemos escrever

$$I(\alpha\beta\gamma\chi_1\chi_2) = \frac{2S_A+1}{8\pi^2} \sum_{\Lambda\Lambda'KK'} G_{\lambda_a \lambda_b \lambda_c}^{S_A} D_{\Lambda K}^{S_A}(\alpha\beta\gamma) D_{\Lambda' K'}^{S_A}(\alpha\beta\gamma) \rho_{\Lambda\Lambda'} (-)^{K-K'} G_{-\lambda_i K}^{S_A} G_{-\lambda_i K'}^{S_A*}$$

Como

$$D_{\Lambda K}^{S_A}(\alpha\beta\gamma) = (-)^K D_{\Lambda K}^{S_A}(\alpha\beta\pi+\gamma)$$

podemos escrever

$$I(\alpha\beta\gamma\chi_1\chi_2) = \frac{2S_A+1}{8\pi^2} \int D_{\Lambda K}^{S_A^*}(\alpha\beta\pi+\gamma) D_{\Lambda' K'}^{S_A}(\alpha\beta\pi+\gamma) \rho_{\Lambda\Lambda'} G_{-\lambda_i K}^{S_A} G_{-\lambda_i K'}^{S_A^*} =$$

$$= I(\alpha\beta\pi+\gamma\chi_1\chi_2)$$

Observemos que diante da operação paridade, a normal se mantém inalterável mas o impulso da partícula muda de direção.

Escrevendo a distribuição angular como combinação linear das funções D e impondo

$$I(\alpha\beta\gamma\chi_1\chi_2) = I(\alpha\beta\pi+\gamma\chi_1\chi_2)$$

temos:

$$\int_{j_{mL}} \frac{2j+1}{8\pi^2} \langle D_{mL}^j \rangle^* (\chi_1\chi_2) D_{mL}^j(\alpha\beta\gamma) = \int_{j_{mL}} \frac{2j+1}{8\pi^2} \langle D_{mL}^j \rangle^* (\chi_1\chi_2) D_{mL}^j(\alpha\beta\gamma+\pi)$$

e como

$$D_{mL}^j(\alpha\beta\gamma) = (-)^L D_{mL}^j(\alpha\beta\pi+\gamma)$$

concluimos que

$$\langle D_{mL}^j \rangle = (-)^L \langle D_{mL}^j \rangle$$

isto é $\langle D_{mL}^j \rangle = 0$ para valores ímpares de L.

c) Conservação da Paridade no Processo de Produção

Vimos que na base de helicidade, a conservação da paridade para uma partícula de um determinado spin, implica em

$$\rho_{\Lambda\Lambda'} = (-)^{\Lambda-\Lambda'} \rho_{-\Lambda-\Lambda'}$$

... Como

$$D_{\Lambda K}^{S_A}(\alpha\beta\gamma) = (-)^{S_A - \Lambda} D_{-\Lambda K}^{S_A}(\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi + \gamma)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} I(\alpha\beta\gamma; \chi_1 \chi_2) &= \frac{2S_A + 1}{8\pi^2} \sum_{\Lambda \Lambda', K K'} \sum_{\lambda_1} D_{\Lambda K}^{S_A}(\alpha\beta\gamma) D_{\Lambda' K'}^{S_A^*}(\alpha\beta\gamma) G_{\lambda_1 K}^{S_A} G_{\lambda_1 K'}^{S_A^*} \rho_{\Lambda \Lambda'} = \\ &= \frac{2S_A + 1}{8\pi^2} \sum D_{-\Lambda K}^{S_A^*}(\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi + \gamma) D_{\Lambda' K'}^{S_A}(\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi + \gamma) G_{\lambda_1 K}^{S_A} G_{\lambda_1 K'}^{S_A^*} \rho_{-\Lambda - \Lambda'} \\ &= I(\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi + \gamma; \chi_1 \chi_2) \end{aligned}$$

Escrevendo a distribuição angular como combinação linear das funções D e impondo

$$I(\alpha\beta\gamma; \chi_1 \chi_2) = I(\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi + \gamma; \chi_1 \chi_2)$$

temos

$$\sum_{jmL} \frac{2j+1}{8\pi^2} \langle D_{mL}^j \rangle^*(\chi_1 \chi_2) D_{mL}^j(\alpha\beta\gamma) = \sum_{jmL} \frac{2j+1}{8\pi^2} \langle D_{mL}^j \rangle^*(\chi_1 \chi_2) D_{mL}^j(\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi + \gamma)$$

e como

$$D_{mL}^j(\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi + \gamma) = (-)^{j+m} D_{-mL}^j(\alpha\beta\gamma)$$

concluimos que

$$\langle D_{mL}^j \rangle = (-)^{j+m} \langle D_{-mL}^j \rangle$$

para valores inteiros de j, m.

Exercício 4.1

Estude a mesma reação para o caso em que os ângulos $\alpha\beta$ determinam a direção da partícula **a** e o ângulo γ determina o plano das partículas **a** e **b**. Prove que as correspondentes propriedades da distribuição angular e dos momentos **D** são:

a) $\langle D_{mL}^j \rangle^* = (-)^{m-L} \langle D_{-m-L}^j \rangle$ (condição de realidade da distribuição angular).

b) $\bar{I}(\alpha\beta\gamma\chi_1\chi_2) = \bar{I}(\pi+\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma, \chi_1\chi_2)$

e

$\langle D_{mL}^j \rangle = (-)^{j+L} \langle D_{m-L}^j \rangle$ (conservação da paridade no decaimento)

c) $\langle D_{mL}^j \rangle = (-)^{j+m} \langle D_{-mL}^j \rangle$ (conservação da paridade no processo de produção).

APENDICE

1.1 - Adição de Momentos Angulares

Na Mecânica Clássica, somamos dois momentos angulares em um momento angular total de maneira que os vetores momentos angulares são somados vetorialmente. Na Mecânica Quântica, temos que somar os dois operadores \vec{J}_a e \vec{J}_b de momento angular. O operador resultante J age no espaço produto dos dois espaços de Hilbert que correspondem a cada um dos operadores \vec{J}_a e \vec{J}_b .

Assim, $\vec{J}_a + \vec{J}_b = \vec{J}$ em que as dimensões dos espaços de Hilbert correspondentes a \vec{J}_a , \vec{J}_b e \vec{J} são $(2j_a + 1)$, $(2j_b + 1)$ e $(2j_a + 1)(2j_b + 1)$.

Denotamos por $|j_a m_a\rangle$ os autovetores dos operadores $J^2_{(a)}$ e $J_{z(a)}$ e por $|j_b m_b\rangle$ os autovetores de $J^2_{(b)}$ e $J_{z(b)}$. O vetor $|j_a m_a j_b m_b\rangle$ é um autovetor de J_z (terceira componente do momento angular total) mas não é sempre um autovetor de $J^2 = (J_{x(a)} \oplus J_{x(b)})^2 + (J_{y(a)} \oplus J_{y(b)})^2 + (J_{z(a)} \oplus J_{z(b)})^2$. Entretanto podemos formar autovetores de J^2 e J_z combinando os vetores $|j_a m_a j_b m_b\rangle$ tal que

$$|JM, j_a, j_b\rangle = \sum_{m_a} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle |j_a m_a j_b m_b\rangle$$

com $M = m_a + m_b$ e J podendo assumir qualquer dos seguintes valores $|j_a - j_b|, |j_a - j_b| + 1, \dots, j_a + j_b$.

Os coeficientes $\langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle$ são conhecidos como coeficientes de Clebsch-Gordon.

Devemos ter

$$(2j_a + 1)(2j_b + 1) = \sum_{J=|j_a-j_b|}^{j_a+j_b} (2J + 1)$$

isto é a dimensão do espaço produto é a soma das dimensões dos espaços dos momentos angulares totais separados. Isto corresponde a decompor o espaço produto em subespaços irredutíveis.

1.2 - Propriedades dos coeficientes de Clebsch-Gordon

1) Relações de ortogonalidade

$$\sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle \langle j_a m_a j_b m_b | J' M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$$

$$\sum_{JM} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle \langle j_a m'_a j_b m'_b | JM \rangle = \delta_{m_a m'_a} \delta_{m_b m'_b}$$

2) Os coeficientes de Clebsch-Gordon podem ser escolhidos tais que sejam reais

$$3) \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle = (-)^{J-j_a-j_b} \langle j_b m_b j_a m_a | JM \rangle$$

$$4) \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle = (-)^{J-j_a-j_b} \langle j_a m_a j_b m_b | J-M \rangle$$

isto é $\langle j_a 0 j_b 0 | J0 \rangle = 0$ quando $J-j_a-j_b$ é ímpar

$$5) \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle = (-)^{j_b+m_b} \left(\frac{2J+1}{2j_a+1} \right)^{1/2} \langle J-M j_b m_b | j_a m_a \rangle$$

$$6) \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle = (-)^{j_a+m_a} \left(\frac{2J+1}{2j_b+1} \right)^{1/2} \langle j_a m_a J-M | j_b m_b \rangle$$

Alguns coeficientes de Clebsch-Gordon e valores dos harmônicos esféricos usados frequentemente são apresentados nas tabelas seguintes

Harmonicos Esfericos

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$P_l^m(\cos \theta) = (-1)^m \sin^m \theta \left[\left(\frac{d}{d(\cos \theta)} \right)^m P_l(\cos \theta) \right]; \quad (m \leq l)$$

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \left[\left(\frac{d}{d(\cos \theta)} \right)^l (-\sin^2 \theta)^l \right]$$

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m [Y_l^m(\theta, \phi)]^*$$

$$P_l^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta)$$

$$l = 0 \quad Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$l = 1 \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$l = 2 \quad Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$l = 3 \quad Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \quad Y_3^1 = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\phi}$$

$$Y_3^2 = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{2i\phi} \quad Y_3^3 = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\phi}$$

Funções d_{lm}^j , para $j \leq 2$

$$j = \frac{1}{2} \quad d_{1/2, 1/2} = \cos \frac{\beta}{2}, \quad d_{1/2, -1/2} = -\sin \frac{\beta}{2}$$

$$j = 1 \quad d_{11} = \frac{1 + \cos \beta}{2}, \quad d_{01} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$$

$$d_{1, -1} = \frac{1 - \cos \beta}{2}, \quad d_{00} = \cos \beta$$

$$j = \frac{3}{2} \quad d_{3/2, 3/2} = \frac{1 + \cos \beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \quad d_{3/2, -3/2} = -\frac{1 - \cos \beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$d_{3/2, 1/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}, \quad d_{3/2, -1/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$d_{1/2, 1/2} = \frac{3 \cos \beta - 1}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \quad d_{1/2, -1/2} = -\frac{3 \cos \beta + 1}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$j = 2 \quad d_{22} = \left(\frac{1 + \cos \beta}{2} \right)^2, \quad d_{2, -2} = \left(\frac{1 - \cos \beta}{2} \right)^2$$

$$d_{21} = -\frac{1 + \cos \beta}{2} \sin \beta, \quad d_{2, -1} = -\frac{1 - \cos \beta}{2} \sin \beta$$

$$d_{11} = \frac{1 + \cos \beta}{2} (2 \cos \beta - 1), \quad d_{1, -1} = \frac{1 - \cos \beta}{2} (2 \cos \beta + 1)$$

$$d_{20} = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \beta, \quad d_{10} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \beta \cos \beta$$

$$d_{00} = \frac{3 \cos^2 \beta - 1}{2}$$

INDICE

1 - INTRODUÇÃO

1.1- Rotações e momento angular	1
Representações do grupo das rotações	5
Propriedades das funções D e alguns valores especiais	8
Significado das funções D	10
1.2- Estados puros e mistos	11
Propriedades da matriz densidade	13
Tensores estatísticos	16
Significado dos tensores estatísticos	26
Propriedades do operador Q_M^J	27
Generalização da matriz densidade e dos tensores estatísticos	30
1.3- Formalismo do espalhamento	33
Simetrias e regras de seleção	38
Simetrias especiais	42

2 - FORMALISMO DE HELICIDADE

2.1- Transformações de Poincaré	45
Representações do grupo de Poincaré	51
Rotação de Wigner	53
2.2- Estados de helicidade para uma e duas partículas e a relação entre eles	56
Sistema de duas partículas	63
Relação entre os estados de helicidade do sistema de duas partículas e os estados de helicidade correspondentes a cada uma das partículas	66
Operação paridade	68
Operação reversão do tempo	69
Operação permutação	69
Autoestados dos operadores C e G	72
2.3- Estados de helicidade para um sistema de muitas partículas	
Operação paridade	78

Operação reversão do tempo	78
Base do momento angular	78
3 - REAÇÕES	
3.1- Amplitudes de espalhamento	85
Amplitudes de refletividade	91
3.2- Desenvolvimento em ondas parciais	94
Base do momento angular	97
3.3- Seção de choque	100
3.4- Reações com o estado inicial não polarizado	108
3.5- Reações com o estado inicial polarizado	114
Conservação da paridade	114
4 - DECAIMENTO	
4.1- Decaimento em duas partículas com conservação da paridade	120
4.2- Decaimento em tres partículas com conservação da paridade	129
APENDICE	
1.1- Adição de momentos angulares	137
1.2- Propriedades dos coeficientes de Clebsch-Gordon	138
Tabela dos coeficientes de Clebsch-Gordon	139
Tabela dos harmônicos esféricos , e funções d_{mm}^j	140

Leitura Aconselhada

- 1- J. Werle, Relativistic Theory of Reactions - ,
(Model Independent Methods) - North-Holland (1966)
- 2- A.D. Martin and T.D. Spearman, Elementary Particle Theory,
North - Holland (1970)
- 3- S.U.Chung, Spin Formalisms, Yellow CERN Report, CERN 71-8
(1971)
- 4- M.G.Doncel, P. Minnaert, L. Michel, Fortschritte der Physik
24 (1976) 259
- 5- J.D. Hansen, G.T. Jones, G. Otter, G. Rudolph, Nucl. Phys.
B81 (1974) 403